De OMA para Profesores y Maestros en actividad

Leñitas Geométricas

Nº 1 - 28 de febrero de 2019

para el Fogón Matemático de los Festivales

"Entender las matemáticas es demostrar formalmente lo que se ve intuitivamente, y ver intuitivamente lo que se demuestra formalmente". *George Polya*

EN LA PRÁCTICA DOCENTE

El Acuerdo Nacional para el Mejoramiento del Aprendizaje en Matemática plantea el punto de partida de una serie de acciones orientadas a llegar a las aulas, y de allí a los hogares, con distintas estrategias. Se busca que aprender matemática se vuelva un desafío atrapante; y esto que propone el documento no carece de sentido. La iniciativa está destinada a promover el mejoramiento sistemático de la educación matemática, lo que a nuestro entender brinda una oportunidad para volver a energizar y focalizar nuestra escuela, cuyo rumbo habría perdido el norte.

La OMA siempre ha estado atenta a la situación para brindar su apoyo. Y más ahora, ante la perspectiva de un Marco Común como base que ayude a resolver los desafíos de nuestro Sistema Educativo, sobre todo en matemática. El Festival de Problemas para Profesores muestra claramente nuestra vocación, y lo organizamos porque entendemos que el problema que nos aqueja está allí (en el profesorado en ejercicio y no solo en el de matemática). Entonces, al menos en una gran parte, también está allí la solución.

Este profesorado sabe y necesita recordar que las ideas, los conceptos y métodos de la matemática ofrecen una gran riqueza de contenidos visuales, representables –intuitivamente– en forma geométrica. Así, su utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo del material al que se refieren tales conceptos o métodos como en su manipulación. Aunque, por sobre todo, es una herramienta útil para la resolución de los problemas.

Como lo señaló el doctor Alberto Calderón, las ideas básicas del estudio elemental, por ejemplo, orden, distancia, operaciones entre números, lugares geométricos, nacen de situaciones bien concretas y visuales. Todo buen docente de matemática sabe la utilidad de atender a tal origen concreto cuando quiere manejar con destreza los objetos que tienen cierto nivel de abstracción. Esta forma de actuar atendiendo explícitamente a las posibles representaciones concretas constituye lo que en matemáticas denominamos *visualización*. La visualización matemática debiera ser una herramienta intelectual a desarrollar en los alumnos. Un lugar propicio para el autoaprendizaje es la preparación de festivales que incluyan, por ejemplo, construcciones geométricas.

En esta entrega y por varios números más seguiremos el sendero que marcó el Doctor Miguel de Guzmán en el Seminario **la Visualización como Método de Resolución de Problemas**[1], dentro de los Seminarios Internacionales que se realizaron hasta noviembre de 2017 y que pensamos retomar el próximo mes de noviembre.

Miguel de Guzmán nos trajo **La Geometría del Papel** en años marcados por la influencia bourbakista en educación y fue un interesante desafío que aún continúa. Nos mostró una geometría de física de ensayos.

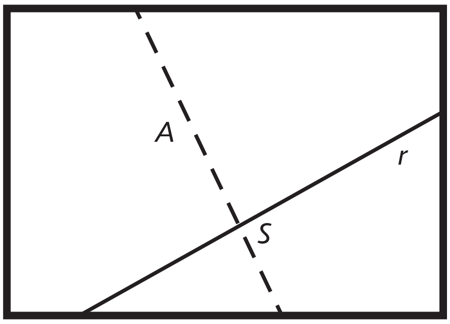
"Euclides no tenía para sus clases en Alejandría la abundancia de papel que nosotros hoy disfrutamos. Pero seguro que de haber dispuesto de papel lo hubiera utilizado bien a fondo", dijo De Guzmán, para luego interrogarnos: ¿qué se puede hacer plegando papel? Muchas cosas, como verás, y muy interesantes.

