

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología



El Área, de Euclides a Lebesgue

Autor: Elio Neri Carrazano

San Miguel de Tucumán. Julio de 2023

Índice general

Introducción	3
Capítulo 1. El área y la geometría en la antigüedad	
1.1. Los primeros pasos	5
1.2. La medida de longitudes en Los Elementos	6
1.3. La medida de áreas en Los Elementos	11
1.4. El método de exhaustión	13
Capítulo 2. El área, la intuición y la integral	
2.1. De Grecia a Europa	18
2.2. El método de Buenaventura Cavalieri	19
2.3. La aritmética de segmentos de René Descartes	23
2.4. El método de Jhon Wallis y el área del rectángulo	25
2.5. El método de Pierre de Fermat	28
2.6. El método de Isaac Newton	29
2.7. El método de Gottfried Von Leibnitz	31
Capítulo 3. El área y el estudio de la frontera	
3.1. Desde Leonard Euler a Augustin Cauchy	35
3.2. La integral de Augustin Cauchy	36
3.3. Las contribuciones de Lejeune Dirichlet y Rudolph Lipschitz	38
3.4. La integral de Bernhard Riemann	40
3.5. Los conjuntos nunca densos, de primera especie y de medida cero	42
3.6. La integral y la medida	48
3.7. La integral la derivada	54
Capítulo 4. El área por Henri Lebesgue	
4.1. El área hasta este punto	63
4.2. El área por Henri Lebesgue	64
4.3. Comentarios finales	66
Bibliografía	70

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es exponer la evolución del concepto de área desde una perspectiva histórica mostrando algunas de las ideas más relevantes que ayudaron al desarrollo del concepto desde la antigua Grecia hasta finales del siglo XIX con la definición dada por Henri Lebesgue. En una frase, la intención del trabajo es mostrar cómo el concepto de área se forma a partir de estudiar la realidad haciendo múltiples observaciones, que inicialmente son esquematizadas geoméricamente para hacer los primeros razonamientos que se van haciendo más generales y el lenguaje más analítico y abstracto.

El cuerpo del texto del trabajo intenta mantener una forma deductiva y formal con un lenguaje lo suficientemente simple y concreto evitando la banalización y el sacrificio del rigor y lo suficientemente especializado para facilitar la asimilación rápida el contenido.

Las razones detrás de la elección del tema y la manera de presentarlos son dos:

La primera es mostrar que pocos investigadores sacan un conejo de una galera y que, por supuesto, puede haber algún error, a veces afortunado.

La segunda razón es mostrar cómo se relacionan las diferentes ramas de la matemática y cómo una misma expresión matemática se puede entender de diferente manera según la rama en que se trabaje, por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ aritméticamente es una suma de números, geoméricamente la suma de las áreas de rectángulos de base uno y altura $\frac{1}{2^i}$ y también se puede decir que es el valor de medida asignado a \mathbb{N} por la medida α definida en $P(\mathbb{N})$ como sigue: para $A \in P(\mathbb{N})$ $\alpha(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$.

Como objetivo secundario, si se quiere, en el capítulo 3 se profundiza en el conocimiento de la integral de Riemann de una función sobre un intervalo.

Bajo estas directrices, en el capítulo 1, desde una perspectiva evolutiva, se exponen los logros, en lo que al concepto de área se refiere, obtenidos en la antigua Grecia basándose en la obra considerada cúspide de la matemática griega “Los Elementos”. Para ello, partimos de lo que se entendía por longitud de un segmento y el problema que supuso esto (las magnitudes inconmensurables) para, posteriormente, exponer lo que se entendía por área finalizando con la presentación del método de exhaución que es llamado la integral geométrica.

En el capítulo 2 se aborda el desarrollo del concepto de área entre los siglos XII y XVII que se realizó en un ámbito de practicidad, es decir, en este período el desarrollo fue impulsado por una necesidad práctica. Es así que en este capítulo exponemos algunos métodos propuestos para obtener áreas, todos ellos sin un fuerte sustento teórico y enfocados más o menos en la cuadratura de las curvas $y = x^{\frac{n}{m}}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, y mencionamos algunas ideas

relevantes que ayudaron al nacimiento de la integral.

En el capítulo 3 se aborda el desarrollo del concepto de área entre los siglos XVIII y XIX. En este período se planteó el dilema de la existencia del área de figuras geométricas cuyo contorno, o frontera, no era una curva cerrada continua. El estudio de esta posibilidad requiera mucho más que geometría elemental y se hizo, indirectamente, desde el análisis al profundizar en el concepto de integral. Por tal razón, este capítulo se centra en la evolución de este último concepto. Así, mostramos cómo la integral de Riemann fomenta el estudio y la manipulación de la frontera de un conjunto que tiene área a través de la continuidad de la función a integrar, desembocando en la aparición de medidas, fundamentalmente la de Jordan, que develan el hecho de que el área se puede entender como una función de conjuntos.

Finalmente, en el capítulo 4, haciendo mención a las propiedades más relevantes sobre el concepto develadas hasta finales del siglo XIX, mostramos cómo Lebesgue define el área como una función de conjuntos con ciertas características especiales y finalizamos con un breve comentario sobre el porqué Lebesgue impone dichas condiciones a los conjuntos en su definición. Más concretamente, en el capítulo 4 mostramos cómo Lebesgue define el área limitándose a la practicidad y aplicación del concepto, a la manera de la integral de Riemann y las funciones continuas, dejando de lado cuestiones como los problemas en la frontera, más concernientes a la matemática pura.

Sin más que agregar en esta pequeña introducción cito a Martha Bobadilla que en [1] dice “El terreno fértil de la invención o construcción de matemáticas lo constituyen exploraciones guiadas por intuiciones, aciertos y desaciertos difícilmente asimilables a inferencias propiamente lógicas” y le digo al lector, gracias y disfrute de la obra.

Capítulo 1

El área y la geometría en la antigüedad

1.1 Los primeros pasos

Muchos conceptos matemáticos surgen de la necesidad de resolver cuestiones concretas relacionadas con el mundo físico. Un ejemplo de esto es el concepto de área que, intuitivamente, es asignar una distinción a algún sector o porción del plano que se puede, o se necesita, diferenciar de lo que lo rodea.

Antiguamente, egipcios y babilonios, en su necesidad de obtener áreas para realizar obras civiles, hacían estas distinciones de acuerdo a símbolos que, por convenio, representaban áreas. De esta forma, las necesidades de su mundo físico los empujaron a desarrollar herramientas confiables para cubrir estas necesidades. Una de ellas es la geometría, rama matemática que está muy relacionada con el mundo físico, a tal punto que el significado de la palabra geometría (*γεωμετρία*) es “medición de la tierra”.

Esta primigenia geometría, elemental de figuras simples, les sirvió a estas civilizaciones para obtener lograr su cometido. Según diversas opiniones, en estas civilizaciones no había un particular interés por conocer los principios generales por los cuales se regía esta geometría, cosa que más adelante sí haría la civilización griega.

En la civilización griega el pensamiento filosófico influenciaría fuertemente el naciente pensamiento matemático, lo que se tradujo en un tratamiento más abstracto de la geometría fundamentalmente por lo siguiente:

- La filosofía de los pitagóricos consideraba al número natural como lo único que es número, que existe y que puede describir el universo. Bajo esta cosmovisión, se tiende un puente entre la primigenia geometría y un sistema numérico con un orden y una operación binaria, $(\mathbb{N}, +, <)$.
- Los griegos basaban todo razonamiento geométrico en la lógica y en procesos deductivos que parten de hipótesis que se asumen como verdades innegables; es decir, axiomatizaron la geometría.

A pesar de que el pensamiento griego ayudó a la abstracción de la geometría, también causó en cierta forma un estancamiento. Por ejemplo, los griegos no consideraban a las fracciones como números, contrario a babilonios y egipcios. También, como la geometría pura se ajusta muy bien al tratamiento lógico-deductivo, para los griegos aceptar resultados que no estaban relacionados con la geometría, por ejemplo numéricos, era objeto de

controversia hasta tanto no se daba la prueba geométrica. Esto hizo que se entendieran a los números y sus propiedades en términos geométricos dificultando así el manejo de éstos y sus propiedades (ver libros VII, VIII y IX de “Los Elementos”).

Incluso en la obra más representativa del pensamiento griego, “Los Elementos”, se puede apreciar una limitación y es que sólo expone resultados geométricos que puedan realizarse con regla sin graduar y compás dejando de lado resultados como, por ejemplo, la duplicación del cubo obtenida por Arquitas utilizando un cono recto, un cilindro y un toro.

Dejando de lado los pros y contras del pensamiento griego y enfocándonos en los aportes de esta civilización al estudio y desarrollo del concepto de área se debe decir que los pitagóricos fueron los primeros en medir áreas (magnitud bidimensional para ellos) de forma totalmente abstracta por comparación y superposición de objetos geométricos con la teoría de semejanzas que se basa en la siguiente premisa:

Dadas dos magnitudes geométricas cualesquiera del mismo tipo A y B es posible encontrar dos números $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $nA = mB$.

Obviamente esto no se cumple siempre y el posterior descubrimiento de las magnitudes inconmensurables (que no cumplen la premisa) obligó a la aparición la teoría de proporciones de Eudoxo, basada en la propiedad arquimediana, que le quita importancia a la igualdad $nA = mB$ y considera también las desigualdades $nA < mB$ y $nA > mB$.

Veamos cómo se establece este primer procedimiento geométrico para medir áreas en “Los Elementos”.

En “Los Elementos”, más que darle al área de una figura un valor numérico en sí, se da una relación de tamaño entre las áreas de diferentes figuras.

Por simplicidad, de aquí en adelante se emplearán los términos longitud, área, según sea necesario, para reemplazar el término genérico magnitud uni /bidimensional que emplea Euclides. No se debe olvidar que en este capítulo el significado de la palabra área no será un valor numérico sino, más bien, el tamaño de una figura con respecto a otra.

Sin más que decir damos inicio al proceso de estudio de la evolución del concepto.

1.2. La medida de longitudes en Los Elementos

Antes de mostrar cómo se medían los segmentos, paso necesario para mostrar cómo se trataban las áreas, se adoptará como convenio nombrar al segmento o la figura de la misma forma que a su longitud o área; por ejemplo, A puede representar un segmento o una longitud según el contexto. Esto es necesario ya que la teoría desarrollada en “Los Elementos” es sobre las magnitudes pero también se deben identificar los objetos a los que

se aplica y con este convenio no se entorpece la notación. Tampoco hay que olvidar que solo se dispone de del sistema numérico $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$.

La forma de tratar segmentos y figuras de los griegos estaba gobernada por la premisa pitagórica. La cual, para el caso de los segmentos, asume implícitamente la existencia de un segmento unidad de medida común a todos los demás segmentos ya que, para un par de segmento A y B la igualdad $mA = nB$ $n, m \in \mathbb{N}$ se cumplirá si existe un segmento U tal que $A = nU$, $B = mU$. Así, si se quieren comparar las longitudes de todos los segmentos posibles entre sí de manera exacta usando solo números naturales se debe mostrar que existe el segmento U para poder establecer la relación exacta entre las longitudes. Con este fin los griegos idearon el siguiente proceso llamado de *antiphairesis*:

Sean A y B dos segmentos donde $A > B$ en longitud.

Si B cabe un número k de veces en A se tienen dos posibilidades:

- $kB = A$ con lo que ya se obtiene la relación entre las longitudes y $B = U$ es la medida común máxima entre A y B .
- B cabe un número k de veces en A y sobra un segmento A_1 de menor longitud que B (ver fig. 1.1)

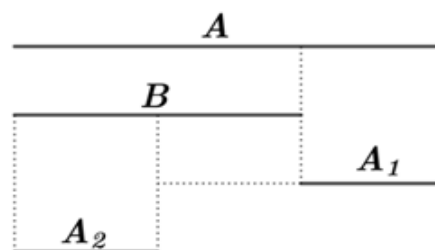


Figura 1.1

Si ocurre lo segundo se sustrae kB de A y se comparan A_1 y B como en el paso anterior. De nuevo se tiene dos posibilidades:

- $B = k_1 A_1$ así $A = k k_1 A_1$ y $A_1 = U$.
- A_1 cabe un número k_1 de veces en B y sobra un segmento A_2 de menor longitud que A_1 .

Si ocurre lo segundo se repite el proceso como en el paso anterior.

Así, si nos encontramos con que existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $A_{r-1} = k_r A_r$ el segmento $A_r = U$ porque el proceso está ideado de forma tal que entre las longitudes de los sucesivos segmentos siempre haya una relación.

Los griegos sabían que existían pares de segmentos para los que existe el $r \in \mathbb{N}$ mencionado que asegura la existencia de $A_r = U$ pero, como el proceso de *antiphairesis* está ligado al dibujo de los segmentos, no podían concluir que siempre existía el $r \in \mathbb{N}$. Así *antiphairesis* da una respuesta a medias a la pregunta sobre la relación exacta entre las longitudes de dos segmentos. Por tal razón, Euclides establece una diferenciación entre los pares de segmentos con el siguiente cuerpo teórico. A continuación, enunciamos las definiciones y proposiciones que se encuentran en los libros “Los Elementos” de Euclides. La numeración que se utiliza, por ejemplo proposición [X.1], significa proposición 1 del libro X

Definición [V.3]:

Razón es la relación mutua que tienen entre sí dos magnitudes de una misma naturaleza.

Definición [X.1]:

Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida.

Proposición [X.5]:

Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Proposición [X.6]:

Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán conmensurables.

A partir de las proposiciones [X.5] y [X.6] se establece que:

Dadas C y D magnitudes, estas son conmensurables si y sólo si existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que vale la razón $C : D :: p : q$ (1)

Así, si suponemos que existe el $r \in \mathbb{N}$ para los segmentos A y B de la figura 1.1, existirán $n, m \in \mathbb{N}$ tales que:

- a) $A = nU$ y $B = mU$
- b) $mA = nB$
- c) $A : B :: n : m$ por (1)

Los apartados a), b) y c) son maneras equivalentes de decir que A y B son conmensurables.

c) Es el núcleo de la teoría de semejanza y muestra la “relación de tamaño” entre las longitudes de A y B . La notación usada se interpreta así: la longitud de B es $\frac{n}{m}$ parte de la longitud de A . Resta ver si esta relación se cumple con pares de segmentos arbitrarios.

Observar que, por definición [X.1], cada segmento U genera la familia de segmentos de la forma por segmentos de la forma $\frac{n}{m}U$ con $n, m \in \mathbb{N}$ que serán comparables. De esta forma, para lograr comparar las longitudes de todos los segmentos entre sí, los griegos necesitan saber si estas familias en realidad eran una sola. Lamentablemente, no es así. Veamos esto:

Sea la relación:

“los pares de segmentos conmensurables (A, B) y (C, D) están relacionados si y sólo si U es unidad de medida común de ambos pares”

Esta es una relación de equivalencia. Veamos la transitividad:

Si U es unidad de medida común de (A, B) y (C, D) y U' lo es de (C, D) y (E, F) existen $k, s \in \mathbb{N}$ tales que $C = kU' = sU$ de donde $U' = \frac{s}{k}U$

Luego será $E = nU$ para algún $n \in \mathbb{N}$, ídem para F , por lo tanto U mide al par (E, F) con

lo que (A, B) y (E, F) estarán relacionados.

Con esta relación de equivalencia queda particionado el conjunto de los pares de segmentos según si sus longitudes cumplen con (1). Como las clases son disjuntas, existirán familias de segmentos cuyos integrantes no estarán relacionados, es decir, no serán conmensurables. Los pitagóricos descubrieron que existen estos pares de segmentos:

Ejemplo 1.1

Si en un cuadrado llamamos A al segmento que corresponde al lado y C al que corresponde a la diagonal, y si, por simplicidad, hacemos la asignación $A \leftrightarrow 1$ entonces $A:C :: 1:\sqrt{2}$, luego no existen los naturales m y n de (1) para el par (A, C) .

Estos pares de segmentos, que fueron llamados inconmensurables, causaron que los griegos consideraran por separado las magnitudes y los números. También fueron parte de las razones por las que los griegos apreciaban a la geometría por sobre la aritmética. Sobra decir que estos segmentos también echaron por tierra la teoría de semejanza.

Un intento de solución a este problema lo ofreció Eudoxo con la teoría de proporciones, quizás motivado por observaciones como la siguiente:

Dados los segmentos A y C de ejemplo 1.1 y los segmentos $B = 2A$ y D diagonal del cuadrado de lado B (ver figura 1.2) se tendrán las razones:

$$A:B :: \frac{1}{2} \text{ y } C:D :: \frac{1}{2}$$

En palabras, las razones son iguales y los segmentos A y C no son conmensurables.

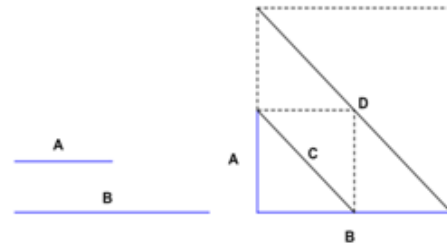


Figura 1.2

Esta observación sugiere que se puede trabajar con segmentos inconmensurables y Eudoxo propuso lo siguiente:

Primero dio la definición [V.4] que con un lenguaje más asequible dice:

Definición [V.4]: (propiedad arquimedea)

Las magnitudes A y B tienen razón si y sólo si existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $nA > B$ y $mB > A$

Con ella estableció en qué condiciones dos magnitudes de un mismo tipo tendrán razón sin importar si son o no conmensurables y pudo dar la siguiente definición que es el corazón de la teoría de proporciones:

Definición [V.5]:

Las magnitudes A y B tendrán la misma razón que las magnitudes C y D si y sólo si dados $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarios se cumplen las 3 siguientes equivalencias:

- $nA > mB$ si y sólo si $nC > mD$

- $mA = nB$ si y sólo si $mC = nD$
- $mA < nB$ si y sólo si $mC < nD$

Lo que expresa esta definición es lo siguiente:

Dados s razón entre A y B , r razón entre C y D , y los conjuntos

$$m_s = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ : \frac{m}{n} < s \right\} \quad M_s = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ : s < \frac{m}{n} \right\} \quad K_s = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ : s = \frac{m}{n} \right\}$$

$$m_r = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ : \frac{m}{n} < r \right\} \quad M_r = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ : r < \frac{m}{n} \right\} \quad K_r = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ : r = \frac{m}{n} \right\}$$

(Los reales positivos) s y r serán iguales si y sólo si $m_s = m_r$, $M_s = M_r$, $K_s = K_r$

Por último, la definición [V.6] nos dice que aquellas magnitudes con igual razón serán proporcionales.

Así, lo segmento A, B, C y D de la figura 1.2 son proporcionales, lo que denotaremos $A : B :: C : D$.

La teoría de proporciones provee una forma de manejar y operar con los segmentos inconmensurables hasta cierto punto pero no da una solución al problema de comparar las longitudes de los segmentos.

En la búsqueda de ofrecer una solución al problema de los inconmensurables también se observó que las áreas de los cuadrados de lados C y A (que denotamos C^2 y A^2) de la figura 1.2 cumplen la igualdad $C^2 = 2A^2$ por lo que en el libro X se da la siguiente definición:

Definición [X.2]:

Dos segmentos son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma magnitud, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan una magnitud común de medida.

Así, en nuestro caso A y C son conmensurables en cuadrado, pues sus cuadrados se miden con A^2 y $A^2 : C^2 :: 1 : 2$.

A partir de esta definición, Euclides encuentra otro segmento inconmensurable con A en la proposición [X.21], cuya longitud sería $\sqrt[4]{2}$, que también es inconmensurable en cuadrado con A , para más detalles, ver [3].

Con todo lo expuesto se ve claramente que la forma de comparar las longitudes de los segmentos de los griegos estaba limitada por el sistema numérico empleado, claro está que lo mismo ocurre con las áreas.

Ahora con una idea clara sobre cómo se manejaban las longitudes podemos ver qué aportes hicieron los griegos al concepto de área.

1.3. La medida de áreas en “Los Elementos”

El axioma 10 de “Los Elementos” dice que dos segmentos no encierran un espacio. Basándose en éste, Euclides investiga la relación que existe en términos de magnitud (área) entre espacios encerrados por figuras construibles con regla sin graduar y compás. La idea básica es emplear la teoría de semejanza sin importar la forma que tengan las figuras.

Lo primero que se puede decir en este caso es que el proceso de comparación de figuras tiene limitaciones por el escollo que representan los segmentos inconmensurables y, además, las figuras curvilíneas causan que la comparación no pueda hacerse tan directamente como con los segmentos. A pesar de ello, los griegos observaron que dos figuras pueden tener igual área y, sin embargo, no ser congruentes por lo que la solución que plantearon para hacer las comparaciones fue asociar a las figuras a estudiar otras con área equivalente y de fácil manejo.

Las figuras rectilíneas se adaptan perfectamente a este tratamiento gracias a dos de ellas que son sobresalientes: los cuadrados y los triángulos.

Por un lado, los cuadrados tienen las siguientes propiedades:

- Dados dos cuadrados, es fácil ver cuál es la relación de orden entre sus áreas haciendo coincidir alguno de sus vértices, por ende, se puede establecer la propiedad arquimedea en el conjunto de estas figuras.
- Por el teorema de Pitágoras, los cuadrados poseen la Capacidad de replicarse y de sumarse.
- El área de un cuadrado está directamente relacionada con el lado, por lo que es posible aplicar la maquinaria de comparación de segmentos a los cuadrados.
- Dos segmentos inconmensurables pueden ser conmensurables en cuadrado, por lo que la inconmensurabilidad de ciertos tipos de segmentos no afecta a la de las áreas de sus cuadrados.

