

MODELADO NUMÉRICO DE CÁSCARAS CON COMPUESTOS PIEZOELECTRICOS

por

Ahmad Eduardo Guennam

Tesis presentada como requisito parcial
para acceder al grado académico de
“DOCTOR EN INGENIERÍA”
de la
Universidad Nacional de Tucumán

INSTITUTO DE ESTRUCTURAS “ARTURO M. GUZMÁN”

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

San Miguel de Tucumán

Agosto de 2010

A mi Familia.

RECONOCIMIENTOS

Quisiera expresar mi profunda gratitud hacia mi Tutora Dra Bibiana Luccioni, de quien siempre recibo apoyo incondicional, constante aliento y confianza. No creo encontrar, en este momento, las palabras para expresar lo que para mí significa haber transitado esta etapa bajo su supervisión. Quisiera agradecer, también, al resto de los miembros de la Comisión de Supervisión, Aníbal Mirasso y Carlos García Garino, por los valiosos aportes.

Al Director del Instituto de Estructuras Ing. Enrique Galíndez, por la confianza y el constante apoyo.

Al Dr. Rodolfo Danesi por su constante aliento. A los que fueron y siempre serán mis profesores. A todos los integrantes del Instituto de Estructuras.

A mis compañeros, por los gratos momentos compartidos y el constante apoyo.

A mis hermanos del alma, María y Hassan por ser las personas maravillosas que están conmigo siempre, incondicionalmente. A Valentina, mi sobrina del alma. A mi querida Abuela Tamra y a toda mi amada, hermosa Familia.

Siempre conservo un profundo reconocimiento hacia mis Padres, quienes nunca abandonan mi mente ni mi corazón.

Finalmente, quisiera expresar mi agradecimiento a la Universidad Nacional de Tucumán, a la Universidad Nacional de La Plata y al CONICET.

Resumen

En esta tesis se presenta una herramienta numérica que permite modelar de manera eficiente estructuras construidas total o parcialmente con materiales ferroeléctricos - piezoeléctricos, para dar origen a un sistema estructural activo capaz de responder a estímulos y adaptar su comportamiento manteniéndose dentro de límites aceptables de operación. La herramienta permite modelar estructuras no sólo en el campo lineal sino también, y fundamentalmente, en presencia de no linealidades del material.

Se propone un elemento finito de cáscara piezoeléctrica multilámina con un esquema de interpolación del campo eléctrico que soporta la inclusión de laminados reforzados con fibras piezoeléctricas polarizados con electrodos interdigitales. La formulación del elemento se combina con un modelo material para tener en cuenta los fenómenos no lineales y dependientes de la historia, de repolarización e histéresis, observados en los materiales ferroeléctricos. Para describir el comportamiento macroscópico del laminado se propone, además, un modelo material conformado por un modelo fenomenológico termodinámicamente consistente para describir el comportamiento de las fibras, en conjunto con un modelo de homogeneización electromecánico para el compuesto.

El elemento formulado, que incluye el modelo material desarrollado, ha sido implementado como subrutina de usuario en el programa comercial ABAQUS.

Se presentan ejemplos de aplicación, en rango lineal, de control de vibraciones y microgeneración de energía eléctrica, en los los que se manifiesta la facilidad en el modelaje que introduce el uso del elemento formulado y la disminución en el costo computacional respecto al requerido cuando se utilizan elementos sólidos. Se presentan, además, comparaciones de la respuesta estática obtenida con el elemento y modelos desarrollados, con resultados experimentales reportados en la bibliografía sobre estructuras que incluyen compuestos piezoeléctricos. Finalmente, se tiene en cuenta la respuesta de una estructura cuando se manifiestan los fenómenos materiales no lineales estudiados.

Los ejemplos de aplicación considerados, reflejan la utilidad del elemento finito y el modelo material, propuestos e implementados.

Abstract

A numerical tool aimed for modeling active structures dotted with ferroelectric/piezoelectric smart materials is presented in this thesis. Structural systems of this kind are able to respond to stimuli and adapt their shape and behavior, keeping within suitable operation limits. The proposed numerical tool confers modeling capabilities in both, linear and non-linear material range.

A piezoelectric multilamina finite element shell is proposed. A new scheme is introduced for the electric field interpolation that allows the modeling of piezoelectric fibre composite laminates polarized with interdigitated electrode pattern. The element formulation is combined with a non linear history dependent material model that takes into account polarization switching and hysteresis. In order to describe the macroscopic composite behavior, a material model is proposed which combines a phenomenological thermodynamic consistent model describing the fibre behavior together with an electromechanical composite homogenization model.

The formulated element, which includes the proposed material model, was implemented in the commercial package ABAQUS as a user subroutine.

The static linear response of composite structures including piezoelectric materials is first analyzed. Comparisons of the static response predicted using the present formulation and experimental results reported in the literature are presented. Application examples are presented in linear range for vibration control and electric energy harvesting. The examples manifest the ease in modeling that introduces the use of the element and the decrease in computational cost with respect to that required when using solids finite elements. Finally, static and dynamic analyses are carried out taking into account the nonlinear material behavior and the structure response when polarization switching phenomena are present.

The application examples considered reflect the simulation capabilities introduced by the finite element and the material model developed and implemented.

ACTA

En la ciudad de San Miguel de Tucumán, en el local del Instituto de Estructuras de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán, siendo las 11.00 hs. del día 6 de Agosto de 2010, se reúne el Tribunal Examinador integrado por: Dr. Ing. ALBERTO CARDONA (Profesor de la Universidad Nacional del Litoral), Dr. Ing. LUIS AUGUSTO GODOY (Profesor de la Universidad Nacional de Córdoba), Dr. Ing. GUILLERMO ETSE (Profesor de la Universidad Nacional de Tucumán), designados por Resolución N° 0242-2010 del Sr. Rector de la U.N.T., para evaluar la Tesis realizada por el Ingeniero AHMAD EDUARDO GUENNAM, para completar los requerimientos para acceder al Grado Académico de “Doctor en Ingeniería”. El título de la Tesis es “MODELADO NUMÉRICO DE CÁSCARAS CON COMPUESTOS PIEZOELÉCTRICOS” y fue dirigida por la Dr. Ing. BIBIANA LUCCIONI.

Cada uno de los miembros del Tribunal Examinador recibió oportunamente un ejemplar de la Tesis y decidió la aceptación de la misma.

Del análisis de la misma surge que en la investigación llevada a cabo por la postulante se estudia el modelado de cáscaras realizadas en materiales compuestos con electrodos piezoeléctricos embebidos, y su representación mediante modelado acoplado en forma fuerte de los campos mecánico y eléctrico.

Asimismo, este Tribunal destaca los siguientes aspectos originales de la Tesis que constituyen avances en el campo del conocimiento:

- La metodología de homogeneización del compuesto piezoeléctrico.
- El análisis de sistemas no lineales acoplando campos eléctrico y de deformación con representación de fenómenos de polarización, saturación e histéresis.
- La implementación de un elemento finito para materiales compuestos que permite manifestar el acoplamiento entre los campos tratados.

Con posterioridad a un intercambio de opiniones sobre distintos aspectos de la Tesis, el Tribunal Examinador tuvo una entrevista con el postulante. En la entrevista el postulante manifestó poseer un destacado conocimiento sobre los temas tratados, y respondió con solvencia las preguntas del jurado.

En base a todo lo expuesto, el Tribunal dispuso que a continuación se lleve a cabo la exposición pública de la misma.

Siendo las 13:30 hs. se realizó la exposición pública de la Tesis en presencia de la totalidad de los miembros del Tribunal Examinador, de la Directora de Tesis

y Directora del Doctorado en Ingeniería, del Director del Instituto de Estructuras y de Profesores y público en general.

La exposición del postulante tuvo una duración de 60 minutos, tras lo cual se efectuaron preguntas y apreciaciones acerca de la investigación y su importancia para el avance del conocimiento en el área de trabajo.

En base a una evaluación de la labor global desarrollada por el Ing. AHMAD EDUARDO GUENNAM, este Tribunal Examinador aconseja por unanimidad se otorgue el Grado Académico de "DOCTOR EN INGENIERÍA" al Ingeniero AHMAD EDUARDO GUENNAM con calificación 10. A su vez, recomienda al Sr. Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, la publicación de la Tesis por parte de la Universidad Nacional de Tucumán.


Dr. Ing. ALBERTO CARDONA


Dr. Ing. LUIS GODOY


Dr. Ing. GUILLERMO ETSE

ÍNDICE GENERAL

Índice general	v
Índice de figuras	xI
Índice de tablas	xv
Notación	xvII
1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Importancia y aplicaciones del tema	3
1.3. Objetivos de la tesis	7
1.4. Alcance	8
1.5. Contenidos	8
2. Materiales y dispositivos piezoeléctricos	10
2.1. Introducción	10
2.2. Conceptos de electromagnetismo	11
2.3. Comportamiento de los materiales piezoeléctricos y sus propiedades	12
2.3.1. Introducción	12
2.3.2. Materiales ferroeléctricos	14
2.4. Comportamiento no lineal de los materiales ferroeléctricos	18
2.4.1. Propiedades de los principales materiales piezoeléctricos utilizados en sistemas de control estructural	20

2.5. Clasificación y descripción de los distintos tipos de dispositivos de control diseñados con materiales piezoeléctricos	22
2.5.1. Introducción	22
2.5.2. Dispositivos tipo pila	23
2.5.3. Dispositivos tipo parche elaborado con fibras piezoeléctricas	24
3. Estado del arte	29
3.1. Introducción	29
3.2. Modelos constitutivos para materiales ferroeléctricos	30
3.2.1. Modelos constitutivos lineales	30
3.2.2. Modelos constitutivos no lineales	36
3.2.2.1. Modelos constitutivos microelectromecánicos	38
3.2.2.2. Modelos constitutivos fenomenológicos	43
3.2.3. Modelos para compuestos piezoeléctricos	47
3.3. Elementos finitos piezoeléctricos	49
3.3.1. Elementos sólidos	50
3.3.2. Elementos de viga	52
3.3.3. Elementos de placa	52
3.3.4. Elementos de cáscara	54
3.3.5. Aplicaciones y tendencias actuales	57
4. Modelos constitutivos utilizados en la tesis	58
4.1. Introducción	58
4.2. Modelo fenomenológico	58
4.2.1. Marco termodinámico	59
4.2.2. Modelo fenomenológico para las fibras	62
4.3. Modelo microelectromecánico	65
4.3.1. Modelo microelectromecánico de Huber (1999)	66
5. Modelo de homogeneización electromecánico no lineal propuesto	72
5.1. Introducción	72

5.2. Modelo para el compuesto polarizado con electrodos interdigitales	73
5.2.1. Representación idealizada del compuesto	75
5.2.2. Modelo de homogeneización para el compuesto piezoeléctrico	76
5.2.3. Esquema de cálculo	82
5.2.4. Integración de la ecuación constitutiva de las fibras	83
6. Elemento finito de cáscara propuesto	91
6.1. Introducción	91
6.2. Formulación general de elementos finitos	92
6.2.1. Ecuaciones diferenciales del problema	93
6.2.2. Forma débil	95
6.2.3. Derivación de las ecuaciones de elementos finitos	96
6.3. Procedimiento iterativo de solución para el caso estático	98
6.4. Integración temporal del problema dinámico	99
6.5. Formulación del elemento de cáscara piezoeléctrica propuesto	101
6.5.1. Aspecto mecánico	102
6.5.2. Aspecto eléctrico	105
6.6. Pruebas del elemento formulado	108
6.6.1. Viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos	108
6.6.2. Placa con actuadores piezoeléctricos	111
6.6.3. Cajón cerrado	115
7. Ejemplos de aplicación	119
7.1. Ejemplos y verificaciones de los modelos materiales	120
7.1.1. Cerámica ferroeléctrica - Modelo fenomenológico	120
7.1.1.1. Simulación numérica de un proceso de polarización - Cerámica PZT-5H	121
7.1.1.2. Comparaciones con resultados experimentales de cerámi- ca PLZT	125
7.1.2. Cerámica ferroeléctrica - Modelo microelectromecánico	127

7.1.2.1.	Introducción	127
7.1.2.2.	Comportamiento de un policristal	129
7.1.2.3.	Proceso de polarización	132
7.1.3.	Compuesto simple - Modelo de homogeneización propuesto	136
7.2.	Cajón cerrado analizado experimentalmente por duPlessis (1998)	140
7.2.1.	Descripción del sistema analizado - Modelo numérico	141
7.2.2.	Análisis estático	143
7.2.3.	Análisis dinámico - Control de vibraciones	144
7.2.3.1.	Respuesta en frecuencia	145
7.2.3.2.	Respuesta transitoria	145
7.3.	Cajón cerrado analizado por Guennam y Luccioni (2006)	148
7.3.1.	Descripción del sistema analizado - Modelo numérico	148
7.3.2.	Análisis estático	149
7.3.3.	Análisis dinámico - Control de vibraciones	149
7.3.3.1.	Respuesta transitoria	150
7.4.	Amortiguamiento estructural por disipación en una red eléctrica pasiva	151
7.4.1.	Descripción del sistema analizado - Modelo numérico	151
7.4.2.	Resultados	152
7.5.	Análisis estático y dinámico bajo comportamiento no lineal material	157
7.5.1.	Actuador solo	157
7.5.2.	Actuador dispuesto entre dos placas de aluminio	160
7.5.3.	Viga de aluminio con actuadores piezoeléctricos - Análisis estático no lineal	162
7.5.4.	Viga de aluminio con actuadores piezoeléctricos - Análisis dinámico no lineal	164
8.	Conclusiones y recomendaciones	169
8.1.	Introducción	169
8.2.	Conclusiones	171

8.2.1. Con respecto al objetivo específico: <i>Proponer un modelo de homogeneización no lineal para compuestos piezoeléctricos</i>	171
8.2.2. Con respecto al objetivo específico: <i>Formular un elemento finito de cáscara piezoeléctrica</i>	172
8.2.3. Con respecto al objetivo específico: <i>Aplicar la herramienta desarrollada</i>	173
8.3. Recomendaciones para trabajos futuros	175
Bibliografía	177

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Esquema de clasificación de cristales (Zhou, 2003).	13
2.2. Respuesta de una probeta de PZT-5H a un campo eléctrico cíclico (Ghandi, 1998).	14
2.3. Estructura de perovskita (Ghandi, 1998).	15
2.4. Secuencia del proceso de polarización de un medio ferroeléctrico.	17
2.5. Celda unitaria de PZT. Pasaje de estructura Cúbica a Tetragonal al enfriarse por debajo de la temperatura de Curie.	18
2.6. Conmutaciones en PZT (Landis, 2004).	20
2.7. Esquema de la celda unitaria del cuarzo. a) No deformada. b) Comprimida. c)Traccionada.	21
2.8. Distinción entre dispositivos tipo 3-1 y tipo 3-3.	22
2.9. Esquema de un dispositivo tipo pila y un adaptador de fuerzas.	23
2.10. Utilización de un dispositivo tipo pila para accionar una superficie de control (Lee, 1999).	23
2.11. Parche de compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales (Smart-Material, 2010).	24
2.12. Esquema de una fibra piezoeléctrica luego del proceso de polarización - Corte longitudinal.	25
5.1. Compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales.	74
5.2. Esquema del modelo de campos uniformes.	76
5.3. Esquema de composición y descomposición.	82
5.4. Entradas y salidas del algoritmo de retorno mapeado.	84
5.5. Etapa A - Variables uniformes (comunes a ambas componentes).	88

5.6. Etapa B - Variables uniformes (comunes a ambas componentes).	89
5.7. Etapa C - Variables uniformes (comunes a ambas componentes).	89
6.1. Esquema del elemento de cáscara piezoeléctrica propuesto.	101
6.2. Representación del elemento de referencia, de la superficie media del elemento real y la base covariante.	105
6.3. Variación del campo eléctrico en una porción de fibra piezoeléctrica entre dos electrodos, análisis detallado con MEF. (Guennam, 2005)	106
6.4. Viga con actuadores piezoeléctricos.	109
6.5. Convergencia en viga con actuadores piezoeléctricos. Desplazamiento del extremo libre.	111
6.6. Placa plana en voladizo con actuadores piezoeléctricos.	112
6.7. Placa plana - Mallas uniformes y distorsionadas.	112
6.8. Análisis de convergencia en placa plana. Relación $L/t = 10$. Campo Eléctrico a 90° - Efecto de la interpolación MITC (Malla uniforme).	113
6.9. Análisis de convergencia en placa plana. Relación $L/t = 100$. Campo Eléctrico a 90° - Efecto de la interpolación MITC (Malla uniforme).	114
6.10. Comparación de convergencia en placa plana para mallas uniformes y distorsionadas. Relación $L/t = 100$. Campo Eléctrico a 90°	114
6.11. Comparación de convergencia en placa plana para mallas uniformes y distorsionadas. Relación $L/t = 100$. Campo Eléctrico a 45°	115
6.12. Cajón cerrado con actuadores a $+/- 45^\circ$ - Geometría.	116
6.13. Mallado del cajón. (a) Malla 2x2. (b) Malla 4x4. (c) Malla 6x6. (d) Malla 8x8	116
6.14. Cajón cerrado con actuadores a $+/- 45^\circ$ - Convergencia.	117
7.1. Cambio en el desplazamiento eléctrico D_3 en función del campo eléctrico aplicado en dirección x_3 - Comparación con resultados experimentales de Huber y Fleck (2001).	122

7.2. Desplazamiento eléctrico D_3 en función del campo eléctrico aplicado en dirección x_3 - Modelo fenomenológico.	123
7.3. Deformación ε_{33} en función del campo eléctrico E_3	124
7.4. Polarización total y remanente en función de la tensión de compresión σ_{33}	125
7.5. Desplazamiento eléctrico D_3 en función del campo eléctrico E_3	127
7.6. Deformación ε_{33} en función del campo eléctrico E_3	128
7.7. Cubo de material ferroeléctrico.	130
7.8. Ciclos de histéresis dieléctrica. Resultados obtenidos con el modelo micromecánico para diferentes niveles de refinamiento de malla.	133
7.9. Ciclos de histéresis de deformaciones en dirección del campo eléctrico aplicado. Resultados obtenidos con el modelo micromecánico para diferentes niveles de refinamiento de malla.	134
7.10. Desplazamiento eléctrico. Comparación de resultados.	135
7.11. Deformaciones ε_{33} . Comparación de resultados.	136
7.12. Sector de laminado piezoeléctrico analizado con elementos finitos sólidos y modelo constitutivo micromecánico para las fibras. Geometría analizada y malla de elementos finitos.	139
7.13. Deformación longitudinal del compuesto piezoeléctrico obtenida con el modelo de homogeneización propuesto y el análisis detallado con elementos sólidos de la celda unitaria. Comparación de resultados.	140
7.14. Fotografía del cajón ensayado experimentalmente por du Plessis (1996).	141
7.15. Esquema, dimensiones y disposición de actuadores en la pala analizada por du Plessis (1996).	142
7.16. Secciones transversales del laminado correspondientes a la zona activa y pasiva.	142
7.17. Malla de elementos finitos.	143
7.18. Comparación entre el giro estático obtenido con el modelo propuesto y el medido experimentalmente (du Plessis, 1996).	144
7.19. Cajón cerrado con actuadores - Respuesta en frecuencia.	146

7.20. Cajón cerrado con actuadores - Respuesta transitoria.	147
7.21. Factor de amortiguamiento.	147
7.22. Voltajes de control para el actuador de la raíz y de la punta. $\gamma_q = 1,0E^7$.	148
7.23. Geometría del cajón cerrado analizado en Guennam y Luccioni (2006). .	149
7.24. Comparación en el giro del extremo libre.	150
7.25. Comparación de los voltajes de control.	151
7.26. Cajón con dispositivos piezoeléctricos conectados a una red eléctrica pasiva.	152
7.27. Amortiguamiento y frecuencia natural - Primer modo flexional.	153
7.28. Amortiguamiento y frecuencia natural - Primer modo torsional.	153
7.29. Potencia disipada en función de la resistencia eléctrica. Excitación flexional.	154
7.30. Potencia disipada en función de la resistencia eléctrica. Excitación torsional.	154
7.31. Respuesta temporal ante una momento torsor aplicado en el extremo libre modulado por una cupla de 0,5 segundos de duración; $R = 2000(\Omega)$	155
7.32. Respuesta temporal ante una momento torsor aplicado en el extremo libre modulado por una cupla de 0,5 segundos de duración; $R = 20000(\Omega)$. . .	155
7.33. Respuesta temporal frente a un momento torsor aplicado en el extremo libre modulado por una señal escalón de 0,5 segundos de duración.	156
7.34. Respuesta de un actuador solo. Deformación longitudinal.	159
7.35. Respuesta de un actuador solo. Carga eléctrica en los electrodos.	160
7.36. Respuesta de un actuador dispuesto entre dos placas de aluminio, cada una de 0,5(mm) de espesor. Deformación longitudinal.	161
7.37. Viga voladizo. Geometría y malla de elementos finitos	163
7.38. Viga voladizo. Sección transversal con actuadores en la cara superior e inferior	163
7.39. Viga voladizo. Desplazamiento vertical del extremo libre.	164
7.40. Respuesta dinámica temporal no lineal de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Desplazamiento mecánico vertical del extremo libre.	165

7.41. Respuesta dinámica temporal no lineal de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Carga eléctrica en los electrodos.	166
7.42. Respuesta en frecuencia de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Módulo de la transformada en función de la frecuencia.	167

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Definición de constantes piezoeléctricas.	33
3.2. Propiedades de materiales piezoeléctricos típicos.	36
5.1. Modo de combinación de variables.	77
6.1. Propiedades materiales.	109
7.1. Propiedades materiales para la cerámica PZT-5H (Huber y Fleck, 2001) .	121
7.2. Parámetros del modelo fenomenológico usados para modelar la cerámica PZT-5H (Huber y Fleck, 2001)	122
7.3. Parámetros del modelo fenomenológico utilizado para simular en compor- tamiento de la cerámica PLZT.	126
7.4. Propiedades materiales de la cerámica PLZT	126
7.5. Parámetros del modelo microelectromecánico.	131
7.6. Propiedades materiales para el policristal.	131
7.7. Condiciones de borde para simular la polarización inicial.	132
7.8. Propiedades materiales y parámetros geométricos para el compuesto piezoeléctrico analizado.	138
7.9. Condiciones de borde para analizar el octante de celda unitaria con el modelo detallado de elementos finitos.	139
7.10. Propiedades de los materiales utilizados para el cajón cerrado ensayado experimentalmente por du Plessis (1996).	141
7.11. Propiedades materiales para el actuador piezoeléctrico.	158

NOTACIÓN

Símbolos Griegos

α	Parámetro de integración numérica temporal
α^E	Tensor de separación de variables
α^f	Constante de proporcionalidad de la superficie de conmutación
α^S	Tensor de separación de variables
β	Parámetro de integración numérica temporal
β^f	Constante de proporcionalidad de la superficie de conmutación
β_{ik}^ε	Tensor dieléctrico a deformación constante - Forma $\sigma - E$
β_{ik}^σ	Tensor dieléctrico a tensión mecánica constante - Forma $\varepsilon - E$
γ	Parámetro de integración numérica temporal
γ^α	Deformación asociada a la transformación α
Γ	Vector que agrupa deformaciones y campo eléctrico
δ_{ij}	Delta de Kronecker
Δt	Paso de tiempo
$\Delta \hat{U}$	Incremento en los desplazamientos nodales
$\tilde{\varepsilon}_{rt}, \tilde{\varepsilon}_{st}$	Componentes covariantes de deformaciones transversales de corte
$\tilde{\varepsilon}_{rt} _A^{DI}$	Componentes covariantes de deformación evaluadas directamente con la interpolación de desplazamientos en el punto A
ε_{kl}	Componentes del tensor de deformaciones
ε_{ij}^l	Componentes del tensor de deformaciones - Parte lineal
ε_{ij}^r	Componentes del tensor de deformaciones - Parte remanente
η_{ij}	Permitividad dieléctrica, sin la contribución del vacío
θ_1^k, θ_2^k	Giros nodales correspondientes al nodo k
$\dot{\lambda}$	Multiplicador de conmutación

μ	Módulo de corte
μ_{ij}^α	Tensor unitario de orientación de Schmid correspondiente al sistema de transformación α
ν	Módulo de Poisson
Ξ	Tasa de disipación por unidad de volumen
ρ	Densidad
σ_{ij}	Componentes del tensor de tensiones
$\hat{\sigma}_{ij}$	Tensión mecánica relativa (Conjugada energética de ε_{ij}^r)
σ_{ij}^B	Tensión mecánica “back”, asociada a las derivadas de la parte remanente del potencial de energía libre
$\bar{\sigma}_{ij}$	Tensión mecánica asociada a los cambios en los módulos materiales
Σ	Vector que agrupa tensiones mecánicas y desplazamientos eléctricos
ϕ	Potencial eléctrico
$\hat{\phi}$	Vector de potenciales eléctricos nodales
φ_i	Potencial eléctrico correspondiente al nodo o capa i
χ_0	Permitividad dieléctrica del vacío ($8,85E^{-12}F/m$)
χ_{ik}^ε	Tensor dieléctrico a deformación constante - Forma $\sigma - D$
χ_{ik}^σ	Tensor dieléctrico a tensión mecánica constante - Forma $\varepsilon - D$
ψ	Energía libre de Helmholtz
ψ^s	Parte reversible o almacenada de la energía libre
ψ^r	Parte remanente de la energía libre

Símbolos Latinos

a_k	Espesor correspondiente al nodo k
$A^{I\alpha}$	Matriz de influencia de cada sistema de conmutación α en la concentración de cada variante cristalina I
$A_{e=1}^{NE}$	Operador de ensamblaje
B_e	Matriz de gradientes discretos eléctricos
B_m	Matriz de gradientes discretos mecánicos

- B** Matriz de gradientes discretos generalizados (mecánicos y eléctricos)
- c^I Fracción de volumen de cada variante cristalina I
- C_{ijkl}^D Tensor elástico determinado a desplazamiento eléctrico constante -
Forma $\sigma - E$
- C_{ijkl}^E Tensor elástico determinado a campo eléctrico constante
- d_{kij} Tensor piezoeléctrico correspondiente a forma $\varepsilon - D$: Deformación inducida por unidad de campo eléctrico (m/V) o carga eléctrica inducida por unidad de tensión mecánica (C/N)
- d** Vector que agrupa desplazamientos mecánicos y potenciales eléctricos dentro del elemento
- D_i Vector de desplazamiento eléctrico
- \vec{e} Vector unitario director de las fibras
- e_{kij} Tensor piezoeléctrico correspondiente a forma $\sigma - D$: Tensión mecánica inducida por unidad de campo eléctrico (N/Vm) o carga eléctrica inducida por unidad de deformación (C/m^2).
- E^* Componentes de deformación y campo eléctrico que trabajan en paralelo y componentes de tensión y desplazamiento eléctrico que trabajan en serie
- E** Vector campo eléctrico
- E_i Componentes del vector campo eléctrico
- \hat{E}_i Campo eléctrico relativo (Conjugado energético de P_i^r)
- E_i^B Campo eléctrico “back”, asociado a las derivadas de la parte remanente del potencial de energía libre
- \bar{E}_i Campo eléctrico asociado a los cambios en los módulos materiales
- E_i^c Campo eléctrico del origen de la superficie de conmutación
- f_i Fuerzas volumétricas
- F_i Fuerzas de superficie

\dot{f}^α	Incremento de conmutación
\mathbf{F}^{ext}	Vector de fuerzas exteriores
\mathbf{F}^{int}	Vector de fuerzas interiores
g_{kij}	Tensor piezoeléctrico correspondiente a forma $\varepsilon - E$: Deformación inducida por unidad de carga eléctrica aplicada (m^2/C) o campo eléctrico inducido por unidad de tensión mecánica aplicada (Vm/N)
G	Función de conmutación
G_c	Valor crítico de la función de conmutación
h_s, h_e	Módulos de endurecimiento
h_{0s}, h_{0e}	Módulos de endurecimiento iniciales
$h_k(r, s)$	Función de interpolación correspondiente al nodo k
$H_{ijkl}^m, H_{kij}^{em}, H_{ij}^e$	Tensores de endurecimiento
h_{kij}	Tensor piezoeléctrico correspondiente a la forma $\sigma - E$: Tensión mecánica inducida por unidad de carga eléctrica aplicada (N/C) o campo eléctrico inducido por unidad de deformación (V/m)
I_1, I_2, I_3	Invariantes del tensor de deformaciones remanentes
\mathbf{K}	Matriz de rigidez tangente global
$\hat{\mathbf{K}}$	Matriz global aumentada con la contribución de los vectores de fuerzas y términos de inercia provenientes de la integración numérica
\mathbf{M}	Matriz de masa global del sistema
m_i	Momento dipolar
\mathbf{N}	Operador matricial de interpolación de variables nodales generalizadas
n_i^α	Componentes del vector unitario, normal al plano del sistema de transformación α
p	Separación entre <i>dedos</i> o ramas de electrodos
\mathbf{P}	Vector polarización
P^α	Cambio de polarización asociado a la transformación α

P_i	Componentes del vector polarización
P_i^r	Polarización remanente
P_{sat}	Polarización remanente de saturación
P_0	Polarización máxima
q	Carga eléctrica volumétrica
Q	Carga eléctrica de superficie
\mathbf{R}_e	Vector de residuos o desequilibrio entre fuerzas externas e internas correspondiente al elemento e
\mathbf{R}	Vector de residuos o desequilibrio entre fuerzas externas e internas global
s_{ij}	Tensor desviador de tensiones
s_{ij}^c	Desviador de tensiones del origen de la superficie de conmutación
\hat{s}_{ij}	Tensor desviador relativo de tensiones
\hat{s}_e	Segundo invariante del tensor desviador relativo de tensiones
S^*	Componentes de tensión y desplazamiento eléctrico que trabajan en paralelo y componentes de deformación y campo eléctrico que trabajan en serie
s_i^α	Dirección de corte correspondiente al sistema de transformación α
S_{ijkl}^E	Tensor elástico determinado a campo eléctrico constante - Forma $\varepsilon - D$
S_{ijkl}^D	Tensor elástico determinado a desplazamiento eléctrico constante - Forma $\varepsilon - E$
t^s	Ubicación de los puntos de integración para el intervalo $(-1, +1)$
\tilde{t}^s	Ubicación de los puntos de integración para el intervalo (t^{k-1}, t^k)
u_i	Desplazamientos mecánicos correspondientes al punto material
U_i	Desplazamientos mecánicos prescritos en la superficie
u_k, v_k, w_k	Componentes de desplazamientos espaciales del nodo k
U_e	Vector de potenciales eléctricos nodales
U_m	Vector de desplazamientos mecánicos nodales

$\hat{\mathbf{U}}$	Vector que agrupa desplazamientos mecánicos y potenciales eléctricos nodales
V_n^k	Vector unitario normal correspondiente al nodo k
${}^l V_{nx}^k, {}^l V_{ny}^k, {}^l V_{nz}^k$	Componentes del vector normal correspondiente al nodo k , en la configuración l
w^D	Energía disipada por unidad de volumen del cristal
w^S	Energía almacenada por unidad de volumen del cristal
w_g^s	Pesos para el intervalo $(-1, +1)$
\tilde{w}_g^s	Pesos para el intervalo (t^{k-1}, t^k)
${}^l x_k, {}^l y_k, {}^l z_k$	Coordenadas espaciales del nodo k , en la configuración l

Subíndices y superíndices

$x_t^{(k)}$	Indica que x está evaluado en el paso de tiempo t e iteración k
\dot{x}	Derivada primera de x respecto del tiempo
\ddot{x}	Derivada segunda de x respecto del tiempo

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La civilización actual muestra un constante y creciente interés por desarrollar sistemas cada vez más eficientes y complejos. Muchas ramas de la Ciencia y la Tecnología se han abocado al desarrollo de cierto tipo particular de sistemas capaces de evaluar una determinada situación y responder de manera conveniente a su funcionamiento. A pesar de la diversidad de las aplicaciones de esta naturaleza, se distingue la presencia de características deseables comunes a todas, siendo las más notables: la funcionalidad óptima, la capacidad de adaptación y el diseño integrado (Varadan et al. (2006); Bilgen et al. (2010)).

1.1. Descripción del problema

En el diseño de sistemas con las características descritas, intervienen varias disciplinas que dependen de la aplicación y el uso de materiales específicos. Existen materiales cuya respuesta y/o propiedades pueden alterarse significativamente y de un modo altamente controlado, mediante estímulos externos tales como tensiones mecánicas, temperatura, campos eléctricos y campos magnéticos. Con frecuencia, en la bibliografía especializada, se utiliza la palabra inglesa *smart* para hacer referencia a los citados materiales. En esta tesis se denomina a los mismos con el término activo ¹.

¹En rigor, todos los materiales reaccionan a determinados estímulos, sin embargo, reciben particular interés los que lo hacen de manera fácilmente controlable y con niveles suficientes en relación a la aplicación para la cual están pensados. Por ejemplo, para su uso como actuadores en sistemas de control de vibraciones de estructuras, los niveles de acoplamiento electromecánico deben permitir introducir

Entre los distintos tipos de materiales activos disponibles, se pueden mencionar las aleaciones con memoria de forma (Roglin y Hanagud, 1996), los materiales electrostrictivos (Kim y Beom, 2010), los materiales piezoeléctricos (Guennam y Luccioni, 2009) y los fluidos electrorreológicos (Nguyen y Choi, 2009), entre otros.

Uno de los avances recientes más notables en las ramas mecánica, aeronáutica y civil de la ingeniería estructural yace en el campo de las estructuras y sistemas construidos con materiales activos. Es común encontrar los términos inteligente, activa, despierta y adaptativa, haciendo referencia a este tipo de estructuras y sistemas mecánicos indistintamente. Sin embargo, Wada et al. (1989) presentan una explicación que permite hacer una distinción importante. *Estructuras inteligentes* son aquellas que poseen actuadores y sensores altamente integrados, lógicas de control y sistemas electrónicos ordenados según una arquitectura jerárquica, de tal manera que pueden sentir y responder a estímulos dentro de su entorno de trabajo. Este tipo de estructuras posee altos niveles de complejidad e interrelación entre sus sistemas componentes. Siguiendo esta explicación, las estructuras inteligentes constituyen un subconjunto de todas las nombradas anteriormente, (Bent, 1997).

Alcanzar este grado de complejidad es sumamente desafiante y en la actualidad, a pesar de los avances científicos y tecnológicos, no se lograron los niveles de desarrollo a que hacen referencia las definiciones anteriores (Varadan et al., 2006), sin embargo, se reconocen avances muy notables en lo que respecta a la tecnología de actuadores, sensores y sistemas electrónicos de procesamiento.

Numerosos trabajos de investigación realizados durante la última década, se enfocan hacia la integración de actuadores y sensores en este tipo de estructuras y sistemas mecánicos. Esto representa una gran ventaja desde el punto de vista constructivo y de diseño. Los laminados piezoeléctricos presentan, por un lado, el acoplamiento electromecánico subyacente y por otro lado las características de los compuestos reforzados con fibras, esto es, alta conformabilidad y resistencia mecánica, considerable resistencia a la fatiga y alta relación resistencia/peso, entre otras. La combinación

fuerzas acordes a la rigidez intrínseca estructural.

de estas dos particularidades da lugar a materiales con los que pueden construirse estructuras de formas complejas y capaces de responder a estímulos de manera tal que su respuesta sea conveniente para el funcionamiento global del sistema. Con frecuencia, este comportamiento puede ser mejorado en relación a los aspectos particulares de diseño y aplicación.

En las ramas aeroespaciales, es muy popular el uso de estructuras de paredes delgadas. Las alas de aviones, las palas de helicópteros, las superficies de control y los brazos robóticos son algunos ejemplos de estructuras del tipo viga cajón de paredes delgadas. La integración de materiales activos en este tipo de estructuras, conduce a la obtención de sistemas con altas prestaciones.

En este ámbito, surge la necesidad de contar con herramientas de diseño, cálculo, y predicción del comportamiento que sean capaces de reflejar los aspectos relevantes del sistema considerado y que sean eficientes en cuanto al esfuerzo de cálculo en relación a la precisión de los resultados. Es deseable, además, que estas herramientas puedan combinarse de manera relativamente simple con otras, para su aplicación a problemas de naturaleza multifísica ².

1.2. Importancia y aplicaciones del tema

La gran cantidad de trabajos de investigación realizados durante la última década refleja el gran potencial que poseen las estructuras activas para mejorar su desempeño, (Bhattacharya et al. (2002); Choi et al. (2007); Bilgen et al. (2010)). Comparadas con las estructuras pasivas, las activas presentan un mejor comportamiento o desempeño frente a perturbaciones o cambios en las condiciones del ambiente en el que se emplazan y operan. Esto se logra adaptando continuamente y en forma adecuada, ciertos parámetros de la estructura.

²El concepto de análisis multifísico ha surgido en los últimos años para estudiar procesos complejos en los que intervienen simultáneamente fenómenos físicos de distinta naturaleza. Ejemplos típicos podrían incluir la combinación de algunas disciplinas como acústica, electricidad, explosivos, fluidos, electromagnetismo, estructuras y termodinámica.

Las cualidades exhibidas por los materiales piezoeléctricos los hacen potencialmente aptos para el control activo de vibraciones, término que reúne todos los fenómenos en que se manifiestan movimientos cíclicos de la estructura. A modo de ejemplo se pueden citar los siguientes:

- Oscilaciones por desbalanceo de máquinas (Motores, ventiladores, rotores).
- Control de vibraciones en estructuras inflables para aplicaciones espaciales (Sodano et al., 2004).
- Fenómenos de acoplamiento aeroelástico en alas de aviones, palas de helicópteros, superficies de control (Lin (1996); Nam y Kim (1995); Cesnik et al. (2004); Suleman y Costa (2004)) y álabes de turbinas (Thirupathi et al. (1997) y Bilgen et al. (2010)).
- Oscilaciones debidas a la aplicación de cargas transitorias, como ráfagas o deflexión brusca de un comando.
- Fenómenos acústicos (Balachandran et al. (1996); Lim et al. (1999); Bevan (2001); Al Bassyiouni et al. (2006); Casadei et al. (2010)).
- Micro-posicionamiento (Gong y Chen, 2006).
- Control de forma (Koconis et al. (1994); Kekana (2003); Bilgen et al. (2010)).
- Construcción de micro-generadores piezoeléctricos pensados para instalarse en estructuras que se sabe, estarán en constante movimiento durante su vida de servicio, (Williams y Yates (1996); Glynne-Jones et al. (2001); Lesieutre et al. (2004); Ajitsaria et al. (2007)).

El control de vibraciones originadas por fenómenos aeroelásticos permite ampliar la envolvente de vuelo de las aeronaves. Lin et al. (1995) reportaron que, en un ala provista de un mecanismo piezoeléctrico de control, obtuvieron un aumento en la presión dinámica de flutter, del 12 % respecto de la correspondiente a la estructura pasiva.

En los helicópteros, existen problemas vibratorios que limitan la velocidad de avance y la carga máxima del mismo, incrementan el nivel de ruido y exigen mayor mantenimiento.

Durante el vuelo, el rotor principal opera en un complejo campo aerodinámico no estacionario, que produce altos niveles de vibraciones en el rotor y fuselaje (Cesnik et al., 2004). Cuando las palas cambian el ángulo durante la rotación, se producen también cambios en las condiciones aerodinámicas (Rodgers y Hagood, 1998). Esto genera fuerzas aerodinámicas sobre la pala, con un contenido de altos armónicos de la velocidad angular del rotor. Por otra parte, los elevados números de Mach (sin alcanzar el régimen supersónico) que se manifiestan en la parte de pala que avanza y los efectos de pérdida que se presentan en la parte que retrocede, constituyen también una importante fuente de cargas oscilatorias que actúan sobre las palas del rotor. Es así que el control de vibraciones en palas de helicópteros (Chen y Chopra (1996); Rodgers y Hagood (1998); Wilbur et al. (2001); Cesnik et al. (2004)), la atenuación de ruido (Bevan, 2001), la mejora del desempeño de los rotores y la maniobrabilidad, constituyen el principal interés de la comunidad investigadora del área. Los últimos trabajos de investigación buscan una manera eficiente de controlar individualmente las palas sin necesidad de potencia hidráulica en el sistema rotativo. Al respecto, entre las propuestas actuales de mecanismos accionados con materiales activos, se destacan, por un lado, los flaps ubicados discretamente a lo largo de la pala y, por otro lado, las fibras piezoeléctricas distribuidas y orientadas convenientemente. En el primer caso, al ser accionados los flaps, se cambia la configuración del flujo de aire alrededor de la pala, con el consecuente cambio de fuerzas y momentos actuantes sobre la misma (Lee, 1999). Por otra parte, las fibras piezoeléctricas permiten controlar directamente las deformaciones (generalmente la torsión) de la estructura base de la pala (Rodgers y Hagood (1998); Wilbur et al. (2001)).

Los actuadores construidos con materiales activos suelen llamarse Dispositivos de Deformación Inducida de Estado Sólido (DDIES), y su uso ha experimentado un fuerte aumento en los últimos años. Originalmente desarrollado para aplicaciones acústicas con altas frecuencias y pequeños desplazamientos, el campo de aplicación de este revolucionario concepto se encuentra en constante expansión hacia las áreas de diseño mecánico y aeroespacial. Los actuadores de este tipo son compactos, confiables y transforman directamente energía eléctrica de entrada en energía mecánica de salida.

Un DDIES muy popular es el actuador piezoeléctrico lineal tipo pila.

Como otro grupo de aplicación podrían citarse los sistemas de reducción de resistencia al arrastre en un medio fluido, usando recubrimiento activo. El recubrimiento generara ondas transversales que reducen la generación de turbulencia (Mani et al., 2008).

En control de forma, Dano y Julliere (2007) analizan el control activo de distorsiones originadas por efectos térmicos utilizando actuadores de fibras piezoeléctricas. Yu et al. (2009) analizan el control de forma de una viga laminada y bajos potenciales de control. Bilgen et al. (2010) usan actuadores piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales para controlar de curvatura de álabes de turboreactores.

El reciente incremento en la demanda de sistemas remotos de registro, medición y control, combinado con la disminución del consumo energético de los dispositivos electrónicos ha dado lugar a aplicaciones que consisten en sistemas de generación de energía eléctrica en escala micro para alimentación de este tipo de sistemas. Esto representa una notable ventaja, ya que evita la necesidad de reemplazar baterías de alimentación (Dietl et al. (2010); Wang et al. (2010)).

La conveniencia de los distintos tipos de dispositivos que se conocen actualmente depende de la aplicación. Para evaluar este aspecto, resulta indispensable contemplar las características de la estructura base. Las estructuras de uso aeronáutico poseen las siguientes características:

- Las láminas de recubrimiento, que funcionan como paneles de corte, aportan rigidez torsional.
- El espesor de los perfiles aerodinámicos es del orden del 10 a 20 % el valor de la cuerda.
- La rigidez es relativamente baja comparada con otros tipos de estructuras.
- Las cargas aerodinámicas son fuertemente dependientes del estado de deformación y velocidad de deformación.
- Son estructuras muy livianas.

- Se busca el mayor nivel de confiabilidad.

En base a los aspectos mencionados, se puede decir que para lograr capacidad de actuación en torsión se deben incluir dispositivos que generen esfuerzos en el plano según una orientación determinada, sin cambiar sensiblemente la forma de la estructura base. Numerosos investigadores, encontraron que los dispositivos construidos con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales son una propuesta muy eficiente para tal fin.

Cuando se desea implementar un sistema de control activo es indispensable conocer, entre otras cosas, las prestaciones de los actuadores y las respuestas de los sensores. Éstas dependen de los materiales que los constituyen y de las relaciones geométricas. En ambos casos, la primer condición restrictiva de diseño es la necesidad de obtener los desplazamientos y fuerzas piezoeléctricas suficientes, con peso mínimo de los actuadores. Para ello se requiere, entre otras cosas, contar con modelos que permitan simular el comportamiento de los dispositivos (actuadores y sensores), como así también su efecto sobre la estructura original.

1.3. Objetivos de la tesis

El objetivo general de esta tesis doctoral es modelar de manera eficiente estructuras construidas total o parcialmente con materiales piezoeléctricos, para dar origen a un sistema estructural activo capaz de responder a estímulos y adaptar su comportamiento para mantenerse dentro de límites aceptables de operación. Interesa modelar estructuras no sólo en el campo lineal sino también, y fundamentalmente, en presencia de no linealidades del material. Dentro de este objetivo general se destacan los siguientes objetivos específicos:

- Proponer un modelo de homogeneización no lineal para compuestos piezoeléctricos, incluyendo la no linealidad material en las ecuaciones constitutivas de manera de poder contemplar los fenómenos no lineales producidos por la reorientación de los dominios en los dispositivos piezoeléctricos.
- Formular un elemento finito de cáscara piezoeléctrica con una nueva forma de

interpolar el campo eléctrico, adecuada para simular la inclusión de laminados piezoeléctricos con electrodos interdigitales.

- Aplicar la herramienta desarrollada para:
 - Modelar y analizar estructuras provistas de materiales piezoeléctricos controladas en forma activa para atenuar vibraciones.
 - Evaluar el desempeño estructural en función de la disposición de los materiales piezoeléctricos.
 - Modelar y analizar micro-generadores de energía eléctrica.

Se espera que dicha herramienta sea de utilidad para el diseño, optimización y evaluación de sistemas estructurales activos para control de vibraciones, control de forma y atenuación de ruido, especialmente en aplicaciones aeronáuticas. Otro campo de interés son los sistemas de microposicionamiento de precisión.

Desde esta perspectiva se mantiene como visión general, contribuir a la capacidad de predicción de comportamientos complejos en ramas de la ciencia y la tecnología en que fenómenos físicos de distinta naturaleza condicionan el desempeño y comportamiento de los sistemas en estudio.

1.4. Alcance

La formulación desarrollada en este trabajo se basa en las hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamientos, es decir que no se considera la no linealidad geométrica. Además, se trabaja con variaciones temporales de los campos electromecánicos lo suficientemente bajas como para considerar válidas las hipótesis de comportamiento cuasi-electroestático, por lo que no se incluyen los términos de acoplamiento electromagnético. Sin embargo, el planteo propuesto puede ser extendido y llevado a un plano más general para tener en cuenta estos aspectos.

1.5. Contenidos

Luego de una introducción en el Capítulo 1, en el Capítulo 2 se describen algunos materiales y dispositivos piezoeléctricos de importancia en el desarrollo de la tesis.

En el Capítulo 3 se presenta, en primer lugar, un estado del arte en relación a los modelos constitutivos para describir el comportamiento de materiales ferroeléctricos. Luego se presenta una revisión de los elementos finitos piezoeléctricos presentes en la bibliografía.

En el Capítulo 4 se presentan los modelos constitutivos considerados en la tesis para describir el comportamiento de las cerámicas ferroeléctricas puras. Se presenta, por un lado, la forma general del modelo constitutivo fenomenológico utilizado y los aspectos particulares adoptados y, por otro lado, la descripción de un modelo microelectromecánico también presente en la bibliografía y utilizado en la tesis para realizar comparaciones con el modelo fenomenológico.

En el Capítulo 5 se describe el modelo de homogeneización propuesto para simular el comportamiento no lineal del compuesto polarizado con electrodos interdigitales y se presenta el algoritmo propuesto para su implementación numérica. Se desarrolla, además, el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva correspondiente a las fibras.

En el Capítulo 6 se presenta el elemento finito de cáscara piezoeléctrica propuesto y una serie de ejemplos sencillos para verificar su comportamiento.

En el Capítulo 7 se presentan, en primer lugar, ejemplos de aplicación en los que se simula el comportamiento material de cerámicas ferroeléctricas puras y de un compuesto piezoeléctrico simple. Luego se incluyen ejemplos correspondientes a aplicaciones estructuras concretas utilizando las herramientas propuestas. La simulación del comportamiento de las cerámicas puras se realiza con el modelo fenomenológico y los resultados numéricos obtenidos se comparan con resultados experimentales presentados por otros autores. Adicionalmente, a efectos de realizar comparaciones de resultados, se describe la implementación del modelo constitutivo microelectromecánico disponible en la bibliografía y presentado en el Capítulo 4. La segunda parte del Capítulo 7 incluye algunos ejemplos de aplicación estructural estáticos y dinámicos bajo hipótesis de comportamiento

material lineal y otros que contemplan la no linealidad material de las fibras de los laminados piezoeléctricos.

Finalmente, la tesis se completa con las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros en el [Capítulo 8](#).

CAPÍTULO 2

MATERIALES Y DISPOSITIVOS

PIEZOELÉCTRICOS

2.1. Introducción

En 1880 Jacques y Pierre Curie¹ descubrieron un comportamiento inusual en ciertos minerales cristalinos. Observaron que al someterlos a fuerzas mecánicas, se polarizaban eléctricamente. La aplicación de tensiones de tracción y compresión generaba voltajes de polaridad opuesta y proporcionales al valor de las fuerzas. Años más tarde, se verificó el efecto inverso. Es decir, cuando uno de esos cristales generadores de voltaje era sometido a campos eléctricos, se deformaba acorde a la polaridad del campo y proporcionalmente al mismo. Los citados fenómenos fueron denominados efecto piezoeléctrico directo e inverso, respectivamente. Investigaciones posteriores arrojaron resultados muy valiosos respecto de la utilización de materiales piezoeléctricos, pero siempre se trataba de materiales o compuestos que se hallaban en la naturaleza. Durante el siglo XX, las cerámicas basadas en óxidos metálicos y otros materiales elaborados artificialmente, permitieron a los diseñadores aprovechar los efectos piezoeléctricos en nuevas aplicaciones. Generalmente, dichos materiales son resistentes, químicamente inertes y relativamente baratos. La composición, la forma y las dimensiones de las cerámicas piezoeléctricas pueden ser ajustadas para cumplir con los requerimientos de una aplicación determinada. Entre

¹Paul-Jacques (1856-1941) y Pierre (1859-1906) Curie. Físicos franceses pioneros en el estudio y experimentación de la piroelectricidad y piezoelectricidad.

ellas, las elaboradas con formulaciones de Zirconato de Plomo o con Titanato de Plomo, normalmente denominadas PZT, exhiben mayor sensibilidad y temperaturas de operación más elevadas, en relación con otras. Es por ello que las cerámicas piezoeléctricas PZT son las más utilizadas.

2.2. Conceptos de electromagnetismo

Se presentan a continuación algunos conceptos de electromagnetismo que resultan imprescindibles para explicar el comportamiento de los materiales piezoeléctricos.

Se dice que una molécula o un cristal están polarizados, cuando las cargas eléctricas de los mismos se distribuyen de manera tal que aparecen sectores con más concentración de carga de un signo que de otro. Este estado se puede modelar mediante dos cargas iguales y de signo opuesto separadas una distancia d . El producto de una de esas cargas por d se denomina momento dipolar m . Si se considera un volumen del continuo, en él habrá una cierta cantidad de moléculas o cristales con un momento dipolar determinado, la suma de cada uno de ellos dividida por el volumen total se denomina polarización,

$$P_i = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{n_{cristales}} (m_i)_j \quad (2.1)$$

El vector P_i solo existe en los medios materiales. Cuando se aplica un campo eléctrico a un material, los cristales o moléculas del mismo se polarizan. La magnitud que relaciona la polarización P_i y el campo eléctrico aplicado resultante E_j se denomina susceptibilidad eléctrica del material y se denota en esta tesis con la letra η . En el caso más general, la susceptibilidad es un tensor de segundo orden. La relación entre el campo eléctrico E_j y la polarización P_i sería en ese caso:

$$P_i = \eta_{ij} E_j \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) muestra que, en general, la dirección de polarización no coincide con el campo eléctrico. Los materiales dieléctricamente isótropos son un caso particular, en ellos el vector \mathbf{P} es paralelo al vector \mathbf{E} .

Una magnitud muy importante para describir el comportamiento de los dieléctricos es el vector desplazamiento eléctrico D_i . Físicamente, es un campo que nace y muere en las cargas libres. El campo eléctrico puede relacionarse con el desplazamiento eléctrico mediante la siguiente ecuación:

$$D_i = \chi_0 E_i + P_i \quad (2.3)$$

Donde χ_0 es la permitividad dieléctrica del vacío. La expresión (2.3) es general y se cumple para cualquier material, incluso para el vacío donde $P_i = 0$.

Reemplazando (2.2) en (2.3) se obtiene la siguiente relación entre el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico:

$$D_i = \chi_0 E_i + \eta_{ij} E_j \Rightarrow D_i = (\chi_0 \delta_{ij} + \eta_{ij}) E_j \quad (2.4)$$

El tensor $\chi_{ij} = \chi_0 \delta_{ij} + \eta_{ij}$ se denomina permitividad dieléctrica del medio. Muchas veces se utiliza la relación de sus componentes con la permitividad dieléctrica del vacío, esto es:

$$\chi_{ij}^{relativo} = \frac{\chi_{ij}}{\chi_0} \quad (2.5)$$

2.3. Comportamiento de los materiales piezoeléctricos y sus propiedades

2.3.1. Introducción

En general, en función de su simetría, los cristales pueden clasificarse en 32 grupos, de los cuales sólo 20 presentan propiedades piezoeléctricas (Cady, 1946). Una posible clasificación sería la que se muestra en la Figura 2.1.

Los cristales piroeléctricos presentan una polarización espontánea, debido a que sus celdas son asimétricas, por lo menos, respecto a un eje. Por lo general, esta polarización eléctrica se ve enmascarada por la aparición de cargas en la superficie. En algunos casos,

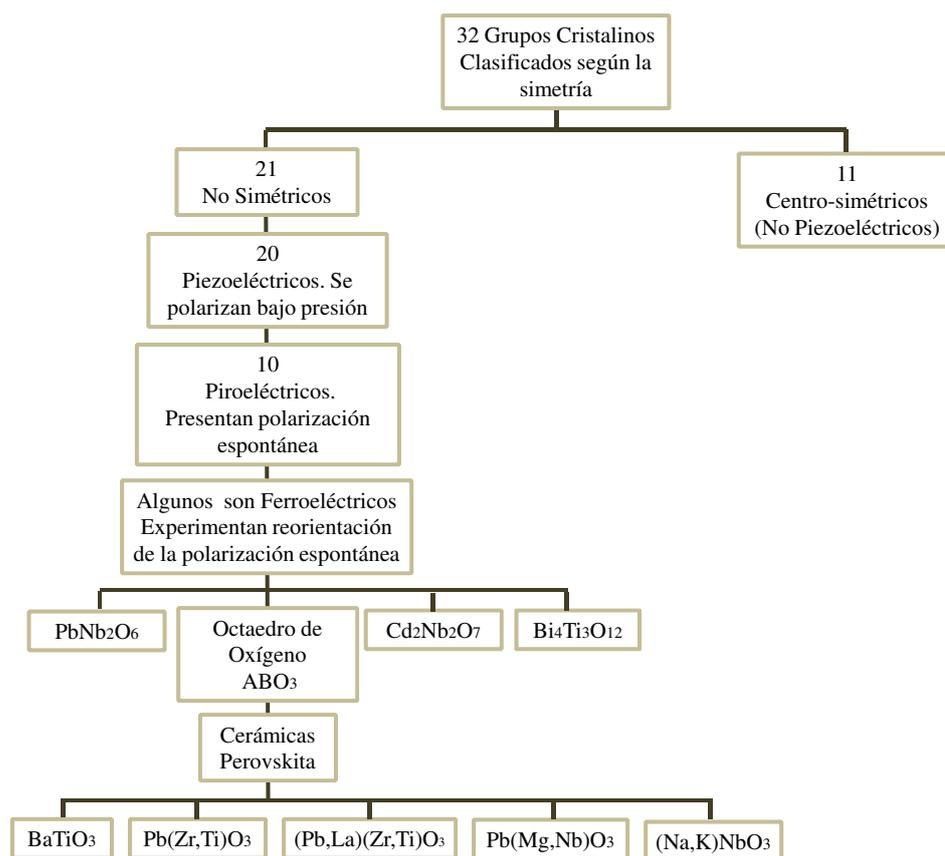


Figura 2.1: Esquema de clasificación de cristales (Zhou, 2003).

y en materiales piroeléctricos no conductores, pueden medirse cambios en la polarización causados, por ejemplo, por alteraciones en la temperatura. Es decir, la piezoelectricidad y la piroelectricidad son funciones, simplemente, de la estructura cristalina del material y se pueden predecir conociendo únicamente de qué clase de cristal se trata.

A través de la aplicación de un campo eléctrico suficientemente alto, se puede invertir la polarización de algunos materiales piroeléctricos. Este subgrupo de materiales piroeléctricos, recibe el nombre de ferroeléctricos. A diferencia de lo que ocurre con la piezoelectricidad y la piroelectricidad, la ferroelectricidad no puede predecirse solamente a partir de la estructura cristalina, sino que se requieren, además, mediciones dieléctricas (Shirane et al., 1955). De manera general, se puede decir que la ferroelectricidad es un caso particular de piezoelectricidad y juega un papel muy importante en el comportamiento de los materiales y dispositivos activos estudiados en esta tesis. Existen muchos materiales piezoeléctricos que no son ferroeléctricos. Por el contrario, todos los materiales ferroeléctricos presentan propiedades piezoeléctricas. En algunos materiales

ferroeléctricos, la polarización espontánea es la responsable de una parte del efecto piezoeléctrico.

2.3.2. Materiales ferroeléctricos

En estos materiales existen pequeñas regiones llamadas dominios que poseen un valor de polarización local espontánea muy elevada. Cuando se aplica un campo eléctrico externo, dichos dominios se orientan originando una polarización general. La Figura 2.2 muestra curvas de deformación y desplazamiento eléctrico medidas experimentalmente, en probetas de PZT-5H sometidas a un campo eléctrico cíclico.