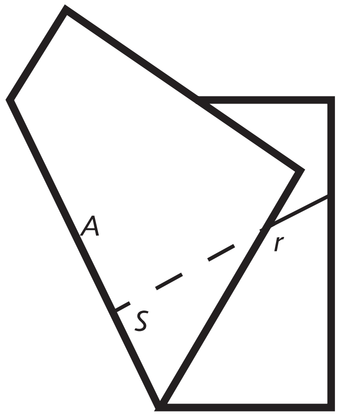
Empecemos por visualizar

Señala una recta en tu hoja, plegando el papel. Luego señala un punto cualquiera en el papel. ¿Cómo trazar la perpendicular por A a tu recta r? Muy fácil. Pliegas el papel de modo que el pliegue pase por A y que r venga a coincidir consigo misma, como indica la figura. Esto es fácil de conseguir haciendo intentonas y no plegando

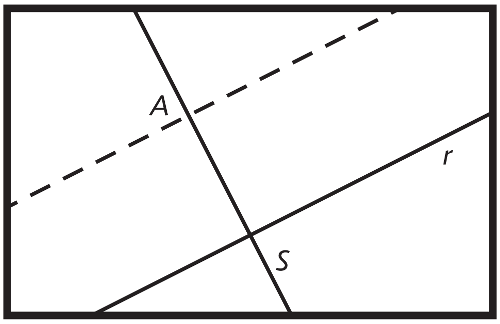
1 Seminario que desarrolló entre el 18 y el 22 de noviembre de 1996, en San Miguel de Tucumán, y que nombró de esta misma manera. Formó parte de los Seminarios Internacionales que organizó el Departamento de Educación de OMA, a cargo de la Licenciada Norma Pietrocola.

fuerte hasta que estés seguro de que al hacerlo va a suceder lo que tú quieres. Al desplegar el papel es claro que los ángulos en *S* son iguales y rectos, ¿no?





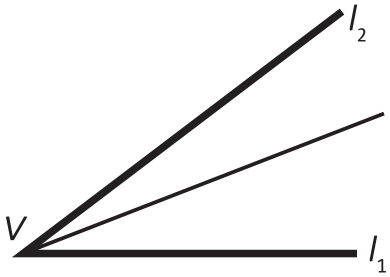
¿Cómo trazas una paralela por *A* a *r*? Ahora es fácil. Piensa... No tienes más que trazar una perpendicular por *A* a *AS* y ya la tienes: el pliegue que resulta es paralelo a *r*.

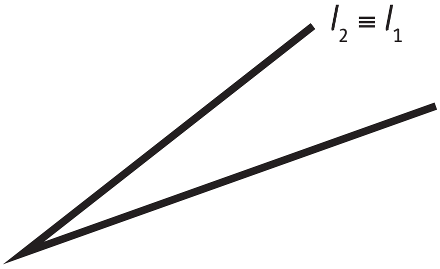


Tienes dos puntos *M* y *N* en tu hoja. ¿Cómo vas a hallar el punto medio? Apenas tendrás que pensarlo. Pliegas por *MN*. Despliegas y luego pliegas de nuevo, de modo que *M* coincida con *N*. Se forma un pliegue nuevo, y la intersección de los dos pliegues te da el punto medio.

Para los desafíos busca una estrategia

Señala un ángulo en tu papel. ¿Cómo trazar la bisectriz? Está claro que solo tienes que hacer un pliegue por el vértice *V*, de modo que el lado l_1 vaya a coincidir con el otro, l_2. El pliegue te da la bisectriz claramente.

