Nivel Secundario- Álgebra y Funciones

Problema 1: La bruja Jurdana.

Material: Juego de cartas españolas sin comodines.

Nº de jugadores: Uno o más.

Objetivos: Hallar el valor de variables y agilizar el cálculo mental.

Descripción: El jugador elije del mazo de cartas españolas una carta sin decir que carta es.

Luego multiplica el número de la carta por dos, después le suma cinco al resultado y vuelve a multiplicar por dos, si es de **COPA**, deberá sumar cuatro al resultado, si es de **ORO** suma dos, si es de **ESPADA** suma uno y si es de **BASTO** suma tres. Una vez hecho esto le dice el resultado al tutor encargado del juego. El tutor "adivina" que carta tiene el jugador.

Pase un voluntario. Lo hace.

¿Quién puede develar el truco?

Resolución:

Para este problema se utiliza un juego de cartas españolas que tiene cuatro palos diferentes: **espada**, **oro**, **copa** y **basto**. Las cartas van desde el 1 al 12. Se establece entonces que la variable $x : 1 \leq x \leq 12$.

Cuando un jugador elige al azar una carta x de determinado palo (sin mostrarle a nadie la carta) a x se le deben realizar un número finito de operaciones que se indican, de manera que se obtiene esta expresión (que es un número pues se conoce el valor de x):

$$(2x+5).2 = 4x+10$$

A continuación, dependiendo del palo de la carta seleccionada, a esa expresión se le suma:

- 1 si la carta es de **espada**, así $4x+11$ (número impar)
- 2 si es de **oro**, $4x+12$ (número par)
- 3 si la carta es de **basto**, $4x+13$ (número impar)
- 4 si es de **copa**, así $4x+14$ (número par)

El jugador dice en voz alta que número obtuvo y el tutor "adivina" la carta x de determinado palo ¿Cómo el tutor pudo "adivinar" qué carta eligió el jugador?

Se observa que el jugador puede lograr un número impar o un número par, de allí que ya se sabe si se sumó "1, 3" o "2, 4" respectivamente. Entonces el palo puede ser "**espada** o **basto**", "**copa** u **oro**" ¿De qué manera se decide qué palo es?

Por ejemplo el jugador dice el número:

- **31**. Es un número impar luego se busca el múltiplo de 4 más cercano, en este caso el 32. Como el número del jugador es menor que el múltiplo encontrado se sabe que la carta es de **espada** para lograr calcular el número de la carta al múltiplo obtenido se le resta 12. En este caso 32 – 12 = 20, se lo divide en 4 y el resultado es el número de carta: **“5 de espada”**.
- **33**. Es un número impar luego se busca el múltiplo de 4 más cercano, en este caso nuevamente es el 32. Como el número del jugador es mayor que el múltiplo encontrado se sabe que la carta es de **basto** para lograr calcular el número de la carta al múltiplo obtenido se le resta 12. En este caso 32 – 12 = 20, se lo divide en 4 y el resultado es el número de carta: **“5 de basto”**.
- **32**. Es un número par y múltiplo de 4. Luego se sabe con certeza que la carta es de **oro.** Al número de la carta se le resta 12 y se obtiene 32 – 12 = 20, se lo divide en 4 y el resultado es el número de carta: **“5 de oro”**.
- **34**. Es par y NO es múltiplo de 4. Luego la carta es de **copa.** Al número del jugador se le resta 14, 34 – 14 = 20, a ese resultado se lo divide en 4 y se obtiene el número de carta. En este caso: **“5 de copa”**.

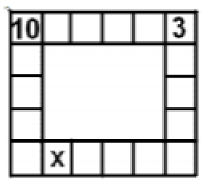
De esta manera, se podrá determinar qué carta obtuvo el jugador.

Tener en cuenta que los números que el jugador puede obtener son desde 15 hasta 62.

Problema 2:

Eva quiere escribir un número en cada una de las celdas del borde de una tabla de 5x6. En cada celda, el número que escribe es igual a la suma de los dos números de las celdas con las que aquella comparte un lado. Dos de los números se dan en la figura. ¿Qué número escribirá en la celda marcada con x?