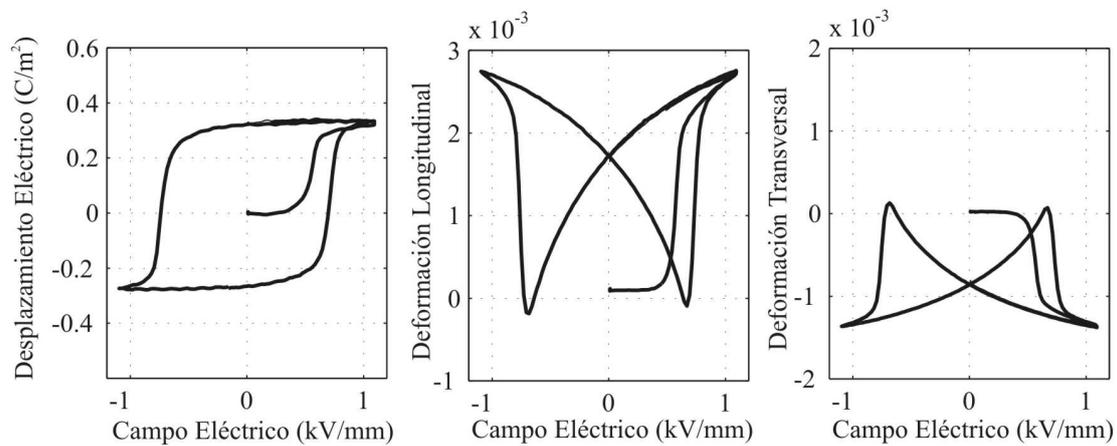


Figura 2.2: Respuesta de una probeta de PZT-5H a un campo eléctrico cíclico (Ghandi, 1998).

El nombre ferroeléctrico se utiliza por analogía con el comportamiento exhibido por los materiales ferromagnéticos cuando se someten a campos magnéticos variables. En la Figura 2.2 se observa que para valores bajos de campo eléctrico, las deformaciones son prácticamente nulas. Sin embargo, una vez que el campo eléctrico alcanza un valor crítico, el material se polariza en la dirección del mismo. Las cerámicas ferroeléctricas, luego de ser polarizadas, se tornan piezoeléctricas. Los grupos de dipolos con orientaciones paralelas se denominan dominios de Weiss². Antes del proceso de polarización, los mismos se encuentran orientados aleatoriamente. Luego del proceso de polarización,

²Los dominios de Weiss son pequeñas áreas en la estructura cristalina de un material ferromagnético cuya orientación magnética es uniforme. Su nombre se debe al Físico francés Pierre-Ernest Weiss (1865-1940). Este concepto se extendió para hacer referencia a los sectores de orientación dipolar uniforme en

el material experimenta distorsiones que se reflejan en incrementos de longitud en la dirección del campo eléctrico y contracción en las direcciones perpendiculares. Cuando un material ferroeléctrico polarizado se somete a un campo eléctrico, los dominios de Weiss incrementan su alineación respecto del campo eléctrico de manera proporcional al mismo. Como resultado, se manifiestan cambios en las dimensiones del material, ya sea de elongación o contracción, dependiendo del sentido del campo eléctrico aplicado. Utilizando luz polarizada, se pueden observar los dominios en el Titanato de Bario (BaTiO_3), uno de los materiales ferroeléctricos más utilizados.

La polarización espontánea en los ferroeléctricos desaparece a cierta temperatura, llamada temperatura ferroeléctrica de Curie ³. Por debajo de la misma, los vectores desplazamiento eléctrico y polarización son funciones no lineales del campo eléctrico. La Figura 2.3 muestra la estructura cristalina general que presentan materiales ferroeléctricos tan comunes como el Titanato de Bario y el Zirconato Titanato de Plomo (PZT). La

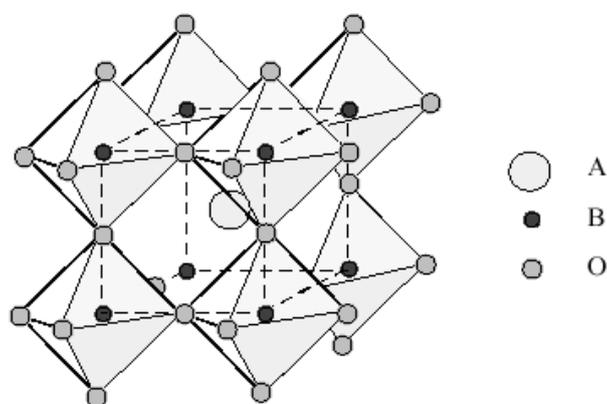


Figura 2.3: Estructura de perovskita (Ghandi, 1998).

fórmula general de esta estructura puede escribirse como ABO_3 , donde A y B son iones metálicos con una carga total de +6. El tamaño relativo de los iones es la clave en el comportamiento del material. A y B representan iones metálicos que deben tener la suficiente diferencia de tamaño para que se forme la estructura perovskita de la Figura 2.3.

los materiales ferroeléctricos

³La temperatura de Curie se define como la temperatura a la cual el material se torna no-polar. Para la mayoría de las cerámicas PZT, esta temperatura es aproximadamente 200°C .

En el caso del Titanato de Bario, A y B corresponden a un catión bivalente Ba_2^+ y otro tetravalente Ti_4^+ . En el caso de las cerámicas PZT, A se sustituye por el catión bivalente Pb_2^+ y B por los cationes tetravalentes Zr_4^+ y Ti_4^+ . Ajustando la proporción de los cationes, pueden modificarse las propiedades del material. Otra manera de lograrlo, consiste en agregar óxidos metálicos para formar otros compuestos. Dependiendo de la composición exacta y de la temperatura, la forma de la celda de perovskita puede modificarse. A elevadas temperaturas, las vibraciones térmicas de los cationes representados por B , desplazan de las grillas tetraédricas, a los aniones de oxígeno. La estructura mantiene la forma cúbica no distorsionada, y el material se encuentra en un estado paraeléctrico. Al aplicar un campo eléctrico al material paraeléctrico, se produce una polarización, la cual desaparece cuando se retira el campo. A menores temperaturas, por debajo del punto de Curie del material, la estructura cúbica se torna inestable y la celda se distorsiona. En la fase tetragonal, el cubo se encoge paralelo a un borde, mientras que en los cristales romboédricos, el cubo se encoge a lo largo de la diagonal. Estas dos fases son ferroeléctricas. Cuando se aplica un campo eléctrico estando por debajo de la temperatura de Curie, todos los aniones se desplazan en una dirección, y los cationes en otra, destruyendo así la simetría cúbica. De esta manera, la celda unitaria queda con un momento dipolar neto. Al desaparecer el campo, el material ferroeléctrico queda con una polarización remanente, la cual puede ser eliminada sólo si se aplica un campo eléctrico coercitivo negativo. La Figura 2.4 muestra un esquema del proceso de polarización (orientación de los dipolos), resaltando la polarización remanente (Nótese la existencia de los dominios polares antes de la aplicación del campo).

Antes de la aplicación del campo eléctrico, los dipolos poseen una orientación aleatoria y el momento dipolar resultante es nulo. Luego, la aplicación del campo eléctrico, Figura 2.4b, produce una orientación de todos los dominios eléctricos, aproximadamente en la misma dirección. Al retirar el campo eléctrico, el material conserva un momento bipolar remanente dado por la orientación de los dipolos, Figura 2.4c.

Cuando se somete una probeta de material ferroeléctrico a un campo eléctrico variable y se mide la polarización en función del campo aplicado, para valores suficientemente

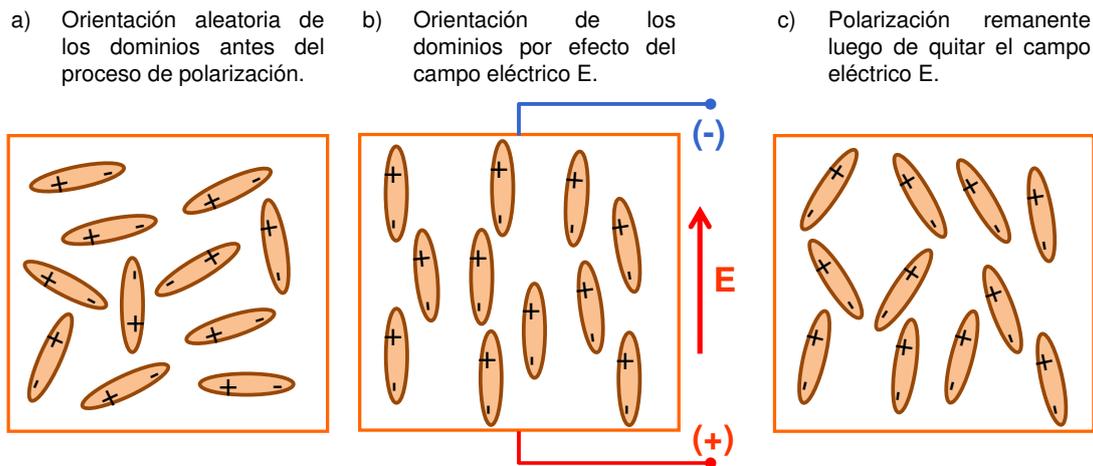


Figura 2.4: Secuencia del proceso de polarización de un medio ferroeléctrico.

elevados de campo eléctrico, se observa un comportamiento histerético del tipo observado en ferromagnetismo. Las curvas de polarización en función del campo eléctrico aplicado presentan las típicas formas de mariposa que se muestran en la Figura 2.2.

Dentro de cada grano, la estructura cristalina es la misma. Un dominio es una región dentro de los granos en la que todas las celdas tienen la misma orientación de su simetría pudiendo ser esta tetragonal, rombohédrica u ortorómbica. Una propiedad característica de los ferroeléctricos es que cargas mecánicas o eléctricas de suficiente intensidad, pueden cambiar esta orientación dipolar, provocando conmutación de los dominios y el movimiento de las paredes de los dominios.

El comportamiento histerético está ligado a movimientos de ciertos átomos de la estructura cristalográfica. Esto se denomina conmutación. Cuando se produce conmutación se habla de movimiento de las paredes de los dominios, término ampliamente aceptado para hacer referencia al aumento o disminución de tamaño de las regiones con igual polarización (Hwang et al., 1998).

Los dispositivos basados en fibras piezoeléctricas polarizadas con electrodos interdigitales, toman ventaja directa de los fenómenos de conmutación de dominio. Durante el proceso de polarización *in-situ*, se busca precisamente que los dominios conmuten de la manera dispuesta por los electrodos, para permitir que el acoplamiento

electromecánico global se logre como contribución de todos los sectores de las fibras. Por otra parte, los valores de deformación se incrementan considerablemente en el rango no lineal, lo cual permitiría ampliar el campo operacional de los dispositivos.

Cuando se extiende el campo operacional de los materiales ferroeléctricos-piezoeléctricos, se alcanzan niveles en los que se manifiestan los citados fenómenos no lineales (Kushnir y Rabinovitch, 2009). Este comportamiento no lineal e histerético a nivel material se atribuye principalmente a los fenómenos de conmutación de dominios a nivel de los granos (Kushnir y Rabinovitch, 2007). Al ser la conmutación de dominios una importante causa de no linealidad material, resulta necesario determinar las causas y umbrales para los cuales estos fenómenos tienen lugar. Igualmente importante resulta conocer la influencia de la no linealidad descrita sobre el acoplamiento electromecánico.

2.4. Comportamiento no lineal de los materiales ferroeléctricos

Como ya se mencionó, la aplicación de niveles suficientemente elevados de campos eléctricos y/o tensiones mecánicas a ciertas cerámicas, promueve la aparición de fenómenos no lineales. En tales circunstancias, la polarización se orienta a lo largo de una de las direcciones cristalográficas posibles (Chaplya y Carman, 2001).

Una gran parte de las aplicaciones tecnológicas de materiales ferroeléctricos emplean cerámicas como el Titanato de Bario (BaTiO_3) y el Zirconato Titanato de Plomo (PZT). Las mismas tienen una estructura cúbica en la fase paraeléctrica, como se muestra a la izquierda de la Figura 2.5.

Desde el punto de vista del cristal, se denota por $\{a_0e_1, a_0e_2, a_0e_3\}$ a los versores de la red cristalina de la fase cúbica, siendo a_0 la dimensión de la fase y e_i los vectores unitarios. Estos versores unitarios se relacionan con los versores de un sistema de coordenadas rectangular $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ fijo mediante $e_i = \mathbf{R}e_i^0$, donde \mathbf{R} es una matriz de transformación. Al decrecer la temperatura y llegar al punto de Curie las cerámicas de Titanato de Bario y PZT experimentan una transformación *cúbica a tetragonal* y la celda unitaria tetragonal resultante, como se muestra a la derecha de la Figura 2.5, puede tener una

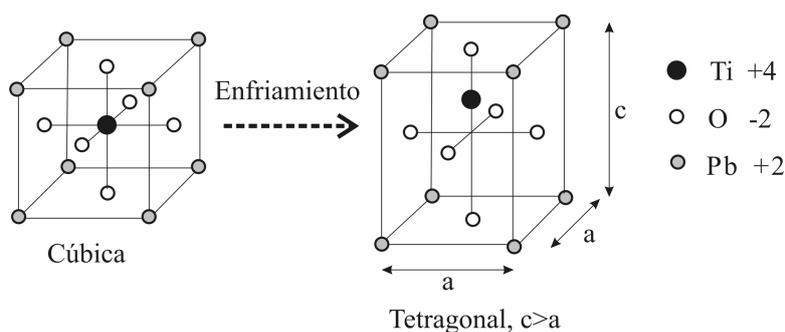


Figura 2.5: Celda unitaria de PZT. Pasaje de estructura Cúbica a Tetragonal al enfriarse por debajo de la temperatura de Curie.

de seis orientaciones, es decir que su dirección polar puede ser cualquiera de las dos direcciones principales opuestas del cubo. Por lo tanto, este tipo de cristales tiene seis tipos distintos de dominios. La intensidad de polarización espontánea en estos dominios tienen la misma magnitud pero diferentes orientaciones y las deformaciones espontáneas son de la misma naturaleza ⁴ (Huo y Jiang, 1997).

En base al ángulo entre las direcciones de polarización entre los dominios adyacentes, se puede clasificar a los dominios en dos tipos: (i) Dominios 180° y (ii) Dominios no- 180° . Para cristales tetragonales, los dominios no- 180° tienen vectores de polarización posicionados a 90° mientras que para cristales romboédricos la polarización puede posicionarse ya sea en 71° ó en 109° . Los cambios en la polarización están afectados tanto por el movimiento de las paredes de dominio a 180° como por las no- 180° . Mientras que las deformaciones solo están afectadas por el movimiento de las paredes no- 180° . Los campos eléctricos producen movimientos de paredes de dominio del tipo 180° y también del tipo no- 180° . Las tensiones mecánicas producen sólo movimiento de las paredes tipo no- 180° , esto se muestra en la Figura 2.6.

Como se mencionó anteriormente, la mayoría de las cerámicas ferroeléctricas usadas actualmente poseen estructura cristalina tetragonal. Es por ello que en esta tesis se considerará, casi exclusivamente, este tipo de material. Sin embargo, muchas de las consideraciones pueden ser extendidas al caso de otros tipos de cristales (romboédricos,

⁴Las deformaciones espontáneas asociadas a dos orientaciones opuestas de la polarización, son idénticas entre sí.

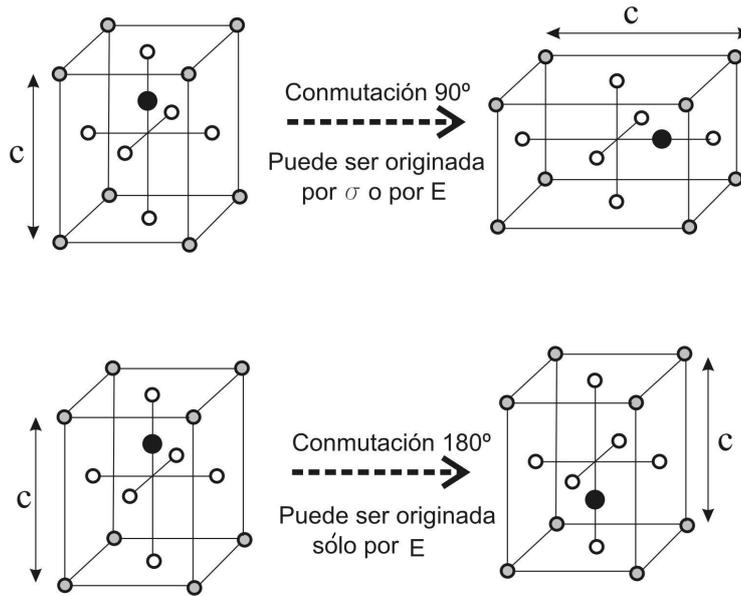


Figura 2.6: Conmutaciones en PZT (Landis, 2004).

etc), siendo necesario, desde luego, incluir consideraciones particulares para cada caso.

2.4.1. Propiedades de los principales materiales piezoeléctricos utilizados en sistemas de control estructural

A continuación, se describen muy brevemente las características de algunos materiales piezoeléctricos.

■ Cuarzo:

El cuarzo es un material que existe en la naturaleza y además puede elaborarse artificialmente. Es uno de los primeros materiales piezoeléctricos estudiados e incluso hoy encuentra muchas aplicaciones en electrónica para la fabricación de osciladores. Debe ser cortado según direcciones determinadas para maximizar el efecto piezoeléctrico, y puede hacerse de tal manera de obtener deformaciones paralelas al campo eléctrico aplicado. La Figura 2.7 muestra una celda unitaria de Cuarzo entre dos placas. En la condición no deformada, los centros de carga de los iones de silicio (positivos) y los de oxígeno (negativos) coinciden, no hay momento dipolar resultante y la distribución de carga a lo largo del cristal y sobre

la superficie es nula.

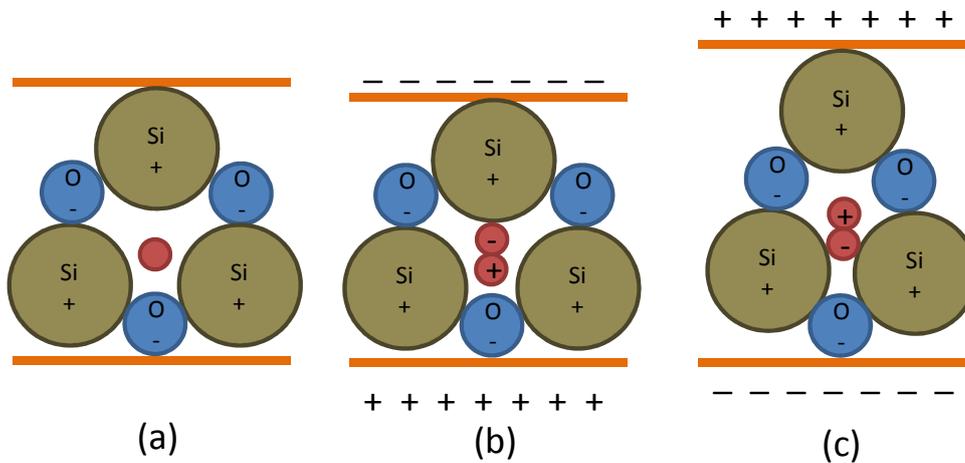


Figura 2.7: Esquema de la celda unitaria del cuarzo. a) No deformada. b) Comprimida. c) Traccionada.

- **Sal de Rochelle:**

A diferencia del Cuarzo, se trata de un material ferroeléctrico. También encuentra bastante aplicación en transductores. Es muy sensible a la humedad, y puede usarse sólo en el rango de temperaturas que va desde 18°C a 24°C porque, fuera de este rango, comienzan a producirse cambios de fase.

- **Cerámicas ferroeléctricas (Titanato de Bario y PZT):**

Estas cerámicas son los materiales más utilizados actualmente en la fabricación de dispositivos piezoeléctricos. Son obtenidas por procesos convencionales de elaboración de cerámica. Se mezclan en seco o en forma de una pasta húmeda óxidos y carbonatos de los materiales componentes. También se utilizan agentes aglutinantes derivados de alcoholes.

Con esta pasta se pueden obtener dispositivos de diferentes formas, incluso se pueden extrudar fibras. Luego de darle la forma, se calientan en hornos de temperatura y presión controladas. Con este proceso que se denomina calcinación y sinterizado, se logra que los carbonatos se disocien y se formen óxidos.

2.5. Clasificación y descripción de los distintos tipos de dispositivos de control diseñados con materiales piezoeléctricos

2.5.1. Introducción

Las cerámicas ferroeléctricas como el Titanato de Bario y el PZT, poseen una dirección de polarización, que en este caso se denomina *dirección 3*. Se observa que para manifestarse los máximos niveles de acoplamiento electromecánico en las direcciones normales, es necesario que la dirección del campo eléctrico coincida con la de polarización. Se puede hacer una clasificación de los dispositivos piezoeléctricos según cual sea la dirección de polarización respecto a la dirección de acoplamiento electromecánico deseada. Si ambas direcciones son paralelas, el dispositivo se denomina tipo 3-3. Si son ortogonales, se denomina tipo 3-1 o 3-2. La Figura 2.8 muestra ambos conceptos.

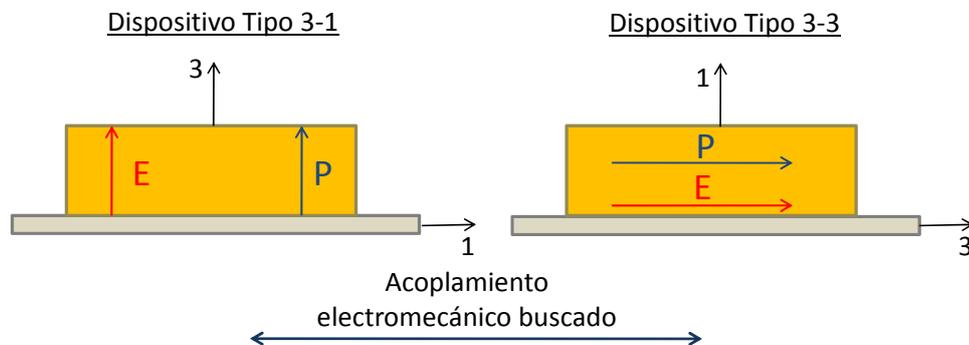


Figura 2.8: Distinción entre dispositivos tipo 3-1 y tipo 3-3.

Cuando se desea obtener el máximo acoplamiento electromecánico, se utilizan los dispositivos tipo 3-3, los cuales pueden ser de tipo pila o bien laminados elaborados con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales. Debido al interés que despiertan, por el mayor acoplamiento que presentan, a continuación se describen los dos tipos de dispositivos tipo 3-3.

2.5.2. Dispositivos tipo pila

Los actuadores de tipo pila, están constituidos por discos superpuestos y una serie de láminas intercaladas, que serán las responsables de introducir el campo eléctrico y se denominan electrodos. En la Figura 2.9 se muestra un esquema de este tipo de dispositivo, donde se ve claramente la presencia de las capas entre cada par de electrodos. En virtud del tamaño y otras características geométricas de los dispositivos, estos pueden construirse alternando manualmente la orientación de las capas.

En los dispositivos tipo pila se desarrollan fuerzas elevadas y desplazamientos muy pequeños. Por lo tanto, suelen utilizarse en conjunto con mecanismos de adaptación, siendo los mismos sistemas de levas y palancas.

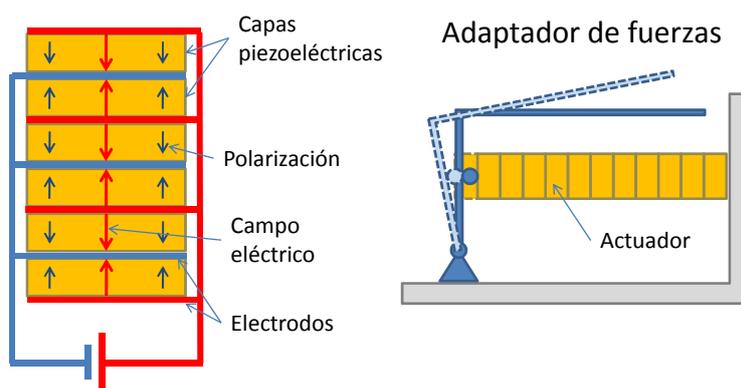


Figura 2.9: Esquema de un dispositivo tipo pila y un adaptador de fuerzas.

Utilizando estos dispositivos, se pueden accionar diferentes mecanismos para controlar deformaciones y desplazamientos. Como ejemplo, se puede citar la utilización de flaps ubicados en el borde de fuga de una pala de helicóptero, Figura 2.10.

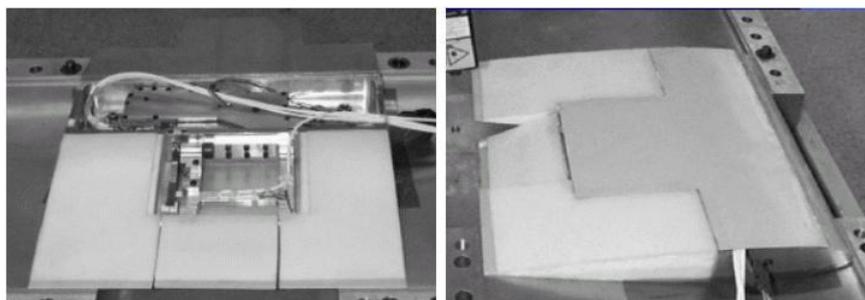


Figura 2.10: Utilización de un dispositivo tipo pila para accionar una superficie de control (Lee, 1999).

2.5.3. Dispositivos tipo parche elaborado con fibras piezoeléctricas

En los laminados con fibras piezoeléctricas el campo eléctrico es producido por un patrón de electrodos que permite introducir el campo eléctrico en la dirección paralela a las fibras. Estos dispositivos se construyen aprovechando las características de los materiales ferroeléctricos descritos anteriormente y poseen un aspecto como el que se ilustra en la Figura 2.11⁵.



Figura 2.11: Parche de compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales ([Smart-Material, 2010](#)).

Los electrodos interdigitales constituyen un componente fundamental para estos dispositivos, ya que permiten someter a todas las fibras a campos eléctricos elevados, sin usar potenciales demasiado altos, evitando de esta forma, las complicaciones asociadas. Por otro lado, constituyen una especie de *cauce* para el campo eléctrico.

La fabricación de las fibras se realiza, como se introdujo en el apartado anterior, mediante un complejo proceso de extrusión de una pasta que contiene partículas de algún material ferroeléctrico mezclado con un aglutinante. Esto permite obtener fibras de los diámetros necesarios para fabricar parches. Los electrodos se fabrican a partir de un film fotosensible. Para que las fibras activas puedan ser utilizadas con electrodos interdigitales, es fundamental que se elaboren con cerámicas que presenten propiedades ferroeléctricas ya que, de esta manera, mediante tratamientos especiales de polarización

⁵www.smart-material.com

in-situ, se logra que el acoplamiento electromecánico se sume a lo largo de la fibra (sea que éste se manifieste como elongación o contracción de las fibras o como cargas eléctricas y/o potencial eléctrico acumulados en los electrodos).

Cuando la fibra sale de la línea de fabricación, se encuentra en estado virgen, es decir, posee todos los granos cristalinos orientados aleatoriamente. Se requiere entonces un proceso de polarización para provocar una alineación de los dominios, ya que es justamente ese alineamiento el que determinará el acoplamiento electromecánico. La geometría y disposición de los electrodos interdigitales permite alterar y manipular la polarización en forma localizada. El mecanismo de polarización se lleva a cabo sometiendo a la fibra virgen a un campo eléctrico elevado, aproximadamente 10KV/cm y calentando a temperaturas moderadas, aproximadamente 100°C durante un corto período de tiempo. Un posible método es sumergir el material en un baño de aceite caliente, pero a una temperatura inferior a la de Curie, y aplicar un campo eléctrico. El baño de aceite se usa para calentar la cerámica y, de esta manera, aumentar la movilidad de los dominios ferroeléctricos. Además, evita descargas eléctricas que podrían ocurrir en el aire.

La temperatura agita los iones y permite que los dominios roten más fácilmente, de esta manera la saturación se logra más rápido. Se deja enfriar el baño de aceite hasta temperatura ambiente mientras se mantiene el campo eléctrico y, una vez frío, se retira. Así los dominios y, por lo tanto, los momentos dipolares, quedan alineados. Una vez realizado el proceso de curado, los parches quedan listos para ser utilizados. En la Figura 2.12 se muestra un esquema de una porción de fibra ferroeléctrica luego del proceso de polarización. Nótese la orientación alternada de los dominios entre dos electrodos consecutivos. En todos los sectores situados entre los electrodos el campo eléctrico y los dominios coinciden en dirección y sentido. Eventualmente, podrían ser de sentido opuesto, pero mantendrán dicha relación a lo largo de toda la fibra. Esto es precisamente la piedra angular de la tecnología de fibras piezoeléctricas y se puede lograr justamente mediante el proceso de polarización descrito anteriormente. Con esto se asegura que las deformaciones tendrán igual signo en todos los tramos de fibra.

Los compuestos de fibras piezoeléctricas pueden clasificarse en dos tipos, dependiendo

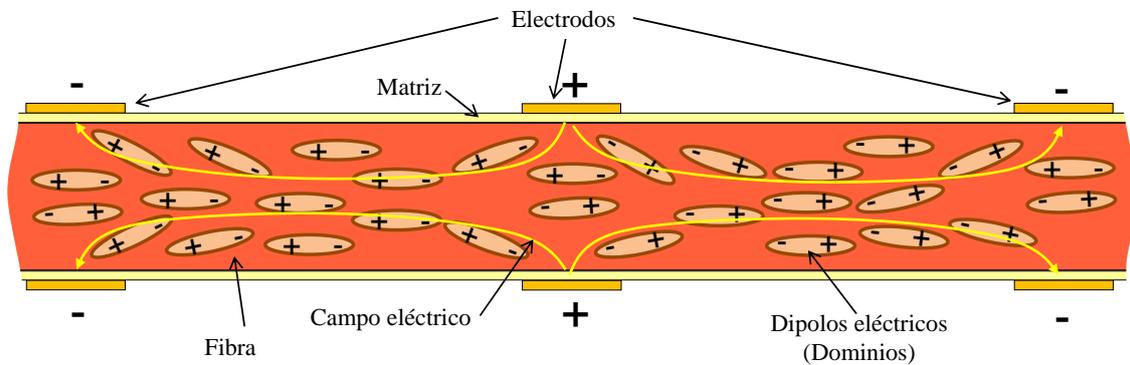


Figura 2.12: Esquema de una fibra piezoeléctrica luego del proceso de polarización - Corte longitudinal.

de la sección transversal de las fibras. Los denominados AFC, tienen fibras con sección transversal circular mientras que los llamados MFC las tienen rectangulares. En los MFC, los electrodos se encuentran más cerca a las fibras y por lo tanto el campo eléctrico se transmite más eficientemente a las fibras. Este hecho permite usar potenciales eléctricos menores para lograr el mismo resultado. El artículo de [Park y Kim \(2005\)](#) presenta una descripción detallada de ambos tipos de laminados o dispositivos.

En virtud de la elevada anisotropía que presentan los dispositivos elaborados con compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas-ferroeléctricas, resultan muy útiles cuando se desea introducir fuerzas en direcciones determinadas. Esto se refleja en la cantidad de trabajos publicados respecto de la utilización de estos materiales para el control activo de vibraciones en estructuras sometidas a torsión como es el caso de las palas de helicópteros y alas de aviones.

El control activo de estructuras requiere de actuadores y sensores, y ambos serán más efectivos en su funcionamiento cuanto mayor sea el acoplamiento electromecánico presente en los materiales que los constituyen. En este caso, actuadores y sensores se elaboran con compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas-ferroeléctricas y al respecto surgen dos grandes clasificaciones relativas a la manera en que se construyen las nombradas estructuras:

1. Estructuras de compuestos reforzados con fibras: En este caso, se realiza la construcción de las mismas con laminados constituidos total o parcialmente con fibras piezoeléctricas-ferroeléctricas y electrodos interdigitales, debiendo realizar el proceso de posicionamiento de los electrodos, curado y polarización de las fibras en estado *verde* sobre la estructura, luego de su construcción.
2. Estructuras construidas con materiales convencionales (compuestos o no), a las que se les adhieren parches elaborados con los compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas-ferroeléctricas y electrodos interdigitales. Dichos parches se construyen en una etapa independiente de la estructura.

La anisotropía permite, mediante orientaciones pertinentes de las fibras, construir laminados cuyas direcciones de acoplamiento electromecánico coincidan con las requeridas por las diferentes aplicaciones estructurales y sistemas de control. Esto confiere versatilidad en el diseño y capacidad de optimizar los sistemas de control. Un típico ejemplo se encuentra en aplicaciones en que se desean controlar las deformaciones torsionales de estructuras en forma de cajones cerrados, sistema estructural clásico de alas y palas de helicópteros. En estas aplicaciones la anisotropía de actuación es un factor fundamental ya que, orientando las fibras en ángulos convenientes, se logran introducir fuerzas que permiten controlar dichas deformaciones torsionales. Lo mismo ocurre con el funcionamiento como sensores, en los que se obtienen mayores diferencias de potencial o carga eléctrica en los electrodos cuando se manifiestan las deformaciones torsionales que se desean registrar y que se utilizarán luego para determinar las señales de control. Sin el acoplamiento electromecánico anisótropo, sería imposible el control de deformaciones torsionales en cajones cerrados. Por otra parte, los laminados piezoeléctricos mantienen las conocidas ventajas constructivas y mecánicas de los materiales compuestos convencionales. Es decir, permiten dirigir las fibras en las direcciones que permiten aprovechar al máximo su resistencia estructural y se pueden lograr formas sumamente complejas.

Si se piensa en los dispositivos utilizados como actuadores, se pueden realizar las siguientes comparaciones entre los de tipo pila y los elaborados con fibras piezoeléctricas-

ferroeléctricas y electrodos interdigitales:

1. El campo eléctrico que se usa para controlar ambos dispositivos coincide con la dirección de deformación, pero alterna el sentido entre dos electrodos consecutivos.
2. Las placas utilizadas en los actuadores tipo pila encuentran su equivalente funcional en los electrodos interdigitales utilizados para generar el campo eléctrico en las fibras.
3. El sentido del campo eléctrico alterna entre 0° y 180° entre dos discos consecutivos para los dispositivos tipo pila y entre dos espacios *inter-electrodo* o vanos consecutivos para las fibras
4. En las fibras y en los dispositivos tipo pila, el acoplamiento electromecánico se suma, es decir, todos los vanos y discos se estiran o encogen a la vez.

Para lograr que dos discos con campos eléctricos de sentido opuesto sufran deformación de igual signo es necesario alternar la dirección del material en uno u otro para que el tensor piezoeléctrico cambie el signo de los coeficientes que relacionan campo eléctrico y esfuerzos en esa dirección.

Cuando se trata de las fibras, se encuentran dificultades un poco más serias, ya que toda la fibra es un mismo material y no se tiene la posibilidad de alternar la orientación tan fácilmente entre dos vanos consecutivos. Es acá donde los materiales ferroeléctricos juegan un papel fundamental. En virtud del ciclo de histéresis que presentan, pueden utilizarse fibras elaboradas con los mismos en estado virgen y, una vez construido el laminado o los parches, se procede a la polarización alternada del material. Este proceso de polarización *in-situ* se lleva a cabo mediante la aplicación de campos eléctricos elevados y temperaturas moderadas. Recibe el nombre de curado y está íntimamente relacionado a los fenómenos no lineales estudiados en los Capítulos 5 y 7.

CAPÍTULO 3

ESTADO DEL ARTE

3.1. Introducción

El creciente interés que han despertado en las últimas décadas las estructuras activas dotadas de laminados piezoeléctricos, generó la necesidad de contar con herramientas de análisis eficientes y confiables. La mecánica del continuo es, sin duda, el marco general más comúnmente utilizado para analizar este tipo de problemas.

En una teoría de medios continuos se pueden distinguir dos clases de ecuaciones. Por un lado, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales provenientes de leyes de equilibrio comunes a todos los cuerpos materiales. Este sistema debe cerrarse con un segundo tipo de ecuaciones que representen las propiedades individuales y el comportamiento particular del material considerado.

A partir del trabajo original de [Allik y Hughes \(1970\)](#), el método de elementos finitos, en conjunto con diversos modelos constitutivos, ha sido usado extensamente para modelar el comportamiento de sistemas estructurales con dispositivos piezoeléctricos. Teniendo en cuenta la importancia de ambos temas, en este capítulo se presenta, por un lado, el estado del arte en relación a los modelos constitutivos existentes y, por otro lado, los distintos tipos de elementos finitos piezoeléctricos que se pueden encontrar en la bibliografía especializada.

La mayoría de los materiales que exhiben el comportamiento piezoeléctrico, usados actualmente, son de naturaleza ferroeléctrica. Siguiendo a [Klinkel \(2006\)](#), se hace la distinción entre cerámica piezoeléctrica y cerámica ferroeléctrica en el sentido que

las primeras son básicamente estas últimas polarizadas. Por lo tanto, en el contexto de esta tesis, los materiales piezoeléctricos estudiados son ferroeléctricos polarizados adecuadamente y el presente capítulo se enfoca hacia el estado del arte actual en relación al modelado del comportamiento de los mismos.

3.2. Modelos constitutivos para materiales ferroeléctricos

Dentro de los dispositivos ferroeléctricos existen, naturalmente, acoplamientos entre los campos eléctricos y mecánicos. En el caso más general, en un dispositivo de forma arbitraria, los nombrados campos electromecánicos varían punto a punto y su distribución está gobernada por las leyes físicas fundamentales de equilibrio mecánico, de compatibilidad de deformaciones y desplazamientos, de conservación de la carga eléctrica (Ley de Gauss) y la ecuación de Maxwell que expresa que en condiciones cuasi-estáticas el campo eléctrico debe ser irrotacional. La función de los modelos constitutivos es proveer relaciones que cierren este conjunto de ecuaciones y permitan su solución de manera única. Deben proporcionar relaciones entre las tensiones, deformaciones, campo eléctrico y desplazamiento eléctrico.

La respuesta constitutiva electromecánica depende, desde luego, de la naturaleza del material y de los niveles de campos electromecánicos a los que se someten. El modelo más simple es el lineal, que permite modelar la respuesta de materiales ya polarizados y dentro de ciertos límites de variación de las sollicitaciones. Estos límites están relacionados con los campos eléctricos coercitivos y tensiones de repolarización. Más allá de estos límites, los modelos lineales no son aplicables ya que aparecen fenómenos dependientes de la historia y que son responsables, entre otros, del cambio en el acoplamiento y la saturación en la conmutación de los dipolos eléctricos.

3.2.1. Modelos constitutivos lineales

En un material ferroeléctrico polarizado existe un acoplamiento entre las deformaciones y el campo eléctrico aplicado. Dicho acoplamiento es no lineal, tal como se observa

en la Figura 2.2. Cuando la polarización se conoce a priori, los campos eléctricos y las deformaciones son bajas y no se produce repolarización del material, puede emplearse la teoría clásica de piezoelectricidad de Voigt¹, cuyos detalles pueden encontrarse en Maugin (1988), Maugin et al. (1988) y Parton y Kudryavtsev (1988). Las ecuaciones constitutivas lineales para materiales piezoeléctricos por debajo de la temperatura de Curie correspondiente pueden expresarse de la siguiente manera (Ikeda, 1990):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3.1)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \chi_{ik}^\varepsilon E_k \quad (3.2)$$

donde C_{ijkl}^E , e_{hij} y χ_{ik}^ε integran el conjunto de módulos materiales y son el tensor elástico medido a campo eléctrico constante (esto se logra con los electrodos en corto circuito), el tensor piezoeléctrico y el tensor de rigidez dieléctrica medido a deformación constante, respectivamente; σ_{ij} es el tensor de tensiones; ε_{kl} es el tensor de deformaciones; D_i es el vector de desplazamiento eléctrico y E_i es el vector campo eléctrico. La ecuación (3.1) describe el efecto inverso y la (3.2) el directo. Puede observarse que son las mismas que las conocidas para un medio mecánico y dieléctrico con la salvedad que incluyen, en este caso, los términos de acoplamiento electromecánico. De la ecuación (3.1) se desprende que cada componente del tensor e_{hij} representa la tensión σ_{ij} cuando se somete el material al campo eléctrico unitario en la dirección h , mientras se restringen en el mismo todas las deformaciones. Otra interpretación para e_{ikl} puede desprenderse de la ecuación (3.2). Si se anula el campo eléctrico, cada componente de e_{ikl} representa el desplazamiento eléctrico en dirección i cuando se impone una deformación de componente ε_{kl} unitaria y las restantes nulas.

Las ecuaciones constitutivas lineales (3.1) y (3.2) se designan como forma $\sigma - D$. Además de ésta, se pueden expresar de tres maneras más:

¹Woldemar Voigt (1850-1919), Físico alemán que hizo importantes contribuciones en física de cristales, termodinámica y electro óptica.

Forma $\varepsilon - D$:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k \quad (3.3)$$

$$D_i = d_{ikl} \sigma_{kl} + \chi_{ik}^\sigma E_k \quad (3.4)$$

Forma $\sigma - E$:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{kij} D_k \quad (3.5)$$

$$E_i = -h_{ikl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ik}^\varepsilon D_k \quad (3.6)$$

Forma $\varepsilon - E$:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}^D \sigma_{kl} + g_{kij} D_k \quad (3.7)$$

$$E_i = -g_{ikl} \sigma_{kl} + \beta_{ik}^\sigma D_k \quad (3.8)$$

Cada forma de expresar las relaciones constitutivas tiene asociado un conjunto de módulos materiales. Manipulando algebraicamente cualquiera de estos, se puede obtener cualquiera de los otros restantes. Por ejemplo, para pasar de la forma $\sigma - D$ a la forma $\varepsilon - D$ se multiplica ambos miembros de (3.1) por $(C_{ijkl}^E)^{-1}$:

$$\varepsilon_{kl} = (C_{ijkl}^E)^{-1} \sigma_{ij} + (C_{ijkl}^E)^{-1} e_{hij} E_k \quad (3.9)$$

con lo que se obtiene:

$$S_{ijkl}^E = (C_{ijkl}^E)^{-1} \quad (3.10)$$

$$d_{hkl} = (C_{ijkl}^E)^{-1} e_{hij} \quad (3.11)$$

A su vez, reemplazando (3.9) en (3.2) y usando (3.11) se obtiene que:

$$\chi_{ih}^\sigma = \chi_{ih}^\varepsilon + d_{ikl} C_{ijkl}^E d_{ijh} \quad (3.12)$$

En este caso S_{ijkl}^E , d_{hij} y χ_{ik}^σ integran el conjunto de módulos materiales correspondiente a la forma constitutiva $\varepsilon - D$ y son el tensor de flexibilidad medido a campo eléctrico

constante, el tensor piezoeléctrico en términos de deformaciones y el tensor de rigidez dieléctrica medido a tensión mecánica constante, respectivamente. La expresión (3.12) muestra que la rigidez dieléctrica medida a tensión mecánica constante es mayor que la medida a deformación constante. En los estándares de IEEE (IEEE, 1978) se pueden encontrar otras comparaciones y un resumen de las distintas maneras de expresar las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas lineales. La Tabla 3.1 presenta en forma resumida la definición de cada constante piezoeléctrica y las unidades correspondientes al sistema M.K.S.

Constante	Definición	Unidades M.K.S.	Ref. Ecuación
e	$\frac{\text{Tensión mecánica inducida}}{\text{Campo eléctrico aplicado}}$	$N/(Vm)$	(3.1)
	$\frac{\text{Densidad de carga eléctrica inducida}}{\text{Deformación aplicada}}$	C/m^2	(3.2)
d	$\frac{\text{Deformación inducida}}{\text{Campo eléctrico aplicado}}$	m/V	(3.3)
	$\frac{\text{Densidad de carga eléctrica inducida}}{\text{Tensión mecánica aplicada}}$	C/N	(3.4)
h	$\frac{\text{Tensión mecánica inducida}}{\text{Carga eléctrica aplicada}}$	N/C	(3.5)
	$\frac{\text{Campo eléctrico inducido}}{\text{Deformación aplicada}}$	V/m	(3.6)
g	$\frac{\text{Deformación inducida}}{\text{Carga eléctrica aplicada}}$	m^2/C	(3.7)
	$\frac{\text{Campo eléctrico inducido}}{\text{Tensión mecánica aplicada}}$	Vm/N	(3.8)

Tabla 3.1: Definición de constantes piezoeléctricas.

En ocasiones y, en particular, cuando se trabaja con elementos finitos, resulta útil expresar las ecuaciones constitutivas en forma matricial, aprovechando la simetría de algunos de los tensores intervinientes. Así, los tensores de tensiones y deformaciones se representan mediante vectores de seis componentes, el tensor elástico, de cuarto orden, se representa mediante una matriz de 6x6, el tensor de rigidez dieléctrica, de segundo orden se representa mediante una matriz de 3x3 y el tensor piezoeléctrico de tercer orden se escribe como una matriz de 6x3.

Cuando se utiliza la forma matricial para las ecuaciones constitutivas expresadas en la forma $\sigma - D$, se tiene la siguiente notación vectorial:

$$\{\sigma\} = [C^E] \{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \quad (3.13)$$

$$\{D\} = [e] \{\varepsilon\} + [\chi^\varepsilon] \{E\} \quad (3.14)$$

La forma constitutiva $\varepsilon - D$ se expresa en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\{\varepsilon\} = [S^E] \{\sigma\} + [d]^T \{E\} \quad (3.15)$$

$$\{D\} = [d] \{\sigma\} + [\chi^\sigma] \{E\} \quad (3.16)$$

donde:

$$[d]^T = [C^E]^{-1} [e]^T \quad (3.17)$$

$$[\chi^\sigma] = [\chi^\varepsilon] + [d] [C^E] [d]^T \quad (3.18)$$

A continuación, se detalla la convención utilizada en esta tesis para representar los tensores de las ecuaciones constitutivas.

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\{E\} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}; \{D\} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

A partir de esta convención, se determina la manera de ordenar las constantes constitutivas en las matrices elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas y la relación que cada una representa. Agrupándolas en una misma ecuación constitutiva matricial, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \\ 0 & 0 & & C_{44} & 0 & 0 & -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ 0 & 0 & & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & C_{66} & -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \chi_{11} & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & 0 & \chi_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & 0 & 0 & \chi_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

Cada material que exhibe propiedades piezoeléctricas posee características representadas por las componentes de los tres tensores constitutivos mencionados. Las cerámicas PZT son muy utilizadas para elaborar fibras piezoeléctricas-ferroeléctricas y existen varios tipos de las mismas. En la Tabla 3.2 se citan los valores de las constantes constitutivas de algunas de ellas. A modo de comparación, se incluyen las propiedades del cuarzo que, a diferencia de las cerámicas PZT, es un material piezoeléctrico natural.

Durante las etapas de diseño de los dispositivos que utilizan estos tipos de materiales se tienen en cuenta, entre otros factores, los valores presentes en la Tabla 3.2 y se procura introducir los campos eléctricos en las direcciones de mayor acoplamiento.

Propiedad material	Cuarzo	PZT-2	PZT-5A	PZT-5H
$C_{11}(GPa)$	86.7	135.0	120.0	126.0
$C_{12}(GPa)$	6.99	68.0	75.2	79.3
$C_{13}(GPa)$	11.9	68.0	75.1	84.0
$C_{14}(GPa)$	17.9	-	-	-
$C_{22}(GPa)$	86.7	135.0	120.0	126.0
$C_{23}(GPa)$	11.9	68.0	75.1	84.0
$C_{24}(GPa)$	-17.9	-	-	-
$C_{33}(GPa)$	107.0	111.0	111.0	117.0
$C_{34}(GPa)$	0.0	-	-	-
$C_{44}(GPa)$	57.9	22.2	21.0	22.30
$C_{55}(GPa)$	57.9	22.2	21.0	22.30
$C_{56}(GPa)$	17.9	-	-	-
$C_{66}(GPa)$	39.9	33.4	22.6	22.35
$e_{31}(C/m^2)$	-0.12	-1.82	-5.35	-6.65
$e_{32}(C/m^2)$	0.12	-1.82	-5.35	-6.65
$e_{33}(C/m^2)$	0.2	9.1	15.8	23.17
$e_{25}(C/m^2)$	0.12	9.8	12.3	17.03
$e_{15}(C/m^2)$	0	9.8	12.3	17.03
Densidad (kgm^{-3})	5115.9	4500	1800	2713

Tabla 3.2: Propiedades de materiales piezoeléctricos típicos.

3.2.2. Modelos constitutivos no lineales

Cuando los citados materiales ferroeléctricos se someten a elevados campos eléctricos o de tensiones, tienen lugar importantes fenómenos no lineales y dependientes de la historia de carga, como ser el movimiento de las paredes de dominios, conmutación de la polarización espontánea y deformaciones remanentes.

Los elevados valores de campo eléctrico aparecen, en primer lugar, durante los procesos

de fabricación, en los que se usan para generar el patrón de dominios y polarización inicial requerido por la aplicación y tipo de dispositivo. El hecho de poder fijar y controlar las estructuras de dominio y conmutación de polarización, permite lograr el máximo aprovechamiento de los materiales ferroeléctricos en la fabricación de dispositivos electroemcánicos, (Wang et al., 2004). Por otra parte, Kushnir y Rabinovitch (2007) sostienen que se puede extender el rango operacional de los dispositivos ferroeléctricos elevando los niveles de campo eléctrico. Esto genera comportamientos no lineales de importante magnitud. Además, por razones relacionadas con la topología, durante la vida de servicio, pueden aparecer concentraciones locales de campos electromecánicos. Estas concentraciones pueden ocasionar serios daños, como despolarización y delaminación.

En virtud de lo expuesto en los párrafos anteriores, se puede sostener que, para mejorar el diseño de dispositivos construidos con materiales ferroeléctricos, es de gran importancia contar con herramientas que permitan modelar los fenómenos constitutivos no lineales de manera eficiente, precisa y correlacionada con observaciones experimentales.

La similitud del comportamiento y de la estructura matemática de las ecuaciones que describen tanto los fenómenos de ferroelectricidad como los de elastoplasticidad de metales, sugiere la posibilidad de aplicar métodos computacionales ya desarrollados y bien comprobados para plasticidad, al análisis de medios ferroeléctricos (Landis, 2004). Sin embargo, surgen algunas diferencias. Las variables internas son de naturaleza vectorial, como así también tensorial; las condiciones de conmutación dependen de las variables internas y se observan formas particulares de endurecimiento debido a los fenómenos de saturación de la polarización y deformaciones (Semenov et al., 2009). A diferencia de las deformaciones plásticas en plasticidad de metales, la polarización y las deformaciones remanentes en policristales ferroeléctricos están restringidas a alcanzar valores finitos. Más aún, la polarización de saturación depende del nivel de deformación remanente predominante. Por ejemplo, sólo se puede alcanzar el máximo nivel de polarización remanente si ésta está alineada con el máximo nivel de deformación remanente de tracción (Landis, 2004).

Las aplicaciones tecnológicas de piezocerámicos basan los cálculos y predicciones

en propiedades constitutivas macroscópicas. En búsqueda de modelos constitutivos que aborden este tema, se puede encontrar en la literatura un amplio espectro de propuestas y trabajos relacionados. Siguiendo las explicaciones de [Kushnir y Rabinovitch \(2008\)](#), los modelos constitutivos pueden ser principalmente de dos tipos, fenomenológicos y micromecánicos.

Un aspecto común a ambos tipos de modelos es la descomposición aditiva de deformaciones y polarización. De esta manera, dichas cantidades se expresan como suma de una parte lineal reversible y otra irreversible o remanente (superíndice r), dependiente de la historia.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^r \quad (3.22)$$

$$D_i = D_i^l + P_i^r \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta (3.22) y (3.23), las ecuaciones constitutivas en su forma $\sigma - D$ introducidas en 3.2.1 se escriben de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^r) - e_{kij} E_k \quad (3.24)$$

$$D_i = e_{ikl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^r) + \chi_{ij}^\varepsilon E_j + P_i^r \quad (3.25)$$

3.2.2.1. Modelos constitutivos microelectromecánicos

En los modelos constitutivos microelectromecánicos, se representa el punto material mediante un conjunto de granos cuya orientación espacial se distribuye, generalmente, en forma aleatoria. Haciendo una revisión histórica, se puede notar que en la línea de evolución de estos modelos se distinguen aspectos comunes a todos, como ser el hecho de obtener la respuesta del punto material considerando la contribución de todos los granos que lo componen. Sin embargo, las interacciones entre los granos no se consideran de igual manera en todos los enfoques. Los primeros modelos no incluían las interacciones intergranulares en el proceso de conmutación, y obtenían la

respuesta macroscópica, simplemente, promediando la contribución independiente de cada grano. Más adelante, para cubrir las limitaciones de los primeros modelos, aparecieron propuestas que consideran las interacciones entre los granos empleando métodos de inclusiones. Incluso, algunos investigadores modelan la respuesta del policristal mediante el método de elementos finitos. A continuación, se presenta una revisión de los modelos microelectromecánicos presentes en la bibliografía.

El modelo propuesto por (Hwang et al., 1995) considera al policristal ferroeléctrico como un conjunto de granos con un solo dominio cada uno, en donde la polarización conmuta en ángulos discretos al alcanzarse un criterio energético de conmutación. Sin embargo, observaciones experimentales revelaron que esto no es realmente cierto, ya que se produce un movimiento gradual de las paredes de los dominios. Otros modelos tienen en cuenta, además, las interacciones entre los granos. El modelo propuesto por Arlt (1996) tiene la característica de considerar que los granos contienen mezclas de dominios con diferente polarización. El modelo considera una serie de inclusiones esféricas en una matriz homogénea y permite incluir la interacción intergranular y obtener curvas de histéresis. Este modelo se basa en observaciones experimentales y logra fijar, para los casos particulares analizados, ciertos criterios de conmutación de dominios y describir el comportamiento observado a nivel macroscópico. Sin embargo, al igual que el modelo de Hwang et al. (1995), no está inspirado en bases termodinámicas generales.

Huo y Jiang (1997) usan métodos de micromecánica del continuo y criterios termodinámicos. Desde un punto de vista cinemático, las fronteras intergranulares imponen restricciones a la deformación espontánea, en consecuencia, la conmutación de dominios en un grano genera cambios en las tensiones y campos eléctricos en los granos vecinos. Estos cambios traen aparejada una reducción de las fuerzas impulsoras. La distorsión de la celda asociada a la conmutación de los dominios da origen a una deformación macroscópica denominada deformación espontánea.

A partir del criterio energético introducido por Hwang et al. (1995), el trabajo propuesto por Michelitsch y Kreher (1998) deriva en forma analítica la polarización macroscópica media. Sin embargo, el modelo no tiene en cuenta las interacciones

intergranulares. A pesar de esto, el modelo refleja la relación entre el acoplamiento piezoeléctrico y la conmutación en la polarización a nivel granular con el comportamiento histerético macroscópico.

Chen y Lynch (1998) presentan un modelo microelectromecánico para simular el comportamiento de cristales con estructura tetragonal y romboédrica incluyendo la interacción entre los diferentes granos y considerando un criterio de conmutación que contempla diferentes niveles de energía asociada a las conmutaciones con 90° y 180° para la estructura tetragonal y $70,5^\circ$, $109,5^\circ$ y 180° para la romboédrica. La interacción entre los diferentes cristales ferroeléctricos también se estudia usando modelos desarrollados originalmente para otro tipo de materiales. De esta manera, los modelos para aleaciones con memoria de forma desarrollados por Patoor et al. (1994), Lagoudas y Bhattacharyya (1997) y Huang y Brinson (1998) sirvieron como base para posteriores propuestas realizadas con el objetivo de incluir en los modelos para materiales ferroeléctricos, la interacción entre los diferentes cristales.

Lu et al. (1999) estudian en forma experimental y teórica el comportamiento no lineal de ferroeléctricos bajo cargas electromecánicas combinadas. Para el modelo usan homogeneización de Reuss y la evolución de los dominios está condicionada por balances entre fuerzas impulsoras y niveles de energías disipativas. Los resultados son válidos sólo para las transformaciones en sistemas cristalinos cúbicos-tetragonales.

Huber et al. (1999a) proponen un modelo constitutivo para considerar la conmutación ferroeléctrica en policristales bajo la acción combinada de cargas eléctricas y mecánicas. El mismo está basado en la observación de que el policristal está constituido por un conjunto de cristales unidos entre sí y que, a su vez, cada cristal contiene distintas variantes cristalinas. La formulación es termodinámicamente consistente y *rate-independent*, requiere un módulo de endurecimiento para estabilizar los cálculos y para controlar la pendiente de $\partial D/\partial E$ durante la conmutación ferroeléctrica. El modelo posee dos componentes principales. Por un lado, tiene una ley constitutiva para el cristal simple y, por otro lado, una técnica autoconsistente de promediado para determinar la respuesta del policristal. La primera tiene en cuenta la conmutación entre las variantes cristalográficas

y la segunda determina el comportamiento constitutivo del policristal.

Otra particularidad del modelo de [Huber et al. \(1999a\)](#) es que incorpora la característica de movimiento gradual de las paredes de dominio de manera equivalente al deslizamiento incremental en plasticidad de cristales. Esta analogía permite adaptar modelos previamente establecidos para la plasticidad de metales. De esta manera, los modelos autoconsistentes de plasticidad desarrollados por [Hill \(1965a\)](#), [Hill \(1965b\)](#) y [Hill \(1966\)](#), usados luego por [Hutchinson \(1970\)](#) son modificados para el caso de acoplamiento ferroeléctrico.