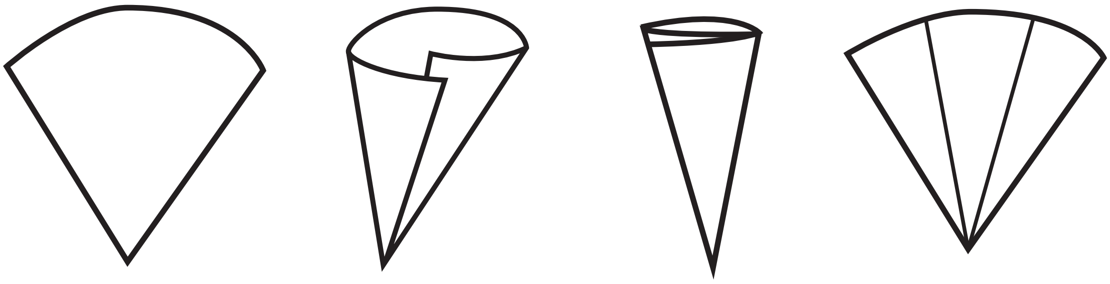




Y casi sin quererlo entró de lleno al Lugar Geométrico de los… Trazando la bisectriz ya sabes cómo dividir un ángulo en dos partes iguales, y repitiendo el proceso, en cuatro partes. Con el papel puedes resolver un problema famoso que a los griegos les produjo muchos quebraderos de cabeza: dividir un ángulo dado en tres partes iguales. Inténtalo por tu cuenta.

¿Cómo lo harás en tu papel? Seguro que se te ocurre. Recortas el ángulo, formas un cucurucho, un cono cuyo vértice sea el del ángulo, y ajustas los lados del ángulo de tal forma que al aplastar el cucurucho salgan dos pliegues que coincidan con los lados. Formar bien el cucurucho no es cosa del todo fácil.

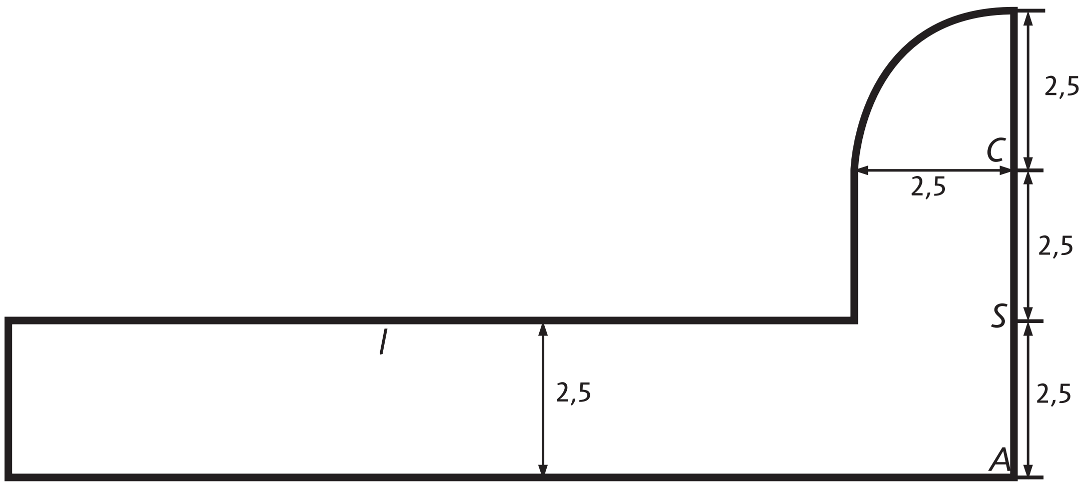
Debes proceder por intentonas, abriendo más o menos el cucurucho antes de aplastarlo para que se formen los pliegues adecuadamente, como indican las figuras.