A) 10 B) 7 C) 13 D) -13 E) -3



Resolución:

Para este problema se rellenan los casilleros vacíos con variables que serán posibles de determinar mediante ecuaciones en donde tendrá en cuenta que la regla redactada en el enunciado:

10	a	b	c	d	3
e					
f					
g					
h	X				

Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} e+a=10 \rightarrow e+7=10 \rightarrow e=3 \ (3) \\ 10+b=a \rightarrow a=7 \ (2) \\ a+c=b \rightarrow 7+c=-3 \rightarrow c=-10 \ (4) \ \text{Luego} \ d=-7 \ (5) \\ \left.\begin{array}{l} b+d=c \\ c+3=d \end{array}\right\} \ b+c+3=c \rightarrow b=-3 \ (1) \\ f+10=e \rightarrow f=3-10 \rightarrow f=-7 \ (6) \\ h+f=g \\ x+g=h \\ e+g=f \rightarrow g=f-e \rightarrow g=-10 \ (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h+f=g \rightarrow h=-10+7 \rightarrow h=-3 \ (8) \\ x+g=h \end{cases}$$

Reemplazo en $x+g=g-(-7) \rightarrow x=7 \ (9)$

Luego **la respuesta correcta es B).**

Problema 3:

Las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 305 = 0$ son n y m ¿Cuál es el valor de $n^2 + 2m$?

A) 309 B) 306 C) 307 D) 308 E) Ninguna

Resolución:

Lo primero que se debe hacer es calcular las raíces de la ecuación:

Se identifica $a = 1$, $b = -2$, $c = -305$.

Las soluciones de la ecuación se calculan:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-305)}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 + 4(305)}}{2} = n \ , \qquad x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 + 4(305)}}{2} = m$$

$$n^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{4 + 4(305)}}{2}\right)^2 = \frac{4 + 2.2.\sqrt{4(1 + 305)} + \left[\sqrt{4(1 + 305)}\right]^2}{4}$$

se aplican propiedad distributiva, propiedad de la potencia y desarrollo de un binomio al cuadrado

$$n^2 = \frac{4 + 8\sqrt{306} + 4(306)}{4} = 1 + 2\sqrt{306} + 306$$

Obtenidas las expresiones se calcula:

$$n^2 + 2\,m = 1 + 2\sqrt{306} + 306 + 2\left(\frac{2 - \sqrt{4 + 4(305)}}{2}\right)$$

$$n^2 + 2\,m = 1 + 2\sqrt{306} + 306 + 2 - 2\sqrt{306}$$

$$n^2 + 2\,m = 1 + 306 + 2$$

$$\boxed{n^2 + 2\,m = 309}$$

¿Qué sucedería si se intercambian los valores de n por m?

Problema 4:

Sea f una función tal que $f(x+y) = 2f(x).f(y)$ para todos los enteros x, y. Si $f(1) = \frac{1}{3}$, entonces el valor de $f(0) + f(1) + f(2) : f(3)$ es

A) $\frac{10}{6}$ B) $\frac{11}{6}$ C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) Ninguna

Resolución:

Se define una función f tal que $f(x+y) = 2f(x).f(y)$ para todos los enteros x, y.

Sabiendo que $f(1) = \frac{1}{3}$ se pide calcular el valor de $f(0) + f(1) + f(2) : f(3)$.

Para ello

$$f(1) = f(1+0)$$

$$f(1) = 2\,f(1).f(0)$$

$$\frac{1}{3} = 2\,.\frac{1}{3}.f(0)$$

$$1 = 2\,.\,f(0)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = f(0)}$$

Se calculan

- $f(2) = f(1+1) = 2f(1).f(1) = 2.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$$\boxed{f(2) = \frac{2}{9}}$$

- $f(3) = f(1+2) = 2f(1).f(2) = 2.\frac{1}{3}.\frac{2}{9} = \frac{4}{27}$

$$\boxed{f(3) = \frac{4}{27}}$$

Se reemplazan los valores hallados en: $f(0) + f(1) + f(2) : f(3)$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2/9}{4/27} = \frac{5}{6} + \frac{2}{9}.\frac{27}{4} = \frac{5}{6} + \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{5+9}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$f(0) + f(1) + f(2) : f(3) = \frac{7}{3}$$

La respuesta correcta es D).

Problema 5:

Un depósito contiene 100 litros de agua y un segundo 120 litros. Para dar servicio a una casa, por el grifo del primer depósito sale un litro de agua por hora, y por el del segundo, 3 litros de agua por hora. ¿En cuántas horas los dos depósitos tendrán la misma cantidad de agua, en cuyo momento se cierran ambos grifos?

A) 6 horas B) 8 horas C) 10 horas D) 12 horas E) nunca puede ocurrir eso

Resolución:

Nótese que la cantidad de agua en el primer depósito transcurridas " t horas" es

100 – t litros de agua.

La cantidad de agua en el segundo depósito transcurridas " t horas" es 120 – 3t litros de agua.