[Huber y Fleck \(2001\)](#) presentan comparaciones entre mediciones experimentales practicadas en probetas de cerámicas PZT-5H polarizadas en una dirección y sometidas a campos eléctricos a diferentes ángulos respecto de la misma y predicciones obtenidas con tres tipos de modelos. El primero, es un modelo de plasticidad de cristales *rate-independent* y sin endurecimiento, el segundo es viscoplástico y el tercero es fenomenológico, *rate-independent* con endurecimiento cinemático. En virtud de los resultados reportados, los autores sostienen que los modelos auto-consistentes de plasticidad cristalina, *rate-independent* y sin endurecimiento representan mejor la respuesta eléctrica multiaxial y la superficie de conmutación del policristal. Manifiestan, además, que el modelo fenomenológico considerado es preciso en el caso uniaxial pero no en casos multiaxiales.

El esquema de homogeneización propuesto por [Huber et al. \(1999a\)](#) es capaz de describir la respuesta global de policristales ferroeléctricos en forma precisa. En este enfoque, cada grano está sujeto a una restricción impuesta por la compatibilidad con el material circundante. Por lo tanto, la respuesta macroscópica tiene implícita la interacción entre los granos. Sin embargo, debido a que las propiedades del material circundante son las promediadas, el modelo no es capaz de captar estas interacciones para una disposición granular particular.

Con el objetivo de expandir la capacidad de análisis en relación a las interacciones intergranulares, surgen otras iniciativas para modelar policristales ferroeléctricos que permiten tener en cuenta más detalles. El fenómeno de conmutación de dominios es

un proceso gradual y no todas las celdas cristalinas conmutan simultáneamente. El fenómeno es meramente cinemático, ya que involucra cambios en la microestructura de los dominios. Estos cambios se reflejan, naturalmente a nivel macroscópico, y en este sentido, simulaciones tipo *Fase-Campo* del comportamiento no lineal en ferroeléctricos permiten conocer detalles de los mecanismos de conmutación (Wang et al., 2004).

Otros investigadores analizan la respuesta de cerámicas ferroeléctricas policristalinas empleando el método de elementos finitos. Estos modelos son naturalmente computacionalmente intensivos. El modelo de Kamlah et al. (2005) considera explícitamente la interacción entre los granos, los que se describen con el modelo de Huber et al. (1999a). En este modelo, los autores consideran la cerámica como un ensamblaje de elementos en el que cada uno es un grano con su correspondiente orientación cristalográfica. El modelo usa elementos sólidos de deformación plana.

Haug et al. (2007a) también describen el comportamiento dentro de cada grano mediante el modelo micromecánico de Huber et al. (1999a) y modelan la interacción entre los granos explícitamente usando elementos finitos planos, en tensión plana y también en deformación plana. Pero, a diferencia del análisis de Kamlah et al. (2005) en el que cada elemento representa un grano, el modelo de Haug et al. (2007a) discretiza cada grano con un ensamblaje de elementos. El trabajo presenta, además, un análisis de la influencia de la interacción intergranular en la conmutación global y local, considerando distintas condiciones de carga. Los resultados presentados por los autores revelan una importante coincidencia entre los correspondientes al modelo autoconsistente de Huber et al. (1999a) y los obtenidos mediante el análisis multigranular realizado con elementos finitos.

Pathak y McMeeking (2008) usan un modelo tridimensional de elementos finitos, en el que utilizan hexaedros de ocho nodos para simular la respuesta de un policristal ferroeléctrico sujeto a sollicitaciones electromecánicas combinadas. Para la descripción del comportamiento de los cristales multidominios usan el modelo de Huber et al. (1999a). Los autores llevan a cabo una simulación *rate-dependent* con distribución aleatoria de las direcciones cristalográficas en cada grano y usan el proceso de integración temporal propuesto por Peirce et al. (1984). Los resultados presentados por estos autores alcanzan

marcada coincidencia con resultados experimentales.

Los modelos que consideran la interacción entre granos en forma explícita, usando enfoques computacionalmente intensivos mediante elementos finitos, tienen la ventaja de poder incluir en el análisis, importantes aspectos, como ser la interacción intergranular y las fluctuaciones de tensiones y deformaciones intragranulares (Haug et al., 2007b). Dentro de los granos se pueden generar elevadas tensiones que pueden provocar fallas intergranulares, y esto representa un aspecto importante a tener en cuenta para evaluar la confiabilidad del material. También se pueden considerar diferentes formas de los granos y estudiar en forma sistemática la respuesta. Sin embargo, la principal desventaja es la carga computacional, pudiendo ser esta mitigada reemplazando la gran cantidad de granos distribuidos aleatoriamente con un conjunto determinístico más pequeño, enfoque presentado por Kushnir y Rabinovitch (2008). El modelo parte del enfoque presentado por Hwang et al. (1998) e introduce una serie de orientaciones discretas para representar el comportamiento de múltiples granos. Otra desventaja la constituye el hecho de necesitar considerables cantidades de simulaciones para llegar a recolectar datos suficientes como para realizar generalizaciones útiles. Sin embargo, es una estrategia de análisis muy importante y en constante desarrollo actualmente, (Huber, 2005).

Los resultados de los modelos microelectromecánicos logran captar, en gran medida, los efectos fundamentales de los policristales ferroeléctricos. Sin embargo, la principal desventaja de los mismos radica en la gran cantidad de variables internas que contienen, ya que deben seguir el estado de cada grano a lo largo de la historia del material. Esto constituye una gran dificultad a la hora de realizar análisis de dispositivos y aplicaciones concretas en situaciones de campos eléctricos inhomogéneos usando, por ejemplo, el método de elementos finitos. Por este motivo, los llamados modelos fenomenológicos, al incluir un menor número de variables internas, despertaron un marcado interés en los últimos años en el campo de análisis de medios ferroeléctricos (Landis, 2004).

3.2.2.2. Modelos constitutivos fenomenológicos

Este tipo de modelos representa la respuesta del material sin modelar explícitamente los mecanismos subyacentes (Ghandi, 1998). Usan resultados experimentales como bases y lineamientos y, de esta manera, se pueden calibrar para alcanzar correlación con los mismos.

Los modelos constitutivos fenomenológicos despiertan un marcado interés en aplicaciones ingenieriles, principalmente, por tener un número relativamente pequeño de variables internas en comparación con el número de granos que componen el punto material. El reducido número de variables contribuye a la eficiencia del modelo. Sin embargo, muchas veces, se ve penalizada la capacidad de captar comportamientos particulares bajo condiciones de carga complejas y multiaxiales (Kamlah y Jiang (1999); Kamlah y Tsakmakis (1999); Hwang y McMeeking (1999); Landis (2002)).

Un modelo muy simple para describir efectos histeréticos es el propuesto por Preisach (1935). En su forma original, fué desarrollado para describir procesos de magnetización. Recientemente Hwang et al. (1995), Pasco y Berry (2004) y Butz et al. (2005) usan este enfoque para modelar cerámicas ferroeléctricas. De esta manera, logran reproducir los principales efectos observados en la respuesta macroscópica de este tipo de cristales, es decir, histéresis dieléctrica, histéresis en forma de mariposa de las deformaciones en función del campo eléctrico y no linealidad mecánica. En un trabajo posterior, Hughes y Wen (1997) presentan una aplicación del modelo de Preisach al análisis de la histéresis encontrada en piezocerámicos y aleaciones con memoria de forma. Los autores hacen un relevamiento de las principales propiedades del modelo y comparan resultados con respuestas obtenidas experimentalmente. En el trabajo, los autores reportan importantes coincidencias entre resultados numéricos y experimentales en el comportamiento de los lazos menores.

Basados en teoría macroscópica Chen y Montgomery (1980), Chen (1980) y Chen y Tucker (1981) plantean que la polarización remanente es función del grado de alineación de los dipolos. Chen y Montgomery (1980) proponen un modelo en el que identifican una relación no lineal entre el campo eléctrico externo y la velocidad de conmutación de dipolos

para alinearse con el mismo. El modelo propuesto por [Chen \(1980\)](#) considera que las propiedades eléctricas macroscópicas pueden ser representadas por dipolos cuya magnitud y dirección pueden alterarse por medio de estímulos externos, siendo el número de dipolos alineados una variable interna. Estos modelos resultan de gran utilidad e incrementan la capacidad de modelar fenómenos observados en ensayos sobre materiales ferroeléctricos. Sin embargo, al igual que el modelo original de Preisach, no están formulados en un marco termodinámico.

Otro enfoque lo constituyen las formulaciones termodinámicas inspiradas en conceptos de elastoplasticidad. [Bassiouny et al. \(1988a\)](#), [Bassiouny et al. \(1988b\)](#), [Bassiouny y Maugin \(1989a\)](#) y [Bassiouny y Maugin \(1989b\)](#) presentan modelos que usan como variables internas a la deformación y polarización remanentes y, junto con un potencial de disipación, derivan ecuaciones de evolución sujetas a condiciones de carga. Los autores introducen una función de energía libre dependiente de la temperatura, polarización y deformación y consideran una descomposición aditiva de las deformaciones y de la polarización.

Basados en estos últimos enfoques, se formulan una gran cantidad de modelos para conmutación de dominios en materiales ferroeléctricos. Los primeros modelos introducidos son uniaxiales. [Lynch \(1998\)](#) analiza la interacción entre la polarización y deformación remanente usando dos variables internas escalares. El autor propone una relación funcional entre las cargas aplicadas y las variables internas. Durante la descarga, esta relación se modifica para contemplar los efectos de histéresis. El trabajo de [Cocks y McMeeking \(1999\)](#) está basado en una formulación termodinámica general y describe el comportamiento constitutivo de cerámicas con estructura cristalina del tipo de la Perovskita. El estado del material se describe usando la polarización y deformación remanentes como variables internas. Basándose en los procesos micromecánicos subyacentes, los autores presentan formas simples para la función de energía libre de Helmholtz descomponiéndola en una parte reversible y en otra parte irreversible o remanente. Al igual que en plasticidad de metales, consideran que dentro de la superficie de conmutación el comportamiento es reversible, mientras que los

procesos irreversibles evolucionan sobre la superficie de conmutación. A partir de esta formulación, surgen de forma natural las leyes de endurecimiento y las fuerzas internas termodinámicamente conjugadas de las variables internas. En esta misma línea, pero con un enfoque más general, [Kamlah y Jiang \(1999\)](#) proponen una formulación con una cantidad genérica de variables internas, identificándolas conceptualmente con aspectos microelectromecánicos relacionados a una distribución aproximada de dominios. Las deformaciones y polarización remanentes, las propiedades mecánicas, piezoeléctricas y dieléctricas dependen de dichas variables internas. Los autores identifican fuerzas impulsoras termodinámicamente consistentes asociadas a cada una de las variables internas y definen la superficie de conmutación en el espacio de dichas fuerzas impulsoras.

[Kamlah y Tsakmakis \(1999\)](#) proponen un modelo fenomenológico, también uniaxial, con el objetivo de ser incluido en un código de elementos finitos con esfuerzos computacionales aceptables. En este modelo, la deformación irreversible se descompone en dos partes y las variables internas están gobernadas por ecuaciones diferenciales ordinarias de evolución, sujetas a condiciones de carga de dos tipos. Las del primer tipo indican el comienzo de los cambios en las cantidades remanentes debidos a los procesos de conmutación. El segundo tipo de condiciones caracteriza la saturación de las cantidades remanentes correspondientes a una completa conmutación de los dominios de toda la estructura cristalina.

[McMeeking y Landis \(2002\)](#), [Landis \(2002\)](#) y [Klinkel \(2006\)](#) proponen modelos constitutivos multiaxiales. El modelo de [McMeeking y Landis \(2002\)](#) introduce una relación biunívoca entre la polarización y deformación remanentes. Sin embargo, [Landis \(2002\)](#) propone un modelo sin esta última relación y demuestra que el mismo es capaz de representar los fenómenos observados en el comportamiento de materiales ferroeléctricos como histéresis, ciclos de mariposa, despolarización producida por causas mecánicas y los resultados experimentales multiaxiales de rotación de la polarización reportados por [Huber y Fleck \(2001\)](#).

Desde un punto de vista energético, las formulaciones de elementos finitos basadas en desplazamientos y potenciales eléctricos exhiben una asimetría. El desplazamiento

mecánico es el potencial para las deformaciones, las que caracterizan el estado mecánico del material. Por otra parte, a partir del potencial eléctrico se deriva el campo eléctrico que, termodinámicamente, es la fuerza conjugada relativa al desplazamiento eléctrico, con el desplazamiento eléctrico determinando el estado eléctrico del material. Como consecuencia, muchas veces, es necesario realizar un cambio de variables en las ecuaciones constitutivas (Kamlah et al., 2005). Para evitar esto, el trabajo de Klinkel (2006) presenta un modelo termodinámicamente consistente que introduce como variable interna un campo eléctrico irreversible que sustituye a la polarización remanente. El modelo es totalmente compatible con las formulaciones de elementos finitos basadas en desplazamientos mecánicos y potenciales eléctricos. Los resultados presentados captan los efectos histeréticos y de despolarización observados experimentalmente.

Semenov et al. (2009) presentan un algoritmo de retorno mapeado del tipo proyección al punto más cercano para realizar simulaciones de los efectos de histéresis electromecánica en cerámicas ferroeléctricas. El algoritmo está basado en el modelo propuesto por Landis (2002). Los autores obtienen el operador tangente consistente linealizando el algoritmo de retorno mapeado.

3.2.3. Modelos para compuestos piezoeléctricos

La determinación de las propiedades efectivas de compuestos piezoeléctricos constituye un aspecto de suma importancia en el diseño de estructuras que usan este tipo de materiales. Según Jang (1994), Wagner (1914) realizó las primeras investigaciones para predecir teóricamente la dependencia de las propiedades dieléctricas de un compuesto a partir de la fracción de volumen de cerámica presente en el mismo. Más tarde, Buesson (1963) derivó ecuaciones para las constantes dieléctricas, utilizando modelos serie-paralelo.

En lo que respecta al los compuestos piezoeléctricos, propuestas basadas en el trabajo de Buesson (1963) consideran combinaciones serie-paralelo para captar el comportamiento electromecánico en este tipo de materiales (Jang, 1994). En este sentido, los primeros

trabajos se enfocaron hacia las inclusiones de partículas cerámicas inmersas en una matriz determinada. Luego se extendieron los modelos para considerar los compuestos con fibras piezoeléctricas y surgieron otras propuestas que abordan este tema.

En la bibliografía especializada se encuentran numerosos trabajos de investigación que tratan sobre la obtención de las propiedades efectivas de compuestos piezoeléctricos, donde se puede observar que existen diferentes enfoques. Siguiendo a [Vel y Goupee \(2010\)](#), se presenta la siguiente clasificación de los métodos típicos para determinar la respuesta macroscópica de materiales heterogéneos. Por un lado se ubican las teorías del medio efectivo, las que incluyen el método de Eshelby, Mori-Tanaka ([Mori y Tanaka, 1973](#)), los esquemas autoconsistentes ([\(Hill, 1965a\)](#), ([Benveniste, 1987](#))) y otros modelos de campos uniformes ([Bent y Hagood, 1997](#)). Por otro lado, se sitúan los métodos de límites teóricos ([Hashin, 1965](#)). Finalmente, se encuentran los enfoques que usan modelos computacionales intensivos, típicamente de elementos finitos o elementos de contorno, para determinar la respuesta de un volumen representativo del material heterogéneo.

Los trabajos de [Wang \(1992\)](#), [Dunn y Taya \(1993\)](#), [Chen \(1993\)](#) y [Shodja et al. \(2010\)](#) extienden la solución clásica de Eshelby para un medio infinito con inclusiones elipsoidales, para incluir el aspecto piezoeléctrico. Estos enfoques no tienen en cuenta las interacciones entre las inclusiones. Por otro lado, el enfoque presentado por [Odegard \(2004\)](#) se basa en el método autoconsistente de Mori-Tanaka y las extensiones propuestas por [Dvorak y Srinivas \(1999\)](#). También surgieron propuestas para analizar los efectos no lineales y dependientes de la historia en este tipo de materiales. [Tan y Tong \(2001\)](#) usan un modelo de campos uniformes para analizar la respuesta no linealidad de compuestos piezoeléctricos sometidos a campos eléctricos monótonos crecientes y moderados. [Aboudi \(2001\)](#) y [Aboudi \(2005\)](#) modelan la respuesta histerética de un compuesto de fibras ferroeléctricas usando un modelo de homogeneización para compuestos con estructura periódica, basado en un modelo micromecánico. [Muliana \(2010\)](#) presenta un modelo micromecánico simplificado promediando en el volumen las variables de campo. El modelo incluye los fenómenos histeréticos y de repolarización en las fibras y los efectos viscoelásticos de la matriz, para esto, considera el campo eléctrico como un parámetro

constante y expresa la relación no lineal del acoplamiento electromecánico, en términos de componentes escalares de tensiones mecánicas y campo eléctrico.

Los enfoques computacionalmente intensivos analizan la respuesta del compuesto identificando un volumen representativo o celda unitaria de material que captura las propiedades más relevantes de la microestructura. Este volumen representativo es modelado explícitamente. Mediante la imposición de condiciones de borde adecuadas se determinan las propiedades electromecánicas efectivas. Siguiendo esta metodología, [Gaudenzi \(1997\)](#) analiza la respuesta electromecánica lineal de un compuesto piezoeléctrico usando el método de elementos finitos. El autor estudia una formulación variacional del problema y su resolución numérica. El trabajo presenta aspectos relevantes de la respuesta para diferentes relaciones de permitividad dieléctrica de fibra y resina. [Pettermann y Suresh \(2000\)](#) desarrollan un modelo para estudiar una celda unitaria de compuesto piezoeléctrico usando diferentes condiciones de borde y estados de carga electromecánicos, comparan resultados con límites semianalíticos. [Berger et al. \(2005\)](#) presentan una técnica numérica general de homogeneización para predecir las propiedades efectivas de un laminado reforzado con fibras piezoeléctricas. El análisis está basado, también, en un modelo de elementos finitos para la celda unitaria imponiendo condiciones de borde periódicas.

Especialmente propuesto para laminados piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales (EID), el modelo propuesto por [Bent y Hagood \(1997\)](#) determina las propiedades efectivas utilizando el método de campos uniformes. El trabajo incluye, además, comparaciones con un modelo de elementos finitos y comparaciones entre las predicciones de ambos enfoques para diferentes propiedades materiales, relaciones de volumen de los constituyentes y aspectos geométricos de electrodos. [Zhang y Shen \(2006\)](#) presentan el análisis de un laminado piezoeléctrico rectangular con EID, usando desarrollos de serie de Fourier y Series de Potencias para los desplazamientos y potenciales eléctricos.

[Martinez y Artemev \(2009\)](#) presentan un análisis computacionalmente intensivo de actuadores y sensores construidos con laminados piezoeléctricos polarizados con EID en

el que se encuentran fibras sanas y dañadas. Los autores consideran el funcionamiento en modo sensor, como así también en modo actuador, incorporando en ambos casos los efectos de la despolarización en las cercanías de las zonas dañadas. Además cuantifican los cambios en el desempeño asociados al daño, reportando disminuciones de hasta un 10 % en el mismo.

3.3. Elementos finitos piezoeléctricos

La utilización del método de elementos finitos (MEF) para el análisis de medios continuos ha experimentado grandes avances en las últimas décadas. Esto se debe, principalmente, a que el MEF en conjunto con las computadoras digitales, permite resolver numéricamente y en forma sistemática modelos matemáticos de sistemas continuos complejos, (Bathe, 1996). El método puede utilizarse para analizar sistemas estructurales estáticos y dinámicos en los que se manifiestan diferentes fenómenos como pandeo, transferencia térmica, electromagnetismo y sobre todo, problemas de campos acoplados. Esta última capacidad hace que el método sea adecuado para el estudio de sistemas y estructuras que utilizan materiales piezoeléctricos. Desde principios de la década del 70 aparecieron en la literatura gran cantidad de trabajos que tratan de la aplicación del método de elementos finitos al análisis de sistemas piezoeléctricos. En particular y con la aparición del concepto relativamente nuevo de estructuras activas, en los últimos diez años la cantidad de publicaciones aumentó considerablemente, (Benjeddou, 2000).

Debido a la complejidad de las ecuaciones que describen los fenómenos de acoplamiento electromecánico, en particular de piezoelectricidad, sólo algunos problemas de este tipo pueden resolverse en forma analítica, (Sze y Pan, 1999). Además, las condiciones de borde y la forma del dominio del problema aportan complicaciones adicionales. Por lo tanto, el método de elementos finitos, interpretado como herramienta numérica aproximada para la solución del modelo matemático, encuentra aplicación inmediata en este campo.

Para que el análisis sea computacionalmente eficiente, normalmente resulta conveniente modelar de diferentes maneras las distintas partes de la estructuras. Los elementos utilizados dependen, entre otros aspectos, de las formas, relación entre dimensiones y maneras de resistir las cargas que caracterizan la estructura. En esta sección se intentan citar los avances que el método de elementos finitos ha experimentado y cuál es la tendencia actual en lo que respecta a formulaciones para modelar estructuras que utilizan materiales piezoeléctricos. Se describen los distintos tipos de elementos finitos existentes en la bibliografía para resolver los problemas que aparecen durante el análisis de este tipo de estructuras activas.

Los elementos finitos capaces de describir el comportamiento estructural de sistemas contruidos con materiales piezoeléctricos pueden considerarse como una generalización de los utilizados en mecánica estructural clásica. En búsqueda de herramientas para resolver problemas en los que están involucrados materiales piezoeléctricos, se han formulado gran cantidad de elementos. Aparentemente, los primeros esfuerzos en el área, estuvieron orientados básicamente al estudio y diseño de transductores piezoeléctricos, se trataba básicamente de elementos sólidos. Sin embargo, en las últimas dos décadas, con el creciente interés que cobraron las estructuras activas, especialmente en las ramas aeroespaciales, surgieron formulaciones de elementos mejor condicionados para tales aplicaciones. Así comenzaron a aparecer en la literatura elementos tipo cáscaras, placas y vigas incluyendo en su formulación la presencia de materiales piezoeléctricos laminados, [Benjeddou \(2000\)](#).

3.3.1. Elementos sólidos

Los elementos piezoeléctricos sólidos tridimensionales son similares a los elementos sólidos tridimensionales mecánicos, sólo que poseen grados de libertad eléctricos adicionales en los nodos. La mayoría de los trabajos estuvieron impulsados por la necesidad de analizar dispositivos concretos. Tal es el caso de los transductores piezoeléctricos utilizados en sonares. Para tal fin, resultaba suficiente trabajar con

ecuaciones constitutivas lineales. El primer modelo de elementos finitos que incluyó el fenómeno piezoeléctrico fue propuesto por [Allik y Hughes \(1970\)](#). Ellos desarrollaron un elemento piezoeléctrico sólido y lo aplicaron al estudio de transductores acústicos. Se trata de un elemento sólido tetraédrico de cuatro nodos con cuatro grados de libertad por nodo, tres desplazamientos mecánicos y el potencial eléctrico. Utilizaron condensación estática de los grados de libertad eléctricos. También [Allik et al. \(1974\)](#) propusieron un elemento sólido hexaédrico de 20 nodos para analizar la respuesta de los transductores de sonares. Los desplazamientos y el potencial eléctrico en el interior del mismo se aproximaban en forma cuadrática. [Chin et al. \(1994\)](#) formularon un elemento sólido tridimensional hexaédrico de 8 nodos con aproximación lineal de desplazamientos y potencial eléctrico dentro del elemento. Al igual de lo que ocurre en el caso de elementos basados en formulaciones irreducibles usados en problemas mecánicos, en el caso piezoeléctrico también se obtienen elementos demasiado rígidos, sensibles a distorsiones en la malla y a las relaciones de aspecto ([Sze y Pan, 1999](#)). Para solucionar dicho inconveniente, [Tzou y Tseng \(1990\)](#), [Ha et al. \(1992\)](#) y [Tzou et al. \(1994\)](#) utilizaron los modos incompatibles de desplazamiento y mejoraron el desempeño de los elementos sólidos hexaédricos de 8 nodos. Con el transcurso de los años, se comenzaron a investigar los materiales ferroeléctricos, para lo cual no bastaban las ecuaciones lineales. Se llegaron así a proponer elementos que soportan ecuaciones constitutivas no lineales y grados de libertad internos para representar transiciones de fase y polarización remanente. [Ghandi y Hagood \(1997\)](#) formularon elementos sólidos hexaédricos de 8 nodos y tetraédricos de 4 nodos. Esta formulación estuvo basada en desplazamiento eléctrico e hizo posible modelar de manera más precisa, entre otros fenómenos, la transición de fase y la polarización remanente presentes en materiales de naturaleza ferroeléctrica, mediante la incorporación de un vector interno para almacenar la magnitud y dirección de la polarización. Las variables de polarización espontánea determinan la dirección de polarización dentro de cada elemento y el acoplamiento electromecánico. Su valor está determinado por la historia del sistema y es fundamental para poder captar el comportamiento histerético del material. La solución se realizó en forma iterativa.

3.3.2. Elementos de viga

Surgieron gran cantidad de trabajos que proponen elementos de viga capaces de describir, particularmente, el comportamiento de alas y palas de helicópteros para analizar el control de fenómenos aeroelásticos. [Song et al. \(1992\)](#) usaron un modelo de viga con inclusiones de material piezoeléctrico para modelar alas adaptativas. Luego [Ehlers \(1994\)](#) propuso un elemento de viga tipo cajón con capacidad de actuación anisótropa. [Shen \(1994\)](#) formuló un elemento de viga basado en la teoría de Timoshenko. Utilizando el funcional mixto de Hu-Washizu, se interpolan linealmente los desplazamientos axiales y la función de alabeo, mientras que las deflexiones transversales se aproximan con un polinomio cúbico de Hermite. Además de los grados de libertad mecánicos, el elemento posee un potencial eléctrico para la cara superior y otro para la inferior. [Carpenter \(1997\)](#) propone un elemento de viga basado en la teoría de Euler-Bernoulli con potenciales eléctricos como grados de libertad nodales, para ser utilizado en vibraciones axiales y control de flexión. En cuanto a modelos que no disponen de grados de libertad eléctricos en los nodos, [Robbins y Reddy \(1991\)](#) formularon cuatro elementos basados en analogías térmicas. Dos de ellos basados en modelos de lámina equivalente que utilizan modelos clásicos de vigas y los dos restantes, en modelos multilaminas con deflexiones interpoladas con polinomios cúbicos de Hermite. Se propusieron elementos de viga con materiales compuestos PZT-Epoxy para ser utilizados en control activo de vibraciones [Aldraihem et al. \(1997\)](#). Dichos elementos están basados en las teorías de Euler-Bernoulli e incluyen el comportamiento en torsión de Saint-Venant y el alabeo de la sección.

3.3.3. Elementos de placa

Muchos de los desarrollos de elementos finitos para el análisis de placas se realizaron sobre las bases de las teorías clásicas, en las cuales se considera el campo de desplazamientos en el plano, variable según una ley lineal. Por otra parte [Saravanas et al. \(1997\)](#) presentaron teorías más realistas que simulaban con mayor precisión el comportamiento a través de las capas del laminado. Los desarrollos se aplicaron para

análisis estáticos y dinámicos de laminados piezoeléctricos. [Saravanos et al. \(1997\)](#) supusieron una variación continua de los desplazamientos mecánicos y el potencial eléctrico a través del espesor del laminado. La teoría resultante representa, con mayor generalidad, la cinemática del alabeo de la sección transversal y captura la variación no lineal del potencial eléctrico a través del espesor cuando el laminado es grueso.

[Suleman y Venkayya \(1995\)](#) propusieron un elemento de placa basado en la teoría de Mindlin con un potencial eléctrico por cada capa piezoeléctrica y utilizaron integración numérica reducida y control de modos espurios.

Adicionalmente se encuentran, en la literatura, formulaciones que utilizan teorías de capas discretas para laminados piezoeléctricos de placas. Estas formulaciones tienen la ventaja de representar el potencial con mayor precisión, gracias a las subdivisiones a través del espesor del elemento. Se han propuesto diferentes maneras de aproximar el campo eléctrico, dependiendo de la manera en que está construida la estructura.

Cuando se utilizan laminados con varias capas (algunas piezoeléctricas), resulta necesario contemplar la posibilidad de que las diferentes capas piezoeléctricas estén sometidas a diferentes campos eléctricos. [Chee et al. \(2000\)](#) propusieron un modelo que admite configuraciones multiláminas, con los desplazamientos en el plano aproximados en forma cúbica, los desplazamientos transversales en forma cuadrática y los potenciales intralaminares de manera lineal. Cada capa del laminado puede tener una dirección particular y puede presentar o no propiedades piezoeléctricas. Además de los grados de libertad mecánicos, se incluye un valor de potencial eléctrico por cada interfase interlaminar y las dos superficies exteriores del laminado. En su trabajo, [Reddy \(1999\)](#) presenta una formulación teórica de las soluciones de Navier y modelos de elementos finitos basados en la teoría clásica de placas y la teoría de deformación por corte para el análisis de placas de compuestos laminados con sensores y actuadores integrados, sujetas a cargas mecánicas y eléctricas. La teoría de deformación por corte de tercer orden describe mejor la cinemática, aproximando con mayor precisión las tensiones interlaminares.

[Auricchio et al. \(2001\)](#) estudiaron el comportamiento de placas piezoeléctricas bajo las hipótesis cinemáticas de Reissner-Mindlin, considerando dos problemas variacionales

desacoplados, el membranal y el flexional.

3.3.4. Elementos de cáscara

En la búsqueda de herramientas apropiadas para la solución de problemas estructurales en los que intervienen materiales piezoeléctricos, se ha formulado un considerable número de elementos finitos de tipo cáscara. [Benjeddou \(2000\)](#) presenta una investigación sobre los avances y tendencias en el modelado de estructuras activas provistas de materiales piezoeléctricos. Desde entonces y hasta ahora, se propusieron nuevos elementos con características que contribuyen a mejorar la capacidad de modelación y análisis de estructuras activas e “inteligentes”.

[Lammering \(1991\)](#) propuso un elemento de cáscara de cuatro nodos que admite deformaciones por corte, con desplazamientos, giros y potencial eléctrico interpolados en forma lineal dentro del elemento. El elemento presenta siete grados de libertad por nodo, tres desplazamientos, dos giros y dos potenciales eléctricos, uno para la cara superior y otro para la cara inferior. El modelo soporta un laminado de tres capas, generando, a partir de las mismas, una capa equivalente.

[Thirupathi et al. \(1997\)](#) propusieron un elemento isoparamétrico general de cáscara de ocho nodos basado en las hipótesis de Reissner-Mindlin, sin grados de libertad eléctricos nodales. El elemento fue desarrollado usando una teoría tridimensional modificada de cáscaras. El efecto piezoeléctrico fue considerado como una deformación inicial.

[Varadan et al. \(1993\)](#) propusieron un elemento tipo cáscara axial-simétrico de tres nodos y tres grados de libertad por nodo, dos desplazamientos en el plano y el potencial eléctrico.

[Tzou y Ye \(1996\)](#) formularon un elemento de cáscara modificado de 12 nodos. Los desplazamientos y potenciales eléctricos se supusieron cuadráticos en el plano y lineales a través del espesor.

[Lee y Saravanos \(2000\)](#) desarrollaron un elemento finito de cáscara de ocho nodos basado en una teoría multilámina y termopiezolectricidad lineal. El elemento propuesto

combina campos de desplazamientos lineales a través del espesor con campos de potencial eléctrico y temperatura lineales dentro de cada capa. Fue utilizado para modelar el comportamiento de laminados piezoeléctricos bajo excitaciones térmicas.

También se encontraron en la literatura trabajos que analizan estructuras tipo sandwich, en las que el centro es de un material convencional y se adhieren en la superficie parches que pueden cumplir la función de actuadores o sensores, ([Lammering y Mesecke-Rischmann, 2003](#)). Los autores presentan distintas formulaciones variacionales y sus correspondientes soluciones mediante elementos finitos, pensados para diseñar distintas estructuras tipo cáscaras que poseen parches piezoeléctricos. Se basan en la formulación de un elemento isoparamétrico de cáscara elástica gruesa, del tipo de Mindlin-Reissner. La cinemática de la estructura queda descrita por los desplazamientos correspondientes a la zona pasiva y a las capas piezoeléctricas.

Basados en teorías de placas y cáscaras, clásicas y con deformaciones por corte, los elementos finitos que soportan laminados de compuestos piezoeléctricos son muy populares en la literatura especializada ([Reddy, 1999](#)). Para formulaciones multilámina se pueden distinguir dos enfoques ([Kögl y Bucalem, 2005a](#)). El primero, en el cual el campo de desplazamientos es suave a través del espesor, se designa como “modelo de capa única”. Para el segundo enfoque, el campo de desplazamientos se considera suave dentro de cada capa pero no en la interfase de las mismas; estos modelos se denominan “zig-zag” ó “a través de la capa” (*through the layer*) ([Carrera \(1997\)](#); [Saravanos et al. \(1997\)](#); [Carrera \(2002\)](#); [Carrera \(2003\)](#)). Estas últimas teorías arrojan resultados más precisos, especialmente para laminados gruesos, y son más aptas para predecir efectos interlaminares. Sin embargo, conducen a modelos computacionales más costosos, debido al incremento en el número de grados de libertad en relación a los enfoques de capa única ([Kögl y Bucalem, 2005a](#)).

Como es manifestado por [Kögl y Bucalem \(2005b\)](#), el uso de las hipótesis de Reissner-Mindlin para el caso de placas y cáscaras confiere a los elementos la capacidad de ser usados, tanto en casos de espesores delgados, como así también espesores moderadamente gruesos. En la literatura puede encontrarse un gran número de elementos finitos basados

en estas consideraciones.

Suleman y Venkayya (1995) propusieron un elemento de placa basado en la teoría de Mindlin con un grado de libertad correspondiente a potencial eléctrico por cada capa. Los autores utilizaron integración reducida para aliviar los problemas de bloqueo por corte.

Saravanos (1997) y Saravanos et al. (1997) consideraron una variación continua a lo largo de cada capa para los desplazamientos mecánicos y los potenciales eléctricos. La teoría resultante representa con mayor generalidad la cinemática del alabeo de la sección transversal y captura la variación no lineal del potencial eléctrico a través del espesor del laminado, especialmente para casos de espesores relativamente gruesos.

Chee et al. (2000) propusieron un modelo para configuraciones multicapas, con aproximación cúbica para los desplazamientos en el plano, cuadrática para los desplazamientos fuera del plano y lineal para los potenciales intralaminares. Cada capa puede tener una orientación arbitraria y puede o no ser piezoeléctrica. Además de los grados de libertad mecánicos la formulación incluye los valores de los potenciales eléctricos de las interfases interlaminares y los correspondientes a las superficies exteriores. La aproximación del campo eléctrico se realiza en dos pasos. En el primer paso, las funciones de distribución del potencial en cada interfase se obtienen usando funciones de forma isoparamétricas lineales estándares. En el segundo paso, el campo eléctrico a través del espesor se calcula considerando una distribución lineal para el potencial eléctrico intralaminar.

Lammering y Mesecke-Rischmann (2003) analizaron estructuras del tipo cáscaras formadas por un sandwich de materiales convencionales entre dos parches piezoeléctricos. Los autores presentaron diferentes formulaciones variacionales y sus correspondientes soluciones con elementos finitos orientadas al diseño de distintos tipos de estructuras del tipo cáscaras con laminados piezoeléctricos. Los citados autores formularon elementos de cáscaras gruesas isoparamétricos basados en la teoría de Reissner-Mindlin. La cinemática está definida por los desplazamientos correspondientes a la zona pasiva y las capas piezoeléctricas. La formulación combina una distribución cuadrática para el potencial eléctrico a través del espesor con una variación lineal en cada capa en término de los

potenciales nodales prescriptos.

Enfoques similares fueron usados por Kögl y Bucalem (2005b), quienes formularon una familia de elementos de placa y cáscara MITC piezoeléctricos, utilizando estos elementos para modelar estructuras inteligentes multiláminas.

Balamurugan y Narayanan (2008) presentaron la formulación de un elemento finito de cáscara degenerado de nueve nodos que soporta la inclusión de un piezolaminado, considerando en la formulación una variación cuadrática del potencial eléctrico a través del espesor.

3.3.5. Aplicaciones y tendencias actuales

Un análisis detallado de la literatura muestra que la mayoría de los modelos de elementos finitos para materiales piezoeléctricos están dirigidos a simulaciones estáticas, modales y transitorias de sistemas de control de vigas, placas y cajones cerrados. En aplicaciones que utilizan específicamente laminados piezoeléctricos, los elementos tipo cáscara y placa presentan grandes ventajas, ya que permiten realizar modelos estructurales computacionalmente económicos sin penalizar la calidad de los resultados ni la habilidad del modelo para representar la estructura real. Sin embargo, no se encuentran en la literatura formulaciones especialmente propuestas para analizar estructuras de placas o cáscaras que utilicen compuestos con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales.

CAPÍTULO 4

MODELOS CONSTITUTIVOS UTILIZADOS EN LA TESIS

4.1. Introducción

La revisión bibliográfica presentada en el Capítulo 3 refleja la importancia que revisten, en la modelación del comportamiento material de cerámicas ferroeléctricas-piezoeléctricas, tanto los modelos constitutivos fenomenológicos como los microelectromecánicos.

El modelo para compuestos propuesto en esta tesis utiliza un modelo fenomenológico presente en la bibliografía para describir el comportamiento de las fibras ferroeléctricas. Por otra parte, numerosos autores sostienen que los modelos microelectromecánicos pueden ser utilizados para calibrar modelos fenomenológicos. Por lo tanto, en este capítulo se presenta, por un lado, la forma general del modelo constitutivo fenomenológico utilizado y los aspectos particulares adoptados y, por otro lado, la descripción de un modelo microelectromecánico también presente en la bibliografía y utilizado en el Capítulo 7 para realizar comparaciones con el modelo fenomenológico.

4.2. Modelo fenomenológico

El modelo fenomenológico implementado en esta tesis para describir el comportamiento material de las fibras ferroeléctricas se basa en la formulación general de leyes

constitutivas para cerámicas ferroeléctricas policristalinas presentada por Landis (2002) y Semenov et al. (2009), y los aspectos particulares introducidos por Huber y Fleck (2001).

El comportamiento de las fibras ferroeléctricas es, en general, dependiente de la historia de carga y, por lo tanto, se debe recurrir a un análisis incremental. En cada incremento de carga se deben determinar las variables del problema. En esta tesis se utiliza el programa comercial ABAQUS (SIMULIA, 2005) que usa el método de elementos finitos basados en desplazamientos mecánicos y potencial eléctrico escalar, lo cual requiere que los procesos estén conducidos por las deformaciones y el campo eléctrico para garantizar que las matrices de rigidez tangentes resulten definidas positivas (Semenov et al., 2009).

Se hace notar que dentro de los modelos fenomenológicos existentes en la bibliografía, los que están desarrollados en forma completa son los que consideran a las deformaciones mecánicas y al desplazamiento eléctrico como variables independientes y a las tensiones mecánicas y al campo eléctrico como variables duales asociadas a las mismas. Este es el caso del modelo implementado en esta tesis. La utilización de este tipo de enfoque dentro del marco de un programa de elementos finitos como el descrito, requiere una inversión del modelo constitutivo así planteado y no se puede garantizar ya que las matrices de rigidez tangentes resulten definidas positivas.

Sin embargo, debido a que se utiliza un algoritmo de integración de la ecuación constitutiva de tipo *cutting-plane*, para el cual no se pueden determinar los tensores materiales tangentes consistentes, se trabaja con el método de resolución del sistema de equilibrio global, del tipo Newton-Raphson Modificado (Simo y Hughes, 1998). En estas circunstancias se utilizan los módulos materiales iniciales. Los ejemplos numéricos desarrollados muestran que la convergencia no se ve afectada demasiado por la utilización de los módulos materiales iniciales.

4.2.1. Marco termodinámico

En este apartado se presenta el marco termodinámico para describir el comportamiento constitutivo de una cerámica ferroeléctrica sometida a procesos de polarización

y deformaciones, bajo condiciones isotérmicas. Siguiendo a Bassiouny et al. (1988a) y Landis (2002), se introduce una función para la energía libre de Helmholtz y se la descompone en una parte reversible y en una parte remanente:

$$\psi = \psi^s (\varepsilon_{ij}, D_i, \varepsilon_{ij}^r, P_i^r) + \psi^r (\varepsilon_{ij}^r, P_i^r) \quad (4.1)$$

donde ψ^s es la parte reversible o almacenada de la energía libre, mientras que ψ^r representa la contribución remanente, asociada sólo a las variables internas del material y se puede interpretar como una función de endurecimiento (Landis, 2002).

Bajo la hipótesis de comportamiento piezoeléctrico lineal, ψ^s se escribe:

$$\begin{aligned} \psi^s = & \frac{1}{2} C_{ijkl}^D (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^r) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^r) - h_{kij} (D_k - P_k^r) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^r) + \\ & \beta_{ij}^\varepsilon (D_i - P_i^r) (D_k - P_k^r) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde los módulos materiales C_{ijkl}^D , h_{kij} y β_{ij}^ε son los definidos en el Capítulo 3. Invertiendo las ecuaciones (3.3) y (3.4) se obtienen las relaciones de dichos módulos con S_{ijkl}^E , d_{kij} y χ_{ij}^σ .

El Segundo Principio de la Termodinámica establece que la tasa de disipación por unidad de volumen Ξ , debe ser no negativa. Usando la desigualdad de Clausius - Duhem, sin considerar efectos térmicos, este principio se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Xi = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i - \dot{\psi} \geq 0 \quad (4.3)$$

La derivada temporal de la energía libre de Helmholtz es:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial D_i} \dot{D}_i + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^r} \dot{\varepsilon}_{ij}^r + \frac{\partial \psi}{\partial P_i^r} \dot{P}_i^r \quad (4.4)$$

Reemplazando la ecuación (4.4) en la expresión (4.3) puede verse que una condición suficiente para que la desigualdad de Clausius-Duhem (4.3) sea válida para variaciones arbitrarias de las variables independientes, ε_{ij} y D_i , es que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}^D (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^r) - h_{kij} (D_k - P_k^r) \quad (4.5)$$

$$E_i = \frac{\partial \psi}{\partial D_i} = -h_{ikl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^r) - \beta_{ij}^\varepsilon (D_i - P_i^r) \quad (4.6)$$

Se debe cumplir, además, que:

$$\Xi = \hat{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^r + \hat{E}_i \dot{P}_i^r \geq 0 \quad (4.7)$$

En la ecuación (4.7) se introdujeron las fuerzas termodinámicamente conjugadas de las variables internas ε_{ij}^r y P_i^r definidas respectivamente de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}_{ij} = -\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^r} \quad (4.8)$$

$$\hat{E}_i = -\frac{\partial \psi}{\partial P_i^r} \quad (4.9)$$

Estas fuerzas, que surgen cuando se introducen y se explicitan las derivadas de (4.4) en la expresión de la disipación (4.3), contienen las cargas aplicadas, las derivadas del potencial remanente ψ^r y términos asociados a los cambios en los módulos materiales. Es habitual llamarlas tensión y campo eléctrico relativo (Landis, 2002) y se expresan respectivamente de la siguiente manera:

Tensión mecánica relativa:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^B + \bar{\sigma}_{ij} \quad (4.10)$$

Campo eléctrico relativo:

$$\hat{E}_i = E_i - E_i^B + \bar{E}_i \quad (4.11)$$

donde:

$$\sigma_{ij}^B = \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon_{ij}^r} \quad (4.12)$$

$$E_i^B = \frac{\partial \psi^r}{\partial P_i^r} \quad (4.13)$$

$$-\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial c_{pqrs}^D}{\partial \varepsilon_{ij}^r} (\varepsilon_{pq} - \varepsilon_{pq}^r) (\varepsilon_{rs} - \varepsilon_{rs}^r) - \frac{\partial h_{qrs}}{\partial \varepsilon_{ij}^r} (D_q - P_q^r) (\varepsilon_{rs} - \varepsilon_{rs}^r) + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta_{pq}^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}^r} (D_p - P_p^r) (D_q - P_q^r) \quad (4.14)$$

$$-\bar{E}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial c_{pqrs}^D}{\partial P_i^r} (\varepsilon_{pq} - \varepsilon_{pq}^r) (\varepsilon_{rs} - \varepsilon_{rs}^r) - \frac{\partial h_{qrs}}{\partial P_i^r} (D_q - P_q^r) (\varepsilon_{rs} - \varepsilon_{rs}^r) + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta_{pq}^\varepsilon}{\partial P_i^r} (D_p - P_p^r) (D_q - P_q^r) \quad (4.15)$$

Introduciendo los tensores de endurecimiento, los incrementos en estas cantidades se pueden expresar, (Landis, 2002):

$$\dot{\sigma}_{ij}^B = H_{ijkl}^m \dot{\varepsilon}_{kl}^r + H_{kij}^{em} \dot{P}_k^r \quad (4.16)$$

$$\dot{E}_i^B = H_{ikl}^{em} \dot{\varepsilon}_{kl}^r + H_{ij}^e \dot{P}_j^r \quad (4.17)$$

donde $H_{ijkl}^m = \frac{\partial^2 \psi^r}{\partial \varepsilon_{ij}^r \partial \varepsilon_{kl}^r}$, $H_{kij}^{em} = \frac{\partial^2 \psi^r}{\partial P_k^r \partial \varepsilon_{ij}^r}$ y $H_{ij}^e = \frac{\partial^2 \psi^r}{\partial P_i^r \partial P_j^r}$.

4.2.2. Modelo fenomenológico para las fibras

Se describe a continuación el modelo fenomenológico implementado y analizado en esta tesis, que está basado en el marco termodinámico antes presentado. Se utiliza para la función umbral de conmutación, la expresión propuesta por Huber y Fleck (2001)¹:

$$G^2 = \alpha^f \hat{s}_e^2 + \left| \hat{E}_i \right|^2 + \beta^f \hat{s}_{ij} \hat{E}_i P_j^r \quad (4.18)$$

donde:

$$\hat{s}_e = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{s}_{ij} \hat{s}_{ij}} \quad (4.19)$$

$$\hat{s}_{ij} = s_{ij} - s_{ij}^c \quad (4.20)$$

y

$$\hat{E}_i = E_i - E_i^c \quad (4.21)$$

¹Esta expresión representa una extensión de la propuesta por Cocks y McMeeking (1999), $G^2 = \alpha^f \hat{s}_e^2 + \left| \hat{E}_i \right|^2$

s_{ij} es el desviador de σ_{ij} y (s_{ij}^c, E_i^c) representan la posición del centro de la superficie de conmutación.

Observaciones experimentales indican que la aplicación de un campo eléctrico desde el estado inicial no polarizado, es capaz de introducir una deformación remanente (Lynch, 1996). El tercer término de la función de conmutación (4.18) introduce el acoplamiento entre los términos mecánicos y eléctricos. Este término se activa cuando el material tiene polarización remanente. Los escalares α^f y β^f son constantes y se introducen para mantener consistencia dimensional y permitir ajustar el modelo con mediciones experimentales.

La función umbral de conmutación está definida en el espacio de las variables \hat{s}_{ij} y \hat{E}_i y de las variables internas P_i^r y ε_{ij}^r , de la siguiente manera:

$$G(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{E}}; \mathbf{P}^r, \boldsymbol{\varepsilon}^r) - G_c \leq 0 \quad (4.22)$$

donde G_c es el valor crítico de la función de conmutación y, en ausencia de endurecimiento isótropo, se mantiene constante. Cuando $G - G_c < 0$ no hay conmutación o repolarización, mientras que durante la repolarización se verifica la igualdad $G - G_c = 0$. Los estados $G - G_c > 0$ son inadmisibles. Se utiliza una regla de flujo asociado, de manera que los incrementos de ε_{ij}^r y de P^r son normales a las superficie de conmutación y se expresan de la siguiente forma:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^r = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \hat{s}_{ij}} \quad (4.23)$$

$$\dot{P}_i^r = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \hat{E}_i} \quad (4.24)$$

donde el multiplicador $\dot{\lambda}$ es mayor que cero durante un incremento de conmutación e igual a cero en el caso de respuesta lineal.

En general, las propiedades materiales S_{ijkl}^E , d_{kij} y χ_{ij}^σ , que aparecen en las expresiones constitutivas lineales (3.3) y (3.4), dependen directamente del estado de polarización del material. En el modelo fenomenológico implementado en esta tesis, y siguiendo a Landis

(2002), se considera que los tensores S_{ijkl}^E y χ_{ij}^σ son isótropos y constantes y pueden escribirse como:

$$\chi_{ij}^\sigma = \chi^\sigma \delta_{ij} \quad (4.25)$$

$$S_{ijkl}^E = \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{\nu}{2\mu(1+\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (4.26)$$

Huber y Fleck (2001) midieron experimentalmente los valores de la permitividad dieléctrica para cubos de material ferroeléctrico polarizados en diferentes ángulos. Los resultados reflejan una variación muy pequeña de esta propiedad material en las diferentes direcciones, por lo tanto χ_{ij}^σ puede considerarse isótropo para cierto tipo de cerámicas como el PZT.

El tensor piezoeléctrico se determina con la siguiente expresión:

$$d_{kij} = \frac{P^r}{P_0} \left[d_{33}n_k n_i n_j + d_{31}n_k \alpha_{ij} + \frac{1}{2}d_{15}(n_i \alpha_{jk} - n_j \alpha_{ik}) \right] \quad (4.27)$$

donde,

$$P^r = \sqrt{P_i^r P_i^r} \quad (4.28)$$

$$n_i = \frac{P_i^r}{P^r} \quad (4.29)$$

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (4.30)$$

En la relación funcional (4.27), las propiedades materiales d_{33} , d_{31} y d_{15} son las componentes del módulo piezoeléctrico medidas en ensayos, cuando la polarización remanente P^r alcanza su máximo valor P_0 . Además, χ^σ es la permitividad dieléctrica medida bajo tensión mecánica constante, mientras que μ y ν son los módulos de corte y Poisson, medidos a campo eléctrico constante. Como se observa en la expresión (4.27), el tensor piezoeléctrico se considera transversalmente isótropo respecto del eje de simetría alineado con la dirección de polarización n_i . Otros investigadores, como Kamlah y Tsakmakis (1999) y Huber y Fleck (2001), también utilizan esta relación funcional para el tensor piezoeléctrico.

Para la evolución del centro de la superficie de conmutación, el modelo considera las siguientes relaciones sencillas:

$$\dot{s}_{ij}^c = \delta_{ik}\delta_{jl}h_s(\varepsilon_{mn}^r)\dot{\varepsilon}_{kl}^r \quad (4.31)$$

y

$$\dot{E}_i^c = \delta_{ij}h_e(P_k^r)\dot{P}_j^r \quad (4.32)$$

Donde $h_s(\varepsilon^r)$ y $h_e(P^r)$ son funciones escalares de las deformaciones y polarización remanentes. Estas cantidades se eligen de manera tal de obtener elevado endurecimiento cuando se alcanza la saturación,

$$h_s(\varepsilon_r) = h_{0s} \left(1 - \frac{\frac{I_2}{4} \left(3 - \left(\frac{I_3}{I_2} \right)^3 \right)}{\varepsilon_{sat}} \right)^{-n_s} \quad (4.33)$$

$$h_e(P_r) = h_{0e} \left(1 - \frac{|P_i^r|}{P_{sat}} \right)^{-n_e} \quad (4.34)$$

donde I_2 e I_3 son los invariantes de tensor ε_{ij}^r , mientras que n_s y n_e son exponentes que regulan la saturación de las cantidades remanentes.

Debido a que el acoplamiento electromecánico se introduce en la función de conmutación, a través del término $\hat{s}_{ij}\hat{E}_iP_j^r$, no se considera acoplamiento en los módulos de endurecimiento. Esta suposición es adecuada para describir el comportamiento bajo sollicitaciones uniaxiales, (Huber y Fleck, 2001). Por lo tanto,

$$H_{ikl}^{em} = 0 \quad (4.35)$$

Se puede justificar la utilización de este modelo para representar el comportamiento material de las fibras ferroeléctricas inmersas en una matriz de polímero y polarizadas con electrodos interdigitales, ya que en este tipo de laminados, la separación entre electrodos es aproximadamente seis a ocho veces mayor que el ancho de los mismos, y por lo tanto, en zonas alejadas de los electrodos el estado electromecánico es predominantemente uniaxial.

4.3. Modelo microelectromecánico

Al modelar en forma explícita los granos, los modelos microelectromecánicos, permiten captar un mayor número de fenómenos y particularidades de la respuesta material pero, como contrapartida, resultan computacionalmente caros. Una alternativa atractiva es utilizarlos para calibrar modelos fenomenológicos.

En el modelo microelectromecánico utilizado en esta tesis, la respuesta del policristal se obtiene usando el modelo autoconsistente de [Huber et al. \(1999a\)](#) para describir el comportamiento de los cristales simples, combinado con un método computacional intensivo, que tiene en cuenta las interacciones de los granos en forma explícita.

4.3.1. Modelo microelectromecánico de Huber (1999)

La formulación de este modelo se basa en la observación de que el policristal está formado por un conjunto de granos. A su vez, cada grano, está constituido por diferentes variantes cristalinas. Los granos tienen una dirección cristalográfica y en el policristal cada uno está orientado en forma aleatoria respecto de un sistema de referencia global. Dentro de cada grano, se generan regiones o porciones de la red cristalina que tienen la misma polarización espontánea, estas regiones se denominan dominios. Por lo tanto, los dominios son una colección de celdas que tienen la misma orientación dipolar relativa a los ejes principales de simetría. En cada grano habrá una determinada cantidad de cada variante. Utilizando un enfoque análogo al de plasticidad de cristales, esto se cuantifica con variables internas correspondientes a las fracciones de volumen de cada variante cristalina.

La descomposición aditiva de las deformaciones y de la polarización se expresa como en las ecuaciones (3.22) y (3.23):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^r \quad (4.36)$$

$$D_i = D_i^l + P_i^r \quad (4.37)$$

De forma análoga a los fenómenos de deslizamientos múltiples para cristales metálicos, se producen progresivas conversiones de una variante cristalina a otra. Con el objetivo de simplificar el análisis, se consideran como válidas las siguientes suposiciones:

1. El cristal tiene una fracción de volumen c^I de cada variante cristalina I . Para el caso de cristales tetragonales, existe un total de seis variantes.
2. Dentro del cristal se consideran uniformes, tanto el campo eléctrico E_i como la tensión mecánica σ_{ij} .
3. Tanto las partes lineales como remanentes de las deformaciones y desplazamiento eléctrico se calculan en base a promedios en el volumen del cristal.

Estas suposiciones simplifican el análisis cinemático y de las propiedades materiales, abstrayéndose de la configuración específica de los dominios dentro del cristal.

En virtud de las suposiciones anteriores, las partes lineales de la deformación ε_{ij}^l y desplazamiento eléctrico promediados D_i^l pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij}^l = \sum_{I=1}^{I=M} \left[c^I \varepsilon_{ij}^{l(I)} \right] = S_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k \quad (4.38)$$

$$D_i^l = \sum_{I=1}^{I=M} \left[c^I D_i^{l(I)} \right] = d_{ikl} \sigma_{kl} + \chi_{ik}^\sigma E_k \quad (4.39)$$

Debido a que las σ_{ij} y E_i son uniformes dentro del cristal, se tienen las siguientes expresiones para los tensores constitutivos del mismo:

$$S_{ijkl}^E = \sum_{I=1}^{I=M} \left[c^I S_{ijkl}^{E(I)} \right] \quad (4.40)$$

$$d_{ijk} = \sum_{I=1}^{I=M} \left[c^I d_{ijk}^{(I)} \right] \quad (4.41)$$

$$\chi_{ij}^\sigma = \sum_{I=1}^{I=M} \left[c^I \chi_{ij}^{\sigma(I)} \right] \quad (4.42)$$

Cada una de las M variantes cristalinas puede transformarse en una de las $(M - 1)$ variantes restantes, lo que da un total de $N = M(M - 1)$ transformaciones. Para

el caso de cristales tetragonales con seis variantes cristalinas hay un total de $N = 30$ transformaciones posibles, entre conmutaciones de 90° y 180° . Cada sistema de transformación α involucra la transformación de una variante I en otra J y está caracterizado por:

- La deformación asociada a la transformación, cuya magnitud γ^α es la diferencia entre la deformación espontánea correspondiente a las dos variantes involucradas en la transformación.
- La diferencia en la polarización P^α , entre las dos variantes involucradas (I y J).

El cambio en la fracción de volumen c^I de la variante cristalina I es promovido por la activación de varios sistemas α de transformación, esto se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{c}^I = \sum_{\alpha=1}^N A^{I\alpha} \dot{f}^\alpha \quad (4.43)$$

donde $A^{I\alpha}$ es una matriz poblada de -1 , $+1$ y 0 , para tener en cuenta la influencia de cada sistema de conmutación α en la concentración de cada variante de dominio. Si la activación del sistema de transformación $\alpha : (I \rightarrow J)$ incrementa la fracción de volumen c^I entonces $A^{I\alpha} = 1$, si contribuye a su disminución $A^{I\alpha} = -1$ y si la activación no afecta esa concentración, $A^{I\alpha} = 0$.

Se debe tener en cuenta que $0 \leq c^I \leq 1$. Si un sistema de conmutación tiende a violar esta condición, el mismo debe desactivarse.