Estas bondades de los cuadrados los convierten en figuras idóneas para realizar las comparaciones porque guardan un comportamiento similar a los naturales, así lograr obtener la razón que guardan dos figuras rectilíneas es más fácil si se puede establecer una equivalencia con los cuadrados. Cualquier otra figura obligaría a usar *antipharesis* que sería más laborioso, implicaría un proceso de descomposición/recomposición y no aseguraría el éxito.

Por otro lado, el triángulo es importante porque toda figura rectilínea se puede descomponer en triángulos y a estos se les puede asignar un cuadrado de área equivalente (proposición [I.44]). Así, gracias a ellos es posible asignar a una figura rectilínea un

Cuadrado de igual área, proceso que se llama cuadrar la figura.

La forma de obtener la cuadratura de una figura rectilínea se expone desde la proposición [I.36] hasta la proposición [II.14] en “Los Elementos”. Veamos cómo se realiza.

Proposición [II.14]:

Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

Demostración:

Supongamos que se quiere cuadrar el romboide $ABCD$ que se muestra en la figura 1.3.

$ABCD$ se puede descomponer en los dos triángulos BAD y BCD .

Dado un ángulo α , por proposición [I.44], es posible construir un paralelogramo con área igual a la del triángulo BAD . Si en particular $\alpha = \frac{\pi}{2}$, este paralelogramo será un rectángulo que llamaremos PQR .

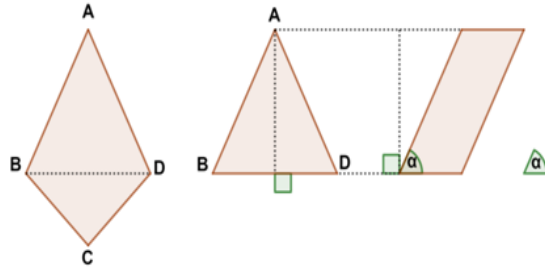


Figura 1.3

De la misma forma se construye un cuadrado equivalente en área al triángulo BCD que llamaremos Z así $ABCD = PQR + Z$.

Ahora se debe cuadrar PQR .

En la figura 1.4, si se prolonga el segmento PQ hasta un punto S tal que $QS = QR$, se toma T punto medio de PS , se traza la circunferencia de centro T y radio TS y se prolonga QR hasta intersectar la circunferencia en el punto

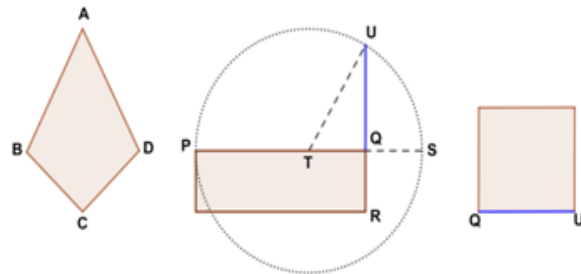


Figura 1.4

U , entonces el segmento QU será el lado del cuadrado equivalente en área a PQR ya que por proposición [II.5], $PQR + TQ^2 = TS^2 = TU^2$ y, por Pitágoras $TU^2 = TQ^2 + QU^2$. Así $PQR + TQ^2 = TQ^2 + QU^2$ por lo que $PQR = QU^2$.

Por último, usando Pitágoras, a partir de Z y el cuadrado de QU se construye un cuadrado cuya área es equivalente a la del romboide $ABCD$ ■

Claro está que para hallar una razón de áreas de figuras rectilíneas, si la hay, ambas deben cuadrarse primero y luego intentar hallar, si la hay, la razón entre las áreas de los cuadrados construidos.

Un comentario, Euclides, en todo este procedimiento y también en el caso de los segmentos, maneja la idea de que las figuras rectilíneas pueden representarse como unión disjunta de otras figuras, establece que el área es igual a la suma de las áreas de las otras figuras y también que el área no varía al mover la figura

Los griegos intentaron usar este método de cuadrar figuras para estudiar las razones de áreas de figuras curvilíneas y pronto quedó clara la inoperancia de este método con figuras de este tipo. El círculo es el mejor ejemplo de ello, ya que si se tiene un círculo de área π y se quiere encontrar un cuadrado de lado l con área equivalente se debe cumplir que $l = \sqrt{\pi}$, o en otras palabras, se debe construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$ con regla y compás cosa que es imposible pues π es un número trascendente. Así, la cuadratura de figuras curvilíneas fue un motivo de investigación que los empujó a la innovación. Como resultado apareció el método de exhaustión.

1.4. El método de exhaustión

La idea básica del método es intuitiva. Si en una figura curvilínea se inscriben sucesivos polígonos de forma que se vaya aumentando el número de sus lados, las sucesivas áreas irán aproximándose al área de la figura. La propiedad arquimedea da precisión a este razonamiento y es clave para probar la proposición [X.1] que dice:

Proposición [X.1]:

Si de la mayor de dos magnitudes desiguales dadas se quita una magnitud mayor que la de su mitad, y de la que queda se quita también otra parte de magnitud mayor que su mitad, continuando siempre la misma operación, se llegará a obtener una parte menor que la magnitud menor dada.

Con esta proposición se logra cerrar el razonamiento intuitivo y se proporciona un método de demostración que confiere rigor lógico al argumento.

Observación 1.1:

Lo que dice la proposición [X.1] es que dadas dos magnitudes A y ε donde $\varepsilon < A$ se pueden construir las sucesiones de magnitudes (K_i) y (A_i) como sigue:

$$\begin{array}{ll}
 K_1 > \frac{A}{2} & A_1 = A - K_1 \\
 K_2 > \frac{A_1}{2} & A_2 = A_1 - K_2 = A - (K_1 + K_2) \\
 K_3 > \frac{A_2}{2} & A_3 = A_2 - K_3 = A - (K_1 + K_2 + K_3) \\
 \dots & \dots \\
 K_n > \frac{A_{n-1}}{2} & A_n = A_{n-1} - K_n = A - \sum_{i=1}^n K_i
 \end{array}$$

Y existirá un $n \in \mathbb{N}$ es tal que $A_n < \varepsilon$ y con esta desigualdad se puede llegar a una contradicción lógica que garantice la validez del resultado.

Notar, por la construcción de los A_i , que es indistinto trabajar con polígonos en la figura inicial o con polígonos en las porciones de área que van quedando. Básicamente existían dos formas de emplear el método:

1. Inscribir una sucesión de polígonos regulares en la figura y establecer, para un número suficientemente grande de lados de un polígono, que la diferencia de áreas entre la figura y el polígono es menor que una magnitud ε dada. A esta forma de proceder [1] le llama exhaución por aproximación.
2. Encerrar la figura entre dos sucesiones de polígonos regulares inscritos y circunscritos tales que la diferencia entre las áreas de los circunscritos y los inscritos puede hacerse menor que una magnitud ε dada. A esta forma de proceder [1] le llama exhaución por compresión y se la atribuye a Arquímedes.

Veamos la utilidad del método para determinar la razón de áreas de figuras curvilíneas con un ejemplo que emplea ambas formas de proceder.

Proposición 1.2:

Un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

Idea de la demostración:

Entenderemos por área un valor numérico y emplearemos geometría analítica para simplificar la demostración.

Sean el círculo FXH de la figura 1.5 de radio r y circunferencia l y un triángulo rectángulo T de catetos l y r .

Supongamos que el área del círculo, A , es mayor a la del triángulo, B , y tomemos

$$\varepsilon = A - B$$

Sea K_1 el área del cuadrado $EFGH$. (ver figura 1.5)

Consideremos el cuadrado circunscrito al círculo formado por los segmentos tangentes en los puntos E, F, G y H .

Como $EX \perp FH$, los triángulos FXE y FEY son congruentes; por lo tanto, el área del triángulo FXE es la mitad del área del cuadrado $FXEY$.

Lo mismo ocurrirá entre el triángulo XHE y el cuadrado $XHZE$ y entre el cuadrado $EFGH$ y el cuadrado circunscrito, por ende $K_1 > \frac{A}{2}$.

Por construcción, A_1 será la diferencia entre A y el área del cuadrado $EFGH$.

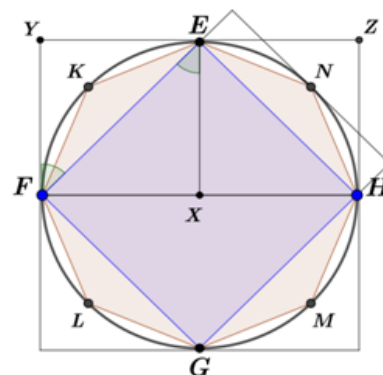


Figura 1.5

Sean ahora K punto medio del arco EF , L del arco FG , M del arco GH , N del arco HE .

Sea K_2 la suma de las áreas de los triángulos EKF , FLG , GMH y HNE . Como en el caso anterior, por simetría del círculo, $K_2 > \frac{A_1}{2}$.

Por construcción, A_2 será la diferencia entre A y el área del polígono $EKFLGMHN$.

Repetiendo lo que se hizo en el paso anterior con los arcos de circunferencia determinados por los segmentos FL , LG , GM , MH , HN , NE , EK y KF se obtiene K_3 donde $K_3 > \frac{A_2}{2}$ y así las sucesiones (K_i) y (A_i) de la observación 1.1 se pueden construir por la existencia de los puntos medios y la simetría del círculo FXH .

Luego, por proposición, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n < \varepsilon$, de donde se obtiene que:

$$A - K_n < A - B; \text{ es decir } B < K_n \quad (2)$$

Analizando la figura 1.5 se puede ver que los lados de los polígonos inscritos se duplican en las sucesivas etapas, así, el n -ésimo polígono K_n tendrá 2^{n+1} lados.

Sea b_n un lado de P_n y considérese el triángulo isósceles de base b_n , vértice opuesto X y altura h_n .

Como $h_n < r$ y $2^{n+1}b_n < l$ se tendrá que $\frac{2^{n+1}h_nb_n}{2} < \frac{rl}{2}$; es decir $K_n < B$ lo que es una contradicción a (2) que provino de suponer que $B < A$.

Ahora supongamos que $A < B$ y tomemos $\varepsilon = B - A$

Consideremos la sucesión (K_i) ya construida y construyamos las nuevas sucesiones (K'_i) y (A'_i) .

Para construir la sucesión de los A'_i , necesaria para llegar a una contradicción, observemos que, si llamamos P_1 al cuadrado que circunscribe al círculo, obtenido a partir del cuadrado $EFGH$, se cumplirá que $P_1 - A < P_1 - K'_1$ donde $K'_1 = K_1$.

Nuestro interés radicará en diferencias del tipo $P_i - A$ pero es más fácil trabajar con diferencias del tipo $P_i - K'_i$ por lo que para definir los A'_i se van a considerar las sucesiones de polígonos (K_i) y (P_i) donde cada P_i tendrá sus lados tangentes al círculo en los puntos que sean vértices del respectivo K_i .

De esta forma $K'_1 = K_1 > \frac{A}{2}$ y definiremos $A'_1 = P_1 - K'_1$

Sea K'_2 el área de la región de color gris de la figura 1.6.

Al ser E punto medio en el arco DF ocurrirá que $HX \parallel DF$, con lo que $EC = FY$ y $EY = CF$. Esto muestra que $EFX < CFE$ y así $DCN < DCF + HXN$.

Luego $K'_2/4 > 1/2 \cdot A'_1/4$. Es decir $K'_2 > A'_1/2$.

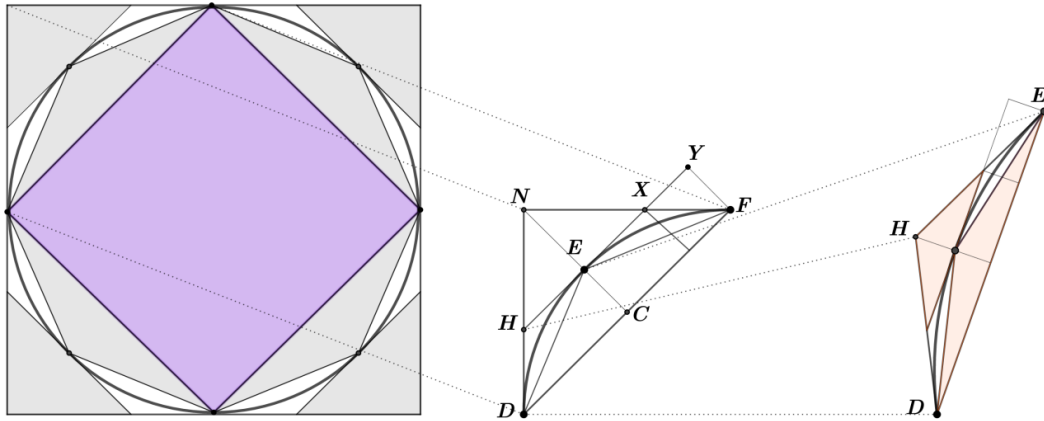


Figura 1.6

Sean $A'_2 = P_2 - K'_2$ y $K'_3 = P_1 - (K'_1 - K'_2)$ (el área de la región en color rosa en la figura 1.6 es $\frac{K'_3}{8}$).

De nuevo, porque existe el punto medio y por simetría del círculo será $K'_3 > \frac{1}{2}(\frac{A'_2}{8})$.

Así existirá un $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_n - A < P_n - K'_n < B - A$; es decir $P_n < B$ (3)

Sea b_n un lado de P_n y considérese el triángulo isósceles de base b_n , cuyo vértice opuesto es X cuya altura es h_n .

Como $h_n = r$ y $l < 2^{n+1}b_n$ se tendrá que $\frac{1}{2}rl < 2^n b_n h_n$ lo que es una contradicción a (3) que provino de suponer que $A < B$

Por lo tanto la única posibilidad que queda es que $A = B$ ■

Observación 1.3

- En términos modernos, lo que se hizo con el método de exhaustión es lo siguiente:
Dado un $\varepsilon > 0$ existe dos polígonos K_n y P_n tales que, $A < K_n + \varepsilon$ y $P_n < A + \varepsilon$. Obviamente los griegos no pueden concluir que esto vale para todo $\varepsilon > 0$. Aun así, el concepto de sucesión numérica convergente está presente en el método y recuerda a las sumas de Riemann.
- En las figuras involucradas en la proposición 1.2 aparece el número π , por ende, es de destacar que Arquímedes haya probado esto sin poder dibujar el triángulo rectángulo.

Con este método, Arquímedes pudo establecer equivalencia entre áreas como, por ejemplo, la de un segmento parabólico y de un triángulo, la de la superficie lateral de un cilindro circular y la de un rectángulo, la de la superficie lateral de un cono de base circular y la de una porción de círculo, la de un círculo y la de un triángulo rectángulo entre varias otras. Arquímedes también obtuvo equivalencias entre volúmenes de varios sólidos.

Al declinar la matemática griega, en el período alejandrino, se impone el punto de

vista intuitivo y práctico en la línea de egipcios y babilonios.

Arquímedes y Apolonio de Perga prosiguieron el método de Euclides y calculadores profesionales como Claudio Tolomeo y Diofanto no se complicaban con representaciones geométricas de los números, utilizaban irracionales como π o $\sqrt{2}$ acríticamente y los aproximaban cuando era necesario.

Así vio su fin una era en la que las demostraciones rigurosas daban el estatus de razonamiento válido a métodos e ideas planteados para obtener cuadraturas de áreas de figuras planas.

Capítulo 2

El área, la intuición y la integral

2.1. De Grecia a Europa

Entre los siglos VI y XI hindúes y árabes tomaron el relevo después del final de la civilización griega, estos usaron números enteros, fracciones, irracionales y el cero hallando reglas para operar con ellos, también, consideraron las razones entre magnitudes explícitamente como números y utilizaron un álgebra con letras para resolver ecuaciones e idearon útiles métodos para sumar series de números en progresión aritmética y geométrica. Todos estos conocimientos fueron introducidos en el siglo XII en Europa, fundamentalmente, por Leonardo de Pisa.

Entre los siglos XII y XVII muchos investigadores necesitaban, para sus estudios de mecánica o astronomía, saber el valor de áreas y volúmenes encerrados por curvas de un tipo más general que las que manejaron los griegos. Fue esta fertilidad en las aplicaciones lo que incentivó el desarrollo de nuevos métodos para cubrir la necesidad dejando un poco de lado las demostraciones rigurosas.

En esta época, el problema obtener áreas se afrontó esencialmente de dos maneras diferentes: una algebraica (los infinitesimales) y otra geométrica (los indivisibles). Estos dos enfoques se basaban en dos concepciones intuitivas de los objetos geométricos que se iniciaron en la antigua Grecia y se debían a las preguntas:

¿De qué están formados un segmento o un trozo de plano? ¿Qué le sucede a una figura geométrica cuando la dividimos una y otra vez en partes cada vez más pequeñas?

Las respuestas dada por los partidarios del atomismo era que los cuerpos físicos estaban compuestos, en última instancia, por átomos indivisibles.

Por otro lado, los partidarios de la infinita divisibilidad sostenían que, al dividir el continuo geométrico en trozos cada vez más pequeños, se seguían obteniendo continuos de la misma naturaleza que el de partida sin que se pudiera aislar nunca un elemento mínimo o indivisible. Estas dos posturas dieron origen a los indivisibles y a los infinitesimales.

De regreso en Europa, quienes seguían la tendencia de los indivisibles concebían a los segmentos como constituidos por infinitos puntos y a las figuras por infinitos segmentos que no se podían dividir. En esta línea estaban matemáticos como Cavalieri, Torricelli y

Barrow, entre otros. Quienes seguían la tendencia de los infinitesimales concebían a las figuras como infinitamente divisibles; es decir, que siempre tenían un área divisible y, sin importar qué tanto se las dividiera, nunca se llegaría a un segmento. Ejemplos de matemáticos con esta concepción fueron Fermat, Descartes o Wallis, entre otros.

A pesar de las diferencias en el enfoque, todos consideraban necesarias las demostraciones rigurosas; pero, a la vez, querían evitar las dificultades del método de exhaustión por lo que los métodos propuestos para hallar áreas en esta época solo era respaldados con las respuestas correctas que proporcionaban. Aun así, los progresos logrados en este período fueron notables. Veamos alguno de ellos.

Antes de empezar se debe recordar que la idea predominante en la época era buscar herramientas con las que se pudieran abordar nuevos problemas dando una justificación teórica más o menos aceptable.

2.2. El método de Buenaventura Cavalieri

Buenaventura Cavalieri, apoyado en la idea de los indivisibles, a los cuales entendía como entes de dimensión $n - 1$ si el objeto estudiado era n -dimensional, presentó un método para obtener la cuadratura de figuras llamados método colectivo.

El método colectivo consistía en comparar los indivisibles de dos figuras tomados en forma conjunta. Su cuerpo teórico es el siguiente:

El concepto fundamental del método es el de omnes lineaes que, citando [4] pág. 34, fue definido por Cavalieri de la siguiente manera para figuras planas:

Definición 2.1:

Dada una figura plana F , se consideran dos planos perpendiculares al plano de la figura que la contienen exactamente.

Si uno de estos planos se mueve paralelamente hacia el otro hasta coincidir con él, entonces las líneas que durante el movimiento forman las intersecciones entre el plano móvil y la figura consideradas en conjunto, se llaman omnes lineaes de la figura, tomada una de ellas como regla (o directriz).

A éstas las denotaremos $O(F, l)_r$ donde l hace referencia a que las omnes lineaes son de una figura bidimensional y r es la regla.

Obviamente las omnes lineaes (que son el conjunto de indivisibles de la figura) dependen de cómo se tome la directriz. Por ejemplo, dado el triángulo ABC de la figura 2.1, si se toma como directriz el segmento AB , las omnes lineaes respecto de AB serán los infinitos segmentos

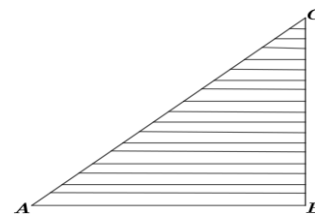


Figura 2.1

contenidos en el triángulo que son paralelos a AB y a estas se las denotan $O(ABC, l)_{AB}$.

Dada una figura plana y sus omnes lineaes, Cavalieri también consideró las colecciones de cuadrados que se pueden obtener de los indivisibles en las omnes lineaes y dio la definición:

Definición 2.2:

Dada una figura F , todos los cuadrados de F serán todos los cuadrados que tienen por lado un indivisible de F . A estos los denotaremos $O(F, l^2)_{r^2}$ donde r^2 es el cuadrado directriz y l^2 hace referencia a la dimensión de las omnes lineaes, es decir, hace referencia a que son omnes lineaes de un sólido.

Así, todos los cuadrados del triángulo de la figura 2.1 serían los indivisibles de una pirámide de base AB^2 .

Cavalieri siguió ampliando esta idea al considerar las potencias n -ésimas de los indivisibles de F .

Para poder trabajar con las omnes lineaes de las figuras, Cavalieri estableció el postulado:

“Si las figuras F y G son congruentes entonces $O(F, l)_r$ es congruente con $O(G, l)_r$ ”

Y probó los teoremas:

Teorema 2.3:

Si las figuras planas F y G son iguales entonces también lo son $O(F, l)_r$ y $O(G, l)_r$.

Teorema 2.4:

Las omnes lineaes de figuras planas son magnitudes que tienen razón unas con otras.

