

MODELO PARA COMPUESTOS PIEZOELÉCTRICOS UTILIZADOS EN CONTROL ACTIVO

Ahmad Eduardo Guennam

TESIS PRESENTADA COMO REQUERIMIENTO
PARCIAL PARA ACCEDER AL GRADO ACADÉMICO
DE MAGÍSTER EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

INSTITUTO DE ESTRUCTURAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN
FACEYT
SAN MIGUEL DE TUCUMÁN

ABRIL DE 2005

RESUMEN

En esta tesis se estudian principalmente los laminados elaborados con fibras piezoeléctricas polarizados con electrodos interdigitales, como así también su utilización en sistemas de control activo de vibraciones.

Se analiza la manera de determinar los valores de las constantes constitutivas del compuesto a partir de las de las fibras, la resina y las características geométricas, de modo de obtener las propiedades electromecánicas de un material homogéneo equivalente al dispositivo completo. Esto se realiza siguiendo dos enfoques. Uno mesomecánico, en el que se emplea el método de elementos finitos y el otro a nivel macromecánico, utilizando una teoría de mezclas generalizada para contemplar el aspecto eléctrico y tener en cuenta las distintas formas de trabajo de los componentes en las diferentes direcciones.

Como aplicación, se realizan ejemplos de control de vibraciones estructurales. Los modelos estructurales se realizan con el programa comercial de elementos finitos ABAQUS, utilizando para modelar los actuadores piezoeléctricos, las propiedades de los laminados estudiados obtenidas con el macromodelo.

Se desarrolla un algoritmo para generar una interfase entre ABAQUS y MATLAB y de esta manera, se obtienen las ecuaciones de estado a partir de los modelos de elementos finitos.

Se analiza el control activo de vibraciones de dos tipos básicos de estructuras. En primer lugar, una viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos adheridos en diferentes posiciones. En segundo lugar, se estudia una entidad estructural de típico uso aeronáutico, constituida por un cajón monocelda de paredes delgadas con actuadores adheridos en su recubrimiento en direcciones $\pm 45^\circ$ para lograr capacidad de control de los modos torsionales.

En ambos ejemplos se utiliza teoría de control óptimo cuadrático con realimentación de estado según una ley lineal, el vector de control se determinó a partir de la minimización de un índice de desempeño cuadrático. Se evalúa el desempeño de las estructuras y se comparan las respuestas de lazo abierto y lazo cerrado para diferentes valores de la ganancia. Para esto se analizan las gráficas del lugar de raíces de la función de transferencia entre el estado y las perturbaciones, las funciones de respuesta en frecuencia, la respuesta estacionaria ante una excitación de ruido blanco y, finalmente, la respuesta transitoria ante una excitación de tipo escalón.

ABSTRACT

Piezoelectric fiber composites polarized with interdigitated electrodes and their use in smart vibration control systems are studied in this thesis.

The values of the constitutive properties of a homogeneous material equivalent to the overall device are obtained from those of the fibers and the matrix and the geometric characteristics. Two different approaches are followed with this purpose, a micromechanical approach based on a detailed finite element modeling and an analysis at the macromechanical level using a generalized theory of mixtures that takes into account electric phenomena and the different ways in which the components are working in each direction.

Application examples related to structural vibration control are presented. Structural models are solved with the finite element code ABAQUS. In modelling the piezoelectric actuators, the values obtained with the macromechanical model are used.

An interface algorithm between the codes ABAQUS and MATLAB is developed in order to obtain the state-space equations from the finite element model.

The active vibration control of two basic types of structures is analyzed. First, a cantilever beam with piezoelectric actuators adhered at different positions along the length is studied. Then, a typical structural entity found in aeronautical applications is analyzed. It consists on a thin walled box beam with actuators adhered to its skin, running at $\pm 45^\circ$ relative to the spanwise beam axis, in order to obtain control authority over torsional modes.

Optimal Linear Quadratic control strategy with state feedback is used for both examples. The control vector is determined from the minimization of a quadratic performance index. The structures performance is assessed and the open loop and closed loop responses for different gain values are compared. With this purpose, the graphics of the root locus of the closed loop transfer function between the state and the perturbations, the frequency response functions, the stationary response under a white noise excitation and finally, the transient response to a rectangular step excitation are analyzed.

RECONOCIMIENTOS

Nunca pensé que llegaría este momento. Mucho menos que sería tan difícil escribir lo que siento. Quizás por la carencia de expresiones que dispongo para manifestar el reconocimiento hacia aquellas personas que me acompañaron durante esta etapa.

Quiero agradecer a todas las personas que forman parte del Instituto de Estructuras. Al Dr. Rodolfo Danesi y a los miembros de la comisión de admisión, por la confianza y el apoyo al admitirme para el 8º Magíster, y otorgarme la beca que en parte hizo posible mis estudios.

A mi tutora, Bibiana Luccioni, de quien recibí incondicional apoyo y alentadora confianza, por cierto, muy estimulante. Así también quiero agradecer al resto de los integrantes de la comisión de evaluación, José Inaudi y Raúl Benito por los lineamientos y comentarios constructivos que tanto contribuyeron a este trabajo.

A mis compañeros del 8º Magíster, Viviana Rougier, Hernán Kunert, Mauricio Schmitz, y Javier Ezeberry, con quienes compartí muy gratos momentos. A Daniel Mafud, Oscar Dip, Abel Jacinto y Juan Carlos Ramallo por la amistad y tantas conversaciones valiosas.

A las personas que fueron mis profesores, por la información, y especialmente por la formación.

A mi familia, esos seres maravillosos que estuvieron y estarán siempre en el sitio más cálido de mi corazón.

A mis queridos hermanos, María y Hassan, simplemente por ser quienes son.

A mi amada Elisa, que siempre está a mi lado y me acompañó en momentos muy dolorosos y en otros tan alegres.

Pude concretar este trabajo, en parte, gracias al interés por el conocimiento. Agradezco a Dios esa invaluable curiosidad por conocer el mundo que me rodea. Por el estímulo que recibí desde la infancia y todo lo que me brindaron, no tengo palabras para manifestar el reconocimiento hacia mis padres, el que de algún modo quedará perpetuado en las páginas de la eternidad.

A mis amados hermanos.

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos.....	V
Lista de Figuras.....	VIII
Lista de Tablas.....	XI
Notación.....	XII
Capítulo 1: <i>Introducción</i>	1
1.1.Descripción del problema.....	1
1.2.Importancia y aplicaciones del tema.....	3
1.3.Estado del Arte.....	9
1.4.Objetivos de la tesis.....	11
1.5.Contenidos de la tesis.....	12
Capítulo 2: <i>Materiales piezoeléctricos y su utilización en sistemas de control</i>	14
2.1.Breve reseña histórica.....	14
2.2.Conceptos de electromagnetismo.....	15
2.3.Descripción del comportamiento de los materiales piezoeléctricos y sus propiedades.....	16
2.3.1.Introducción.....	16
2.3.2.Materiales ferroeléctricos.....	17
2.3.3.Ecuaciones constitutivas.....	20
2.3.4.Propiedades de los principales materiales piezoeléctricos utilizados en sistemas de control activo.....	22
2.4.Clasificación y descripción de los distintos tipos de dispositivos de control diseñados con materiales piezoeléctricos.....	25
2.4.1.Introducción.....	25
2.4.2.Dispositivos tipo pila.....	25
2.4.3.Dispositivos tipo parches elaborados con fibras piezoeléctricas.....	26
Anexo 2.1.....	31
Capítulo 3: <i>Método de elementos finitos aplicado al análisis de estructuras construidas con materiales piezoeléctricos</i>	32
3.1.Introducción.....	32
3.2.Obtención de las ecuaciones básicas de elementos finitos.....	33
3.2.1.Ecuaciones diferenciales del problema.....	33
3.2.2.Obtención de la forma variacional como una generalización del principio de Hamilton.....	35

3.2.3. Derivación de las ecuaciones de elementos finitos	37
3.3. Estado del Arte.....	41
3.3.1. Elementos Sólidos	42
3.3.2. Elementos de Cáscara.....	43
3.3.3. Elementos de Placa	44
3.3.4. Elementos de Viga.....	47
3.3.5. Aplicaciones y tendencias actuales.....	47
Capítulo 4: <i>Modelo para compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas polarizados con electrodos interdigitales</i>	
4.1. Introducción	49
4.2. Análisis de estructuras activas con compuestos piezoeléctricos, utilizando el método de elementos finitos	51
4.3. Obtención de las propiedades materiales equivalentes del compuesto piezoeléctrico	52
4.3.1. Mesomodelo	55
4.3.1.1. Descripción del modelo de elementos finitos.....	55
4.3.1.2. Discretización	56
4.3.1.3. Materiales	56
4.3.1.4. Condiciones de borde y cargas	57
4.3.1.5. Determinación de las constantes materiales a partir del modelo de elementos finitos	59
4.3.1.6. Resultados.....	61
4.3.2. Macromodelo.....	63
4.3.2.1. Desarrollo	64
4.3.2.2. Hipótesis	64
4.3.2.3. Generación.....	65
4.3.2.4. Resultados	69
Capítulo 5: <i>Ejemplos de Aplicación</i>	
5.1. Introducción	73
5.2. Desempeño y características de los sistemas de control.....	75
5.2.1. Lugar de raíces.....	76
5.2.2. Respuesta en frecuencia.....	77
5.2.3. Respuesta estacionaria a ruido blanco	78
5.2.4. Aplicación del Macromodelo en sistemas de control activo realimentado	79
5.3.1. Control de vibraciones flexionales de una viga en voladizo	79
5.3.1.1. Descripción del problema.....	79
5.3.1.2. Resultados.....	82
5.3.2. Control de vibraciones torsionales de una estructura tipo cajón	94
5.3.2.1. Descripción del modelo	94
5.3.2.2. Lugar de raíces.....	97
5.3.2.3. Respuesta en frecuencia.....	99
5.3.2.4. Respuesta estacionaria a ruido blanco	100
5.3.2.5. Respuesta transitoria.....	100
Anexo 5.1.....	102
Capítulo 6: <i>Conclusiones</i>	
6.1. Introducción	106
6.2. Conclusiones	107
6.3. Recomendaciones para trabajos futuros	110

Referencias: 112

Apéndice A1: Métodos variacionales aplicados a la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde. Aplicación a la dinámica del continuo piezoeléctrico 119

A1.1. Introducción 119

A1.2. Definiciones 120

 A1.2.1. Espacio de Hilbert 120

 A1.2.2. Operador 121

 A1.2.3. Operador lineal 121

 A1.2.4. Operador simétrico 122

 A1.2.5. Operador positivo 122

A1.3. Teorema de mínimo del funcional cuadrático 122

A1.4. Condiciones de borde *no homogéneas* 124

A1.5. Aplicación a un problema mecánico estático 125

 A1.5.1. Condiciones de borde *homogéneas* 125

 A1.5.2. Condiciones de borde *no homogéneas* 126

A1.6. Aplicación a un problema piezoeléctrico estático 129

 A1.6.1. Condiciones de borde *homogéneas* 129

 A1.6.2. Condiciones de borde *no homogéneas* 131

A1.7. Aplicación a un problema mecánico dinámico 134

A1.8. Aplicación a un problema piezoeléctrico dinámico 137

Lista de Figuras

Figura 1.1:	Esquemas de dos tipos básicos de estructuras controladas	2
Figura 1.2:	Respuesta de un material piezoeléctrico, efecto directo.	3
Figura 2.1:	Clasificación de los cristales.....	17
Figura 2.2:	Respuesta de una probeta de PZT-5H a un campo eléctrico cíclico (Ghandi, 1998)	18
Figura 2.3:	Estructura de perovskita	19
Figura 2.4:	Secuencia del proceso de polarización de un medio ferroeléctrico. Nótese la existencia de los dominios polares antes de la aplicación del campo..	20
Figura 2.5:	Esquema de la celda unitaria del cuarzo. a) No deformada. b) Comprimida. c) Traccionada	23
Figura 2.6:	Distinción entre dispositivos tipo 3-1 y tipo 3-3	25
Figura 2.7:	Esquema de un dispositivo tipo pila y un adaptador de fuerzas	26
Figura 2.8:	Aplicación de actuadores tipo pila, (Lee, 1999).....	26
Figura 2.9:	Esquema de un parche piezoeléctrico elaborado con fibras	27
Figura 2.10:	Esquema de una fibra piezoeléctrica luego del proceso de polarización.....	28
Figura 3.1:	Elemento sólido con sus correspondientes grados de libertad nodales (mecánicos y eléctricos).....	38
Figura 3.2:	Esquema del elemento de placa y la variación del potencial eléctrico propuesto por Chee et al. (2000).	45
Figura 4.1:	Esquema de una porción de laminado piezoeléctrico.....	49
Figura 4.2:	Esfuerzos en dos direcciones octogonales, generados en un laminado piezoeléctrico	50
Figura 4.3:	Pala de helicóptero con compuestos piezoeléctricos (Rodgers y Hagood, 1998).....	51
Figura 4.4:	Aspecto del mallado de una fibra solamente, en una longitud que abarca tres electrodos consecutivos (Corte longitudinal).....	52

Figura 4.5:	Esquema de una celda unitaria del laminado piezoeléctrico	53
Figura 4.6:	Esquema de una celda unitaria del laminado. Corte transversal	54
Figura 4.7:	Esquema del modelo utilizado para analizar la celda unitaria	55
Figura 4.8:	Modelos de elementos finitos utilizados para analizar el modelo microscópico de la celda unitaria del compuesto piezoeléctrico	56
Figura 4.9:	Distribución de la componente de campo eléctrico paralelo a la fibra. Relación de volumen de fibra: 0.708; cociente de relación dieléctrica entre fibra y resina: 10	62
Figura 4.10:	Distribución del campo eléctrico y la variación en la dirección del mismo entre los electrodos (círculos rojos) y el plano de simetría longitudinal (izquierda)	62
Figura 4.11:	Magnitud y distribución de la componente de campo eléctrico paralelo a la fibra para valores de χ^{Fibra} 10 y 100 veces mayor al de la matriz	63
Figura 4.12:	Esquema de la obtención del macromodelo mediante el ensamblaje en tres etapas	64
Figura 4.13:	Valores de la componente C_{33} del laminado referida a la correspondiente a la fibra, para diferentes valores C_{11} de la fibra. $\frac{\epsilon_{33}^{Fibra}}{\epsilon^{Resina}} = 500$	70
Figura 4.14:	Constante piezoeléctrica e_{31} del laminado, referida a la correspondiente de la fibra para diferentes relaciones entre las permitividades dieléctricas de la fibra y la resina	71
Figura 4.15:	Constante piezoeléctrica e_{33} del laminado, referida a la correspondiente de la fibra para diferentes relaciones entre las permitividades dieléctricas de la fibra y la matriz	71
Figura 5.1:	Viga en voladizo provista de parches actuadores	79
Figura 5.2:	Viga en voladizo, detalle de la malla de elementos finitos y nodos retenidos para condensar los grados de libertad	79
Figura 5.3:	Formas modales de la Viga 1	82
Figura 5.4:	Formas modales de la Viga 2	83
Figura 5.5:	Formas modales de la Viga 3	84
Figura 5.6:	Lugar de raíces del modelo correspondiente a la viga 1	85
Figura 5.7:	Detalle ampliado de la zona encerrada en el rectángulo en la figura 5.6	85
Figura 5.8:	Lugar de raíces del modelo correspondiente a la viga 2	86
Figura 5.9:	Detalle ampliado de la zona encerrada en el rectángulo en la figura 5.8	86
Figura 5.10:	Lugar de raíces del modelo correspondiente a la viga 3	87
Figura 5.11:	Detalle ampliado de la zona encerrada en el rectángulo en la figura 5.10	87

Figura 5.12: Respuesta en frecuencia de la viga 1. a) Desplazamiento del extremo libre de la viga 1 ante la aplicación de una carga de 0.1667 N/m uniformemente distribuida a lo largo de la misma, b) voltaje de control aplicado al parche nro 1. c) voltaje de control aplicado al parche nro 2	88
Figura 5.13: Respuesta en frecuencia de la viga 2. a) Desplazamiento del extremo libre de la viga 2 ante la aplicación de una carga de 0.1667 N/m uniformemente distribuida a lo largo de la misma, b) voltaje de control aplicado al parche nro 1. c) voltaje de control aplicado al parche nro 2	89
Figura 5.14: Respuesta en frecuencia de la viga 3. a) Desplazamiento del extremo libre de la viga 3 ante la aplicación de una carga de 0.1667 N/m uniformemente distribuida a lo largo de la misma, b) voltaje de control aplicado al parche nro 1. c) voltaje de control aplicado al parche nro 2	90
Figura 5.15: Respuesta estacionaria a ruido blanco de las vigas 1, 2 y 3	91
Figura 5.16: Respuesta transitoria de la viga 1. a) Carga aplicada. b) Respuesta transitoria de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales de control aplicados a los parches nro 1 y nro 2	92
Figura 5.17: Respuesta transitoria de la viga 2. a) Carga aplicada. b) Respuesta transitoria de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales de control aplicados a los parches nro 1 y nro 2	93
Figura 5.18: Respuesta transitoria de la viga 3. a) Carga aplicada. b) Respuesta transitoria de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales de control aplicados a los parches nro 1 y nro 2	94
Figura 5.19: Geometría del tramo de superficie sustentadora analizada, con los parches piezoeléctricos adheridos sobre su recubrimiento	95
Figura 5.20: Detalle de un sector del cajón modelado	95
Figura 5.21: Malla de elementos finitos utilizada para analizar el cajón con los parches piezoeléctricos	96
Figura 5.22: Detalle de la malla de elementos finitos de un sector del cajón con los parches piezoeléctricos, los círculos rojos representan los electrodos positivos y los rojos los negativos	96
Figura 5.23: Lugar de raíces del modelo correspondiente al cajón de torsión	98
Figura 5.24: Detalle ampliado correspondiente a los primeros modos	98
Figura 5.25: Respuesta en frecuencia del cajón. a) Desplazamiento del punto 20. b) Giro del extremo libre. c) voltaje de control aplicado al parche nro 1	99
Figura 5.26: Respuesta estacionaria a ruido blanco. Covarianza de la salida y vector de control en función del factor de peso utilizado para determinar la matriz de ganancias	100
Figura 5.27: Respuesta transitoria del cajón. a) Perturbación. b) Giro del extremo libre para las condiciones de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales eléctricos de control aplicados a los parches nro 1 y nro 9	101

Lista de Tablas

Tabla 4.1: Propiedades constitutivas de la cerámica PZT-5H.....	57
Tabla 4.2: Resumen de las condiciones de borde para simular la simetría.....	58
Tabla 4.3: Resumen de las condiciones de borde para obtener las componentes del tensor elástico.....	58
Tabla 4.4: Condiciones de borde utilizadas para la obtención de las componentes del tensor piezoeléctrico.....	60
Tabla 5.1: Dimensiones generales de la viga analizada.....	79
Tabla 5.2: Propiedades constitutivas de los parches utilizados.....	80
Tabla 5.3: Posiciones de los actuadores de las vigas analizadas.....	81

Notación

Términos Latinos

$[A]$:	Matriz de lazo abierto del sistema, en el espacio de estados
$[A_c]$:	Matriz de lazo cerrado del sistema, en el espacio de estados
$[B]$:	Matriz de control
C_{ijkl} :	Tensor elástico
$[C]$:	Matriz constitutiva elástica del material
D_i :	Vector desplazamiento eléctrico
d_{ikl} :	Tensor piezoeléctrico en términos de deformaciones
e_{ikl} :	Tensor piezoeléctrico en términos de tensiones
$[e]$:	Tensor piezoeléctrico expresado en forma matricial
$[E]$:	Matriz de perturbaciones
E_i :	Vector campo eléctrico
F_e :	Vector consistente de cargas eléctricas nodales
f_i :	Fuerzas de volumen
$\{f^{pert}\}$:	Vector de perturbaciones
F_i :	Vector de fuerzas superficiales
F_m :	Vector consistente de fuerzas mecánicas nodales
$[Gan]$:	Matriz de ganancias

$[H_{xf}]$:	Matriz de respuesta en frecuencia que relaciona el estado con las perturbaciones
$[H_{yf}]$:	Matriz de respuesta en frecuencia que relaciona la salida con las perturbaciones
$[H_{uf}]$:	Matriz de transferencia, relaciona el vector de control con las perturbaciones
I_w :	Intensidad de ruido blanco
L :	Lagrangeano
m_i :	Momento bipolar de una molécula o un cristal
n_i :	Vector unitario normal a la superficie exterior del continuo
$[N_e]$:	Matriz de interpolación del potencial eléctrico
$[N_m]$:	Matriz de interpolación de los desplazamientos mecánicos
P_i :	Vector de polarización
P_{UU} :	Covarianza del vector de control
P_{XX} :	Covarianza del vector de estados
P_{YY} :	Covarianza del vector de salidas
$\{q_m\}$:	Vector de desplazamientos mecánicos nodales
$\{q_e\}$:	Vector de potenciales eléctricos nodales
Q :	Carga eléctrica prescrita en S^Q
s :	Variable de Laplace
S^φ :	Porción de superficie exterior del continuo donde se prescriben potenciales eléctricos
S^Q :	Porción de superficie exterior del continuo donde se prescriben cargas eléctricas
t :	tiempo
T :	Energía cinética del cuerpo
$\{u\}$:	Vector de control

u_i :	Vector de velocidades
U :	Energía potencial total extendida
U_∞ :	Velocidad de la corriente libre
V :	Potencial eléctrico prescrito en S^φ
$\{x\}$:	Vector de estados
$\{y\}$:	Vector de salidas