Los incrementos de conmutación \dot{f}^α producen incrementos de deformación y polarización remanentes $(\dot{\varepsilon}_{ij}^r, \dot{P}_i^r)$, estos se determinan sumando las contribuciones de todos los sistemas de conmutación activos y se expresan de la siguiente manera:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^r = \sum_{\alpha} \dot{f}^\alpha \mu_{ij}^\alpha \gamma^\alpha \quad (4.44)$$

$$\dot{P}_i^r = \sum_{\alpha} \dot{f}^\alpha s_i^\alpha P^\alpha \quad (4.45)$$

donde

$$\mu_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} (s_i^\alpha n_j^\alpha + s_j^\alpha n_i^\alpha) \quad (4.46)$$

es el tensor unitario de orientación de Schmid, que describe corte simple en la dirección s_i^α en el plano de normal unitaria n_i^α (Huber et al., 1999b). Los vectores s_i^α y n_i^α están relacionados con los ejes de la red cristalina y el tipo de anisotropía de la celda unitaria (Kamlah et al., 2005).

Como explica Landis (2004), una notable diferencia entre la teoría de deslizamiento en plasticidad y la de conmutación de dominios es que en esta última, ninguna concentración puede ser menor a cero y, al mismo tiempo, la suma de todas debe ser uno. Los incrementos de conmutación f^α dependen íntimamente de las concentraciones de las variantes cristalinas.

Las fracciones incrementales de volumen f^α son las variables cinemáticas fundamentales del proceso de conmutación. A continuación se deriva la fuerza impulsora como una variable termodinámica conjugada de f^α . En un balance energético entran en juego, por un lado, la energía disponible, asociada a la aplicación de la tensión mecánica y campo eléctrico, y, por otro lado, las energías disipadas por el movimiento de las paredes de dominios y la energía electroelástica acumulada en el sólido. De esta manera, la energía disipada es la diferencia entre la energía total suministrada y la acumulada en el sistema y se expresa con la siguiente ecuación:

$$\dot{w}^D = \dot{w} - \dot{w}^S \quad (4.47)$$

donde w^D es la disipación por unidad de volumen del cristal y \dot{w}_D su derivada temporal.

La energía suministrada al sistema se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i = \sigma_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij}^l + \dot{\varepsilon}_{ij}^r) + E_i (\dot{D}_i^l + \dot{D}_i^r) \quad (4.48)$$

La energía almacenada se expresa de la siguiente manera:

$$w^S = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^l + E_k D_k^l) \quad (4.49)$$

siendo su derivada temporal,

$$\dot{w}^S = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^l + \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^l + E_k \dot{D}_k^l + \dot{E}_k D_k^l) \quad (4.50)$$

Usando las ecuaciones constitutivas,

$$\varepsilon_{ij}^l = S_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k \quad (4.51)$$

$$D_i^l = d_{ikl} \sigma_{kl} + \chi_{ik}^\sigma E_k \quad (4.52)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^r) - h_{kij} (D_k - P_k^r) \quad (4.53)$$

$$E_i = -h_{ikl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^R) + \beta_{ik}^\varepsilon (D_k - P_k^R) \quad (4.54)$$

y trabajando algebraicamente, se obtiene finalmente:

$$\dot{w}^S = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^l + E_i \dot{D}_i^l - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\dot{S}_{ijkl}^E \sigma_{kl} + \dot{d}_{kij} E_k \right) - \frac{1}{2} E_i \left(\dot{d}_{ikl} \sigma_{kl} + \dot{\chi}_{ik}^\sigma E_k \right) \quad (4.55)$$

Reemplazando las expresiones (4.55) y (4.48) en (4.47), se obtiene:

$$\dot{w}^D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^r + E_i \dot{D}_i^r + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\dot{S}_{ijkl}^E \sigma_{kl} + \dot{d}_{kij} E_k \right) + \frac{1}{2} E_i \left(\dot{d}_{ikl} \sigma_{kl} + \dot{\chi}_{ik}^\sigma E_k \right) \quad (4.56)$$

Las correspondientes derivadas temporales de S_{ijkl}^E , d_{ijk} y χ_{ij}^σ se obtienen reemplazando c^I por \dot{c}^I en las ecuaciones (4.40), (4.41) y (4.42). Introduciendo esto en la expresión (4.56) y teniendo en cuenta la ecuación (4.43), se obtiene finalmente la siguiente expresión para el incremento de la energía disipada:

$$\dot{w}^D = \sum_{\alpha=1}^N \dot{f}^\alpha \left[\sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij}^\alpha + \mu_{ij}^\alpha \gamma^\alpha \right) + E_i \left(\frac{1}{2} \tilde{D}_i^\alpha + s_i^\alpha P^\alpha \right) \right] = \sum_{\alpha=1}^N \dot{f}^\alpha G^\alpha \quad (4.57)$$

donde:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^\alpha = \sum_I A^{I\alpha} \left[S_{ijkl}^{E(I)} \sigma_{kl} + d_{kij}^{(I)} E_k \right] \quad (4.58)$$

$$\tilde{D}_i^\alpha = \sum_I A^{I\alpha} \left[d_{ikl}^{(I)} \sigma_{kl} + \chi_{ik}^{\sigma(I)} E_k \right] \quad (4.59)$$

Se acostumbra llamar a G^α fuerza impulsora,

$$G^\alpha = \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij}^\alpha + \mu_{ij}^\alpha \gamma^\alpha \right) + E_i \left(\frac{1}{2} \tilde{D}_i^\alpha + s_i^\alpha P^\alpha \right) \quad (4.60)$$

Esta variable representa la energía disipada en el movimiento de las paredes de dominio, al transformarse una unidad de volumen de cristal desde una variante a la otra, a causa de activarse el sistema de transformación α . El sistema de transformación está potencialmente activo cuando G^α alcanza el valor crítico G_c^α (Huber et al., 1999a).

Para la determinación de \dot{f}^α se usa un modelo dependiente del tiempo (*rate-dependent*) de tipo Perzyna,

$$\dot{f}^\alpha = \begin{cases} B^\alpha \left(\frac{G^\alpha}{G_c^\alpha} \right)^n & \text{si } G^\alpha \geq G_c^\alpha \\ 0 & \text{si } G^\alpha < G_c^\alpha \end{cases} \quad (4.61)$$

donde B^α es un factor de escala y n es un exponente de creep.

CAPÍTULO 5

MODELO DE HOMOGENEIZACIÓN

ELECTROMECAÁNICO NO LINEAL

PROPUESTO

5.1. Introducción

Para llevar a cabo un análisis numérico eficiente y obtener resultados confiables, es necesario contar con las herramientas adecuadas. En el contexto de esta tesis, en la que se desarrolla una herramienta numérica para simular estructuras construidas con compuestos reforzados con fibras ferroeléctricas/piezoeléctricas, es necesario incluir en la formulación un modelo de comportamiento material que permita captar los fenómenos descritos en los Capítulos 2 y 3.

En general, cuando se trabaja con compuestos reforzados con fibras, uno de los principales objetivos del modelaje es poder predecir la respuesta del mismo en forma de relaciones macroscópicas que eviten la necesidad de realizar una discretización explícita de los componentes. Con este fin, se presenta un modelo material conformado por un modelo fenomenológico para describir el comportamiento de las fibras que, en combinación con un modelo de homogeneización, permite obtener el comportamiento macroscópico.

El modelo propuesto surge de combinar y extender una serie de enfoques y modelos para materiales simples, existentes en la bibliografía, para obtener un método sistemático que permita determinar las variables y las propiedades macroscópicas del

compuesto ferroeléctrico polarizado con electrodos interdigitales, dentro de un marco de comportamiento material no lineal de las fibras y en vistas de incluir el mismo en un código de elementos finitos.

El modelo usado para las fibras está basado en la propuesta de (Huber y Fleck, 2001). El modelo de homogeneización está basado en las teorías de Reuss y Voigt, y en el modelo de campos uniformes de Bent (1997) que usa estas teorías para la obtención de las propiedades materiales promedio del compuesto piezoeléctrico en el rango lineal. En base a este modelo, Luccioni (2006) propone un desarrollo formal y sistemático para hacer combinaciones serie-paralelo de modelos mecánicos no lineales. En esta tesis se extiende este último enfoque para introducir los campos electromecánicos presentes en los compuestos piezoeléctricos estudiados.

En este capítulo se presenta el modelo de homogeneización no lineal para compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales propuesto en esta tesis y el algoritmo desarrollado para su implementación numérica en un programa de elementos finitos no lineal que incluye el esquema de cálculo para el compuesto y la integración de las ecuaciones constitutivas de las componentes.

El modelo desarrollado en esta tesis presenta la ventaja de ser relativamente sencillo de programar y ser incluido en un programa de elementos finitos para tener en cuenta los fenómenos no lineales en un marco de análisis incremental.

Para cada incremento de carga se debe efectuar una *descomposición* a fin de realizar los cálculos necesarios en cada componente y llevar cuenta de los fenómenos que se desarrollan en la misma y luego *componer* para obtener las nuevas propiedades macroscópicas.

5.2. Modelo para el compuesto polarizado con electrodos interdigitales

Una lámina de material compuesto polarizado con electrodos interdigitales tiene un aspecto como el que se muestra en la Figura 5.1, donde se puede observar la presencia de fibras continuas inmersas en la matriz polimérica y dispuestas entre las

capas de electrodos. El comportamiento del laminado queda determinado por una serie

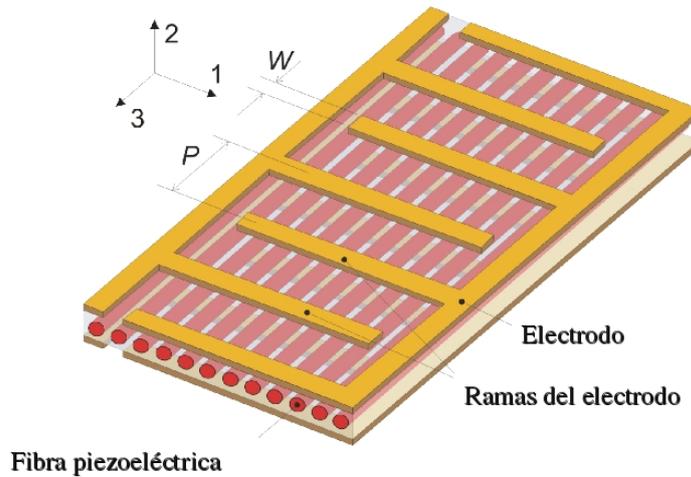


Figura 5.1: Compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales.

de fenómenos y procesos que tienen lugar en distintas escalas en el interior del mismo. Por una parte, las fibras piezoeléctricas presentan comportamientos propios de este tipo de materiales que pueden ser analizados mediante un enfoque caracterizado por una escala denominada “micromecánica”. Las fibras piezoeléctricas se combinan con la matriz polimérica para formar así el laminado. El análisis de las láminas con fibras piezoeléctricas corresponde a la “mesoescala”. Finalmente, se distingue una escala “macromecánica”, que está relacionada con los fenómenos a nivel de la disposición del laminado piezoeléctrico para dar lugar a los actuadores o sensores.

Las herramientas desarrolladas en los apartados anteriores, permiten modelar el comportamiento del material puro, en este caso fibra piezoeléctrica/ferroeléctrica. Para el análisis electromecánico no lineal del compuesto es preciso contar, además, con herramientas de homogeneización. Este enfoque a nivel mesoelectromecánico permite obtener las características y comportamiento del compuesto en función de las propiedades de cada fase y los distintos aspectos constructivos, como ser, las relaciones de volumen de cada componente, separación y ancho de electrodos.

El modelo desarrollado en esta tesis es una generalización de la teoría de mezclas clásica y ha sido utilizado por [Bent y Hagood \(1997\)](#) entre otros, para estudiar el comportamiento de los citados compuestos bajo hipótesis de comportamiento material

lineal. En esta tesis se generalizan y sistematizan las ideas introducidas por [Bent y Hagood \(1997\)](#) para el rango lineal, proponiendo un modelo de compuesto piezoeléctrico general no lineal, que es aplicable a distintas formas de compuestos no lineales.

5.2.1. Representación idealizada del compuesto

Observando detenidamente el compuesto en estudio (laminado con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales), se distingue una estructura que se repite periódicamente y presenta iguales características que el compuesto. Esta estructura se denomina celda unitaria y la misma puede construirse mediante un ensamblaje de subcomponentes en tres etapas, esto se esquematiza en la [Figura 5.2](#), en donde se muestra, además, la idealización de la misma y las tres etapas (A, B, C) utilizadas para su obtención.

En cada etapa se identifica la presencia de dos fases que, al combinarse, dan lugar a un material homogéneo equivalente. En la próxima etapa, este material homogéneo equivalente se combina con una porción de matriz polimérica. Para mayor claridad, en la [Figura 5.2](#), la fibra se representa en color rojo y la matriz en amarillo, distintos tonos de color naranja se utilizan para representar el material equivalente a medida que se avanza en el proceso de combinación. Cada etapa de composición introduce en el modelo un aspecto particular que se puede identificar en el comportamiento del compuesto. Por una parte, la disposición de matriz en dirección paralela a la fibra introduce los efectos de distribución de los esfuerzos y deformaciones, longitudinales y transversales, en función de la disposición y proporción volumétrica de las componentes. Estas etapas (A y B) captan la respuesta electromecánica predominante en zonas alejadas de los electrodos. Por otra parte, la tercer etapa, en la que se agrega una porción de matriz en serie con el material equivalente obtenido de las dos etapas anteriores, incluye en el modelo efectos netamente eléctricos. El potencial eléctrico aplicado a los electrodos genera un campo eléctrico que recorre una porción de matriz hasta alcanzar la fibra. La adición de una porción de matriz en serie contempla los efectos de la diferencia de rigidez dieléctrica entre fibra y matriz, separación entre electrodos y distancia entre electrodos y fibra.

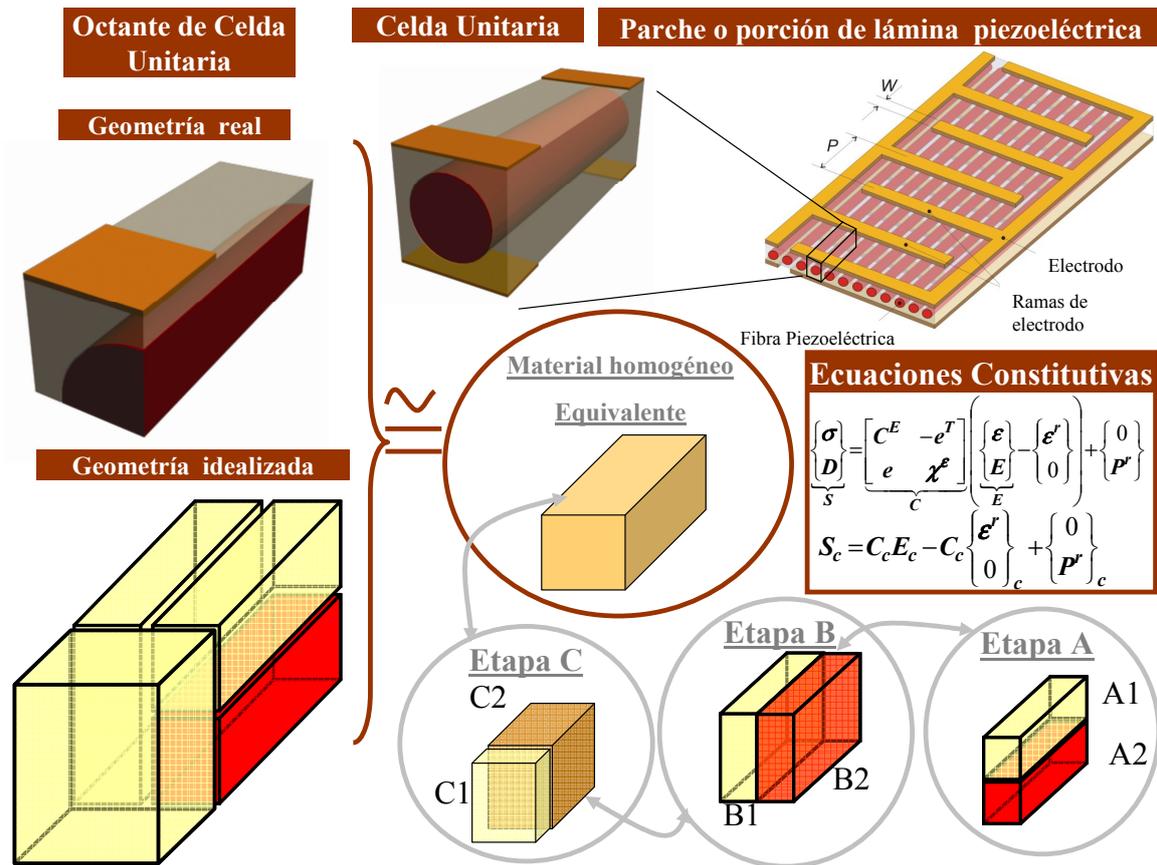


Figura 5.2: Esquema del modelo de campos uniformes.

5.2.2. Modelo de homogeneización para el compuesto piezoeléctrico

Para tener en cuenta los fenómenos no lineales de repolarización, saturación y variación del acoplamiento electromecánico en el modelo para el compuesto piezoeléctrico, es necesario realizar, en cada paso de carga, cálculos para determinar las deformaciones y campo eléctrico a que están sometidas las fibras. Con estos valores se integran las ecuaciones constitutivas correspondientes. Una vez realizado esto, es necesario determinar el comportamiento del compuesto con las nuevas propiedades y variables electromecánicas actualizadas.

Por lo anteriormente mencionado, resulta conveniente contar con instrumentos para realizar los cálculos necesarios de manera sistemática y ordenada. Al respecto, basado en la propuesta original de Luccioni (2006) y Toledo et al. (2008) para reproducir el comportamiento mecánico no lineal de materiales compuestos, en esta tesis se propone un modelo no lineal para compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales (EID). Con este fin, se propone una forma alternativa de expresar las

ecuaciones constitutivas de las componentes, que permite encontrar el comportamiento del compuesto en forma relativamente simple, haciendo hipótesis similares a las utilizadas en la teoría clásica de mezclas (Tan y Tong, 2001).

En relación a cada componente de deformación, campo eléctrico, tensión mecánica y desplazamiento eléctrico, el material puede trabajar en serie o en paralelo en función de la disposición relativa de cada fase. La relación entre los valores de estas cantidades, correspondientes a cada fase y las del compuesto, se establece en virtud de la naturaleza física de las mismas. En este sentido, se señala que, por un lado, las tensiones mecánicas y el desplazamiento eléctrico se comportan de manera similar, por otro lado, las deformaciones y campo eléctrico mantienen un comportamiento análogo.

En las direcciones en que las fases se disponen en serie, las tensiones mecánicas y desplazamiento eléctrico mantienen el valor en ambas fases. En las direcciones en que las fases se disponen en paralelo, las tensiones y desplazamiento eléctrico correspondientes al compuesto se obtienen como superposición de los correspondientes a cada fase multiplicados por su fracción de volumen. De manera similar, las deformaciones mecánicas y campo eléctrico en las direcciones en que las fases se disponen en paralelo, mantienen el valor en ambas fases y en las direcciones en que las fases se disponen en serie, sus valores se obtienen por superposición de la contribución de cada fase multiplicada por su correspondiente proporción de volumen. En la Tabla 5.1 se presenta, en forma resumida, el comportamiento de las variables involucradas explicado anteriormente y la manera de calcularlas.

Variable	Paralelo	Serie
σ	$\sum k_c \sigma_c$	<i>Iguales</i>
D	$\sum k_c D_c$	<i>Iguales</i>
ε	<i>Iguales</i>	$\sum k_c \varepsilon_c$
\vec{E}	<i>Iguales</i>	$\sum k_c \vec{E}_c$

Tabla 5.1: Modo de combinación de variables.

En los desarrollos siguientes se ordenan las componentes de los tensores en forma

matricial/vectorial para las que se adopta el orden especificado anteriormente en la Sección 3.2.1. Además, se utilizan las componentes ingenieriles del tensor de deformaciones.

Se agrupan las componentes de tensión y desplazamiento eléctrico en el vector S y las de deformación y campo eléctrico en E , mientras que en la matriz C se agrupan las propiedades constitutivas electromecánicas.

$$S = \begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix}; \quad E = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \vec{E} \end{Bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \chi^\varepsilon \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La ecuación constitutiva se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \vec{E} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P^r \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$S = CE - C \begin{Bmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P^r \end{Bmatrix} = C\hat{E} - \begin{Bmatrix} 0 \\ P^r \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

donde se introduce el siguiente cambio de variables:

$$\hat{E} = E - \begin{Bmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Se ordenan las componentes de S y E de la siguiente manera:

$$S^* = \alpha^S S + \alpha^E E \quad (5.5)$$

$$E^* = \alpha^E S + \alpha^S E \quad (5.6)$$

donde α^S es un tensor diagonal que tiene 1 ó 0 en la diagonal principal según la componente de tensión (deformación) o desplazamiento eléctrico (campo eléctrico) correspondiente trabaje en paralelo o en serie respectivamente. El tensor α^E es diagonal con 1 ó 0 en su diagonal principal, según la componente de tensión (deformación) o desplazamiento eléctrico (campo eléctrico) trabaje en serie o paralelo respectivamente. Se cumple $\alpha^S + \alpha^E = I$.

De este modo se separan las variables que mantienen igual valor en ambas fases de aquellas que se obtienen por combinación de la contribución de cada fase.

De manera similar vale que:

$$S = \alpha^S S^* + \alpha^E E^* \quad (5.7)$$

$$E = \alpha^E S^* + \alpha^S E^* \quad (5.8)$$

En S^* se agrupan las componentes de tensión y desplazamiento eléctrico que trabajan en paralelo y las componentes de deformación y campo eléctrico que trabajan en serie. De manera análoga, en E^* se agrupan las componentes de deformación y campo eléctrico que trabajan en paralelo y las componentes de tensión y desplazamiento eléctrico que trabajan en serie.

Combinando (5.5) con (5.3) y (5.4) se obtiene:

$$S^* = \alpha^S \left[C \hat{E} + \begin{pmatrix} 0 \\ P^r \end{pmatrix} \right] + \alpha^E \hat{E} + \alpha^E \begin{pmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Ordenando resulta:

$$S^* = (\alpha^S C + \alpha^E) \hat{E} + \alpha^S \begin{pmatrix} 0 \\ P^r \end{pmatrix} + \alpha^E \begin{pmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

De manera similar, combinando (5.6) con (5.3) y (5.4) se obtiene:

$$E^* = (\alpha^E C + \alpha^S) \hat{E} + \alpha^E \begin{pmatrix} 0 \\ P^r \end{pmatrix} + \alpha^S \begin{pmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Despejando \hat{E} de (5.11), reemplazando en (5.10) y operando algebraicamente, resulta finalmente:

$$S^* = C^* E^* - C^* \alpha^E \begin{pmatrix} 0 \\ P^r \end{pmatrix} - C^* \alpha^S \begin{pmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^S \begin{pmatrix} 0 \\ P^r \end{pmatrix} + \alpha^E \begin{pmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

donde:

$$C^* = (\alpha^S C + \alpha^E) (\alpha^E C + \alpha^S)^{-1} \quad (5.13)$$

Las ecuaciones antes desarrolladas son válidas, tanto para el compuesto como para una componente en particular. Para identificar que una cantidad corresponde a una determinada componente se incluye el subíndice c .

Teniendo en cuenta que S^* tiene componentes de tensión y desplazamiento eléctrico en paralelo y deformación y campo eléctrico en serie, S^* del compuesto se obtiene como resultado de la superposición de las correspondientes a todas las componentes multiplicadas por sus correspondientes fracciones de volumen,

$$S^* = \sum_{c=1} k_c S_c^* \quad (5.14)$$

Desarrollando,

$$S^* = \left(\sum_{c=1} k_c C_c^* \right) E^* - \sum_{c=1} k_c [C_c^* \alpha^E - \alpha^S] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ P^r \end{array} \right\}_c - \sum_{c=1} k_c [C_c^* \alpha^S - \alpha^E] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^r \\ 0 \end{array} \right\}_c \quad (5.15)$$

donde E^* contiene componentes de deformación y tensión, desplazamiento eléctrico y campo eléctrico, comunes a todas las componentes del compuesto.

La expresión (5.15) puede escribirse como:

$$S^* = C^* E^* - S^{*r} \quad (5.16)$$

donde:

$$S^{*r} = \sum_{c=1} k_c \left([C_c^* \alpha^E - \alpha^S] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ P^r \end{array} \right\}_c + [C_c^* \alpha^S - \alpha^E] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^r \\ 0 \end{array} \right\}_c \right) \quad (5.17)$$

y

$$C^* = \sum_{c=1} k_c C_c^* \quad (5.18)$$

Teniendo en cuenta (5.7), las tensiones y desplazamientos eléctricos reales agrupados en S , correspondientes al compuesto se pueden calcular de la siguiente manera:

$$S = \alpha^S [C^* E^* - S^{*r}] + \alpha^E E^* = [\alpha^S C^* + \alpha^E] E^* - \alpha^S S^{*r} \quad (5.19)$$

Además, de acuerdo a (5.8),

$$E = \alpha^E [C^* E^* - S^{*r}] + \alpha^S E^* = [\alpha^E C^* + \alpha^S] E^* - \alpha^E S^{*r} \quad (5.20)$$

De las ecuaciones (5.19) y (5.20) resulta:

$$E^* = (\alpha^E C^* + \alpha^S)^{-1} (E + \alpha^E S^{*r}) \quad (5.21)$$

Reemplazando (5.21) en (5.19) se obtiene S del compuesto en función de E , C^* y S^{*r} del compuesto,

$$S = CE - S^r \quad (5.22)$$

donde:

$$C = (\alpha^S C^* + \alpha^E) (\alpha^E C^* + \alpha^S)^{-1} \quad (5.23)$$

$$S^r = (\alpha^S - C\alpha^E) S^{*r} \quad (5.24)$$

Para el análisis del compuesto piezoeléctrico en presencia de no linealidades del comportamiento material, tales como conmutación de la polarización y saturación, es necesario conocer las deformaciones y campo eléctrico de las componentes en términos de las deformaciones y campo eléctrico del compuesto. A partir de la condición $E_c^* = E^*$ y de las expresiones (5.7) y (5.8), se puede escribir para cada componente:

$$\begin{aligned} E_c &= \alpha^E S_c^* + \alpha^S E_c^* = \\ &= \alpha^E (C_c^* E_c^* - S_c^{*r}) + \alpha^S E_c^* = \\ &= (\alpha^E C_c^* + \alpha^S) E_c^* - \alpha^E S_c^{*r} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Teniendo en cuenta (5.21):

$$E_c = \phi_c E + \tilde{E}_c^r \quad (5.26)$$

donde:

$$\phi_c = (\alpha^E C_c^* + \alpha^S) (\alpha^E C_c^* + \alpha^S)^{-1} \quad (5.27)$$

$$\tilde{E}_c^r = \phi_c \alpha^E S^{*r} - \alpha^E S_c^{*r} \quad (5.28)$$

5.2.3. Esquema de cálculo

En la sucesión de cálculos correspondientes al compuesto, se identifican claramente un proceso de descomposición y otro de composición.

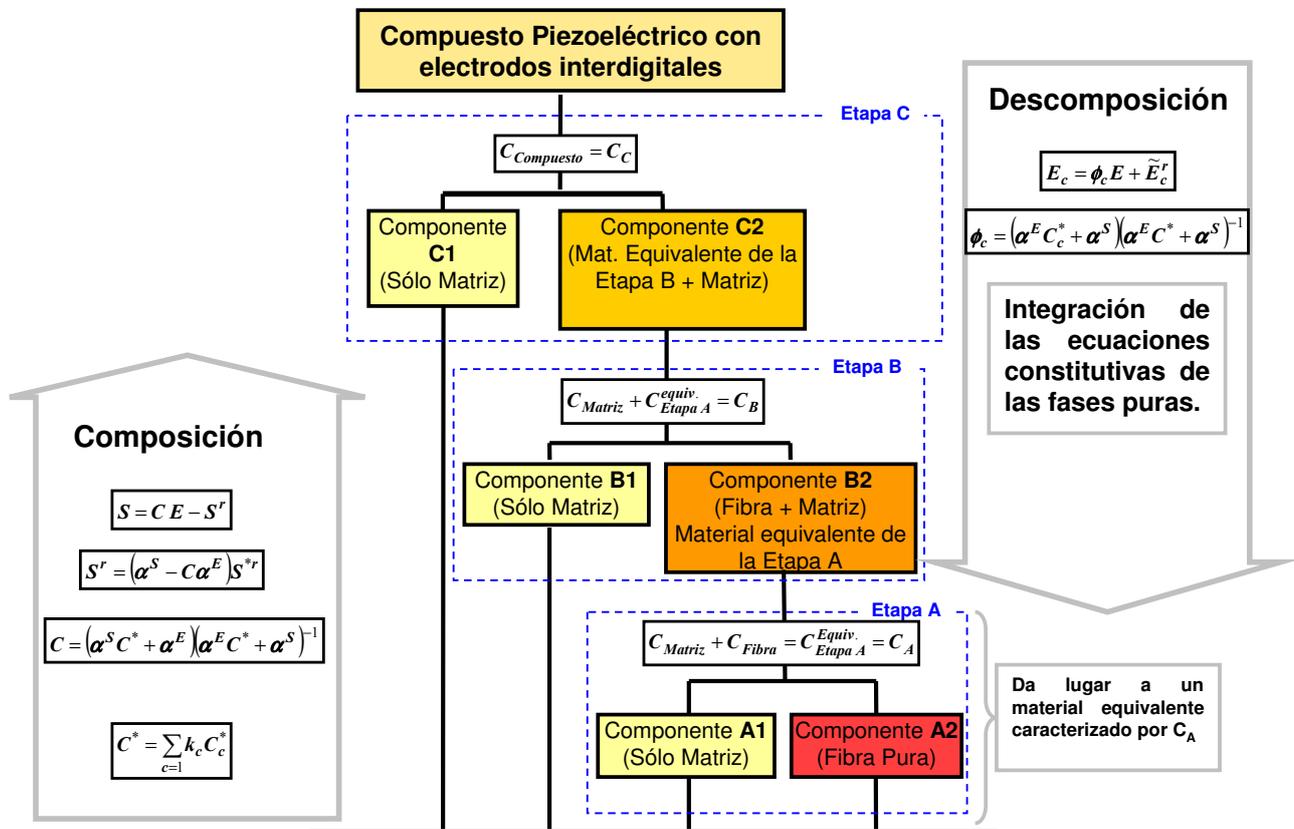


Figura 5.3: Esquema de composición y descomposición.

A partir de las variables nodales (desplazamientos mecánicos y potencial eléctrico) se determinan las deformaciones y campo eléctrico a que está sometido el compuesto. A partir de allí, se debe descomponer estas cantidades hasta determinar los correspondientes valores que solicitan a las fibras piezoeléctricas. Con estos valores se procede a la integración de las ecuaciones constitutivas. Luego de actualizar las propiedades

materiales y las cantidades remanentes, se determinan los nuevos valores de tensiones y desplazamiento eléctrico. Esto se utiliza como punto de partida para realizar la recomposición para determinar los valores correspondientes al compuesto. Este proceso se esquematiza en la Figura 5.3, usando los mismos colores que en la Figura 5.2.

Tratándose de un modelo no lineal (el término \tilde{E}_c^r de la ecuación (5.26) no se conoce a priori) el proceso de descomposición se puede hacer mediante un procedimiento iterativo (Luccioni, 2006), o mediante un avance explícito, enfoque utilizado en esta tesis.

Dentro del esquema de cálculo juega un papel importante la integración de la ecuación constitutiva de los materiales constituyentes. En el caso de los compuestos piezoeléctricos estudiados en esta tesis la matriz se considera lineal elástica, por cuanto su ecuación constitutiva no requiere proceso de integración numérica. A continuación se describe el algoritmo desarrollado para la integración numérica del modelo fenomenológico utilizado para las fibras.

5.2.4. Integración de la ecuación constitutiva de las fibras

La integración de la ecuación constitutiva consiste en reemplazar la ecuación diferencial por una regla que permita realizar cálculos para incrementos finitos de carga. Durante el cálculo, se deben actualizar las deformaciones, la polarización, el campo eléctrico, las tensiones, el desplazamiento eléctrico y las variables internas (ε_{ij}^r y P_i^r).

En el contexto del método de elementos finitos, en cada punto de cuadratura (punto de Gauss) se lleva a cabo la integración numérica temporal de la ecuación constitutiva. Esta *integración incremental* del modelo de conmutación se considera como un proceso impulsado por la deformación total y por el campo eléctrico aplicado, que constituyen las variables básicas independientes de la formulación de elementos finitos.

Los algoritmos de retorno mapeado son muy efectivos y por lo tanto se usan extensamente para integrar ecuaciones constitutivas no lineales (Simo y Taylor (1985); Simo y Hughes (1998); Kamlah et al. (2007) y Semenov et al. (2009))

En esta tesis se propone un algoritmo de retorno mapeado de tipo *cutting plane* para

integrar el modelo constitutivo fenomenológico presentado en el apartado anterior.

Se considera conocido, el estado del continuo en el punto x y tiempo actual t y está completamente definido por:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x)_t, \mathbf{E}(x)_t, \boldsymbol{\varepsilon}^r(x)_t, \mathbf{P}^r(x)_t, \mathbf{S}_c(x)_t, \mathbf{E}_c(x)_t\} \quad (5.29)$$

Un incremento dado de la deformación total y/o del campo eléctrico aplicado conduce al continuo a un nuevo estado en el instante de tiempo $t + \Delta t$.

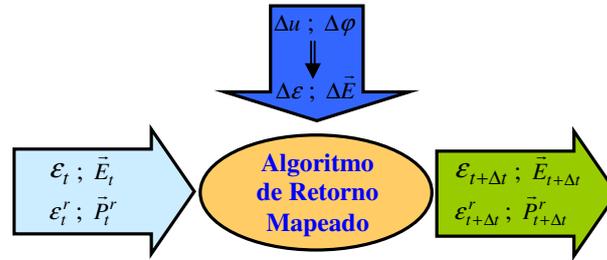


Figura 5.4: Entradas y salidas del algoritmo de retorno mapeado.

Se considera el problema de actualizar las variables básicas al nuevo instante de tiempo $t + \Delta t$ para valores prescritos de deformaciones y campo eléctrico en una manera consistente con el modelo constitutivo considerado. Como se trata de un modelo no lineal, se utiliza para ello un procedimiento iterativo.

En cada iteración $(k + 1)$ se plantea el cumplimiento de la condición de conmutación,

$$G_{t+\Delta t}^{(k+1)} - G_c = 0 \quad (5.30)$$

Se linealiza la función de conmutación alrededor de los valores de las variables de estado correspondientes a la iteración anterior (k) , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
G_{t+\Delta t}^{(k+1)} &= G_{t+\Delta t}^{(k)} + \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} : \underbrace{\left(\hat{\mathbf{S}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{S}}_{t+\Delta t}^{(k)} \right)}_{\delta \hat{\mathbf{S}}_{t+\Delta t}^{(k+1)}} + \\
&\quad \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \cdot \underbrace{\left(\hat{\mathbf{E}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{E}}_{t+\Delta t}^{(k)} \right)}_{\delta \hat{\mathbf{E}}_{t+\Delta t}^{(k+1)}} + \\
&\quad \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{P}_r} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \cdot \underbrace{\left(\mathbf{P}_{rt+\Delta t}^{(k+1)} - \mathbf{P}_{rt+\Delta t}^{(k)} \right)}_{\delta \mathbf{P}_{rt+\Delta t}^{(k+1)}} + \\
&\quad \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} : \underbrace{\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{rt+\Delta t}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{rt+\Delta t}^{(k)} \right)}_{\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{rt+\Delta t}^{(k+1)}}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Para el caso particular de la superficie de conmutación utilizada en esta tesis, se cumple que $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} = 0$.

La deformación y polarización remanentes se actualizan de la siguiente manera:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_r)_{t+\Delta t}^{(k+1)} = (\boldsymbol{\varepsilon}_r)_{t+\Delta t}^{(k)} + \underbrace{\Delta \lambda^{(k+1)} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)}}_{\delta \boldsymbol{\varepsilon}_r} \tag{5.32}$$

$$(\mathbf{P}_r)_{t+\Delta t}^{(k+1)} = (\mathbf{P}_r)_{t+\Delta t}^{(k)} + \underbrace{\Delta \lambda^{(k+1)} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)}}_{\delta \mathbf{P}_r} \tag{5.33}$$

donde $\Delta \lambda = \dot{\lambda} \Delta t$.

El tensor desviador de tensiones y el campo eléctrico del centro de la superficie de conmutación se actualizan de la siguiente manera:

$$\mathbf{S}_{ct+\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{S}_{ct+\Delta t}^{(k)} + \underbrace{\Delta \lambda_{t+\Delta t}^{(k+1)} h_s (\boldsymbol{\varepsilon}^r)_{t+\Delta t}^{(k)} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)}}_{\delta \mathbf{S}_e} \tag{5.34}$$

$$\mathbf{E}_{ct+\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{E}_{ct+\Delta t}^{(k)} + \underbrace{\Delta \lambda^{(k+1)} h_e (\mathbf{P}^r)_{t+\Delta t}^{(k)} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)}}_{\delta \mathbf{E}_e} \tag{5.35}$$

El incremento del tensor desviador de tensiones relativo $\delta \hat{\mathbf{S}}$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
\delta\hat{\mathbf{S}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} &= \delta\mathbf{S}_{t+\Delta t}^{(k+1)} - \delta\mathbf{S}_{ct+\Delta t}^{(k+1)} \\
&= desv \left(\delta\sigma_{t+\Delta t}^{(k+1)} \right) - \delta\mathbf{S}_{ct+\Delta t}^{(k+1)} \\
&= desv \left(-\mathbf{C}\delta\boldsymbol{\varepsilon}_r - \delta\mathbf{e}^T\mathbf{E} \right) - \Delta\lambda^{(k+1)} h_{st+\Delta t}^{(k)} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \\
&= desv \left(-\mathbf{C}\Delta\lambda^{(k+1)} : \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} - \left(\frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \mathbf{P}_r} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta\lambda^{(k+1)} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \right) - \\
&\quad \Delta\lambda^{(k+1)} h_{st+\Delta t}^{(k)} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\delta\hat{\mathbf{S}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k+1)} \left[desv \left\{ -\mathbf{C} : \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} - \left(\frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \mathbf{P}_r} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \right\} - \right. \\
\left. h_{st+\Delta t}^{(k)} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \right] \tag{5.37}$$

El incremento del vector campo eléctrico relativo $\delta\hat{\mathbf{E}}$ se calcula como sigue:

$$\delta\hat{\mathbf{E}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = -\delta_{t+\Delta t}^{(k)} \mathbf{E}_c = -\Delta\lambda_{t+\Delta t}^{(k)} h_e(\mathbf{P}^r)_{t+\Delta t}^{(k)} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial \hat{\mathbf{E}}_{t+\Delta t}} \tag{5.38}$$

Para calcular la variación del multiplicador de conmutación ferroeléctrica $\Delta\lambda$ se reemplazan las ecuaciones (5.31) a (5.38) en la expresión (5.30), con lo que se obtiene:

$$\Delta\lambda_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \frac{G_{t+\Delta t}^{(k)} - G_c}{\left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} : \left[dev \left\{ \mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} + \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \mathbf{P}_r} \cdot \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \right\} + h_s \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right] + h_e \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{P}_r} \cdot \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)}} \tag{5.39}$$

Una vez calculado $\Delta\lambda_{t+\Delta t}^{(k+1)}$, utilizando las ecuaciones (5.32) y (5.33) se actualizan las variables remanentes ε_{ij}^r y P_i^r .

El tensor desviador de tensiones relativo \hat{S}_{ij} y el vector campo eléctrico relativo \hat{E}_i se calculan con las ecuaciones (5.32) y (5.33).

Con la polarización remanente se calcula el nuevo tensor piezoeléctrico con lo que finalmente se puede calcular la tensión mecánica y el desplazamiento eléctrico.

El proceso detallado anteriormente, se repite iterativamente hasta que se cumpla la condición $G^{(k+1)} = G_c$. Para evaluar esta última condición se define la siguiente norma de convergencia y criterio para la finalización del proceso iterativo:

$$\frac{|G^{(k+1)} - G_c|}{G_c} \leq Tol_G \quad (5.40)$$

La convergencia se evalúa, verificando el cumplimiento de la condición (5.40).

Anexo 5A1

En este anexo se presentan algunos detalles de las variables uniformes correspondientes a cada etapa de composición. A su vez, se detallan las matrices α^E y α^S correspondientes. La Figura 5.5 muestra la disposición de ambas fases de la eta A referidas a sus direcciones principales. En este caso particular el eje longitudinal de la fibra coincide con el eje 1.

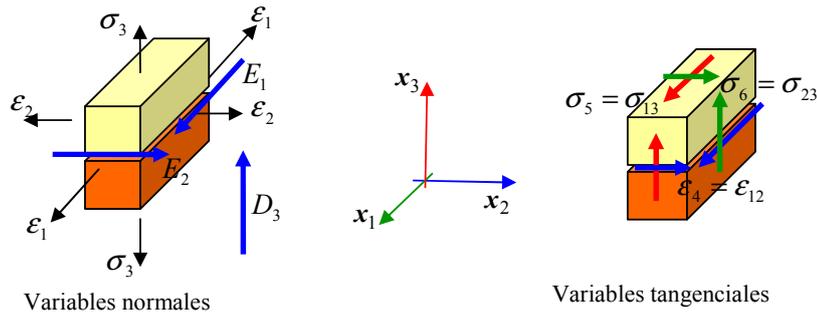


Figura 5.5: Etapa A - Variables uniformes (comunes a ambas componentes).

Se presenta a continuación la expresión correspondiente para obtener E_A^* :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \sigma_3 \\ \varepsilon_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ D_3 \end{pmatrix}}_{E_A^*} = \alpha_A^E \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}}_{S_A} + \alpha_A^S \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}}_{E_A}$$

donde $\alpha_A^E = \text{diag}[0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1]$ y $\alpha_A^S = \text{diag}[1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$

De igual manera, se presentan las disposiciones para las etapas B y C.

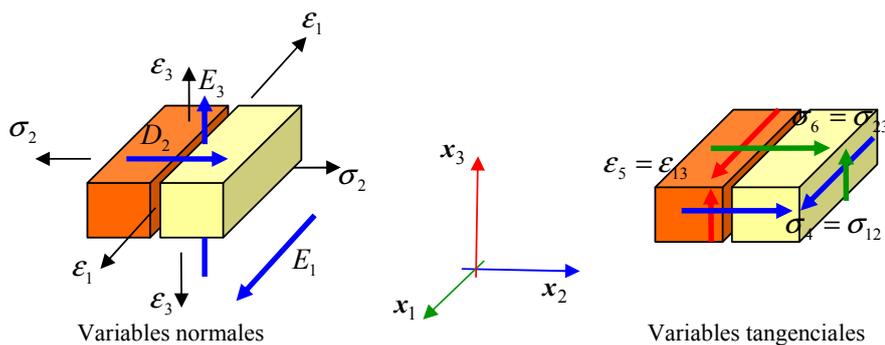


Figura 5.6: Etapa B - Variables uniformes (comunes a ambas componentes).

En la etapa B, el vector S_B^* se calcula con la siguiente expresión:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \sigma_2 \\ \epsilon_3 \\ \sigma_4 \\ \epsilon_5 \\ \sigma_6 \\ E_1 \\ D_2 \\ E_3 \end{pmatrix}}_{E_B^*} = \alpha_B^E \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}}_{S_B} + \alpha_B^S \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}}_{E_B}$$

donde $\alpha_B^E = \text{diag}[0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]$ y $\alpha_B^S = \text{diag}[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]$

Finalmente, para la etapa C:

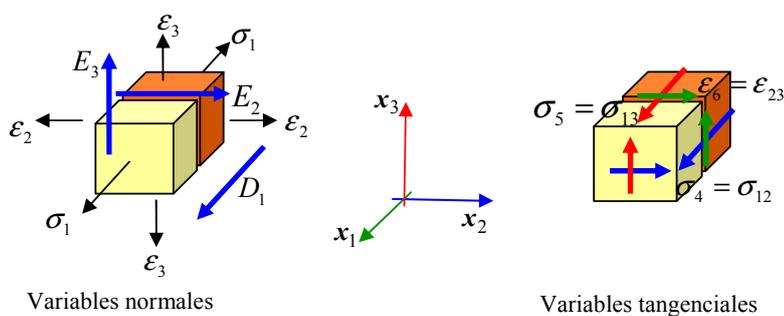


Figura 5.7: Etapa C - Variables uniformes (comunes a ambas componentes).

El vector S_C^* se determina con la siguiente expresión. En esta etapa, las variables mecánicas son ignoradas y sólo se considera que introduce efectos eléctricos.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}}_{E_C^*} = \alpha_C^E \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}}_{S_C} + \alpha_C^S \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}}_{E_C}$$

donde $\alpha_C^E = \text{diag}[1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]$ y $\alpha_C^S = \text{diag}[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1]$

CAPÍTULO 6

ELEMENTO FINITO DE CÁSCARA

PROPUESTO

6.1. Introducción

En el Capítulo 3 se destaca la gran cantidad de trabajos de investigación y herramientas propuestas para el análisis y diseño de estructuras activas construidas con materiales piezoeléctricos, especialmente cuando se emplean dispositivos que usan polarización a través del espesor. Sin embargo, no se observa lo mismo para dispositivos con polarización tangencial, polarizados con electrodos interdigitales.

En un trabajo anterior, [Guennam y Luccioni \(2006\)](#) abordaron el modelado de una viga tipo cajón cerrado dotado de dispositivos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales usando el método de elementos finitos. El modelo de elementos finitos se realizó utilizando el programa comercial ABAQUS ([Hibbitt et al., 2003](#)). Para modelar la zona activa, se utilizaron elementos sólidos piezoeléctricos C3D8E mientras que elementos de cáscara convencionales S4 fueron empleados para la zona pasiva. Se introdujeron restricciones cinemáticas entre los grados de libertad eléctricos correspondientes al mismo dispositivo con el objetivo de controlar el campo eléctrico mediante el potencial aplicado a un solo nodo por cada dispositivo. En el modelo se utilizó reducción del orden y luego, las matrices reducidas de rigidez y masa se exportaron a un programa desarrollado en MATLAB ([MathWorks, 1998](#)), con el que se reformuló el problema en el espacio de estados y se diseñó y evaluó el sistema de control. El análisis revela claramente el efecto

introducido por el sistema de control y el nivel de amortiguamiento introducido. Sin embargo, el uso de elementos sólidos para modelar los parches piezoeléctricos, hace que el modelo tenga un considerable número de grados de libertad y una complicación adicional para introducir el campo eléctrico en las direcciones deseadas, especialmente cuando los elementos no presentan formas ortogonales regulares.

En este capítulo se presenta la formulación de un elemento finito de cáscara piezoeléctrica con un nuevo tratamiento para interpolar el campo eléctrico que permite modelar de manera simple y natural laminados piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales con un menor número de grados de libertad que al usar elementos sólidos.

El elemento aquí propuesto es adecuado para laminados formados por una o más capas y, cada una de ellas, de un material diferente. Disponiendo de esta herramienta, es posible modelar estructuras activas de paredes delgadas con dispositivos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales.

De esta manera, la combinación del elemento finito y el modelo material propuestos en esta tesis, conduce a una herramienta numérica capaz de representar los aspectos más relevantes de las estructura del tipo descrito con un número aceptable de grados de libertad.

6.2. Formulación general de elementos finitos

En esta sección se presentan las bases para la formulación de elementos finitos de medios piezoeléctricos y se citan brevemente las ecuaciones de interés en el desarrollo de esta tesis, más detalles para la obtención de las mismas pueden encontrarse en la bibliografía específica.

En el método de elementos finitos, las ecuaciones de equilibrio se satisfacen en forma débil. Esto resulta, en el caso más general, en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, (Simo y Hughes, 1998). La solución se obtiene, usando una formulación incremental, un método iterativo para su resolución y un método de integración temporal, (Bathe, 1996). En primer lugar, se presentan las ecuaciones diferenciales del problema,

es decir, su forma fuerte. Luego se presenta una forma débil y finalmente, la solución numérica del mismo, aproximada por el método de elementos finitos.

6.2.1. Ecuaciones diferenciales del problema

La respuesta electromecánica de un cuerpo piezoeléctrico está descrita por el acoplamiento entre las ecuaciones mecánicas de movimiento y las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo, (Joshi, 1992).

Las primeras se expresan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (6.1)$$

donde σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy, f_i son las fuerzas de volumen, ρ es la densidad del material, u_i es la componente de desplazamiento mecánico en la dirección de la coordenada espacial x_i y t es el tiempo.

En el caso cuasi-electroestático las derivadas temporales correspondientes a las ecuaciones de Maxwell se pueden despreciar y considerar sólo la ecuación de conservación de la carga eléctrica, (Joshi (1992); Zeng et al. (2003)):

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} - q = 0 \quad (6.2)$$

donde D_i son las componentes del vector desplazamiento eléctrico.

El tensor de deformaciones y el vector campo eléctrico se relacionan con el vector de desplazamientos mecánicos u_i y con el potencial eléctrico ϕ respectivamente mediante las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.3)$$

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (6.4)$$

El continuo piezoeléctrico puede estar sujeto a condiciones de borde, ya sean esenciales o naturales, de naturaleza mecánica o eléctrica, o una combinación de las mismas. Las

componentes de los desplazamientos U_i prescritos en S^u , constituyen las condiciones de borde esenciales mecánicas,

$$u_i = U_i \quad (6.5)$$

mientras que las condiciones de borde naturales mecánicas están dadas por las fuerzas de superficie F_i prescritas en S^σ ,

$$\sigma_{ij}n_j = F_i \quad (6.6)$$

donde n_i es el vector unitario normal a la superficie exterior del continuo.

Paralelamente, los potenciales eléctricos V prescritos en la región S^ϕ , constituyen las condiciones de borde esenciales eléctricas,

$$\phi = V \quad (6.7)$$

mientras que las cargas eléctricas Q prescritas en S^Q , constituyen las condiciones de borde naturales eléctricas,

$$D_i n_i = Q \quad (6.8)$$

En general, el desplazamiento eléctrico y el tensor de tensiones se calculan como funciones no lineales de las deformaciones y campo eléctrico. Para cerrar el problema es necesario explicitar este comportamiento, lo cual fue introducido en el Capítulo 5. Las ecuaciones diferenciales (6.1) y (6.2) junto con las ecuaciones constitutivas y los algoritmos para su integración, las ecuaciones cinemáticas (6.3) y (6.4) y las condiciones de borde (6.5) a (6.8), constituyen la formulación fuerte del problema, la cual, en general, no puede resolverse en forma cerrada. Una alternativa para encontrar la solución a este problema consiste en plantearlo en forma débil empleando, por ejemplo, el método de Residuos Ponderados o Mínimos Cuadrados. Otra manera, es encontrar un principio variacional asociado y utilizar para su resolución, por ejemplo, el método de elementos finitos. La solución de problemas a partir de la minimización de un funcional es muy común en Física e Ingeniería. En este trabajo se consideran como variables independientes los desplazamientos mecánicos y el potencial eléctrico y se usan variaciones arbitrarias de los mismos para obtener una forma débil del problema.

6.2.2. Forma débil

Considérese un volumen Ω de material piezoeléctrico limitado por una superficie cerrada S . Si se multiplican las ecuaciones (6.1) y (6.2) por variaciones arbitrarias y admisibles ($\delta u_i = 0$ en S^u , $\delta\phi = 0$ en S^ϕ) de las variables independientes, desplazamientos u_i y potenciales ϕ , y se integra en el dominio Ω se obtienen las siguientes expresiones:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) \delta u_i dV + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_i} - q \right) \delta \phi dV = 0 \quad (6.9)$$

Si un campo de desplazamientos mecánicos u_i y potencial eléctrico ϕ verifica la ecuación (6.9), cualesquiera sean los valores de las variaciones admisibles de desplazamientos mecánicos δu_i y potencial eléctrico $\delta\phi$, dicho campo será una solución de (6.1) y (6.2).

Trabajando con la ecuación (6.9) se obtiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_i dV + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV + \int_{\Omega} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \delta \phi dV - \int_{\Omega} q \delta \phi dV = 0 \quad (6.10)$$

Por el teorema de Green, se puede expresar:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_i dV = \int_S \sigma_{ij} \delta u_j n_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV \quad (6.11)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \delta \phi dV = \int_S D_i \delta \phi n_i dS - \int_{\Omega} D_i \frac{\partial \delta \phi}{\partial x_i} dV \quad (6.12)$$

La ecuación (6.10) se puede expresar finalmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV + \int_S \sigma_{ij} \delta u_j n_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV + \\ \int_S D_i \delta \phi n_i dS - \int_{\Omega} D_i \frac{\partial \delta \phi}{\partial x_i} dV - \int_{\Omega} q \delta \phi dV = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

En virtud de la propiedad conmutativa del operador δ respecto del operador diferencial, se tiene que:

$$\frac{\partial \delta u_i}{\delta x_j} = \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\delta x_i} = \delta \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (6.15)$$

Además:

$$\delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \delta \varepsilon_{ij} + \delta \omega_{ij} \quad (6.16)$$

donde ω_{ij} es el tensor de rotaciones. Reemplazando (6.16) en (6.13), teniendo en cuenta (6.14), (6.15) y la antisimetría del tensor ω_{ij} , se obtiene finalmente la forma débil del problema planteado por las ecuaciones (6.1) a (6.8):

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i) dV = \int_{\Omega} (f_i \delta u_i - q \delta \phi) dV + \int_S (F_i \delta u_i - Q \delta \phi) dS \quad (6.17)$$

6.2.3. Derivación de las ecuaciones de elementos finitos

Para la resolución del problema con el método de elementos finitos, se divide el dominio del mismo en subdominios (elementos) que no se superponen y cuya unión equivale al dominio original. Dentro de cada elemento, se aproximan la geometría, los desplazamientos y los potenciales eléctricos con funciones de interpolación locales. Las variables nodales, desplazamientos mecánicos $\hat{\mathbf{u}}$ y potenciales eléctricos $\hat{\phi}$, se agrupan en un mismo vector $\hat{\mathbf{U}}$, a su vez, los desplazamientos y potenciales eléctricos dentro del elemento se agrupan en el vector \mathbf{d} y las deformaciones ε y campo eléctrico \mathbf{E} en un mismo vector $\mathbf{\Gamma}$. Por lo tanto, \mathbf{d} y $\mathbf{\Gamma}$ se relacionan con $\hat{\mathbf{U}}$ mediante los operadores de matriciales de interpolación \mathbf{N} y gradientes discretos mecánicos y eléctricos combinados \mathbf{B} , respectivamente,

$$\mathbf{d} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} \quad (6.19)$$

En base a las interpolaciones introducidas, se obtiene la siguiente aproximación de la forma débil expresada por (6.17),

$$\delta\pi_e = \delta\hat{\mathbf{U}}_e \left[\int_{\Omega_e} \left(\mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} \rho\ddot{\mathbf{u}} \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{B}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{D} \end{Bmatrix} - \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ -q \end{Bmatrix} \right) dV - \int_{S_e} \left(\mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -Q \end{Bmatrix} \right) dS \right] \quad (6.20)$$

El término entre corchetes del segundo miembro de la expresión (6.20) se denomina residuo \mathbf{R}_e correspondiente al elemento e . Luego de realizar el ensamblaje de todos los elementos, representado con el operador $A_{e=1}^{NE}$, se obtiene:

$$\delta\pi = \sum_{e=1}^{NE} \delta\pi_e \quad (6.21)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{R}_e \quad (6.22)$$

$$\delta\hat{\mathbf{U}} = \sum_{e=1}^{NE} \delta\hat{\mathbf{U}}_e \quad (6.23)$$

Para que $\delta\pi$ se anule para valores arbitrarios de las variaciones $\delta\hat{\mathbf{U}}$, el residuo debe ser nulo. Este residuo, a su vez, tiene la contribución de las fuerzas de inercia, de las fuerzas generalizadas internas y externas y puede expresarse como:

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{U}}} + \mathbf{F}^{int}(\hat{\mathbf{U}}) - \mathbf{F}^{ext} = 0 \quad (6.24)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{F}^{ext} y \mathbf{F}^{int} son, la matriz de masa del sistema, el vector de fuerzas generalizadas externas y el vector de fuerzas generalizadas internas, respectivamente. Estas matrices y vectores se obtienen por ensamblaje de las respectivas contrapartes elementales.

Las tensiones mecánicas y los desplazamientos eléctricos se agrupan en el vector $\boldsymbol{\Sigma}$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{D} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Las fuerzas internas son funciones de $\boldsymbol{\Sigma}$ que, a su vez, son funciones no lineales de $\hat{\mathbf{U}}$ y se calculan con la siguiente expresión general:

$$\mathbf{F}^{int}(\hat{\mathbf{U}}) = \sum_{e=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}(\hat{\mathbf{U}}) dV \quad (6.26)$$

La solución del problema requiere, entonces, la utilización de algoritmos iterativos u otros procedimientos para la solución de problemas no lineales.