Teorema 2.5:

La razón entre las figuras es igual a la razón entre sus omnes lineaes, tomadas respecto de la misma regula.

Con el teorema 2.5, el problema de obtener la razón entre dos áreas se traduce en el problema de obtener la razón entre las respectivas colecciones de líneas.

Para que la teoría funcione, Cavalieri estableció el fundamental principio de Cavalieri que, para figuras planas, dice:

Principio de Cavalieri para figuras:

Si dos figuras planas tienen la misma altura y si las secciones determinadas por dos segmentos paralelos a las bases y a igual distancia de estas están siempre en la misma razón entonces las figuras planas también estarán en la misma razón.

Con este cuerpo teórico, Cavalieri estableció relaciones entre las áreas de diversas

figuras a la manera de los griegos.

Observación 2.6:

La teoría Cavalieri tiene muchas falencias fundamentalmente por cuestiones relacionadas con el infinito, estas son puntualizadas por José María Ayerbe Toledo en [4] y José Barrios García en [5].

A pesar de las deficiencias teóricas, el método de Cavalieri brindaba resultados correctos; por esta razón, gozó de gran popularidad entre los matemáticos de la época. Veamos ejemplos de aplicación del método.

Ejemplo 2.1

El área de una figura se conserva si se la distorsiona adecuadamente. Esto es consecuencia del principio de Cavalieri. Ver figura 2.2

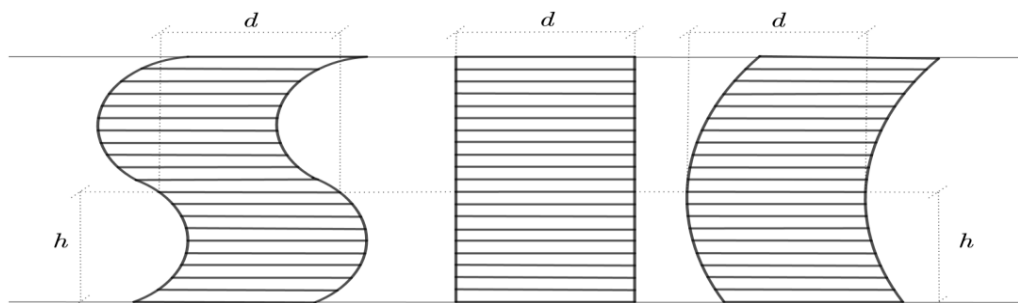


Figura 2.2

Ejemplo 2.2

Si se dibuja una diagonal en el paralelogramo $ABCD$ de la figura 2.3, el área del paralelogramo será el doble de la de cada uno de los triángulos determinados por la diagonal.

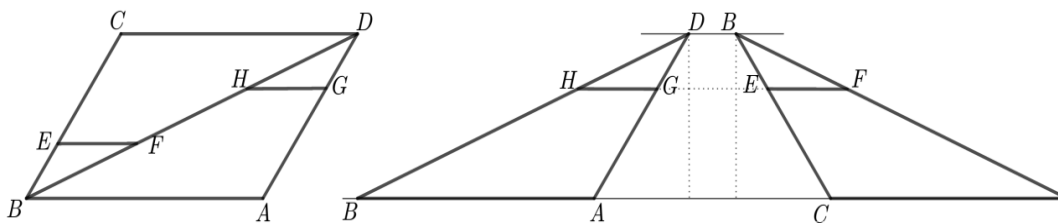


Figura 2.3

Sean AB la directriz y los puntos G y E tales que $GD = BE$ y $AB \parallel FE \parallel GH$.

Por criterio ángulo-lado-ángulo, los triángulos GHD y FEB son tales que $GH = FE$. Esto ocurrirá para todo par de segmentos construidos como GH y FE , es decir, en los triángulos ABD y DCB , paralelos a AB y a la misma distancia de este segmento.

Luego, por el principio de Cavalieri:

$$O(ABD, l)_{AB} : O(DCB, l)_{AB} :: GH : FE :: 1 : 1$$

Por lo tanto, el área de $ABCD$ es el doble de las áreas de los triángulos ABD y DCB ■

Observación 2.7:

En el ejemplo 2.2 se ha probado que $O(ABD, l)_{AB} : O(ABCD, l)_{AB} :: 1 : 2$. Ahora, si se posiciona en B un origen de coordenadas de modo que D tenga coordenadas (a, a) y se identifica a BD con la gráfica de $f(x) = x$ donde $0 \leq x \leq a$, entonces se ha probado que $\frac{\int_0^a x dx}{a^2} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.3

Si se considera el rectángulo $ABCD$ de la figura 2.4 (por ejemplo 2.1 también podría ser un paralelogramo cualquiera) y se dibuja en él la diagonal BD , entonces, tomando AD como directriz, todos los cuadrados del paralelogramo serán el triple de todos los cuadrados de cualquiera de los triángulos determinados por la diagonal.

Sea RU un indivisible de $ABCD$.

Sean Q punto medio de BC , P de AD , Z de PQ y W de AB .

Sea S punto de intersección entre RU y PQ y T punto de intersección de RU y BD .

Por proposición [II.9] se cumplirá que:

$$RT^2 + TU^2 = 2(RS^2 + ST^2)$$

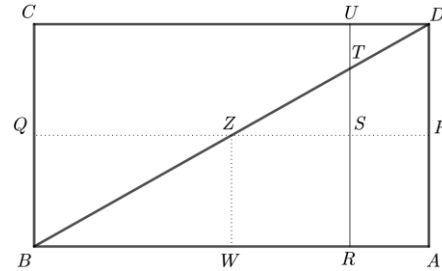


Figura 2.4

Como esto ocurre para todos los indivisibles de $ABCD$, Cavalieri concluyó que:

$$O(ABD, l^2)_{AD} + O(DBC, l^2)_{AD} = 2[O(ABQP, l^2)_{AD} + O(PZD, l^2)_{AD} + O(ZBQ, l^2)_{AD}]$$

De donde obtuvo que:

$$O(ABD, l^2)_{AD} = O(ABQP, l^2)_{AD} + 2 O(PZD, l^2)_{AD} \quad (1)$$

(1) es fácil de comprobar para nosotros usando las fórmulas de los volúmenes de las pirámides y el prisma.

Por otro lado, Cavalieri al considerar que:

$$O(ABCD, l^2)_{AD} = 4 O(ABQP, l^2)_{AD} = 8 O(AWZP, l^2)_{AD}$$

$$O(ABD, l^2)_{AD} = 8 O(PZD, l^2)_{AD}$$

Y al reemplazar y operar en (1) llegó a que:

$$O(ABCD, l^2)_{AD} : O(ABD, l^2)_{AD} :: 3 : 1 \quad \blacksquare$$

Observación 2.8

Cavalieri obtuvo resultados asombrosos (por la validez de ellos y las falencias de su teoría) trabajando como en el ejemplo 2.3. Por ejemplo, al construir el rectángulo $ABCD$ con su diagonal BD , un indivisible RU y considerar la parábola $y = x^n$ con eje BC (Cavalieri construye la parábola a la manera de los antiguos y no con esta ecuación algebraica) como se muestra en la figura 2.5. Probó que:

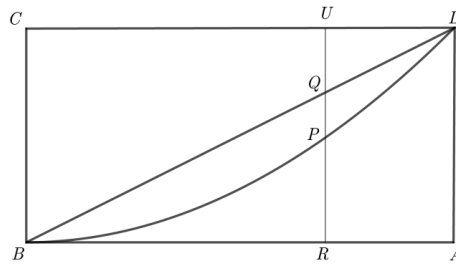


Figura 2.5

$$O(ABCD, l^n)_{AD} : O(ABD, l^n)_{AD} :: (n + 1) : 1$$

Para $n = 1, \dots, 6$ y 9 . Esta razón, o igualdad, nos resultará familiar si se posiciona en B un origen de coordenadas, se llama l a la longitud de AB y se dan las coordenadas (l, l^n) a D .

Con ello, la razón (igualdad) se traduce en $\frac{l \cdot l^n}{\int_0^l x^n dx} = n + 1$ para $n = 1, \dots, 6$ y 9 .

Es así como el trabajo de Cavalieri abrió nuevas perspectivas en la búsqueda de un método para obtener cuadraturas; estableció una primera generalización de dimensión usando de una figura n -dimensional y dejó un camino marcando que seguirían otros matemáticos del siglo XVII. Sin embargo, él sería el último en usar la geometría pura ya que Descartes haría una importante contribución que haría que ésta fuera cayendo en desuso.

2.3. La aritmética de segmentos de René Descartes

En el siglo XVII Descartes estableció un puente sólido entre la geometría, el álgebra y la aritmética, haciendo una interpretación geométrica de las operaciones numéricas de suma, resta, producto y división.

Para realizar tal hazaña, consideró la medida o longitud de todos los segmentos respecto a un segmento unidad de referencia y definió el producto de segmentos como una operación binaria, veamos esto: (Con ello, confirió al conjunto de los segmentos T la estructura $(T, \cdot_T, +_T, <_T)$ de anillo conmutativo ordenado isomorfo a $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, <)$).

Descartes definió el orden, la suma y la diferencia entre los segmentos como lo hacía Euclides. Así, la suma resultó ser una operación binaria, conmutativa y asociativa sin neutro (no existe el segmento de longitud cero).

Lo que Euclides no definió, y era una operación que carecía de sentido para él, es el producto de segmentos. Descartes lo definió de la siguiente forma:

Producto de segmentos

Sean AD y AC segmentos de longitud a y b y sea AB segmento de longitud 1.

Supongamos que estos segmentos son los del de la figura 2.6.

Al conectar con un segmento los puntos B y C y trazar desde D un segmento paralelo a BC , que interseque a la prolongación de AC en el punto E , los triángulos ABC y ADE serán semejantes y, como consecuencia, por proposición [VI.4] $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

De donde se tiene que $a \cdot b = 1 \cdot e$ con e longitud de AE .

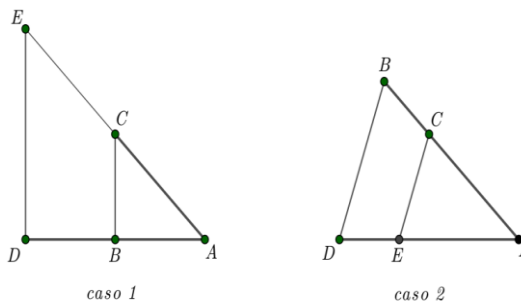


Figura 2.6

Así, el segmento AE será el segmento producto entre AD y AC y se obtiene al dibujar AB sobrepuesto en cualquiera de los otros dos segmentos.

Del caso 2 de la figura 2.6 se puede concluir que la relación entre las longitudes de AD y AC no afecta a la conclusión ■

Observación 2.9

- AB es el único segmento neutro pues es el único con longitud uno y $1 = \frac{AB}{AB} = \frac{AC}{AC} = \frac{1}{AC} AC$.
- Se puede probar que el producto es asociativo.
- Como vale la proporción $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ el producto resulta conmutativo.

Para obtener el segmento inverso de uno dado se necesita definir la división de segmentos.

División de segmentos

Si se desea dividir dos segmentos, por ejemplo los segmentos AE y AD del caso 1 de la figura 2.6, por el punto B se traza un segmento paralelo a DE que interseca a AE en el punto C obteniéndose los dos triángulos con sus lados proporcionales, así $b = \frac{e}{a}$

Para obtener el segmento inverso de uno dado se procede como sigue:

Dados los segmentos AC y AB , con $AC > AB$, y el segmento $AX = AB$ de la figura 2.7

Se construyen los triángulos ACB y AXG de modo que $CB \parallel XG$.

Si la longitud de AB es 1, la de AC es b y la de AG es b' entonces, como en el caso del producto $b \cdot b' = 1$.

Por lo tanto AG es el segmento inverso de AC .

Analizando la figura 2.7 se puede probar que este segmento AG es único.

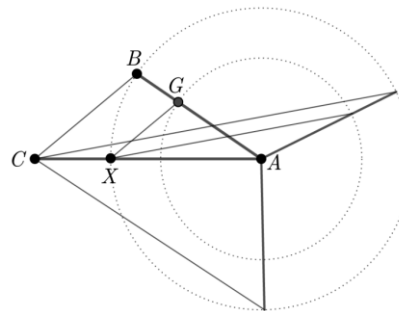


Figura 2.7

Si $AC < AB$ se hace la misma construcción (ver en figura 2.7 la relación entre AG y AB) ■

Descartes dio un paso decisivo en la incorporación de los números negativos y las raíces al cuerpo numérico por lo cual, junto con Pierre de Fermat y Rafael Bombelli, inició una visualización de los reales que culminaría con la representación de la recta numérica.

Con respecto al concepto de área, el trabajo de Descartes produjo dos grandes cambios:

- a) Los problemas geométricos se tradujeron en un lenguaje algebraico y viceversa.
- b) Para Descartes todos los puntos de las curvas tenían alguna relación con todos los puntos de una recta que se podía expresar por una ecuación y, a partir de la ecuación, se podrían encontrar las propiedades de las curvas.

Con respecto a b), al visualizar a las curvas como líneas relacionadas con los puntos de una recta curvas mecánicas (logarítmicas, trigonométricas, exponenciales) empezaron a considerarse como curvas propiamente dichas. Estas eran construidas a partir de tablas de valores y definidas recurriendo al movimiento continuo de un punto en el plano, es decir sin ninguna ecuación, por lo que eran difíciles de tratar. Por esta razón, algunos matemáticos empezaron a relacionarlas con series de potencias porque estas series parecían conservar el comportamiento algebraico de los sumandos y eran una buena aproximación.

Gracias a la geometría de Descartes y los indivisibles de Cavalieri, posteriormente, John Wallis haría la importante asignación de un valor numérico a un área.

2.4. El método de John Wallis y el área del rectángulo

Wallis, con un fuerte uso de la intuición, propuso un método puramente aritmético que empleaba razones entre series numéricas. Esto lo obligó a tener que usar el infinito sin el concepto de límite, Wallis solucionó este problema introduciendo el símbolo ∞ que, para él, era una cantidad/variable infinita.

Básicamente, el método de Wallis consistía en llegar a las razones entre las series haciendo una conclusión por analogía entre las razones de las primeras sumas parciales. Con estas razones entre serie a mano, mostraba lo que entendía como la respectiva interpretación geométrica. El nexa entre la geometría y la aritmética lo lograba afirmando que un punto, cero y nada, eran maneras equivalentes de decir lo mismo. De esta forma, sus resultados valdrían para cantidades numéricas y magnitudes geométricas.

Al abrigo de este razonamiento, Wallis interpretó las longitudes de los segmentos de las omnes lineas de Cavalieri como los términos de las series y aseguró que la cuadratura de una figura podía obtenerse al sumar el número infinito de líneas paralelas. Tal aseveración la justificó diciendo que hablar de líneas y de paralelogramos de altura $\frac{1}{\infty}$ era equivalente.

Veamos un importante ejemplo de aplicación del método e ideas de Wallis.

Ejemplo 2.4

El área de un rectángulo es el producto de las longitudes de la base y la altura.

Dadas las sumas $\sum_{i=0}^{n+1} i$ y $\sum_{i=0}^{n+1} n$. Como la razón $\frac{\sum_{i=0}^{n+1} i}{\sum_{i=0}^{n+1} n}$ para los seis primeros casos es $\frac{1}{2}$

Wallis concluyó que cualquiera sea el $n \in \mathbb{N}$ se cumpliría que:

$$\frac{0+1+2+\dots+n}{(n+1)n} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Luego razonó que: ([1] pág. 46-47)

- Ambas sumas está en progresión aritmética con diferencia de progresión (DP) uno.
- Si se tiene la sucesión numérica $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en progresión aritmética con DP $c > 0$ entonces valdrá la igualdad

$$\frac{x_0+x_1+\dots+x_n}{(n+1)(x_0+x_n)} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

(3) Muestra que la razón entre estas sumas y la de las sumas de (2) es la misma, pero gran diferencia con estas últimas es que, al ser c un número cualquiera, x_n es mucho más independiente de n pues no está obligado a ser el natural anterior como en el otro caso. Wallis interpretó geoméricamente esto de la siguiente manera:

Sea el triángulo rectángulo T de la figura 2.8 cuyos lados tienen longitud a y b .

Si los valores x_i son las longitudes de los indivisibles del triángulo tomando $x_0 = 0$. Estos indivisibles determinarán $n + 1$ puntos en el lado de longitud a que serán los indivisibles de ese lado y x_n será una aproximación de b .

En estas condiciones, si se toma $c = \frac{1}{\infty}$ entonces en (3) la suma $\sum_{i=1}^n x_i$ será la suma de los indivisibles de T (tener en cuenta que $x_0 = 0$), x_n tendrá longitud

$b - \frac{b}{\infty} \cong b$ y la cantidad que acompaña a x_n en el denominador será la suma de los indivisibles del lado de longitud a .

Por lo tanto, $\frac{\text{área}(T)}{a \cdot b} = \frac{1}{2}$ y con ello el área del rectángulo correspondiente será $a \cdot b$ ■

El método de Wallis tal vez nos resulte esquivo, sobre todo por la expresión $\frac{1}{\infty}$, pero fue de gran importancia por proporcionar un enfoque más aritmético de los indivisibles de Cavalieri y, para quienes estudiaban las curvas con series de potencias, fue una herramienta importante por la siguiente razón:

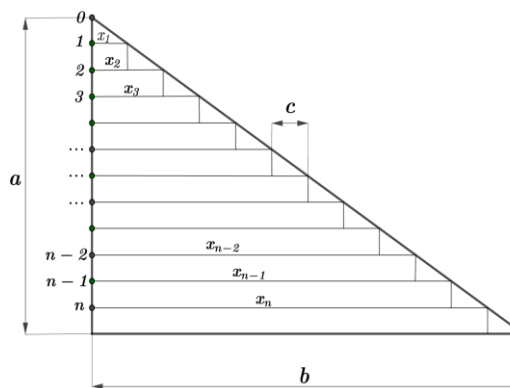


Figura 2.8

Al estudiar las razones entre las sumas $\sum_{i=0}^n i^k$ y $\sum_{i=1}^{n+1} n^k = (n+1)n^k$ cuando $k \in \mathbb{Z}^+$ Wallis llegó a lo siguiente:

Valor de k	Razón entre las sumas para los primeros valores de n	Razón cuando n crece indefinidamente
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$	$\frac{1}{4}$
4	...	$\frac{1}{5}$

Luego, por analogía en los diferentes casos, concluyó que:

$$\frac{\sum_{i=0}^n i^k}{(n+1)n^k} = \frac{1}{k+1}$$

Por otro lado, observó que las cuadraturas de $y = x^k$ serían las interpretaciones geométricas de estas razones para cada $k \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, lo que Wallis hizo con la información obtenida de las razones fue lo siguiente:

$$\frac{\int_0^a x^k dx}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n i^k}{(n+1)n^k} \quad \text{Para } k \in \mathbb{Z}^+$$

Wallis extendió este resultado, trabajando como de costumbre, para $k \in \mathbb{Q}^+$ tras llegar a que $\sqrt[p]{x^q} = x^{q/p}$ dando una argumentación más o menos sólida y afirmó que el resultado seguía valiendo para exponentes irracionales como $\sqrt{3}$.

Es importante recalcar que Wallis, como también Simón Stevin, aceptó a los irracionales como números dejando atrás definitivamente la imposición pitagórica. Así, Wallis fue uno de los que removió un gran obstáculo para la posterior formulación del concepto de límite que daría rigor al cálculo infinitesimal.

Otro matemático que hizo importantes contribuciones al naciente cálculo infinitesimal fue Pierre de Fermat, quien, utilizó la aritmética, el álgebra y la geometría analítica inspirándose en sus meticulosos estudios de las obras de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Papús. Veamos su método para obtener cuadraturas, que nos resultara extrañamente familiar.

2.5. El método de Pierre de Fermat

Fermat, siguiendo las ideas de Cavalieri y al conectar la geometría analítica con los trabajos de Arquímedes, notó que la asociación de una ecuación a una curva le facilitaba el tratamiento aritmético y algebraico de los problemas que Cavalieri había atacado con geometría sintética. Así, Fermat sustituyó los razonamientos geométricos por razonamientos aritméticos más sencillos y precisos.

Guiado por las dificultades encontradas y con un espíritu emprendedor, Fermat ingenió un método de cuadratura directo. Es decir, a diferencia de trabajos anteriores, en los que se comparaba el área que se quería calcular con otra conocida, Fermat obtenía el área en términos absolutos utilizando rectángulos infinitesimales (de área menor que $\varepsilon > 0$) en progresión geométrica de razón menor que uno. La idea feliz de Fermat fue buscar que se cumplan las condiciones del método de exhaustión.

Veamos un ejemplo ilustrativo de su método usando un lenguaje actual que permite ver cuán cerca está Fermat de las sumas de Riemann.

Ejemplo 2.5

Se desea encontrar el área encerrada por la curva $y = x^{\frac{m}{n}}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ el eje OX y la recta $x = a$ con $a > 0$.

Sea $a = x_0$ y $q \in (0,1)$.

Sea en $[0, a]$ la sucesión de abscisas $(x_{(p-1)n})$ con $x_{(p-1)n} = aq^{(p-1)n}$ y $p \geq 1$.

Esta sucesión está en progresión geométrica de razón q^n y determina una sucesión de ordenadas $(y_{(p-1)n})$ con $y_{(p-1)n} = a^{\frac{m}{n}} q^{(p-1)m}$ que también está en razón geométrica de razón q^m .