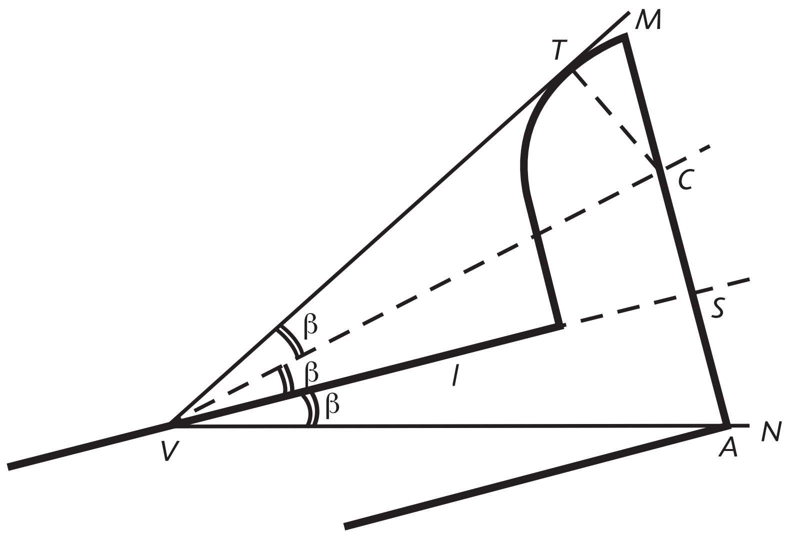
Está bastante claro que si al aplastarlo has conseguido que los pliegues queden de esa manera, entonces al desplegarlo los tres ángulos formados son iguales. Y así has dividido el ángulo en tres partes iguales.

Un poco de historia

Los griegos construyeron instrumentos especiales para dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. ¿Por qué no haces uno tú mismo? Es muy fácil. En una cartulina recorta una figura con el patrón siguiente.



Esta figura está construida como se indica. El arco de la punta es un arco de circunferencia con centro en *C*. Ahora, si te dan un ángulo cualquiera como este *MVN*, colocas tu instrumento como se indica, de modo que el lado *l* apoye por el vértice *V*, *A* esté sobre el lado inferior del ángulo dado y el arco de circunferencia de arriba quede tangente al otro lado. Entonces señalas en el papel del ángulo los puntos donde van a parar *S* y *C*. Si *T* es el punto de tangencia, te será muy fácil demostrar que los tres triángulos rectángulos *VTC*, *VCS* y *VSA* son iguales, y así los tres ángulos señalados en *V* son iguales. De este modo, has dividido el ángulo dado en tres partes iguales.



Los griegos del siglo III a. de C. conocieron este instrumento pero no los satisfacía. Querían una solución del problema de la trisección que no utilizara más que la regla y el compás en la forma normal. No lo sabían..., pero pedían demasiado. En el siglo XIX se logró demostrar que tal construcción es imposible. ¿Cómo? A grandes rasgos, se hizo como se describe a continuación.

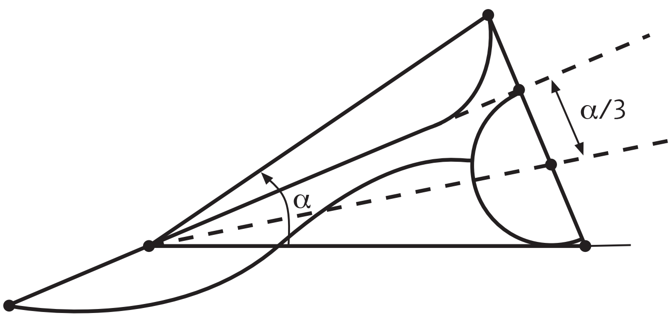
El problema de dividir un ángulo cualquiera con regla y compás es equivalente al problema de construir con regla y compás un segmento cuya longitud es solución de una cierta ecuación de tercer grado, a partir de segmentos de longitud igual a los coeficientes que aparecen en esta ecuación de tercer grado.

Se observa a continuación que, con regla y compás, a partir de longitudes a_1, a_2, … a_n dadas, solo se pueden construir segmentos cuya longitud se expresa mediante expresiones algebraicas (polinomios divididos por polinomios) de las longitudes dadas, posiblemente junto con raíces cuadradas de tales expresiones. Se comprueba finalmente que la solución de la ecuación cúbica inicial no puede expresarse mediante ninguna expresión de este tipo. Así, no se puede construir solo con regla y compás.

En esta misma forma se llegó a demostrar también que el famoso problema de Delfos (construir, solo con regla y compás, un cubo de volumen doble que otro dado) era igualmente imposible.