Términos Griegos

$[\chi]$:	Matriz de permitividad dieléctrica
χ_0 :	Permitividad dieléctrica del vacío
χ_{ij} :	Permitividad dieléctrica del medio
δ :	Delta de Dirac
δ_{ij} :	Delta de Kronecker
$\{\varepsilon\}$:	Componentes del tensor de deformaciones expresado en forma vectorial
ε_{ij} :	Tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy
φ :	Potencial eléctrico
γ_q :	Factor de peso para el vector de estado
γ_r :	Factor de peso para el vector de control
λ :	Autovalores de la matriz $[A_c]$
ρ :	Densidad del material
ρ_{libres} :	Densidad volumétrica de cargas libres
η_{ij} :	Susceptibilidad eléctrica
σ_{ij} :	Tensor de tensiones
$\{\sigma\}$:	Componentes del tensor de tensiones expresado en forma vectorial
ζ :	Amortiguamiento

- ω_n : Frecuencia natural
- ω_{ij} : Tensor de rotaciones

Capítulo 1

Introducción

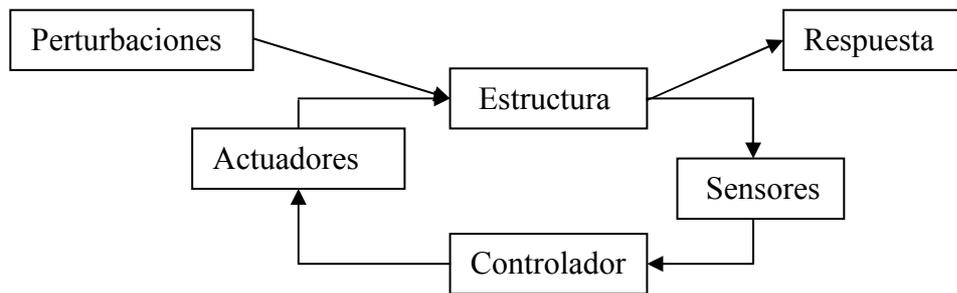
1.1. Descripción del problema

Se denominan estructuras inteligentes a aquellas que poseen actuadores y sensores altamente integrados, lógicas de control y sistemas electrónicos ordenados según una arquitectura jerárquica de control, de tal manera que pueden sensar y responder a estímulos dentro de su entorno de trabajo, Wada et al. (1989) . La figura 1.1a muestra un diagrama en bloques de tales sistemas. Los dispositivos actuadores y sensores son componentes fundamentales en dichas estructuras. Wada et al. (1989) al califican a las mismas como las de mayor nivel de complejidad e interrelación entre sus sistemas componentes.

Uno de los avances más recientes en la ingeniería estructural y de materiales yace en el campo de las estructuras inteligentes construidas con materiales adaptativos. Esto permite que los actuadores y sensores formen parte de la estructura base, lo que representa una gran ventaja desde el punto de vista constructivo y de diseño. Entre los distintos tipos de materiales adaptativos disponibles, se pueden mencionar las aleaciones con memoria de forma (Roglin et al, 1996), los materiales electrostrictivos, los materiales piezoeléctricos y los fluidos electrorreológicos, entre otros. La figura 1.1b muestra un esquema de las citadas estructuras.

Es grande la variedad de dispositivos actuadores y sensores utilizados actualmente en estructuras inteligentes, pero los construidos con materiales piezoeléctricos están despertando un particular interés en la comunidad científica y tecnológica en los últimos años (Franco Correia et al, 2000). Esto obedece básicamente a que los dispositivos construidos con estos materiales son más simples y ofrecen mayor confiabilidad que otros dispositivos destinados a brindar las mismas prestaciones.

a) Estructura Inteligente



b) Estructura Inteligente construida con materiales adaptativos

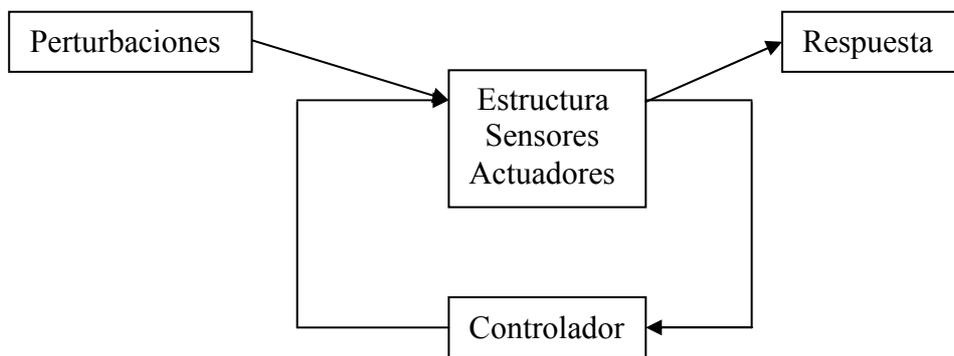


Figura 1.1: Esquemas de dos tipos básicos de estructuras controladas

Todos los materiales, se polarizan en presencia de un campo eléctrico, originándose en los mismos, momentos dipolares. Este desplazamiento de cargas a partir de la posición de equilibrio altera las dimensiones del sólido. Dicho efecto se denomina electro-estricción. Sin embargo, una tensión mecánica aplicada a un material neutro no puede inducir momentos dipolares. Si la distorsión mecánica provoca una diferencia de potencial, el efecto obedece a la presencia de dipolos anclados en la estructura cristalina sin un centro de simetría. En el año 1880, los hermanos Curie descubrieron que ciertos cristales asimétricos como el cuarzo, Tourmaline y la sal de Rouchelle presentaban el fenómeno piezoeléctrico (Cady, 1946). El efecto piezoeléctrico fue utilizado por primera vez durante la primera guerra mundial por el físico francés P. Langevin en mediciones e investigaciones hidroacústicas (Rogacheva, 1994). Los citados materiales, comprimidos en direcciones particulares generan una diferencia de potencial (Efecto directo), y la aplicación de una diferencia de potencial genera distorsión mecánica (efecto inverso). La piezoelectricidad se caracteriza por una correspondencia uno a uno entre el efecto directo e inverso.

El efecto directo hace que los citados materiales puedan usarse como actuadores, mientras que el efecto inverso permite su utilización como sensores.

Haciendo uso de las propiedades piezoeléctricas pueden construirse dispositivos que experimenten deformación ante la aplicación de un campo eléctrico y viceversa, los cuales pueden adherirse a una estructura cualquiera. En tales condiciones, la deformación del dispositivo será acompañada por la estructura pudiendo cambiar la forma de la misma y conferirle movimiento. Cuando se utiliza de esta forma, el dispositivo se denomina actuador (Yan et al, 2003). El campo eléctrico aplicado sobre el actuador piezoeléctrico puede variarse acorde a una ley de control determinada para obtener la respuesta deseada de la estructura.

Por otra parte, haciendo uso del efecto piezoeléctrico directo, pueden usarse los dispositivos para sensor desplazamientos (Kekana 2003) y aceleraciones y en ese caso se denominan sensores.

Los actuadores piezoeléctricos suelen denominarse genéricamente como actuadores de estado sólido, ya que, a nivel macroscópico, no se distinguen mecanismos, sino que éstos están reemplazados por las cualidades del propio material.

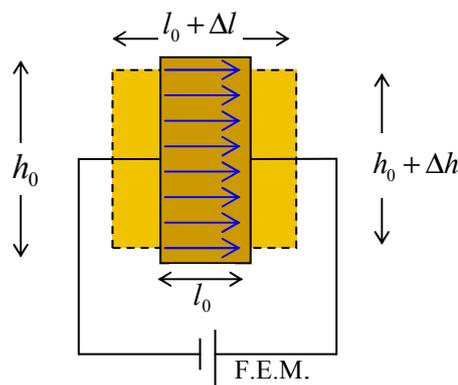


Figura 1.2: Respuesta de un material piezoeléctrico, efecto directo.

1.2. Importancia y aplicaciones del tema

Las cualidades exhibidas por los materiales piezoeléctricos los hacen potencialmente aptos para el control activo de vibraciones, término que reúne todos los fenómenos en que se manifiestan movimientos cíclicos de estructuras. A modo de ejemplo se pueden citar los siguientes:

- Oscilaciones por desbalanceo de máquinas (Motores, ventiladores, rotores).
- Fenómenos de acoplamiento aeroelástico en alas de aviones, palas de helicópteros, superficies de control (Lin C.Y, 1996; Nam et al, 1995; Cesnik et al, 2004; Suleman et al, 2004) y álabes de turbinas (Thirupathi et al, 1997).

- Oscilaciones debido a la aplicación de cargas transitorias, como ráfagas o deflexión brusca de un comando.
- Fenómenos acústicos (Balachandran et al, 1996; Lim et al, 1999; Bevan, 2001).

Otras aplicaciones de remarcada importancia son:

- Micro-posicionamiento.
- Control de forma (Koconis et al, 1994; Kekana, 2003;).
- Construcción de micro-generadores piezoeléctricos pensados para instalarse en estructuras que se sabe, estarán en constante movimiento durante su vida de servicio, (Williams et al, 1996; Glynne-Jones et al, 2001; Lesieutre et al, 2004). Lu et al, (2004) utilizaron el método de elementos finitos para modelar y analizar el desempeño de un micro generador piezoeléctrico, considerando además, algunos aspectos de diseño.

Desde los primeros días de la aviación se ha observado una forma particular de oscilación de las alas y superficies de control de las aeronaves. En esta tesis se tratarán con más detalle las aplicaciones destinadas a controlar las vibraciones y deformaciones en el marco de la aeroelasticidad. La cual estudia la interrelación entre una estructura elástica y el fluido en que está inmersa. Las deformaciones del cuerpo y las fuerzas ejercidas por el fluido sobre el mismo se encuentran fuertemente acopladas. Los campos de la aeroelasticidad se incluyen en el diseño de aviones, helicópteros, puentes, líneas de transmisión de energía eléctrica y chimeneas.

A continuación se presenta una breve descripción de distintos fenómenos de interés para la aeroelasticidad en orden de complejidad creciente, (García-Fogeda et al, 1992; Scanlan et al, 1968; Fung, 1955; Bisplinghoff et al, 1962).

Divergencia: La redistribución de las cargas aerodinámicas como consecuencia de la deformación estructural cambia la sustentación de un ala flexible con relación a la que tendría si fuese perfectamente rígida. Existe una velocidad límite para la cual la variación de la sustentación como consecuencia de la deformación es igual a la variación de la reacción estructural y no existe ninguna posición de equilibrio estable. A esa velocidad crítica, se la denomina velocidad de divergencia

Inversión del mando: Las cargas aerodinámicas inducidas como consecuencia de la deflexión de los alerones, también inducen deformaciones elásticas que, a su vez, producen

nuevas cargas aerodinámicas sobre el sistema completo ala-alerón. La efectividad del elemento de control cambiará con relación a la del sistema perfectamente rígido y puede aumentar o disminuir dependiendo de la relación entre la carga externa y la deformación. En el caso en que la efectividad de la superficie de control del sistema deformable disminuya con respecto de la del cuerpo rígido, existirá una velocidad de vuelo para la cual dicha efectividad será nula, denominándose velocidad de inversión del mando. A velocidades superiores, las cargas aerodinámicas son mayores que las debidas a la superficie de control y la fuerza neta resultante es opuesta al efecto deseado con la deflexión del elemento de control.

Flutter: Si se tiene un sistema, por ejemplo el ala de un avión, en tierra (velocidad de corriente libre $U_\infty = 0$) y se lo saca de su posición de equilibrio, el sistema empezará a vibrar. Estas vibraciones se amortiguan como consecuencia del amortiguamiento estructural. Cuando el mismo sistema está en vuelo ($U_\infty \neq 0$) y si se lo aparta de su posición de equilibrio puede suceder que el movimiento vibratorio del mismo se amortigüe, permanezca con amplitud constante o se amplifique, dependiendo de que las fuerzas aerodinámicas no estacionarias originadas como consecuencia de la deformación de la estructura suministren o no energía al ala. Si las fuerzas aerodinámicas no estacionarias extraen energía del sistema, el movimiento vibratorio de éste se amortiguará mas rápido que en el caso $U_\infty = 0$; si por el contrario, suministran energía, pueden suceder uno de los siguientes casos:

- i. La energía suministrada es menor que la que el sistema es capaz de disipar. Las oscilaciones se amortiguan a una velocidad inferior a la que lo hacen en el caso de $U_\infty = 0$.
- ii. La energía suministrada es exactamente igual a la que el sistema es capaz de disipar. Las oscilaciones se mantienen indefinidamente con amplitud constante.
- iii. La energía suministrada es mayor que la que el sistema es capaz de disipar. Las oscilaciones se amplifican hasta que se produce la falla estructural.

En definitiva, el hecho de que se produzca uno u otro caso depende de la velocidad de vuelo U_∞ y del ángulo de desfasaje entre el movimiento de la estructura y las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre ella. Se define como velocidad de flutter, $U_{\infty F}$, a la velocidad mas pequeña a la que una cierta estructura, a una densidad y temperatura atmosféricas dadas, tiene oscilaciones armónicas permanentes (caso ii); la frecuencia de dichas oscilaciones se denomina frecuencia de flutter. En las aeronaves, éste fenómeno es de principal interés debido a la inherente flexibilidad de su estructura y las elevadas cargas aerodinámicas que experimentan.

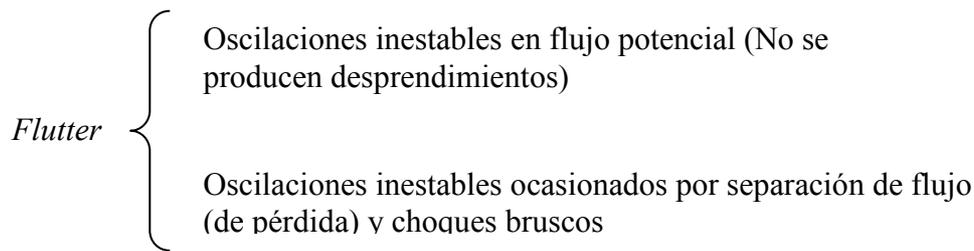
Existen posibilidades de aumentar las velocidades de flutter, instalando en la estructura elementos de control activo y superficies de control para estabilizar el movimiento. Este tipo de dispositivos se estudian en la Aeroservoelasticidad y se accionan automáticamente ya que no se puede contar con la actuación del piloto debido a que las frecuencias a las que se produce son demasiado elevadas para esperar una respuesta efectiva.

Ráfagas: Las condiciones meteorológicas transitorias, tales como corrientes verticales de aire, ondas producidas por la presencia de montañas o turbulencia atmosférica, suponen cargas dinámicas importantes para los aviones. La respuesta del avión a este tipo de excitación se traduce principalmente en esfuerzos adicionales sobre la estructura e incomodidad por los pasajeros. En el diseño estructural, debido a este tipo de acciones hay que considerar no sólo los esfuerzos dinámicos sino también la vida en fatiga del sistema. Las corrientes verticales y las ondas debido a cadenas montañosas se pueden considerar, sin embargo, como ráfagas discretas. Las fuerzas aerodinámicas y de inercia no estacionarias son importantes en este caso pero, a diferencia del problema de flutter, no se pueden estudiar con modelos armónicos, sino que deben contemplarse los efectos transitorios, que complican el problema.

Buffeting y Flutter de pérdida: El flutter por pérdida se puede definir como aquel en el que la superficie sustentadora está en pérdida durante parte del ciclo de oscilación. Este fenómeno es muy común en las palas de los helicópteros y en los álabes de compresores y turbinas de aeroreactores. La pérdida se manifiesta cuando el flujo alrededor de un perfil sustentador alcanza valores de desprendimientos tales que las fuerzas de sustentación caen abruptamente, la pérdida ocurre generalmente cuando los ángulos de ataque, alcanzan valores elevados.

La diferencia entre flutter de pérdida y buffeting es que en el primero el movimiento es periódico y es una inestabilidad real, las fluctuaciones de flujo y las fuerzas aerodinámicas se generan por la oscilación y ésta se mantiene por la energía que el sistema extrae del fluido. En buffeting, las fuerzas aerodinámicas son apenas afectadas por el movimiento de la estructura y estarían presentes aún si la estructura fuese infinitamente rígida. El buffeting ocurre, por ejemplo, en colas de aviones excitadas por la estela que arroja el ala, y en cables de tendido eléctrico cuando son excitados por los torbellinos desprendidos y que forman las calles de Von Kármán.

De lo mencionado anteriormente se puede hacer la siguiente clasificación respecto del fenómeno de flutter:



Para que se manifieste el primer modo, es fundamental el acoplamiento entre varios grados de libertad, experimentos realizados en alas en voladizo mostraron que los movimientos flexionales en todos los puntos a lo largo de la envergadura se encuentran aproximadamente en fase, de la misma manera los movimientos torsionales. Sin embargo, los movimientos de torsión y flexión se encuentran fuera de fase entre sí. El fenómeno de flutter se debe principalmente a esa diferencia de fase, (Fung 1955).

El control de vibraciones originadas por fenómenos aeroelásticos permite ampliar la envolvente de vuelo de las aeronaves. Lin et al (1995) reportaron que, en un ala provista de un mecanismo piezoeléctrico de control, obtuvieron un aumento en la presión dinámica de flutter, del 12% respecto de la correspondiente a la estructura pasiva. En los helicópteros, existen problemas vibratorios que limitan la velocidad de avance y la carga máxima del mismo, incrementan el nivel de ruido y exigen mayor mantenimiento. Durante el vuelo, el rotor principal opera en un complejo campo aerodinámico no estacionario, que produce altos niveles de vibraciones en el rotor y fuselaje, (Cesnik et al, 2004). Cuando las palas cambian el ángulo durante la rotación, se producen también cambios en las condiciones aerodinámicas, (Rodgers et al, 1998). Esto genera fuerzas aerodinámicas sobre la pala, con un contenido de altos armónicos de la velocidad angular del rotor. Por otra parte, los elevados números de Mach (sin alcanzar el régimen supersónico) que se manifiestan en la parte de pala que avanza y los efectos de pérdida que se presentan en la parte que retrocede, constituyen también una importante fuente de cargas oscilatorias que actúan sobre las palas del rotor.

La investigación sobre la utilización de actuadores de estado sólido de deformación inducida ha experimentado un fuerte aumento en los últimos años. Originalmente desarrollado para aplicaciones acústicas con altas frecuencias y pequeños desplazamientos, el campo de aplicación de este revolucionario concepto se encuentra en constante expansión hacia las áreas de diseño mecánico y aeroespacial. Los actuadores de deformación inducida son compactos, confiables y transforman directamente energía eléctrica de entrada en energía

mecánica de salida. Una aplicación inmediata para los DDIES (Dispositivos de Deformación Inducida de Estado Sólido) son los actuadores lineales como los tipo pila. El control de vibraciones en palas de helicópteros (Chen et al, 1996; Rodgers et al, 1998; Wilbur et al, 2001; Cesnik et al, 2004), la atenuación de ruido (Bevan, 2001), la mejora del desempeño de los rotores y la maniobrabilidad, constituyen el principal interés de la comunidad investigadora del área. Los últimos trabajos de investigación publicados buscan una manera eficiente de controlar individualmente las palas sin necesidad de potencia hidráulica en el sistema rotativo. Una de las propuestas más importantes radica en el uso de mecanismos accionados con materiales activos. Al respecto, los más extensamente investigados son:

- Flaps ubicados discretamente a lo largo de la pala, los cuales al ser accionados cambian la configuración del flujo de aire alrededor de la pala, con el consecuente cambio de fuerzas y momentos actuantes sobre la misma, (Lee, 1999).
- Fibras piezoeléctricas distribuidas controlando directamente las deformaciones (generalmente la torsión) de la estructura base de la pala (Rodgers et al, 1998; Wilbur et al, 2001).

La conveniencia de los distintos tipos de dispositivos que se conocen actualmente depende de la aplicación. Para evaluar este aspecto, resulta indispensable contemplar las características de la estructura base.

Las estructuras de uso aeronáutico poseen las siguientes características:

- Las láminas de recubrimiento, que funcionan como paneles de corte, aportan rigidez torsional.
- El espesor de los perfiles aerodinámicos es del orden del 10 a 20 % el valor de la cuerda.
- La rigidez es relativamente baja comparada con otros tipos de estructuras.
- Las cargas aerodinámicas son fuertemente dependientes del estado de deformación y velocidad de deformación.
- Son estructuras muy livianas.
- Se busca el mayor nivel de confiabilidad.