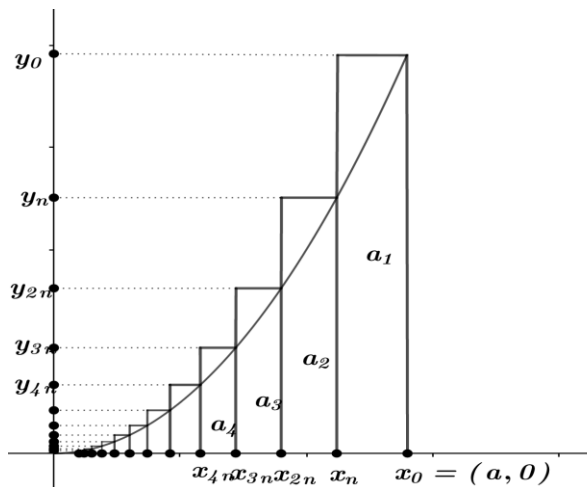


Figura 2.9

Con estas sucesiones, y usando el resultado obtenido por Wallis para el área de un rectángulo, se puede construir la sucesión numérica (a_p) de las áreas de los rectángulos de la figura 2.9.

El término general de esta sucesión es $a_p = (1 - q^n) a^{\frac{m}{n}+1} q^{(p-1)(n+m)}$ también estará en progresión geométrica de razón q^{m+n} .

$$\text{Luego, } \sum_{p=1}^{\infty} a_p = \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} a^{\frac{m}{n}+1} \quad (4)$$

A partir de (4) Fermat razonó lo siguiente:

Como para todo $k \in \mathbb{N}$, $(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}) = 1 - q^k$

En (4) $\frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} = \frac{(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})}{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^{n-1+1}+\dots+q^{m+n-1}}$ y si $q = 1$ entonces se tiene que:

$$\frac{(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})}{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^{n-1+1}+q^{n-1+2}+\dots+q^{m+n-1}} = \frac{n}{m+n}$$

Pero se pierde el valor de la suma. Así, si $q \approx 1$, $\sum_{p=1}^{\infty} a_p \cong \frac{n}{n+m} a^{\frac{m+n}{n}}$.

Por otro lado, si $q \approx 1$ la suma de las áreas de los rectángulos en la figura 2.9 serán aproximadamente el área buscada.

Por lo tanto, usando notación de Leibnitz, se concluye que $\frac{n}{n+m} a^{\frac{m+n}{n}} \cong \int_0^a x^{\frac{m}{n}} dx$ para $q \approx 1$ ■

De nuevo, quienes trabajaban con series de potencias se vieron beneficiados por el método de Fermat. Además, Fermat observó que también podía obtener el área bajo las hipérbolas $y = \frac{1}{x^n}$ $m, n \in \mathbb{N}$ $\frac{m}{n} \neq 1$ (el caso $\frac{m}{n} = 1$ lo resolvió el matemático Gregorius Saint Vincent ver [4]). Con esto último, Fermat y Saint Vincent lograron dar un valor de área a una región cuya frontera no era una curva cerrada, un hecho sin duda singular y desconcertante en la época.

Muchos otros matemáticos idearon diversos métodos para el cálculo de cuadraturas. Por mencionar algunos, tenemos a Gregory St. Vincent, Alfons de Sarasa, Nicholas Mercator, Christopher Wren, Christiaan Huygens, Evangelista Torricelli, Johannes Kepler, James Gregory, John Wallis, Isaac Barrow, Blaise Pascal, André Tacquet, entre otros (algunos de sus métodos se exponen en [4]).

En el último cuarto del siglo XVII Gottfried Von Leibniz e Isaac Newton fueron quienes sintetizaron y enriquecieron los resultados de sus antecesores al reconocer la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes veamos sus métodos.

2.6. El método de Isaac Newton

La idea fundamental del cálculo integral es la determinación de resultados o efectos de procesos de cambio. Newton, usando conceptos infinitesimales, se distinguió de sus predecesores porque obtenía las cuadraturas, no a partir de la suma de cantidades infinitesimales “estáticas” sino, estudiando la variación momentánea del área en un punto.

El método de Newton consistía en hallar la ecuación de una curva que correspondía a la cuadratura de otra curva apoyándose en el teorema fundamental del cálculo. Es decir, la derivada era tomada como idea básica y la integral se definía en términos de ésta. Como el cálculo diferencial es básico en el método, Newton necesitaba manejar el concepto de límite y salvó esta cuestión incorporando la cantidad infinitesimal “ o ” que podía actuar como denominador pero que sumando se desvanecía, es decir, o era el valor de un límite calculado y la manera en que Newton usaba esta cantidad estaba bien porque él trabajaba con funciones C^∞ en un intervalo $[0, a]$.

De esta forma, Newton desarrolló el siguiente algoritmo que reducía el problema de las cuadraturas al problema de determinar una primitiva ([1] pág. 53-55).

Algoritmo de Newton

Regla I:

Sea la perpendicular BD a la base AB de una curva cualquiera AD , llámense $AB = x$ y $BD = y$. Sea a una cantidad y sean m, n números enteros.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$ entonces $\frac{an}{n+m} x^{\frac{n+m}{n}}$ será el área de la región ABD .

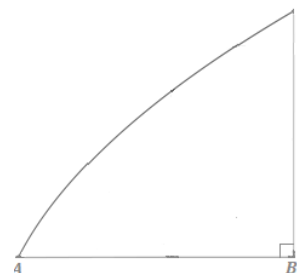


Figura 2.10

Regla II: (linealidad)

Si el valor de y se compone de varios términos de este género, el área será la suma de las áreas que provienen de los términos.

Regla III: (aproximación por series de potencias)

Si la curva viene dada por una expresión más compleja, se la reduce a una suma y se aplican las reglas anteriores.

Veamos la forma de proceder de Newton con un ejemplo de aplicación del algoritmo.

Ejemplo 2.6

Dada el área $z = \frac{n}{n+m} \sigma x^{\frac{n+m}{n}}$ con $n, m \in \mathbb{N}$ y σ un número, se desea obtener la ecuación de la curva y .

Sea $r = \frac{n+m}{n}$.

Newton razona: si el punto $P = (x, y)$ en la figura 2.11 se mueve hacia la derecha a lo largo de la curva debido a un incremento infinitesimal o de la abscisa x , para $v = BK$ se tendrá:

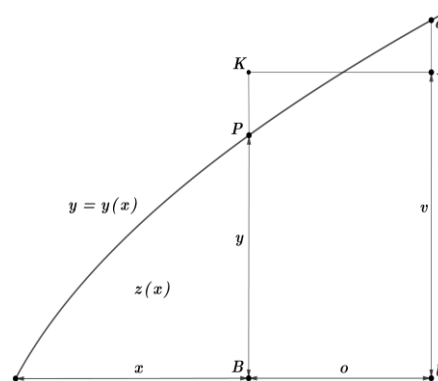


Figura 2.11

$$ov = a(BbHK) = a(BbdP)$$

Y el incremento de área bajo la curva será:

$$ov = z(x + o) - z(x) = \frac{a}{r}(x + o)^r - \frac{a}{r}x^r \quad (5)$$

Por otro lado, desarrollando en serie de potencias

$$(x + o)^r = x^r \left(1 + \frac{o}{x}\right)^r = x^r \left[1 + \frac{ro}{x} + \frac{r(r-1)}{2} \frac{o^2}{x^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} \frac{o^3}{x^3} + \dots\right] \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (5) y dividiendo por o se tendrá que:

$$v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2} ox^{r-2} + \frac{a(r-1)(r-2)}{1.2.3} o^2 x^{r-3} + \dots$$

Ahora, si se supone que o va disminuyendo hasta desvanecerse, entonces v coincidiría con y , pues los términos que contienen o se volverían despreciables. Luego:

$$y = ax^{r-1} = ax^{\frac{m}{n}}$$

Claramente el proceso puede invertirse ■

Es importante remarcar que Newton pensó que podría operar con series de potencias de la misma forma que con expresiones polinómicas finitas. Esto le permitió, por ejemplo, dar la siguiente cuadratura:

Ejemplo 2.7

Se desea calcular el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{x+1}$ con $x > 0$

Primero Newton produce la serie $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Luego, por la regla III, “integra término a término” la serie entre 0 y x y, usando la regla I, llega a que

$$a\left(\frac{1}{x+1}\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{con } x > 0 \quad \blacksquare$$

La gran dificultad del método de Newton estriba en tener que resolver una ecuación diferencial que como sabemos puede ser bastante complicada, sobre todo si la ecuación es del tipo parcial. Aun así, Newton obtuvo cuadraturas que no se habían obtenido hasta entonces y con su método englobó todos los resultados de sus antecesores. Es decir, con su algoritmo Newton logró establecer tablas de cuadraturas (de integrales) que supusieron un gran avance en el tema de la determinación de áreas.

Cerramos este capítulo presentando el método de Leibnitz que, comparado con el de Newton, está más en línea con los indivisibles de Cavalieri, las ideas de Wallis y el método de Fermat.

2.7. El método de Gottfried Von Leibnitz

Leibnitz aceptaba la existencia de lo infinitamente pequeño, concebía un área como la suma de infinitas áreas pequeñas y visualizaba una curva como una poligonal de infinitos lados de longitud infinitesimal.

Bajo este enfoque, para obtener cuadraturas y mostrar la relación inversa de éstas con el cálculo de tangentes, llamó diferencial de x a la diferencia entre dos valores sucesivos de x y lo representó dx , análogamente definió dy , y a la longitud del segmento de la poligonal entre los puntos (x, y) y $(x + dx, y + dy)$ la definió como ds (A estos diferenciales Leibnitz los interpretó como números fijos, no nulos e infinitamente pequeños). Con estos diferenciales, Leibnitz consideró el triángulo diferencial de lados dx, dy y ds cuyo lado ds quedará sobre la tangente a la curva en el punto (x, y) . Luego, la pendiente de dicha tangente será $\frac{dy}{dx}$ (Leibnitz nunca consideró la derivada como un límite).

Así, Leibnitz consideró una curva y una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad y dedujo dos cosas:

- La suma de las ordenadas, los indivisibles de la figura, es una aproximación del área bajo la curva si se toma $dx = 1$, es decir $\sum dx \cdot y = \sum 1 \cdot y$.
- La diferencia entre dos ordenadas sucesivas, dy , es una aproximación de la pendiente de la tangente a la curva en el punto.

A partir de esto, Leibnitz razonó que: si $dx = 1$, es decir el segmento unidad de medida es el de longitud dx , las aproximaciones serán prácticamente exactas, es decir, la cuadratura será igual a la suma de las ordenadas (ver método de Wallis), y la pendiente de la tangente será igual a la diferencia de ordenadas sucesivas. Como las operaciones suma y diferencia son recíprocas entre sí, Leibnitz dedujo que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también deben ser operaciones inversas.

Leibnitz pudo obtener todos los resultados sobre cuadraturas conocidos en la época usando su método de transmutación que se apoya en el llamado principio de transmutación que dice ([1] pág. 66):

“Sean A y B dos regiones planas, cada una dividida en indivisibles.

Si existe una correspondencia uno a uno entre los indivisibles de A y de B, tal que indivisibles correspondientes tengan igual área entonces se dice que B se deriva de A por transmutación y sus áreas son iguales”

Básicamente, el método de transmutación facilita el cálculo de un área, o en su defecto, proporciona una buena aproximación veamos esto:

Método de transmutación

En la figura 2.12, se desea determinar el área de la región $ABCD$ limitada por la curva f , el eje x y los segmentos AD y BC .

Sean $P = (x, y)$ un punto en f y considérese el triángulo diferencial PRQ .

Sea t la longitud de OS que es perpendicular a la tangente a f en P .

Sea H el punto sobre FP tal que $TH \perp FP$.

Sea z la longitud de $OT = FH$, y por consiguiente, $y - z$ la longitud de HP .

Por la semejanza de los triángulos OST , PRQ y THP vale que:

- $\frac{x}{dx} = \frac{y-z}{dy}$, luego $z = y - x \frac{dy}{dx}$ (7)
- $\frac{dx}{t} = \frac{ds}{z}$, luego $t ds = z dx$ (8)

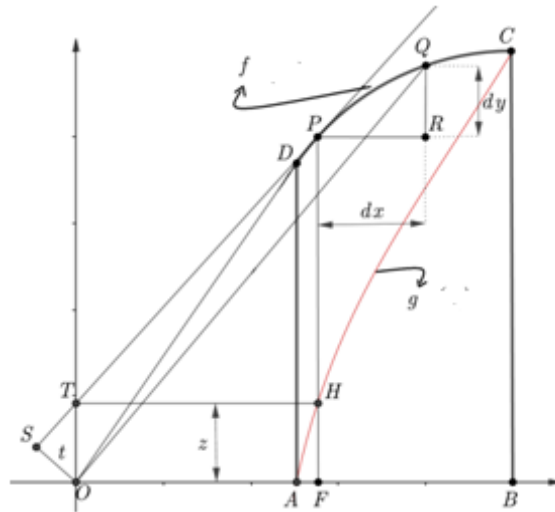


Figura 2.12

Para cada punto P de la curva f se puede determinar el punto $H = (x, z)$ y, por consiguiente, la curva g .

Esta nueva curva, llamada cuadratriz de f , tiene la particularidad de que si se conoce el área encerrada por ella, el eje x y los segmentos AD y BC , entonces se puede encontrar el área buscada originalmente. Veamos esto:

Primero, para favorecer la comprensión, estableceremos que $y = f(x)$, $z = g(x)$ (9)

En la figura 2.12 se ve que el triángulo OPQ es un triángulo infinitesimal de la región ODC con área $a(OPQ) = \frac{1}{2}t ds$. Luego, por (8) y (9), $a(OPQ) = \frac{1}{2}g(x)dx$ (recordar que ds está sobre la tangente y $OS \perp SP$).

De esta forma, si a y b son las respectivas longitudes de OA y OB será:

$$a(ODC) = \sum_{i \geq 1} a(OP_i Q_i) = \frac{1}{2} \int_a^b g(x) dx \quad (10)$$

Por otro lado, por principio de transmutación:

$$a(ABCD) = a(OBC) + a(ODC) - a(OAD)$$

De esta forma, usando (10) y notación actual, será:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}bf(b) + \frac{1}{2} \int_a^b g(x) dx - \frac{1}{2}af(a) = \frac{1}{2} \left([xf(x)]_a^b + \int_a^b g(x) dx \right) \quad (11)$$

Por lo tanto el problema se reduce a encontrar el área encerrada por la cuadratriz g ■

Observación 2.10

- (11) Se conoce como el teorema de transmutación de Leibnitz.
- Si se reemplaza (7) en (11) haciendo $f(x) = y$, $g(x) = z$, $f' = \frac{dy}{dx}$ se obtiene la fórmula de integración por partes.
- Otro aporte importante de Leibnitz fue la incorporación de los símbolos d y \int para representar las operaciones. Posteriormente, los hermanos Jakob y Johann Bernoulli divulgaron las ideas de Leibnitz por Europa, le dieron el nombre de integral a la nueva operación y la trataron como la inversa de la diferenciación.

Con lo expuesto hasta aquí vemos que el estudio del concepto de área entre los siglos XII y XVII da un giro completo con respecto a la forma clásica. Esto es posible gracias a la innovación y a la geometría analítica. Tal es el cambio que, por ejemplo, se logró establecer el área de una figura cuya frontera no es una curva cerrada y se culminó estableciendo dos algoritmos generales con los que se podían obtener estas.

También se puede ver que el desarrollo de estas nuevas técnicas está fuertemente ligado a un creciente uso del límite (camuflado en el manejo de los infinitesimales), de expresiones algebraicas, de series de potencias y, en contraposición, un paulatino desuso de objetos geométricos. Como resultado de todo esto, el área de una figura pasaría a estudiarse desde el naciente análisis matemático profundizándose así en el concepto mismo y alejándose definitivamente de la forma clásica de abordar el problema.

Capítulo 3

El área y el estudio de la frontera

3.1. Desde Leonard Euler a Augustin Cauchy

Desde el siglo XVII en adelante la integral dejaría, paulatinamente, de ser sólo la herramienta para resolver el problema del cálculo de áreas para convertirse en un nuevo concepto. Este desarrollo estuvo muy ligado a la evolución de conceptos como función, área, series trigonométricas y conjuntos, entre otros.

El detonante de este paulatino desarrollo fue la definición de función dada por Euler en 1748 que postulaba que éstas eran expresiones “gobernadas por una única ley o expresión analítica” ([1] Pág.74), por ejemplo x^2 y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Funciones como las actuales constantes o las seccionalmente continuas no eran consideradas como tales por Euler sino como gráficos.

Como consecuencia de esta definición, se intensificó el estudio de la representación de una función en series siendo Daniel Bernoulli quien por primera vez argumentó, a partir de consideraciones físicas, que toda función podía representarse por la serie de senos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{l}$ ya que existen suficientes constantes a_n como para que la serie se ajustase a la curva. En 1804 Joseph Fourier, a partir de sus estudios sobre la conducción del calor, planteó un modelo matemático que proporcionaba una descripción correcta del fenómeno y afirmó que cualquier función f , en el sentido de Euler, acotada en un intervalo $[-l, l]$ o un gráfico acotado arbitrario se podía expresar de la siguiente forma: ([1] pág.75)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nkx + b_n \text{sen} nkx] \quad \text{donde} \quad k = \frac{1}{2\pi} a_0 = \int_{-l}^l f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos nkx \, dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \text{sen} nkx \, dx$$

Para ello hizo las siguientes suposiciones:

- 1) $f(x), f(x) \text{sen} nkx, f(x) \cos nkx$ son integrables en $[-l, l]$.
- 2) Es válida la integración término a término de una serie de funciones.

1) Se cuestionó inmediatamente ya que, al no poder hablar de antiderivadas, Fourier argumentó que las ordenadas $f(x)$, las rectas $x = -l$ y $x = l$ y el eje x determinan una

región del plano encierran un área ligando así la integral definida de una función arbitraria no negativa y la existencia “indiscutible” del área encerrada.

Es así que los trabajos de Fourier dieron pie a los siguientes cuestionamientos:

- ¿Un gráfico es una función?
- ¿Es posible que una función pueda expresarse como la suma infinita de funciones periódicas siendo, o no, ella periódica?
- ¿Existe la integral de una función que a priori no posee antiderivada?
- ¿Es siempre la integral de una función no negativa el valor de un área?

Estos cuestionamientos obligaron a los investigadores a dar una definición precisa de función, a estudiar la existencia de la integral de una función y a entenderla como un concepto separado de la derivación.

Iniciamos la exposición de este capítulo con la definición de integral dada por quien emprendió la rigorización de los métodos de sus predecesores y del análisis mismo.

3.2. La integral de Augustin Cauchy

Antes de Cauchy las cantidades infinitesimales habían sido fuente de confusión y controversia. Cauchy se propuso despejar las dudas haciendo uso de la noción de función e incorporando el concepto de límite como herramienta fundamental de su trabajo. Los pilares fundamentales de este fueron:

- El concepto de límite con el que se pudo definir cantidades infinitamente pequeñas, grandes, o números irracionales.
- La definición de función de Euler, salvo que Cauchy reconoció las constantes como funciones.
- La definición de continuidad en un intervalo ([1] pág.78) haciendo la importante distinción entre funciones continuas y discontinuas.

Con este marco teórico, Cauchy logró dar una definición analítica de la integral con la que dio una primera respuesta a los cuestionamientos surgidos de los trabajos de Fourier. Su definición es la siguiente:

Definición 3.1:

Una función f definida en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y continua es integrable si y sólo si para cualquier partición $P_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ y su suma asociada $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)f(x_i)$ la sucesión (S_n) formada por las sumas asociadas a sucesivos refinamientos de P_n converge a un cierto valor S . Este valor será la integral de f en $[a, b]$ denotada $\int_a^b f(x)dx$.

Justificación dada por Cauchy:

Dado un $\varepsilon > 0$, por continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier

$x, y \in [a, b]$ se cumple que: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sea $P_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partición de $[a, b]$ ordenada en forma creciente desde $a = x_1$ hasta $b = x_n$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_n\| < \delta$

Sea $Q_{2n-1} = P_n \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ refinamiento de P_n tal que:

$$x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_i < y_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$

Así, el i -ésimo término de la suma $|S_n - S_{2n-1}|$ será:

$$(x_{i+1} - x_i)f(x_i) - (y_i - x_i)f(x_i) - (x_{i+1} - y_i)f(y_i) = (x_{i+1} - y_i)(f(x_i) - f(y_i))$$

Luego, teniendo en cuenta que $\|Q_{2n-1}\| \leq \|P_n\|$

$$|S_n - S_{2n-1}| \leq \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - y_i) |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - y_i) < \varepsilon(b - a)$$

Ahora bien, si Q_m es un refinamiento arbitrario de P_n seguirá cumpliéndose que

$$|S_n - S_m| < \varepsilon(b - a) \text{ pues } \|Q_m\| \leq \|P_n\| < \delta.$$

Por lo tanto la sucesión (S_n) es de Cauchy y converge a un cierto valor S ■

Observación 3.2:

- Si f es no negativa, este razonamiento analítico se puede interpretar geoméricamente como el área encerrada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = a, x = b$ (en adelante, área encerrada significará un área de este tipo).
- La definición da rigor matemático a la idea de asignarle un número al área encerrada, por lo que Cauchy da un paso muy importante hacia la definición de área.
- La existencia de la integral no depende de la existencia de una ecuación que defina la función a integrar, Cauchy solo pide continuidad en un intervalo.
- La existencia del límite de (S_n) garantiza la existencia del área encerrada.