Claudi Alsina, en *Vitaminas matemáticas* (Editorial Ariel), desarrolla el **hacha india** para trisecar el ángulo, (ver en página 87) y lo explica en una forma muy bonita.

En 1835 se inventó este instrumento de dibujo que ve en la figura y por su forma fue denominado el hacha india.

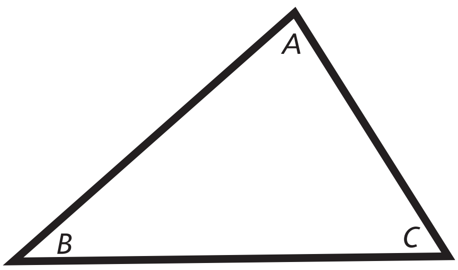


Nótese que en este hacha hay un segmento dividido en tres partes iguales, una recta es perpendicular y un semicírculo. Cuando se coloca el hacha en el ángulo dado en la posición indicada, entonces dos de sus puntos marcan la trisección deseada: es suficiente que mire con cariño los triángulos rectángulos escondidos detrás de la figura.

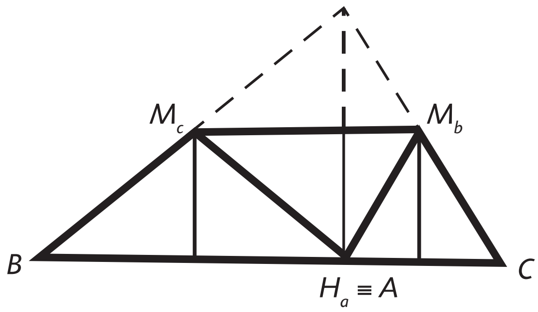
También puede hacer la trisección exacta del ángulo siguiendo el llamado proceso de Arquímedes, que puede llevar a cabo materialmente con una regla, un compás, una transparencia y un rotulador. Lo veremos más adelante

Recordemos algunos resultados de la **geometría del triángulo y el círculo**

Toma una hoja de papel y una tijera. Recorta un triángulo bastante grande, que no sea demasiado regular, ni equilátero, ni isósceles, ni rectángulo... Algo parecido a este pero en grande.

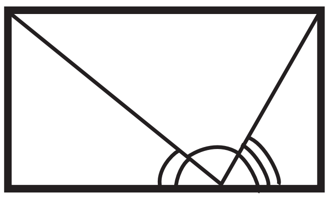


Para no enredarnos con los vértices, ponles letras *A, B, C*. Vamos a aprovechar lo que sabemos hacer plegando, para demostrar unas cuantas propiedades del triángulo. Traza la perpendicular a *BC* por *A*, es decir, la altura correspondiente al vértice *A*. El pie se va a llamar H_a. Pliega el triángulo por la mitad de la altura, de modo que vaya a coincidir con H_a. Así:



Tenemos un nuevo desafío: **juguemos con la figura**

Ahora comprueba que puedes plegar por M_c de modo que *B* vaya a parar a H_a. ¿Podrías demostrar que efectivamente se tiene que poder plegar así? Solo se trata de utilizar la igualdad de unos cuantos triángulos. Así te ha quedado:



El área de *ABC*, ¿es la mitad del área del rectángulo? ¿Hay más observaciones interesantes que lleven a resultados tan importantes?

Mándanos las respuestas que imaginas.

Hasta la próxima.

Aquí, más leñitas para poner en el fogón

1. Dibujar el lugar geométrico del tercer vértice de los triángulos equivalentes que tienen la base común. (Claro está, se trata de una recta paralela a la base).

2. El lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas iguales que pueden trazarse en una circunferencia dada. (Es otra concéntrica con la dada).

3. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes a dos puntos dados. (Es la mediatriz del segmento determinado por los puntos dados).

4. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes a dos rectas dadas no paralelas. ¿Por qué son dos rectas perpendiculares?