6.3. Procedimiento iterativo de solución para el caso estático

El campo de tensiones generalizadas $\boldsymbol{\Sigma}$ debe satisfacer el equilibrio entre fuerzas generalizadas externas e internas,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^{int}(\hat{\mathbf{U}}) - \mathbf{F}^{ext} \quad (6.27)$$

En un análisis incremental estático con fenómenos materiales independientes del tiempo, t y Δt representan parámetros convenientes para definir los distintos incrementos de carga. Suponiendo que el sistema en estudio está en equilibrio en el instante t , el planteo de equilibrio entre fuerzas internas y externas en $t + \Delta t$ se expresa como $\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = 0$. La solución con el método de Newton-Raphson consiste en linealizar la respuesta usando el desarrollo en serie de Taylor:

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = 0 \quad (6.28)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = - \left[\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \right]^{-1} \mathbf{R}_{t+\Delta t}^{(k)} = - \left[\mathbf{K}_{t+\Delta t}^{(k)} \right]^{-1} \mathbf{R}_{t+\Delta t}^{(k)} \quad (6.29)$$

donde,

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{(k)} = \mathbf{F}^{int}(\hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k)}) - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{ext} \quad (6.30)$$

y

$$\mathbf{K}_{t+\Delta t}^{(k)} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \quad (6.31)$$

es la matriz de rigidez tangente global y se calcula como sigue:

$$\mathbf{K}_{t+\Delta t}^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\Sigma}_{t+\Delta t}^{(k)})}{\partial \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k)}} = \frac{NE}{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{t+\Delta t}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_{t+\Delta t}^{(k)}} \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}_{t+\Delta t}^{(k)}}{\partial \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k)}} dV = \frac{NE}{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{t+\Delta t}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_{t+\Delta t}^{(k)}} \mathbf{B} dV \quad (6.32)$$

El módulo tangente algorítmico consistente depende del método elegido para actualizar las tensiones y el desplazamiento eléctrico. Para preservar la tasa de convergencia asintótica cuadrática del procedimiento de iteración global de Newton-Raphson, es esencial el uso del módulo consistente.

6.4. Integración temporal del problema dinámico

En caso de usar un método de integración temporal implícito, se considera el equilibrio en el instante $t + \Delta t$. En problemas no lineales, esto requiere el uso de un método iterativo para la solución.

Un método de integración temporal muy utilizado desde hace años en el contexto de la dinámica estructural es el propuesto por Hilber, Hughes y Taylor (HHT) (Hilber et al., 1977), también llamado método α . Este algoritmo tiene la ventaja de introducir un amortiguamiento numérico controlado manteniendo una convergencia cuadrática, lo que lo hace muy robusto en la integración de sistemas de ecuaciones altamente no lineales. El equilibrio dinámico en el instante de tiempo $t + \Delta t$ se expresa como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + (1 + \alpha) (\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{int} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{ext}) - \alpha (\mathbf{F}_t^{int} - \mathbf{F}_t^{ext}) = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k)} + \mathbf{M} \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} \quad (6.34)$$

y que, por no considerar los efectos de no linealidad geométrica, se cumple que:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ext}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} = 0 \quad (6.35)$$

la solución del sistema no lineal (6.33) mediante el método de Newton - Raphson conduce a:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} + (1 + \alpha) \mathbf{K}_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = (1 + \alpha) (\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{ext} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{int})^{(k)} - \alpha (\mathbf{F}_t^{ext} - \mathbf{F}_t^{int}) \quad (6.36)$$

donde $\mathbf{K}_{t+\Delta t}^{(k)}$ es la matriz de rigidez tangente introducida en (6.31) y (6.32).

Utilizando las expresiones de actualización de Newmark para desplazamientos:

$$\hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{U}}_t + \Delta t \dot{\hat{\mathbf{U}}}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_t + \beta \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} \right] \quad (6.37)$$

y velocidades:

$$\dot{\hat{\mathbf{U}}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \dot{\hat{\mathbf{U}}}_t + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_t + \gamma \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} \right] \quad (6.38)$$

con

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha, \quad \frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0 \quad (6.39)$$

se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} &= (1 + \alpha) \left(\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{ext(k)} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{int(k)} \right) - \alpha \left(\mathbf{F}_t^{ext} - \mathbf{F}_t^{int} \right) - \\ &\mathbf{M} \left[\left(\frac{\hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k)} - \hat{\mathbf{U}}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\hat{\mathbf{U}}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_t \right) \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

donde:

$$\hat{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^{(k)} = (1 + \alpha) \mathbf{K}_{t+\Delta t}^{(k)} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \quad (6.41)$$

y

$$\Delta \hat{\mathbf{U}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k)} \quad (6.42)$$

El amortiguamiento numérico se controla con el parámetro α , con $\alpha = 0$ el amortiguamiento numérico es cero y se obtiene la regla trapezoidal (Newmark con $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$):

$$\hat{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(k)} - \mathbf{M} \left(\frac{4}{\Delta t^2} \left(\hat{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(k)} - \hat{\mathbf{U}}_t \right) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\hat{\mathbf{U}}}_t - \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_t \right) \quad (6.43)$$

donde

$$\hat{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^{(k)} = \mathbf{K}_{t+\Delta t}^{(k)} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \quad (6.44)$$

En los ejemplos analizados en esta tesis se utiliza $\alpha = -0,05$.

La formulación débil y su proceso de solución, presentados en los apartados anteriores, consideran a los desplazamientos y al potencial eléctrico como variables de campo independientes. En ese contexto, presentan la generalidad suficiente como para obtener, a partir de ellos, formulaciones de elementos estructurales de diferentes tipos, es decir

sólidos, placas, cáscaras, membranas, vigas y barras. Las diferentes formulaciones se logran construyendo los operadores diferenciales y las matrices de interpolación acordes al tipo de elemento, al orden y forma de interpolación, y a la manera en que se desarrolla el campo eléctrico dentro del elemento. Este último aspecto se encuentra íntimamente relacionado con la disposición y forma de electrodos.

La formulación considerada en esta tesis se denomina irreducible, sin embargo en la literatura, pueden encontrarse, formulaciones basadas en principios variacionales mixtos que contienen tensiones, deformaciones, desplazamientos mecánicos, desplazamientos eléctricos, campo eléctrico y potencial eléctrico como variables de campo, (Sze y Pan, 1999).

6.5. Formulación del elemento de cáscara piezoeléctrica propuesto

El elemento propuesto en esta tesis fue especialmente formulado para modelar estructuras fabricadas con compuestos piezoeléctricos, en particular, del tipo de compuestos polarizados con electrodos interdigitales (EI). El elemento admite la inclusión de un apilado de capas y una combinación arbitraria de materiales, es decir, monolíticos, compuestos, piezoeléctricos, etc. Este apilado o laminado en la estructura puede

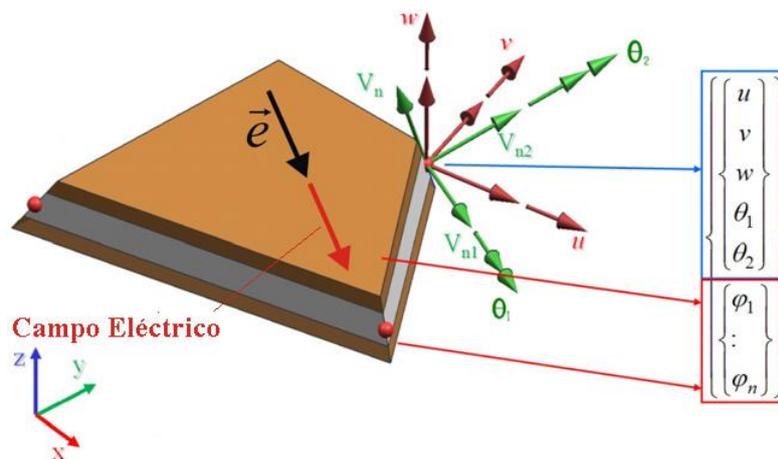


Figura 6.1: Esquema del elemento de cáscara piezoeléctrica propuesto.

construirse de manera general. La posición de cada material en el espesor y la orientación

del mismo dependerá de las características deseadas para cada aplicación particular. Para las variables cinemáticas, el modelo para el multilaminado se basa en una formulación de capa simple. Sin embargo, para el campo eléctrico, la situación es diferente, ya que cada capa activa puede funcionar como sensor o como actuador y controlarse independientemente. Por lo tanto, la relación entre el campo eléctrico en cada capa no se conoce a priori y, en consecuencia, se considera una variación tipo zig-zag en el espesor para el potencial eléctrico.

Esta posibilidad de modelar los laminados o múltiples capas de diferentes tipos de materiales, permite no sólo analizar laminados piezoeléctricos propiamente dichos sino también estructuras de materiales monolíticos a las que se les adhieren parches piezoeléctricos como, por ejemplo, una viga o placa de aluminio ([Balamurugan y Narayanan, 2008](#)), o un cajón cerrado metálico con actuadores y sensores dispuestos en direcciones oblicuas respecto del eje longitudinal, para conferir capacidad de control de vibraciones torsionales ([Guennam y Luccioni, 2006](#)).

6.5.1. Aspecto mecánico

Como ocurre en otros campos de la ingeniería, cuando se estudia un problema de análisis de cáscara, es fundamental considerar primero el modelo matemático subyacente y luego abordar su solución, por ejemplo, con el método de elementos finitos ([Bathe et al., 2000](#)). Un modelo matemático muy popular para cáscaras está basado en las consideraciones cinemáticas de Reissner-Mindlin para placas. La extensión al caso de cáscaras se puede realizar usando las consideraciones de sólido degenerado propuestas por [Ahmad et al. \(1970\)](#). A medida que se disminuye el espesor, el comportamiento de una cáscara cae en una de dos categorías diferentes: membranal dominante o flexional dominante. El comportamiento dominante depende de la geometría y de las condiciones de borde ([Chapelle y Bathe, 1998](#)).

Siguiendo a [Bathe \(1996\)](#), la interpolación de la geometría dentro de un elemento de cáscara general se puede escribir de la siguiente manera:

$${}^l x(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^l x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^l V_{nx}^k \quad (6.45)$$

$${}^l y(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^l y_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^l V_{ny}^k \quad (6.46)$$

$${}^l z(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^l z_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^l V_{nz}^k \quad (6.47)$$

donde $h_k(r, s)$ son las funciones de interpolación correspondientes al nodo k y ${}^l V_{nx}^k$, ${}^l V_{ny}^k$ y ${}^l V_{nz}^k$ son las componentes del vector V_n^k unitario normal¹ en el nodo k . Las coordenadas cartesianas ${}^l x$, ${}^l y$, ${}^l z$ corresponden a punto genérico del interior del elemento y ${}^l x_k$, ${}^l y_k$, ${}^l z_k$ a las del nodo k . Finalmente, a_k es el espesor correspondiente al nodo k , en la dirección de V_n^k .

El superíndice izquierdo indica la configuración en que se está. Así, $l = 0$ corresponde a la configuración original, mientras que $l = 1$ indica la configuración final. En esta tesis se trabaja bajo las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones. Sin embargo, se adopta la presente notación general y se remarca el hecho que los presentes desarrollos se pueden extender para incluir en los análisis los nombrados fenómenos.

Los desplazamientos se interpolan como:

$$u(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{nx}^k \quad (6.48)$$

$$v(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ny}^k \quad (6.49)$$

$$w(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{nz}^k \quad (6.50)$$

Las componentes del vector V_n^k son los incrementos en los cosenos directores de V_n^k ,

$$V_n^k = {}^1 V_n^k - {}^0 V_n^k \quad (6.51)$$

¹En general, el vector V_n^k no es exactamente normal a la superficie media. Esto puede ser, por ejemplo, debido a la geometría de la cáscara o por cambios en el mismo en un análisis considerando grandes deformaciones (Bathe, 1996). Algunos autores lo llaman vector pseudonormal o director (Hughes, 1996).

y pueden expresarse en función de los giros nodales. Sin embargo, no hay una única manera de hacer esto. Se definen dos vectores ${}^0V_1^k$ y ${}^0V_2^k$ ortogonales a ${}^0V_n^k$, para lo cual se deben hacer algunas consideraciones presentes en esta última referencia. Introduciendo dos rotaciones, θ_1 y θ_2 , respecto de ${}^0V_1^k$ y ${}^0V_2^k$ respectivamente (Figura 6.1) y bajo la hipótesis que ambos giros son pequeños, V_n^k se expresa de la siguiente manera:

$$V_n^k = -{}^0V_2^k\theta_1^k + {}^0V_1^k\theta_2^k \quad (6.52)$$

Reemplazando esta relación en las ecuaciones (6.48) a (6.50), resultan las siguientes expresiones para la interpolación de los desplazamientos mecánicos:

$$u(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k^l x_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \left(-{}^0V_{2x}^k \theta_1^k + {}^0V_{1x}^k \theta_2^k \right) \quad (6.53)$$

$$v(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k^l y_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \left(-{}^0V_{2y}^k \theta_1^k + {}^0V_{1y}^k \theta_2^k \right) \quad (6.54)$$

$$w(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k^l z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \left(-{}^0V_{2z}^k \theta_1^k + {}^0V_{1z}^k \theta_2^k \right) \quad (6.55)$$

Con la cinemática así descrita, se generan las matrices de interpolación de los desplazamientos y posteriormente los operadores matriciales que relacionan las componentes de desplazamientos con las componentes de deformaciones.

Para aliviar los problemas de bloqueo por corte, se incluyó en la formulación la interpolación mixta de componentes tensoriales (MITC) (Bathe y Dvorkin (1986); Kögl y Bucalem (2005a); Kögl y Bucalem (2005b)).

Las componentes covariantes de las deformaciones transversal de corte $\tilde{\varepsilon}_{rt}$ y $\tilde{\varepsilon}_{st}$ se interpolan de la siguiente manera:

$$\tilde{\varepsilon}_{rt} = \frac{1}{2} (1 + s) \tilde{\varepsilon}_{rt}|_A^{DI} + \frac{1}{2} (1 - s) \tilde{\varepsilon}_{rt}|_C^{DI} \quad (6.56)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{st} = \frac{1}{2} (1 + r) \tilde{\varepsilon}_{st}|_D^{DI} + \frac{1}{2} (1 - r) \tilde{\varepsilon}_{st}|_B^{DI} \quad (6.57)$$

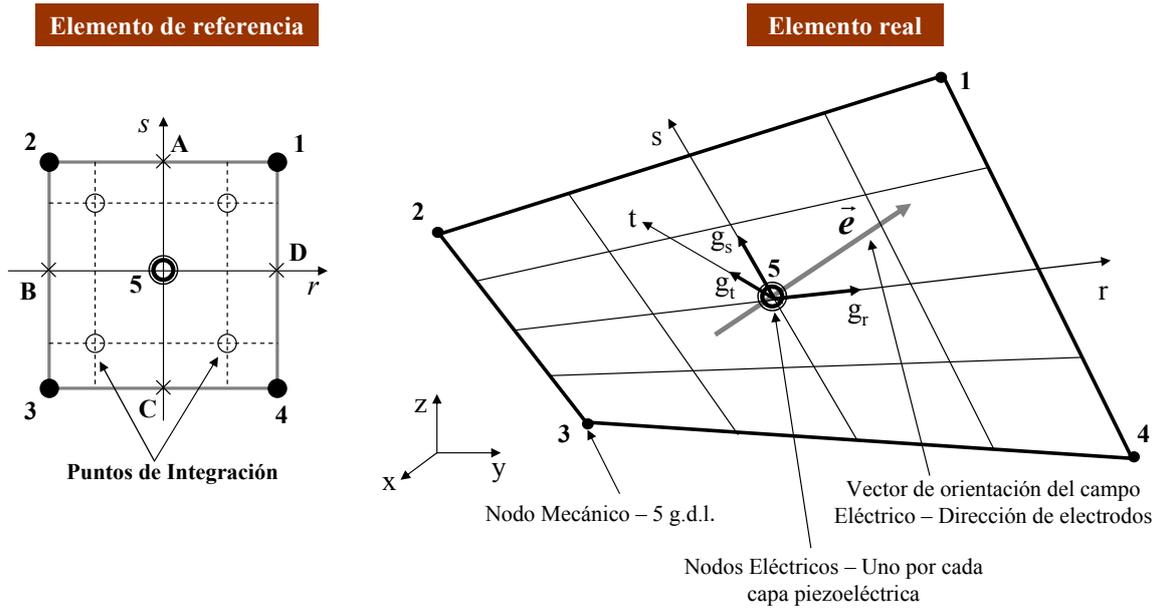


Figura 6.2: Representación del elemento de referencia, de la superficie media del elemento real y la base covariante.

donde $\tilde{\varepsilon}_{rt}|_A^{DI}$, $\tilde{\varepsilon}_{rt}|_C^{DI}$, $\tilde{\varepsilon}_{st}|_B^{DI}$ y $\tilde{\varepsilon}_{st}|_D^{DI}$ son las componentes covariantes de deformación evaluadas directamente con la interpolación de desplazamientos en los puntos A, C, D y B que se señalan en la Figura 6.2. Esta formulación es ampliamente conocida, mayores detalles pueden encontrarse en la bibliografía citada anteriormente.

6.5.2. Aspecto eléctrico

En los dispositivos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales (DPEI) el campo eléctrico no es uniforme a lo largo de las fibras piezoeléctricas, sino que se registran variaciones importantes de esta cantidad. En algunos sectores las variaciones son moderadas, sin embargo, entre dos electrodos consecutivos, se registran cambios de 180° en la dirección del campo eléctrico. La Figura 6.3 muestra dicha variación obtenida con un análisis detallado, usando el MEF (Guennam, 2005).

Para el análisis de una estructura activa, en un análisis macro-eléctromecánico en el que se modela el dispositivo con un material homogéneo equivalente, puede emplearse, sin embargo, un modelo más simple para representar el campo eléctrico. El elemento propuesto en esta tesis contempla dos aspectos principales, por un lado la homogeneización

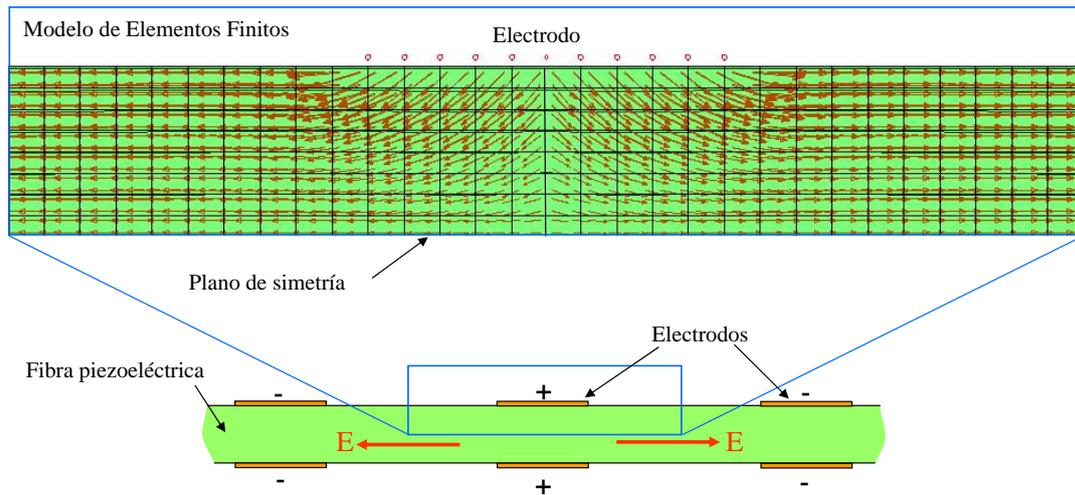


Figura 6.3: Variación del campo eléctrico en una porción de fibra piezoeléctrica entre dos electrodos, análisis detallado con MEF. (Guennam, 2005)

de las propiedades y comportamiento material y, por otro lado, la consideración de un campo eléctrico uniforme y constante en el laminado, cuando se polarizan los electrodos. El elemento de cáscara propuesto soporta la inclusión de varias capas de diferentes materiales y orientaciones definidas para cada uno de ellos en el caso de medios no isótropos. En particular, cada capa piezoeléctrica admite una orientación determinada que, a su vez, define la dirección del campo eléctrico basada en la dirección de máximo acoplamiento piezoeléctrico longitudinal.

En términos generales, para el campo eléctrico se tiene la siguiente expresión:

$$E_i = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \quad (6.58)$$

Para cada capa piezoeléctrica, se introduce un nodo con un solo grado de libertad. El mismo es solamente eléctrico y corresponde al potencial eléctrico aplicado. Esto representa la aplicación del potencial eléctrico a uno de los electrodos mientras el otro electrodo se considera conectado al potencial de tierra o masa.

Dentro de cada capa piezoeléctrica, la ecuación (6.58) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{E} = -\frac{\varphi}{p}\vec{e} \quad (6.59)$$

donde \vec{e} es un vector unitario que representa la dirección de la fibra y p es la distancia entre los *dedos* o ramas de electrodos.

En general, en el contexto del método de elementos finitos, el campo eléctrico se calcula en términos de los potenciales eléctricos nodales, introduciendo una matriz B_e :

$$\vec{E} = B_e \hat{\phi} \quad (6.60)$$

En este sentido, el campo eléctrico dentro de cada capa piezoeléctrica, considerado constante, podría ser expresado en términos de los potenciales eléctricos aplicados a los electrodos correspondientes de la siguiente manera, (Guennam y Luccioni, 2009):

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}_{\text{capa } j} = -\frac{1}{p_{\text{capa } j}} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_{\text{capa } j} \{\varphi\}_{\text{capa } j} \quad (6.61)$$

La ecuación (6.61) puede escribirse también de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}_{\text{capa } j} = - \left[f_1 \frac{1}{p_1} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_1 \cdots f_k \frac{1}{p_k} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_k \cdots f_n \frac{1}{p_n} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_n \right] \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix} \quad (6.62)$$

Para expresar, mediante una única expresión, el campo eléctrico dentro de cada capa, en la ecuación (6.62), se ha incluido la variable f_k . La misma se define como:

$$f_k = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } j = k \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.63)$$

La matriz $[B_e]$ resulta:

$$[B_e] = - \left[f_1 \frac{1}{p_1} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_1 \cdots f_k \frac{1}{p_k} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_k \cdots f_n \frac{1}{p_n} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_n \right] \quad (6.64)$$

En la presente formulación se emplea integración a través de las capas. Para ello se

cambian los límites de integración y los correspondientes pesos. La integral a lo largo de todo el espesor se expresa como suma de integrales a lo largo de cada capa,

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_{t^{k-1}}^{t^k} f^k(t)dt \right) \quad (6.65)$$

El número total de capas se designa con n . Si t^s y w_g^s representan la ubicación de los puntos de integración o muestreo y los pesos correspondientes para el intervalo $(-1, +1)$ respectivamente, entonces, la ubicación de los puntos de integración y los pesos correspondientes para (t^{k-1}, t^k) se calculan de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\tilde{t}^s = \frac{t^{k-1} + t^k}{2} + \frac{t^k - t^{k-1}}{2} t^s \quad (6.66)$$

$$\tilde{w}_g^s = \frac{t^k + t^{k-1}}{2} w_g^s \quad (6.67)$$

donde

$$t^k = t^{k-1} + 2 \times \text{espesor de la capa} / \text{espesor total} \quad (6.68)$$

Usando este método de integración, se pueden calcular todas las matrices y vectores. Por ejemplo, la matriz de acoplamiento piezoeléctrico tendría la siguiente expresión:

$$[K_{me}] = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_m]^T [e] [B_m] dr ds dt \quad (6.69)$$

El mismo procedimiento se usa para las demás matrices y vectores.

6.6. Pruebas del elemento formulado

El objetivo de la siguiente sección es evaluar el elemento propuesto en esta tesis. Para ello, se comparan resultados con otros modelos presentes en la bibliografía. Así, en primer lugar se considera una viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos y se comparan resultados obtenidos con un modelo analítico. En segundo lugar se considera el cajón cerrado dotado de actuadores, previamente analizado por [Guennam y Luccioni \(2006\)](#) usando elementos sólidos tridimensionales para modelar la zona activa.

6.6.1. Viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos

Con el objetivo de evaluar el comportamiento estático lineal del elemento formulado, se analiza primero una viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos adheridos a la superficie de la misma. La Figura 6.4 muestra un esquema de la geometría.

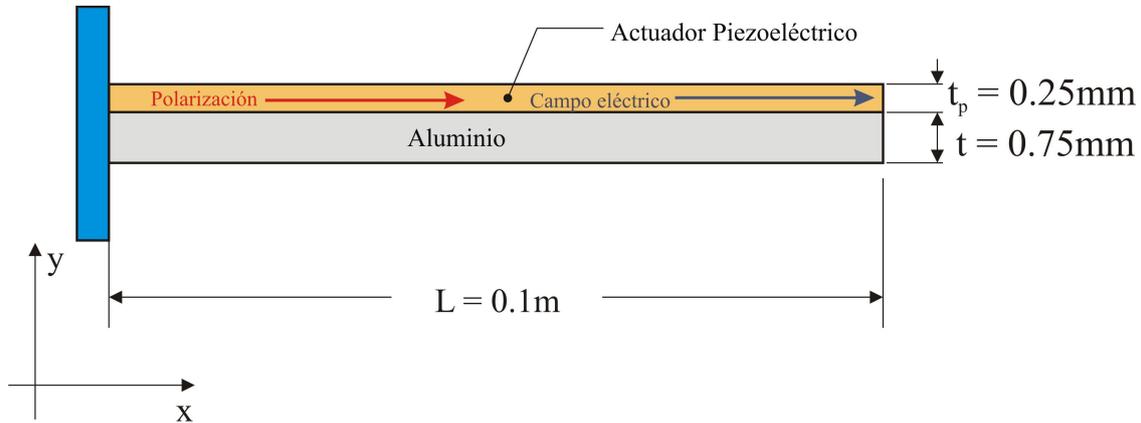


Figura 6.4: Viga con actuadores piezoeléctricos.

Las propiedades materiales usadas para la viga y los actuadores piezoeléctricos se presentan en la Tabla 6.1. El campo eléctrico homogeneizado dentro del actuador, depende del potencial eléctrico aplicado y el espaciado de las ramas de electrodos. En el presente ejemplo, se aplica un potencial eléctrico de 1000 Volts para inducir un campo eléctrico de $1,0 \times 10^6 \text{ V/m}$ con un espaciado de electrodos de $1,0 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Propiedad material	Piezo	Aluminio
$E_1(\text{GPa})$	31.2	71.0
$E_2(\text{GPa})$	17.05	71.0
$G_{12}(\text{GPa})$	5.12	26.7
ν_{12}	0.303	0.33
$d_{11}(\times 10^{-12} \text{ mV}^{-1})$	386.6	-
$d_{12}(\times 10^{-12} \text{ mV}^{-1})$	-175.5	-
$\kappa^\sigma(\times 10^{-8} \text{ F/m})$	2.0	-

Tabla 6.1: Propiedades materiales.

Como primera medida, se modela la viga usando el elemento de cáscara piezoeléctrica

formulado en esta tesis. Se realiza un refinamiento sucesivo de la malla desde un solo elemento hasta 500 elementos en la longitud de la viga. Se usa sólo un elemento en el ancho de la misma, ya que la solución para este caso particular es independiente del ancho de la viga. Para evitar problemas numéricos debidos a relaciones de aspecto elevadas en los elementos, el ancho de los mismos se disminuye en correspondencia con el refinamiento longitudinal.

La viga piezoeléctrica se analiza, además, con el programa comercial ABAQUS (Hibbitt et al., 2003). La capa de material activo se modela con los elementos sólidos piezoeléctricos bilineales de tensión plana ABAQUS/CPS4E, mientras que para la zona pasiva se emplean los elementos sólidos mecánicos bilineales de tensión plana ABAQUS/CPS4 de integración completa y ABAQUS/CPS4R de integración reducida.

Se usan ocho elementos en el espesor y se varía el número de elementos a lo largo de la viga entre 5 y 500. El campo eléctrico se introduce por medio de la imposición de potenciales eléctricos en los nodos, crecientes en dirección del eje coordenado x .

El incremento en el campo eléctrico nodal se calcula con la siguiente expresión:

$$\Delta\varphi = \text{Campo eléctrico deseado} \times \text{espaciado longitudinal de la malla} \quad (6.70)$$

Se calcula el desplazamiento del extremo libre para diferentes niveles de refinamiento de malla y diferentes tipos de elementos (Elemento piezoeléctrico propuesto, ABAQUS CPS4E/CPS4 y ABAQUS CPS4E/CPS4R). Los resultados se presentan en la Figura 6.5 en la que los resultados se comparan, además, con la solución analítica de Agrawal y Treanor (1999) basada en la teoría de viga de Bernoulli.

Puede observarse que los resultados obtenidos con elementos sólidos planos presentan una precisión aceptable sólo para elevados niveles de refinamiento de la malla, con el correspondiente aumento de los grados de libertad totales del modelo. Como contraparte, se observa que los resultados obtenidos con el elemento de cáscara formulado son considerablemente más precisos, incluso para bajos niveles de refinamiento. Para 20 elementos, el error relativo es aproximadamente 1,4 %. Esto muestra que, en este caso, el uso de la formulación de EF propuesta permite reducir notablemente el número de grados de libertad respecto a cuando se usan elementos sólidos.

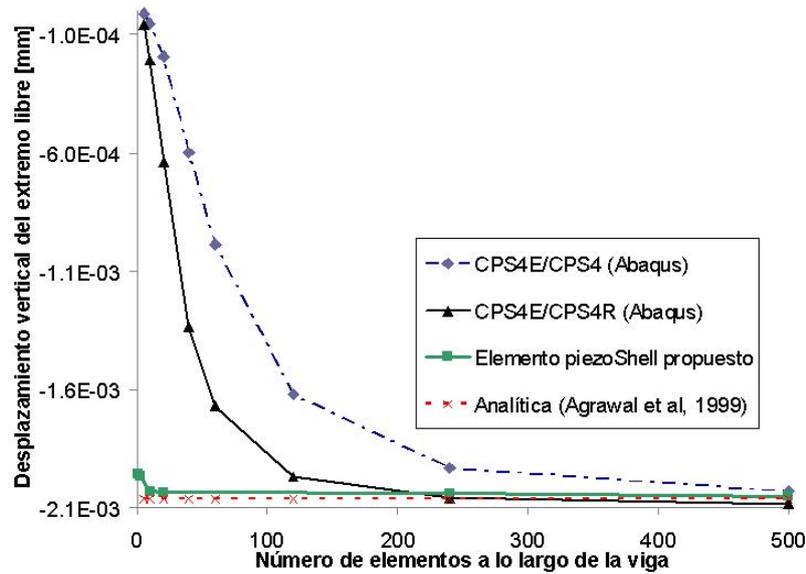


Figura 6.5: Convergencia en viga con actuadores piezoeléctricos. Desplazamiento del extremo libre.

En cierta medida, los experimentos numéricos realizados con elementos sólidos en ABAQUS pueden considerarse como análisis basados en teorías que contemplan el comportamiento cinemático detallado a lo largo de cada capa. Teniendo en cuenta este aspecto, la Figura 6.5 muestra que se pueden obtener resultados similares con la presente formulación que combina un enfoque de capa única para las variables mecánicas con otro multilámina para el campo eléctrico. Estos resultados son muy alentadores debido a que se disminuye notablemente el número total de grados de libertad.

6.6.2. Placa con actuadores piezoeléctricos

Se presenta en este punto, el análisis de una placa en voladizo con actuadores piezoeléctricos. La placa es cuadrada con $L = 0,1m$. El material base es aluminio para el que se adopta un módulo de elasticidad $E = 71(GPa)$ y un módulo de Poisson $\nu = 0,33$. El espesor se denota con t_b . La superficie superior de la placa tiene adherida una capa de laminado piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales, cuyo espesor se denota con t_p , funcionando en modo actuador, con propiedades obtenidas mediante la regla de mezcla generalizada explicada en el Capítulo 5. Se presentan resultados para diferentes valores de la relación L/t_{total} , donde $t_{total} = t_p + t_b$. La relación t_p/t_{total} se mantiene fija

en 0.25. En la Figura 6.6 se muestra la geometría de la placa plana usada par el análisis.

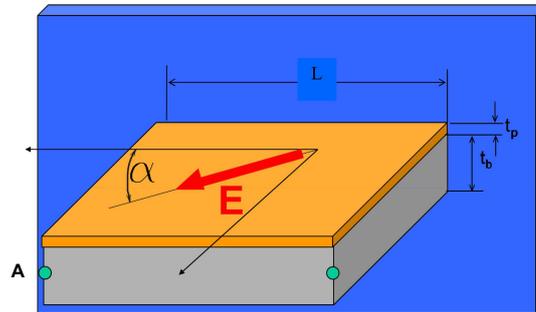


Figura 6.6: Placa plana en voladizo con actuadores piezoeléctricos.

Para estudiar la convergencia se tiene en cuenta el desplazamiento vertical del punto A originado por la aplicación de un campo eléctrico uniforme de valor $1000V/mm$. Se presentan los análisis de convergencia para mallas ortogonales y distorsionadas con relaciones $L/t = 10$ y $L/t = 100$. La Figura 6.7 muestra las mallas de elementos finitos uniformes y distorsionadas con los cuatro niveles de refinamiento considerados.

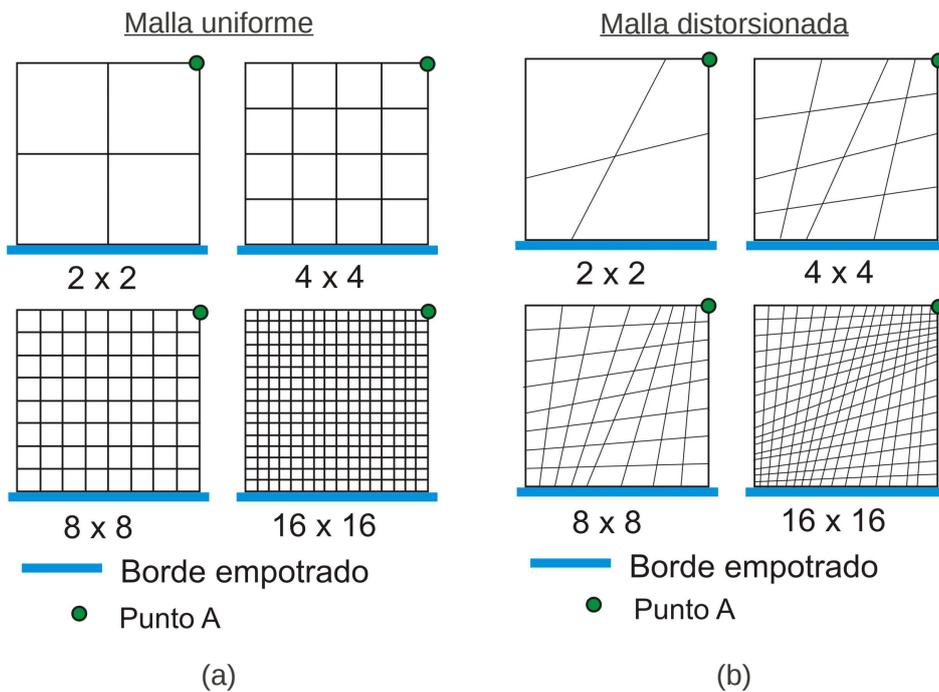


Figura 6.7: Placa plana - Mallas uniformes y distorsionadas.

Se presentan resultados para el campo eléctrico a 90° y 45° , como así también el alivio de los problemas de bloqueo por corte al usar interpolación MITC. En todos los casos, los desplazamientos verticales del punto A se normalizan, dividiéndolos por el correspondiente valor para malla 16×16 elementos. En las Figuras 6.8 y 6.9 se muestran comparaciones entre resultados obtenidos para distintas densidades de malla, usando interpolación basada sólo en desplazamientos e interpolación MITC (Bathe, 1996).

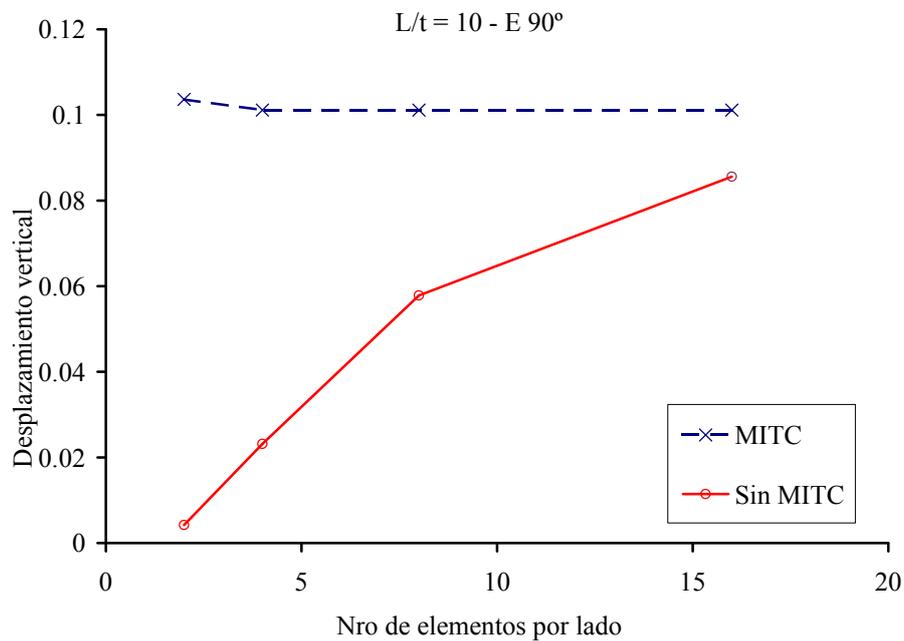


Figura 6.8: Análisis de convergencia en placa plana. Relación $L/t = 10$. Campo Eléctrico a 90° - Efecto de la interpolación MITC (Malla uniforme).

En la Figura 6.8 se puede observar el efecto de la interpolación mixta sobre el desplazamiento vertical de un punto del extremo libre (Punto A) ante la aplicación de un campo eléctrico uniforme impuesto en el actuador superior de la placa. Claramente se observa que los efectos del bloqueo disminuyen con el refinamiento. Sin embargo en la Figura 6.9 se observa que el efecto se manifiesta con mayor intensidad en el caso ($L/t = 100$). Tanto los resultados presentados en la Figura 6.8 como los de la Figura 6.9 corresponden a mallas uniformes.

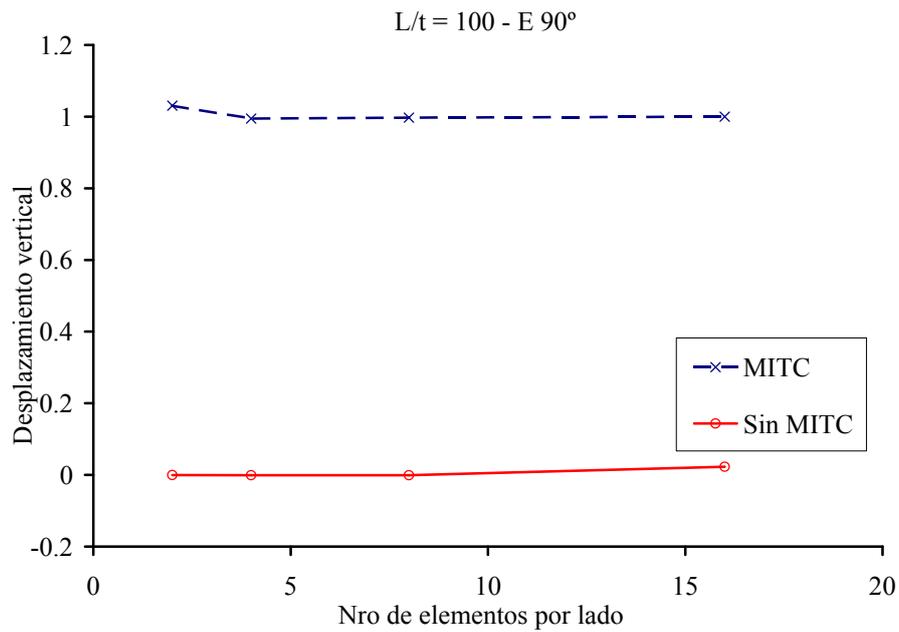


Figura 6.9: Análisis de convergencia en placa plana. Relación $L/t = 100$. Campo Eléctrico a 90° - Efecto de la interpolación MITC (Malla uniforme).

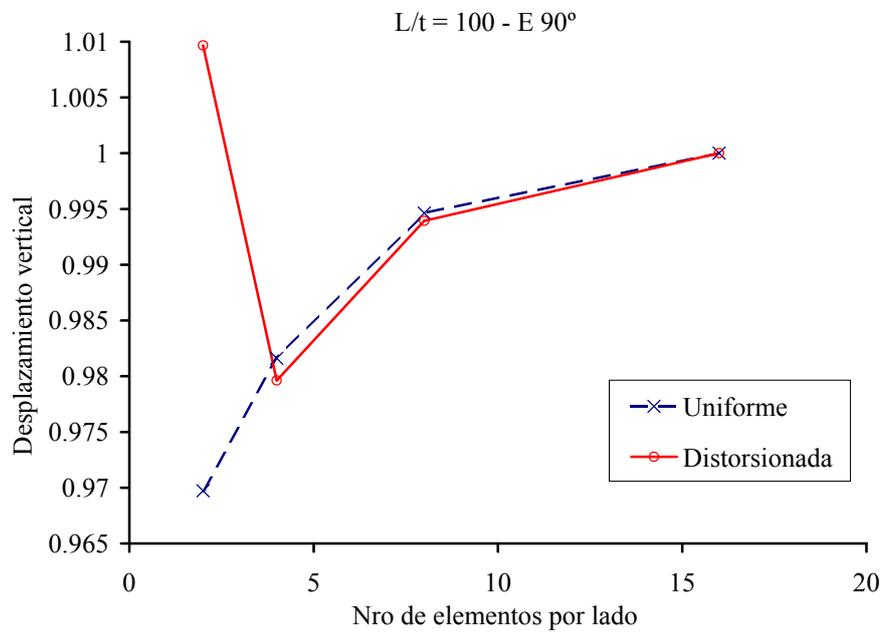


Figura 6.10: Comparación de convergencia en placa plana para mallas uniformes y distorsionadas. Relación $L/t = 100$. Campo Eléctrico a 90° .

En la Figura 6.10 se presenta la comparación entre los desplazamientos obtenidos con

malla uniforme y distorsionada, esta última tiene un velocidad de convergencia levemente menor respecto de la primera. Pero, en ambos casos, los resultados muestran que a partir de los 4 elementos por lado, se obtienen desplazamientos muy cercanos a los de la solución de referencia con malla más refinada.

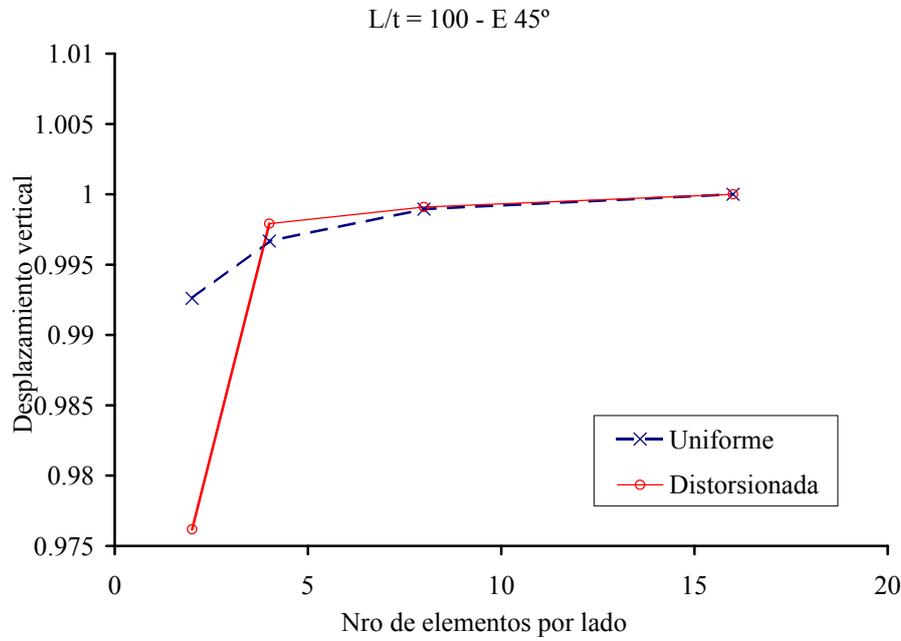


Figura 6.11: Comparación de convergencia en placa plana para mallas uniformes y distorsionadas. Relación $L/t = 100$. Campo Eléctrico a 45° .

En el caso del campo eléctrico orientado a 45° los resultados son los que se muestran en la Figura 6.11. Se observa que la convergencia es levemente mayor para el caso de malla distorsionada, esto se debe a que el campo eléctrico se orienta, en este caso particular, en la dirección de mayor refinamiento.

6.6.3. Cajón cerrado

Por último, se presenta el análisis lineal de un cajón cerrado dotado de actuadores y el estudio de la convergencia para distintos niveles de refinamiento de malla. La geometría se muestra en la Figura 6.12.

La zona pasiva es de aluminio, y los actuadores de laminado de PZT/epoxy, con espaciado entre los electrodos de $0,5mm$. La longitud $b = 0,6m$, $c = 0,2m$ y $h = 0,05m$.

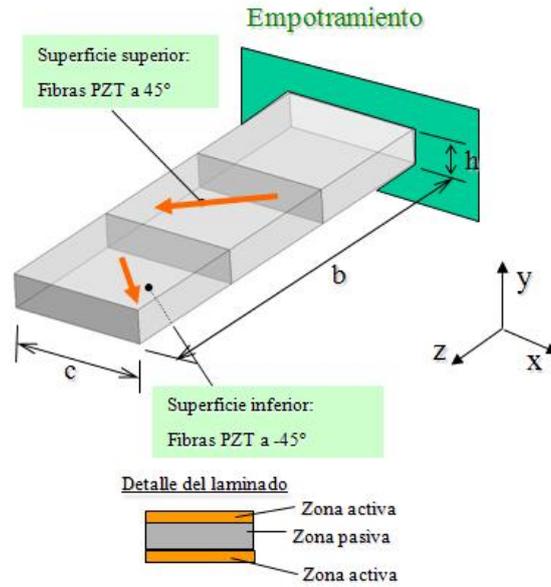


Figura 6.12: Cajón cerrado con actuadores a $\pm 45^\circ$ - Geometría.

El espesor de la zona pasiva es $t_p = 0,5mm$, mientras que cada capa de laminado piezoeléctrico tiene un espesor $t_p = 0,25mm$. El espesor de las costillas y largueros es de $0,5mm$. Las propiedades materiales se detallan en la Tabla 6.1.

En la Figura 6.13 se muestran las mallas utilizadas para la determinación del giro estático del cajón cerrado.

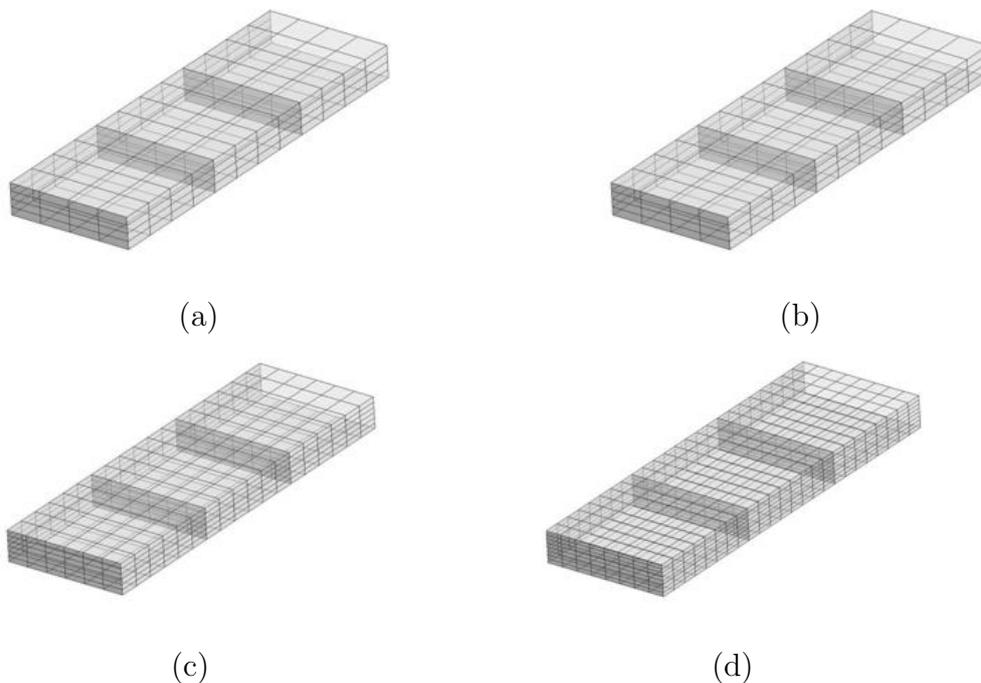


Figura 6.13: Mallado del cajón. (a) Malla 2x2. (b) Malla 4x4. (c) Malla 6x6. (d) Malla 8x8

Los actuadores superiores e inferiores trabajan en fase, es decir que al aplicar el voltaje, ambos se deforman de tal manera que contribuyen a la torsión en el mismo sentido.

A continuación, en la Figura 6.14 se presenta la convergencia en el giro del extremo libre del cajón como respuesta a la aplicación de un campo eléctrico uniforme en cada actuador de valor $1000V/mm$. La figura muestra los resultados obtenidos con el elemento finito de cáscara formulado en esta tesis y los resultados obtenidos con el enfoque presentado en Guennam y Luccioni (2007) en el que se utilizan elementos de membrana piezoeléctrica para modelar la zona activa, combinados con elementos de cáscara convencionales para la zona pasiva. El elemento de membrana piezoeléctrica que se propone en Guennam y Luccioni (2007) incluye un enfoque similar al propuesto en esta tesis para introducir el campo eléctrico. Los autores lo utilizan para modelar un sistema de microgeneración de energía eléctrica.

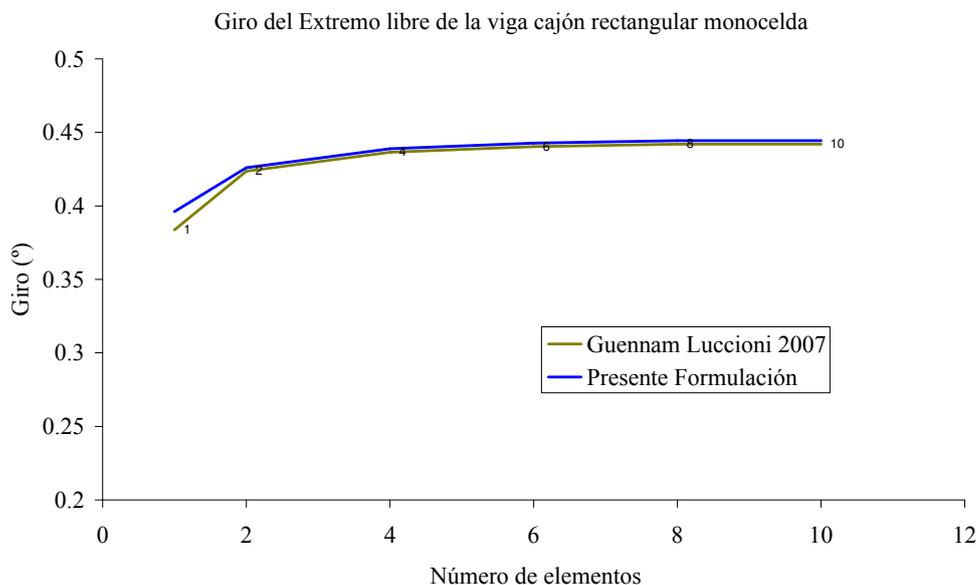


Figura 6.14: Cajón cerrado con actuadores a $\pm 45^\circ$ - Convergencia.

En la Figura 6.14 se observa que los resultados correspondientes a ambos enfoques son prácticamente coincidentes, la mayor diferencia se presenta para el refinamiento de malla más bajo.

Los ejemplos lineales sencillos, presentados en este capítulo permiten concluir que el

elemento formulado en esta tesis es adecuado para modelar estructuras activas dotadas de dispositivos construidos con laminados piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales, de manera relativamente sencilla y obtener resultados bastante precisos.

En el Capítulo 7 se presentan otros ejemplos más complejos, comparaciones con resultados experimentales presentes en la bibliografía y el uso del elemento en conjunto con el modelo de homogeneización para compuestos piezoeléctricos no lineales propuesto en esta tesis.

CAPÍTULO 7

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

El elemento finito de cáscara piezoeléctrica, en conjunto con el modelo material propuestos en esta tesis, se utilizan en este capítulo para analizar estructuras activas.

En la primer parte del capítulo se presentan simulaciones del comportamiento material. Se presenta, en primer lugar, el análisis de cerámicas ferroeléctricas puras utilizando el modelo fenomenológico descrito en el Capítulo 4 e implementado en el Capítulo 5; luego se presentan comparaciones de resultados con el modelo microelectromecánico, también descrito en el Capítulo 4. Finalmente, se presenta el análisis de un compuesto simple.

La segunda parte del capítulo incluye algunos modelos estáticos y de comparación con resultados experimentales para probar el modelo material y el elemento desarrollados. En primer lugar, se modela numéricamente una porción de superficie sustentadora con actuadores piezoeléctricos, ensayada experimentalmente por [du Plessis \(1996\)](#). Luego se analiza el cajón cerrado, con actuadores piezoeléctricos analizado por [Guennam y Luccioni \(2006\)](#), para lo cual, los autores, realizaron un modelo de elementos finitos en ABAQUS y luego diseñaron el sistema de control con MATLAB ([MathWorks, 1998](#)). También se presentan los resultados del análisis de amortiguamiento de vibraciones en un cajón cerrado dotado de dispositivos piezoeléctricos, como consecuencia de la disipación de energía en una red pasiva [Guennam y Luccioni \(2007\)](#).

Finalmente, se presentan análisis estáticos considerando los efectos de no linealidad en el comportamiento material y se identifican diferentes aspectos del comportamiento y rangos de trabajo.

7.1. Ejemplos y verificaciones de los modelos materiales

El modelo fenomenológico de las fibras proporciona, por un lado, un marco teórico general dentro del cual se imponen restricciones termodinámicas y, por otro lado, posee funciones con parámetros indeterminados que permiten el ajuste del modelo a los diferentes comportamientos observados experimentalmente. Estas funciones se proponen desde fuera del modelo y pueden inspirarse en observaciones experimentales y/o en aspectos particulares de la estructura cristalina del material. Las observaciones experimentales y los ensayos más comunes son los lazos de histéresis del desplazamiento eléctrico en función del campo eléctrico, los lazos de mariposa de las deformaciones en función del campo eléctrico y los lazos de deformaciones y desplazamiento eléctrico en función de tensiones de compresión durante los procesos de depolarización mecánica. Para ser de utilidad en aplicaciones tecnológicas, el modelo debe ser capaz de reproducir dichos comportamientos. Por otra parte, la estructura cristalográfica impone restricciones entre los estados remanentes de polarización y deformación y sobre los estados de saturación. Estas restricciones deben ser introducidas en el modelo fenomenológico, de lo contrario se podrían obtener combinaciones ficticias de los nombrados estados remanentes o superar los estados reales de saturación. La determinación experimental de los estados de saturación de las cantidades remanentes en ferroeléctricos es sumamente difícil de lograr. De hecho, alcanzar el estado de saturación de deformaciones remanentes requiere tensiones mecánicas tan elevadas que las cerámicas tienden a romperse durante los ensayos ([Landis, 2003](#)). En este sentido, los modelos microelectromecánicos brindan una alternativa muy atractiva para proveer parte de la información requerida para calibrar ciertos parámetros de los modelos fenomenológicos.

7.1.1. Cerámica ferroeléctrica - Modelo fenomenológico

Se presentan a continuación dos ejemplos en los que se aplica el modelo fenomenológico para predecir el comportamiento de cerámicas ferroeléctricas. Ambos corresponden a ensayos experimentales presentes en la bibliografía y tienen como objetivo, validar el

modelo implementado.

En ambos casos, la aplicación del modelo y los cálculos realizados corresponden a la simulación del comportamiento a nivel modelo constitutivo o de un punto de Gauss.

7.1.1.1. Simulación numérica de un proceso de polarización - Cerámica PZT-5H

El modelo fenomenológico implementado se utiliza, en este caso, para simular en forma numérica un ensayo experimental de polarización de una cerámica ferroeléctrica presentado por [Huber y Fleck \(2001\)](#). En el citado trabajo, los autores consideran la polarización inicial de una cerámica PZT-5H, y luego el cambio producido en dicha cantidad por causa de la aplicación de un campo eléctrico en diferentes direcciones. En el presente análisis se considera la aplicación del campo eléctrico en dirección opuesta a la polarización inicial.

Las propiedades materiales se especifican en la Tabla 7.1 y los parámetros utilizados para el modelo se detalla en la Tabla 7.2.

Propiedad material	Valor
ν	0.31
Módulo de corte $G(GPa)$	20.8
$\kappa^\sigma(10^{-8}F/m)$	2.0
$d_{33}(10^{-12}mV^{-1})$	2206
$d_{31}(10^{-12}mV^{-1})$	-1103
$d_{15}(10^{-12}mV^{-1})$	2760

Tabla 7.1: Propiedades materiales para la cerámica PZT-5H ([Huber y Fleck, 2001](#))

A continuación, se presentan los resultados numéricos obtenidos y su comparación con los resultados experimentales presentados por [Huber y Fleck \(2001\)](#).