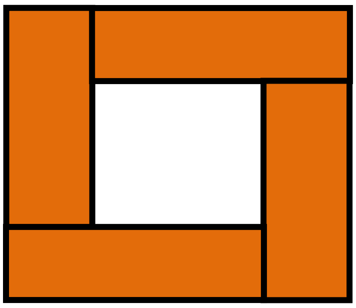
Luego los dos depósitos tendrán la misma cantidad de agua si 100 – t = 120 – 3t.

Se despeja t y se obtiene t = 10 horas.

La respuesta correcta es C).

Problema 6: Construyendo un macetero.

Adriana construyó un macetero cuadrado para poner un arbusto en la entrada de su casa. Para los laterales utilizó dos filas de cuatro ladrillos idénticos cada una. En la figura se esquematiza una vista desde arriba de como los colocó.



Sin embargo, el macetero quedó bastante bajo como para contener las raíces de la planta por lo que fue al corralón a comprar ocho ladrillos con el fin de colocar dos filas más. Al llegar al corralón Adriana notó que había olvidado tomar las medidas de los ladrillos que necesitaba.

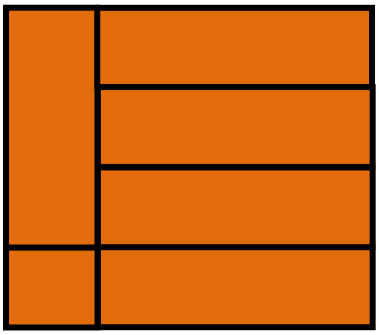
Adriana: Necesito ocho ladrillos para completar un macetero que estoy construyendo, pero me olvidé de tomar las medidas de los ladrillos.

Vendedor: Dígame como construyó el macetero, tal vez podamos deducir el tamaño de los ladrillos que utilizó.

Adriana: Solo recuerdo que el lado exterior del macetero mide 36 cm.

Vendedor: Con esta información no nos alcanza. ¿No recuerda nada más?

Adriana: Si, que construí la base del macetero utilizando cinco ladrillos y un pedazo de otro como en este dibujo.

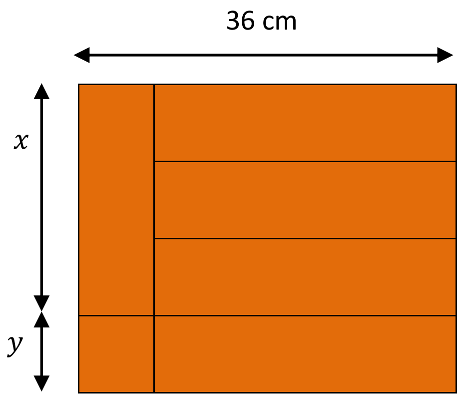


¿Podrían ayudarnos a averiguar el tamaño de los ladrillos?

Resolución:

Se deben calcular las dimensiones del ladrillo. Para ello se definen dos variables

x : Largo del ladrillo, y : ancho del ladrillo



Se observa que $\frac{4}{3}x = 36$, mediante un sencillo cálculo resulta $x = 27$, $y = 36 - 27 = 9$.

Problema 7:

En la igualdad que se muestra a continuación, ¿cuántas veces debe aparecer el término 2018^2 dentro de la raíz cuadrada para que la igualdad sea cierta?

$$(2018^2+2018^2+...+2018^2)^{1/2}=2018^{10}$$

A) 5 B) 8 C) 18 D) 2018^8 E) 2018^{18}

Resolución:

Se debe plantear la ecuación: $\sqrt{x.2018^2} = 2018^{10}$

Se distribuye la raíz cuadrada $\sqrt{x}\sqrt{2018^2} = 2018^{10}$

$$\sqrt{x} = \frac{2018^{10}}{2018}$$

$$x = 2018^{18}$$

La respuesta correcta es la E).

Problema 8:

En la biblioteca, el encargado detectó un libro de 88 páginas con una hoja faltante. Al sumar los números de todas las páginas que quedan el resultado es 3813. ¿Qué número de página deben estar en la hoja que falta?

A)41 y 42 B) 51 y 52 C) 61 y 62 D) 71 y 72 E)23 y 24

Resolución:

Para poder descubrir cuál es la página faltante se debe recordar la expresión matemática que permite calcular la suma de los primeros n números $n.(n+1)/2$, pues si se realiza la suma de las 88 páginas con el libro completo se tendría $\frac{88.89}{2} = 44.89 = 3916$.

Como en realidad se tiene 3813, se hace la diferencia entre esas cantidades:

$$3916 - 3813 = 103$$

Esto quiere decir que las páginas que faltan suman 103.

Como 51 + 52 = 103, luego las páginas faltantes son la 51 y la 52.

La respuesta correcta es B).