Al establecer la igualdad $\int_a^b f(x)dx = s$, $s \in \mathbb{R}$ para f continua y no negativa, Cauchy, indirectamente, propuso un enfoque con el que se podía profundizar en el estudio del concepto área. Veamos el porqué de esto.

La incorporación en la definición de las funciones y los límites sugiere la existencia de áreas de figuras que, en el sentido clásico, no deberían existir. Por ejemplo, si f es una función no negativa, acotada, definida en $(a, b]$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; la existencia de la integral de f , y por consiguiente del área encerrada, dependerá de si la sucesión (z_n) con $z_n = \int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)dx$ es de Cauchy o no. Algo similar ocurre si el dominio no es acotado, es decir, si f es no negativa, acotada, definida en $[b, \infty)$ y con $f(b) = 0$. En este caso existirá

$\int_b^\infty f(x)dx$ siempre que exista una primitiva de f que tenga límite cuando $x \rightarrow \infty$.

Otra singularidad que aparece es que si la función f no negativa tiene finitas discontinuidades en $[a, b]$ y se consideran los límites laterales en vez del valor que toma la función, la conclusión no se ve afectada. Es decir que, el valor del área encerrada no se ve afectado al prescindir de un número finito de puntos sobre f que forman parte de la frontera de la figura. Así queda claro que si se extiende la definición de integral también ocurrirá lo mismo con la noción de área.

El estudio del conjunto de discontinuidades de una función fue motivo de numerosos estudios a partir de la definición de Cauchy. Esto se debió a ejemplos como el siguiente:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{\pi^2}{6} - 1$ geométricamente se puede interpretar como la suma de las áreas de rectángulos de base $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ y altura $\frac{1}{n+1}$. Por otro lado, si se define en $[0,1]$ una función f de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & x \in \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right) \end{cases}$$

Aritmética, geometría y análisis estarían en armonía si $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$, es decir, si se asume que la definición de Cauchy cubre el caso de funciones con infinitas discontinuidades. En el estudio de estas anomalías se centró Dirichlet.

3.3. Las contribuciones de Lejeune Dirichlet y Rudolph Lipschitz

Lejeune Dirichlet dio a la integral un tratamiento geométrico precisando el concepto de función dando la definición que conocemos actualmente. Al utilizar el análisis de Cauchy, logró fundamentar de manera rigurosa el trabajo de Fourier y dio la condición suficiente que asegura la convergencia de la serie para funciones continuas y seccionalmente continuas y creyó que podía extender la condición para funciones acotadas más generales. En esta búsqueda, descubrió que la integral de Cauchy no tenía sentido para la función $\chi_{\mathbb{Q}}$ definida en $[0,1]$, y por consiguiente, no se podían obtener los coeficientes de Fourier.

La pérdida de sentido de la integral para esta función la interpretó de dos maneras:

- O bien la extensión de la noción de área para el tipo de regiones limitadas por esta clase de funciones no tiene sentido.
- O bien para trabajar con funciones más generales era necesario ampliar la definición de la integral.

En vista de este fenómeno, Dirichlet se inclinó por lo segundo y dio, lo que para él, era un criterio de integrabilidad de funciones con infinitas discontinuidades que dice:

Dada f , función acotada en $[a, b]$, f es integrable si y sólo si para todo par de puntos $c, d \in [a, b]$ tales que $c < d$ existe un intervalo $[r, s] \subset (c, d)$ en el que f es continua. ([1] pág. 85)

Lipschitz, alumno de Dirichlet, convencido de que la integrabilidad de las funciones discontinuas dependía de la distribución de los puntos de discontinuidad sobre el intervalo de integración, asumió como cierta la condición de Dirichlet y concluyó que para que una función sea integrable el conjunto de discontinuidades debía tener un número finito de puntos de acumulación porque, de esta forma, las infinitas discontinuidades se podían encerrar en una cantidad finita de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña y por ende, la función resultaría integrable en el sentido de Cauchy.

Los trabajos de Lipschitz, al llamar la atención sobre como la distribución de los puntos afectan a la integración, incentivaron el posterior estudio de los conjuntos de puntos y permitió aclarar la diferencia entre las propiedades topológicas y de medida de un conjunto infinito de puntos. Es así como las investigaciones relativas a la integrabilidad de funciones discontinuas se concentraron en el estudio de la distribución de los puntos de discontinuidad en el dominio.

Fue otro alumno de Dirichlet, Bernhard Riemann, quien dio el siguiente paso importante extendiendo la definición de integral dada por Cauchy.

Antes de continuar con la exposición daremos una proposición que será de utilidad en la sección 3.5.

Proposición 3.3:

Dado $A \subset [a, b]$ $A \neq \emptyset$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- 1) $\bar{A}^o = \emptyset$
- 2) $c\bar{A}$ es denso en $[a, b]$
- 3) $\forall c, d \in A$ con $c < d \exists [r, s] \subset (c, d)$ tal que $[r, s] \cap A = \emptyset$

Demostración:

1) \Rightarrow 2)

Sea $y \in [a, b]$

Por hipótesis $y \notin \bar{A}^o$, es decir, cualquiera sea el $\varepsilon > 0$ $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \not\subset \bar{A}$.

Luego existe $z \in c\bar{A} \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$

Por lo tanto $c\bar{A}$ es denso en $[a, b]$

2) \Rightarrow 3)

Sean $c, d \in A$ con $c < d$

Por hipótesis existe $y \in c\bar{A} \cap (c, d)$, ahora, como $c\bar{A}$ es un abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset c\bar{A}$.

Sean $\varepsilon' = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, y - c, d - y\}$, $r = y - \varepsilon'$, $s = y + \varepsilon'$ (*)

Claramente $[r, s] \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset c\bar{A}$

Por lo tanto, $[r, s] \cap A = \emptyset$ ya que $[r, s] \cap \bar{A} = \emptyset$.

¿ $[r, s] \subset (c, d)$?

Sea $z \in [r, s]$, teniendo en cuenta (*) vemos que se cumple que:

- $y - z \leq \varepsilon' \leq \frac{1}{2}(y - c) < y - c$, luego $c < z$
- $z - y \leq \varepsilon' \leq \frac{1}{2}(d - y) < d - y$, luego $z < d$

Por lo tanto $[r, s] \subset (c, d)$.

3) \Rightarrow 1)

Supongamos que existe $x \in \bar{A}^o$, es decir, que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bar{A}$

Sabemos que para $z \in \bar{A}$ existe $z' \in A$ tal que $|z - z'| < \varepsilon$. Así, para $x - \varepsilon, x + \varepsilon \in \bar{A}$ existen $c, d \in A$ con $c < d$ tales que $(c, d) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bar{A}$.

Por hipótesis, existe $[r, s] \subset (c, d)$ tal que $[r, s] \cap A = \emptyset$. Luego, $[r, s] \subset cA$.

Sea $y \in [r, s]$

Como $y \in \bar{A} \cap cA = (A^o \cup \delta A) \cap cA$ necesariamente $y \in \delta A$

Por otro lado, dado $\varepsilon' = \frac{1}{2} \min\{y - r, s - y\}$, si consideramos que $(y - \varepsilon', y + \varepsilon') \subset [r, s]$

y que $[r, s] \cap A = \emptyset$ tenemos que $(y - \varepsilon', y + \varepsilon') \cap A = \emptyset$ lo que nos dice que $y \notin \delta A$.

Esta contradicción provino de suponer que existe $x \in \bar{A}^o$, por lo tanto queda probada la implicación ■

3.4. La integral de Bernhard Riemann

Riemann necesitaba saber cuándo una función era integrable. La definición de Cauchy, que es para funciones continuas, está avalada por la existencia del límite de las sumas asociadas a las particiones. Riemann, en las mismas condiciones que Cauchy, identificó a las funciones integrables como aquellas para las cuales existía dicho límite dejando de lado la continuidad.

De esta forma, Riemann propuso que la integrabilidad de una función fuera vista como una propiedad de esta como lo es, por ejemplo, la continuidad.

Para estudiar la integrabilidad de una función, Riemann se vio obligado a dar las dos siguientes condiciones, o criterios operativos, equivalentes su definición:

Criterios de Riemann:

a) Una función f es integrable según Riemann (R-integrable) en $[a, b]$ si y sólo si para cada partición P del intervalo se cumple que:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i = 0$$

Donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $w_i = \max\{f(t): t \in [x_{i-1}, x_i]\} - \min\{f(t): t \in [x_{i-1}, x_i]\}$

b) Una función f es R-integrable en $[a, b]$ si y sólo si dados $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ existe $d > 0$ tal que para toda partición P con $\|P\| < d$ se verifica que $S(P, \sigma) < \varepsilon$

Con $S(P, \sigma) = \sum_{i \in I} x_i - x_{i-1}$ donde $I = \{i \in \mathbb{N}: x_i \in P \text{ y } w_i > \sigma\}$

Observación 3.4:

- Tomando una partición P_n del intervalo y haciendo $\sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i = S_1 + S_2$ donde S_1 es la suma sobre los intervalos en los que f es continua y S_2 es la suma sobre los intervalos restantes. si las respectivas oscilaciones w_i en S_2 están acotadas por una constante k entonces $|S_2| \leq k \sum_{i=1}^n \Delta x_i$. De esta forma, f será R-integrable siempre que $\sum_{i=1}^n \Delta x_i < \varepsilon$.

En otras palabras, f será R-integrable siempre que el conjunto de puntos donde f es discontinua tenga medida cero. A esto apunta el criterio b).

- Tomando como referencia el criterio a), Gastón Darboux, posteriormente, demostró la existencia de los límites de las sumas superior e inferior de una función acotada en $[a, b]$ y, a partir de la igualdad entre dichos límites, estableció la existencia de la integral de la función. Estos límites serán entendidos por Vito Volterra como la integral superior e inferior de la función.

El conjunto de las funciones R-integrable claramente engloba al conjunto de las funciones Cauchy integrables y es más general, a tal punto de que admite funciones con un conjunto denso de discontinuidades, Riemann dejó patente este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1

Dada la función g definida en $[0,1]$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} x - q & \text{con } q \text{ entero más cercano a } x \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Sea } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2}$$

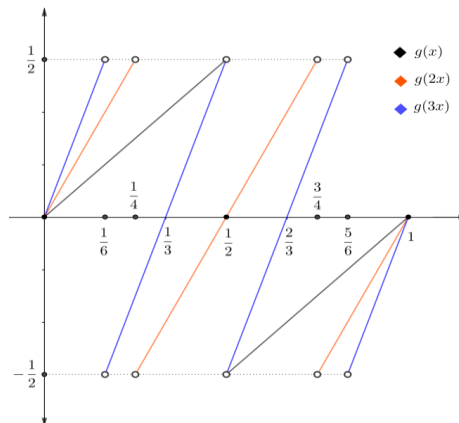


Figura 3.1

La serie que define a f converge uniforme y absolutamente en $[0,1]$ y f es discontinua en

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \dots \right\}$$

Es decir, es discontinua en $A = \{x \in (0,1): x = \frac{k}{2n} \text{ con } k \text{ impar y coprimo con } n\}$.

A es denso en $[0,1]$ ya que si $(x,y) \subset [0,1]$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2n} < y - x$ y con ello existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x < \frac{k}{2n} < y$.

Veamos que f es integrable en $[0,1]$ usando el criterio b).

Dado un $x_0 \in A$ será $w_{x_0} = \frac{\pi^2}{8n^2}$ porque:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)) = -\frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = -\frac{\pi^2}{16n^2}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0)) = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{16n^2}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B = \{x \in A: w_x < \sigma\}$ es no vacío e infinito, luego $A - B$ es finito.

Supongamos que $A - B$ tiene r elementos y tomemos la partición P de $[0,1]$ cuya norma es tal que los elementos de $A - B$ pertenecen a un único intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ determinado por P .

Luego $S(P, \sigma) = \sum_{i=1}^r (x_{i-1} - x_i) \leq r \|P\|$ y $S(P, \sigma) < \varepsilon$ siempre que $\|P\| < \frac{\varepsilon}{r} = d$ ■

Observación 3.5:

El ejemplo dado por Riemann muestra:

- Que la condición de integrabilidad dada por Dirichlet no es necesaria.
- Si nos apegamos a la suposición de Fourier, existe un área encerrada por esta función.

Las investigaciones posteriores a los trabajos de Riemann se enfocaron en caracterizar a las funciones R-integrables en términos del “tamaño topológico” del conjunto de discontinuidades. Este hecho estuvo influenciado por la confusión que había generado Dirichlet al considerar que los únicos conjuntos nunca densos eran aquellos con un número finito de puntos de acumulación.

3.5 Los conjuntos nunca densos, de primera especie y de medida cero

El posterior estudio de la condición N-S de Dirichlet permitió hacer la distinción entre los conjuntos de puntos nunca densos, los de primera especie y los de medida cero. Estos conjuntos crearon una gran confusión en la época y al aclarar esta confusión se pudo juzgar cual era la relevancia de la topología del conjunto de puntos de discontinuidad en la R-integrabilidad de una función.

El primero en hacer un aporte fundamental en esta dirección fue Herman Hankel. Su objetivo era encontrar una condición N-S que le permitiera saber si una función discontinua era, o no, R-integrable. Para Hankel, la integrabilidad de una función estaba directamente relacionada con su oscilación por lo que dio la siguiente definición de salto de una función en un punto.

Definición 3.6:

Dada una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y un real $\sigma > 0$

f tiene un salto mayor que σ en $x \in [a, b]$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $|\delta| < \varepsilon$ y $|f(x + \delta) - f(x)| \geq \sigma$.

Se le llamará el salto de f en x a $\sup \{ \sigma : |f(x + \delta) - f(x)| \geq \sigma \}$.

Considerando el conjunto $S_\sigma = \{x: \text{salto de } f \text{ en } x \text{ es mayor que } \sigma\}$ es claro que si $0 < \sigma' < \sigma$ entonces $S_\sigma \subset S_{\sigma'}$. Con estos conjuntos Hankel estableció la siguiente distinción entre las funciones definidas en $[a, b]$:

- Funciones continuas, aquellas en las que $\forall \sigma > 0 S_\sigma = \emptyset$
- Funciones discontinuas en un número finito de puntos, aquellas en las que S_σ es finito cualquiera sea el σ menor que el máximo salto de la función en $[a, b]$
- Funciones puntualmente discontinuas, aquellas para las que S_σ es nunca denso cualquiera sea el σ menor que el máximo salto de la función en $[a, b]$
- Funciones totalmente discontinuas, aquellas para las que existe un $\sigma > 0$ tal que S_σ es denso.

De esta forma Hankel clasificó el conjunto de las funciones definidas en $[a, b]$ desde una perspectiva topológica.

Hankel sabía que una función entre los dos primeros tipos era R-integrable por lo que se centró en las funciones puntualmente discontinuas y dio como válida la condición N-S de Dirichlet. Lo destacable aquí es el hecho de cómo llegó Hankel a esta conclusión. Según se cita en [1] pág. 99, fue porque hizo observaciones como la siguiente:

Dada $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \\ 1 & ; \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene que:

- El conjunto $A = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ es nunca denso en $[0,1]$ ($\bar{A}^0 = \emptyset$)
- Para cada punto $\frac{1}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ es posible construir un intervalo centrado en el punto de longitud l^n con $0 < l < 1$.

- La suma de las longitudes de dichos intervalos es $\sum_{n=1}^{\infty} l^n = \frac{l}{1-l}$ y $\lim_{l \rightarrow 0} \frac{l}{1-l} = 0$
- La función es R-integrable.

La función f es R-integrable y para Hankel esto se debía a que A es nunca denso, y por ende, A se podía recubrir con intervalos de longitud arbitrariamente pequeña. Estas dos propiedades eran entendidas como equivalentes en la época, debido principalmente a los trabajos de Dirichlet y Lipschitz. A favor de estos últimos está el hecho de que el error no se debe a la incompetencia sino más bien que, al ser pioneros, disponían de poco conocimiento sobre conjuntos infinitos de puntos.

El siguiente en la lista de quienes aportaron significativamente a aclarar la confusión fue George Cantor.

Cantor desarrolló su teoría de conjunto de puntos introduciendo conceptos tales como punto de acumulación y conjunto derivado y los conjuntos estudiados por Cantor, que ayudaron a aclarar las cosas, tenían la particularidad de poseer un conjunto derivado con un número finito de puntos de acumulación. Cantor los definió como sigue.

Definición 3.7:

$A \subset \mathbb{R}$ es de primera especie de orden $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $A^{(n)} = \emptyset$ donde $A^{(n)}$ es el derivado n -ésimo de A , es decir, $A^{(n)} = (((A')') \dots)'$

Observación 3.8:

- Con respecto a los sucesivos derivados se observa que $A^{(n)} \subset \dots \subset A'' \subset A'$. Esto es fácil de ver ya que, si tenemos $A \subset \mathbb{R}$ y $x'' \in A''$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x' \in A' \cap B_\varepsilon(x'')$ y como $A' \cap B_\varepsilon(x'')$ es un entorno de x' se tiene que cualquiera sea el $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x \in A' \cap B_\varepsilon(x'')$. Por lo tanto $x'' \in A'$, así $A'' \subset A'$ y lo demás se concluye por inducción.
- Notar también que $\overline{A^{(n)}} \subset \dots \subset \overline{A''} \subset \overline{A'}$ y $\overline{A^{(n)}}^0 \subset \dots \subset \overline{A''}^0 \subset \overline{A'}^0$. Como $A' \subset \overline{A}$ y $\overline{A'}$ es el menor cerrado que contiene a A' se tiene que $\overline{A'} \subset \overline{A}$ y como $\overline{A'}^0 \subset \overline{A'}$ es un abierto y $\overline{A'}^0$ es unión de todos los abiertos contenidos en $\overline{A'}$ $\overline{A'}^0 \subset \overline{A}^0$. Ahora, teniendo en cuenta lo anterior se llega a la conclusión.

La definición de Cantor era aceptable pero quedaba ambigua sin mostrar la existencia de un conjunto que no la cumpliera. Cantor mostró que, en efecto, existía un conjunto que no la cumplía, este es el conjunto de tercio medio \mathcal{C} de Cantor, que al ser infinito y perfecto cualquiera sea el $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{C}^{(n)} = \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Este conjunto particular, es nunca denso y tiene medida nula pues la suma de las longitudes de los intervalos eliminados es $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 1$. Así, como objeto de investigación, se prestó a reafirmar la confusión entre nunca denso y de medida cero (para

nosotros en la actualidad es un ejemplo que muestra que un conjunto de medida nula no siempre es de primera especie y un nunca denso tampoco lo es necesariamente) y más aun, con respecto a la condición de Dirichlet, Cantor demostró lo siguiente.

Proposición 3.9:

Los conjuntos de primera especie son nunca densos.

Idea de la demostración:

(Esta puede, o no, ser la original dada por Cantor)

Primero asumamos que $A' = \emptyset$, luego se tienen dos posibilidades:

- $A = \emptyset$ con lo que $\bar{A}^0 = \emptyset$
- A no tiene puntos de acumulación.

Si A no tiene puntos de acumulación $\bar{A} = A$ y $\bar{A}^0 = A^0$

Supongamos que existe $x \in \bar{A}^0$. Luego existe $B_\varepsilon(x) \subset A$. Es decir, para todo $\delta > 0$ $B_\delta(x) \cap A \neq \emptyset$ lo que es una contradicción al hecho de que A no tiene puntos de acumulación.

Por lo tanto, en ambos casos, $\bar{A}^0 = \emptyset$.

La demostración se completa por inducción usando la observación 3.8 ■

Este resultado contribuyó a reafirmar la creencia de que los conjuntos nunca densos se podían ignorar al calcular la integral de una función.

Curiosamente, gracias al conjunto \mathcal{C} , pronto surgieron contraejemplos que refutaban el falso criterio de Dirichlet. Uno de ellos fue, el llamado conjunto de Smith-Volterra-Cantor (S-V-C) que se obtiene eliminando determinados intervalos del intervalo $[0,1]$. El proceso de construcción es el siguiente:

Sucesión	Descripción del elemento de la sucesión	Intervalos eliminados	Suma de longitudes de inter. Eliminados
A_1	$\left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right]$	$\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$
A_2	$\left[0, \frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32}, \frac{3}{8}\right]$ $\cup \left[\frac{5}{8}, \frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32}, 1\right]$	$\left(\frac{5}{32}, \frac{7}{32}\right), \left(\frac{25}{32}, \frac{27}{32}\right)$	$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$

A_3	$\left[0, \frac{9}{128}\right] \cup \left[\frac{11}{128}, \frac{5}{32}\right]$ $\cup \left[\frac{7}{32}, \frac{37}{128}\right] \cup \left[\frac{39}{128}, \frac{3}{8}\right]$ $\cup \left[\frac{5}{8}, \frac{89}{128}\right] \cup \left[\frac{91}{128}, \frac{25}{32}\right]$ $\cup \left[\frac{27}{32}, \frac{117}{128}\right] \cup \left[\frac{119}{128}, 1\right]$	$\left(\frac{9}{128}, \frac{11}{128}\right), \left(\frac{37}{128}, \frac{39}{128}\right)$ $\left(\frac{89}{128}, \frac{91}{128}\right), \left(\frac{117}{128}, \frac{119}{128}\right)$	$\frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$
...
A_n		Se elimina de cada uno de los 2^{n-1} intervalos de A_{n-1} un sub intervalo central de longitud $\frac{1}{2^{2n}}$	$\frac{2^{n-1}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{n+1}}$

Continuando indefinidamente obtenemos en conjunto S-V-C que es el conjunto de los puntos que no han sido eliminados. Este conjunto tiene las siguientes características:

- S-V-C no contiene intervalos por construcción, es decir, es nunca denso.
- En el proceso se eliminaron intervalos cuya suma de longitudes es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Por lo que el conjunto S-V-C tiene medida o contenido $\frac{1}{2}$

- Teniendo en cuenta que S-V-C es nunca denso, su complemento es denso en $[0,1]$. Esto tiene como consecuencia que la función característica de S-V-C no es R-integrable en el mencionado intervalo. Notar que esta función es del tipo puntualmente discontinua en la clasificación topológica de Hankel por lo que echa por tierra la condición N-S.