La Figura 7.1 muestra el cambio en el desplazamiento eléctrico registrado en un cubo de material previamente polarizado, cuando se aplica un campo eléctrico en dirección

Parámetro	Valor
$\alpha(m^4C^{-2})$	0.0011
$\beta(m^4C^{-2})$	0.2
$h_{0e}(10^5F^{-1}m)$	714
$h_{0e}(GPa)$	620
n_e	1.4
n_e	1.4
$G_c(MV/m)$	0.82
$\varepsilon_{sat}(\%)$	0.465
$P_{sat}(C/m^2)$	0.24

Tabla 7.2: Parámetros del modelo fenomenológico usados para modelar la cerámica PZT-5H (Huber y Fleck, 2001)

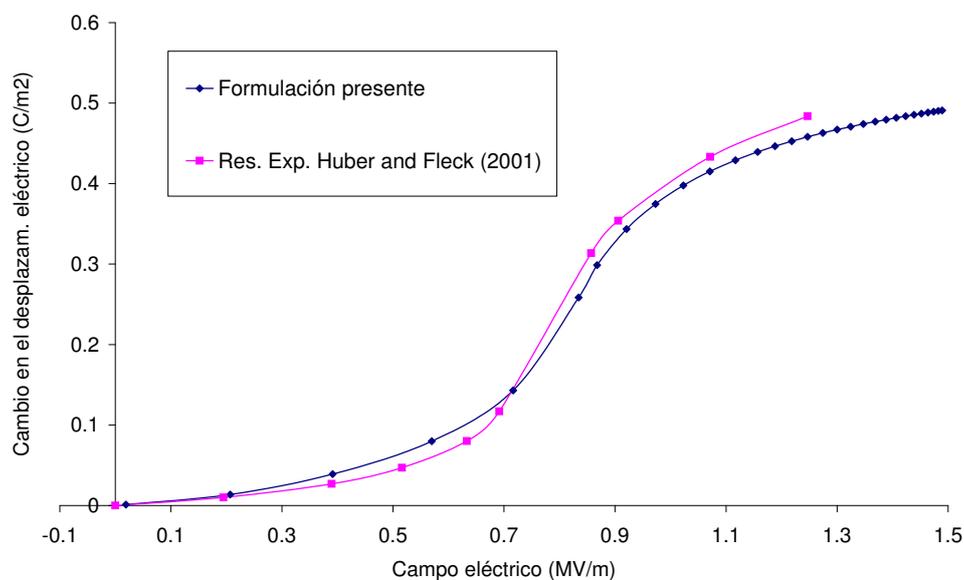


Figura 7.1: Cambio en el desplazamiento eléctrico D_3 en función del campo eléctrico aplicado en dirección x_3 - Comparación con resultados experimentales de Huber y Fleck (2001).

opuesta. Como se observa, los resultados numéricos se corresponden con las observaciones experimentales.

Utilizando los mismos parámetros para el material y el modelo, se analiza a continuación, la respuesta electromecánica del material. Se aplica en primer lugar, un campo eléctrico cíclico sinusoidal de amplitud $3(MV/m)$ en la dirección x_3 . La simulación comienza a partir del estado inicial virgen, es decir, con polarización y deformaciones remanentes nulas. La Figura 7.2 muestra el desplazamiento eléctrico en la dirección x_3 en función del campo eléctrico E_3 aplicado en esa dirección. Como puede observarse, al comienzo la respuesta dieléctrica es lineal, ya que sólo se debe a las propiedades dieléctricas. Luego, al comenzar las conmutaciones, se produce un fuerte incremento de la polarización que se manifiesta con el aumento de las cargas superficiales libres. Finalmente, se alcanza el estado de saturación caracterizado por el cese de los procesos de conmutación y estabilización de la respuesta. También puede observarse en la Figura 7.2 que la pendiente de la respuesta dieléctrica luego de la saturación es idéntica a la inicial. Se observa, además, la presencia de una polarización remanente para valores nulos del campo eléctrico.

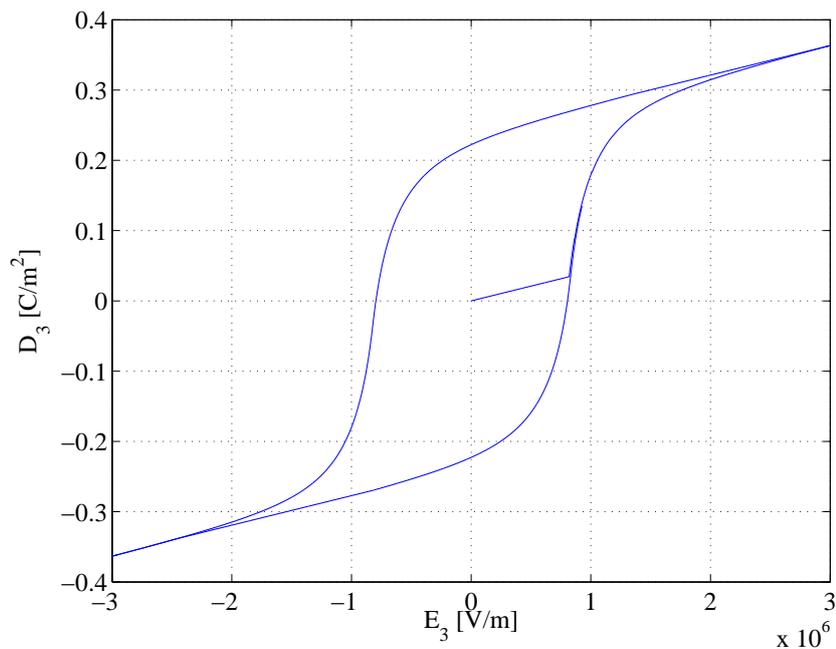


Figura 7.2: Desplazamiento eléctrico D_3 en función del campo eléctrico aplicado en dirección x_3 - Modelo fenomenológico.

La Figura 7.3 muestra la deformación ε_{33} en función del campo eléctrico E_3 aplicado en la dirección x_3 . Esta curva es característica de los materiales ferroeléctricos y normalmente recibe el nombre de curva *mariposa*. Claramente refleja la dependencia del acoplamiento electromecánico con la polarización. La respuesta inicial es nula debido a que se parte del estado inicial no polarizado y por lo tanto sin acoplamiento electromecánico. Al llegar a cierto umbral comienzan las conmutaciones y la consecuente aparición del acoplamiento, el cual es función del campo eléctrico E_3 y para valores suficientemente elevados del mismo se produce una saturación. Al variar E_3 , se observa el comportamiento histerético y la presencia de deformaciones remanentes $\varepsilon_{33} = 0,2\%$ cuando E_3 es nulo. La simetría en la gráfica de la respuesta se debe a la inversión en el sentido del acoplamiento electromecánico por efecto de la conmutación de dominios ferroeléctricos.

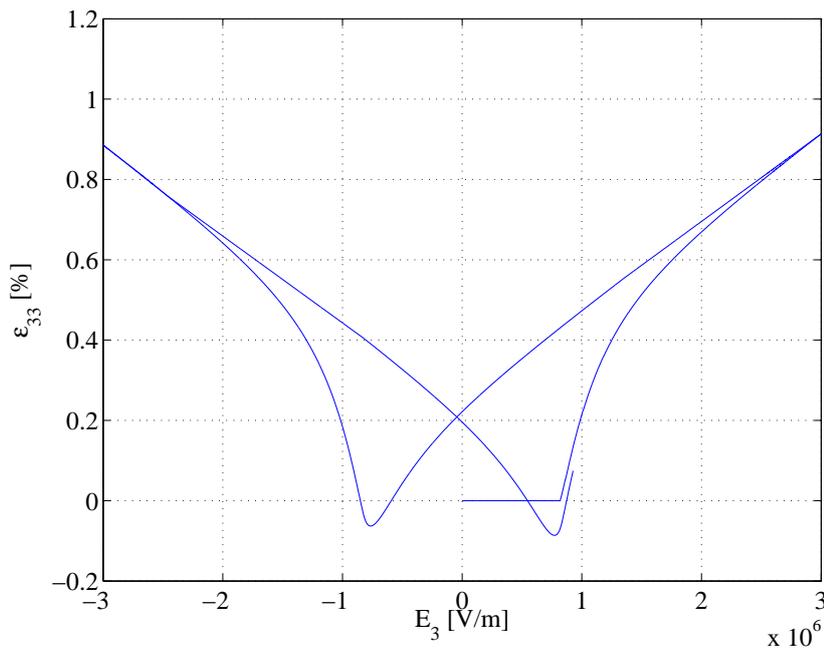


Figura 7.3: Deformación ε_{33} en función del campo eléctrico E_3 .

Luego de haber polarizado el material con la aplicación del campo eléctrico, se aplicó una tensión de compresión en la dirección x_3 , de amplitud (50 MPa) y modulada con una senoide.

La Figura 7.4 muestra la polarización total y remanente en función de la tensión aplicada. Como puede observarse, la compresión mecánica no puede eliminar la polarización remanente, ya que no puede producir conmutaciones 180° .

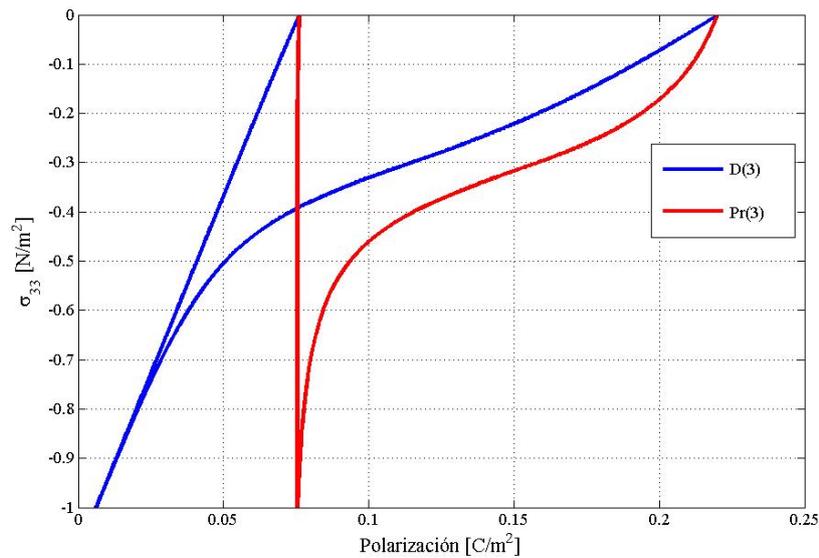


Figura 7.4: Polarización total y remanente en función de la tensión de compresión σ_{33} .

7.1.1.2. Comparaciones con resultados experimentales de cerámica PLZT

El objetivo del siguiente ejemplo es comparar los resultados obtenidos utilizando la presente formulación, con los datos experimentales obtenidos por [Hwang et al. \(1995\)](#), quienes realizaron ensayos sobre cerámicas PLZT. Los ensayos consisten en someter las probetas a campos eléctricos de polarización y registrar los lazos de histéresis de deformaciones y desplazamiento eléctrico. Para el presente análisis se modifican los parámetros del modelo para lograr el ajuste con la evidencia experimental. Estos parámetros, se detallan en la Tabla 7.3. Las propiedades materiales se detallan en la Tabla 7.4.

Bajo condición de tensión mecánica aplicada nula, se introduce un campo eléctrico de amplitud $0,8\text{MV}/\text{m}$ y se registran los valores de deformación y desplazamiento eléctrico en la dirección del mismo. La Figura 7.5 muestra el lazo de histéresis de desplazamiento eléctrico en función del campo eléctrico. En la misma figura se presentan también los resultados experimentales para su comparación. Se observa que el modelo numérico reproduce ajustadamente los valores experimentales.

En la Figura 7.6 se presentan los resultados numéricos y experimentales correspondientes al lazo de histéresis en forma de mariposa de la deformación en dirección del

Parámetro	Valor
$\alpha(m^4C^{-2})$	0.0011
$\beta(m^4C^{-2})$	0.04
$h_{0e}(10^4F^{-1}m)$	750
$h_{0e}(GPa)$	10.9
n_e	1.7
n_e	1.4
$G_c(MV/m)$	0.36
$\varepsilon_{sat}(\%)$	0.1
$P_{sat}(C/m^2)$	0.24

Tabla 7.3: Parámetros del modelo fenomenológico utilizado para simular en comportamiento de la cerámica PLZT.

Propiedad material	Valor
ν	0.31
Módulo de Elasticidad $E(GPa)$	68.0
$\kappa^\sigma(10^{-8}F/m)$	5.63
$d_{33}(10^{-12}mV^{-1})$	1180
$d_{31}(10^{-12}mV^{-1})$	-505
$d_{15}(10^{-12}mV^{-1})$	1350

Tabla 7.4: Propiedades materiales de la cerámica PLZT

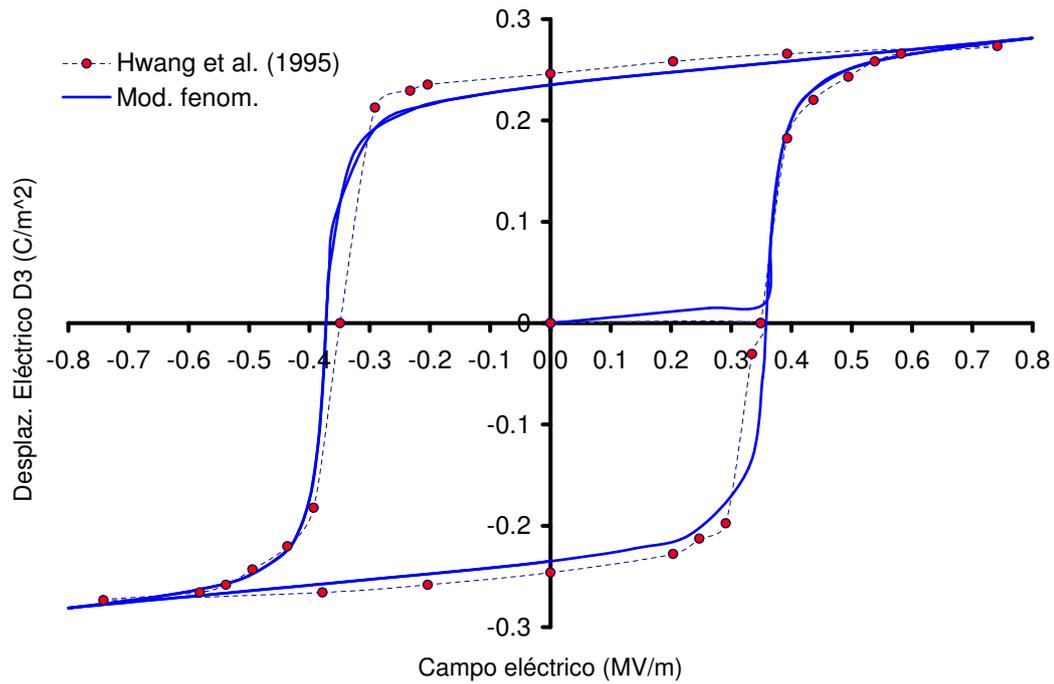


Figura 7.5: Desplazamiento eléctrico D_3 en función del campo eléctrico E_3 .

campo eléctrico aplicado. Como se parte de una cerámica en estado virgen, la respuesta es nula hasta que el campo eléctrico alcanza su valor crítico. A partir de allí comienza un fuerte incremento del acoplamiento electromecánico.

Se observa concordancia entre los resultados obtenidos con el modelo numérico implementado y la respuesta observada experimentalmente.

7.1.2. Cerámica ferroeléctrica - Modelo microelectromecánico

7.1.2.1. Introducción

Para poder comparar el modelo fenomenológico utilizado para las fibras con un modelo microelectromecánico, se implementó el modelo de [Huber et al. \(1999a\)](#) como subrutina de usuario en el programa de elementos finitos ABAQUS ([SIMULIA, 2005](#)). En la implementación numérica del modelo microelectromecánico se usó un algoritmo explícito. A partir del estado inicial dado por iguales concentraciones de cada variante

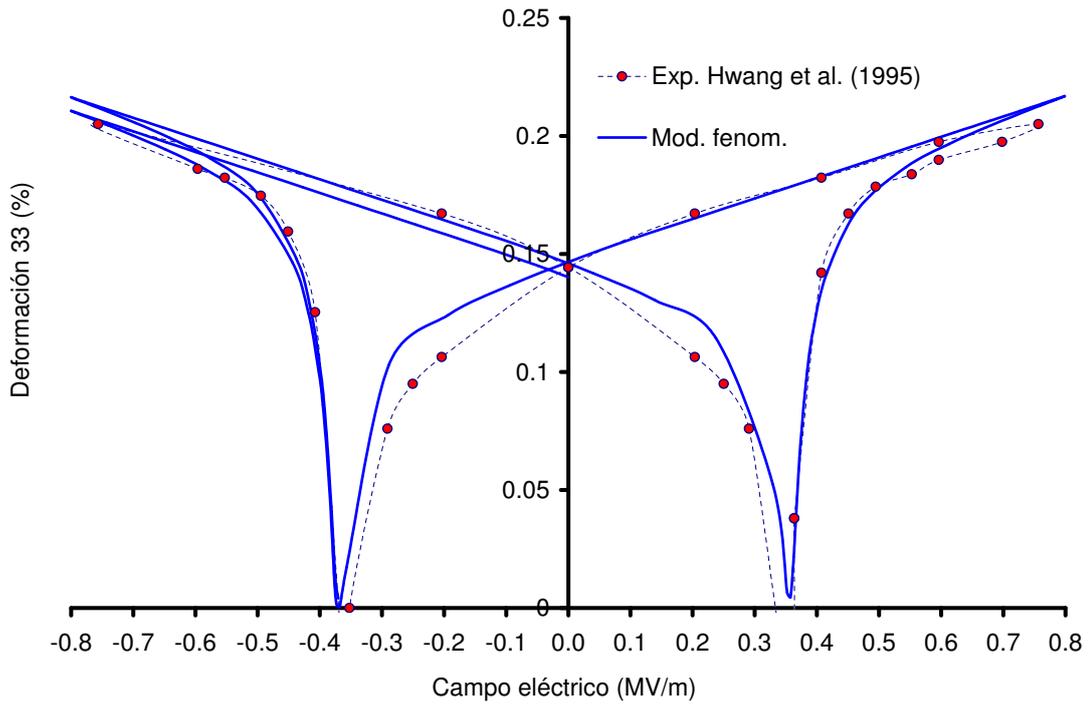


Figura 7.6: Deformación ε_{33} en función del campo eléctrico E_3 .

crystalina en cada grano, orientado con su correspondiente dirección cristalográfica, se calcula la respuesta para cada incremento de carga. En cada paso de carga, se calculan las variables cinemáticas que determinan los cambios en las concentraciones de cada variante, las componentes de deformación y polarización remanentes y las propiedades materiales resultantes. A continuación se presenta un resumen del algoritmo implementado:

Algoritmo:

1. Inicialización de variables:

Asignación de valores a las concentraciones c^I ;

Inicialización de las componentes de deformación y polarización remanentes.

2. Incrementación de E_i y ε_{ij} (Dato).

3. Cálculo de las fuerzas impulsoras G^α (Expresión 4.60) y comparación con G_c^α .

4. Determinación de las fracciones incrementales f^α (Expresión 4.61); de los incrementos en las concentraciones \dot{c}^I (Expresión 4.43); y actualización de las concentraciones c^I .

5. Si las concentraciones no cumplen con la condición $0 \leq c^I \leq 1$, se anulan los sistemas de conmutación asociados.
6. Determinación de las propiedades constitutivas promediadas en función de c^I (Expresiones 4.40, 4.41 y 4.42).
7. Cálculo de los incrementos de las componentes de deformación y polarización remanentes (Expresiones 4.44 y 4.45).
8. Cálculo de las componentes de deformación y polarización totales (Expresiones 4.36 y 4.37).

7.1.2.2. Comportamiento de un policristal

Para simular el comportamiento del policristal sujeto a diferentes condiciones de carga mecánicas y eléctricas, se modela la geometría analizada con elementos finitos, considerando que cada elemento corresponde a un cristal simple con su correspondiente orientación cristalográfica. De esta manera se consideran en forma explícita las interacciones intergranulares y la distribución espacial aleatoria de las orientaciones de los granos que conforman la cerámica. El comportamiento constitutivo de los granos está descrito por el modelo no lineal, autoconsistente, de conmutación para el cristal simple y multidominios de [Huber et al. \(1999a\)](#), descrito en el Capítulo 4.

Para analizar la respuesta del policristal, se considera un cubo de 1 cm de lado construido con el material policristalino estudiado. Dicha geometría se muestra en la Figura 7.7, donde se presentan, además, las condiciones de borde aplicadas y las caras que funcionan como electrodos. El dominio se discretiza con elementos finitos hexaédricos lineales de 8 nodos. Muchos programas comerciales de elementos finitos permiten la incorporación de formulaciones materiales y de elementos, mediante el uso de subrutinas definidas por el usuario. En el caso particular del programa comercial ABAQUS ([SIMULIA, 2005](#)), el prototipo de la subrutina para definir el material y su interfaz, no permiten definir propiedades en función de variables eléctricas. Para superar

este inconveniente, se implementó una subrutina de elemento con la formulación del elemento sólido utilizado, dentro de la cual se incluyó la subrutina material que permite modelar el comportamiento del cristal simple.

La microestructura de cada punto de integración tiene seis variantes cristalinas en correspondencia con la estructura tetragonal orientada según la dirección cristalográfica definida.

Para considerar el efecto del tamaño de la malla se utilizaron 5 niveles de refinamiento. En primer lugar se usó un solo elemento. Luego se usaron mallas de 8, 64, 363 y 1000 elementos.

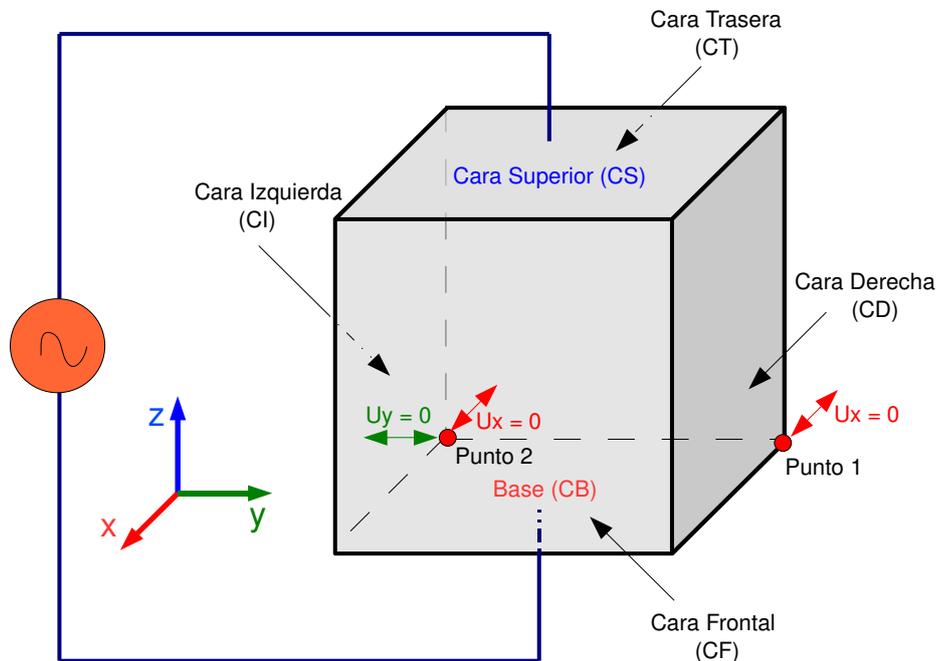


Figura 7.7: Cubo de material ferroeléctrico.

Se presenta a continuación, la simulación de dos procesos típicos. El primero consiste en la polarización a partir del estado virgen. El segundo considera la depolarización producida por una carga de compresión. El estado virgen está caracterizado por valores nulos de polarización y deformaciones remanentes. Además, todos los cristales tienen la misma concentración de cada variante cristalina, es decir $c^I = 1/6$.

Los parámetros del modelo y las propiedades materiales utilizados en las simulaciones se especifican en las Tablas 7.5 y 7.6 respectivamente.

Parámetro	Valor
$B^\alpha (s^{-1})$	30,0
$G_c^{90^\circ} (VC/m^3)$	$0,6E10^5$
$G_c^{180^\circ} (VC/m^3)$	$\sqrt{2}G_c^{90^\circ}$
$P^{spon} (C/m^2)$	0,3
$P^{90^\circ} (C/m^2)$	$\sqrt{2}P^{spon}$
$P^{180^\circ} (C/m^2)$	$2P^{spon}$
$\varepsilon^{spon} (\%)$	0,002
$\gamma^{90^\circ} (\%)$	$3\varepsilon^{spon}$
$\gamma^{180^\circ} (\%)$	0,0

Tabla 7.5: Parámetros del modelo microelectromecánico.

Debido a que se trata de un material cuya celda unitaria es tetragonal en el estado polarizado, la deformación transversal espontánea es $-\varepsilon^{spon}/2 = -0,001$. La relación $G_c^{90^\circ} = G_c^{180^\circ}/\sqrt{2}$ para las fuerzas impulsoras críticas, conduce a valores idénticos de los campos eléctricos críticos para los sistemas de conmutación 90° y 180° (Huber et al., 1999a). Se considera que el comportamiento mecánico y dieléctrico del material es isótropo. Esta suposición también es considerada por otros investigadores. El comportamiento piezoeléctrico presenta simetría transversal respecto del eje de polarización, siendo en este caso, el eje z . Las propiedades materiales se detallan a continuación:

Propiedad material	Valor
$E(GPa)$	60.0
ν	0.3
$d_{33}(10^{-12}mV^{-1})$	450.0
$d_{13}(10^{-12}mV^{-1})$	-210.0
$d_{16}(10^{-12}mV^{-1})$	580.0
$\kappa^\sigma(10^{-8}F/m)$	2.0

Tabla 7.6: Propiedades materiales para el policristal.

7.1.2.3. Proceso de polarización

La simulación del proceso de polarización a partir del estado virgen del material permite captar la respuesta histerética del desplazamiento eléctrico D y las típicas curvas en forma de mariposa de las deformaciones ε en función del campo eléctrico E aplicado.

Las condiciones de contorno utilizadas para la simulación de polarización a partir del estado cinemáticas para forzar que las caras de mantengan planas.

Región	U_x	U_y	U_z	E_{pot}
BASE (CB)	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	0	$V_o \text{seno}(\omega t)$
CARA SUPERIOR (CS)	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	0
CARA IZQUIERDA (CI)	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>
CARA TRASERA (CT)	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>
CARA FRONTAL (CF)	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>
CARA DERECHA (CD)	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>
Punto 1	0	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>
Punto 2	0	0	<i>Libre</i>	<i>Libre</i>

Tabla 7.7: Condiciones de borde para simular la polarización inicial.

Las condiciones de borde eléctricas detalladas en la Tabla 7.7 generan un campo eléctrico en dirección del eje z y permiten simular el proceso de polarización conducido por este último. Para este caso, se registra la carga eléctrica acumulada en los nodos correspondientes a los electrodos, es decir los de la base (CB) y cara superior (CS). El desplazamiento eléctrico macroscópico se calcula de la siguiente manera:

$$D_i = \frac{\sum Q_m}{A_i} \quad (7.1)$$

Donde D_i es el desplazamiento eléctrico en dirección i , Q_m es la carga eléctrica registrada en el nodo m y A_i es el area de la cara cuya normal es paralela al eje i .

El campo eléctrico aplicado se modula con una senoide de frecuencia circular muy baja, por lo tanto, el proceso se puede considerar *rate-independent*.

La Figura 7.8 muestra las gráficas del desplazamiento eléctrico D para los distintos niveles de refinamiento de malla. La figura muestra también las mallas utilizadas. Los valores obtenidos indican que el valor de polarización remanente al quitar el campo eléctrico es de $0,2C/m^2$.

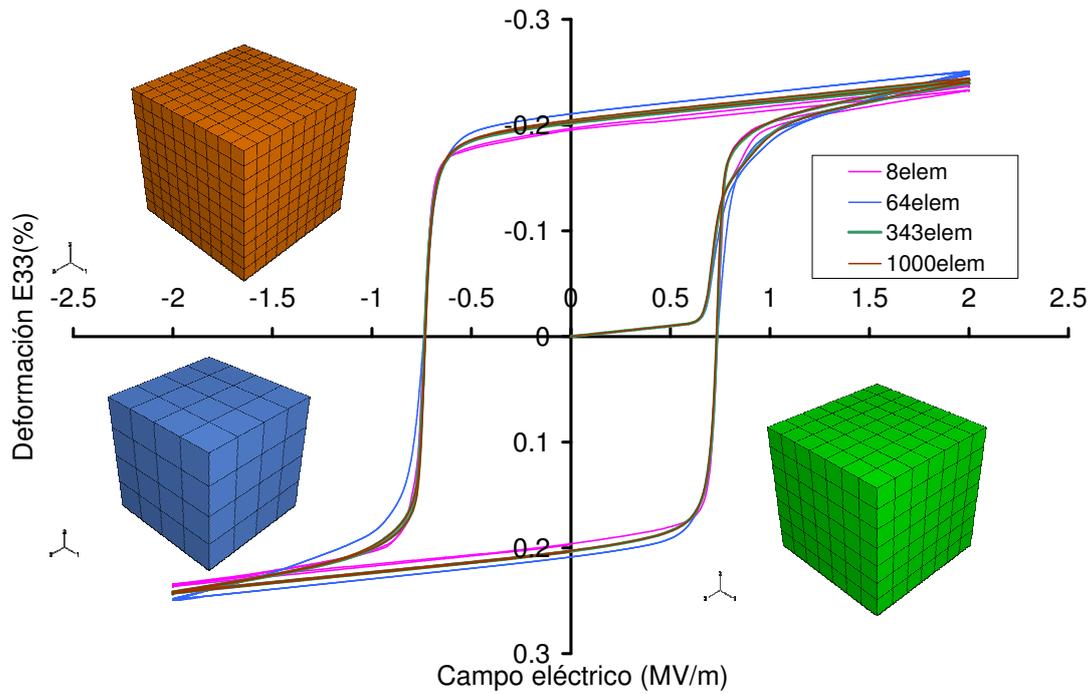


Figura 7.8: Ciclos de histéresis dieléctrica. Resultados obtenidos con el modelo micromecánico para diferentes niveles de refinamiento de malla.

Por otra parte, se calculan las deformaciones macroscópicas con las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{11} = \frac{(U_x^{CF} - U_x^{CT})}{L_o} \quad (7.2a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{(U_y^{CD} - U_y^{CI})}{L_o} \quad (7.2b)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{(U_z^{CB} - U_z^{CS})}{L_o} \quad (7.2c)$$

Donde U_x^{CF} es el desplazamiento según la dirección x de la cara frontal, U_x^{CT} el correspondiente a la cara trasera y L_o es la dimensión del cubo. De igual manera, U_y^{CD} y U_y^{CI} , son los desplazamientos según y de las caras derecha e izquierda, mientras que U_z^{CB} y U_z^{CS} los correspondientes a la dirección z de la base y cara superior. Los resultados

obtenidos se presentan en la Figura 7.9, donde a modo de comparación, se muestran además, resultados obtenidos por Pathak y McMeeking (2008). Los resultados guardan una marcada coincidencia.

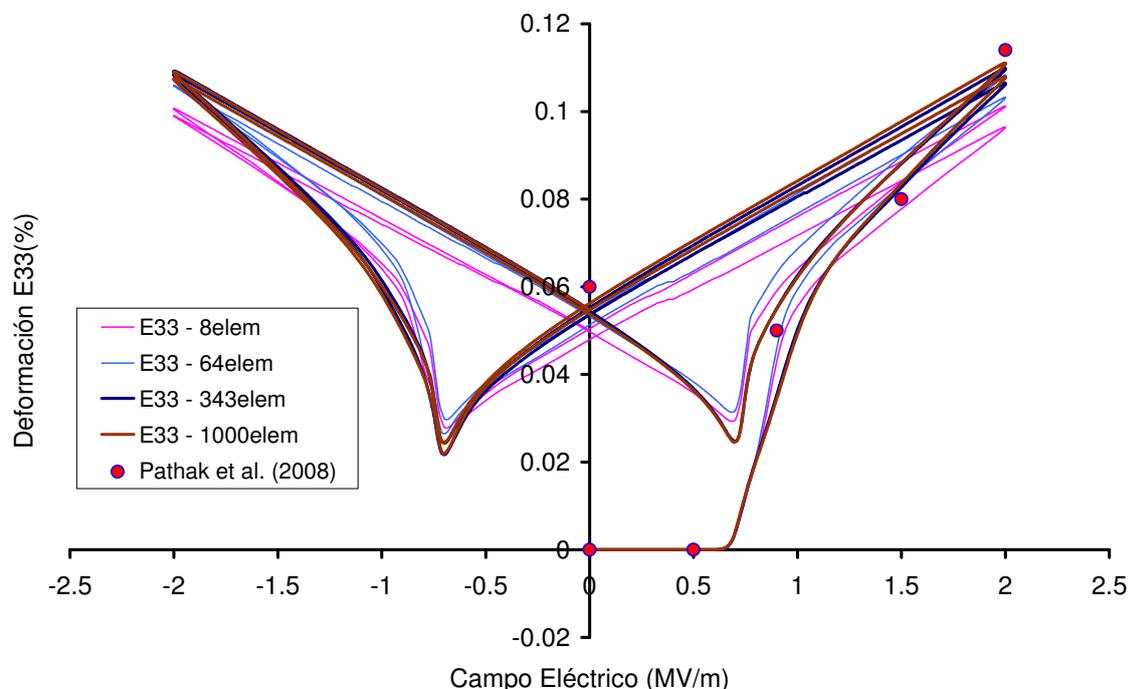


Figura 7.9: Ciclos de histéresis de deformaciones en dirección del campo eléctrico aplicado. Resultados obtenidos con el modelo micromecánico para diferentes niveles de refinamiento de malla.

Debido a que al comienzo de la simulación, cada cristal tiene la misma fracción de volumen de cada variante cristalina correspondiente a los seis tipos de dominios, el acoplamiento neto resultante, obtenido al principio, es nulo como muestra la Figura 7.9. Paralelamente, como se observa en la Figura 7.8, la respuesta dieléctrica es lineal. Cuando el campo eléctrico alcanza valores de $E = 0,6 MV/m$, comienzan a registrarse conmutaciones en el modelo. Este valor de campo eléctrico se denomina *campo eléctrico coercitivo*. A partir de este punto, se registran incrementos en las deformaciones y la respuesta dieléctrica es tal que se registra un gran incremento en el desplazamiento eléctrico como consecuencia de la polarización remanente. La deformación mecánica tiene, por una parte, la contribución del efecto piezoelectrico y, por otra parte, la correspondiente a las deformaciones remanentes. Al avanzar el proceso de aplicación del campo eléctrico, algunas variantes cristalinas alcanzan valores muy altos de concentración mientras que

otras casi desaparecen, esto es lo que se denomina saturación. En estas circunstancias, la pendiente de la curva de histéresis del desplazamiento eléctrico, Figura 7.8, disminuye considerablemente pero no así la correspondiente a las deformaciones, donde la pendiente se mantiene prácticamente constante. El campo eléctrico alcanza un máximo de $2,0MV/m$ y, a partir de ese punto, comienza a descender. Entre este valor y hasta anularse nuevamente, la respuesta es prácticamente lineal. Para un cierto valor negativo del campo eléctrico, comienzan nuevos procesos de conmutación, pero esta vez a valores inferiores del campo eléctrico reverso. Las nuevas conmutaciones provocan la desaparición de la polarización media y, luego, un aumento gradual en la dirección opuesta, hasta un nuevo estado de saturación. Cuando se alcanza el mínimo valor del campo eléctrico y se comienza a aumentar nuevamente, se producen fenómenos similares a los registrados en la etapa inicial, la primer parte de la descarga es lineal y al anularse el campo eléctrico se registran valores remanentes de deformación y desplazamiento eléctrico. Sin embargo, en esta etapa, el sentido del efecto piezoeléctrico es opuesto debido a la inversión en la polarización y reorientación de la tetragonalidad de los cristales.

Finalmente, el modelo micromecánico se ajusta para reproducir los resultados experimentales obtenidos por [Hwang et al. \(1995\)](#). Se utilizó en este caso $G_c^{90^\circ} = 0,35(VC/m^3)$.

Las Figuras 7.10 y 7.11 muestran una comparación entre los resultados obtenidos con los dos tipo de modelos constitutivos implementados y los resultados experimentales. Como se observa en las figuras, ajustando el modelo, se logran reproducir numéricamente los resultados experimentales. Los valores de los campos coercitivos, los niveles de polarización y deformaciones remanentes, las pendientes en condiciones de saturación, como así también valores de saturación, son reflejados ajustadamente. Se observan mayores diferencias en las zonas de descarga, donde los cambios en las pendientes difieren senciblemente, y en los extremos inferiores de las curvas de mariposa, donde se observa que el modelo microelectromecánico no alcanza valores nulos de deformación mientras que el modelo fenomenológico capta este aspecto. [Pathak y McMeeking \(2008\)](#) explican que este hecho puede responder a diferencias en los umbrales de conmutación de 180° y

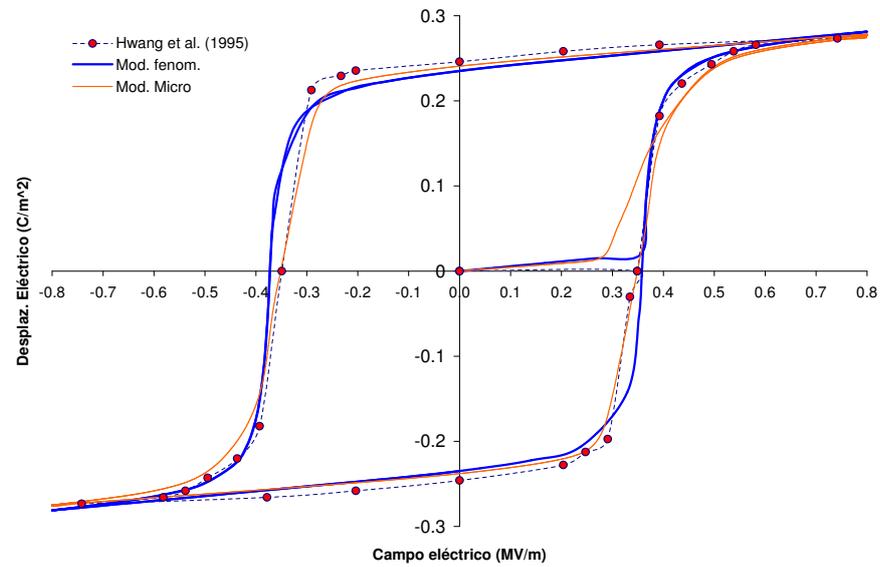
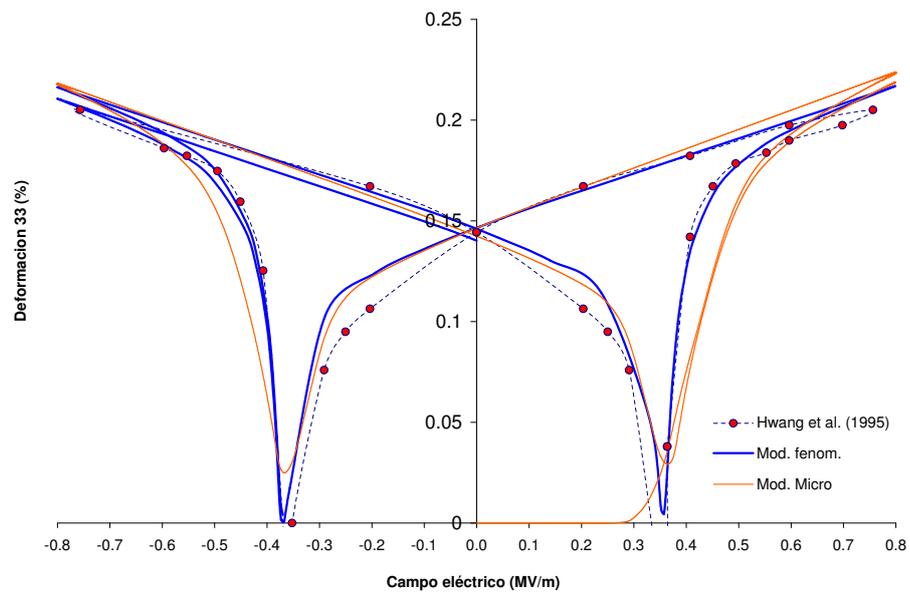


Figura 7.10: Desplazamiento eléctrico. Comparación de resultados.

Figura 7.11: Deformaciones ϵ_{33} . Comparación de resultados.

90°, ya que para alcanzar valores nulos en la parte inferior de las curvas de mariposa, es necesario favorecer las conmutaciones de tipo 90° frente a las de tipo 180°.

7.1.3. Compuesto simple - Modelo de homogeneización propuesto

En este punto se presenta la aplicación del modelo de homogeneización electromecánico no lineal propuesto, al análisis de una lámina de compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales. La Figura 5.1 muestra una representación esquemática de la lámina analizada.

En la Tabla 7.8 se detallan las propiedades de los materiales que constituyen el compuesto y los parámetros que definen la geometría de la lámina.

Con el objetivo de realizar comparaciones y evaluar el modelo de compuestos piezoeléctricos propuesto en esta tesis, se analiza el mismo compuesto con un enfoque mesoelectromecánico utilizando el método de elementos finitos. Para ello, se discretiza una porción representativa del compuesto con elementos sólidos tridimensionales combinados con el modelo material microelectromecánico (MEM) no lineal descrito en la Sección 4.2.2 e implementados en ABAQUS.

Se analiza la deformación longitudinal del compuesto frente a un potencial eléctrico aplicado a los electrodos.

Para el análisis con el modelo mesoelectromecánico, se discretiza la geometría considerada con la malla de elementos finitos que se presenta en la Figura 7.12. En la misma figura se presenta esquemáticamente la zona del laminado discretizada y la definición de las regiones sobre las que se aplican las condiciones de borde que se detallan en la Tabla 7.9.

En la Figura 7.13 se presentan los resultados correspondientes a las deformaciones longitudinales en función del potencial eléctrico aplicado a los electrodos, obtenidos con ambos tipos de modelos.

La Figura 7.13 muestra que las respuestas obtenidas con ambos enfoques son cualitativamente similares. El modelo para compuestos piezoeléctricos propuesto capta

Propiedad	Valor
Fibra	
Módulo de Young $E_f(GPa)$	48.8
Módulo de Poisson ν_f	0.3
Permitividad dieléctrica $\kappa_f^\sigma(10^{-8}F/m)$	4.2
Acoplamiento Piezoeléctrico	
$d_{33}(10^{-12}mV^{-1})$	450.2
$d_{31}(10^{-12}mV^{-1})$	-225.1
$d_{15}(10^{-12}mV^{-1})$	563.3
Matriz	
Módulo de Young $E_m(GPa)$	3.0
Módulo de Poisson ν_m	0.35
Permitividad dieléctrica $\kappa_m^\sigma(10^{-9}F/m)$	8.1
Construcción del compuesto	
Proporción de fibra	80 %
Separación de electrodos (mm)	1,8

Tabla 7.8: Propiedades materiales y parámetros geométricos para el compuesto piezoeléctrico analizado.

los principales aspectos del comportamiento macroscópico observado en este tipo de materiales. Los valores de potencial eléctrico de inicio de conmutación, obtenidos con el modelo de homogeneización propuesto, son mayores que los calculados con el modelo detallado (MEM). Esto se puede justificar teniendo en cuenta que el modelo detallado de elementos finitos considera en forma explícita las interacciones entre las componentes y las concentraciones locales de campos electromecánicos en las zonas cercanas a los electrodos. Dichas concentraciones son lo suficientemente elevadas como para producir conmutaciones localizadas que resultan en una respuesta macroscópica como se muestra en color rojo en la Figuras 7.13.

El modelo para compuestos piezoeléctricos, en cambio, considera valores uniformes de los campos electroemcánicos y, por lo tanto, no tiene en cuenta las concentraciones

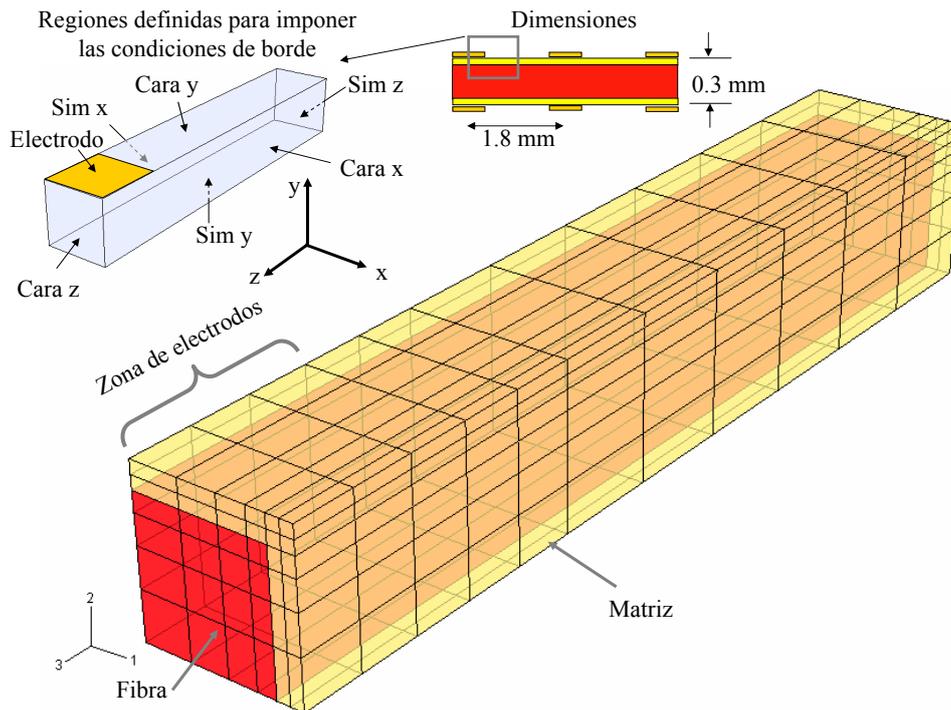


Figura 7.12: Sector de laminado piezoeléctrico analizado con elementos finitos sólidos y modelo constitutivo micromecánico para las fibras. Geometría analizada y malla de elementos finitos.

locales, razón por la cual presenta una especie de retardo en el punto de comienzo de la conmutación.

Se observa también que el inicio de la conmutación aparece de manera más abrupta en los resultados del modelo para compuestos piezoeléctricos propuesto, que en el modelo detallado, en el que se muestra como un proceso más suave y caracterizado por una transición curva en la respuesta.

En general, las mayores diferencias en los resultados de ambos modelos se manifiestan

Región	U_x	U_y	U_z	Potencial Eléctrico
Plano de simetría y-z (Sim x)	0	Libre	Libre	0
Plano de simetría x-z (Sim y)	Libre	0	Libre	0
Plano de simetría x-y (Sim z)	Libre	Libre	0	0
Electrodo	-	-	-	$V_o \text{seno}(\omega t)$

Tabla 7.9: Condiciones de borde para analizar el octante de celda unitaria con el modelo detallado de elementos finitos.

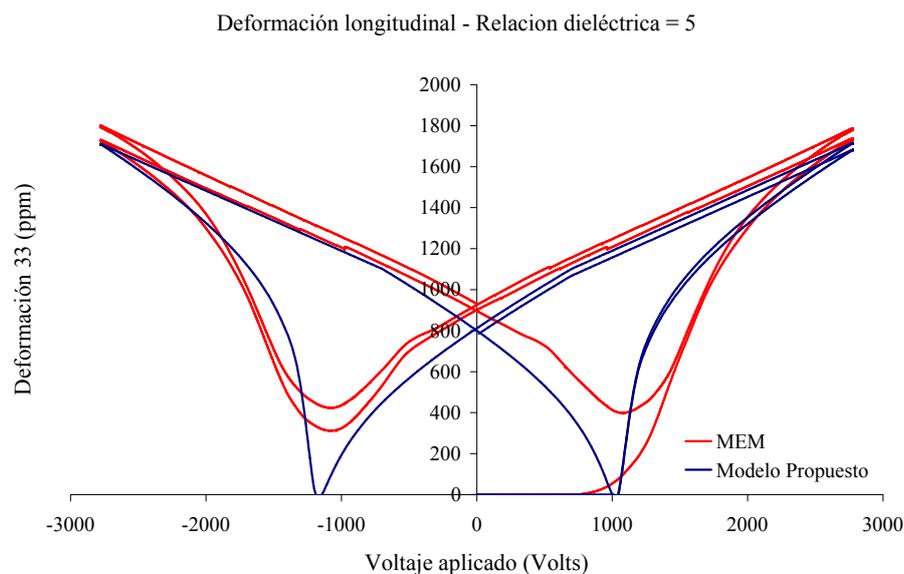


Figura 7.13: Deformación longitudinal del compuesto piezoeléctrico obtenida con el modelo de homogeneización propuesto y el análisis detallado con elementos sólidos de la celda unitaria. Comparación de resultados.

en los puntos en que se registran elevados niveles de conmutación, lo cual mantiene consistencia con lo explicado anteriormente. Sin embargo, con ambos enfoques se obtienen valores de acoplamiento electromecánico muy similares.

Por lo tanto, para analizar la respuesta de una estructura dotada de este tipo de laminados piezoeléctricos cuando no se requiera determinar concentraciones locales, el modelo propuesto puede ser utilizado para modelar el comportamiento material no lineal a nivel macroscópico.

Las consideraciones anteriores permiten afirmar que se puede usar el modelo de compuestos piezoeléctricos propuesto en esta tesis para analizar la respuesta macroscópica no lineal de estructuras que incluyen este tipo de laminados.

El modelo no es adecuado para reproducir concentraciones locales ya que, por su naturaleza misma, ha sido concebido para representar un material homogéneo equivalente al laminado piezoeléctrico, donde todos los efectos locales aparecen promediados.

7.2. Cajón cerrado analizado experimentalmente por duPlessis (1998)

Se presenta a continuación la comparación de resultados numéricos con experimentales de un cajón cerrado, correspondiente al modelo de una pala de helicóptero, analizado experimentalmente por [du Plessis \(1996\)](#). El citado autor usó actuadores piezoeléctricos cuyas propiedades electromecánicas se detallan en la [Tabla 7.10](#).

Propiedad material	MFC (Park y Kim, 2005)	AFC (du Plessis, 1996)	Vidrio/Epoxy	Aluminio
$E_1(GPa)$	31.32	30.3	14.8	71.0
$E_2(GPa)$	17.05	15.9	13.6	71.0
$G_{12}(GPa)$	5.12	5.52	1.9	26.7
ν_{12}	0.303	0.31	0.19	0.33
$d_{11}(x10^{-12}mV^{-1})$	386.6	381	–	–
$d_{12}(x10^{-12}mV^{-1})$	-175.5	160	–	–
$p(mm)$	0.53	1.2	–	–
Densidad (kgm^{-3})	5115.9	4500	1800	2713

Tabla 7.10: Propiedades de los materiales utilizados para el cajón cerrado ensayado experimentalmente por [du Plessis \(1996\)](#).

7.2.1. Descripción del sistema analizado - Modelo numérico

La [Figura 7.14](#) muestra una foto de la estructura analizada. La pala posee seis actuadores, tres en el extradós y tres en el intradós. Están conectados de manera tal que todos contribuyen a la torsión de la pala, es decir, que están en fase.

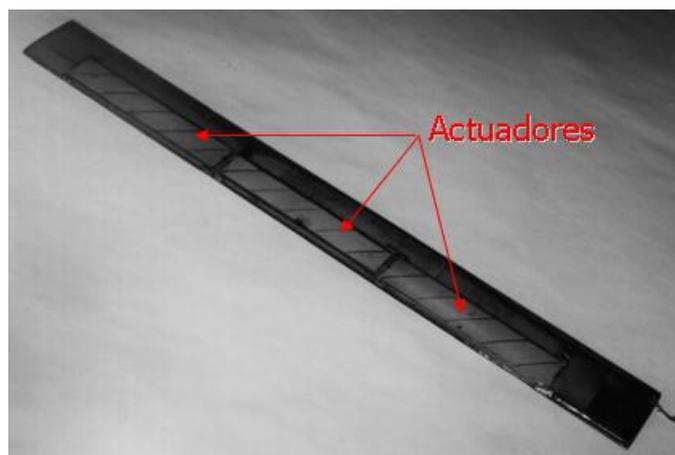


Figura 7.14: Fotografía del cajón ensayado experimentalmente por [du Plessis \(1996\)](#).

En esta sección se presenta el análisis estático lineal y la comparación de los resultados numéricos con los experimentales de [du Plessis \(1996\)](#). En la Sección 7.2.3 se considera el diseño de un sistema de control a partir del modelo numérico y la posterior evaluación de la respuesta ante excitaciones externas.

La Figura 7.15 muestra la disposición general del cajón monocelda cerrado. En la figura se puede observar la disposición y orientación $\pm 45^\circ$ de los actuadores piezoeléctricos con respecto al eje longitudinal (z) de la pala. La Figura 7.16 muestra esquemáticamente el detalle del laminado en la zona activa y pasiva de la pala, como así también sus respectivos espesores.

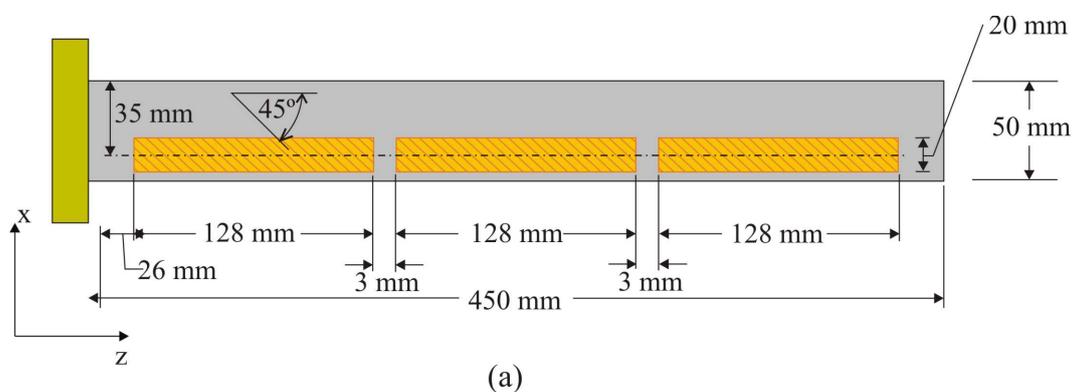


Figura 7.15: Esquema, dimensiones y disposición de actuadores en la pala analizada por [du Plessis \(1996\)](#).

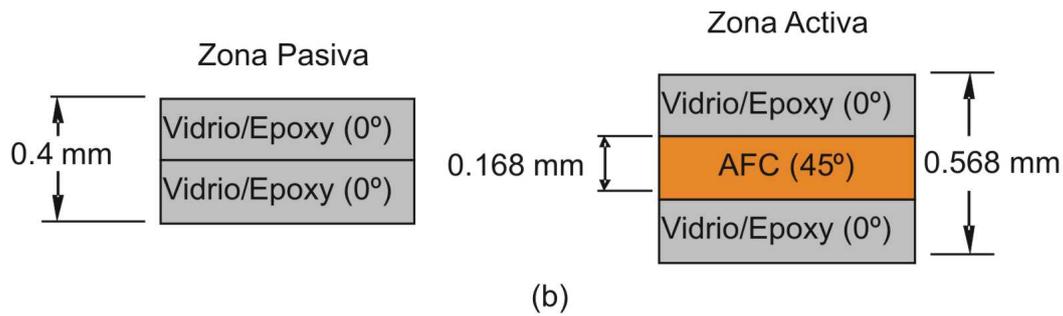


Figura 7.16: Secciones transversales del laminado correspondientes a la zona activa y pasiva.

La Figura 7.17 muestra la malla de elementos finitos utilizada en el análisis numérico con el elemento finito propuesto en esta tesis.

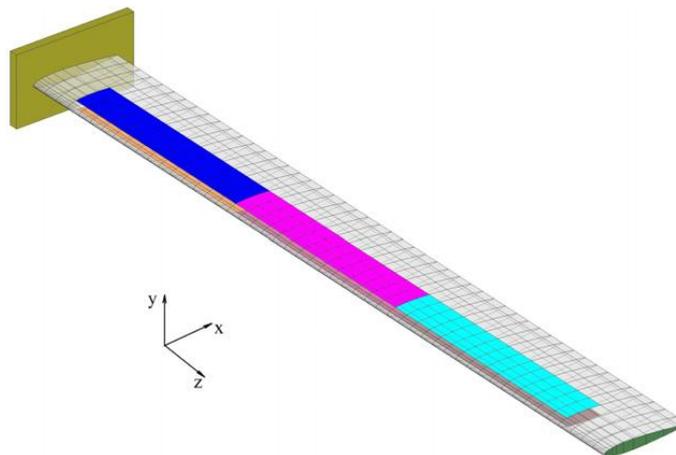


Figura 7.17: Malla de elementos finitos.

7.2.2. Análisis estático

La respuesta estática bajo hipótesis de comportamiento lineal obtenida con el modelo propuesto en esta tesis, se muestra en la Figura 7.18, donde se incluyen, además, los resultados experimentales obtenidos por du Plessis (1996). Los resultados experimentales tienen un error promedio del 12 % aproximadamente. Como se observa en la Figura 7.18, el orden de las diferencias entre los resultados numéricos y experimentales está dentro de esta banda de error.