En base a los aspectos mencionados, se puede decir que para lograr capacidad de actuación en torsión se deben incluir dispositivos que generen esfuerzos en el plano según una orientación determinada, sin cambiar sensiblemente la forma de la estructura base. Numerosos

investigadores, encontraron que los dispositivos construidos con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales son una propuesta muy eficiente para tal fin.

Cuando se desea implementar un sistema de control activo es indispensable conocer, entre otras cosas, las prestaciones de los actuadores y respuestas de los sensores. Estas dependen de los materiales que los constituyen y de las relaciones geométricas.

La primera condición restrictiva de diseño, en ambos casos, es la necesidad de obtener los desplazamientos y fuerzas piezoeléctricas suficientes, con peso mínimo de los actuadores. Para ello se requiere, entre otras cosas, contar con modelos que permitan simular el comportamiento de los dispositivos (actuadores y sensores), como así también su efecto sobre la estructura original.

1.3. Estado del arte

Los usos recientes de los piezocerámicos en control activo de estructuras han ilustrado la capacidad de estos materiales para mejorar el desempeño de las mismas. Como aplicación se puede citar el control activo de estructuras aeronáuticas (alas, palas de helicópteros, y superficies de control) destinado a limitar, entre otros fenómenos, las oscilaciones producidas por el acoplamiento aeroelástico. Así se ha demostrado que es posible incrementar la velocidad de flutter y reducir significativamente las amplitudes de vibración. Son numerosas las aplicaciones en la industria aeroespacial y campos relacionados que utilizan o pueden utilizar materiales piezoeléctricos para mejorar el desempeño estructural, monitorear su integridad, mitigar el daño y medir aceleraciones y desplazamientos, Loewy, (1997) analizó los desarrollos realizados en los últimos años de estructuras activas para aplicaciones aeronáuticas.

Cuando las estructuras presentan formas alabeadas y con doble curvatura, resulta difícil alojar en las mismas actuadores monolíticos, como proponían los primeros trabajos de investigación. Así es que los investigadores Bent y Hagood en el año 1992 apoyados por la Oficina de Investigaciones Navales de los Estados Unidos, propusieron el concepto de compuestos reforzados con fibras activas (AFC), que consisten en una serie de fibras y electrodos dispuestos de manera tal de generar un campo eléctrico paralelo a las fibras. El proceso de fabricación de las fibras se realiza mediante el extrudado de una pasta compuesta por un polvo de un material piezoeléctrico y un aglutinante, (Bent, 1997).

La combinación de fibras cerámicas y una matriz blanda proveen mecanismos de transferencia de carga que incrementan la resistencia al daño y permiten tensiones últimas

mayores que los cerámicos monolíticos. Por otro lado, el alineamiento unidireccional de las fibras crea una actuación ortótropa (Bent et al, 1997).

Se han hecho muchos esfuerzos para desarrollar estos compuestos tanto en el ámbito de la fabricación como del modelado de los mismos.

La disposición de electrodos interdigitales mejora el comportamiento de los compuestos con fibras piezoeléctricas. Esto incrementa la efectividad del material piezoeléctrico haciendo posibles mayores deformaciones, ya que la dirección principal de polarización coincide con la dirección axial de las fibras piezoeléctricas (Bent et al, 1997).

En lo que hace al modelado numérico de estos materiales y actuadores, se han desarrollado una serie de enfoques micro-electro-mecánicos para determinar las propiedades efectivas de los compuestos con fibras piezoeléctricas. Estos han sido extensiones lógicas de enfoques previos para acomodar el acoplamiento entre las propiedades mecánicas y de transporte. La solución exacta de las ecuaciones de gobierno acopladas para un continuo piezoeléctrico no es tarea fácil.

La mecánica de materiales fue probablemente el primer enfoque utilizado para modelar compuestos piezoeléctricos, debido a su naturaleza simple. Se ha utilizado también el método de elementos finitos para determinar las propiedades efectivas de estos compuestos (Allik et al, 1970). Bent et al, (1997) presentan ambos enfoques para el caso de los electrodos interdigitales.

La modelación de estructuras construidas con láminas de diferentes características mecánicas e incluyendo algunas de materiales piezoeléctrico, representa un problema bastante complejo. La mayoría de los códigos de elementos finitos comerciales de propósito general no permite resolver este problema en forma directa.

Los primeros modelos desarrollados para placas laminadas resultan de una generalización de las teorías clásicas de placas. De acuerdo a estas teorías, el laminado es analizado como una lámina única con propiedades mecánicas equivalentes. A pesar de su simplicidad, estos modelos representan un compromiso entre precisión y economía. No obstante, para el caso de placas gruesas o con láminas muy anisótropas se pueden encontrar errores significativos en el campo de tensiones.

Ciertos investigadores han tratado de desarrollar modelos de láminas equivalentes admitiendo campos de desplazamientos basados en teorías de deformaciones por corte de alto

orden (Chee et al, 2000), con lo que mejora la capacidad de modelación de los efectos de corte transversal.

La capacidad de modelación de las teorías de lámina equivalente depende de las características del laminado. Estas teorías no permiten la obtención de resultados precisos para las tensiones transversales y las variables eléctricas junto a los bordes del laminado o en regiones donde existen discontinuidades.

Cuando se requiere gran precisión es necesario recurrir a modelos tridimensionales. Allik et al, (1970) desarrollaron un modelo de elementos finitos sólidos para el análisis de estructuras piezoeléctricas. El problema de estos elementos es que no aprovechan las ventajas que presenta la modelación de estructuras laminares.

La capacidad de modelado tridimensional puede alcanzarse utilizando teorías “multiláminas” (Chee et al, 2000, Kekana, 2003), esto es, teorías en las que se supone en cada lámina un determinado campo de desplazamientos y una determinada distribución de tensiones tangenciales con el objeto de satisfacer las condiciones de continuidad de desplazamientos y de equilibrio entre láminas adyacentes. Estas teorías han sido especialmente desarrolladas para estructuras tipo placas o cáscaras en las que existe una diferencia de comportamiento entre dos direcciones en un plano y una tercera dirección a lo largo del espesor.

En general, estas teorías no pueden ser utilizadas directamente cuando se trabaja con laminados de compuestos piezoeléctricos con electrodos interdigitales.

1.4. Objetivos de la tesis

Teniendo en cuenta la cantidad de trabajos de investigación publicados hasta el momento, y la variedad de propuestas de utilización de materiales piezoeléctricos en estructuras inteligentes, resulta interesante desarrollar herramientas de cálculo que permitan diseñar y evaluar los distintos tipos de dispositivos. Para esto es fundamental el conocimiento detallado de los materiales y de las características de las estructuras.

El objetivo principal de esta tesis es analizar las características de los dispositivos elaborados con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales usados actualmente y desarrollar modelos que puedan ser incorporados en modelos de elementos finitos de estructuras aeronáuticas de características reales que permitan simular sistemas de control activo para limitar oscilaciones.

1.5. Contenidos de la tesis

Para poder analizar con profundidad el tema es necesario tener una visión acabada del comportamiento de los materiales piezoeléctricos y su utilización. Al analizar la historia del uso de los mismos, se puede ver que experimentaron una fuerte evolución. Esto se debe en parte a cuestiones de implementación y desempeño. Si bien, en esta tesis sólo se tratará el tema de las fibras piezoeléctricas, se considera interesante justificar objetivamente dicha elección, para lo cual en el Capítulo 2 se citan los diferentes dispositivos desarrollados y que se encontraron en la bibliografía, las características que poseen, como así también sus ventajas y desventajas.

A pesar de ser una herramienta que arroja soluciones aproximadas, el método de Elementos Finitos es actualmente uno de los más difundidos para el análisis de estructuras en general y, particularmente, para aquellas que incluyen materiales piezoeléctricos. Esto se debe a su relativa simplicidad y además a la posibilidad de incluir en la solución resultados de fenómenos localizados, visualizar en detalle distribuciones de campos en todo el dominio de análisis y fundamentalmente, resolver conjuntamente problemas acoplados de naturaleza diferente, en este caso electro-mecánico. Por todo esto, resulta muy importante conocer cuáles son las herramientas numéricas disponibles actualmente, es decir los tipos de elementos desarrollados y las propiedades que los mismos son capaces de reflejar. No se debe perder de vista que un modelo de elementos finitos debe realizarse con el tipo de elementos que mejor describa el funcionamiento de la estructura real a un costo computacional aceptable. En el Capítulo 3 se cita un estado del arte de las distintas formulaciones propuestas en éste tema.

Respondiendo al interés que los compuestos piezoeléctricos han recibido en los últimos años, en el capítulo 4 se presenta un análisis detallado de los mismos y la implementación del “Método de Campos Uniformes”, Bent et al, (1997), para determinar las propiedades constitutivas equivalentes. También se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante dicho método y los que arroja un modelo detallado de elementos finitos donde se incluyen fibra, resina y electrodos con diferentes condiciones de borde y estados de carga dependientes de la constante constitutiva buscada. Cuando solo interesa la respuesta macroscópica de la estructura y la inclusión en el modelo de cada parte del compuesto (electrodos, fibra y resina) haría computacionalmente muy costosa la solución del problema, el modelo equivalente desarrollado resulta de gran utilidad.

En el capítulo 5 se presentan dos ejemplos de aplicación, relativos a la aplicación de los laminados elaborados con fibras piezoeléctricas en control activo de vibraciones. Los modelos estructurales se realizaron con elementos finitos (EF), utilizando para modelar los dispositivos

piezoeléctricos, las constantes electromecánicas obtenidas con el modelo de campos uniformes. Se implementó un algoritmo para expresar las ecuaciones de EF en el espacio de estados, allí se determinó la ley de control y se evaluó el desempeño de los sistemas. El primer ejemplo corresponde al control de vibraciones flexionales de un viga en voladizo, con actuadores adheridos en sus caras superior e inferior. Con el objetivo de evaluar la influencia de la posición de los actuadores en la respuesta, se consideraron 3 configuraciones diferentes. El segundo ejemplo se trata de un cajón de torsión representativo de la estructura de una superficie sustentadora, sobre la cual se adhieren parches actuadores en direcciones $\pm 45^\circ$ para conferirle capacidad de controlar las vibraciones torsionales.

La tesis se completa con el capítulo 6 en donde se presentan las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

Complementariamente, en el Apéndice A1 se describe el tratamiento de problemas piezoelásticos mediante el método de elementos finitos.

Capítulo 2

Materiales piezoeléctricos y su utilización en sistemas de control

2.1. Breve reseña histórica

En 1880 Jacques y Pierre Curie descubrieron un comportamiento inusual en ciertos minerales cristalinos. Observaron que, al someterlos a fuerzas mecánicas, se polarizaban eléctricamente. Tensiones de tracción y compresión generaban voltajes de polaridad opuesta y proporcionales al valor de las fuerzas. Años más tarde, se verificó el efecto inverso. Es decir, cuando uno de esos cristales “generadores de voltaje” era sometido a campos eléctricos, se deformaba acorde a la polaridad del campo y proporcionalmente al mismo. Los citados fenómenos fueron denominados efecto piezoeléctrico directo e inverso, respectivamente.

Investigaciones posteriores arrojaron resultados muy valiosos respecto de la utilización de materiales piezoeléctricos, pero siempre se trataba de materiales o compuestos que se hallaban en la naturaleza.

Durante el siglo XX, las cerámicas basadas en óxidos metálicos y otros materiales elaborados artificialmente, permitieron a los diseñadores aprovechar los efectos piezoeléctricos en nuevas aplicaciones. Generalmente, dichos materiales son resistentes, químicamente inertes y relativamente baratos. La composición, la forma y las dimensiones de las cerámicas piezoeléctricas pueden ser ajustadas para cumplir con los requerimientos de una aplicación determinada. Entre ellas, las elaboradas con formulaciones de Zirconato de Plomo o con Titanato de Plomo, normalmente denominadas “PZT”, exhiben mayor sensibilidad y temperaturas de operación más elevadas, en relación con otras. Es por ello que las cerámicas piezoeléctricas “PZT” son las más utilizadas.

2.2. Conceptos de electromagnetismo

Se presentan a continuación algunos conceptos de electromagnetismo que resultan imprescindibles para explicar el comportamiento de los materiales piezoeléctricos.

Se dice que una molécula o un cristal están polarizados, cuando las cargas eléctricas de los mismos se distribuyen de manera tal que aparecen sectores con mas concentración de carga de un signo que de otro. Este estado se puede modelar mediante dos cargas iguales y de signo opuesto separadas una distancia d . El producto de una de esas cargas por d se denomina momento dipolar. Si se considera un volumen del continuo, en él habrá una cierta cantidad de moléculas o cristales con un momento dipolar determinado m_i , la suma de cada uno de ellos, dividida por el volumen total se denomina polarización,

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^{\text{nro de cristales}} (m_i)_j}{V} \quad (2.1)$$

El vector P_i solo existe en los medios materiales.

Cuando se aplica un campo eléctrico a un material, los cristales o moléculas del mismo se polarizan, la magnitud que relaciona la polarización P_i y el campo eléctrico aplicado resultante E_i se denomina susceptibilidad eléctrica del material y se denota en esta tesis con la letra η . En el caso más general, la susceptibilidad es un tensor de segundo orden. La relación entre el campo eléctrico y la polarización sería en ese caso:

$$P_i = \eta_{ij} E_j \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) muestra que, en general, la dirección de polarización no coincide con el campo eléctrico. Los materiales isótropos son un caso particular, en ellos P_i es paralelo a E_i .

Una magnitud muy importante para describir el comportamiento de los dieléctricos es el vector desplazamiento eléctrico D_i . Físicamente es un campo que nace y muere en las cargas libres. En el anexo 2.1 se describe más detalladamente éste concepto. Puede relacionarse el campo eléctrico con el desplazamiento eléctrico mediante la siguiente relación:

$$D_i = \chi_0 E_i + P_i \quad (2.3)$$

Donde χ_0 es la permitividad dieléctrica del vacío. La expresión (2.2) es general y se cumple para cualquier material, incluso para el vacío donde $P_i = 0$.

Reemplazando (2.2) en (2.3) se obtiene:

$$D_i = \chi_0 E_i + \eta_{ij} E_j \quad (2.4)$$

Con lo que se puede obtener la siguiente relación entre el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico.

$$D_i = \chi_{ij} E_j \quad (2.5)$$

El tensor χ_{ij} se denomina permitividad dieléctrica del medio y su expresión es la siguiente:

$$\chi_{ij} = \chi_0 \delta_{ij} + \eta_{ij} \quad (2.6)$$

Muchas veces suelen citarse los valores numéricos de las componentes de χ_{ij} mediante una relación con la permitividad dieléctrica del vacío:

$$\chi_{ij}^{relativo} = \frac{\chi_{ij}}{\chi_0} \quad (2.7)$$

2.3. Descripción del comportamiento de los materiales piezoeléctricos y sus propiedades

2.3.1. Introducción

En general, en función de su simetría, los cristales pueden clasificarse en 32 grupos, de los cuales solo 20 presentan propiedades piezoeléctricas (Cady, 1946). Una posible clasificación sería la que se muestra en la figura 2.1.

Los cristales piroeléctricos presentan una polarización espontánea, debido a que sus celdas son asimétricas, por lo menos, respecto a un eje. Por lo general, esta polarización eléctrica se ve enmascarada por la aparición de cargas en la superficie. En algunos casos, y en materiales piroeléctricos no conductores, pueden medirse cambios en la polarización causados, por ejemplo, por alteraciones en la temperatura. Es decir, la piezoelectricidad y la piroelectricidad son funciones, simplemente, de la estructura cristalina del material y se pueden predecir conociendo únicamente de qué clase de cristal se trata.

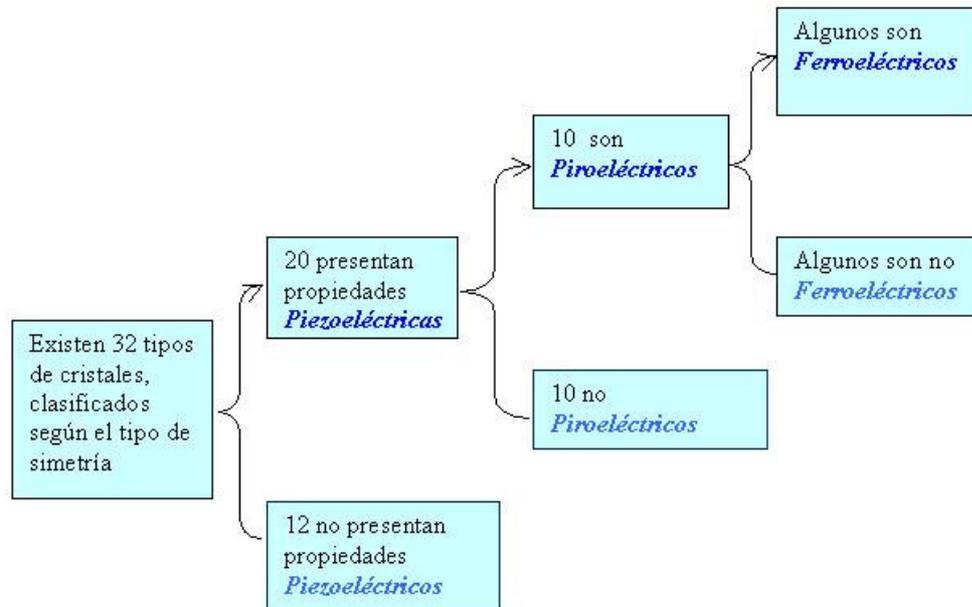


Figura 2.1: Clasificación de los cristales.

A través de la aplicación de un campo eléctrico suficientemente alto, se puede invertir la polarización de algunos materiales piroeléctricos. Este subgrupo de materiales piroeléctricos, recibe el nombre de ferroeléctricos. A diferencia de lo que ocurre con la piezoelectricidad y la piroelectricidad, la ferroelectricidad no puede predecirse solamente a partir de la estructura cristalina, sino que se requieren, además, mediciones dieléctricas, (Shirane et al, 1955).

De manera general, se puede decir que la ferroelectricidad es un caso particular de piezoelectricidad, y juega un papel muy importante en el comportamiento de los materiales y dispositivos activos estudiados en esta tesis.

Existen muchos materiales piezoeléctricos que no son ferroeléctricos, por el contrario, todos los materiales ferroeléctricos presentan propiedades piezoeléctricas. En algunos materiales ferroeléctricos, la polarización espontánea es la responsable de una parte del efecto piezoeléctrico.

2.3.2. Materiales ferroeléctricos

En éstos materiales existen pequeñas regiones llamadas dominios que poseen un valor de polarización local espontánea muy elevada. Cuando se aplica un campo eléctrico externo, dichos dominios se orientan originando una polarización general.

La figura 2.2 muestra curvas de deformación y desplazamiento eléctrico medidas experimentalmente, en probetas de PZT-5H sometidas a un campo eléctrico cíclico.

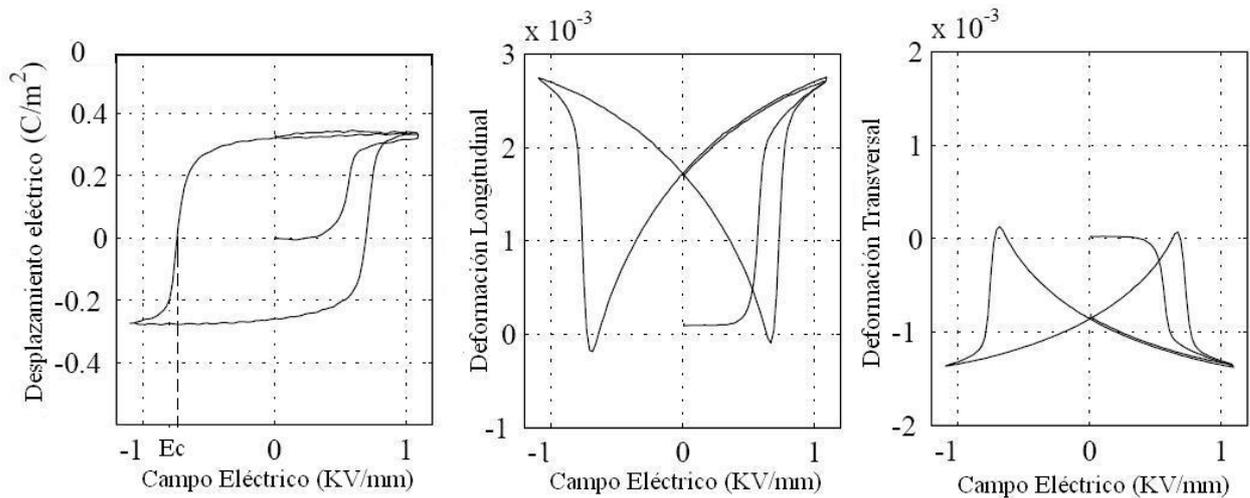


Figura 2.2: Respuesta de una probeta de PZT-5H a un campo eléctrico cíclico (Ghandi, 1998)

El nombre ferroeléctrico se utiliza por analogía con el comportamiento exhibido por los materiales ferromagnéticos cuando se someten a campos magnéticos variables. En la figura 2.2 se observa que para valores bajos de campo eléctrico, las deformaciones son prácticamente nulas. Sin embargo una vez que el campo eléctrico alcanza un valor crítico, el material se polariza en la dirección del campo eléctrico.