Con el conjunto S-V-C quedó claro que los nunca densos de medida nula eran un caso especial de conjunto nunca denso. Haciendo un paréntesis, en este punto tenemos que:

- El conjunto \mathcal{C} muestra que los conjuntos de medida nula (y nunca densos) no necesariamente son de primera especie.
- El conjunto S-V-C muestra que los nunca densos no necesariamente son de medida nula.
- El resultado de Cantor muestra que los de primera especie son nunca densos.

Quedaba así por ver si los de medida nula eran nunca densos y si los de primera especie eran de medida nula.

Con respecto a esto último, en 1848 Ulisse Dini, utilizando la clasificación de conjuntos de primera especie de Cantor, demostró lo siguiente:

Proposición 3.10:

Todo conjunto de primera especie en un intervalo puede recubrirse por un número finito de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña.

Idea de la demostración:

(Esta puede, o no, ser la original dada por Dini)

Sea $A \subset [a, b]$ de primera especie de orden uno.

Como $A' = \emptyset$, A es compacto y por lo tanto, cualquiera sea el $\varepsilon > 0$ y el cubrimiento por abiertos $\{B_\varepsilon(x) : x \in A\}$ de A se cumple que $A \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)$.

Supongamos ahora que $A \subset [a, b]$ de primera especie es de orden dos.

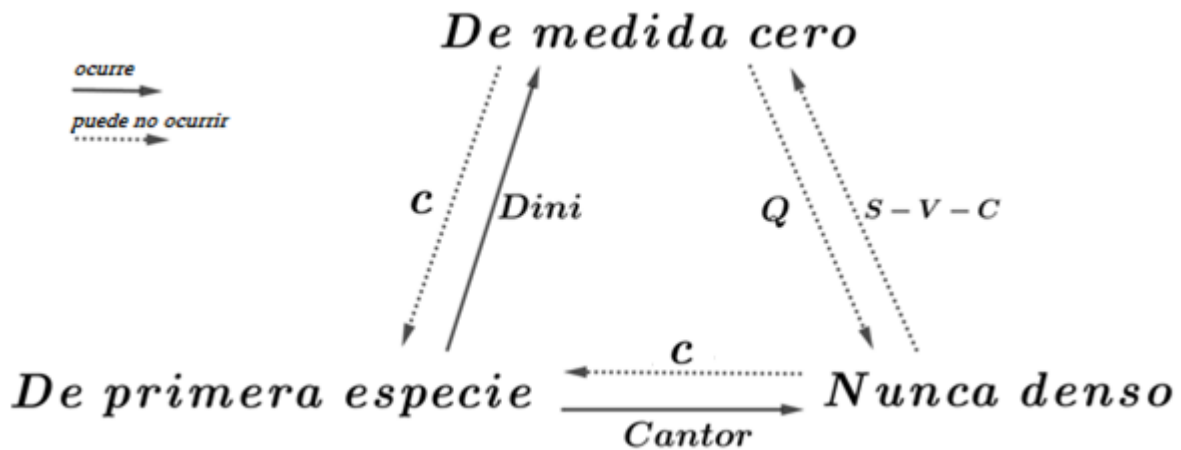
Como $A'' = \emptyset$, $A' \subset \bar{A}$, $\bar{A} \subset [a, b]$ es cerrado y teniendo en cuenta la observación 3.7, dados $\varepsilon > 0$ y $\{B_\varepsilon(x) : x \in \bar{A}\}$ un cubrimiento por abiertos de A' existe un subcubrimiento finito. Ahora, llamemos B al conjunto de puntos de A que no están en el subcubrimiento. Si $B = \emptyset$ o finito se puede concluir la tesis, es decir, se puede construir el cubrimiento finito de A .

Si $B \subset [a, b]$ es infinito necesariamente, por teorema de B-W, tiene un punto de acumulación que, al pertenecer a A' , debe estar en el subcubrimiento. Esto significa que existen elementos de B en el subcubrimiento lo que contradice la definición de B . Por lo tanto B no puede ser infinito.

La prueba se completa por inducción teniendo en cuenta la observación 3.8 ■

Usando este resultado, Dini demostró que si dos funciones coincidían salvo en un conjunto de primera especie y una era integrable la otra también lo era.

Por último en 1885 Harnack dio una definición de contenido de un conjunto y observó que un conjunto numerable tenía contenido cero usando cubrimientos por abiertos de longitudes arbitrariamente pequeñas. Esto resultaba en cierta forma paradójico para la época pues $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ “parecía más grande” que el nunca denso S-V-C de contenido positivo en $[0,1]$. Con el aporte de Harnack finalmente se pudo dar por cerrado el tema y mostrar la relación que existe entre estos tipos de conjuntos.



A modo de crítica y para cerrar esta sección, queda claro que enfocarse en la topología del conjunto de discontinuidades de una función, en el sentido de considerar la distribución de los puntos de discontinuidad en el dominio, no es idóneo para establecer si la función es R-integrable. Más allá de ello, las investigaciones en esta dirección sirvieron para dejar más en evidencia los elementos de la teoría de la medida implícitos en la condición b) de integrabilidad de Riemann.

3.6 La integral de Riemann y la medida

Como se llegó a la conclusión de que la R-integrabilidad de una función era posible si los puntos de discontinuidad podían ignorarse de alguna manera, algunos investigadores se enfocaron en buscar una definición de medida para los conjunto de puntos, de manera que la condición de integrabilidad pudiera expresarse en términos de tal medida.

El concepto de contenido fue introducido independientemente por Stolz, Cantor y Harnack y era aplicable a todo subconjunto acotado del plano. Este nuevo concepto fue incorporado por Peano para hacer una interpretación más rigurosa de la integral definida de una función.

El contenido de Giuseppe Peano

Peano estableció la relación entre la integral definida de una función y el contenido del conjunto limitado por su gráfica. Logró esto al mostrarse crítico con el hecho de que la existencia y definición de la integral se fundamentara en el concepto de área, el cual no tenía una definición precisa y suficientemente general. A causa de esto dio la siguiente definición:

Definición 3.11:

Dada A región acotada del plano:

- Se define el área interior $a_i(A)$ de A como la mínima cota superior de las áreas de todos los polígonos contenidos en A.

- Se define el área exterior $a_e(A)$ de A como la máxima cota inferior de las áreas de todos los polígonos que contienen a A .
- Se dice que A tiene área si y solo si $a_i(A) = a_e(A)$ y este valor común será el área de A .

Hasta la publicación de las investigaciones de Peano se asumía que un conjunto acotado por la gráfica de una función siempre tenía un contenido o área sin tener en cuenta si la función era R-integrable. Sin embargo, Peano observó que existía una analogía entre la definición 3.11 y la integral $\int_a^b f(x)dx$ del cálculo integral y señaló la estrecha relación entre los conceptos de medida y de integral:

Si $f(x)$ es no negativa en $[a, b]$, entonces si A es la región encerrada por la gráfica de f , el eje x , las rectas $x = a, x = b$, $\overline{\int_a^b f(x)dx} = a_e(A)$ $\underline{\int_a^b f(x)dx} = a_i(A)$

Si estas dos integrales son iguales, f es R-integrable y, por lo tanto, $\int_a^b f(x)dx$ mide el área descripta. Es decir, f es R-integrable si y sólo si A es medible y $\int_a^b f(x)dx = a(A)$, lo que es una redefinición de la primera condición de Riemann para la existencia de la integral.

De esta forma, Peano estableció la relación entre la integral definida de una función y el contenido del conjunto limitado por su grafica. La noción de medibilidad está implícita en la obra de Peano pero fue Jordan quien, basándose en el trabajo de éste, determinó su importancia y la introdujo explícitamente.

La medida de Camille Jordan

Jordan observó que se había clarificado enormemente el papel que desempeñaba la función en la integral pero la influencia de la naturaleza del dominio de integración no se había estudiado con el mismo cuidado. La motivación de esta observación provino del estudio de las integrales múltiples.

El tratamiento habitual hasta entonces para definir $\int_E f(x, y)dxdy$ con $E \subset \mathbb{R}^2$, acotado, consistía en dividir el plano por líneas paralelas a los ejes coordenados lo que induce una partición de E en rectángulos R_{ij} de lados $\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}$. En ésta, algunos $R_{ij} \subset E$ y otros verifican que $R_{ij} \cap \delta E \neq \emptyset$. Así, se definía la integral de f en E como el límite, cuando las dimensiones de los R_{ij} tendían a cero, de las sumas $\sum f(x_i, y_j) a(R_{ij})$ donde $(x_i, y_i) \in R_{ij}$.

Jordan observó que para que esta definición tuviera sentido se debía suponer que las áreas de los R_{ij} que intersecan la frontera de E tienden a cero al refinar la partición y esto se asumía. Es decir, se asumía que los dominios tenían una determinada área finitamente aditiva. Bajo estas ideas, Jordan dio una definición de área de un conjunto acotado en \mathbb{R}^2 . Veamos qué es la medida de Jordan y su relación con la integral de Riemann.

Motivación:

La medida de Jordan se cimenta en un par de ideas bastante sencillas.

Primero, conocida el área de un cuadrado, es natural extender esta noción a las uniones finitas de cuadrados adyacentes, con interiores disjuntos y de lados paralelos a los ejes coordenados $A = \bigcup_{i=1}^n R_i$ como $a(A) = \sum_{i=1}^n a(R_i)$. A la familia de los conjuntos de este tipo la denominamos \mathcal{F} .

Por otro lado, es fácil ver que si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ y $A_1 \subset A_2$ entonces $a(A_1) \leq a(A_2)$.

Si se quiere dar una noción de medida para conjuntos acotados del plano más generales, una forma natural de hacerlo es la aproximación por conjuntos de \mathcal{F} . Ésta es idea en la noción de contenido interior y exterior de Jordan.

Definición 3.12:

Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ acotado.

- Llamaremos contenido exterior de E a $c_e(E) = \inf_{A \in \mathcal{F}, E \subset A} a(A)$.
- llamaremos contenido interior de E , $c_i(E)$, a $c_i(E) = \sup_{A \in \mathcal{F}, A \subset E} a(A)$.
- Si $C_i(E) = C_e(E)$ diremos que E tiene contenido o que es Jordan medible y su valor será $c(E) = C_i(E) = C_e(E)$.

Observación 3.13:

- Como el conjunto E está acotado se lo puede circunscribir con un cuadrado de área positiva, luego existe $\sup_{A \in \mathcal{F}, A \subset E} a(A)$; y como las áreas son positivas existe $\inf_{A \in \mathcal{F}, E \subset A} a(A)$.
- Teniendo en cuenta las propiedades de supremos e ínfimos es fácil deducir que el conjunto E tiene contenido si y sólo si cualquiera sea el $\varepsilon > 0$ existen $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ tales que $A_1 \subset E \subset A_2$ y $a(A_2) - a(A_1) < \varepsilon$, recordar aquí la observación 1.3 del método de exhaustión.
- Observar que la medida de Jordan se puede definir en todas las dimensiones tomando segmentos, cubos o hipercubos en lugar de cuadrados.

La siguiente proposición, en apariencia intuitiva, nos ayuda a distinguir a los conjuntos Jordan de los demás conjuntos acotados que existen.

Proposición 3.14:

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ acotado es Jordan medible si y sólo si su frontera tiene contenido cero.

Demostración:

Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ acotado y supongamos que E es Jordan medible.

Dado un $A_l \in \mathcal{F}$ para el cual $E \subset A_l$, cualquiera sea el cuadrado $C_i \in A_l$ $E \cap C_i \neq \emptyset$.

Sean los elementos $B_l, D_l \in \mathcal{F}$ con $B_l \subset A_l$ y $D_l \subset A_l$ donde D_l está formado por la unión de los cuadrados $C_i \subset E$ y B_l por los restantes en A_l . Claramente $\delta E \subset B_l$ pues $E \cap B_l \neq \emptyset$ y $cE \cap B_l \neq \emptyset$.

Considerando que E es Jordan medible y que $D_l \subset E$ y $B_l \cap D_l = \emptyset$. Por definición 3.12 $c_e(E) = \lim_{l \rightarrow 0} a(B_l) + \lim_{l \rightarrow 0} a(D_l) = \lim_{l \rightarrow 0} a(D_l) = c_i(E)$

Luego $\lim_{l \rightarrow 0} a(B_l) = 0$ y como $\delta E \subset B_l$ para todo $l > 0$ será $c(\delta E) = 0$.

Ahora, si suponemos que $c(\delta E) = 0$ y tomamos los conjuntos $B_l \in \mathcal{F}$ del paso anterior, es decir conjuntos que cumplen que $\delta E \subset B_l$, y con ellos, de ser necesario, construimos los conjuntos $D_l \in \mathcal{F}$ que sean disjuntos con los B_l y de tal forma que $E \subset A_l = B_l \cup D_l$ tendremos que:

$$c_e(E) = \lim_{l \rightarrow 0} a(A_l) = \lim_{l \rightarrow 0} a(B_l) + \lim_{l \rightarrow 0} a(D_l) = c(\delta E) + \lim_{l \rightarrow 0} a(D_l) = c_i(E)$$

No nos olvidemos que estos límites siempre existen pues E es acotado. ■

Observación 3.15:

- *Obviamente, una curva siempre tiene contenido interior cero porque no contiene ningún cuadrado, luego la proposición anterior lo que expresa es que, para que un conjunto acotado del plano será Jordan medible, el contenido exterior de la frontera (que generalmente es una curva) debe ser cero. Esto nos da una idea de cómo pueden ser los conjunto que no son Jordan medibles y da una demostración rigurosa de la idea intuitiva usada por los griegos de que una línea no tiene área.*
- *Cuando se dio la motivación no se dijo nada sobre la frontera de los cuadrados. De la proposición 3.14 se deduce que es indistinto trabajar con cuadrados que son abiertos, cerrados o de otro tipo.*

El siguiente teorema muestra la estrecha relación que existe entre el concepto de contenido de Jordan y la integral de Riemann.

Teorema 3.16:

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ acotado es Jordan medible si y sólo si su función característica χ_E es R -integrable y se cumple que $c(E) = \int \chi_E$.

Demostración:

Sea $E \subset I \subset \mathbb{R}^2$ acotado, I un rectángulo que acota a E y supongamos que χ_E es R -integrable.

Dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P de I tal que sus sumas superior e inferior de Riemann satisfacen que $S(\chi_E, P) - s(\chi_E, P) < \varepsilon$

Sea A_1 la unión de los cuadrados en P contenidos en E que llamaremos R_{ij} y sea A_2 la unión de los cuadrados en P con intersección no vacía con E que llamaremos T_{ij}

(obviamente algunos de ellos serán los R_{ij} de A_1). Para estos dos conjuntos, por ser elementos de \mathcal{F} , tenemos que

$$c(A_1) = s(\chi_E, P) = \sum 1 \cdot a(R_{ij}) \quad c(A_2) = S(\chi_E, P) = \sum 1 \cdot a(T_{ij})$$

Luego podemos decir que, para todo $\varepsilon > 0$ existen $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ tales que $A_1 \subset E \subset A_2$ y $c(A_2) - c(A_1) < \varepsilon$

Por lo tanto E tiene contenido y $c(E) = \int \chi_E$.

Ahora, si suponemos que E tiene contenido, dado $\varepsilon > 0$ existen $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ tales que $A_1 \subset E \subset A_2$ y $c(A_2) - c(A_1) < \varepsilon$

Como A_1 es la unión finita de cuadrados con lados paralelos a los ejes coordenados $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$, se puede considerar una partición P_1 de I definida por los puntos x_i, y_i . Para esta partición se tiene que $c(A_1) < s(\chi_E, P_1)$ pues $A_1 \subset E$

De igual forma, para A_2 se obtendrá una partición P_2 tal que $S(\chi_E, P_2) < c(A_2)$

Luego se tiene que $S(\chi_E, P_2) - s(\chi_E, P_1) < c(A_2) - c(A_1) < \varepsilon$

Por lo tanto χ_E es integrable y $c(E) = \int \chi_E$ ■

Observación 3.17:

- El teorema 3.16 junto a la proposición 3.14 aclaran bastante el panorama sobre el área, la frontera y la integral de Riemann. Es decir, muestran que la integral de Riemann nos da el valor del área encerrada siempre que la frontera (que por lo general es una curva) no tenga área positiva.
- De teorema 3.16 se deduce que si A_1 y A_2 tienen contenido también lo tendrán las intersecciones y uniones finitas, porque $\chi_{A_1 \cap A_2} = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$, y $\chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} - \chi_{A_1 \cap A_2}$, la diferencia simétrica y también $A_1^0 = A_1 - \delta A_1$ y $\bar{A}_1 = A_1 \cup \delta A_1$.
- El teorema 3.16 también permite definir la integral de Riemann de una función f sobre un conjunto D con contenido de la siguiente forma $\int_D f = \int \chi_D f$. Dicha definición puede hacerse considerando particiones de D no en cuadrados sino más bien en conjuntos que tengan contenido. Es decir, considerar particiones en conjuntos A_i que tienen contenido y $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$. Así, $\overline{\int_D} f = \sum M_i c(A_i)$ y $\underline{\int_D} f = \sum m_i c(A_i)$ siendo M_i y m_i el supremo y el ínfimo de f en A_i . Se puede comprobar que este proceso da lugar a la misma integral de Riemann y las mismas funciones R-integrables. Queda así patente el hecho de que una medida puede conducir a una nueva teoría de la integración.
- Se puede probar que la medida de Jordan es invariante bajo isometrías (traslación y rotación).

Como ya se dijo existen conjuntos acotados en \mathbb{R}^2 que no son Jordan medibles, es decir, conjuntos acotados, o regiones del plano, que la integral de Riemann no nos puede asegurar si tienen área o no. Veamos algunos ejemplos y analicemos porque no son Jordan medibles.

Ejemplo 3.2

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $\mathbb{I} \cap [0,1]$ tienen contenido exterior uno (la clausura de ambos es $[0,1]$), son disjuntos y su unión vuelve a tener contenido exterior uno.

Este ejemplo muestra claramente que $\bar{\int} \chi_{[0,1]} \neq \bar{\int} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} + \bar{\int} \chi_{\mathbb{I} \cap [0,1]}$ y que

$\underline{\int} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \neq \bar{\int} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ y no se debe a la topología de los conjuntos.

Claramente los conjuntos del ejemplo 3.2 no tienen contenido, si nos restringimos a conjuntos con contenido ya tenemos aditividad en la medida (porque la unión finita tendrá contenido), sin embargo, si queremos dar un paso más allá de nuevo tenemos problemas.

Ejemplo 3.3

Consideremos el conjunto (cubrimiento por abiertos de los racionales en $[0,1]$)

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{1}{2^{n+2}}, r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \right) \text{ con } r_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

Si $A \in \mathcal{F}$, $A \subset E$ mediante un número finito de $\left(a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}} \right)$ se cubre a A porque es unión finita de intervalos cerrados (compacto) y, con ello, se tiene que

$$c(A) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}. \text{ Como } A \text{ es arbitrario } c_i(E) \leq \frac{1}{2}$$

Por otro lado $A \in \mathcal{F}$, $E \subset A$ como $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset E$ se tendrá $c(A) \geq 1$ y por lo tanto $c_e(E) \geq 1$ ■

Este ejemplo muestra que no todos los abiertos tienen contenido según Jordan.

La siguiente es la limitación más representativa de la medida de Jordan con respecto a la de Borel y la de Lebesgue.

Ejemplo 3.4

Los puntos de \mathbb{Q} tienen contenido cero pero $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ no tiene contenido. Es decir, la medida de Jordan no es numerablemente aditiva.

Ejemplo 3.5

No puede asignársele contenido a un conjunto como $\bigcup_{n \geq 1} \left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n} \right]$.

Al definirse sobre conjuntos acotados, la medida de Jordan no le asigna el valor $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{2^n} = 2$ al conjunto del ejemplo 3.5, cosa que supondría una armonía entre objetos (conjuntos) y resultados matemáticos.

Estas ideas de Jordan sobre medida e integración y la teoría de conjuntos de puntos influenciaron fuertemente a matemáticos franceses como Borel, Lebesgue y Baire.

Finalizamos esta sección con una breve exposición sobre el nacimiento de medida de Borel pues sus planteamientos junto con las ideas de Jordan sirvieron de base para el desarrollo de la teoría de la medida abstracta de Henri Lebesgue.

La medida de Emile Borel

El problema que motivó el desarrollo de la teoría de la medida de Borel fue el estudio de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x-a_n|}$ con $A_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{2}} < \infty$ y (a_n) denso en $[0,1]$.