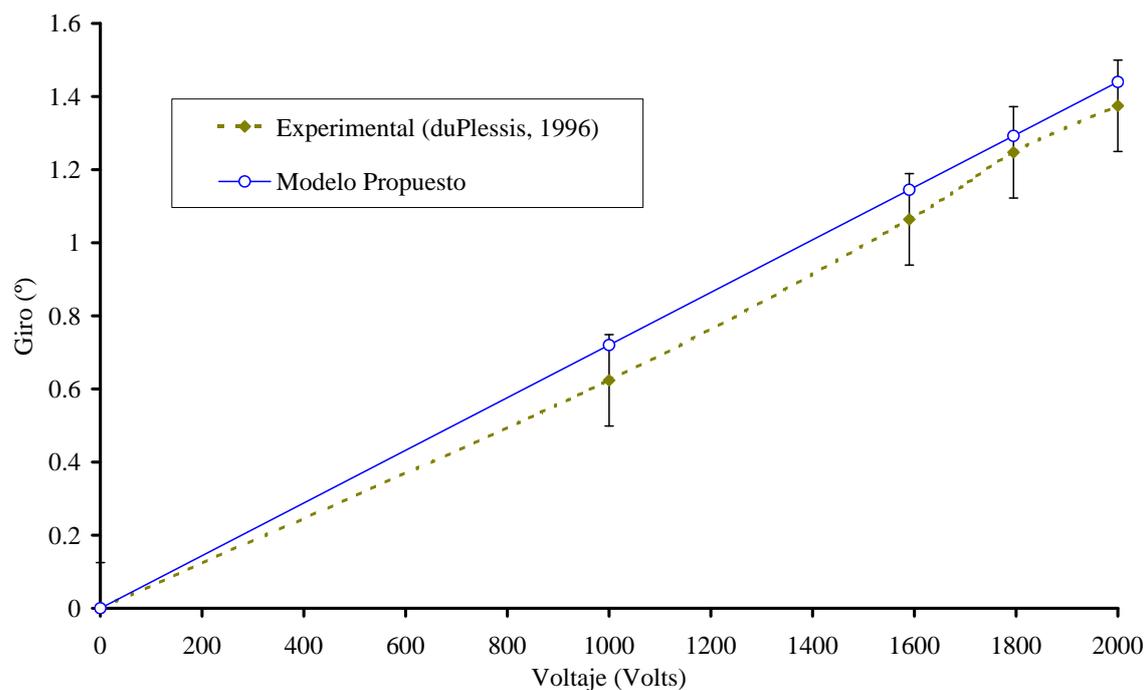


Figura 7.18: Comparación entre el giro estático obtenido con el modelo propuesto y el medido experimentalmente (du Plessis, 1996).

Es posible que las diferencias entre los giros determinados experimentalmente y los determinados en forma numérica, pueda ser causada por diferencias en los parámetros del modelo o aspectos no modelados.

7.2.3. Análisis dinámico - Control de vibraciones

El ejemplo que se presenta a continuación consiste en el control de vibraciones torsionales de una estructura tipo cajón cerrado. La geometría de la misma corresponde a la analizada experimentalmente por du Plessis (1996) y se presentó en la Sección 7.2.

El elemento finito desarrollado se usa para obtener las ecuaciones de movimiento usadas, a su vez, como punto de partida para el control estructural. Para esto, siguiendo los desarrollos presentados en Guennam (2005), se reescriben las ecuaciones de elementos finitos en la forma de Espacio de Estados y se emplea control LQR para diseñar el controlador.

7.2.3.1. Respuesta en frecuencia

Como parte de la evaluación de la respuesta dinámica estacionaria de la estructura considerada, se realiza el análisis de la respuesta en frecuencia. La excitación aplicada es un momento torsor armónico genérico aplicado en el extremo libre, $M = M_o e^{i\omega t}$, con $M_o = 0,125(Nm)$. La Figura 7.19 muestra la respuesta en frecuencia del cajón cerrado ante la aplicación de una excitación armónica genérica.

En la Figura 7.19 se presenta la respuesta en frecuencia correspondiente a cuatro valores del parámetro de ganancia γ_q , entre 0 y 10^7 . En esa gráfica se manifiesta claramente el efecto del controlador. Se puede observar que el controlador es capaz de introducir una atenuación de hasta $25(dB)$ en condiciones de resonancia a la frecuencia correspondiente al primer modo torsional. Esto representa un nivel de atenuación de $0,01(dB/V)$. Debido a que se trata de un análisis lineal, esto puede ser considerado como una característica del sistema. En la Figura 7.19 se presentan, además, las formas modales de los cuatro primeros modos en correspondencia con los picos de amplitudes.

7.2.3.2. Respuesta transitoria

Siguiendo con la evaluación de la respuesta dinámica, se presenta el análisis de la respuesta transitoria. La pala se excita con una cupla de valor $0,25(Nm)$, aplicada en el extremo libre y modulada en el tiempo por una función escalón de 0.05 segundos de duración. La Figura 7.20 muestra la comparación de las respuestas temporales para diferentes valores del parámetro de ganancia γ_q . Durante la respuesta transitoria a lazo cerrado, el controlador introduce un amortiguamiento creciente en correspondencia con el aumento de γ_q .

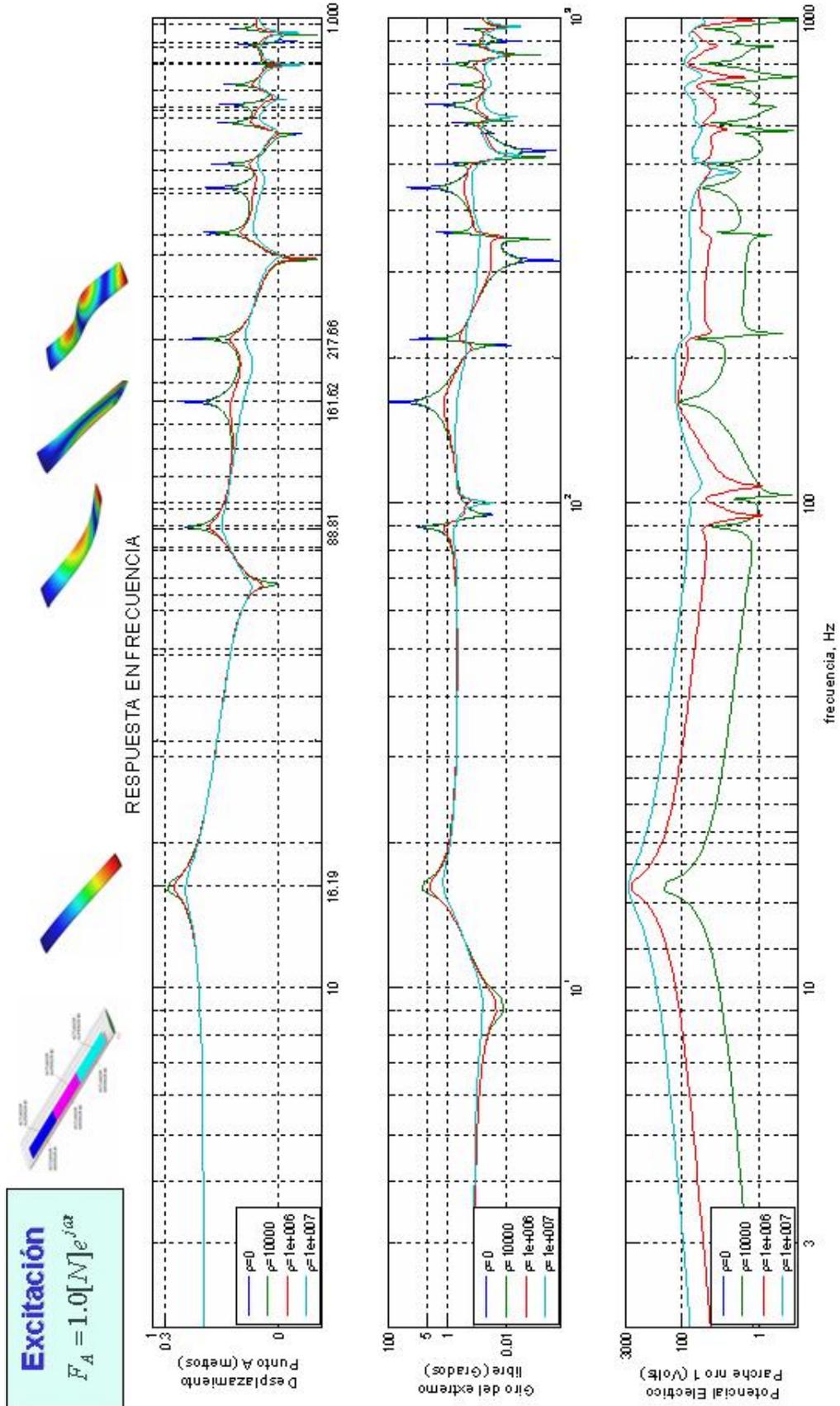


Figura 7.19: Cajón cerrado con actuadores - Respuesta en frecuencia.

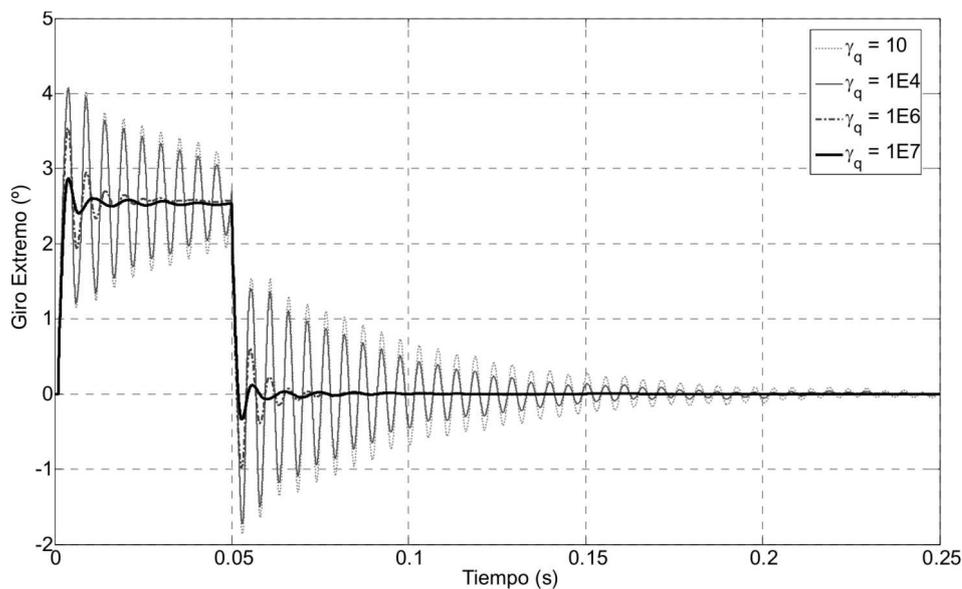


Figura 7.20: Cajón cerrado con actuadores - Respuesta transitoria.

Para $\gamma_q = 10^7$ las vibraciones prácticamente desaparecen en 0.015 segundos y el factor de amortiguamiento introducido por el controlador es 0.2, aproximadamente. La Figura 7.21 muestra el factor de amortiguamiento en función del factor de ganancia γ_q correspondiente al primer modo torsional.

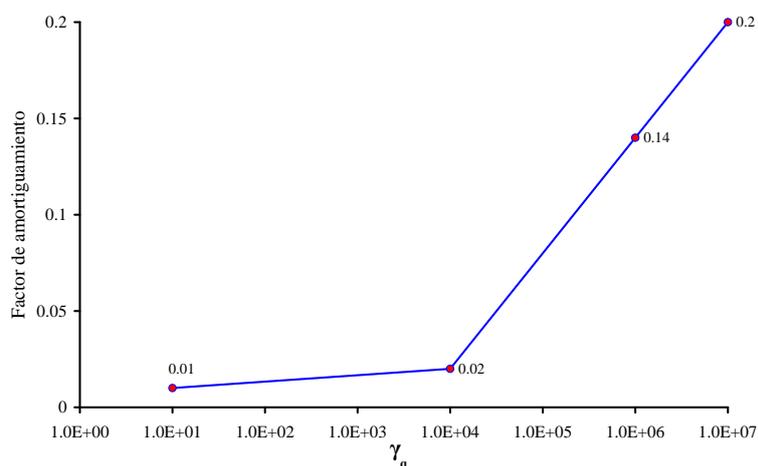


Figura 7.21: Factor de amortiguamiento.

La Figura 7.22 muestra los voltajes de control aplicados a los actuadores cercanos a la raíz y a la punta del cajón. Como es de esperar, los máximos voltajes aparecen en la raíz.

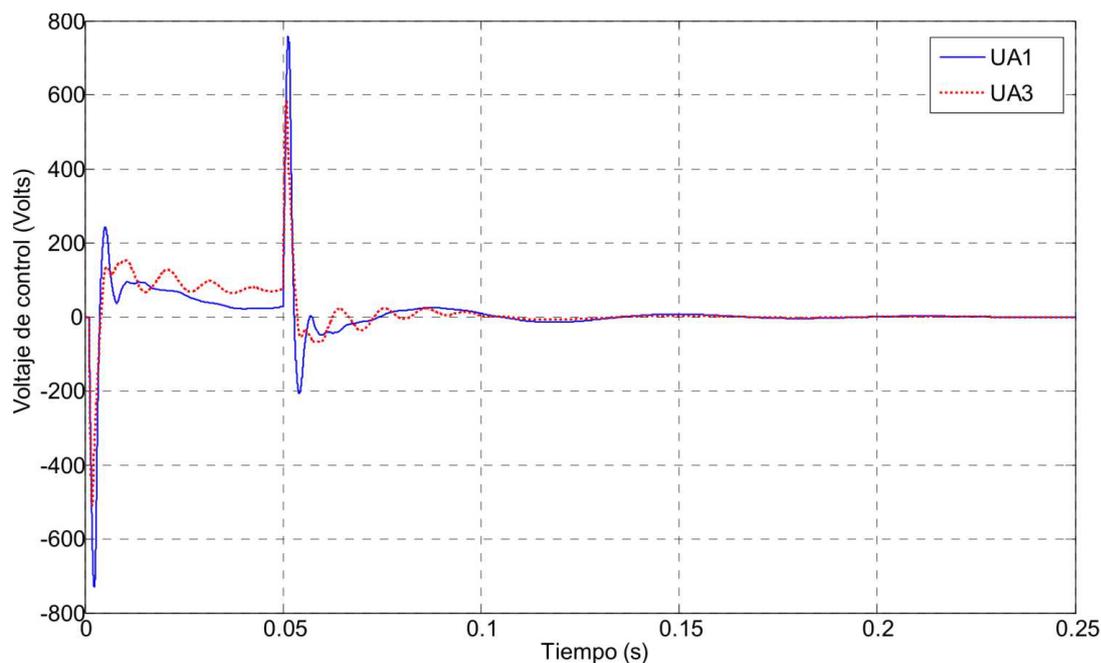


Figura 7.22: Voltajes de control para el actuador de la raíz y de la punta. $\gamma_q = 1,0E^7$

7.3. Cajón cerrado analizado por Guennam y Luccioni (2006)

7.3.1. Descripción del sistema analizado - Modelo numérico

El elemento formulado se usa en este caso para modelar el cajón cerrado de paredes delgadas, analizado en [Guennam y Luccioni \(2006\)](#) usando ABAQUS ([SIMULIA, 2005](#)). En el citado trabajo, se utilizaron elementos de cáscara para la parte pasiva de la estructura y elementos sólidos piezoeléctricos para los actuadores. La geometría y disposición de los parches se muestra en la [Figura 7.23](#). Los resultados obtenidos utilizando el elemento de cáscara piezoeléctrica propuesto en esta tesis, se comparan con los presentados en [Guennam y Luccioni \(2006\)](#).

El modelo corresponde a una viga tipo cajón cerrado de paredes delgadas monocelda con parches piezoeléctricos de compuesto polarizado con electrodos interdigitales, adheridos al recubrimiento del cajón. Los parches están adheridos de tal manera que las fibras de los mismos se orientan a $+/- 45^\circ$ respecto de eje longitudinal de la viga. Las propiedades materiales corresponden a las utilizadas en [Guennam y Luccioni \(2006\)](#)

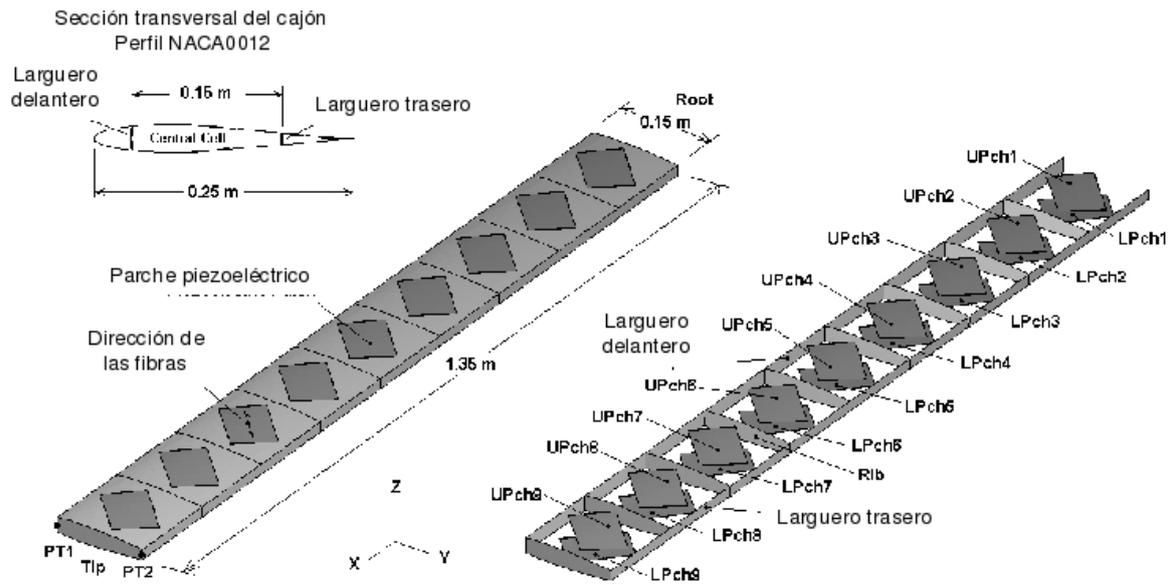


Figura 7.23: Geometría del cajón cerrado analizado en [Guennam y Luccioni \(2006\)](#).

y se detallan en la Tabla [7.10](#).

7.3.2. Análisis estático

En esta instancia se presenta un análisis estático correspondiente al giro inducido por la aplicación de un potencial eléctrico de 500 V a cada actuador piezoeléctrico. En [Guennam y Luccioni \(2006\)](#) el ángulo de giro obtenido es de $0,067^\circ$ mientras que con el modelo realizado utilizando el elemento de cáscara propuesto en esta tesis, el giro obtenido es $0,069^\circ$, lo cual representa una diferencia del 2,5 % con el 30 % menos grados de libertad en el modelo con elementos de cáscara que en el modelo con elementos sólidos.

7.3.3. Análisis dinámico - Control de vibraciones

En esta sección se presenta la comparación de resultados del análisis dinámico del modelo analizado en [Guennam y Luccioni \(2006\)](#), y el modelo realizado con el elemento finito propuesto en esta tesis. En ambos casos se partió de las correspondientes ecuaciones de equilibrio discretizadas y se siguió el mismo procedimiento para pasar al Espacio de Estados y diseñar el sistema de control.

7.3.3.1. Respuesta transitoria

A modo de comparación, en la Figura 7.24 se presenta la respuesta transitoria en lazo cerrado para ambos casos.

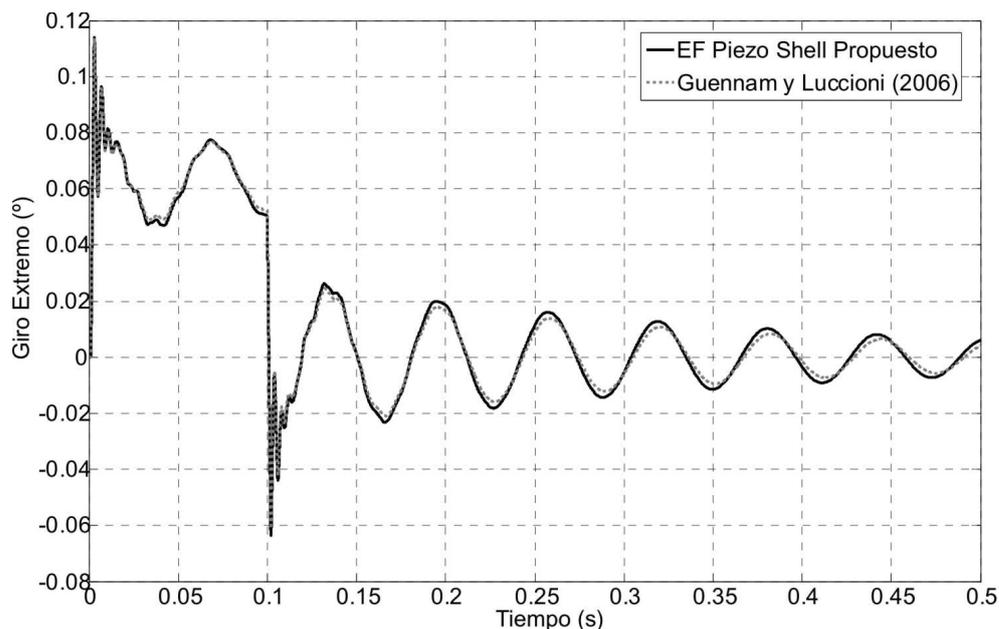


Figura 7.24: Comparación en el giro del extremo libre.

En la Figura 7.24 se observa que los resultados obtenidos con ambos enfoques son prácticamente coincidentes, sin embargo, se observa que las amplitudes obtenidas modelando la zona activa con elementos sólidos es levemente menor que la obtenida con el elemento de cáscara propuesto.

En la Figura 7.25 se muestra la comparación de los voltajes de control aplicados al parche UPch1 (raíz).

Las comparaciones de resultados que se muestran en las Figuras 7.24 y 7.25 reflejan la marcada coincidencia en los resultados obtenidos con ambas herramientas numéricas.

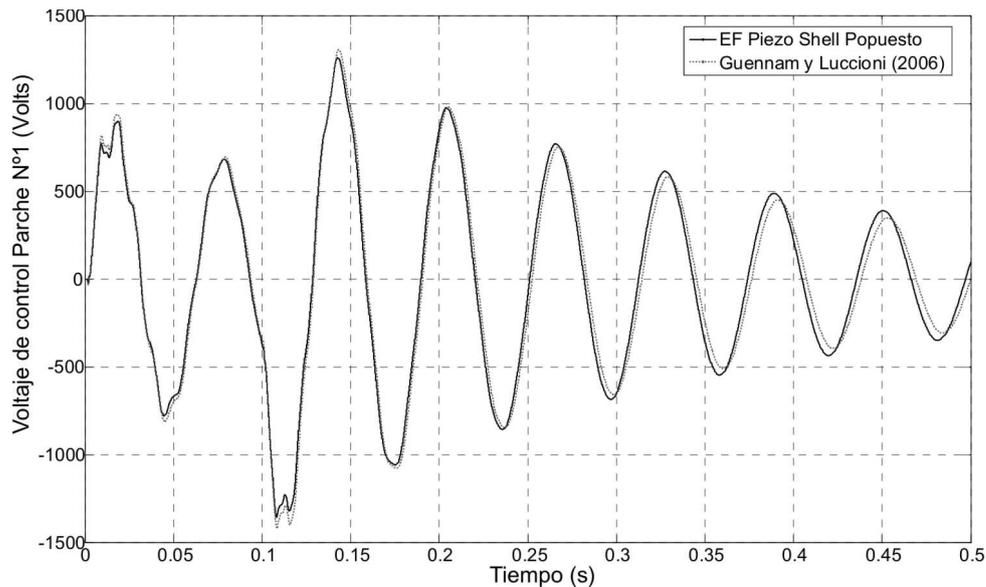


Figura 7.25: Comparación de los voltajes de control.

7.4. Amortiguamiento estructural por disipación en una red eléctrica pasiva

7.4.1. Descripción del sistema analizado - Modelo numérico

Se analiza en este punto, una estructura de tipo cajón cerrado, mono-celda, con rigidizadores longitudinales y costillas. En el recubrimiento se disponen parches piezoeléctricos orientados a $+/- 45^\circ$. La Figura 7.26 detalla la geometría del sistema estudiado, donde se pueden observar los dispositivos de fibras piezoeléctricas adheridos a la piel del cajón. Se disponen los mismos de manera tal de maximizar el aprovechamiento de la energía contenida en las vibraciones torsionales de la estructura.

Cada parche piezoeléctrico independiente posee dos terminales eléctricos que se conectan internamente a los electrodos interdigitales. Un terminal de cada parche se conecta a tierra mientras los restantes a resistencias que finalmente se conectan también a tierra. En los desarrollos de las ecuaciones se considera el caso general de circuito inductivo resistivo (LR), sin embargo, en el siguiente análisis se considera sólo una red pasiva resistiva pura. Los análisis se realizan usando la formulación en el Espacio de Estados incluyendo la red pasiva. El pasaje del sistema al espacio de estados se realiza mediante

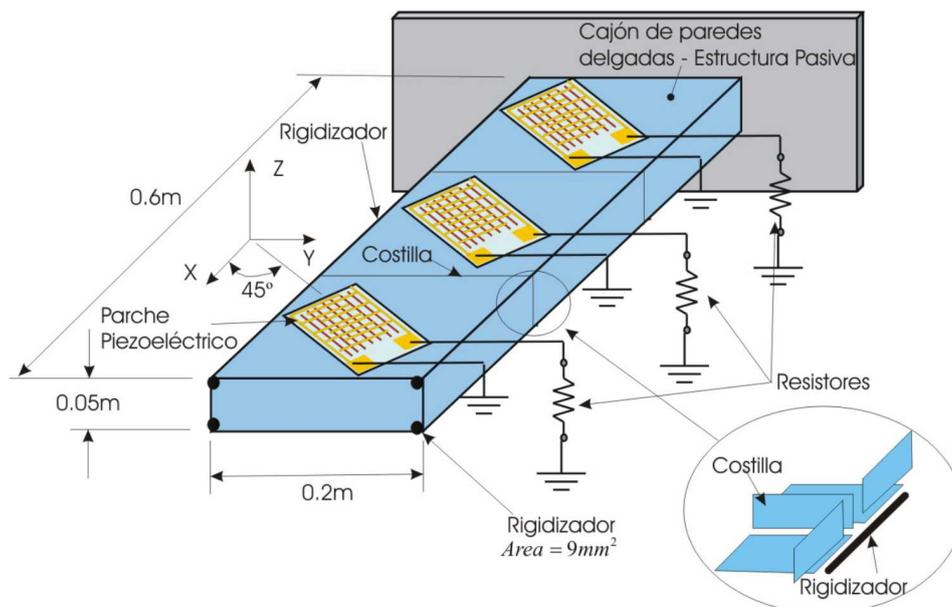


Figura 7.26: Cajón con dispositivos piezoeléctricos conectados a una red eléctrica pasiva.

conocidos procedimientos de partición de matrices, detalles de este procedimiento puede encontrarse en [Guennam y Luccioni \(2007\)](#).

7.4.2. Resultados

Los análisis realizados reflejan la influencia del valor de resistencia eléctrica, sobre la potencia generada en las zonas activas de la estructura. A partir de la evaluación de los parámetros modales se observa la existencia de valores de resistencia para los cuales el amortiguamiento es máximo y además una correspondencia con los valores de potencia disipada.

Los valores de resistencia eléctrica para los cuales el amortiguamiento adopta valores máximos, producen al mismo tiempo una rigidización de la estructura, lo cual se refleja en las Figuras [7.27](#) y [7.28](#) a través del aumento en la frecuencia modal.

La variación de la potencia generada en función de la frecuencia de excitación y resistencia eléctrica conectada a los electrodos puede observarse en la Figura [7.29](#) para excitación flexional y en la Figura [7.30](#) para excitación torsional.

En la Figura [7.31](#) puede apreciarse la relación entre la potencia generada y la amplitud de las oscilaciones para resistencias eléctricas de valor $2000(\Omega)$, mientras que la Figura

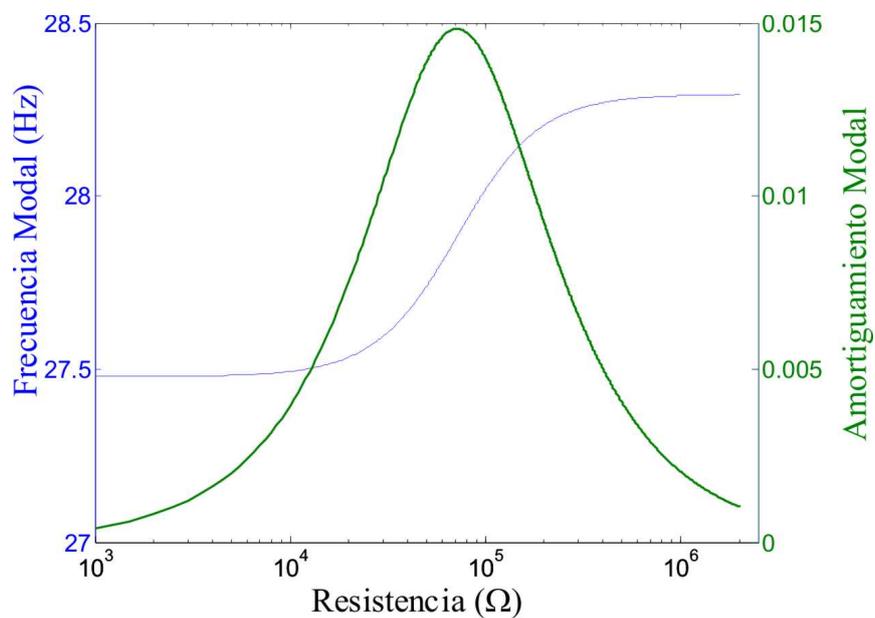


Figura 7.27: Amortiguamiento y frecuencia natural - Primer modo flexional.

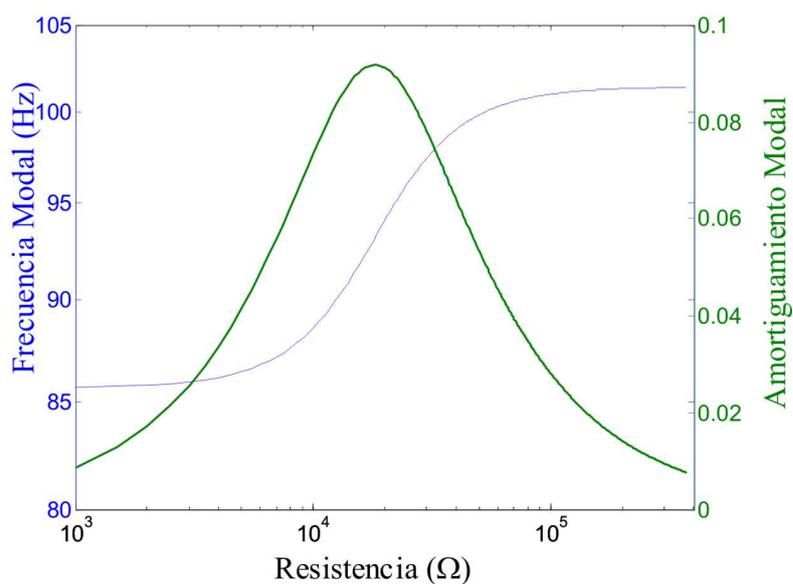


Figura 7.28: Amortiguamiento y frecuencia natural - Primer modo torsional.

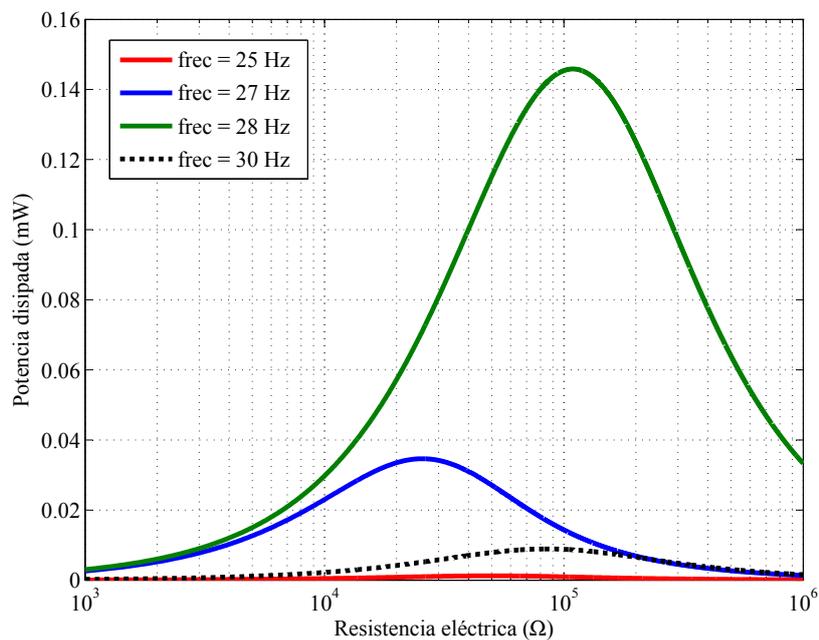


Figura 7.29: Potencia disipada en función de la resistencia eléctrica. Excitación flexional.

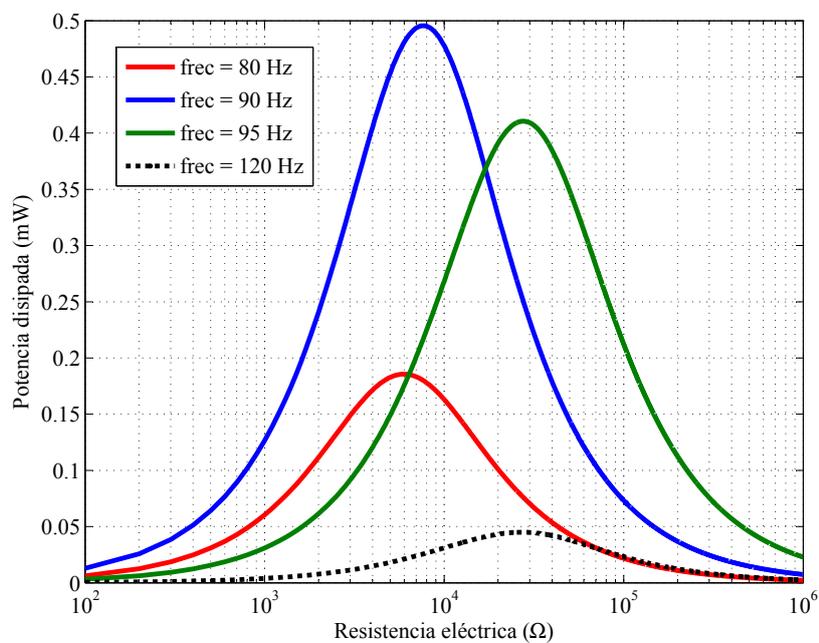


Figura 7.30: Potencia disipada en función de la resistencia eléctrica. Excitación torsional.

7.32 presenta la respuesta para resistencias de $20000(\Omega)$. En ambos casos, la excitación es una cupla aplicada en el extremo en forma de escalón de 0.5 segundos de duración y valor $13,4(Nm)$.

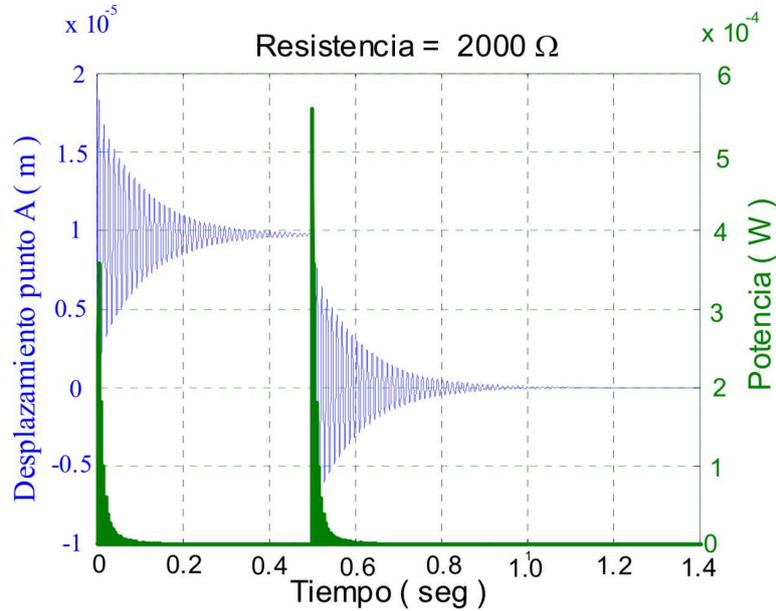


Figura 7.31: Respuesta temporal ante una momento torsor aplicado en el extremo libre modulado por una cupla de 0,5 segundos de duración; $R = 2000(\Omega)$.

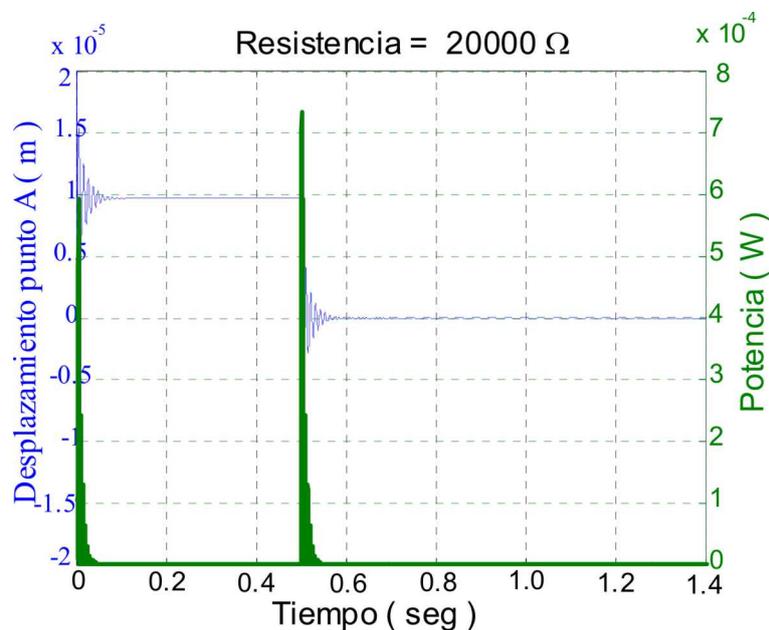


Figura 7.32: Respuesta temporal ante una momento torsor aplicado en el extremo libre modulado por una cupla de 0,5 segundos de duración; $R = 20000(\Omega)$.

Finalmente, la Figura 7.33 muestra la respuesta temporal para diferentes valores de

resistencia eléctrica. En esta figura, también se observa que los valores de amortiguamiento dependen de los valores de resistencia eléctrica. Para este caso particular, se observa que, entre los valores de resistencia considerados, el máximo amortiguamiento obtenido se produce con $10000(\Omega)$.

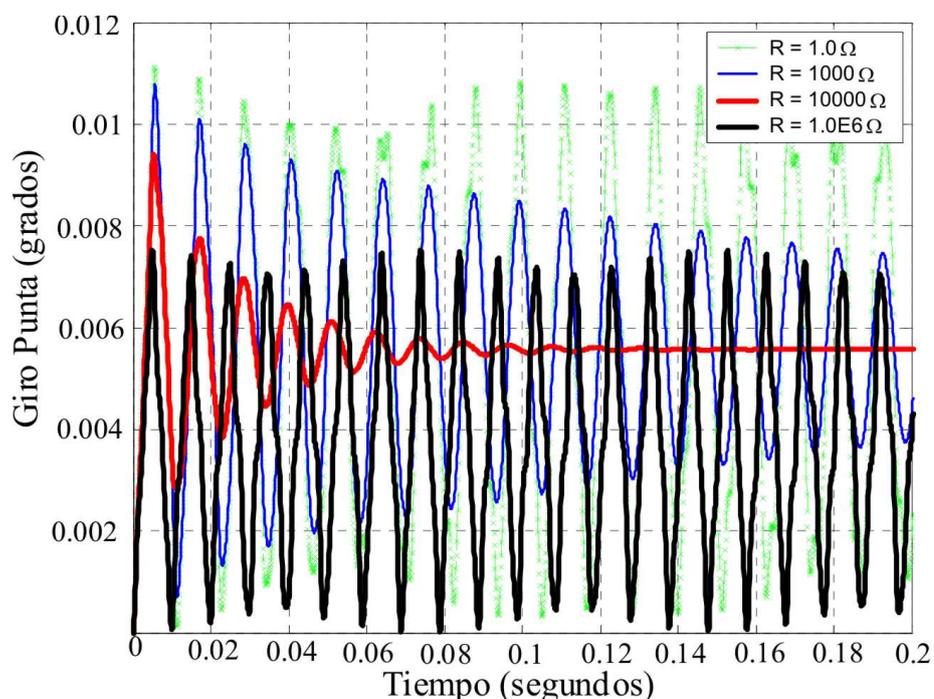


Figura 7.33: Respuesta temporal frente a un momento torsor aplicado en el extremo libre modulado por una señal escalón de 0,5 segundos de duración.

Las Figuras 7.29 a 7.33 muestran claramente que la potencia extraída por la red eléctrica depende fuertemente de los valores de resistencia de la misma. Los resultados obtenidos guardan concordancia con los presentados por otros autores para el caso de placas con laminados piezoeléctricos (Saravanos, 1999). La energía mecánica extraída del medio podría ser empleada para generar energía eléctrica en pequeñas escalas, lo que actualmente constituye un campo activo de investigación (Wang et al., 2010). Simultáneamente, la red pasiva contribuye a reducir las amplitudes de las vibraciones mecánicas del sistema. El elemento finito propuesto en esta tesis, puede ser utilizado como herramienta para el diseño y evaluación de este tipo de sistemas.

7.5. Análisis estático y dinámico bajo comportamiento no lineal material

En esta sección se utilizan el elemento finito y el modelo material propuestos para estudiar los efectos del comportamiento no lineal del material en la respuesta estructural. Se considera, primero, un actuador en dos condiciones diferentes, por un lado, funcionando libremente y, por otro lado, adherido entre dos placas de aluminio, en ambos casos, bajo la aplicación de potenciales eléctricos. Para estos dos casos se considera sólo la respuesta estática.

Luego, se estudia el comportamiento estático y dinámico de una viga de aluminio en voladizo, con actuadores adheridos en la mitad más próxima al empotramiento.

7.5.1. Actuador solo

El actuador está construido con un compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales. Las propiedades materiales y las características del compuesto se detallan en la Tabla [7.11](#)

La geometría analizada corresponde a un actuador rectangular de $10(mm)$ de ancho, $15(mm)$ de longitud y $0,3(mm)$ de espesor. Se utiliza, para el análisis, un solo elemento de cáscara piezoeléctrica, ya que el modo de operación consiste simplemente en deformaciones en el plano del actuador. Se introducen condiciones de borde mecánicas para permitir deformaciones libres en el plano del elemento.

Se considera una etapa inicial de polarización del dispositivo, para lo cual se impone, en el nodo eléctrico, un potencial eléctrico de valor máximo $3600 (Volts)$. Luego se considera una etapa de trabajo y, finalmente, la depolarización originada por exceso de voltaje.

La Figura [7.34](#) muestra la deformación longitudinal del extremo libre del actuador piezoeléctrico. En la misma figura se presenta la variación del potencial eléctrico aplicado. En la primera parte de la simulación, entre 0 y $1400 (Volts)$ aproximadamente, el desplazamiento es nulo. Luego, al alcanzarse el umbral para el cual comienza la orientación de los dipolos, empieza a manifestarse el acoplamiento electromecánico. Se

Propiedad	Valor
Fibra	
Módulo de Young $E_f(GPa)$	48.8
Módulo de Poisson ν_f	0.3
Permitividad dieléctrica $\kappa_f^\sigma(10^{-8}F/m)$	4.2
Acoplamiento Piezoeléctrico	
$d_{33}(10^{-12}mV^{-1})$	450.2
$d_{31}(10^{-12}mV^{-1})$	-225.1
$d_{15}(10^{-12}mV^{-1})$	563.3
Matriz	
Módulo de Young $E_m(GPa)$	3.0
Módulo de Poisson ν_m	0.25
Permitividad dieléctrica $\kappa_m^\sigma(10^{-9}F/m)$	2.1
Construcción del compuesto	
Proporción de fibra	80 %
Separación de electrodos (mm)	1,8

Tabla 7.11: Propiedades materiales para el actuador piezoeléctrico.

observa que rápidamente se alcanza un valor considerable de desplazamiento y a partir de allí, éste empieza a saturarse, hasta llegar al valor máximo (punto A).

El comportamiento durante la descarga es prácticamente lineal. En el punto B, para un valor nulo del potencial eléctrico, se registra una deformación remanente de $650(ppm)$. El potencial eléctrico sigue bajando hasta llegar a cierto valor de campo eléctrico de repolarización durante el cual se intensifica el comportamiento no lineal. En el punto B comienza a aumentar el potencial eléctrico hasta llegar a un punto en el cual se producen nuevas conmutaciones y, finalmente, se alcanza el máximo valor en el punto C.

Luego de la etapa de polarización inicial, el dispositivo queda con polarización y deformaciones remanentes. Como consecuencia de esto, se manifiesta un acoplamiento electromecánico que puede ser aprovechado en etapas posteriores de funcionamiento.

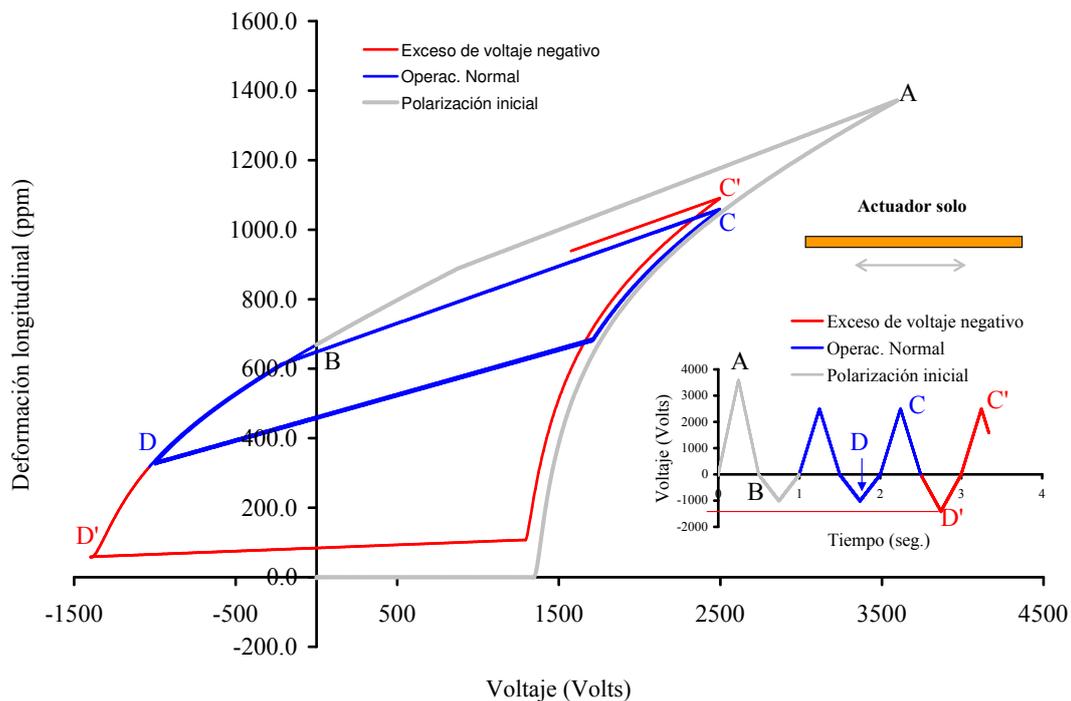


Figura 7.34: Respuesta de un actuador solo. Deformación longitudinal.

Estas etapas, denominadas de funcionamiento se muestran en la Figura 7.34 en color azul.

La Figura 7.34 muestra un aspecto importante reflejado por el modelo propuesto. Excesivos valores de campo eléctrico reverso producen inversión del sentido del acoplamiento electromecánico, caso analizado en los primeros apartados de este capítulo. La Figura 7.34 muestra que, al excederse cierto límite de voltaje (punto D'), el acoplamiento electromecánico logrado con el proceso de polarización inicial se pierde. A partir de este punto, el comportamiento del dispositivo sigue el camino marcado en color rojo.

Una vez polarizado el dispositivo y retirado el campo eléctrico, punto B de la Figura 7.34, se puede considerar este estado como la nueva condición inicial para la operación posterior del dispositivo. Bajo estas circunstancias, las deformaciones totales se pueden medir respecto de este nuevo punto y como se muestra en la Figura 7.34, los módulos de las deformaciones máximas bajo potenciales positivos, son mayores a los correspondientes a

valores negativos a lo largo de la trayectoria entre los puntos D y C en color azul. Es decir, para evitar repolarización y pérdida del acoplamiento electromecánico, se deben limitar los voltajes negativos. Los positivos se limitan por cuestiones operativas relacionadas al manejo de altas tensiones eléctricas.

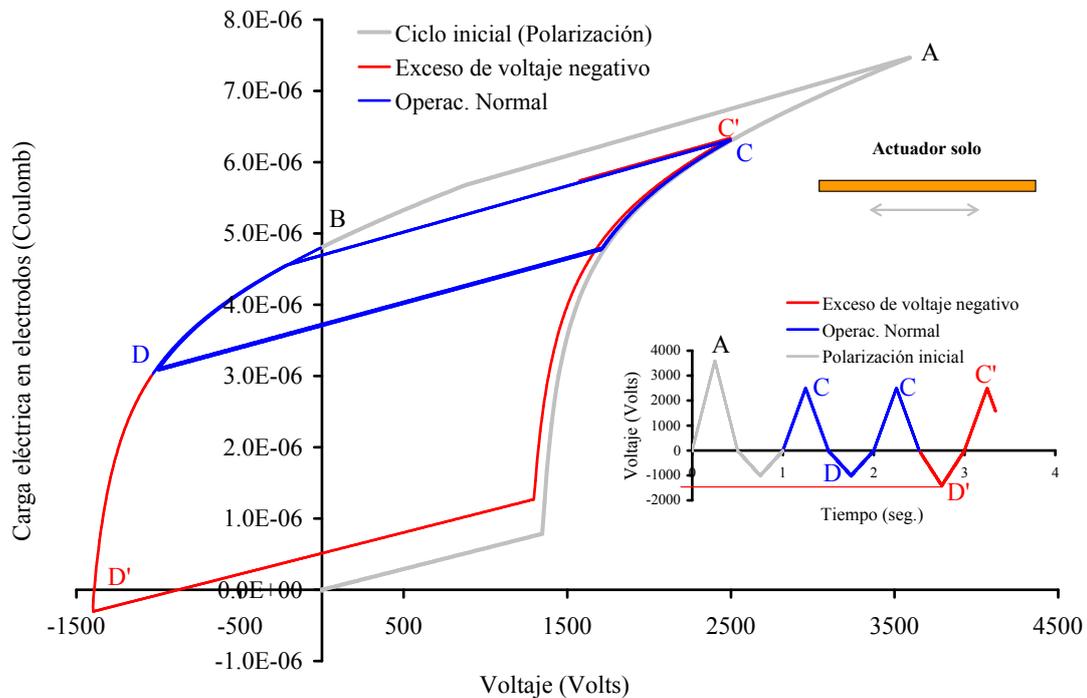


Figura 7.35: Respuesta de un actuador solo. Carga eléctrica en los electrodos.

La carga eléctrica acumulada en los electrodos se muestra en la Figura 7.35, donde se observa la variación de esta cantidad en función del potencial eléctrico aplicado y la correspondencia con los puntos que marcan las distintas etapas de los procesos de polarización inicial, operación y despolarización destacados en la Figura 7.34.

7.5.2. Actuador dispuesto entre dos placas de aluminio

A continuación se analiza el mismo actuador del ejemplo anterior, sometido a la misma excitación, pero adherido a placas de aluminio de $0,5(mm)$ de espesor cada una, formando un sandwich con el actuador en el centro. Para el aluminio se usa un módulo de elasticidad $E = 71(GPa)$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$. El proceso de polarización se realiza

luego de adherir el dispositivo a la estructura pasiva. La deformación longitudinal del conjunto se presenta en la Figura 7.36, donde se incluye, además, un esquema de la sección transversal del sandwich analizado.

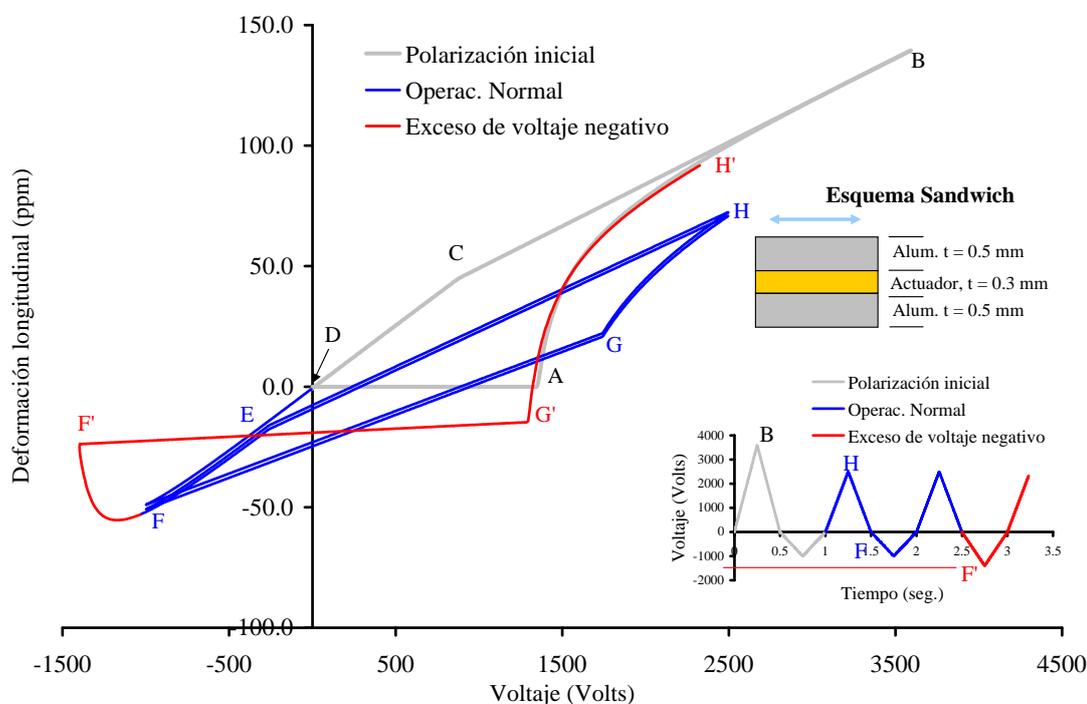


Figura 7.36: Respuesta de un actuador dispuesto entre dos placas de aluminio, cada una de 0,5(mm) de espesor. Deformación longitudinal.

En la Figura 7.36 se refleja la influencia de la estructura pasiva sobre la respuesta del actuador. La deformación máxima es sensiblemente menor que en el caso libre y las deformaciones remanentes son prácticamente nulas en este caso. Sin embargo al igual que en el caso anterior, al disminuir el voltaje más allá de los -1000 (Volts), aproximadamente, se produce la despolarización del dispositivo y la consiguiente pérdida de acoplamiento electromecánico.

Los ejemplos presentados reflejan que, ante la aplicación de voltajes negativos de elevado valor absoluto, un dispositivo ya polarizado y en condiciones de ser utilizado puede sufrir despolarización y pérdida del acoplamiento electromecánico. Para evitar esto, es necesario conocer estos límites de operación y disponer de herramientas para determinar si los mismos son suficientes para cumplir los objetivos en una aplicación tecnológica

determinada.

7.5.3. Viga de aluminio con actuadores piezoeléctricos - Análisis estático no lineal

En esta sección se utilizan las herramientas propuestas para estudiar los efectos del comportamiento no lineal del material en la respuesta de una estructura activa. Se presenta el análisis de una viga de aluminio en voladizo con actuadores piezoeléctricos adheridos a la parte superior e inferior en la mitad más próxima al empotramiento.

En la Figura 7.37 se presenta la geometría analizada. En la misma figura se muestra además, la malla de elementos finitos. En la zona activa se usa el elemento formulado, mientras que la zona pasiva se discretiza con el elemento nativo de cáscara (S4) de ABAQUS (SIMULIA, 2005). La Figura 7.38 muestra la sección transversal de la viga y sus dimensiones.

Las propiedades materiales para el compuesto piezoeléctrico se detallan en la Tabla 7.11. Para el aluminio se usa un módulo de elasticidad $E = 71(GPa)$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$.

Se considera que los actuadores piezoeléctricos están adheridos sobre la viga, en estado no polarizados. Por lo tanto, se realiza un proceso de polarización inicial similar a los casos analizados anteriormente. Como se muestra en los apartados 7.5.1 y 7.5.2, para evitar repolarización del material y pérdida del acoplamiento, se limitan los valores negativos de potenciales eléctricos. Es posible, combinar adecuadas señales de excitación de los distintos dispositivos para que los mismos operen en conjunto y, al mismo tiempo, asegurar que lo hagan dentro de límites aceptables para mantener su integridad.