Al polarizar las cerámicas ferroeléctricas, se tornan piezoeléctricas. Los grupos de dipolos con orientaciones paralelas se denominan dominios de Weiss, los cuales, antes del proceso de polarización, se encuentran orientados aleatoriamente. Luego del proceso de polarización, el material experimenta distorsiones que se reflejan en incrementos de longitud en la dirección del campo y contracción en las direcciones perpendiculares.

Cuando un material ferroeléctrico polarizado se somete a un campo eléctrico, los dominios de Weiss incrementan su alineación respecto del campo eléctrico de manera proporcional al mismo.

Como resultado, se manifiestan cambios en las dimensiones del material, ya sea de elongación o contracción, dependiendo del sentido del campo eléctrico aplicado.

Utilizando luz polarizada, se pueden observar los dominios en el Titanato de Bario (BaTiO₃), uno de los materiales ferroeléctricos más utilizados.

La polarización espontánea en los ferroeléctricos desaparece a cierta temperatura, llamada temperatura ferroeléctrica de Curie. Por debajo de la misma, los vectores desplazamiento eléctrico D_i y polarización P_i son funciones no lineales del campo eléctrico E_i .

La figura 2.3 muestra la estructura cristalina general que presentan materiales ferroeléctricos tan comunes como el Titanato de Bario y el Zirconato Titanato de Plomo (PZT). La fórmula general de esta estructura puede escribirse como ABO_3 , donde A y B son iones metálicos con una carga total de +6. El tamaño relativo de los iones es la clave en el comportamiento del material. A y B representan iones metálicos que deben tener la suficiente diferencia de tamaño para que se forme la estructura perovskita de la figura 2.3. En el caso del Titanato de Bario, A y B corresponden a un catión bivalente Ba_2^+ y otro tetravalente Ti_4^+ . En el caso de las cerámicas PZT, A se sustituye por el catión bivalente Pb_2^+ y B por los cationes tetravalentes Zr_4^+ y Ti_4^+ . Ajustando la proporción de los cationes, pueden modificarse las propiedades del material. Otra manera de lograrlo, consiste en agregar óxidos metálicos para formar otros compuestos.

Dependiendo de la composición exacta y de la temperatura, la forma de la celda de perovskita puede modificarse. A elevadas temperaturas, las vibraciones térmicas de los cationes representados por B, desplazan de las grillas tetraédricas, a los aniones de oxígeno. La estructura mantiene la forma cúbica no distorsionada, y el material se encuentra en un estado paraeléctrico. Al aplicar un campo eléctrico al material paraeléctrico, se produce una polarización, la cual desaparece cuando se retira el campo. A menores temperaturas, por debajo del punto de Curie del material, la estructura cúbica se torna inestable y la celda se distorsiona. En la fase tetragonal, el cubo se encoge paralelo a un borde, mientras que en los cristales romboédricos, el cubo se encoge a lo largo de la diagonal. Estas dos fases son ferroeléctricas.

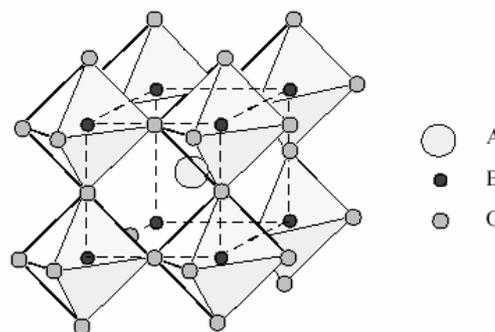


Figura 2.3: Estructura de perovskita

Cuando se aplica un campo eléctrico estando por debajo de la temperatura de Curie, todos los aniones se desplazan en una dirección, y los cationes en otra, destruyendo así la simetría cúbica. De esta manera, la celda unitaria queda con un momento dipolar neto. Al desaparecer

el campo, el material ferroeléctrico queda con una polarización remanente, la cual puede ser eliminada sólo si se aplica un campo eléctrico coercitivo negativo E_c .

La figura 2.4 muestra un esquema del proceso de polarización (orientación de los dipolos), resaltando la polarización remanente.

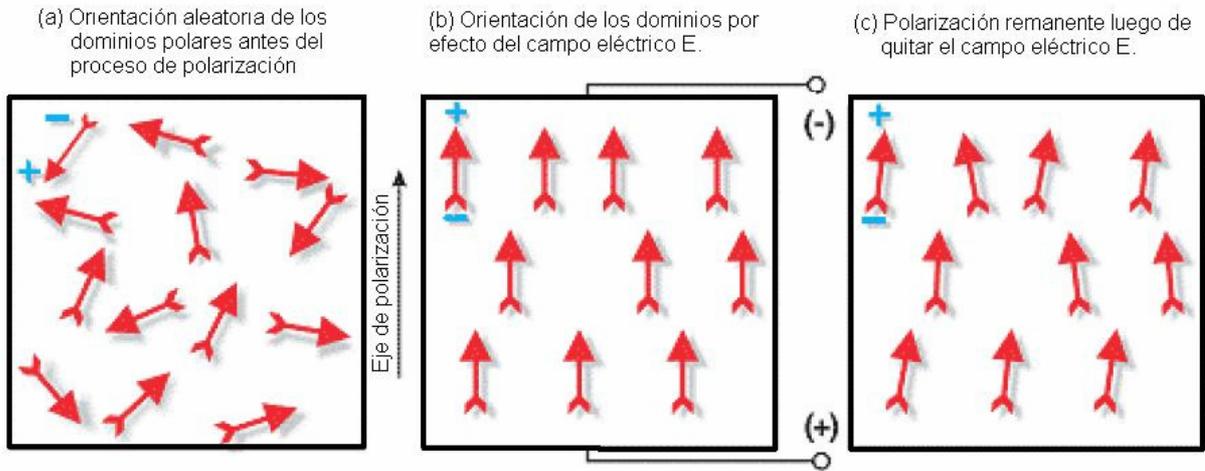


Figura 2.4: Secuencia del proceso de polarización de un medio ferroeléctrico. Nótese la existencia de los dominios polares antes de la aplicación del campo.

Antes de la aplicación del campo eléctrico, los dipolos poseen una orientación aleatoria y el momento bipolar resultante es nulo. Luego, la aplicación del campo eléctrico, figura 2.4b, produce una orientación de todos los dominios eléctricos, aproximadamente en la misma dirección, luego al retirar el campo eléctrico, el material conserva una momento bipolar remanente dado por la orientación de los dipolos, figura 2.4c

2.3.3. Ecuaciones Constitutivas

En un material ferroeléctrico polarizado existe un acoplamiento entre las deformaciones y el campo eléctrico aplicado. Dicho acoplamiento es no lineal, tal como se observa en la figura 2.2. Cuando la polarización se conoce a priori, los campos eléctricos y las deformaciones son bajas y no se produce repolarización del material, puede emplearse el siguiente modelo constitutivo lineal.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{hij} E_h \quad (2.8)$$

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + \chi_{ik} E_k \quad (2.9)$$

Donde C_{ijkl} , e_{kij} y χ_{ik} son el tensor elástico, el tensor piezoeléctrico y el tensor de rigidez dieléctrica respectivamente, σ_{ij} es el tensor de tensiones, ϵ_{kl} es el tensor de deformaciones, D_i es el vector de desplazamiento eléctrico y E_k es el vector campo eléctrico.

La ecuación (2.8) describe el efecto inverso y la (2.9) el directo.

Puede observarse que las ecuaciones (2.8) y (2.9) son las mismas que las conocidas para un medio mecánico y dieléctrico, pero incluyen, en este caso, los términos de acoplamiento.

En muchas ocasiones se utiliza la ecuación (2.8) expresada de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{kl} = (C_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij} + (C_{ijkl})^{-1} e_{hij} E_h \quad (2.10)$$

Donde:

$$(C_{ijkl})^{-1} e_{hij} = d_{hkl} \quad (2.11)$$

Obteniéndose la siguiente ecuación constitutiva mecánica:

$$\varepsilon_{kl} = (C_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij} + d_{hij} E_h \quad (2.12)$$

Donde d_{hkl} se denomina tensor piezoeléctrico en términos de deformación.

De la ecuación (2.8) se desprende que cada componente del tensor e_{hij} representa la tensión σ_{ij} cuando al someter el material al campo eléctrico unitario en la dirección h, se restringen en el mismo, todas las deformaciones. Otra interpretación para e_{hij} , puede desprenderse de la ecuación (2.9), si se anula el campo eléctrico, cada componente de e_{hij} representa el desplazamiento eléctrico en dirección h cuando se impone una deformación de componente ε_{ij} unitaria y las restantes nulas.

En ocasiones, y en particular cuando se trabaja con elementos finitos, resulta útil expresar las ecuaciones constitutivas (1) y (2) en forma matricial, aprovechando la simetría de algunos de los tensores intervinientes. Así, los tensores de tensiones y deformaciones pasan a representarse mediante vectores de seis componentes, el tensor elástico, de cuarto orden, se representa mediante una matriz de 6x6, el tensor de rigidez dieléctrica, de segundo orden se representa mediante una matriz de 3x3 y el tensor piezoeléctrico de tercer orden se escribe como una matriz de 6x3.

Cuando se utiliza la forma matricial, se tiene la siguiente notación para las ecuaciones constitutivas:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \quad (2.13)$$

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [\chi]\{E\} \quad (2.14)$$

A continuación, se detalla la convención utilizada en esta tesis para representar los tensores de las ecuaciones constitutivas.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}; \{E\} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \text{ y } \{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

A partir de ésta convención, se determina la manera de ordenar las constantes constitutivas en las matrices elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas y la relación que cada una representa, agrupándolas en una misma ecuación constitutiva matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \chi_{11} & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & 0 & \chi_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Cada material que exhibe propiedades piezoeléctricas posee características naturales representadas por las componentes de los tres tensores constitutivos mencionados. Dichos valores constituyen algunos de los elementos de juicio fundamentales al momento de determinar qué material utilizar para una aplicación determinada, sin perder de vista otros aspectos importantes como tolerancia al daño, vida en fatiga y resistencia a agentes atmosféricos. Cabe destacar además que otros factores como los económicos y de factibilidad de elaboración juegan un papel muy importante y muchas veces decisivo.

2.3.4. Propiedades de los principales materiales piezoeléctricos utilizados en sistemas de control estructural

A continuación, se describen muy brevemente características de algunos materiales piezoeléctricos y se detallan valores numéricos de sus propiedades constitutivas.

- **Cuarzo:**

El cuarzo es un material que existe en la naturaleza y además puede elaborarse artificialmente. Es uno de los primeros materiales piezoeléctricos estudiados e incluso hoy encuentra muchas aplicaciones en electrónica para la fabricación de osciladores. Debe ser

cortado según direcciones determinadas para maximizar el efecto piezoeléctrico, y puede hacerse de tal manera de obtener deformaciones paralelas al campo eléctrico aplicado.

La figura 2.4 muestra una celda unitaria de Cuarzo entre dos placas. En la condición no deformada, los centros de carga de los iones de silicio (positivos) y los de oxígeno (negativos) coinciden y no hay momento dipolar resultante, y la distribución de carga a lo largo del cristal y sobre la superficie es nula.

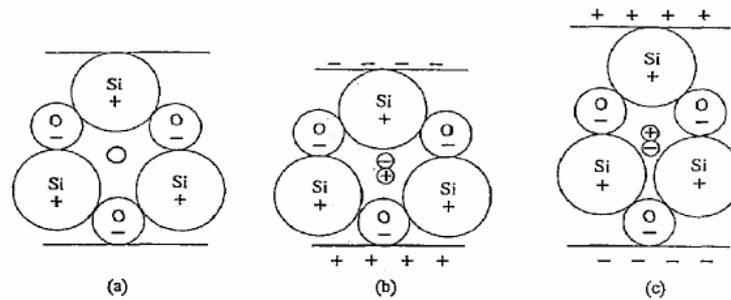


Figura 2.5: Esquema de la celda unitaria del cuarzo. a) No deformada. b) Comprimida. c) Traccionada

A modo ilustrativo, se presentan los tensores constitutivos del Cuarzo:

$$[e] = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0,12 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{C}{m^2} \right]; \quad [C] = \begin{bmatrix} 86,7 & 6,99 & 11,9 & 17,9 & 0 & 0 \\ 6,99 & 86,7 & 11,9 & -17,9 & 0 & 0 \\ 11,9 & 11,9 & 107 & 0 & 0 & 0 \\ 17,9 & -17,9 & -0,0314 & 57,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57,9 & 17,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17,9 & 39,9 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

- **Sal de Rochelle:**

A diferencia del Cuarzo, se trata de un material ferroeléctrico. También encuentra bastante aplicación en transductores. Es muy sensible a la humedad, y puede usarse solo en el rango de temperaturas que va desde $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $24\text{ }^{\circ}\text{C}$ porque, fuera de éste, se comienzan a producir cambios de fase.

- **Cerámicas ferroeléctricas (Titanato de Bario y PZT):**

Estas cerámicas son los materiales más utilizados actualmente en la fabricación de dispositivos piezoeléctricos. Son obtenidas por procesos convencionales de elaboración de cerámica. Se mezclan en seco o en forma de una pasta húmeda óxidos y carbonatos de los materiales componentes. También se utilizan agentes aglutinantes derivados de alcoholes.

Con esta pasta se pueden obtener dispositivos de diferentes formas, incluso se pueden extrudar fibras. Luego de darle la forma se calientan en hornos de temperatura y presión controladas. Con este proceso, se logra que los carbonatos se disocien y se formen óxidos. Este proceso se denomina calcinación y sinterizado.

Las cerámicas PZT son muy utilizadas para elaborar fibras piezoeléctricas. Existen varios tipos de éstas cerámicas. A continuación, se citan los valores de las constantes constitutivas de algunas de ellas.

PZT 2:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.82 \\ 0 & 0 & -1.82 \\ 0 & 0 & 9.1 \\ 0 & 9.8 & 0 \\ 9.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{C}{m^2} \right]; \quad [C] = \begin{bmatrix} 13.5 & 6.8 & 6.8 & 0 & 0 & 0 \\ 6.8 & 13.5 & 6.8 & 0 & 0 & 0 \\ 6.8 & 7.5 & 11.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.34 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

PZT 5A:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5.35 \\ 0 & 0 & -5.35 \\ 0 & 0 & 15.8 \\ 0 & 12.3 & 0 \\ 12.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{C}{m^2} \right]; \quad [C] = \begin{bmatrix} 12 & 7.52 & 7.51 & 0 & 0 & 0 \\ 7.52 & 12 & 7.51 & 0 & 0 & 0 \\ 7.51 & 7.51 & 11.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.26 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

PZT 5H:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6.65 \\ 0 & 0 & -6.65 \\ 0 & 0 & 23.17 \\ 0 & 17.03 & 0 \\ 17.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{C}{m^2} \right]; \quad [C] = \begin{bmatrix} 12,6 & 7,93 & 8,4 & 0 & 0 & 0 \\ 7,93 & 12,6 & 8,4 & 0 & 0 & 0 \\ 8,4 & 8,4 & 11,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,35 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

El valor numérico de e_{33} de la cerámica PZT-5H es mayor que en las otras. Por esta razón, las fibras piezoeléctricas y los actuadores tipo pila elaborados con ésta, poseen mayor

acoplamiento electromecánico en la dirección del campo eléctrico que los fabricados con las otras cerámicas.

2.4. Clasificación y descripción de los distintos tipos de dispositivos de control diseñados con materiales piezoeléctricos

2.4.1. Introducción

Los materiales PZT 2, PZT 5A y PZT 5H, cuyas constantes piezoeléctricas se citan en el párrafo 2.3.4 poseen la dirección de polarización en la dirección 3. Se observa que para manifestarse el acoplamiento electromecánico en las direcciones normales, es necesario que la dirección del campo eléctrico coincida con la de polarización.

Se puede hacer una clasificación de los dispositivos piezoeléctricos según cual sea la dirección de polarización respecto a la dirección de acoplamiento electromecánico deseada. Si ambas direcciones son paralelas el dispositivo se denomina tipo 3-3, si son ortogonales se denomina tipo 3-1 o 3-2. La figura 2.6 muestra ambos conceptos.

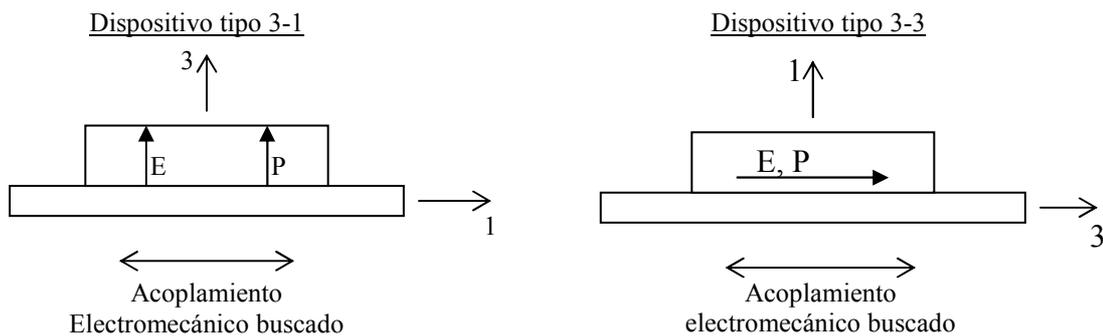


Figura 2.6: Distinción entre dispositivos tipo 3-1 y tipo 3-3

Cuando se desean obtener el máximo acoplamiento se utilizan los dispositivos tipo 3-3, los cuales pueden ser de tipo pila o bien laminados elaborados con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales.

Debido al interés que despiertan, por el mayor acoplamiento que presentan, a continuación se describen los dos tipos de dispositivos tipo 3-3.

2.4.2. Dispositivos tipo pila

Los actuadores de tipo pila, están constituidos por discos superpuestos y una serie de láminas intercaladas que serán las responsables de introducir el campo eléctrico. En la Figura 2.7 se muestra un esquema de este tipo de dispositivo, donde se ve claramente la presencia de las capas entre cada par de electrodos. En virtud del tamaño de los dispositivos y de otras

características geométricas, éstos dispositivos pueden construirse alternando manualmente la orientación de las capas.

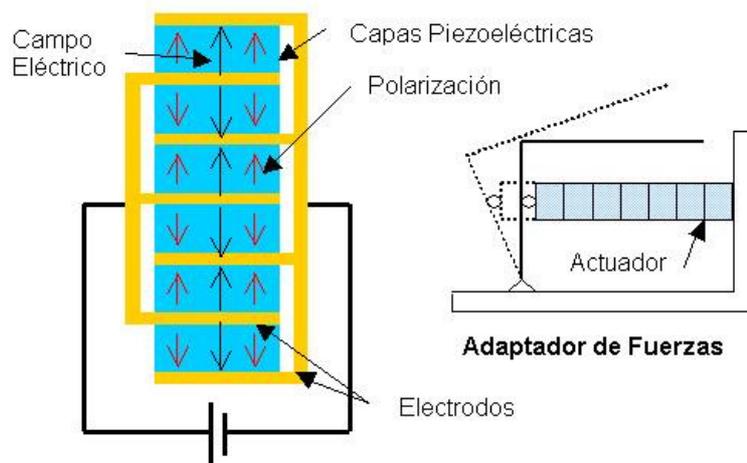


Figura 2.7: Esquema de un dispositivo tipo pila y un adaptador de fuerzas

En los dispositivos tipo pila se desarrollan fuerzas elevadas y desplazamientos muy pequeños. Por lo tanto suelen utilizarse en conjunto con mecanismos de adaptación, siendo los mismos sistemas de levas y palancas.

Utilizando estos dispositivos, se pueden accionar diferentes mecanismos para controlar deformaciones y desplazamientos. Como ejemplo, se puede citar la utilización de flaps ubicados en el borde de fuga de una pala de helicóptero, Figura 2.8.

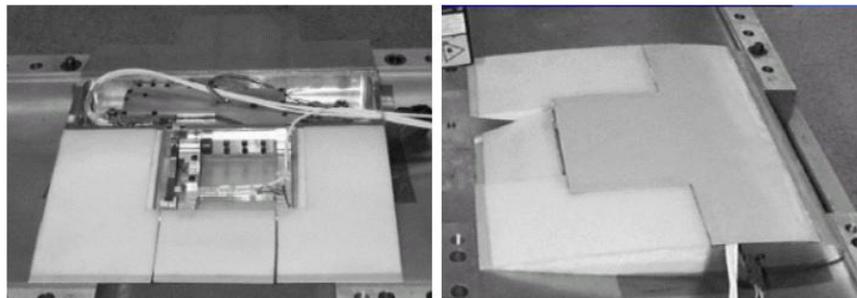


Figura 2.8: Aplicación de actuadores tipo pila, (Lee, 1999)

Los actuadores se alojan en un compartimiento de la pala y se incluye un mecanismo para accionar el flap.

