Soluciones Taller: Números y Operaciones

1. **¿Cuál es el resto de la división $(3^{20}.\ 5^{30} - 2):15$?**

   A) 0 B) 2 C) 5 D) 8 E) 13

Teoría necesaria

División entera.

Algoritmo de la División Entera

Sean $a \in Z$ y $b \in N$, entonces $\exists\, r, q \in Z$ tales que $a = b.q + r$ con $0 \le r < b$ y además, q y r son únicos.

Corolario

Sean $a, b \in Z$ y $b \neq 0$, entonces $\exists\, r, q \in Z$ tales que $a = b.q + r$ con $0 \le r < |b|$ y además, q y r son únicos.

Solución

$$\boldsymbol{D = d.c + r,\ 0 \le r < d}$$

$$3^{20}.5^{30} - 2 = 15.c + r$$

$$3^{20}.5^{20}.5^{10} - 2 = 15.c + r$$

$$15^{20}.5^{10} - 15.c = 2 + r$$

Para que se verifique la igualdad el segundo miembro debe ser múltiplo de 15 entonces

$2 + r = 15.k$ con $k \in N$. Si $r = 13 \in N$ se verifica la igualdad, entonces 13 es el resto de la división.

Respuesta E) 13

2. **Los enteros positivos x e y no tienen divisores comunes mayores que 1, y se cumple que $x.y = 300$. ¿Cuál es el menor valor posible de $x + y$?**

   A) 30 B) 35 C) 37 D) 56 E) 79

Teoría necesaria

- En la teoría de números, el teorema fundamental de la Aritmética afirma que todo entero positivo se puede representar como producto de factores primos de una forma única, salvo el orden.

- Múltiplos: Un número $a \in N$ es múltiplo de otro $b \in N$ si y sólo si existe un número $c \in N$ tal que $a = b \cdot c$
- Dos números son coprimos o primos entre si cuando no tienen divisores en común (excepto 1 y -1).

Solución

$$x.y = 300$$
$$x.y = 2.150$$
$$x.y = 2.\ 15.\ 10$$
$$x.y = 2.3.5.2.5$$
$$x.y = 2^2.3.5^2$$

Si $x\ e\ y$ son coprimos entonces no deben tener divisores (distinto de 1) comunes. Entonces

$x = 2^2.3$ e $y = 5^2$ para estos valores se obtiene el menor valor posible de $x + y$

$$x + y = 12 + 25$$
$$x + y = 37$$

Respuesta C) 37

3. **El hermano mayor le propone un acertijo al pequeño: "imagina que son las 7:00hs de la mañana del lunes y que pasan 2018 horas a partir de ese momento". ¿Qué día de la semana y qué hora será entonces?**

   A) Lunes, 9:00hs B) Martes, 9:00hs C) Miércoles, 9:00hs.

   D) Lunes, 21:00hs E) Martes, 21:00hs.

Teoría necesaria

- **Congruencia**: Dado m un número entero, diremos que dos números enteros a y b son congruentes módulo m si $a - b$ es múltiplo de m.

$$a \equiv b(m) \text{ si y sólo si } a - b = c.m \text{ con } c \in \mathrm{N}$$

$$2018 \equiv 2\ (24)$$

2018 = 84 · 24 + 2

Pasaron 84 días y dos horas

84 = 12 · 7

Pasaron 12 semanas completas más 2 horas

Entonces dentro de 2018 días será lunes 9:00 hs **Respuesta: A) Lunes, 9:00hs**

4. Con los dígitos del 1 al 9 se forman números **de hasta 3 cifras diferentes**.

a) ¿Cuáles son los tres menores? Mencione tres divisores de la suma de los mismos.

Los tres números menores

1	**2**	**3**

La suma es 1 + 2 + 3 = 6

Divisores de 6 son

1	**2**	**3**	**6**

b) ¿Cuáles son los tres mayores?

Mencione tres divisores primos de la suma de los mismos.

Los tres números mayores

987	**986**	**985**

La suma es

987
986
985
2958

Divisores primos de 2958 son

2	**3**	**17**	**29**

5. Se quiere ubicar en cada casillero los números naturales del 1 al 16, de modo que la suma de cada fila y de cada columna sea la misma.

¿Cuánto debe ser el valor de la suma de los números de una fila?

Existe una manera rápida de calcular la suma de cada fila y columna. Si la sabes explica, si no busca en internet como hacerlo.

Ubica los números y luego compara con tu compañero cual es la manera rápida de completar el cuadrado con los números pedidos.

Teoría necesaria

Un **Cuadrado Mágico** es una cuadricula de forma cuadrada, y como tal está dividida en celda cuadradas menores, es decir es una grilla de n celdas verticales por n celdas horizontales, en donde a **n** se le llama Grado del Cuadrado. El cuadrado de aquí abajo tiene grado 4 porque posee 4 celdas verticales por 4 celdas horizontales.

Cuadrado de 4 celdas verticales por 4 horizontales. Posee 16 celdas en total, el grado es 4

Para convertir a esta grilla en un cuadrado mágico, debemos colocar adentro de cada celda un numero natural entre el 1 y el 16 sin repetir, de tal manera que la suma de los mismo en forma vertical y horizontal sea siempre igual, a dicho valor se lo conoce como constante mágica del cuadrado.

El valor de las constantes se puede obtener con la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{n.(n^2+1)}{2}$$

Por ejemplo para el grado $n = 4$, la suma deber ser igual:

$$S_4 = \frac{4.(4^2+1)}{2} = 2.17 = 34$$

Forma fácil de resolver

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16

8 veces 17

1 + 16 = 17
2 + 15 = 17
. . .
8 + 9 = 17

Respuesta: El valor de la suma de los números de una fila es 34

Resolución Cuadrado Mágico de Orden 4. Inicialmente llenamos el cuadrado con los números naturales en forma correlativa comenzando desde el 1 en la celda superior izquierda y avanzando hacia la derecha y hacia abajo (es más fácil ver la figura de abajo que explicar este paso)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Trazamos las dos diagonales como indica la figura siguiente

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Entonces los números que quedan afuera de las diagonales, que son el 2,3,5,8,9,12,14,15 no se mueve y quedan donde están, y los otros que son cortados por ambas diagonales se invierten de posición POR SU SIMÉTRICO. Analizar la figura de abajo, donde está el cuadrado resuelto, observar como el 1 pasa donde está el 16 y viceversa. Igual para el 4 con el 13, el 10 con el 7 y 6 con el 11.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Si el orden de cuadrado es 8, 16 , 24, …etc., a la grilla se la debe dividir en cuadrados más chicos de 4 celdas cada uno, y efectuar este mismo método estudiando a todo el cuadrado grande. Solo hay que observar bien y ver cuál es el simétrico de los números que son cortados por las diagonales.

Extraído de:https://historiaybiografias.com/cuadrados_magicos1/