El conjunto de puntos de convergencia de ésta, y su complemento en $[0,1]$ se distinguían por su cardinalidad (uno numerable y el otro no), sin embargo, eran indistinguibles en términos de contenido y no eran Jordan medibles. Así, el objetivo de Borel era lograr esta distinción por lo que se vio obligado a definir una medida que pudiera reflejar la diferencia de cardinales.

Para lograr este cometido, Borel partió de la idea de extender la noción de longitud de un intervalo a conjuntos más generales. Para ello, lo primero que observó es que un punto tiene longitud cero y un conjunto finito de puntos también tiene longitud cero. Estos conjuntos tienen la particularidad de que se pueden cubrir con una cantidad finita de intervalos disjuntos de longitud arbitrariamente pequeña. Siguiendo esta línea, también observó que el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ puede cubrirse por una cantidad numerable de intervalos tal que la suma de sus longitudes es $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i}$ y, teniendo en mente los casos anteriores, como el conjunto puede cubrirse por intervalos tales que la suma de sus longitudes es arbitrariamente pequeña, concluyó que su medida no podía valer otra cosa que cero. Para llegar a esta conclusión se debe asumir que la medida de la unión de una cantidad numerable de intervalos, que pueden tener puntos interiores en común, es menor o igual que la suma de las medidas individuales. Borel sabía esto y por ello lo enunció como un postulado (a la manera de Euclides) y estableció el siguiente sistema axiomático para su medida:

- La medida jamás es negativa.
- Si un conjunto es la unión de una cantidad infinita numerable de intervalos que no se solapan y que tienen longitud total a , entonces el conjunto tendrá longitud a .
- La medida de dos conjuntos medibles disjuntos es la suma de sus medidas. Lo mismo ocurre si se mantienen las condiciones y la cantidad es infinita numerable.
- Si un conjunto E tiene medida a y está contenido en un conjunto D de medida b , entonces $D - E$ tendrá medida $b - a$.
- Todo conjunto que no tiene medida nula es no numerable.

A partir de estos axiomas Borel logró su objetivo ya que, con ellos, era evidente que todo conjunto numerable tenía medida cero (lo recíproco a esto último no era cierto, como contraejemplo estaba el conjunto ternario de Cantor).

Como comentario final, cabe destacar que Borel no planteó una relación entre su teoría de la medida y la teoría de la integración.

3.7 La integral y la derivada

La regla de Barrow, relacionada con el teorema fundamental, se la puede ver como un proceso de reconstrucción de una función a partir de su derivada y destaca en su utilidad porque simplifica las dificultades que presenta la definición para calcular el valor de una integral, todo esto siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones.

Veamos en esta sección qué motivó la búsqueda de estas condiciones para la integral de Riemann y estudiemos el comportamiento de la integral de Lebesgue con respecto a este mismo tema (esto último es motivado por el deseo de profundizar en el tema).

Fue Darboux quien demostró, bajo la definición de Riemann, que $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$ cuando f' es integrable y no pudo garantizar hasta qué punto derivación e integración tenían este comportamiento de operaciones inversas. Es decir, no pudo exhibir una función cuya derivada no sea R-integrable.

Con ello en mente, y en base al trabajo de Darboux, Ulisse Dini, teniendo en cuenta que cuando f es constante en $[a, b]$ $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = 0$, planteó que si en vez de ser constante, f es una función tal que $f(a) = 0$ y en todo subintervalo en $[a, b]$ existe un t donde $f'(t) = 0$ con f' R-integrable entonces:

- $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f'(t_i)\Delta x_i = \int_a^b f'(x)dx = 0$ ya que siempre se pueden tomar los t_i de forma que se anule f' .
- Por teorema fundamental, $\int_a^x f'(t)dt = f(x) = 0$ contradiciendo el hecho de que f no es constante. La contradicción vino de pedir que f' se anulase en un conjunto denso del dominio.

Fue Vito Volterra quien verificó la conjetura de Dini a través de un ejemplo (ver [1] pág. 190). Veamos el ejemplo de este tipo de funciones que dio el matemático T. Broden.

Ejemplo 3.6

Sea $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ definida en $[-1, 1]$

Sea $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de $[-1, 1]$ y sea $g_n(x) = g(x - a_n)$. Luego, $g'_n(a_n)$ no está definida.

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n}$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'_n(x)}{2^n}$ y $\lim_{x \rightarrow a_n} f'(x) = \infty$

Dado que g_n es creciente para todo n , f es creciente y tiene función inversa h en $[f(-1), f(1)]$ con $h'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

h' es acotada, monótona y $h'(f(a_n)) = 0$ con $\{f(a_n)\}$ denso en $[f(-1), f(1)]$. Así, h verifica la conjetura de Dini. ■

Hoy sabemos que la relación entre las operaciones de diferenciación e integración, bajo la definición de Riemann, es la siguiente:

Si f es una función continua y F una función con derivada continua (o al menos R-integrable) entonces

- $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$
- $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$

Y es natural preguntarse ¿Qué ocurre con la integral de Lebesgue? Veamos esto.

El conjunto de funciones en donde es válido el teorema fundamental se obtiene del estudio de las propiedades de la integral $\int_a^x f(t) dt$ como función del extremo superior.

Si f es una función no negativa, $\int_a^x f(t) dt$ es una función monótona creciente. Si en cambio f es L-integrable entonces, $\int_a^x f(t) dt$ es igual a la diferencia de dos funciones monótonas no decrecientes pues $f = f^+ - f^-$. Por consiguiente, el estudio de $\int_a^x f(t) dt$ para f L-integrable puede reducirse, en cierta forma, al estudio de las funciones monótonas.

Conviene aquí mencionar algunos resultados conocidos que serán útiles más adelante:

Dada $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente:

- F es medible y acotada.
- Las discontinuidades de F solo pueden ser de tipo salto en $[a, b]$.
- El conjunto de puntos donde F es discontinua es a lo sumo numerable.
- F es de variación acotada en $[a, b]$.

Para las funciones de variación acotada en $[a, b]$:

- La combinación lineal es de variación acotada.
- Una función de variación acotada es igual a la diferencia de dos funciones monótonas crecientes y viceversa.
- Una función continua en $[a, b]$ no necesariamente es de variación acotada.

También recordemos que:

- Dados el espacio medible $([a, b], \mathbf{X}, \mu)$ con \mathbf{X} σ -álgebra de Borel, μ medida de Lebesgue, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ L-integrable y $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ con $E \in \mathbf{X}$ se cumple que $\lambda \ll \mu$ (λ es absolutamente continua respecto de μ).

Razonando con lo dicho hasta aquí, queda claro que el estudio de la derivabilidad de $\int_a^x f d\mu$ y el proceso de reconstrucción de una función a partir de su derivada $f(x) = \int_a^x f' d\mu$, en la teoría de Lebesgue, está restringido a la familia de funciones de variación acotada. Comencemos este estudio dando la siguiente definición.

Definición 3.18:

Sean $E \subset \mathbb{R}$ y \mathcal{F} una colección de intervalos en \mathbb{R} de longitud finita. Diremos que \mathcal{F} es un cubrimiento de E en el sentido de Vitali si, dados $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $x \in I$ y $0 < \mu(I) < \varepsilon$.

Un ejemplo de cubrimiento de E en el sentido de Vitali es el conjunto de las bases de entornos de los puntos en E . El siguiente teorema será de utilidad.

Teorema 3.19:

Sean $E \subset \mathbb{R}$ con $\mu(E) < \infty$ y \mathcal{F} la colección de intervalos que cubre E en el sentido de Vitali. Entonces, dado un $\varepsilon > 0$ existe una colección finita disjunta $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ de intervalos en \mathcal{F} tal que $\mu(E - \bigcup_{i=1}^n I_i) < \varepsilon$.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$

Sin pérdida de generalidad asumimos que los intervalos en \mathcal{F} son cerrados ($\mu(I) = \mu(\bar{I})$).

Sea G un abierto tal que $E \subset G$, $\mu(G) < \infty$ y cada intervalo de \mathcal{F} está contenido en G .

Elijamos en \mathcal{F} el conjunto $A = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ de intervalos disjuntos dos a dos y sea s_k el supremo de las longitudes de los intervalos en \mathcal{F} que son disjuntos con los intervalos de A .

Si $s_k = 0$ entonces $E \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ y el teorema estaría probado pues estos serían los únicos intervalos en \mathcal{F} .

Si $s_k > 0$, por ser supremo, existe $I_{k+1} \in \mathcal{F}$, disjunto con los intervalos en A y máximo en longitud tal que $\frac{s_k}{2} < \mu(I_{k+1}) < s_k$. De esta forma, construimos una sucesión $(I_k) \subset \mathcal{F}$ de intervalos disjuntos dos a dos.

Como $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset G$ se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \mu(G)$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(I_k) < \frac{\varepsilon}{4}$

Sean $R = E - \bigcup_{k=1}^n I_k$ y $x \in R$. Por ser $\bigcup_{k=1}^n I_k$ compacto y \mathcal{F} un cubrimiento en el sentido de Vitali, existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $x \in I$, es disjunto con los intervalos I_1, I_2, \dots, I_n y

$0 < \mu(I) < \frac{s_n}{2} < \mu(I_{n+1})$. Ahora, como $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(I_k) = 0$ existe un mínimo $k_0 \in \mathbb{N}$

$k_0 > n$ tal que $I \cap I_{k_0} \neq \emptyset$ (1)

Teniendo en cuenta (1) y que $x \in I$, se deduce que:

- La distancia de x al punto medio de I_{k_0} es a lo sumo $\mu(I) + \frac{1}{2}\mu(I_{k_0})$
- $\mu(I) < \mu(I_{k_0})$ pues I_{k_0} es el primer elemento de la sucesión que cumple (1) y el máximo en longitud que cumple $\mu(I_{k_0}) < s_{k_0-1}$

Luego, $\mu(I) + \frac{1}{2}\mu(I_{n_0}) < \frac{4}{2}\mu(I_{n_0})$ y con ello existirá un intervalo J_{n_0} concéntrico con I_{n_0} tal que $x \in J_{n_0}$ y $\mu(J_{n_0}) = 4\mu(I_{n_0})$.

Trabajando de igual forma sobre todos los $x \in R$ se obtendrá una sucesión (J_n) tal que $R \subset \bigcup_{i=N+1}^{\infty} J_i$ y con ello se tendrá que:

$$\mu(R) \leq \mu(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} J_i) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(J_n) = 4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(I_n) < 4 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

También será de utilidad la siguiente definición (de las 4 derivadas de Dini).

Definición 3.20:

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se define:

- Derivada superior lateral derecha de f en $x \in [a, b)$ a:

$$D^+(f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in (x, x+\delta) \cap [a, b]} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

- Derivada inferior lateral derecha de f en $x \in [a, b)$ a:

$$D_+(f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sup_{\delta > 0} \inf_{t \in (x, x+\delta) \cap [a, b]} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

- Derivada superior lateral izquierda de f en $x \in (a, b]$ a:

$$D^-(f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in (x-\delta, x) \cap (a, b]} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

- Derivada inferior lateral izquierda de f en $x \in (a, b]$ a:

$$D_-(f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \sup_{\delta > 0} \inf_{t \in (x-\delta, x) \cap (a, b]} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Observación 3.21:

- $D_+(f(x)) \leq D^+(f(x))$ y $D_-(f(x)) \leq D^-(f(x))$
- Si $D^+(f(x)) = D_+(f(x)) \neq \infty$ para $x \in [a, b)$, existe la derivada lateral derecha de f en x y coincide con este valor común.
- Si f es monótona creciente en $[a, b]$ entonces las cuatro derivadas serán positivas (ver los cocientes en las definiciones).

Ahora estamos en condiciones de dar el primer teorema relacionado con el estudio de la función $\int_a^x f(t)dt$ para la integral de Lebesgue.

Teorema 3.22:

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente.

- El conjunto $E \subset [a, b]$ en el que f es derivable cumple que $\mu([a, b] - E) = 0$.
- La derivada de f es medible en $[a, b]$.
- $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$.

Demostración:

Es claro que f será derivable en $x \in (a, b)$ si y sólo si coinciden y son finitas las cuatro derivadas de Dini.

Probemos primero que el conjunto de puntos en donde f no es derivable tiene medida cero. Es decir, debemos probar que los siguientes conjuntos tienen medida cero:

$$\{x: D^+(f(x)) > D_-(f(x))\}, \{x: D^+(f(x)) > D_+(f(x))\},$$

$$\{x: D^-(f(x)) > D_+(f(x))\}, \{x: D^-(f(x)) > D_-(f(x))\},$$

Veamos que el conjunto $E = \{x: D^+(f(x)) > D_-(f(x))\}$ tiene medida cero. (El trabajo es similar para los otros 3 restantes)

Si definimos para $p, q \in \mathbb{Q}$ $E_{pq} = \{x: D^+(f(x)) > p > q > D_-(f(x))\}$ podemos escribir a E como la unión numerable $E = \bigcup_{p, q \in \mathbb{Q}} E_{pq}$ por lo que es suficiente mostrar que $\mu(E_{pq}) = 0$ cualesquiera sean $p, q \in \mathbb{Q}$ que definan un E_{pq} . Sabemos que $\mu(E_{pq}) < \infty$ pues es un subconjunto de $[a, b]$.

Sean $\mu(E_{pq}) = s$ y $\varepsilon > 0$

Se puede construir un abierto G , como unión de bolas adecuadas, tal que $\mu(G) < s + \varepsilon$

Para cada $x \in E_{pq}$ y un $\delta > 0$ se puede construir el intervalo $[x - \delta, x]$ tal que

$[x - \delta, x] \subset G$ y como $q > D_-(f(x))$ se tiene la desigualdad $f(x) - f(x - \delta) < \delta q$.

Sea el cubrimiento según Vitali de E_{pq} $\mathcal{F} = \{[x - \delta, x] : x \in E_{pq} \text{ y } \delta \in \mathbb{R} \delta > 0\}$.

Por teorema 3.19, existe una colección finita de intervalos I_1, I_2, \dots, I_n en \mathcal{F} cuyos interiores cubren un subconjunto $A \subset E_{pq}$, tienen longitud δ_i y $\mu(E_{pq} - A) < \varepsilon$ (2)

Sumando las desigualdades que se dan sobre estos intervalos se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - \delta_i)) < q \sum_{i=1}^n \delta_i < q\mu(G) < q(s + \varepsilon)$$

Por otro lado, para cada $y \in A$ sea $\gamma > 0$ de tal forma que el intervalo $[y, y + \gamma]$ esté contenido en uno de los I_i $i = 1, \dots, n$ y con ellos constrúyase un cubrimiento según Vitali de A .

Así, $f(y + \gamma) - f(y) > p\gamma$ y existe una colección finita disjunta J_1, J_2, \dots, J_m de tales intervalos que cubren un subconjunto B de A y $\mu(A - B) < \varepsilon$, con lo que resulta que:

- $\mu(B) > s - 2\varepsilon$ pues por (2) $\mu(A) > s - \varepsilon$
- $\sum_{i=1}^m (f(y_i + \gamma_i) - f(y_i)) > p \sum_{i=1}^m \gamma_i > p(s - 2\varepsilon)$ pues $\sum_{i=1}^m \gamma_i > \mu(B)$

Y como se pidió que cada intervalo esté contenido en uno de los I_i

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - \delta_i)) \geq \sum_{i=1}^m (f(y_i + \gamma_i) - f(y_i))$$

$$q(s + \varepsilon) > p(s - 2\varepsilon)$$

$$\varepsilon > s \frac{(p-q)}{2p+q}$$

Como ε es arbitrario y $p > q$ son constantes se tendrá que $s = 0$.

Así, probando lo mismo en los otros 3 conjuntos, existe $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ c.t.p. en $[a, b]$ como un elemento de $\overline{\mathbb{R}}$.

Probemos ahora que f' es medible.

Sea la sucesión de funciones medibles (f es monótona) cuyo término general es:

$$f_n(x) = \begin{cases} n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) & x \in [a, b] \\ f(b) & x \geq b \end{cases}$$

Por definición de f' , cualquiera sea el $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ y

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon. \text{ Luego existe un } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{n_0} < \delta \text{ y}$$

$$\left| \frac{f \left(x + \frac{1}{n_0} \right) - f(x)}{\frac{1}{n_0}} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

Y así, cualquiera sea el $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces

$$\left| n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) - f'(x) \right| < \varepsilon$$

Por lo tanto $f_n \rightarrow f'$ c.t.p. y f' es medible.

Por último probemos la desigualdad.

Integrando respecto de μ (medida de Lebesgue), por lema de Fatou

$$\int_a^b f'(x) dx \leq \liminf \int_a^b n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) dx$$

Por teorema del promedio de Lebesgue

$$\liminf \int_a^b n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) dx = \liminf \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx \right)$$

De esta forma, se tendrá que

$$\liminf \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx \right) \leq f(b) - f(a)$$

Por lo tanto $\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$ ■

Como dijimos que $\int_a^x f(t) dt$ es de variación acotada para f L-integrable y, por teorema 3.22, resulta que existe $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right)$ c.t.p. en $[a, b]$ pero no necesariamente es igual a f en $[a, b]$. Para poder dar una respuesta a esta cuestión necesitaremos tener en cuenta otra propiedad de la función $\int_a^x f(t) dt$.

Definición 3.23:

Se dice que una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si cualquiera sea el $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda familia de intervalos disjuntos dos a dos $\{(x_{i-1}, i_i) : 1 \leq i \leq n\}$ en $[a, b]$ que cumpla con la condición $\sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| < \delta$ vale $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$

Observación 3.24:

- Una función absolutamente continua es uniformemente continua, lo recíproco puede no darse, un contraejemplo es la función llamada escalera de Cantor (ver [9] pág. 384).
- Una función absolutamente continua es de variación acotada ya que, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ y un intervalo (cantidad finita de intervalos) de longitud menor que δ en $[a, b]$ para el cual la variación total es finita.
- La suma de funciones absolutamente continuas es absolutamente continua.
- La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es absolutamente continua en $[a, b]$ ya que, por continuidad absoluta de medidas, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, cualquiera sea la familia de intervalos disjuntos dos a dos $\{(x_{i-1}, x_i): 1 \leq i \leq n\}$,
Si $|\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})| = \mu(\cup_{i=1}^n (x_{i-1}, x_i)) < \delta$ entonces,
 $|\sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt = \lambda(\cup_{i=1}^n (x_{i-1}, x_i)) < \varepsilon$

Ahora, respondamos, afirmativamente, a la duda planteada anteriormente.

Teorema 3.25:

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es L -integrable en $[a, b]$ y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \text{ entonces } F \text{ es derivable y } F' = f \text{ c.t.p. en } [a, b]$$

Demostración:

Supongamos que f es acotada en $[a, b]$. Es decir, supongamos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in [a, b]$ $|f(x)| \leq k$

Como F es absolutamente continua es de variación acotada y con ello es derivable c.t.p. en $[a, b]$

Sea la sucesión de funciones cuyo término general es $f_n(x) = n \left(F \left(x + \frac{1}{n} \right) - F(x) \right)$

Cualquiera sea el $n \in \mathbb{N}$ $x \in [a, b]$ $|f_n(x)| = \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt \right| \leq nk \frac{1}{n}$ y además,

$f_n(x) \rightarrow F'(x)$ c.t.p. Luego, por convergencia dominada, para un $c \in [a, b]$

$$\int_a^c F'(t)dt = \lim \int_a^c n \left(F \left(t + \frac{1}{n} \right) - F(t) \right) dt$$

Por teorema del promedio de Lebesgue

$$\lim \int_a^c n \left(F \left(t + \frac{1}{n} \right) - F(t) \right) dt = \lim \left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} nF(t)dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} nF(t)dt \right)$$

Luego

$$\lim \left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} nF(t)dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} nF(t)dt \right) = F(b) - F(a) = \int_a^c f(t)dt$$

Por lo tanto $\int_a^c (F'(t) - f(t))dt = 0$ para todo $c \in [a, b]$ y así $F' = f$ c.t.p. en $[a, b]$.

Supongamos ahora que f es L-integrable pero no es acotada y, sin pérdida de generalidad, que f es no negativa.

Sean $f_n(x) = \min \{n, f(x)\}$ y $G_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t)) dt$

Como $f - f_n \geq 0$, G_n es monótona creciente y no negativa, luego, es derivable c.t.p.

Cualquiera sea el $n \in \mathbb{N}$ f_n está acotada por n y por lo que se acaba de demostrar:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_n(t) dt = f_n(x) \text{ c.t.p.}$$

$$\text{Así, } F'(x) = \frac{d}{dx} G_n(x) + \frac{d}{dx} \int_a^x f_n(t) dt \geq f_n(x) \text{ c.t.p.}$$

Como n es arbitrario y $f_n \rightarrow f$ $F' = f$ c.t.p. en $[a, b]$

$$\text{Por lo tanto } \int_a^b F'(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$$\text{Por teorema 3.22 } \int_a^b F'(t) dt = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Por lo tanto $F' = f$ c.t.p. en $[a, b]$ ■

Con este teorema queda demostrado que para una función L-integrable $\int_a^x f(t) dt = F(x)$ c.t.p. en $[a, b]$.

Consideremos ahora la igualdad $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$ y veamos para cuáles clase de funciones se cumple. Primero daremos el siguiente lema auxiliar.

Lema 3.26:

Si F es absolutamente continua en $[a, b]$ y $F'(x) = 0$ en casi todo punto entonces F es constante.

Teorema 3.27:

Una función F es absolutamente continua en $[a, b]$ si y sólo si existe una función medible $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

Demostración:

Ya vimos que una integral indefinida es una función absolutamente continua.

Supongamos que una F es absolutamente continua en $[a, b]$.