2.4.3. Dispositivos tipo parche elaborado con fibras piezoeléctricas

En los laminados con fibras piezoeléctricas el campo eléctrico es producido por un patrón de electrodos que permite introducir el campo eléctrico en la dirección paralela a las fibras. Estos dispositivos se construyen aprovechando las características de los materiales

ferroeléctricos descritos anteriormente y poseen un aspecto como el que se ilustra en la Figura 2.9.

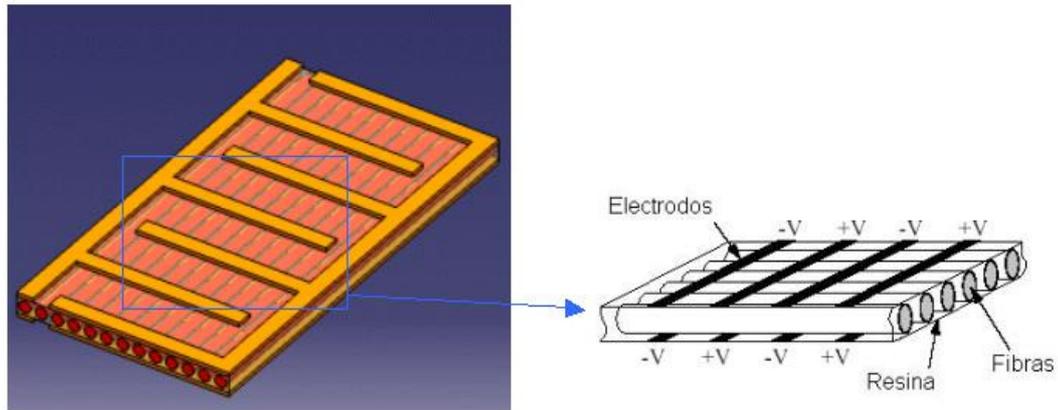


Figura 2.9: Esquema de un parche piezoeléctrico elaborado con fibras

Los electrodos interdigitales constituyen un componente fundamental para estos dispositivos, ya que permiten someter a todas las fibras a campos eléctricos elevados, sin usar potenciales demasiado altos evitando las complicaciones asociadas. Por otro lado, constituyen una especie de cauce para el campo.

La fabricación de las fibras se realiza mediante un complejo proceso de extrusión de una pasta que contiene partículas de algún material ferroeléctrico mezclado con un aglutinante. Esto permite obtener fibras de los diámetros necesarios para fabricar parches. Los electrodos se fabrican a partir de un film fotosensible.

Para que las fibras activas puedan ser utilizadas con electrodos interdigitales, es fundamental que se elaboren con cerámicas que presenten propiedades ferroeléctricas ya que, de esta manera, mediante tratamientos especiales de polarización in situ, se alterna la polaridad y se logra que los efectos de deformación se sumen a lo largo de la fibra (sean éstos de elongación o de contracción).

Cuando la fibra sale de la línea de fabricación, se encuentra en estado virgen, es decir, posee todos los granos cristalinos orientados aleatoriamente. Se requiere entonces un proceso de polarización para provocar una alineación de los dominios, ya que es justamente este alineamiento el que determinará el acoplamiento electromecánico.

Para poder utilizar el efecto piezoeléctrico asociado con las cerámica ferroeléctricas, éstas deben ser sometidas a un proceso de alineación de los dominios, llamado polarización. El mecanismo de polarización se lleva a cabo sometiendo a la fibra virgen a un campo eléctrico elevado, aproximadamente 10KV/cm y calentando a temperaturas moderadas, aproximadamente 100°C durante un corto período de tiempo.

Un posible método es sumergir el material en un baño de aceite caliente, pero a una temperatura inferior a la de Curie, y aplicar un campo eléctrico. El baño de aceite se usa para calentar la cerámica y además para evitar descargas eléctricas que podrían ocurrir en el aire. La temperatura agita los iones y permite que los dominios roten más fácilmente, de esta manera la saturación se logra más rápido.

Se deja enfriar el baño de aceite hasta temperatura ambiente mientras se mantiene el campo eléctrico y, una vez frío, se retira. Así los dominios y, por lo tanto, los momentos dipolares quedan alineados.

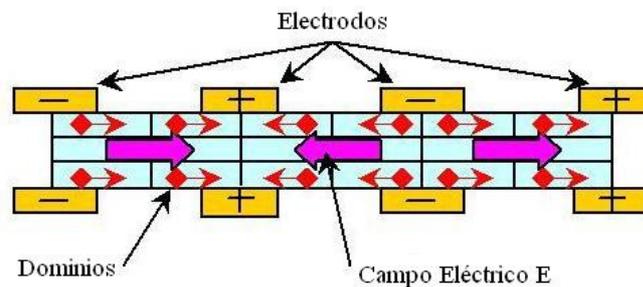


Figura 2.10: Esquema de una fibra piezoeléctrica luego del proceso de polarización

En la Figura 2.10 se muestra un esquema de una porción de fibra ferroeléctrica luego del proceso de polarización. Nótese la orientación alternada de los dominios entre dos electrodos consecutivos. En todos los sectores situados entre los electrodos el campo eléctrico y los dominios coinciden en dirección y sentido. Eventualmente, podrían ser de sentido opuesto, pero mantendrán dicha relación a lo largo de toda la fibra. Esto es precisamente la piedra angular de la tecnología de fibras piezoeléctricas y se puede lograr justamente mediante el proceso de polarización descrito anteriormente. Con esto se asegura que las deformaciones tendrán igual signo en todos los tramos de fibra.

Una vez realizado el proceso de curado, los parches quedan listos para ser utilizados.

En virtud de la elevada anisotropía que se genera, los dispositivos elaborados con fibras resultan muy útiles cuando se desea introducir fuerzas en direcciones determinadas. Esto se manifiesta en la cantidad de trabajos publicados respecto del control de vibraciones en estructuras sometidas a torsión como es el caso de las palas de helicópteros y alas de aviones.

El control activo de estructuras requiere de actuadores y sensores, y ambos serán más efectivos en su funcionamiento cuanto mayor sea el acoplamiento electromecánico presente en los materiales que los constituyen. En este caso, actuadores y sensores se elaboran con compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas y al respecto surgen dos grandes clasificaciones relativas a la manera en que se construyen las mismas:

- Estructuras de compuestos reforzados con fibras: En este caso, se realiza la construcción de las mismas con laminados constituidos total o parcialmente con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales, debiendo realizar el proceso de posicionamiento de los electrodos, curado y polarización de las fibras en estado “verde”, sobre la estructura luego de su construcción.
- Estructuras construidas con materiales convencionales (compuestos o no), a las que se les adhieren parches elaborados con los compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales. Dichos parches se construyen en una etapa separada a la de la estructura.

La anisotropía permite, mediante orientaciones pertinentes de las fibras, construir laminados cuyas direcciones de acoplamiento electromecánico coincidan con las requeridas por las diferentes aplicaciones estructurales y sistemas de control. Esto confiere versatilidad en el diseño y capacidad de optimizar los sistemas de control. Un típico ejemplo se encuentra en aplicaciones en que se desean controlar las deformaciones torsionales de estructuras en forma de cajones cerrados, sistema estructural clásico de alas y palas de helicópteros. En éstas aplicaciones la anisotropía de actuación es un factor fundamental ya que, orientando las fibras en ángulos de $\pm 45^\circ$, se logran introducir fuerzas que permiten controlar dichas deformaciones torsionales. Lo mismo ocurre con el funcionamiento como sensores, en los que se obtienen mayores diferencias de potencial en los electrodos cuando se manifiestan las deformaciones torsionales que se desean registrar y que se utilizarán luego para determinar las señales de control. Sin el acoplamiento electromecánico anisótropo, sería imposible el control de deformaciones torsionales en cajones cerrados.

Por otra parte, los laminados piezoeléctricos mantienen las conocidas ventajas constructivas y mecánicas de los materiales compuestos convencionales. Es decir, permiten dirigir las fibras en las direcciones que permiten aprovechar al máximo su resistencia estructural y se pueden lograr formas sumamente complejas.

Observaciones:

Si se piensa en los dispositivos utilizados como actuadores, pueden realizar las siguientes comparaciones entre aquellos tipo pila y los elaborados con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales:

- El campo eléctrico que se usa para controlar ambos dispositivos coincide con la dirección de deformación, pero alterna el sentido entre dos electrodos consecutivos.
- Las placas utilizadas en los actuadores tipo pila encuentran su equivalente funcional en los electrodos interdigitales utilizados para generar el campo eléctrico en las fibras.
- El sentido del campo eléctrico alterna entre 0 y 180° entre dos discos consecutivos para los dispositivos tipo fibra y entre dos vanos consecutivos para las fibras
- En las fibras y en los dispositivos tipo pila, los desplazamientos se suman, es decir, todos los vanos o discos se estiran o encogen a la vez.

Para lograr que dos discos con campos eléctricos de sentido opuesto sufran deformación de igual signo es necesario alternar la dirección del material en uno u otro para que el tensor piezoeléctrico cambie el signo de los coeficientes que relacionan campo eléctrico y esfuerzos en esa dirección.

Cuando se trata de las fibras, se encuentran dificultades un poco mas serias, ya que toda la fibra es un mismo material y no se tiene la posibilidad de alternar la orientación tan fácilmente entre dos vanos consecutivos. Es acá donde los materiales ferroeléctricos juegan un papel fundamental. En virtud del ciclo de histéresis que presentan, pueden utilizarse fibras elaboradas con los mismos en estado virgen y, una vez construido el laminado o los parches, se procede a la polarización alternada del material. Este proceso de polarización in-situ se lleva a cabo mediante la aplicación de campos eléctricos elevados y temperaturas moderadas. Recibe el nombre de curado y se tratará detalladamente mas adelante.

Anexo 2.1

A.2.1: Vector desplazamiento eléctrico y su interpretación física

En un material, además de existir cargas libres, q_{libres} aparecen en general cargas de polarización q_{pol} . Por lo tanto, el campo eléctrico en el medio satisface la siguiente identidad:

$$\chi_0 \oint_{SC} E_i n_i dS = q_{pol} + q_{libres} \quad (A.2.1.1)$$

Donde χ_0 es la permitividad dieléctrica del vacío, n_i es el vector unitario normal a la superficie y SC es una superficie cerrada que encierra al volumen de material en estudio. El vector polarización, P_i , cumple la condición:

$$\oint_{SC} P_i n_i dS = -q_{pol} \quad (A.2.1.2)$$

Reemplazando A.2.1.2 en la ecuación A.2.1.1, se obtiene:

$$\chi_0 \oint_{SC} E_i n_i dS + \oint_{SC} P_i n_i dS = \oint_{SC} (\chi_0 E_i + P_i) n_i dS = q_{libres} \quad (A.2.1.3)$$

Como la superficie Sc es arbitraria, definimos un nuevo vector D_i

$$D_i = \chi_0 E_i + P_i \quad (A.2.1.4)$$

tal que siempre cumpla con la siguiente propiedad integral:

$$\oint_{SC} D_i n_i dS = q_{libres} = \int_V \rho_{libres} dV \quad (A.2.1.5)$$

El vector definido de esta manera se denomina vector Desplazamiento Eléctrico, sus unidades son: $[\vec{D}] = \frac{Coulomb}{m^2}$. Físicamente, el desplazamiento eléctrico es un campo que nace y muere en las cargas libres.

Las ecuaciones A.2.1.4 y A.2.1.5 son generales y valen para todo material, incluso para el vacío, donde $P_i = 0$.

Capítulo 3

Método de elementos finitos aplicado al análisis de estructuras construidas con materiales piezoeléctricos

3.1. Introducción

La utilización del método de elementos finitos (MEF) para el análisis de medios continuos ha experimentado grandes avances en las últimas décadas. Esto se debe, principalmente, a que el MEF en conjunto con las computadoras digitales, permite resolver numéricamente y en forma sistemática modelos matemáticos de sistemas continuos complejos, (Bathe, 1996). El método puede utilizarse para analizar sistemas estructurales estáticos y dinámicos en los que se manifiestan diferentes fenómenos como pandeo, transferencia térmica, electromagnetismo y sobre todo, problemas de campos acoplados. Esta última capacidad hace que el método sea adecuado para el estudio de sistemas y estructuras que utilizan materiales piezoeléctricos. Desde principios de la década del 70 aparecieron en la literatura gran cantidad de trabajos que tratan de la aplicación del método de elementos finitos al análisis de sistemas piezoeléctricos. En particular y con la aparición del concepto relativamente nuevo de estructuras activas, en los últimos diez años la cantidad de publicaciones aumentó considerablemente, (Benjeddou, 2000).

Debido a la complejidad de las ecuaciones que describen los fenómenos de acoplamiento electromecánico, en particular de piezoelectricidad, sólo algunos problemas de éste tipo pueden resolverse en forma analítica, (Zse et al, 1999). Además, las condiciones de borde y la forma del dominio del problema aportan complicaciones adicionales. Por lo tanto, el método de elementos finitos, interpretado como herramienta numérica aproximada para la solución del modelo matemático, encuentra aplicación inmediata en éste campo.

En el presente capítulo se intentan citar los avances que dicho método ha experimentado y cuál es la tendencia actual en lo que respecta a formulaciones y aplicaciones de elementos finitos para modelar estructuras inteligentes que utilizan materiales piezoeléctricos. En primer lugar, se utiliza el principio de trabajos virtuales y el principio de Hamilton extendidos al caso electromecánico para obtener un principio variacional asociado a las ecuaciones diferenciales del problema,

Por otra parte, el Apéndice A1 contiene una explicación matemática rigurosa de la obtención de la forma débil asociada a las ecuaciones diferenciales originales del problema piezoeléctrico.

Para que el análisis sea computacionalmente eficiente, normalmente resulta conveniente modelar de diferentes maneras las distintas partes de la estructuras, dependiendo los elementos utilizados, entre otros aspectos, de las formas, relación entre dimensiones y maneras de resistir las cargas que caracterizan la estructura. En este capítulo se describen distintos tipos de elementos finitos existentes en la bibliografía para resolver los problemas que aparecen durante el análisis de estructuras activas que incluyen materiales piezoeléctricos.

3.2. Obtención de las ecuaciones básicas de Elementos Finitos

3.2.1. Ecuaciones diferenciales del problema

La respuesta electroelástica de un cuerpo piezoeléctrico, está descrita por las ecuaciones dinámicas de equilibrio mecánico:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (3.1)$$

Donde σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy, f_i son las fuerzas de volumen, ρ es la densidad del material, u_i es la componente de velocidad en la dirección de la coordenada espacial x_i y t es el tiempo.

Y por las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo. En las que para el caso cuasi-electroestático las correspondientes derivadas temporales se pueden despreciar y considerar solo la ecuación de conservación de la carga eléctrica, (Joshi, 1992):

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} - q = 0 \quad (3.2)$$

Donde, D_i es el vector desplazamiento eléctrico. σ_{ij} y D_i se relacionan con el tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy ϵ_{ij} y el vector campo eléctrico E_i mediante las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas, inversa y directa citadas en el capítulo 2:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - e_{kij}E_k \quad (3.3)$$

$$D_i = e_{ikl}\epsilon_{kl} + \chi_{ik}E_k \quad (3.4)$$

El tensor de deformaciones y el vector campo eléctrico se relacionan con el vector de desplazamientos mecánicos u_i y con el potencial eléctrico φ respectivamente mediante las siguientes expresiones:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

El continuo piezoeléctrico puede estar sujeto a condiciones de borde, ya sean esenciales o naturales, de naturaleza mecánica o eléctrica, o una combinación de las mismas:

Componentes de los desplazamientos U_i prescritos en S^u

$$u_i = U_i \quad (3.7)$$

Componentes de las fuerzas de superficie F_i prescritas S^σ

$$\sigma_{ij}n_j = F_i \quad (3.8)$$

Donde n_j es el vector unitario normal a la superficie exterior del continuo.

Potencial eléctrico V prescrito en la región S^φ :

$$\varphi = V \quad (3.9)$$

Carga eléctrica Q prescrita en S^Q

$$D_i n_i = -Q \quad (3.10)$$

Las ecuaciones diferenciales (3.1) y (3.2) junto con las ecuaciones constitutivas (3.3) y (3.4), las ecuaciones cinemáticas (3.5) y (3.6) y las condiciones de borde (3.7) a (3.10), constituyen la formulación fuerte del problema, la cual pocas veces puede resolverse en forma cerrada. Una alternativa para hallar la solución a este problema consiste en plantearlo en forma débil empleando el método de Residuos ponderados o Mínimos cuadrados. Otra

manera, es encontrar un principio variacional asociado y utilizar para su resolución, por ejemplo, el método de elementos finitos. La solución de problemas a partir de la minimización de un funcional es muy común en Física e Ingeniería. En éste trabajo se utiliza el principio de Hamilton extendido al caso del continuo piezoeléctrico para obtener el funcional a minimizar, considerando como variables independientes los desplazamientos mecánicos u_i y el potencial eléctrico φ .

3.2.2. Obtención de la forma variacional como una generalización del principio de Hamilton

Considérese un volumen Ω de material piezoeléctrico limitado por una superficie cerrada S . Si se multiplican las ecuaciones (3.1) y (3.2) por variaciones arbitrarias y admisibles ($\delta u_i = 0$ en S^u , $\delta\varphi = 0$ en S^φ) de las variables independientes, desplazamientos u_i y potenciales φ , y se integra en el dominio Ω se obtienen las siguientes expresiones:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) \delta u_i dV + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_i} - q \right) \delta \varphi dV = 0 \quad (3.11)$$

Si un campo de desplazamientos u_i verifica la ecuación (3.11), cualesquiera sean los valores de los desplazamientos admisibles δu_i y variaciones admisibles de potencial eléctrico $\delta\varphi$, dicho campo será una solución de (3.1) y (3.2).

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV + \int_{\Omega} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \delta \varphi dV - \int_{\Omega} q \delta \varphi dV = 0 \quad (3.12)$$

Por el teorema de Green, se puede expresar:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV = \int_S \sigma_{ij} \delta u_j n_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \delta \varphi dV = \int_S D_i \delta \varphi n_i dS - \int_{\Omega} D_i \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_i} dV \quad (3.14)$$

La ecuación (3.12) se puede expresar finalmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV + \int_S \sigma_{ij} \delta u_j n_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV + \\ & \int_S D_i \delta \varphi n_i dS - \int_{\Omega} D_i \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_i} dV - \int_{\Omega} q \delta \varphi dV = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

En virtud de la propiedad conmutativa del operador δ respecto del operador diferencial, se tiene que:

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_i} = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (3.17)$$

Además:

$$\delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \delta \varepsilon_{ij} + \delta \omega_{ij} \quad (3.18)$$

Donde ω_{ij} es el tensor de rotaciones.

Reemplazando (3.18) en (3.15), teniendo en cuenta (3.6), (3.17) y la antisimetría del tensor ω_{ij} , se obtiene:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_S F_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV + \\ & - \int_S Q \delta \varphi dS + \int_{\Omega} D_i \delta E_i dV - \int_{\Omega} q \delta \varphi dV = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si en la expresión (3.19), los incrementos δu_i y $\delta \varphi$ dependen del tiempo y se anulan para dos instantes arbitrarios fijos t_1 y t_2 , integrando la misma en dicho intervalo temporal se obtiene:

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S F_i \delta u_i dS \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} f_i \delta u_i dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV \right) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S Q \delta \varphi dS \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} D_i \delta E_i dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} q \delta \varphi dV \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Intercambiando los símbolos de integración:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dt dV + \int_S \int_{t_1}^{t_2} F_i \delta u_i dt dS + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} f_i \delta u_i dt dV - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dt dV - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S Q \delta \varphi dS \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} D_i \delta E_i dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} q \delta \varphi dV \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Integrando por partes el cuarto término de (3.21):

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dt = \rho \frac{du_i}{dt} \delta u_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{du_i}{dt} \frac{d(\delta u_i)}{dt} dt \quad (3.22)$$

Como δu_i se anula en los extremos del intervalo, (3.22) queda:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{du_i}{dt} \frac{d(\delta u_i)}{dt} dt \quad (3.23)$$

Considerando que:

$$\delta^{(1)}\left(\frac{\dot{u}_i^2}{2}\right) = \dot{u}_i \delta \dot{u}_i \quad (3.24)$$

La expresión (3.23) queda:

$$\int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dt dV = -\delta^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} T dt \quad (3.25)$$

La expresión $\int_{\Omega} \rho \frac{\dot{u}^2}{2} dV = T$ se denomina energía cinética del cuerpo.