La polarización inicial se lleva a cabo sometiendo los actuadores inferiores y superiores a idénticos potenciales eléctricos modulados con una señal sinusoidal de valor medio igual a la amplitud, para asegurar voltages positivos. Ambos actuadores se polarizan simultáneamente, por lo tanto la respuesta inicial de la viga es una elongación en la dirección del eje x_1 . A partir de este punto, los voltajes introducidos en los nodos eléctricos

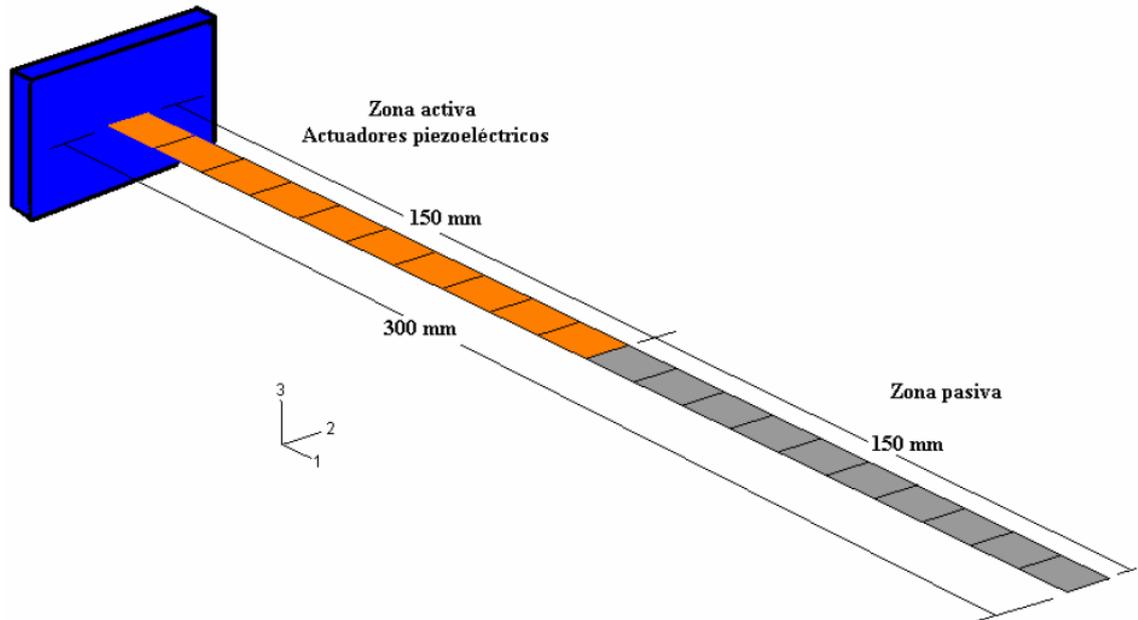


Figura 7.37: Viga voladizo. Geometría y malla de elementos finitos

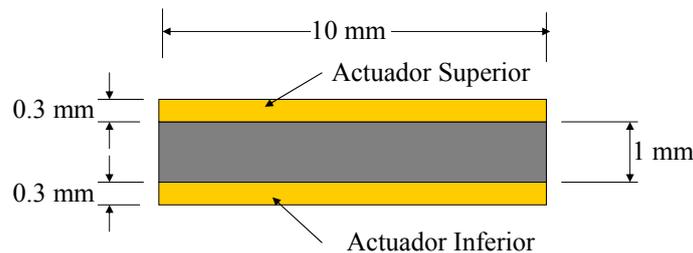


Figura 7.38: Viga voladizo. Sección transversal con actuadores en la cara superior e inferior

de los actuadores superiores e inferiores se modulan con señales sinusoidales desfasadas 180° , también de valor medio igual a la amplitud. El desfase produce una respuesta simétrica en flexión, que se observa en la Figura 7.39.

En la Figura 7.39 se presenta, también, la variación temporal de los voltajes de alimentación de los actuadores. Allí se grafica el desplazamiento vertical del extremo libre en función del voltaje aplicado a los actuadores inferiores. A pesar de manifestarse algunos efectos de repolarización para potenciales de 800 y 2700 (*Volts*), el acoplamiento electromecánico no presenta grandes variaciones. Sin embargo, aparece una especie de lazo de carga y descarga. Como se señala en los apartados anteriores, utilizando estos

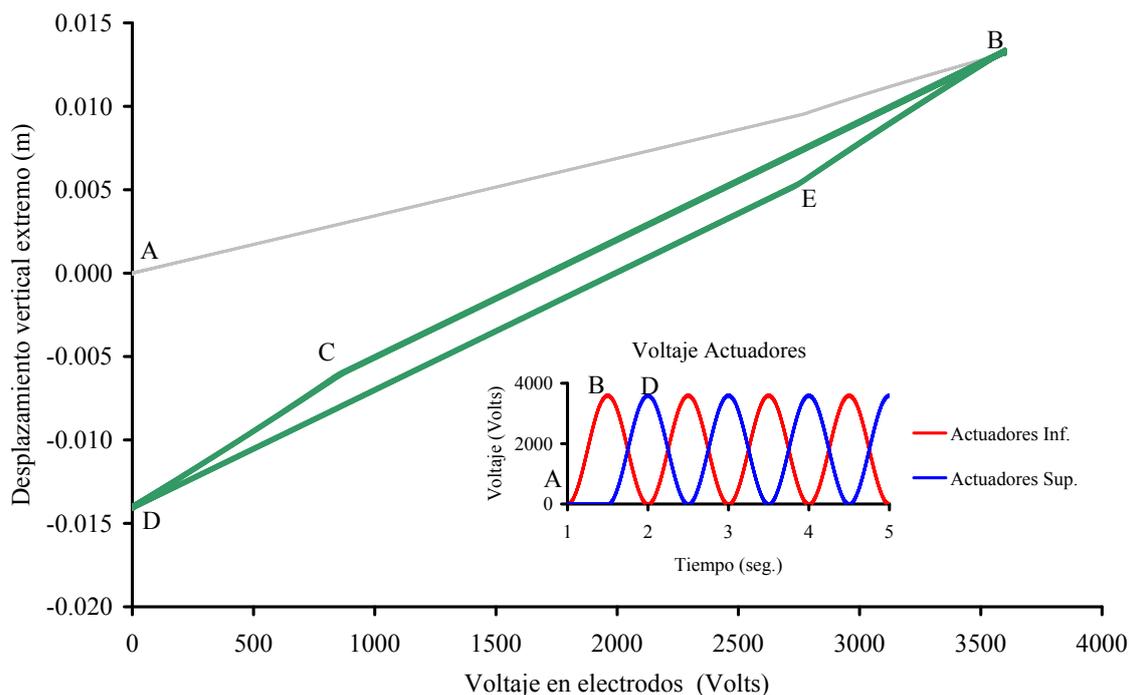


Figura 7.39: Viga voladizo. Desplazamiento vertical del extremo libre.

resultados pueden cuantificarse los efectos del comportamiento no lineal para cada aplicación particular.

Limitando los voltajes de alimentación, es posible reducir el lazo que se forma durante la carga y descarga para obtener así una respuesta prácticamente lineal. Con frecuencia es de gran utilidad conocer dicho rango, ya sea para la extrapolación de resultados o para el diseño del sistema de control.

7.5.4. Viga de aluminio con actuadores piezoeléctricos - Análisis dinámico no lineal

A continuación, se considera el análisis dinámico de la viga analizada en el apartado anterior pero con actuadores piezoeléctricos adheridos sólo a la cara superior de la zona más cercana al empotramiento. Los electrodos de los actuadores piezoeléctricos se someten a un potencial de alimentación de valor máximo 2000 *Volts* y modulados por una señal sinusoidal de frecuencia 2 *Hz* y valor medio nulo.

La Figura 7.40 muestra el desplazamiento vertical del extremo libre de la viga en

función del tiempo. A efectos comparativos, se incluye en la misma figura, la respuesta del mismo modelo pero bajo comportamiento lineal de los actuadores piezoeléctricos, con los valores de acoplamiento correspondientes al estado de máxima polarización remanente.

Debido a que en este caso no se limita el potencial eléctrico, durante la operación de los dispositivos piezoeléctricos, se manifiestan los fenómenos de conmutación de la polarización. Como consecuencia, se observa que la respuesta de la viga bajo comportamiento no lineal, contiene contribuciones de estos fenómenos. Una simple inspección de la Figura 7.40 refleja que los actuadores siempre tienden a flexionar la estructura hacia arriba, los desplazamientos negativos se dan por efectos dinámicos. Comparando los resultados obtenidos con el modelo lineal con los correspondientes a la respuesta material no lineal, se observa que la respuesta lineal es, naturalmente, *más pura* en cuanto al contenido de frecuencias.

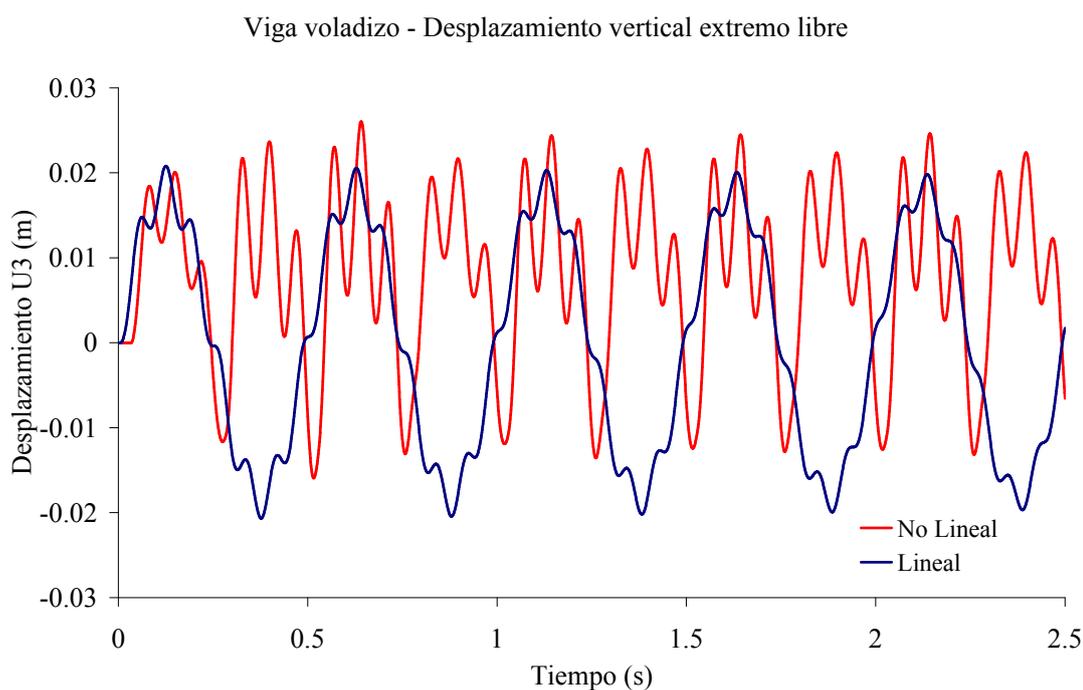


Figura 7.40: Respuesta dinámica temporal no lineal de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Desplazamiento mecánico vertical del extremo libre.

La respuesta temporal de la carga eléctrica en los electrodos se muestra en la Figura 7.41. Allí se refleja que, ante la presencia de fenómenos de conmutación ferroeléctrica, los valores de carga eléctrica experimentan fuertes aumentos respecto al caso de

comportamiento lineal.

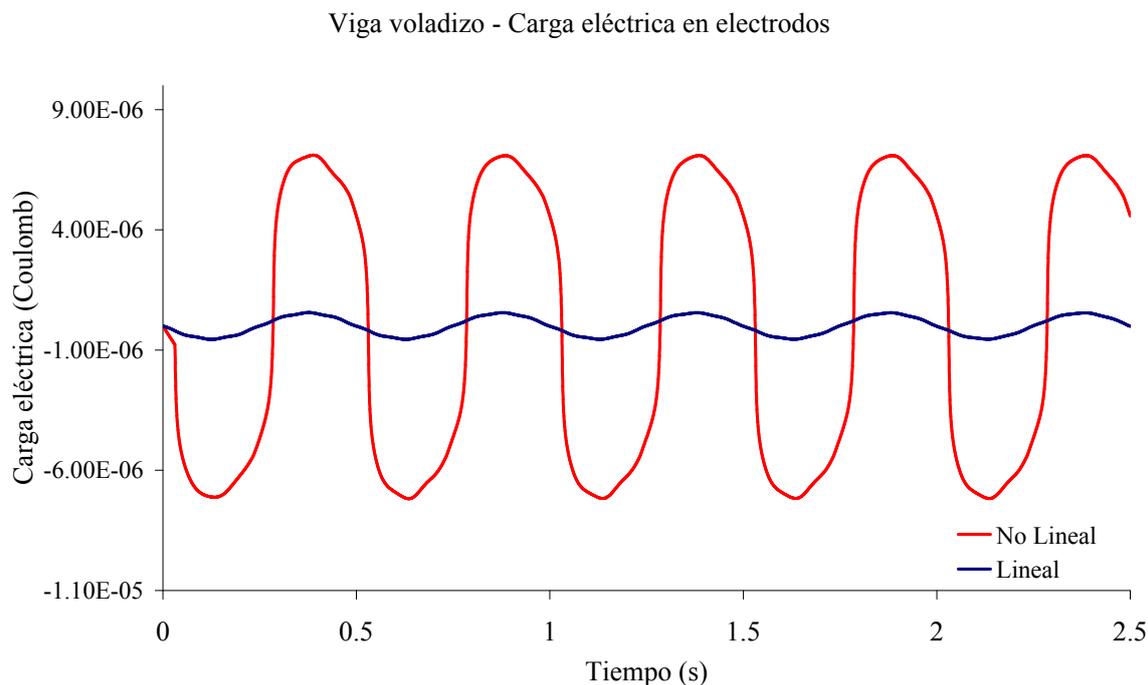


Figura 7.41: Respuesta dinámica temporal no lineal de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Carga eléctrica en los electrodos.

La Figura 7.41 muestra, además, la distorsión en la variación temporal de la carga eléctrica que aparece en los electrodos cuando se producen fenómenos de conmutación. En los casos en que se utilizan los dispositivos como sensores, es importante conocer y cuantificar esta distorsión.

Para cuantificar la influencia de los fenómenos no lineales en la respuesta dinámica y comparar con el caso lineal se usa la Transformada Rápida de Fourier. La Figura 7.42 muestra una comparación entre los valores absolutos de las transformadas de las respuestas en función de la frecuencia.

El contenido de frecuencias de la respuesta, considerando los fenómenos no lineales es, naturalmente, mayor. Aparecen armónicos de frecuencias que son múltiplos del doble de la frecuencia de excitación ($2Hz$). Esto se debe a que al conmutar los dipolos y aparecer los fenómenos de repolarización, el acoplamiento electromecánico también conmuta y las deformaciones siempre mantienen el mismo signo. Por lo tanto en un período de excitación, se producen dos períodos de deformación. La frecuencia natural

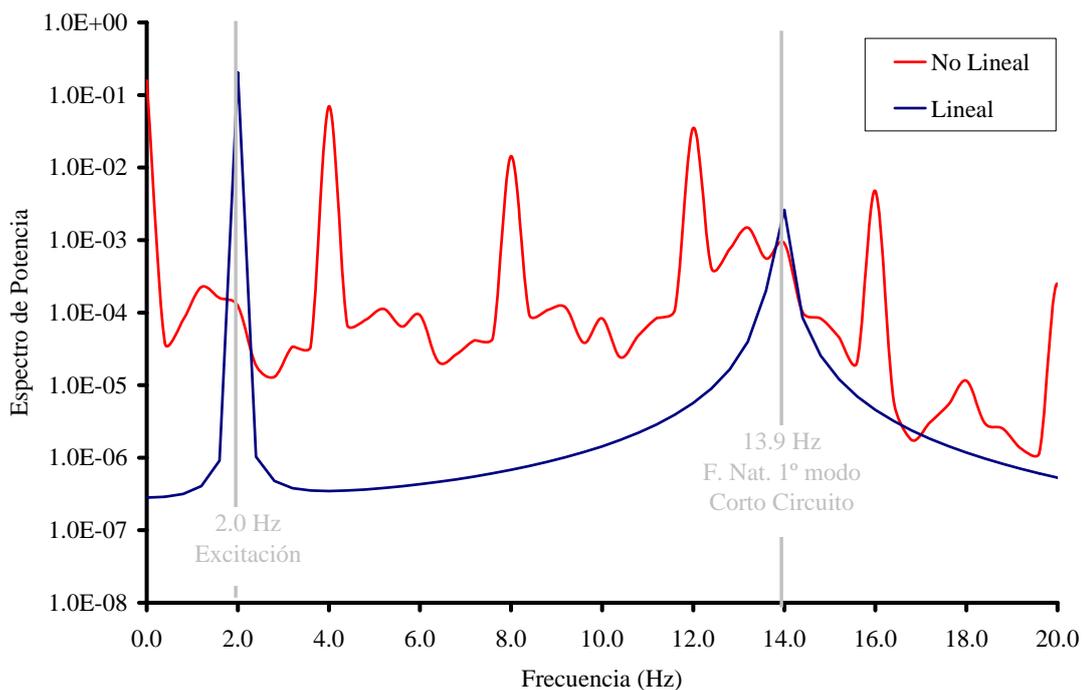


Figura 7.42: Respuesta en frecuencia de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Módulo de la transformada en función de la frecuencia.

correspondiente al primer modo normal en condiciones de corto circuito de los electrodos es de $13,9(Hz)$.

Siguiendo un orden lógico, en esta sección se estudió, primero, el proceso de polarización inicial de un dispositivo y la influencia de la estructura pasiva sobre el mismo. Luego se analizó un dispositivo ya polarizado y en condiciones de ser utilizado, reflejando que el mismo puede sufrir despolarización y pérdida del acoplamiento electromecánico. Para evitar esto, es necesario conocer estos límites de operación y disponer de herramientas para determinar si los mismos son suficientes para cumplir los objetivos en una aplicación tecnológica determinada. Los ejemplos de aplicación presentados muestran que las herramientas numéricas desarrolladas en esta tesis permiten determinar los rangos de trabajo de los dispositivos estudiados

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

8.1. Introducción

En esta tesis se desarrolla, en forma unificada y sistemática, una serie de herramientas que permiten analizar numéricamente el comportamiento y desempeño de estructuras dotadas de dispositivos de control construidos con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales. Los modelos desarrollados pueden ser utilizados en el análisis por elementos finitos de estructuras de características reales. La presentación de la tesis refleja un flujo natural de componentes necesarios para un análisis estructural, partiendo desde el material, dispositivo, herramienta numérica y aplicación.

Se investiga el comportamiento material, no sólo en el rango lineal, sino también dentro del rango no lineal, donde aparecen fenómenos de repolarización e histéresis en los materiales ferroeléctricos/piezoeléctricos de interés práctico. Se propone un modelo material no lineal para compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales, que combina enfoques y herramientas presentes en la bibliografía y representa un aporte original.

El modelo de homogeneización para el compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales propuesto en esta tesis permite realizar, en forma sistemática, combinaciones serie-paralelo en rango no lineal e introducir de esta manera, los campos electromecánicos que tienen lugar en los nombrados materiales.

Con el objetivo de calibrar parámetros del modelo material propuesto y adquirir mayor conocimiento sobre el fenómeno físico de repolarización en cerámicas ferroeléctricas

policristalinas, se implementa un modelo micromecánico de conmutación de cristales ferroeléctricos, presente en la bibliografía, para describir el comportamiento del cristal simple. Este modelo para el cristal simple se combina con un elemento sólido y el conjunto se incorpora en un programa de elementos finitos mediante el uso de subrutinas de usuario. Con esta herramienta se realizan modelos para estudiar el comportamiento de policristales ferroeléctricos, considerando al policristal como un ensamblaje de elementos en el que cada elemento representa un grano. Aplicando diferentes condiciones de carga, se logran reproducir, con este enfoque, los fenómenos característicos observados experimentalmente.

Con el modelo microelectromecánico implementado, se analiza una porción representativa de laminado piezoeléctrico y los resultados se comparan con los obtenidos utilizando el modelo de homogeneización no lineal para el compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales propuesto en esta tesis.

Adicionalmente, en esta tesis se presenta un elemento finito de cáscara piezoeléctrica basada en sólido degenerado con un nuevo esquema de interpolación del campo eléctrico, lo cual representa un aporte original en el área de elementos finitos.

El elemento finito desarrollado se utiliza para analizar aplicaciones concretas de los materiales y dispositivos ferroeléctricos/piezoeléctricos, al control activo de vibraciones. Para tal fin, se realiza, en forma numérica, el análisis de control de vibraciones sobre un cajón cerrado de paredes delgadas, dotado de actuadores piezoeléctricos. El modelo de elementos finitos de la estructura, se replantea en el Espacio de Estados y se usa como base para el diseño del sistema de control y subsiguientes análisis de respuesta en frecuencia, respuesta transitoria y determinación de los valores de amortiguamiento introducidos, como así también de los voltajes de control requeridos. Se evalúa la respuesta transitoria frente a la aplicación de una cupla en el extremo libre del cajón. Se comparan las diferencias obtenidas al usar distintos valores del parámetro para determinar la matriz de ganancia.

La presente formulación se usa, también, para evaluar numéricamente el comportamiento de un sistema microgenerador de energía eléctrica basado en dispositivos piezoeléctricos, montados en una estructura tipo cajón cerrado de paredes delgadas. El

sistema aprovecha la energía mecánica que recibe del medio y, al transformarla en energía eléctrica, se produce en la estructura un amortiguamiento que se puede evaluar utilizando las herramientas numéricas descritas.

Finalmente, se analiza la respuesta dinámica de una estructura activa ante la aparición de fenómenos no lineales en el comportamiento material. Se realizan comparaciones entre las respuestas bajo comportamiento lineal y no lineal de los dispositivos piezoeléctricos. Se utiliza la Transformada Rápida de Fourier para analizar el contenido de frecuencias de las respuestas y compararlas en ambos casos.

8.2. Conclusiones

Del desarrollo de la tesis se pueden extraer las conclusiones que, a continuación, se presentan vinculadas a los objetivos específicos propuestos.

8.2.1. Con respecto al objetivo específico: *Proponer un modelo de homogeneización no lineal para compuestos piezoeléctricos*

El modelo de homogeneización propuesto es capaz de representar el comportamiento de los compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales y reproducir, cualitativa y cuantitativamente, resultados experimentales característicos del comportamiento ferroeléctrico. Presenta la ventaja de ser relativamente sencillo de programar y ser incluido en un programa de elementos finitos para tener en cuenta los fenómenos no lineales de interés durante el funcionamiento de los dispositivos construidos con materiales piezoeléctricos.

Comparando resultados del modelo de compuestos propuesto con los del modelo mesoelectromecánico detallado, se observa que el modelo para compuestos propuesto es capaz de captar los fenómenos de polarización, saturación e histéresis y, de esta manera, reflejar el comportamiento macroscópico exhibido por este tipo de materiales. Con ambos enfoques, se obtienen valores similares de acoplamiento electromecánico macroscópico,

deformaciones y polarización remanentes. Como consecuencia de las concentraciones locales de campos electromecánicos en las zonas cercanas a los electrodos, surgen diferencias en los valores de campo eléctrico para los que comienzan los procesos de conmutación. Esto se refleja en el hecho que la respuesta del modelo mesoelectromecánico es más suave y gradual al tiempo que el valor de campo eléctrico crítico es menor que el obtenido con el modelo para compuestos propuesto. El modelo presenta sensibilidad a parámetros constructivos de marcada relevancia, como ser la diferencia de permitividad dieléctrica entre fibra y matriz.

En aquellos casos en que el análisis estructural de sistemas dotados de compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales esté destinado a determinar el comportamiento a nivel global, el modelo de homogeneización propuesto puede ser utilizado para modelar las zonas activas como un material homogéneo equivalente y considerar los fenómenos subyacentes que condicionan el desempeño.

Adicionalmente, el modelo propuesto permite analizar el *ciclo de vida* de un dispositivo construido con compuestos ferroeléctricos. Comenzando desde su estado inicial despolarizado, se puede considerar el proceso de polarización inicial y consiguiente impresión de acoplamiento electromecánico. Luego, es posible identificar un rango de trabajo dentro del cual el acoplamiento se mantiene sin producirse importantes fenómenos no lineales, lo cual permite considerar un comportamiento cuasi-lineal para determinadas aplicaciones. También se identifican valores de potenciales de alimentación reversos para los cuales el dispositivo pierde el acoplamiento y se aparta del régimen de trabajo anterior.

8.2.2. Con respecto al objetivo específico: *Formular un elemento finito de cáscara piezoeléctrica*

En combinación con las formulaciones existentes, el esquema propuesto para interpolar el campo eléctrico en el elemento finito, permite modelar de un modo relativamente sencillo, estructuras construidas con laminados piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales.

La implementación, en una subrutina de usuario, del elemento finito y del modelo material propuestos, permite su incorporación en un programa de elementos finitos de uso general. Esto brinda la posibilidad de combinar las características de la presente contribución con otras herramientas existentes y así expandir las capacidades de cálculo y predicciones en el área de la Mecánica Computacional.

Con el objetivo de validar la formulación del elemento, se modela una viga en voladizo dotada de piezoactuadores en su cara superior y se determina la deflexión del extremo libre, inducida por el actuador sometido a un campo eléctrico. Las diferencias entre los resultados numéricos y los correspondientes a la solución analítica de Bernoulli son del orden del 1%. Por otra parte, se estudia la respuesta estática lineal de un cajón cerrado con seis actuadores adheridos a su superficie y orientados en direcciones $+/-45^\circ$ respecto del eje longitudinal. La máxima diferencia entre el giro determinado numéricamente con el elemento formulado y el medido experimentalmente por otros investigadores, está dentro del 10%. Teniendo en cuenta las incertidumbres experimentales y que el análisis numérico se realiza bajo hipótesis de comportamiento lineal, los resultados pueden ser considerados alentadores. Adicionalmente, los estudios de convergencia sobre estructuras sencillas demuestran que el elemento se comporta satisfactoriamente y que los efectos de bloqueo por corte en presencia de excitación por campo eléctrico, al igual que los netamente mecánicos, se minimizan usando la interpolación MITC.

8.2.3. Con respecto al objetivo específico: *Aplicar la herramienta desarrollada*

Los resultados de la simulación del control de vibraciones de cajones cerrados muestran que el elemento finito desarrollado permite captar características importantes del sistema, con lo que se puede evaluar su desempeño.

Con el elemento finito propuesto, se pueden realizar modelos numéricos de estructuras activas dotadas de laminados piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales, reteniendo los aspectos más importantes de las mismas y con un moderado número de

grados de libertad. La formulación permite incluir las condiciones de borde eléctricas de manera relativamente simple. Las comparaciones con un enfoque usando elementos sólidos piezoeléctricos tridimensionales revelan que, con la formulación propuesta, se logra una notable disminución en el costo computacional. La modelación se simplifica debido a que el campo eléctrico se controla imponiendo condiciones de borde sobre un solo nodo por cada capa piezoeléctrica del elemento.

El modelo permite captar aspectos interesantes de los sistemas microgeneradores de energía basados en dispositivos piezoeléctricos. Refleja que la potencia extraída por la red eléctrica depende fuertemente de los valores de resistencia eléctrica de la misma. Los resultados obtenidos guardan concordancia con los presentados por otros autores para el caso de placas con laminados piezoeléctricos. La energía mecánica extraída del medio podría ser empleada para generar energía eléctrica en pequeñas escalas, lo que actualmente constituye un campo activo de investigación. Simultáneamente la red pasiva, contribuye a reducir las amplitudes de las vibraciones mecánicas del sistema.

También se puede estudiar la conformación de un sistema estructural activo, a partir de la combinación de dispositivos piezoeléctricos y una estructura pasiva. El modelo no lineal propuesto permite reproducir el proceso completo del dispositivo piezoeléctrico, desde el estado virgen del material ferroeléctrico, pasando por su etapa de polarización inicial y finalmente la simulación de la respuesta del conjunto ante una excitación determinada. Con este análisis, se pueden identificar rangos de trabajo con características determinadas, que resultan de interés en el diseño y evaluación del desempeño de sistemas estructurales activos. Por otro lado, se pueden introducir diferentes excitaciones a cada sector de la estructura para que los dispositivos correspondientes trabajen en conjunto *colaborando* con un determinado modo de operación u objetivo.

Los resultados obtenidos de la simulación de la respuesta dinámica no lineal de estructuras activas, reflejan que las herramientas desarrolladas permiten modelar estructuras con las características descritas, sirviendo como soporte al diseño y permitiendo hacer predicciones útiles respecto de su comportamiento y desempeño.

8.3. Recomendaciones para trabajos futuros

Todos los análisis realizados en esta tesis consideran válida la hipótesis de linealidad geométrica. Esta suposición es válida y muy útil en muchos casos, y siempre que se pueda recurrir a ella, el costo computacional será menor. Sin embargo, cuando el modelo físico a estudiar experimente grandes desplazamientos y deformaciones, será necesario contar con capacidades de análisis que incluyan los citados fenómenos. Es por esto que en trabajos futuros sería interesante la extensión de la presente formulación, incluyendo la capacidad de tratar fenómenos geoméricamente no lineales. Esto abarca no sólo la parte mecánica, ampliamente estudiada en la bibliografía, sino también los efectos de la modificación de la geometría de electrodos y orientaciones de los mismos respecto de las fibras. Con esto se espera poder estudiar la influencia de los fenómenos de no linealidad geométrica sobre el desempeño de las estructuras activas construidas con materiales piezoeléctricos.

El modelo material para compuestos piezoeléctricos/ferroeléctricos propuesto en esta tesis admite, en principio, la inclusión de cualquier modelo fenomenológico para las fibras. En particular, en el desarrollo de la tesis se utiliza un modelo presente en la bibliografía. Este modelo, a pesar de retener los aspectos más relevantes del comportamiento material no lineal, incluye una forma de endurecimiento sencilla y es posible que no sea capaz de reflejar el comportamiento bajo condiciones de carga triaxiales. Sería conveniente realizar pruebas con otros modelos más complejos y evaluar los diferentes resultados. Por otra parte, al utilizar formulaciones de elementos finitos basadas en desplazamientos mecánicos y potenciales eléctricos, en conjunto con modelos materiales que utilizan deformaciones y polarización remanentes, no se puede asegurar que las matrices de rigidez tangente sean definidas positivas. Resultarían de gran importancia las propuestas y evaluación de diferentes alternativas para lograr modelos más generales y robustos.

La contrastación experimental es un recurso muy valioso, por lo tanto se considera sumamente recomendable realizar ensayos experimentales sobre estructuras dotadas de laminados piezoeléctricos y así contrastar los resultados numéricos obtenidos. La caracterización experimental de materiales piezoeléctricos/ferroeléctricos permite ajustar modelos constitutivos y reflejar fenómenos importantes que condicionan su desempeño.

En este sentido, se identifica la necesidad de contrastación experimental del modelo de homogeneización no lineal propuesto para compuestos piezoeléctricos.

Finalmente, la realización de ensayos experimentales de control activo de vibraciones y atenuación pasiva por efecto de disipación de energía en una red eléctrica o microgeneración de energía eléctrica en rangos no lineales ayudaría a fundar bases para la determinación de factibilidad de posibles aplicaciones prácticas de los materiales activos.

BIBLIOGRAFÍA

- J. Aboudi. Micromechanical analysis of fully coupled electro-magneto-thermo-elastic multiphase composites. *Smart Materials and Structures*, 10:867–877, 2001.
- J. Aboudi. Hysteresis behavior of ferroelectric fiber composites. *Smart Materials and Structures*, 14:745–726, 2005.
- B.N. Agrawal y K.E. Treanor. Shape control of a beam using piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures*, 8:729–740, 1999.
- S. Ahmad, B.M. Irons, y O.C. Zienkiewicz. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:419–451, 1970.
- J. Ajitsaria, S.Y. Choe, D. Shen, y D.J. Kim. Modeling and analysis of a bimorph piezoelectric cantilever beam for voltage generation. *Smart Materials and Structures*, 16:447–454, 2007.
- M. Al Bassiouni, B. Lester, B. Deleon, S. Edmonds, S. Hoidra, y K. Wroblewski. Control of enclosed sound fields using shunted piezoelectric circuits. In *Smart Structures and Materials: Modeling, Signal Processing, and Control*. SPIE, 2006.
- O.J. Aldraihem, R.C. Wetherhold, y T. Singh. Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs. Euler-Bernoulli theory. *J Intell Mater Syst Struct*, 8:149–157, 1997.
- H. Allik y T.J.R. Hughes. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:151–157, 1970.

- H. Allik, K.M. Webman, y J.T. Hunt. Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements. *Journal Acoust Soc Am*, 56:1782–1791, 1974.
- G. Arlt. A physical model for hysteresis curves of ferroelectric ceramics. *Ferroelectrics*, 189:103–119, 1996.
- F. Auricchio, P. Bisegna, y C. Lovadina. Finite element approximation of piezoelectric plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:1469–1499, 2001.
- B. Balachandran, A. Sampath, y J. Park. Active control of interior noise in a three-dimensional enclosure. *Smart Materials and Structures*, 5:89 – 97, 1996.
- V. Balamurugan y S. Narayanan. A piezolaminated composite degenerated shell finite element for active control of structures with distributed piezosensors and actuators. *Smart Materials and Structures*, 17:1–18, 2008.
- E. Bassiouny y G. Maugin. Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects - III. Parameter identification. *International Journal of Engineering Science*, 27:975–987, 1989a.
- E. Bassiouny y G. Maugin. Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects - IV. Combined electromechanical loading. *International Journal of Engineering Science*, 27:989–1000, 1989b.
- E. Bassiouny, A. Ghaleb, y G. Maugin. Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects - I. Basic equations. *International Journal of Engineering Science*, 26:1279–1295, 1988a.
- E. Bassiouny, A. Ghaleb, y G. Maugin. Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects - II. Poling of ceramics. *International Journal of Engineering Science*, 26:1297–1306, 1988b.
- K.J. Bathe. *Finite Elements Procedures*. Prentice Hall, 1996.

- K.J. Bathe y E.N. Dvorkin. A formulation of general shell elements - The use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:697–722, 1986.
- K.J. Bathe, A. Iosilevich, y D. Chapelle. An evaluation of the MITC shell elements. *Computers and Structures*, 75(1):1–30, 2000.
- A. Benjeddou. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers and Structures*, 76:347–363, 2000.
- A.A. Bent. *Active Fiber Composites for Structural Actuation. PhD Thesis*. Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- A.A. Bent y N.W. Hagood. Piezoelectric fiber composites with interdigitated electrodes. *J Intell Mater Syst Struct*, 8:903–919, 1997.
- Y. Benveniste. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2):147 – 157, 1987.
- H. Berger, S. Kari, U. Gabbert, R. Rodriguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, y R. Guinovart-Diaz. Calculation of effective coefficients for piezoelectric fiber composites based on a general numerical homogenization technique. *Composite Structures*, 71(3-4):397–400, 2005.
- J.S. Bevan. Piezoceramic actuator placement for acoustic control of panels. *NASA/CR-2001-211265*, pages 1–94, 2001.
- P. Bhattacharya, H. Suhail, y P.K. Sinha. Finite element analysis and distributed control of laminated composite shells using LQR/IMSC approach. *Aerospace Science and Technology*, 6:273–281, 2002.
- O. Bilgen, K.B. Kochersberger, D.J. Inman, y O. J. Ohanian III. Macro-fiber composite actuated simply supported thin airfoils. *Smart Materials and Structures*, 19:1–11, 2010.
- W.R. Buesson. In C. Klinsberg, editor, *The Physics and Chemistry of Ceramics*. Gordon and Breach Science Publishing, Inc., 1963.

- A. Butz, S. Klinkel, y W. Wagner. A nonlinear piezo electric 3d-beam finite element formulation. In *Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages 291–296, Cambridge, 2005. Massachusetts Institute of Technology. Bathe, K. (Ed.).
- W.G. Cady. *Piezoelectricity*. Mc Graw Hill, 1946.
- M. Carpenter. Using energy methods to derive beam finite elements incorporating piezoelectric materials. *J Intell Mater Syst Struct*, 8:26–40, 1997.
- E. Carrera. An improved Reissner-Mindlin type model for the electromechanical analysis of multilayered plates including piezo-layers. *J Intell Mater Syst Struct*, 8:232–248, 1997.
- E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archiv. Comput. Methods Eng.*, 9:87–140, 2002.
- E. Carrera. A historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 56:287–308, 2003.
- F. Casadei, L. Dozio, M. Ruzzene, y A.C. Kenneth. Periodic shunted arrays for the control of noise radiation in an enclosure. *Journal of Sound and Vibration*, 329:3632 – 3646, 2010.
- C.E.S. Cesnik, D.G. Opoku, F. Nitzsche, y T. Cheng. Active twist rotor blade modelling using particle-wake aerodynamics and geometrically exact beam structural dynamics. *Journal of Fluids and Structures*, 19:651–668, 2004.
- D. Chapelle y K.J. Bathe. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers and Structures*, 66(1):19–36, 1998.
- P.M. Chaplya y G.P. Carman. Dielectric and piezoelectric response of lead zirconate-lead titanate at high electric and mechanical loads in terms of non-180 domain wall motion. *Journal of Applied Physics*, 90:5278–5286, 2001.

- C. Chee, L. Tong, y G. Steven. A mixed model for adaptive composite plates with piezoelectric for anisotropic actuation. *Computer and Structures*, 77:253–268, 2000.
- P. Chen. Three dimensional dynamic electromechanical constitutive relations for ferroelectric materials. *International Journal of Solids and Structures*, 16:1059–1067, 1980.
- P. Chen y S. Montgomery. A macroscopic theory for the existence of the hysteresis and butterfly loops in ferroelectricity. *Ferroelectrics*, 23:199–208, 1980.
- P. Chen y T. Tucker. One dimensional polar mechanical and dielectric responses of the ferroelectric ceramic PZT 65/35 due to domain switching. *International Journal of Engineering Science*, 19:147–158, 1981.
- P.C. Chen y I. Chopra. Induced strain actuation of composite beams and rotor blades with embedded piezoceramic elements. *Smart Materials and Structures*, 5:35–48, 1996.
- T. Chen. An invariant treatment of interfacial discontinuities in piezoelectric media. *Int J Eng Sci*, 31:1062–1072, 1993.
- W. Chen y C.S. Lynch. A micro-electro-mechanical model for polarization switching of ferroelectric materials. *Acta Materialia*, 46:5303–5311, 1998.
- L.C. Chin, V.V. Varadan, y V.K. Varadan. Hybrid finite element formulation for periodic piezoelectric arrays subjected to fluid loading. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2987–3003, 1994.
- S.C. Choi, J.S. Park, y J.H. Kim. Vibration control of pre-twisted rotating composite thin-walled beams with piezoelectric fiber composites. *Journal of Sound and Vibration*, 300(1-2):176–196, 2007.
- A.C.F. Cocks y R.M. McMeeking. A phenomenological constitutive law for the behaviour of ferroelectric ceramics. *Ferroelectrics*, 228:219–228, 1999.

- M.L. Dano y B. Julliere. Active control of thermally induced distortion in composite structures using macro fiber composite actuators. *Smart Materials and Structures*, 16: 2315–2322, 2007.
- J.M. Dietl, A.M. Wickenheiser, y E. Garcia. A Timoshenko beam model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structures*, 19:1–12, 2010.
- A.J. du Plessis. Modeling and experimental testing of twist actuated single cell composite beams for helicopter rotor blade. *MS Dissertation Department of Aeronautics and Astronautics - MIT*, 1996.
- M.L. Dunn y M. Taya. Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites. *International Journal of Solids and Structures*, 30(2):161–175, 1993.
- G.J. Dvorak y M.V. Srinivas. New estimates of overall properties of heterogeneous solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47:899–920, 1999.
- S.M. Ehlers. Active closed cell beam shape control. *AIAA/ASME Adaptive Structures Forum, Hilton Head, SC USA*, pages 320 – 332, 1994.
- P. Gaudenzi. On the electromechanical response of active composite materials with piezoelectric inclusions. *Computer and Structures*, 65(2):157–168, 1997.
- K. Ghandi. *Nonlinear Modeling and Characterization techniques for Phase Transitions in Electro-Mechanically Coupled Devices. PhD Thesis*. Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- K. Ghandi y N.W. Hagood. A hybrid finite element model for phase transition in nonlinear electro-mechanically coupled material. In *Varadan VV, Chandra J, editors.*, 1997.
- P. Glynn-Jones, S.P. Beeby, y N.M. White. Towards a piezoelectric vibration-powered microgenerator. In *Science, Measurement and Technology*, volume 148, pages 68–72. IEEE, 2001.

- C.K. Gong y D.J. Chen. Neuron PSD control for piezoelectric micro-displacement system. *Journal of Physics: Conference Series*, 48:1107 – 1111, 2006.
- A.E. Guennam. *Modelo para compuestos piezoeléctricos utilizados en control activo - Tesis de Maestría*. Universidad Nacional de Tucumán, 2005.
- A.E. Guennam y B.M. Luccioni. FE modeling of a closed box beam with piezoelectric fibre composites patches. *Smart Materials and Structures*, 15:1605–1615, 2006.
- A.E. Guennam y B.M. Luccioni. Microgeneradores de energía eléctrica basados en dispositivos piezoeléctricos. *ENIEF 2007 - Córdoba - Argentina*, 2007.
- A.E. Guennam y B.M. Luccioni. Piezoelectric shell FE for the static and dynamic analysis of piezoelectric fibre composite laminates. *Smart Materials and Structures*, 18:095044 (12pp), 2009.
- S.K. Ha, C. Keilers, y F.K. Chang. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoelectric sensors and actuators. *AIAA Journal*, 30:772–780, 1992.
- Z. Hashin. On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(3):119–134, 1965.
- A. Haug, J.E. Huber, P.R. Onck, y E. Van der Giessen. Multi-grain analysis versus self-consistent estimates of ferroelectric polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55:648–665, 2007a.
- A. Haug, P.R. Onck, y E. Van der Giessen. Development of inter- and intragranular stresses during switching of ferroelectric polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44:2066–2078, 2007b.
- Hibbitt, Karlsson, y Sorensen. *ABAQUS Standard User's Manual V6.4*. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., 2003. URL <http://www.abaqus.com>.

- H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, y R.L.T. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:283–292, 1977.
- R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13:213–222, 1965a.
- R. Hill. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13:89–101, 1965b.
- R. Hill. Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 14:95–102, 1966.
- M. Huang y L.C. Brinson. A multivariant model for single crystal shape memory alloy behaviour. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46:1379–1409, 1998.
- J.E. Huber. Micromechanical modelling of ferroelectrics. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 9:100–106, 2005.
- J.E. Huber y N.A. Fleck. Multi-axial electrical switching of a ferroelectric: theory versus experiment. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:785–811, 2001.
- J.E. Huber, N.A. Fleck, C.M. Landis, y R.M. McMeeking. A constitutive model for ferroelectric polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(8):1663–1697, 1999a.
- J.E. Huber, N.A. Fleck, y R.M. McMeeking. A crystal plasticity model for ferroelectrics. *Ferroelectrics*, 228:39–52, 1999b.
- D. Hughes y J.T. Wen. Preisach modeling of piezoceramic and shape memory alloy hysteresis. *Smart Materials and Structures*, 6:287–300, 1997.
- T.J.R. Hughes. *Finite Elements Static and Dynamic Analysis*. Prentice Hall, 1996.
- Y. Huo y Q. Jiang. Modeling of domain switching in polycrystalline ferroelectric ceramics. *Smart Materials and Structures*, 6(4):441–447, 1997.

- J.W. Hutchinson. Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A319:136–161, 1970.
- S.C. Hwang y R.M. McMeeking. A finite element model of ferroelastic polycrystals. *International Journal of Solids and Structures*, 36(10):1541–1556, 1999.
- S.C. Hwang, C.S. Lynch, y R.M. McMeeking. Ferroelectric/ferroelastic interactions and a polarization switching model. *Acta Metall. Mater.*, 43(5):2073–2084, 1995.
- S.C. Hwang, J.E. Huber, R.M. McMeeking, y N.A. Fleck. The simulation of switching in polycrystalline ferroelectric ceramics. *Journal of Applied Physics*, 84(3):1530–1540, 1998.
- IEEE. Standard on piezoelectricity - Std 176. *The Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 1978.
- T. Ikeda. *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, USA, Oxford, 1990.
- B.Z. Jang. *Advanced Polymer Composites: Principles and Applications*. CRC Press, 1994.
- S.P. Joshi. Non-linear constitutive relations for piezoceramic materials. *Smart Materials and Structures*, 1:80–83, 1992.
- M. Kamlah y Q. Jiang. A constitutive model for ferroelectric PZT ceramics under uniaxial loading. *Smart Materials and Structures*, 8(4):441–459, 1999.
- M. Kamlah y C. Tsakmakis. Phenomenological modelling of the nonlinear electro-mechanical coupling in ferroelectrics. *International Journal of Solids and Structures*, 36:669–695, 1999.
- M. Kamlah, A.C. Liskowsky, R.M. McMeeking, y H. Balke. Finite element simulation of a polycrystalline ferroelectric based on a multidomain single crystal switching model. *International Journal of Solids and Structures*, 42(9-10):2949–2964, 2005.
- M. Kamlah, B. Laskewitz, y D. Zhou. Ferroelectric ceramics: basic properties and modeling methods. In *Proceedings of the 1st Seminar on “The Mechanics of*

- Multifunctional Materials*”, pages 60–63, Bad Honnef, Germany, 2007. Schroeder J, Lupascu D, Balzani D (eds).
- M. Kekana. A static shape control model for piezo-elastic composite structures. *Composite Structures*, 59(1):129–135, 2003.
- Y.H. Kim y H.G. Beom. Effects of floating electrodes on the reliability of electrostrictive ceramic multilayer actuators. *Smart Materials and Structures*, 19:1–8, 2010.
- S. Klinkel. A phenomenological constitutive model for ferroelastic and ferroelectric hysteresis effects in ferroelectric ceramics. *International Journal of Solids and Structures*, 43:7197 – 7222, 2006.
- D.B. Koconis, L.P. Kollar, y G.S. Springer. Shape control of composite plates and shells with embedded actuators. 1: Voltages specified. *J. Composite Materials*, 28:415–457, 1994.
- M. Kögl y M.L. Bucalem. Analysis of smart laminates using piezoelectric MITC plate and shell elements. *Comput. Struct.*, 83:1153–1163, 2005a.
- M. Kögl y M.L. Bucalem. A family of piezoelectric MITC plate elements. *Comput. Struct.*, 83:1277–1297, 2005b.
- U. Kushnir y O. Rabinovitch. Grain orientation scattering in nonlinear constitutive modeling of piezoelectric-ferroelectric materials. *J Intell Mater Syst Struct*, 18:1149–1163, 2007.
- U. Kushnir y O. Rabinovitch. Non-linear piezoelectric and ferroelectric actuators - analysis and potential advantages. *J Intell Mater Syst Struct*, 19:1077–1088, 2008.
- U. Kushnir y O. Rabinovitch. Advanced piezoelectric-ferroelectric stack actuator. *Sensors and Actuators A: Physical*, 150(1):102 – 109, 2009.
- M. Lagoudas y L.C. Bhattacharyya. On the correspondence between micromechanical models for isothermal pseudoelastic response of shape memory alloys and the preisach model for hysteresis. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2:405–440, 1997.

- R. Lammering. The application of a finite shell element for composites containing piezoelectric polymers in vibration control. *Comput. Struct.*, 41:1101–1109, 1991.
- R. Lammering y S. Mesecke-Rischmann. Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. *Smart Materials and Structures*, 12:904–913, 2003.
- C.M. Landis. Fully coupled, multi-axial, symmetric constitutive laws for polycrystalline ferroelectric ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(1):127–152, 2002.
- C.M. Landis. On the strain saturation conditions for polycrystalline ferroelastic materials. *Transactions of the ASME*, 70:470–478, 2003.
- C.M. Landis. Non-linear constitutive modeling for ferroelectrics. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 8:59–69, 2004.
- H.J. Lee y D. Saravanos. A mixed multi-field finite element formulation for termopiezoelectric composite shell. *Int. J. Solids Struct.*, 37:4949–4967, 2000.
- T. Lee. *High Displacement Piezoelectric Trailing - Edge Flap Mechanism for Helicopter Rotors. PhD Thesis.* University of Maryland, 1999.
- G.A. Lesieutre, G.K. Ottman, y H.F. Hofmann. Damping as a result of piezoelectric energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, 269:991–1001, 2004.
- Y.H. Lim, S.V. Gopinathan, V.V. Varadan, y V.K. Varadan. Finite element simulation of smart structures using an optimal output feedback controller for vibration and noise control. *Smart Materials and Structures*, 8:324–337, 1999.
- C.Y. Lin. *Towards Optimal Strain Actuated Aeroelastic Control. PhD Thesis.* Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- C.Y. Lin, E.F. Crawley, y J. Heeg. Open loop and preliminary closed loop results of a strain actuated active aeroelastic wing. In *Proceedings of the*

- 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pages 1904–1914, New Orleans, LA, 1995. AIAA Journal.
- W. Lu, D.N. Fang, C.Q. Li, y K.C. Hwang. Nonlinear electric-mechanical behavior and micromechanics modelling of ferroelectric domain evolution. *Acta Materialia*, 47(10): 2913–2926, 1999.
- B.M. Luccioni. Constitutive model for fiber-reinforced composite laminates. *Journal of Applied Mechanics*, 73:1–10, 2006.
- C.S. Lynch. The effect of uniaxial stress on the electro-mechanical response of 8/65/35 PLZT. *Acta Materialia*, 44(10):4137–4148, 1996.
- C.S. Lynch. On the development of multiaxial phenomenological constitutive laws for ferroelectric ceramics. *J Intell Mater Syst Struct*, 9:555–563, 1998.
- R. Mani, D.C. Lagoudas, y O.K. Rediniotis. Active skin for turbulent drag reduction. *Smart Materials and Structures*, 17:035004(18pp), 2008.
- M. Martinez y A. Artemev. Finite element analysis of broken fiber effects on the performance of active fiber composites. *Composite Structures*, 88:491–496, 2009.
- G.A. Maugin. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1988.
- G.A. Maugin, J. Pouget, R. Drouot, y B. Collet. *Nonlinear Electromechanical Couplings*. John Wiley and Sons, Chichester, 1988.
- R. McMeeking y C. Landis. A phenomenological multi-axial constitutive switching in polycrystalline ferroelectric ceramics. *International Journal of Engineering Science*, 40:1553–1577, 2002.
- T. Michelitsch y W.S. Kreher. A simple model for the nonlinear material behavior of ferroelectrics. *Acta Materialia*, 46(14):5085–5094, 1998.

- T. Mori y K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571–574, 1973.
- A.H. Muliana. A micromechanical formulation for piezoelectric fiber composites with nonlinear and viscoelastic constituents. *Acta Materialia*, 58:3332–3344, 2010.
- C. Nam y Y. Kim. Optimal design of composite lifting surface for flutter suppression with piezoelectric actuators. *AIAA Journal*, pages 1897–1904, 1995.
- Q.H. Nguyen y S.B. Choi. A new approach for dynamic modeling of an electrorheological damper using a lumped parameter method. *Smart Materials and Structures*, 18:1–11, 2009.
- G.M. Odegard. Finite element analysis of broken fiber effects on the performance of active fiber composites. *Acta Materialia*, 52:5315–5330, 2004.
- J.S. Park y J.H. Kim. Analytical development of single crystal macro fiber composite actuators for active twist rotor blades. *Smart Materials and Structures*, 14:745–753, 2005.
- V.Z. Parton y B.A. Kudryavtsev. *Electromagnetoelasticity. Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.
- Y. Pasco y A. Berry. A hybrid analytical/numerical model of piezoelectric stack actuators using a macroscopic nonlinear theory of ferroelectricity and a preisach model of hysteresis. *J Intell Mater Syst Struct*, 15:375–386, 2004.
- A. Pathak y R.M. McMeeking. Three-dimensional finite element simulations of ferroelectric polycrystals under electrical and mechanical loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:663–683, 2008.
- E. Patoor, A. Eberhardt, y M. Berveiller. Micromechanical modelling of shape memory behavior. In *Mechanics of Phase Transformations and Shape Memory Alloys*, pages 23–37. ASME AMD, 1994.

- D. Peirce, C.F. Shih, y A. Needleman. A tangent modulus method for rate dependent solids. *Computer and Structures*, 18:875–887, 1984.
- H.E. Pettermann y S. Suresh. A comprehensive unit cell model: a study of coupled effects in piezoelectric 1-3 composites. *International Journal of Solids and Structures*, 37:5447–5464, 2000.
- E. Preisach. Über die magnetische nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*, 94:277–302, 1935.
- J.N. Reddy. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. *Engineering Structures*, 21(7):568–593, 1999.
- D.H. Robbins y J.N. Reddy. Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. *Computers Structures*, 41:265–279, 1991.
- J.P. Rodgers y N.W. Hagood. Hover testing of a 1/6TH Mach-scale CH-47D blade with integral twist actuation. *Presented at the 9th International Conference on Adaptive Structures and Technology. Cambridge, Ma*, 1998.
- R.L. Roglin y S.V. Hanagud. A helicopter with adaptive rotor blades for collective control. *Smart Materials and Structures*, 5:76–88, 1996.
- D. Saravanos. Damped vibration of composite plates with passive piezoelectric-resistor elements. *Journal of Sound and Vibration*, 221:867–885, 1999.
- D.A. Saravanos. Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures. *AIAA J.*, 35:1327–1333, 1997.
- D.A. Saravanos, P.R. Heyliger, y D.A. Hopkins. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plate structures. *International Journal of Solids and Structures*, 34:359–378, 1997.
- A.S. Semenov, A.C. Liskowsky, y Balke H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81:1298–1340, 2009.

- M.H.H. Shen. Analysis of beams containing piezoelectric sensors and actuators. *Smart Materials and Structures*, 3:439–447, 1994.
- G. Shirane, F. Jona, y F. Pepinsky. Some aspects of ferroelectricity. *Proceedings of the IRE*, pages 1738–1793, 1955.
- H.M. Shodja, M.H. Kargarnovin, y R. Hashemi. Electroelastic fields in interacting piezoelectric inhomogeneities by the electromechanical equivalent inclusion method. *Smart Materials and Structures*, 19(3):1–12, 2010.
- J.C. Simo y T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*, volume 7. Springer, New York, 1998.
- J.C. Simo y R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:101–118, 1985.
- SIMULIA. *ABAQUS Standard User's Manual V6.6*. SIMULIA, 2005. URL <http://www.simulia.com>.
- Smart-Material. What is a Macro Fiber Composite (MFC)? *Smart-Material Corp.*, 2010. URL <http://www.smart-material.com>.
- H.A. Sodano, G. Park, y D.J. Inman. An investigation into the performance of macro-fiber composites for sensing and structural vibration applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18:683–697, 2004.
- O. Song, L. Librescu, y C.A. Rogers. Application of adaptive technology to static aeroelastic control of wing structures. *AIAA Journal*, 30(1):2882–2889, 1992.
- A. Suleman y A. P. Costa. Adaptive control of an aeroelastic flight vehicle using piezoelectric actuators. *Computer and Structures*, 82:303–1314, 2004.
- A. Suleman y V.B. Venkayya. A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezoelectric layers. *J Intell Mater Syst Struct*, 6:776–782, 1995.

- K.Y. Sze y Y.S. Pan. Hybrid finite element models for piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*, 226(3):519 – 547, 1999.
- P. Tan y L. Tong. Micromechanics models for non-linear behavior of piezoelectric-fiber-reinforced composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38: 8999–9032, 2001.
- S.R. Thirupathi, P. Seshu, y N.G. Naganathan. A finite-element static analysis of smart turbine blades. *Smart Materials and Structures*, 6:607–615, 1997.
- M.W.E. Toledo, L.G. Nallim, y B.M. Luccioni. A micro-macromechanical approach for composite laminates. *Mechanics of Materials*, 40:885–906, 2008.
- H.S. Tzou y C.I. Tseng. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: A piezoelectric finite element approach. *Journal of Sound and Vibration*, 138:17–34, 1990.
- H.S. Tzou y R. Ye. Analysis of piezoelectric systems with laminated piezoelectric triangular shell elements. *AIAA Journal*, 34:110–115, 1996.
- H.S. Tzou, C.I. Tseng, y H. Bahrami. A piezoelectric hexahedron finite element applied to design of smart continua. *Finite Elem Analy Des*, 16:27–42, 1994.
- MathWorks. *MATLAB v5.2 User's Manual*, 1998. URL <http://www.mathworks.com>.
- V.K. Varadan, K.J. Vinoy, y S. Gopalakrishnan. *Smart Material Systems and MEMS: Design and Development Methodologies*. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- V.V. Varadan, L. Chin, y V.K. Varadan. Finite element modeling of extensional electroacoustic transducers. *Smart Materials and Structures*, 2:201–207, 1993.
- S.S. Vel y A.J. Goupee. Multiscale thermoelastic analysis of random heterogeneous materials. Part I: Microstructure characterization and homogenization of material properties. *Computational Material Science*, 48(1):22–38, 2010.

- B.K. Wada, J.L. Fanson, y E.F. Crawley. Adaptive structures. *Adaptive Structures*, ed. B. K. Wada. ASME, New Cork, pages 1–8, 1989.
- K.W. Wagner. Explanation of the dielectric behavior on the basis of the Maxwell theory. *Arch. Electrotech*, 2:371–387, 1914.
- B. Wang. Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structures*, 29(3):293–308, 1992.
- J. Wang, S.Q. Shi, L.Q. Chen, Y. Li, y T.Y Zhang. Phase-field simulations of ferroelectric/ferroelastic polarization switching. *Acta Materialia*, 52(3):749 – 764, 2004.
- W.C. Wang, L.Y. Wu, L.W Chen, y C.M. Liu. Acoustic energy harvesting by piezoelectric curved beams in the cavity of a sonic crystal. *Smart Materials and Structures*, 19:1–7, 2010.
- M. Wilbur, P.H. Mirick, W.T. Yeager Jr., C. W. Langston, C.E.S. Cesnik, y S.J Shin. Vibratory loads reduction testing of the NASA/ARMY/MIT active twist rotor. *American Helicopter Society 57th Annual Forum, Washington, DC, May 9-11, 2001*, 2001.
- C.B. Williams y R. Yates. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. *Sensors and Actuators A: Physical*, 52:8 – 11, 1996.
- Y. Yu, X. N. Zhang, y S. L. Xie. Optimal shape control of a beam using piezoelectric actuators with low control voltage. *Smart Materials and Structures*, 18:1–15, 2009.
- W. Zeng, M.T. Manzari, J.D. Lee, y Y.L. Shen. Fully coupled non-linear analysis of piezoelectric solids involving domain switching. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:13–34, 2003.
- H.Y. Zhang y Y.P. Shen. Three-dimensional analysis for rectangular 1-3 piezoelectric fiber-reinforced composite laminates with the interdigitated electrodes under electromechanical loadings. *Composites: Part B*, 37:603–611, 2006.

- D. Zhou. *Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics. PhD Thesis*. Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, 2003.