Sabemos que existen F_1 y F_2 funciones monótonas crecientes tales que $F = F_1 - F_2$, además existe F' c.t.p. en $[a, b]$ y por desigualdad triangular $|F'| \leq F'_1 + F'_2$ c.t.p. en $[a, b]$.

Luego, por teorema 3.22 y definición, F' es L-integrable en $[a, b]$.

$$\text{Sean } G(x) = \int_a^x F'(t) dt \text{ y } H = F - G \text{ en } [a, b]$$

Por teorema 3.19

$$H' = F' - G' = 0 \text{ c.t.p. en } [a, b].$$

$$\text{Así, } H \text{ es constante y por lema } F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt \text{ ■}$$

Así, la igualdad $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ se da cuando la función es absolutamente continua. Y con esto queda claro que las funciones absolutamente continuas pueden reconstruirse (salvo constante) a partir de su derivada mediante la operación integración.

Como comentario final de esta sección, la regla de Barrow, que se usa con la integral de Riemann, es aplicable a una clase más amplia de funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ y esto es producto de que la continuidad absoluta es una condición más fuerte que la continuidad.

Capítulo 4

El área por Henri Lebesgue

4.1. El área hasta este punto

En este punto se puede decir que el área se puede entender como una función de subconjuntos del plano, no negativa, cuyo dominio vino siendo objeto de investigación.

A lo largo de estos casi 25 siglos, se pudieron determinar algunos aspectos importantes del comportamiento de esta función, de los que podemos destacar:

- $A, B \in \text{dom}(a)$ $A \subset B$ entonces $a(A) \leq a(B)$
- a es invariante por traslación, por rotación, es decir, el número que asigna la función es un invariante de la figura.
- Con respecto a las operaciones de conjuntos lo más destacable es que se descubrió que si $A, B \in \text{dom}(a)$ $a(A \cup B) + a(A \cap B) = a(A) + a(B)$ y si $A \cap B = \emptyset$ será $a(A \cup B) = a(A) + a(B)$.

Esto nos muestra que la suma de dos áreas es un área, que el área es finitamente aditiva y también la relación $a(A \cup B) \leq a(A) + a(B)$ que Borel extendió para una cantidad numerable de conjuntos.

- El método de exhaustión esconde que:

Dado $\varepsilon > 0$ existen $H, K, I \in \text{dom}(a)$ con $H \subset I \subset K$ tales que

$$a(I) - \varepsilon < a(H) \quad a(K) < a(I) + \varepsilon$$

Esta es la idea central en la definición de medida de Jordan y Lebesgue, aproximación por exceso y por defecto con figuras de área conocida.

- En la forma que maneja los indivisibles Cavalieri, se insinúa que para medir un área no es necesario tener en cuenta todos los elementos constitutivos de la figura, es decir, los conjuntos de medida cero no aportan al área total.
- Los infinitesimales y la regla de Barrow ayudaron a reconocer la integral y perfeccionar su manejo. Ésta, como herramienta, deja entrever que es posible asignar un valor de área a figuras cuyas fronteras no sean curvas cerradas. El enfoque topológico usado para enfrentar esta cuestión mostró que no parecía haber un patrón de comportamiento. Sin embargo, el concepto de medida pudo explicar esta cuestión reflejando que existe una cierta relación entre medida y área.

Esto último es lo que pensaba Lebesgue que veía el concepto de medida como generalización de los conceptos de área, longitud y volumen.

4.2. EL área por Henri Lebesgue

Para Lebesgue, el área era un caso especial de la medida que él había definido en el sentido de que la definió como una restricción de esta, es decir, impuso condiciones a las características de las regiones para que tuviera sentido el concepto. Para construir su medida, Lebesgue se basó en los resultados de Borel y Jordan.

Básicamente, reemplazó los conjuntos elementales usados por Jordan por conjuntos σ -elementales usados por Borel. La construcción se hizo en los siguientes pasos:

- Partiendo de Euclides, definió la medida de un triángulo como el área de este tomando un segmento como unidad de medida y extendió esta medida a los conjuntos σ -elementales.
- Definió como cero la medida de un segmento (de lo contrario la medida siempre sería infinita).
- Para una figura acotada A en el plano consideró un triángulo T tal que $A \subset T$ y definió la medida exterior e interior de A como sigue:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i \text{ donde los } T_i \text{ son triángulos} \right\}$$

$$\mu_*(A) = \mu(T) - \mu^*(T - A)$$

Y si estas dos medidas coincidían el conjunto A sería L-medible y su medida sería el valor común. De aquí mediante las operaciones unión, intersección y complemento de conjuntos medibles obtienen conjuntos medibles.

A partir de esta medida, definió el área como una función de conjuntos del plano de la siguiente manera.

Primero empezó definiendo lo que entendía por curva cerrada.

Definición 4.1:

Llamaremos curva cerrada en \mathbb{R}^2 al conjunto de puntos determinados por las siguientes ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ donde f y g son funciones continuas en $[a, b]$, inyectivas en (a, b) y $f(a) = f(b)$ $g(a) = g(b)$

Con esta definición y utilizando el teorema de Jordan que dice que “toda curva cerrada sin puntos múltiples divide al plano en dos regiones, una interior y otra exterior a la curva” sentó las bases para poder trabajar sobre las regiones acotadas del plano y dio la siguiente definición.

Definición 4.2:

Se llama dominio al conjunto de puntos interiores a una curva cerrada \mathcal{C} y a \mathcal{C} se le llamará frontera del dominio.

Claramente un dominio es un conjunto abierto y como tal se puede expresar como unión de abiertos disjuntos, cosa que sabía Lebesgue. Estos abiertos pueden ser rectángulos ya que la topología de “bolas cuadradas” es homeomorfa a la usual en \mathbb{R}^2 . Por estas dos razones es válida la siguiente proposición.

Proposición 4.3:

Todo dominio \mathcal{D} se puede expresar como la unión numerable de rectángulos disjuntos y el área de \mathcal{D} es igual a la suma de las áreas de los rectángulos de esta unión.

Lebesgue se planteó trabajar sobre la familia constituida por dominios a los que le podía asignar el número positivo, que le llamó su área, y ofreció la siguiente definición formal de lo que, a su parecer, se debía entender por área.

Definición 4.4:

Dado \mathbb{D} conjunto de dominios en \mathbb{R}^2 La aplicación $a: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple las siguientes propiedades:

- *Dados $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathbb{D}$. Si $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ entonces $a(\mathcal{D}_1) = a(\mathcal{D}_2)$.*
- *Dado $\mathcal{D} \in \mathbb{D}$. Si $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i$ donde $\mathcal{D}_i \in \mathbb{D}$ y $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ para $i \neq j$ entonces $a(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{\infty} a(\mathcal{D}_i)$.*

Se denomina función área, y el área de un dominio $\mathcal{D} \in \mathbb{D}$ es el número que le asigna la función.

Alguien puede objetar que esta definición admite infinitas funciones, por la no unicidad del segmento unidad, por lo que Lebesgue aclara que estas funciones solo se diferencian entre sí por una constante.

La malla de rectángulos, o cuadrados, que Lebesgue utilizó para manejar los dominios, proposición 4.3, nos recuerda a la medida de Jordan. Lebesgue no era ajeno a ello y probó la siguiente proposición.

Proposición 4.5:

Si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathbb{D}$ son disjuntos y tienen en común un y sólo un arco de frontera α , entonces el área del arco α es cero.

Para la época de Lebesgue ya habían aparecido las curvas que rellenan un área, así que Lebesgue se preguntó si su teoría le permitiría dar una respuesta más general al problema del área. Con ello en mente pensó en la posibilidad de elaborar una definición de área que involucrara a todas las curvas cerradas e hizo la siguiente distinción.

Definición 4.6:

Un dominio se dice cuadrable si su frontera tiene medida superficial nula. Una curva se dice cuadrable si tiene medida superficial nula.

Con la que cerró el tema para este tipo de regiones acotadas dando la siguiente proposición:

Proposición 4.7:

El problema del área es posible para dominios cuadrables y tiene solución única si se fija la unidad de área.

Sabemos que los conjuntos Jordan medibles son Lebesgue medibles, y también sabemos que existe una relación directa entre la medida de Jordan, la integral de Riemann y el área, que abarca más que la definición 4.4 de Lebesgue. Por ende, existe una relación entre el área de una región acotada del plano y la integral de Lebesgue y es la siguiente.

Teorema 4.8:

Sea $(\mathbb{R}, \mathbf{X}, \mu)$ con \mathbf{X} σ -álgebra de Lebesgue y μ medida de Lebesgue, sean $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \times \mathbf{X}$, τ medida producto y $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ no negativa.

f es medible sobre $[a, b]$ si y sólo si, el conjunto $Q = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y < f(x)\}$ es medible en \mathbb{R}^2 y $\tau(Q) = \int_a^b f(x)dx$ donde la integral es la integral de Lebesgue.

Demostración:

Supongamos primero que $Q \in \mathbf{Z}$. Por teorema, todas sus secciones están en \mathbf{X} .

Si $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tenemos que $Q^c = \{x \in \mathbb{R} : (x, c) \in Q\} = \{x : f(x) \geq c\} \in \mathbf{X}$ porque es la y -sección para $y = c$. Por lo tanto f es medible sobre $[a, b]$.

Por el contrario, si f es medible entonces existe una sucesión (φ_n) creciente de funciones simples, no negativas, que converge a f .

Consideremos para $n_0 \in \mathbb{N}$ $\varphi_{n_0} = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}$.

$Q_{n_0} = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y < \varphi_{n_0}(x)\} = \cup_{i=1}^{k} R_i$ donde los R_i son rectángulos.

Luego $Q_{n_0} \in \mathbf{Z}$.

Ahora, sabemos que $\varphi_{n_0} \leq \varphi_{n_0+1}$ con lo que $Q_{n_0} \subset Q_{n_0+1}$ y como $\varphi_n \rightarrow f$ se tendrá que $\{Q_n\} \rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} Q_n = Q \in \mathbf{Z}$.

Por último, si consideramos $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k_n} c_{n,i} \chi_{E_{n,i}}$ con $E_{n,i}$ disjuntos dos a dos. Por convergencia monótona, definición de τ y continuidad de la medida, se tiene

$$\int_a^b f d\mu = \lim \sum_{i=1}^{k_n} c_{n,i} \mu(\chi_{E_{n,i}}) = \lim \sum_{i=1}^{k_n} \tau([0, c_{n,i}) \times E_{n,i}) = \lim \sum_{i=1}^{k_n} \tau(R_{n,i}) = (*)$$

$$(*) = \lim \tau(Q_n) = \tau(Q), \text{ donde } R_{n,i} = E_{n,i} \times c_{n,i} \blacksquare$$

Observación 4.9:

- Con el teorema 4.8, la noción de área bajo la curva es una interpretación rigurosa para la integral de Lebesgue de una función no negativa.
- El teorema 4.8 es en realidad un corolario de un teorema mas general que dice:
Dados los espacios con medida $(\Omega, \mathbf{Y}, \lambda)$ con λ σ -finita y $(\mathbb{R}, \mathbf{X}, \mu)$ y la medida producto $\tau = \lambda \times \mu$ definida en $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ σ -álgebra en $\Omega \times \mathbb{R}$.

Si $E \in \mathbf{Y}$ y $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ es no negativa, f es \mathbf{Y} -medible sobre E si y sólo si el conjunto $Q = \{(x, y): x \in E, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y < f(x)\} \in \mathbf{Z}$, además $\int_E f \, d\mu = \tau(Q)$.

Para el caso de un dominio no cuadrable D , limitado por una curva no cuadrable α , Lebesgue advierte que el valor de su área $a(D)$ está entre la medida del dominio $\mu(D)$ y la medida del mismo agregándole la medida de la curva $\mu(D \cup \alpha)$, Lebesgue buscó una definición alternativa que incluyera estos casos pero no llegó a concluir este asunto.

4.3. Comentarios finales

En esta última sección del trabajo trataremos a *grosso modo* el tema de las curvas que encierran un área siguiendo [6] ya que una exposición rigurosa del tema requiere conocimientos más profundos.

Si una curva α tiene longitud finita l se dice rectificable y $l = \sup_{P \in \mathcal{F}} \text{long}(P)$ con \mathcal{F} familia de poligonales inscritas en α . Si en la familia \mathcal{F} se consideran las poligonales P_δ formada por segmentos de longitud $\delta > 0$ se puede probar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{long}(P_\delta) = \sup_{P \in \mathcal{F}} \text{long}(P) = l$$

Consideremos ahora una rejilla del plano en cuadrados de lado δ y, pensando en la medida de Jordan, llamemos E_δ a la unión de aquellos cuadrados que tocan la curva (E_δ es una franja de cuadrados que rodea α). La cantidad de estos cuadrados será $N(\delta)$ y con ello podemos concluir que $a(E_\delta) = N(\delta)\delta^2$. (1)

Ahora, si se asume que para δ positivo suficientemente pequeño $N(\delta)$ es aproximadamente la cantidad de lados de la poligonal P_δ y se toma límite cuando $\delta \rightarrow 0$ en (1)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{a(E_\delta)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{long}(P_\delta) = l \quad (2)$$

En consecuencia $c_e(\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = 0$ y como $c_i(\alpha) = 0$, tendremos que $a(\alpha) = 0$. Es decir, que vale que:

“toda curva rectificable tiene medida superficial de Jordan nula y, por lo tanto, todo dominio cuya frontera es una curva rectificable es Jordan medible”

Esta afirmación es un teorema que, en simples palabras, dice que una curva con longitud finita “tiene área” cero. Ahondemos un poco en esto.

Si denotamos con $N(\delta)\delta \rightarrow l$ a $\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = l$ y con $N(\delta)\delta^2 \rightarrow 0$ a

$\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = 0$ podemos escribir la afirmación como sigue:

Si $N(\delta)\delta \rightarrow l \in \mathbb{R}^+$, entonces $N(\delta)\delta^2 \rightarrow 0 = a(\alpha)$

A partir de esto es fácil ver que para $k > 1$ $N(\delta)\delta^k \rightarrow 0$ y para $0 < k < 1$ $N(\delta)\delta^k \rightarrow \infty$ y concluir que el exponente uno es especial.

De manera similar se puede hacer el análisis sobre una figura A con área s , y llegar a concluir que $N(\delta)\delta^2 \rightarrow c_e(A) = s$ y para $k > 2$ $N(\delta)\delta^k \rightarrow 0$. Si asociamos formalmente una longitud a la figura con la fórmula $N(\delta)\delta \rightarrow \infty$ podemos ver que en este caso el exponente dos es especial.

De regreso con las curvas, para una curva no rectificable se cumple que $N(\delta)\delta \rightarrow \infty$ y en la mayoría de los casos $N(\delta)\delta^2 \rightarrow 0$. Observando los casos anteriores podemos decir que se insinúa la existencia de un exponente especial para la curva.

Para las curvas, en general, existirá un único $D \in [1,2]$ para que el límite sea no nulo, es decir, D es tal que $N(\delta)\delta^D \rightarrow s \in \mathbb{R}^+$. A este exponente D se le llama dimensión de Hausdorff-Besicovitch o dimensión fractal de la curva.

En algunos casos D puede valer dos. Las curvas para las que ocurre esto cumplen un rol intermedio entre una curva y una superficie y son el motivo por el que Lebesgue dio la definición 4.6.

Se puede probar, con el debido soporte teórico, que “una curva plana tiene medida de Jordan cero si y sólo si su dimensión fractal es menor que dos”.

Finalizamos mostrando un ejemplo de curva simple no cuadrable (que tiene área) y con ella un dominio no cuadrable.

Ejemplo 4.1

Dado el cuadrado unitario, procedamos a subdividirlo en nueve cuadrados iguales de lado $\frac{1}{3}$ los separemos entre sí una distancia $\frac{1}{3^2}$ y construyamos una poligonal como se muestra en la

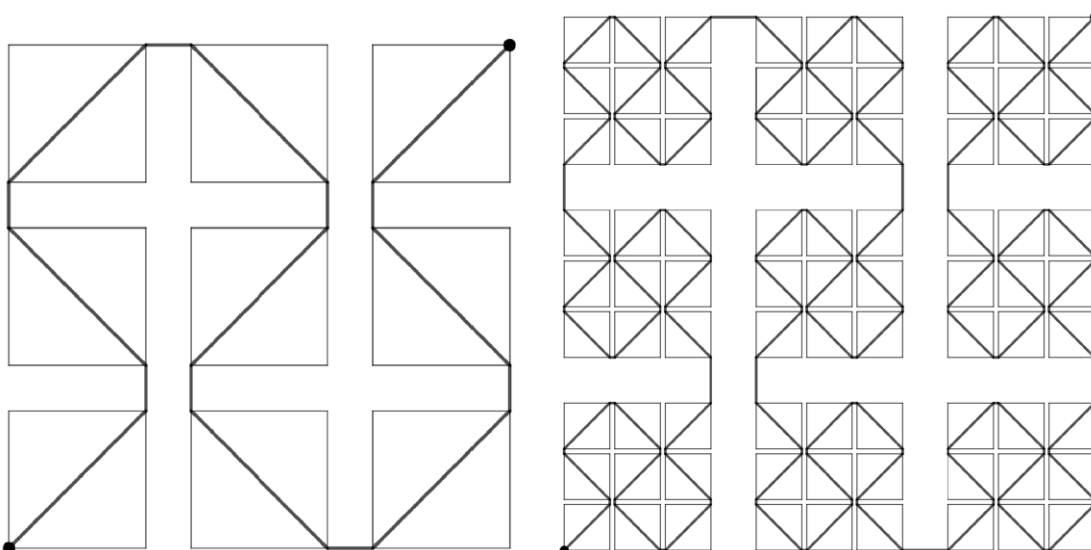


Figura 4.1

Figura 4.2

figura 4.1. En un segundo paso, a cada uno de los nueve cuadrados en la figura 4.1 los subdividamos en nueve cuadrados de lado $\frac{1}{3^2}$, los separemos entre sí una distancia $\frac{1}{3^4}$ conservando las distancias que existían entre los cuadrados del paso anterior y construyamos una poligonal como se muestra en la figura 4.2. Del mismo modo se puede seguir haciendo subdivisiones y construyendo poligonales, el siguiente cuadro resume los datos necesarios para la construcción de las poligonales:

	Longitud de lado en cuadrados de subdivisión	Distancia entre cuadrados de la subdivisión	Aumento en la longitud del lado del cuadrado que contiene la poligonal anterior
1 ^{er} paso	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{3}$	$\frac{2.1}{3^2}$
2 ^{do} paso	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^2} \frac{1}{3^2}$	$\frac{2.3}{3^4}$
3 ^{er} paso	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^6}$	$\frac{2.9}{3^6}$
...
n-ésimo paso	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{1}{3^{2n}}$	$\frac{2.3^{n-1}}{3^{2n}}$

Prosiguiendo de esta forma, en el límite, las poligonales determinarán una curva simple (que no se auto interseca) α cuyos extremos serán dos vértices de una diagonal del cuadrado cuyo lado tiene longitud $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Con el concepto de dimensión topológica se puede probar que $c_i(\alpha) = 0$. Por otro lado, $c_e(\alpha) = 1$ ya que en las sucesivas subdivisiones se obtiene una franja de cuadrados E_δ que rodea α y que es una partición cada vez más refinada del cuadrado original de área uno. O sea que, usando lo dicho más arriba, cualquiera sea el $n \in \mathbb{N}$ si $\delta = \frac{1}{3^n}$ tenemos que $N(\delta) = 9^n$ por lo que $N(\delta)\delta = 3^n$ y $N(\delta)\delta^2 = 1$.

Por lo tanto la curva no es Jordan medible. Sin embargo, teniendo en cuenta que curva simple en el plano es un cerrado y un Borel medible es un Lebesgue medible y usando un resultado que dice “la medida de Borel de un cerrado coincide con su medida exterior de Jordan y la de un abierto con su medida interior de Jordan”, concluimos que la curva α tiene área uno.

De más está decir que el dominio no cuadrable se construye uniendo los extremos de α con una curva por fuera de α ■

Bibliografía

- [1] Martha Lucía Bobadilla, “Desarrollo Conceptual de la Integral y la Medida: un Tránsito entre lo Geométrico y lo Analítico”, Tesis de Doctorado en Educación, Universidad del Valle - Cali Colombia, 2012.
- [2] Euclides, “Los Elementos”.
- [3] Laura Hernández Cabezas, “Euclides: Libro X”, Trabajo fin de Grado en Matemática, Universidad de La Laguna - Tenerife España, 2019.
- [4] José María Ayerbe Toledo, “Historia de Matemáticas: Los Métodos Infinitesimales para el Cálculo de Cuadraturas y Cubaturas”, Revista de Investigación e Innovación Educativa Pensamiento Matemático (MAIC), Volumen VIII, número 1, 2018.
- [5] José Barrios García, “La Geometría de los Indivisibles: Buenaventura Cavalieri”, Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna - Tenerife España.
- [6] Luis Víctor Dieulefait, “Medida de Jordán”, Institut Galilée, Universidad de París XIII-Villetaneuse Francia, 2003.
- [7] Norberto Fava, Felipe Zó, “Medida e Integral de Lebesgue”, Fascículo 4, Dpto. de Matemática, Universidad de Buenos Aires, 2013.
- [8] S. J. Taylor, “Introduction to Measure and Integration”, Cambridge University, Cambridge Inglaterra, 1973.
- [9] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, “Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional”, Editorial Mir, Segunda edición, 1975.