Si se considera que las fuerzas son conservativas, las fuerzas de superficie F_i y las de volumen f_i no dependen de los desplazamientos u_i y además las cargas eléctricas Q y q no dependen del potencial eléctrico ϕ . La expresión (3.21) puede escribirse entonces:

$$\begin{aligned} -\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \int_S F_i u_i dS \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \int_{\Omega} f_i u_i dV \right) dt + \delta^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} T dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \int_S Q \phi dS \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} D_i E_i dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \int_{\Omega} q \phi dV \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ecuación (3.26) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(T - \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_S F_i u_i dS - \int_{\Omega} f_i u_i dV + \int_S Q \phi dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_i E_i dV + \int_{\Omega} q \phi dV \right) \right) dt = 0 \quad (3.27)$$

Así se obtiene el principio de Hamilton extendido:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (3.28)$$

Donde el término $L = T - U$ se denomina Lagrangeano. U recibe el nombre de energía potencial total extendida, término que incluye la contribución piezoeléctrica y su expresión es la siguiente:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_S F_i u_i dS - \int_{\Omega} f_i u_i dV + \int_S Q \phi dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_i E_i dV + \int_{\Omega} q \phi dV \quad (3.29)$$

3.2.3. Derivación de las ecuaciones de elementos finitos

El funcional (3.27) está expresado en notación tensorial, para la derivación de las ecuaciones de elementos finitos, resulta cómodo hacerlo en términos de matrices y vectores.

Para expresar las ecuaciones constitutivas en forma de productos entre matrices y vectores es necesario adoptar una convención respecto de la manera de ordenar las componentes de los tensores de tensiones y deformaciones, quedando luego definidas las correspondientes componentes de los tensores constitutivos.

En el presente trabajo se adopta la siguiente convención: el tensor de deformaciones se ordena en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{23}\}^T \quad (3.30)$$

con lo que queda definida la manera en que se ordenan las componentes de los tensores constitutivos en forma matricial. Se expresan entonces las ecuaciones constitutivas en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\chi]\{E\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

El método de elementos finitos consiste en dividir el dominio del problema en subdominios (elementos) que no se superponen y cuya unión equivale al dominio original. Dentro de cada elemento las variables independientes se aproximan mediante funciones de interpolación locales

En el caso de los elementos que poseen grados de libertad nodales compuestos por desplazamientos mecánicos (traslaciones y giros) y potenciales eléctricos, se tendría un vector de desplazamientos nodales generalizados $q = \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}$ como se muestra en la figura 3.1, allí los desplazamientos mecánicos se representan con $\{q_m\}$ mientras los eléctricos con $\{q_e\}$.

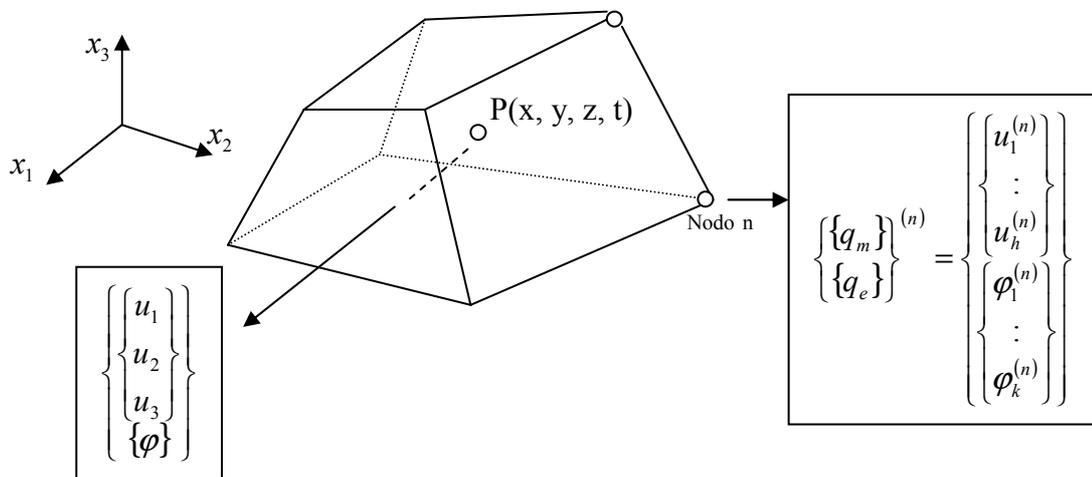


Figura 3.1: Elemento sólido con sus correspondientes grados de libertad nodales (mecánicos y eléctricos)

La aproximación de los desplazamientos mecánicos y el potencial eléctrico dentro del elemento se realiza a través de las matrices de funciones de interpolación, $[N_m]$ y $[N_e]$ respectivamente y tienen las siguientes expresiones:

$$\{u\} = [N_m] \{q_m\} \quad (3.32)$$

$$\{\varphi\} = [N_e] \{q_e\} \quad (3.33)$$

Por otra parte, el campo de desplazamientos y el potencial eléctrico tienen asociados campos de deformaciones y campos eléctricos. Dichos campos se expresan mediante la introducción de los operadores diferenciales $[\partial_m]$ y $[\partial_e]$.

De esta manera:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [\partial_m] \{u\} \\ \{\varepsilon\} &= [B_m] \{q_m\} \\ \text{con } [B_m] &= [\partial_m] [N_m] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \{E\} &= -[\partial_e] \{\varphi\} \\ \{E\} &= -[B_e] \{q_e\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\text{con } [B_e] = -[\partial_e] [N_e]$$

Reemplazando en (3.29):

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([C] \{\varepsilon\} - [e]^T \{E\})^T \{\varepsilon\} dV - \int_S \{F\}^T \{u\} dS - \int_{\Omega} \{f\}^T \{u\} dV + \quad (3.36)$$

$$+ \int_S Q \varphi dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([e] \{\varepsilon\} + [\chi] \{E\})^T \{E\} dV + \int_{\Omega} q \varphi dV$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{E\}^T [e] \{\varepsilon\} dV - \\ &- \int_S \{F\}^T \{u\} dV - \int_{\Omega} \{f\}^T \{u\} dV + \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$+ \int_S Q \varphi dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{E\}^T [\chi] \{E\} dV + \int_{\Omega} q \varphi dV$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([B_m] \{q_m\})^T [C] [B_m] \{q_m\} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([B_e] \{q_e\})^T [e] [B_m] \{q_m\} dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([B_m] \{q_m\})^T [e]^T ([B_e] \{q_e\}) dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([B_e] \{q_e\})^T [\chi] ([B_e] \{q_e\}) dV \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$+ \int_S Q [N_e] \{q_e\} dS + \int_{\Omega} q [N_e] \{q_e\} dV - \int_S \{F\}^T [N_m] \{q_m\} dV - \int_{\Omega} \{f\}^T [N_m] \{q_m\} dV$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \int_{\Omega} [B_m]^T [C] [B_m] dV & \int_{\Omega} [B_m]^T [e]^T [B_e] dV \\ \int_{\Omega} [B_e]^T [e] [B_m] dV & - \int_{\Omega} [B_e]^T [\chi] [B_e] dV \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} - \int_S \{F\}^T [N_m] dV - \int_{\Omega} \{f\}^T [N_m] dV \\ \int_S Q [N_e] dS + \int_{\Omega} q [N_e] dV \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para el término que contiene la energía cinética se tiene:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho ([N_m] \{\dot{q}_m\})^T ([N_m] \{\dot{q}_m\}) dV \quad (3.40)$$

Sacando afuera de la integral las velocidades desplazamientos nodales

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \left[\int_{\Omega} \rho [N_m]^T [N_m] dV \right] \{\dot{q}\} \quad (3.41)$$

La expresión variacional (3.28) se expresa ahora:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \{\dot{q}_m\}^T \left[\int_{\Omega} \rho [N_m]^T [N_m] dV \right] \{\dot{q}_m\} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \int_{\Omega} [B_m]^T [C] [B_m] dV & + \int_{\Omega} [B_m]^T [e]^T [B_e] dV \\ + \int_{\Omega} [B_e]^T [e] [B_m] dV & - \int_{\Omega} [B_e]^T [\chi] [B_e] dV \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} - \int_S \{F\}^T [N_m] dV - \int \{f\}^T [N_m] dV \\ \int_S Q [N_e] dS + \int_{\Omega} q [N_e] dV \end{Bmatrix} \right) dt = 0 \quad (3.42)$$

Una vez definidas las coordenadas espaciales de los nodos, el vector $\begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}$ resulta sólo función del tiempo, por lo tanto el tiempo es la única variable independiente del Lagrangeano. En estas condiciones, el vector $\begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}$ que minimiza (3.38) es aquel que verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1 \dots n \quad (3.43)$$

Donde n es el número de grados de libertad del sistema discreto sustituto del sistema continuo original.

Por lo tanto, la ecuación de Euler-Lagrange se expresa de la siguiente manera:

$$\left[\int_{\Omega} \rho [N_m]^T [N_m] dV \right] \{\ddot{q}_m\} + \begin{bmatrix} \int_{\Omega} [B_m]^T [C] [B_m] dV & + \int_{\Omega} [B_m]^T [e]^T [B_e] dV \\ + \int_{\Omega} [B_e]^T [e] [B_m] dV & - \int_{\Omega} [B_e]^T [\chi] [B_e] dV \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_S \{F\}^T [N_m] dV + \int \{f\}^T [N_m] dV \\ - \int_S Q [N_e] dS - \int_{\Omega} q [N_e] dV \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Expresando esta ecuación de manera mas compacta, se obtiene la ecuación de elementos finitos, cuya resolución permite hallar los valores de las variables nodales.

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_m \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{me} \\ K_{em} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m \\ q_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_e \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Donde los elementos de las matrices de masa y “rigidez” tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} M_{mm} &= \int_{\Omega} \rho [N_m]^T [N_m] dV : \text{Matriz de masa} \\ K_{mm} &= \int_{\Omega} [B_m]^T [C] [B_m] dV : \text{Matriz de rigidez mecánica} \\ K_{me} &= \int_{\Omega} [B_m]^T [e] [B_e] dV : \text{Matriz de acoplamiento electromecánico} \\ K_{em} &= \int_{\Omega} [B_e]^T [e] [B_m] dV : \text{Matriz de acoplamiento electromecánico} \\ K_{ee} &= - \int_{\Omega} [B_e]^T [\chi] [B_e] dV : \text{Matriz dieléctrica} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Los vectores de carga generalizados tienen las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} F_m &= \int_S \{F\}^T [N_m] dS + \int_{\Omega} \{f\}^T [N_m] dV : \text{Vector consistente de cargas mecánicas} \\ F_e &= - \int_S Q [N_e] dS - \int_{\Omega} q [N_e] dV : \text{Vector consistente de cargas eléctricas} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Todas estas ecuaciones se obtuvieron considerando como variables de campo independientes a los desplazamientos y al potencial eléctrico y, en ese contexto, presentan la generalidad suficiente como para obtener, a partir de ellas, formulaciones de elementos estructurales de diferentes tipos, es decir sólidos, placas, cáscaras, membranas, vigas y barras. Las diferentes formulaciones se logran construyendo los operadores diferenciales $[\partial_m]$, $[\partial_e]$ y las matrices de interpolación $[N_m]$ y $[N_e]$ acordes al tipo de elemento, al orden y forma de interpolación, y a la manera en que se desarrolla el campo eléctrico dentro del elemento. Éste último aspecto se encuentra íntimamente relacionado con la disposición y forma de electrodos.

La formulación citada en este trabajo se denomina irreducible ya que el número de variables de campo no puede reducirse. Sin embargo, pueden encontrarse en la literatura formulaciones basadas en principios variacionales mixtos que contienen tensiones, deformaciones, desplazamientos mecánicos, desplazamientos eléctricos, campo eléctrico y potencial eléctrico como variables de campo, Sze et al (1999).

3.3. Estado del Arte

Como se expresa en la sección 3.2, los elementos finitos capaces de describir el comportamiento estructural de sistemas construidos con materiales piezoeléctricos pueden considerarse como una generalización de los utilizados en mecánica estructural clásica.

En búsqueda de herramientas para resolver problemas en los que están involucrados materiales piezoeléctricos, se han formulado gran cantidad de elementos. Aparentemente, los primeros esfuerzos en el área, estuvieron orientados básicamente al estudio y diseño de transductores piezoeléctricos, se trataba básicamente de elementos sólidos. Sin embargo, en las últimas dos décadas, con el creciente interés que cobraron las estructuras activas, especialmente en las ramas aeroespaciales, surgieron formulaciones de elementos mejor condicionados para tales aplicaciones, así comenzaron a aparecer en la literatura elementos tipo cáscaras y placas y vigas que soporta materiales piezoeléctricos laminados, Benjeddou (2000).

3.3.1. Elementos Sólidos

Los elementos piezoeléctricos sólidos tridimensionales son similares a los elementos sólidos tridimensionales mecánicos, sólo que poseen grados de libertad eléctricos adicionales en los nodos.

La mayoría de los trabajos estuvieron impulsados por la necesidad de analizar dispositivos concretos. Tal es el caso de los transductores piezoeléctricos utilizados en sonares. Para tal fin, resultaba suficiente trabajar con ecuaciones constitutivas lineales.

El primer modelo de elementos finitos que incluyó el fenómeno piezoeléctrico fue propuesto por Allik y Hughes (1970). Ellos desarrollaron un elemento piezoeléctrico sólido y lo aplicaron al estudio de transductores acústicos. Se trata de un elemento sólido tetraédrico de cuatro nodos con cuatro grados de libertad por nodo, tres desplazamientos mecánicos y el potencial eléctrico. Utilizaron condensación estática de los grados de libertad eléctricos.

También Allik y Webman (1974) propusieron un elemento sólido hexaédrico de 20 nodos para analizar la respuesta de los transductores de sonares. Los desplazamientos y el potencial eléctrico en el interior del mismo se aproximaban en forma cuadrática.

Chin et al (1994) formularon un elemento sólido tridimensional hexaédrico de 8 nodos con aproximación lineal de desplazamientos y potencial eléctrico dentro del elemento.

Al igual que ocurre en el caso de elementos basados en formulaciones irreducibles usados en problemas mecánicos, en el caso piezoeléctrico también se obtienen elementos demasiado rígidos, sensibles a distorsiones en la malla y a las relaciones de aspecto, (Sze et al, 1999).

Para solucionar dicho inconveniente, Tzou et al, (1990), Ha et al, (1992) y Tzou, (1993) utilizaron los modos incompatibles de desplazamiento y mejoraron el desempeño de los elementos sólidos hexaédricos de 8 nodos.

Con el transcurso de los años, se comenzaron a investigar los materiales ferroeléctricos, para lo cual no bastaban las ecuaciones lineales. Así, se llegaron a proponer elementos que soportan ecuaciones constitutivas no lineales y grados de libertad internos para representar transiciones de fase y polarización remanente. Ghandi et al, (1997) formularon elementos sólidos hexaédricos de 8 nodos y tetraédricos de 4 nodos. Esta formulación estuvo basada en desplazamiento eléctrico e hizo posible modelar de manera más precisa, entre otros fenómenos, la transición de fase y la polarización remanente presentes en materiales de naturaleza ferroeléctrica, mediante la incorporación de un vector interno para almacenar la magnitud y dirección de la polarización. Las variables de polarización espontánea determinan la dirección de polarización dentro de cada elemento y el acoplamiento electromecánico. Su valor está determinado por la historia del sistema y es fundamental para poder captar el comportamiento histerético del material. La solución se realizó en forma iterativa.

3.3.2. Elementos de Cáscara

Sólo se encontraron en la literatura algunas formulaciones de elementos de cáscara que contemplan los fenómenos piezoeléctricos.

Lammering (1991) propuso un elemento de cáscara de cuatro nodos, con desplazamientos, giros y potencial eléctrico interpolados en forma lineal dentro del elemento. El elemento presenta 7 grados de libertad por nodo, tres desplazamientos, dos giros y dos potenciales eléctricos, uno para la cara superior y otro para la cara inferior. El modelo soporta un laminado de tres capas, generando, a partir de las mismas, una capa equivalente.

Thirupathi et al (1997) propuso un elemento cuadrilátero de cáscara, de ocho nodos, sin grados de libertad eléctricos en los nodos. El elemento fue formulado usando una teoría de cáscara tridimensional modificada. El efecto piezoeléctrico fue tratado como una deformación inicial.

Varadan et al (1993) propusieron un elemento tipo cáscara axial-simétrico de tres nodos y tres grados de libertad por nodo, dos desplazamientos en el plano y el potencial eléctrico.

Tzou et al. (1996) formularon un elemento de cáscara modificado de 12 nodos. Los desplazamientos y potenciales eléctricos se supusieron cuadráticos en el plano y lineales a través del espesor.

Lee et al. (2000) desarrollaron un elemento de cáscara de ocho nodos basado en una teoría multilámina y termopiezoelasticidad lineal, con los potenciales eléctricos interpolados independientemente en cada capa. Fue utilizado para modelar el comportamiento de laminados piezoeléctricos bajo excitaciones térmicas.

También se encontraron en la literatura trabajos que analizan estructuras tipo sándwich, en las que el centro es de un material convencional y se adhieren en la superficie parches que pueden cumplir la función de actuadores o sensores, (Lammering et al 2003). Los autores presentan distintas formulaciones variacionales y sus correspondientes soluciones mediante elementos finitos, pensados para diseñar distintas estructuras tipo cáscaras que poseen parches piezoeléctricos. Se basan en la formulación de un elemento isoparamétrico de cáscara elástica gruesa, del tipo de Mindlin/Reissner. La cinemática de la estructura queda descrita por los desplazamientos \tilde{u} , \tilde{v} y \tilde{w} correspondientes a la zona pasiva y a las capas piezoeléctricas.

3.3.3. Elementos de Placa

Muchos de los desarrollos de elementos finitos para el análisis de placas se realizaron sobre las bases de las teorías clásicas, en las cuales se considera el campo de desplazamientos en el plano, variable según una ley lineal. Por otra parte Mitchell y Reddy (1995) y Saravanos et al (1997) presentaron teorías mas realistas que simulaban con mayor precisión el comportamiento a través de las capas del laminado. Los desarrollos se aplicaron para análisis estáticos y dinámicos de laminados piezoeléctricos.

Saravanos et al (1997) supuso una variación continua de desplazamientos mecánicos y potencial eléctrico a través del espesor del laminado. La teoría resultante representa, con mayor generalidad, la cinemática del alabeo de la sección transversal y captura la variación no lineal del potencial eléctrico a través del espesor cuando el laminado es grueso.

Suleman (1995) propuso un elemento de placa basado en la teoría de Mindlin con un potencial eléctrico por cada capa piezoeléctrica, y utilizó integración numérica reducida.

Además, se encontraron en la literatura formulaciones que utilizan teorías de capas discretas para laminados piezoeléctricos de placas. Estas formulaciones tienen la ventaja de representar el potencial con mayor precisión, gracias a las subdivisiones a través del espesor del elemento. Se han propuesto diferentes maneras de aproximar el campo eléctrico, dependiendo de la manera en que está construida la estructura.

Cuando se utilizan laminados con varias capas (algunas piezoeléctricas), resulta necesario contemplar la posibilidad de que las diferentes capas piezoeléctricas estén sometidas a

diferentes campos eléctricos. Chee et al (2000) propusieron un modelo que admite configuraciones multilaminas, aproxima los desplazamientos en el plano en forma cúbica, los desplazamientos transversales en forma cuadrática y los potenciales intralaminares de manera lineal. Cada capa del laminado puede tener una dirección particular y puede presentar o no propiedades piezoeléctricas. La figura 3.2 muestra un esquema del elemento considerado en el citado trabajo, allí se pueden observar las diferentes capas del laminado y el potencial eléctrico interpolado en cada una. Además de los grados de libertad mecánicos, se incluye un valor de potencial eléctrico $q_{e,ns}$ por cada interfase interlaminar y las dos superficies exteriores del laminado. En la figura 3.2, el subíndice n se refiere al número de nodo, y el s al número de interfaz.

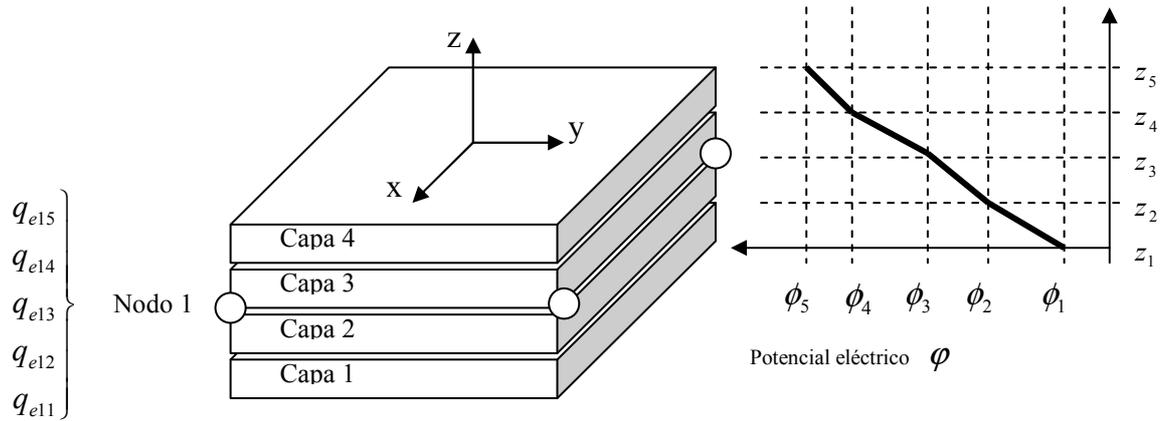


Figura 3.2: Esquema del elemento de placa y la variación del potencial eléctrico propuesto por Chee et al. (2000).

El potencial eléctrico a lo largo de la dirección z , en la capa k , se aproxima mediante funciones lineales de Lagrange:

$$\varphi_k(x, y, z, t) = \varphi_k(x, y, t) \frac{(z - z_{k+1})}{(z_k - z_{k+1})} + \varphi_{k+1}(x, y, t) \frac{(z - z_k)}{(z_{k+1} - z_k)} \quad (3.48)$$

Ordenando los potenciales de cada interfase en un vector se expresa en la siguiente forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1(x, y, z, t) \\ \varphi_2(x, y, z, t) \\ \varphi_3(x, y, z, t) \\ \varphi_4(x, y, z, t) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(z - z_2)}{(z_1 - z_2)} & \frac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(z - z_3)}{(z_2 - z_3)} & \frac{(z - z_2)}{(z_3 - z_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(z - z_4)}{(z_3 - z_4)} & \frac{(z - z_3)}{(z_4 - z_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(z - z_5)}{(z_4 - z_5)} & \frac{(z - z_4)}{(z_5 - z_4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(x, y, t) \\ \phi_2(x, y, t) \\ \phi_3(x, y, t) \\ \phi_4(x, y, t) \\ \phi_5(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

En forma compacta:

$$\{\phi\} = [L]\{\phi\} \quad (3.50)$$

donde $\phi_h(x, y, t)$ es el valor del potencial eléctrico en la interfase h.

El campo eléctrico se aproxima en dos etapas. Con la primera se obtienen las funciones de distribución de potencial en cada interfase, para lo que utilizan funciones de forma isoparamétricas estándar, lineales de cuatro nodos.

$$\phi_h(x, y, t) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} q_{1h} \\ q_{2h} \\ q_{3h} \\ q_{4h} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

$h = 1..5$ se refiere al número de interfaz.

Ordenando los potenciales de cada interfase en un vector, se puede expresar la interpolación de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1(x, y, t) \\ \phi_2(x, y, t) \\ \phi_3(x, y, t) \\ \phi_4(x, y, t) \\ \phi_5(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & & & & \\ & N_2 & & & \\ & & N_3 & & \\ & & & N_4 & \\ & & & & N_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{e11} \\ \vdots \\ q_{e15} \\ q_{e21} \\ \vdots \\ q_{e25} \\ \vdots \\ q_{e51} \\ \vdots \\ q_{e55} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

En forma compacta:

$$\{\phi\} = [N]\{q_e\} \quad (3.53)$$

La segunda etapa aproxima los potenciales en la dirección z, dentro de cada capa. Para lo cual se utiliza la expresión (3.49).

Por lo tanto, el potencial dentro de cada capa está dado por la siguiente expresión:

$$\{\phi\} = [L][N]\{q_e\} \quad (3.50)$$

Reddy (1999), en su trabajo presenta una formulación teórica de las soluciones de Navier y modelos de elementos finitos basados en la teoría clásica de placas y la teoría de deformación por corte para el análisis de placas de compuestos laminados con sensores y actuadores integrados, sujetas a cargas mecánicas y eléctricas. La teoría de deformación por

corte de tercer orden describe mejor la cinemática, aproximando con mayor precisión las tensiones interlaminares.

Auricchio et al. (2001) estudiaron el comportamiento de placas piezoeléctricas bajo las hipótesis cinemáticas de Reissner-Mindlin, considerando dos problemas variacionales desacoplados, el membranal y el flexional.

3.3.4. Elementos de Viga

Surgieron gran cantidad de trabajos que proponen elementos de viga capaces de describir, particularmente, el comportamiento de alas y palas de helicópteros para analizar el control de fenómenos aeroelásticos, Song et al, (1992) usaron un modelo de viga con inclusiones de material piezoeléctrico para modelar alas adaptativas, luego, Ehlers, (1994) propuso un elementos de viga tipo cajón con capacidad de actuación anisótropa.

Shen (1994) formuló un elemento de viga basado en la teoría de Timoshenko, utilizando el funcional mixto de Hu-Washizu, los desplazamientos axiales y la función de alabeo son interpolados en forma lineal, mientras que las deflexiones transversales se aproximan con un polinomio cúbico de Hermite. Además de los grados de libertad mecánicos, el elemento posee un potencial eléctrico para la cara superior y otro para la inferior.

Carpenter (1997) propone un elemento de viga basado en la teoría de Euler-Bernoulli con potenciales eléctricos como grados de libertad nodales, para ser utilizado en vibraciones axiales y control de flexión.

En cuanto a modelos que no disponen de grados de libertad eléctricos en los nodos, Robbins (1991) formuló cuatro elementos basados en analogías térmicas. Dos de ellos basados en modelos de lámina equivalente que utilizan modelos clásicos de vigas y los dos restantes en modelos multiláminas con deflexiones interpoladas con polinomios cúbicos de Hermite.

Se propusieron elementos de viga con materiales compuestos PZT-Epoxy para ser utilizados en control activo de vibraciones (Aldraihem, 1997). Dichos elementos están basados en las teorías de Euler-Bernoulli e incluyen el comportamiento en torsión de Saint-Venant y el alabeo de la sección.

3.3.5. Aplicaciones y tendencias actuales

Un análisis detallado de la literatura muestra que la mayoría de los modelos de elementos finitos están dirigidos a simulaciones estáticas, modales, harmónicas y transitorias de sistemas de control de vigas y placas.

En aplicaciones que utilizan laminados piezoeléctricos, los elementos tipo cáscara y placa presentan grandes ventajas, ya que permiten realizar modelos estructurales computacionalmente económicos sin penalizar la calidad de los resultados ni la habilidad del modelo para representar la estructura real. Al respecto, recientemente se realizaron análisis mediante el método de elementos finitos que comprenden aplicaciones tales como control de efectos térmicos, (Lee et al. 1997 y Lee et al. 2000); atenuación activa de ruido, (Kim et al. 1997, Bevan, 2001); detección de daño debido a procesos de delaminación en materiales compuestos; fenómenos de impacto a bajas velocidades, control activo de pandeo, (Wang, 2002); comportamiento material de compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas; control de la respuesta estructural de laminados piezoeléctricos bajo cargas termomecánicas, (Lee et al. 2000); supresión de flutter y otros fenómenos aeroelásticos.

Sin embargo, no se encuentran en la literatura formulaciones especialmente propuestas para analizar estructuras de placas o cáscaras que utilicen compuestos con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales.

Capítulo 4

Modelo para compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas polarizados con electrodos interdigitales

4.1. Introducción

Los laminados que utilizan electrodos interdigitales, han despertado especial interés en los últimos años. A diferencia de los primeros compuestos con incrustaciones, los últimos trabajos de investigación centran la atención en la utilización de fibras continuas, en particular aquellas con la dirección de polarización de los materiales coincidente con la de las fibras.

El compuesto que se estudia en esta tesis es de ese tipo y puede esquematizarse como se ilustra en la Figura 4.1.

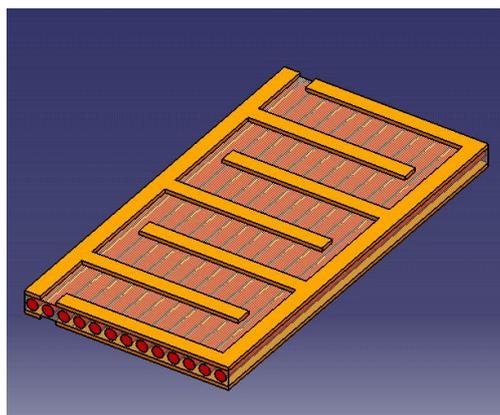


Figura 4.1: Esquema de una porción de laminado piezoeléctrico.

Como se muestra en la figura 4.1, se trata, a simple vista, de un laminado convencional, es decir, con fibras orientadas convenientemente, inmersas en una matriz. Pero la principal diferencia con aquellos radica en los materiales utilizados para construir las fibras. Dichos materiales presentan propiedades piezoeléctricas.

Los electrodos interdigitales se utilizan para polarizar, controlar y sensar. El concepto de electrodos interdigitales fue introducido con el objetivo de mejorar el desempeño de los actuadores con cerámicas monolíticas (Hagood et al, 1993). Luego, Bent et al, (1997) utilizó dicha configuración de electrodos en dispositivos construidos con fibras piezoeléctricas.

Las fibras, al igual que las cerámicas monolíticas presentan un comportamiento piezoeléctrico anisótropo, esto se ve reflejado en la diferencia numérica de las componentes del tensor piezoeléctrico. Los electrodos interdigitales introducen en las fibras un campo eléctrico paralelo a las mismas. La anisotropía del tensor piezoeléctrico marca diferencias en los valores de acoplamiento que presentan los compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas. La figura 4.2 muestra un esquema de una porción de laminado y los valores numéricos de esfuerzos obtenidos bajo condiciones de deformaciones totalmente restringidas.

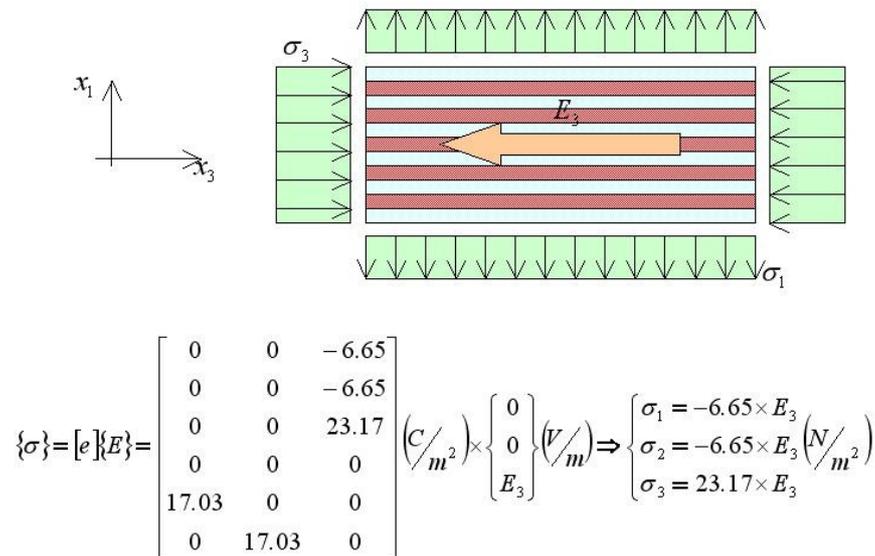


Figura 4.2: Esfuerzos en dos direcciones ortogonales, generados en un laminado piezoeléctrico

Puede observarse, además de la diferencia numérica, la diferencia de signo en los esfuerzos mecánicos en direcciones ortogonales. Lo mismo ocurre cuando se introducen deformaciones. Según cuáles sean las direcciones de las mismas, se registran diferentes valores de potencial eléctrico en los electrodos. En resumen, el acoplamiento electromecánico presenta diferentes valores en cada dirección. Esta característica recibe el nombre de acoplamiento electromecánico anisótropo y se manifiesta tanto en el funcionamiento como actuadores como en el comportamiento como sensores de los dispositivos estudiados. Du Plessis et al, (1996) analizaron el control de vibraciones torsionales de una viga tipo cajón mono-celda de material compuesto, mediante actuadores anisótropos. El sistema estuvo pensado para el control de vibraciones de palas de helicópteros. También Raja et al, (2002) analizaron la influencia de la actuación isótropa y anisótropa sobre el desempeño de un sistema de control de vibraciones de un panel, ellos reportaron que los niveles de

amortiguamiento obtenidos en el sistema de actuación anisótropa supera a los correspondientes a la actuación isótropa.

4.2. Análisis de estructuras activas con compuestos piezoeléctricos, utilizando el método de elementos finitos

Considérese el caso de una estructura de paredes delgadas diseñada para soportar especialmente esfuerzos flexionales y torsionales a la que se le adhieren parches actuadores y sensores, de dimensiones comerciales. Tal podría ser el caso de una pala de helicóptero, un timón o un ala, a la que se adhieren parches piezoeléctricos. Utilizando un modelo de 1/6 de escala de Mach, Rodgers y Hagood, (1998) analizaron el comportamiento y la capacidad de actuación de una pala del rotor del helicóptero CH-47D, cuyo larguero tipo-D se construyó utilizando capas de compuestos activos polarizados con electrodos interdigitales. La figura 4.3 muestra la pala de helicóptero, el larguero tipo-D y un detalle del compuesto piezoeléctricos formando ángulos de $\pm 45^\circ$ respecto del eje longitudinal de la misma.

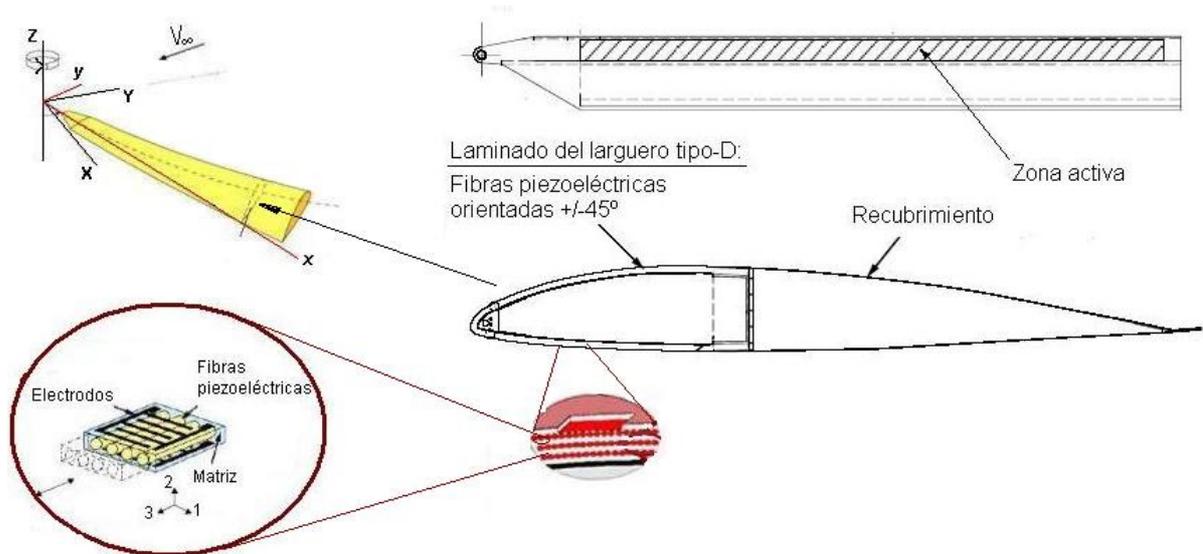


Figura 4.3: Pala de helicóptero con compuestos piezoeléctricos (Rodgers y Hagood, 1998).

Un modelo de elementos finitos, detallando las fibras, la matriz y los electrodos interdigitales de una estructura como la mostrada en la figura 4.3 es excesivamente caro desde el punto de vista computacional, ya que debido a las dimensiones de las fibras y separación entre electrodos, el tamaño de los elementos necesarios es del orden de los $2E-2$ mm. Esto resultaría en una cantidad de elementos que tomarían totalmente impracticable cualquier análisis de la estructura global.

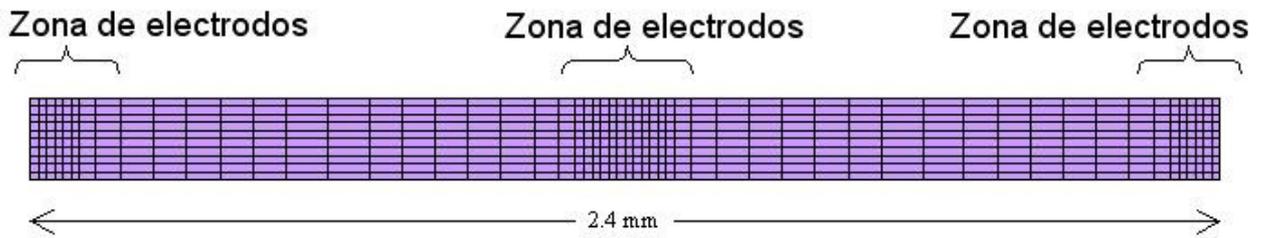


Figura 4.4: Aspecto del mallado de una fibra solamente, en una longitud que abarca tres electrodos consecutivos (Corte longitudinal).

La figura 4.4 muestra una posible malla de elementos finitos que abarca solamente una longitud de 2.4 mm de fibra piezoeléctrica. Conservando esta densificación se utilizarían aproximadamente $15E6$ elementos para representar un parche comercial de 120 mm de largo, 70 mm de ancho y 0.4 mm de espesor y poder captar en el modelo los efectos locales de distribución de campo eléctrico y consecuencias asociadas a las diferencias de constantes dieléctricas y mecánicas entre las fibras y la matriz.

Una alternativa consiste en obtener, mediante algún procedimiento, las propiedades de un material equivalente que resuma las propiedades del laminado y la presencia de los electrodos interdigitales. Estas propiedades pueden ser utilizadas luego en un modelo “macroscópicamente equivalente”, con una cantidad aceptable de elementos y utilizarse en la estructura que se desea modelar.

4.3. Obtención de las propiedades materiales equivalentes del compuesto piezoeléctrico

Según Jang (1994), Wagner (1914) realizó las primeras investigaciones para predecir teóricamente la dependencia de las propiedades eléctricas de un compuesto a partir de la fracción de volumen de cerámica presente en el mismo. Buesson (1963) derivó ecuaciones para las constantes dieléctricas de un compuesto, utilizando modelos serie y paralelo.

Los primeros trabajos relacionados con la predicción de las características constitutivas de compuestos piezoeléctricos, se orientaron a partículas cerámicas inmersas en una matriz determinada. Desde los comienzos, se utilizaron combinaciones de modelos serie y paralelo para reproducir el comportamiento del compuesto con fibras.

Bent y Hagood (1997) estudiaron, mediante una técnica de campos uniformes, compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas elaboradas comercialmente. Realizaron el análisis utilizando además diferentes proporciones de volumen fibra/matriz. Para contrastar los resultados obtenidos realizaron un análisis detallado mediante elementos finitos de una porción representativa del laminado, llamada celda unitaria.

El potencial eléctrico aplicado a los electrodos genera un campo eléctrico. El mismo “recorre” una porción de matriz hasta alcanzar la fibra. Por otra parte, los esfuerzos longitudinales y transversales se distribuyen en función de la disposición y proporción volumétrica de los componentes.

En el marco de esta Tesis, a los efectos de analizar en detalle el comportamiento de los dispositivos piezoeléctricos estudiados y contrastar resultados, se estudió el comportamiento del compuesto utilizando dos métodos diferentes:

- **Mesomecánico:** Se estudió el comportamiento del material compuesto examinando detalladamente la interacción de los materiales constituyentes. Se realizó el análisis mesomecánico modelando la celda unitaria con elementos finitos.
- **Macromecánico:** Se estudió el comportamiento del material compuesto suponiendo al mismo homogéneo. El efecto de cada constituyente se tuvo en cuenta en forma promedio. Se utilizó para el Macromodelo, una generalización de la teoría de mezclas, extendida además para incorporar las propiedades dieléctricas y piezoeléctricas.

Observando con detalle el compuesto de la figura 4.1 se puede ver en el mismo una estructura formada por una “**celda unitaria**” que se repite periódicamente formando el laminado completo. En las Figuras 4.5 y 4.6 se esquematiza dicha celda unitaria. En rojo se observa la fibra, en amarillo los electrodos y en gris la matriz.

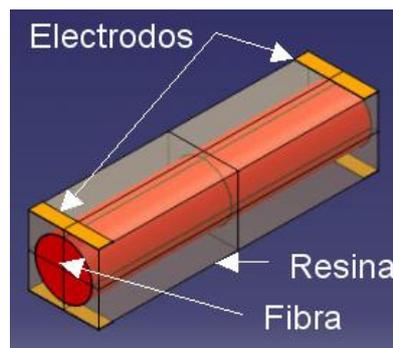


Figura 4.5: Esquema de una celda unitaria del laminado piezoeléctrico.

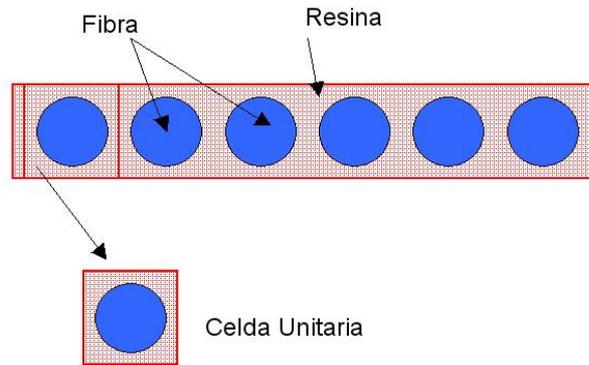


Figura 4.6: Esquema de una celda unitaria del laminado. Corte transversal

Se analizó la celda unitaria esquematizada en la figura 4.5 debido a que resume las características de todo el laminado. Es, de alguna manera, la mínima porción que conserva las mismas propiedades que el material compuesto resultante.

Las constantes materiales promedio obtenidas para esta "celda" pueden ser utilizadas como propiedades del parche para analizar modelos estructurales donde interese estudiar el comportamiento global y no el comportamiento dentro del laminado.

Como se mostró en el capítulo 3, las ecuaciones constitutivas de un medio piezoeléctrico incluyen los ya conocidos tensores elástico y dieléctrico, pero además un tercero, llamado tensor de acoplamiento piezoeléctrico. Dichos tensores corresponden a los materiales puros. Cuando se trata de compuestos como los estudiados en ésta tesis, los valores de las componentes de los tensores cambian. Los nuevos valores son funciones de las constantes de cada componente, de sus proporciones y de la geometría del dispositivo.

En virtud de la geometría del compuesto piezoeléctrico, es de esperar que la magnitud del campo eléctrico E_k no sea uniforme, mas aún, hay zonas del dispositivo donde también la dirección del vector E_k cambia. Esto es indeseable, ya que la idea básica de usar fibras piezoeléctricas es que el campo eléctrico tenga la dirección de las fibras. Sin embargo, es un fenómeno que, en mayor o menor medida, siempre está presente y resulta necesario conocerlo con suficiente precisión ya que, en cierta forma, determina la porción efectiva de fibra, es decir, aquella donde el campo eléctrico es paralelo a la misma. Por otro lado, el adecuado conocimiento del funcionamiento del dispositivo permite modificar ciertos parámetros, como el ancho de electrodos, para disminuir la longitud de la zona inactiva.

4.3.1. Mesomodelo

En el análisis del mesomodelo se combinaron cargas y condiciones de borde para poder determinar las propiedades constitutivas resultantes que luego se compararon con los resultados de las constantes constitutivas equivalentes obtenidas mediante la teoría de mezclas generalizada desarrollada.

Por otra parte, el análisis mesomecánico arroja resultados valiosos, como por ejemplo, las distribuciones locales del campo eléctrico.

4.3.1.1. Descripción del modelo de elementos finitos

El modelo mesomecánico del compuesto piezoeléctrico se realizó con el programa comercial Abaqus versión 6.3.1 (2002).

Para realizar el análisis, se comenzó modelando la celda unitaria. En virtud de la simetría de la misma, se analizó un octante de la geometría real mostrada en la figura 4.5, incluyendo las condiciones de borde eléctricas y mecánicas correspondientes en los tres planos de simetría.

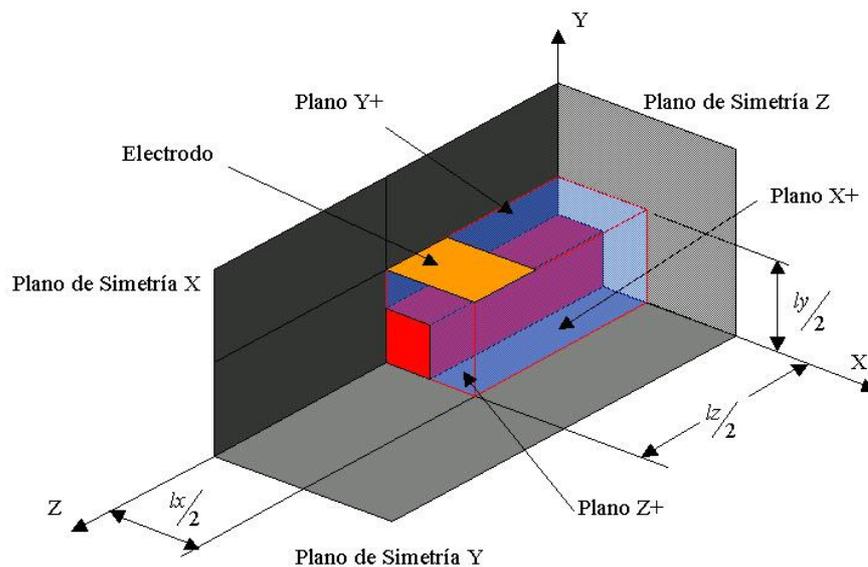


Figura 4.7: Esquema del modelo utilizado para analizar la celda unitaria.

La figura 4.7 muestra en detalle la porción analizada y los planos de simetría. Las dimensiones de la celda son: $l_x = 0.2E - 3mm$, $l_y = 0.2E - 3mm$ y $l_z = 1.2E - 3mm$. Teniendo en cuenta que las dimensiones transversales de las fibras oscilan entre los 30 y los 200 μm , este modelo resulta apto para el análisis de laminados piezoeléctricos. El cociente entre la distancia que separa la línea media de dos electrodos consecutivos y el ancho de los

mismos es una característica muy importante. El valor de dicho cociente se fijó en 6, (Bent, 1997).

Actualmente se fabrican y estudian a nivel mundial, tanto fibras de sección circular como de sección rectangular. Resulta, por lo tanto, interesante saber en qué aspectos la sección transversal de la fibra es relevante y en cuáles no. En el presente trabajo se realizaron análisis con fibras de sección circular y cuadrada con el objeto de comparar los resultados.

La formulación del programa comercial que se empleó utiliza como variables nodales los desplazamientos mecánicos y al potencial eléctrico, es decir que para el caso tridimensional, los elementos poseen cuatro grados de libertad por nodo.

4.3.1.2. Discretización

Los modelos utilizados se muestran en la figura 4.8, ambos constituidos por dos materiales: el de la fibra en la parte central (en rojo) y el de la resina envolviéndolo (en celeste). Los electrodos se representan fijando el potencial de los nodos que se muestran en la Figura 4.8 en color magenta.

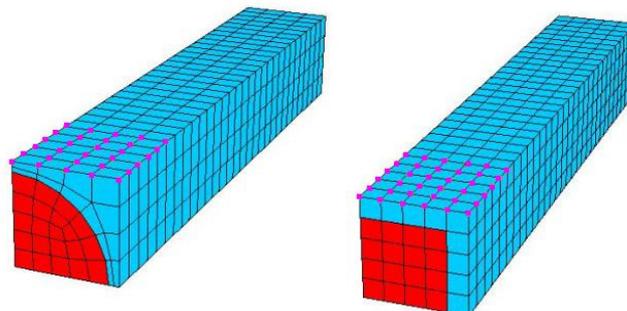


Figura 4.8: Modelos de elementos finitos utilizados para analizar el modelo microscópico de la celda unitaria del compuesto piezoeléctrico.

Se utilizaron elementos sólidos hexaédricos lineales de ocho nodos y se trabajó con relaciones de volumen de 0.04, 0.16, 0.32, 0.64 y 0.8, tanto para las fibras cuadradas como para las circulares.

4.3.1.3. Materiales

Los materiales utilizados en el modelo de elementos finitos corresponden a los de un laminado particular utilizado para la construcción de parches piezoeléctricos comerciales. La matriz es de resina epoxy y las fibras de PZT-5H. A continuación, se resumen las propiedades materiales de dichos materiales.

Tabla 4.1: Propiedades constitutivas de la cerámica PZT-5H

Constantes elásticas (GPa)																	
C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}									
130.6	85.66	135.8	88.3	90.42	121.3	23.47	22.99	22.99									
Constantes piezoeléctricas (C/m^2)																	
e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}	e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}
0	0	0	0	17.03	0	0	0	0	0	0	17.06	-6.9	-7.07	22.94	0	0	0
Constantes dieléctricas $\times 10^{-8} (F/m)$																	
χ_{11}						χ_{22}						χ_{33}					
1.51						1.51						1.27					

$$\text{Densidad: } \rho = 7750 \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right)$$

RESINA:

Propiedades elásticas:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 8.0(\text{GPa})$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} = 4.4(\text{GPa})$$

densidad:

$$\rho = 900 \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right)$$

4.3.1.4. Condiciones de borde y cargas

A los efectos de poder contrastar las propiedades mecánicas, eléctricas y piezoeléctricas obtenidas más adelante con el macromodelo equivalente, se obtuvieron las mismas utilizando el mesomodelo de elementos finitos. Dicho proceso se realizó teniendo en cuenta la definición de las constantes materiales, para lo cual resulta conveniente definir las cargas y las condiciones de borde de manera de obtener directamente las constantes buscadas como respuesta del material.

Como se analizó un sector del modelo, las condiciones de borde pueden separarse en dos grupos, aquellas que permiten simular la simetría (impuestas en los planos de simetría), resumidas en la tabla 4.2 y las que dan lugar a la obtención de las constantes materiales (impuestas en las superficies externas y electrodos), Tabla 4.3 y Tabla 4.4.

Tabla 4.2: Resumen de las condiciones de borde para simular la simetría.

Plano de simetría X	Plano de simetría Y	Plano de simetría Z
$u_1 = 0$	$u_1 = libre$	$u_1 = libre$
$u_2 = libre$	$u_2 = 0$	$u_2 = libre$
$u_3 = libre$	$u_3 = libre$	$u_3 = 0$
$D_1 = 0 \Rightarrow Q = 0$	$D_2 = 0 \Rightarrow Q = 0$	$V = 0$

Las condiciones de borde impuestas a los planos de simetría se repiten en todos los análisis mientras que las otras se modifican según la constante a determinar.

Tabla 4.3: Resumen de las condiciones de borde para obtener las componentes del tensor elástico.

Se impone	Condiciones de borde en			Se obtiene
	Cara X +	Cara Y +	Cara Z +	
$\varepsilon_1 = 1$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$	$u_1 = \frac{l_x}{2}$ $u_2 = 0$ $u_3 = 0$	$u_1 = libre$ $u_2 = 0$ $u_3 = 0$	$u_1 = libre$ $u_2 = 0$ $u_3 = 0$	$c_{11}^{ef} = \sigma_1$ $c_{21}^{ef} = \sigma_2$ $c_{31}^{ef} = \sigma_3$
$\varepsilon_2 = 1$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$	$u_1 = 0$ $u_2 = \frac{l_y}{2}$ $u_3 = 0$	$u_1 = 0$ $u_2 = libre$ $u_3 = 0$	$u_1 = 0$ $u_2 = libre$ $u_3 = 0$	$c_{12}^{ef} = \sigma_1$ $c_{22}^{ef} = \sigma_2$ $c_{32}^{ef} = \sigma_3$
$\varepsilon_3 = 1$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$	$u_1 = 0$ $u_2 = 0$ $u_3 = libre$	$u_1 = 0$ $u_2 = 0$ $u_3 = libre$	$u_1 = 0$ $u_2 = 0$ $u_3 = \frac{l_z}{2}$	$c_{13}^{ef} = \sigma_1$ $c_{23}^{ef} = \sigma_2$ $c_{33}^{ef} = \sigma_3$

Las componentes del tensor mecánico se determinaron bajo la condición de campo eléctrico nulo, para lo cual se impuso potencial eléctrico nulo en los electrodos.

El procedimiento utilizado para la obtención de las constantes consistió en variar las condiciones de borde impuestas a las caras externas y electrodos y medir las fuerzas y potenciales generados en el modelo de elementos finitos. Se describen a continuación las condiciones de borde utilizadas en cada caso.

En el modelo de elementos finitos, las condiciones de campo eléctrico nulo, es decir, electrodos en cortocircuito, se logran igualando el potencial eléctrico de los nodos que representan los electrodos. En este caso, al tratarse del octante de celda se impuso potencial cero a los nodos que representan el electrodo.

4.3.1.5. Determinación de las constantes materiales a partir del modelo de elementos finitos

Bajo las condiciones de borde citadas en la tabla 4.3, se determinaron las constantes elásticas efectivas de la siguiente manera:

Usando los resultados de los análisis con las condiciones de borde correspondientes al caso $\varepsilon_1 = 1$:

$$C_{11} = \sigma_{11} \Rightarrow C_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{NX} f_{1i}}{l_z l_y / 4}, \text{ donde las fuerzas } f_{1i} \text{ son las que surgen en los nodos de la cara } +X.$$

$$C_{21} = \sigma_{21} \Rightarrow C_{21} = \frac{\sum_{i=1}^{NY} f_{2i}}{l_z l_y / 4}, \text{ donde las fuerzas } f_{2i} \text{ son las que surgen en los nodos de la cara } +Y.$$

$$C_{31} = \sigma_{31} \Rightarrow C_{31} = \frac{\sum_{i=1}^{NZ} f_{3i}}{l_z l_y / 4}, \text{ donde las fuerzas } f_{3i} \text{ son las que surgen en los nodos de la cara } +Z.$$

Usando los resultados de los análisis con las condiciones de borde correspondientes al caso $\varepsilon_2 = 1$:

$$C_{22} = \sigma_{22} \Rightarrow C_{22} = \frac{\sum_{i=1}^{NY} f_{2i}}{l_z l_x / 4}, \text{ donde las fuerzas } f_{2i} \text{ son las que surgen en los nodos de la cara } +Y.$$

$$C_{32} = \sigma_{32} \Rightarrow C_{32} = \frac{\sum_{i=1}^{NZ} f_{3i}}{l_z l_x / 4}, \text{ donde las fuerzas } f_{3i} \text{ son las que surgen en los nodos de la cara } +Z.$$

Usando los resultados de los análisis con las condiciones de borde correspondientes al caso $\varepsilon_3 = 1$:

$$C_{33} = \sigma_3 \Rightarrow C_{33} = \frac{\sum_{i=1}^{NZ} f_{3i}}{l_x l_y / 4}, \text{ donde las fuerzas } f_{3i} \text{ son las que surgen en los nodos de la}$$

cara + Z .

Las componentes del tensor piezoeléctrico que se obtuvieron son e_{31} , e_{32} y e_{33} , que son las que se ponen en juego con la disposición de electrodos utilizada. Las componentes del tensor piezoeléctrico, al igual que las del tensor de permitividad dieléctrica se determinaron bajo condiciones de deformaciones nulas. Por esta razón, se realizó el proceso de cálculo con todas las caras de la celda unitaria restringidas.

Tabla 4.4: Condiciones de borde utilizadas para la obtención de las componentes del tensor piezoeléctrico.

Se impone	Condiciones de borde en			Se obtiene
	Cara X +	Cara Y +	Cara Z +	
$\{\varepsilon\} = 0$	$u_1 = 0$ $u_2 = libre$ $u_3 = libre$	$u_1 = 0$ $u_2 = libre$ $u_3 = libre$	$u_1 = libre$ $u_2 = 0$ $u_3 = libre$	$\sigma_1 = -e_{31}E_3$ $\sigma_2 = -e_{32}E_3$ $\sigma_3 = -e_{33}E_3$

En el electrodo se impuso un potencial de 500 V.

Bajo estas condiciones, las componentes del tensor piezoeléctrico se determinaron con las expresiones siguientes:

$$\sigma_1 = -e_{31}E_3 \Rightarrow e_{31} = -\frac{\sum_{i=1}^{NX} f_{1i}}{E_3 l_z l_y / 4}$$

$$\sigma_2 = -e_{32}E_3 \Rightarrow e_{32} = -\frac{\sum_{i=1}^{NY} f_{2i}}{E_3 l_z l_x / 4}$$

$$\sigma_3 = -e_{33}E_3 \Rightarrow e_{33} = -\frac{\sum_{i=1}^{NZ} f_{3i}}{E_3 l_x l_y / 4}$$

E_3 es el campo eléctrico que se desarrollaría en una celda de idénticas dimensiones que la analizada, pero constituida de un material homogéneo.

4.3.1.6. Resultados

Del modelo de elementos finitos se extrajeron dos tipos de resultados.

El primer tipo corresponde los valores de esfuerzos, potenciales y cargas eléctricas en determinados nodos que permiten evaluar las componentes de los tensores constitutivos equivalentes de la celda unitaria analizada. Dichos resultados se vuelcan superpuestos a las gráficas obtenidas con las ecuaciones deducidas a partir del mesomodelo.

El segundo grupo de resultados corresponde a las distribuciones de magnitudes tales como campo eléctrico, tensiones mecánicas y sus correspondientes concentraciones en determinados puntos y que marcan, de alguna manera, aspectos particulares del desempeño de los laminados piezoeléctricos.

La figura 4.9 muestra la porción de fibra entre un electrodo y el plano de simetría perpendicular al eje longitudinal de la fibra. Allí puede observarse la variación del campo eléctrico a lo largo de la misma. En función de la dirección y magnitud del campo eléctrico se distinguen cualitativamente tres zonas llamadas: activa, de transición e inactivas, respectivamente. En la zona inactiva, la componente longitudinal del campo eléctrico es muy pequeña o nula. En la zona de transición la componente longitudinal del vector campo eléctrico aumenta paulatinamente hasta llegar a la zona activa donde el campo es paralelo a la fibra. Cuanto mayor es la relación entre la distancia que separa la línea media de dos electrodos consecutivos y el ancho de los mismos, P/w , mayor es la longitud de la zona activa.

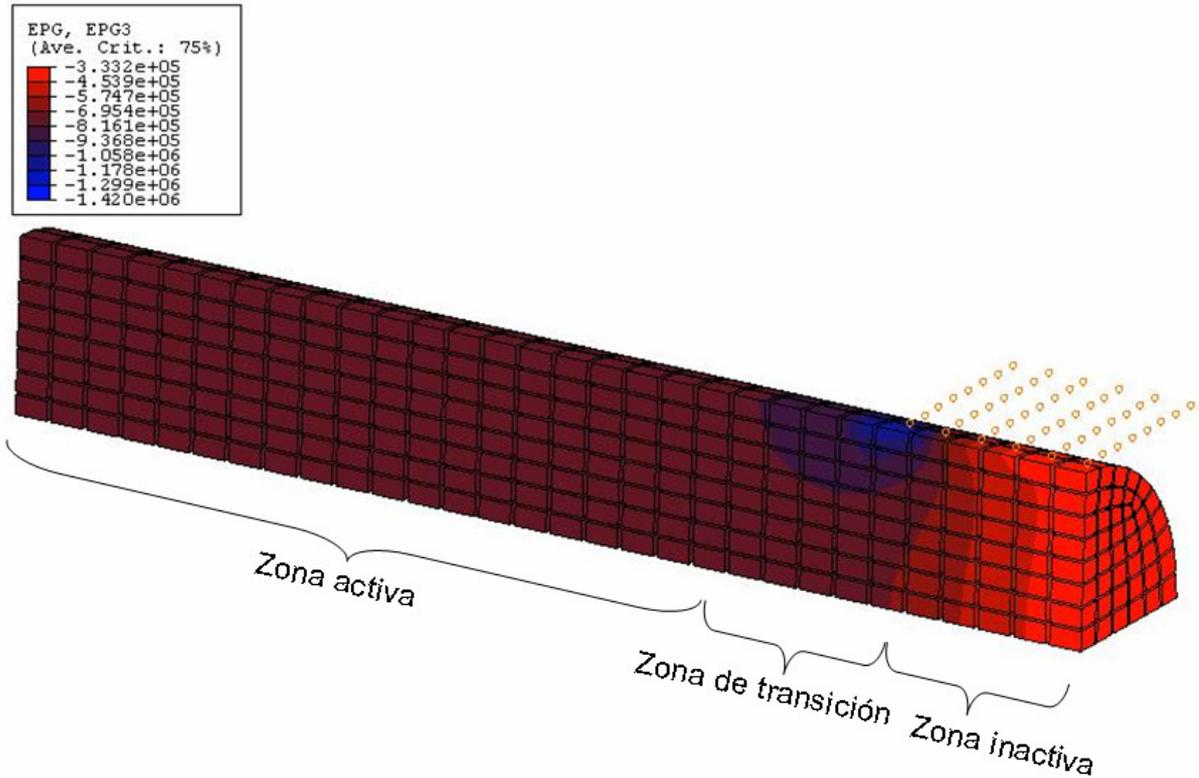


Figura 4.9: Distribución de la componente de campo eléctrico paralelo a la fibra. Relación de volumen de fibra: 0.708; cociente de relación dieléctrica entre fibra y resina: 10.

En la figura 4.9 puede observarse un aumento de aproximadamente 80% en la magnitud del campo eléctrico cerca de los electrodos respecto de la zona activa de la fibra. Es importante que dicha concentración no supere los valores fijados por la rigidez dieléctrica de los materiales con los que se fabrican las resinas y capas aislantes de los laminados.

Por otra parte, los elevados valores de campo eléctrico cerca de la zona de electrodos, además de originar comportamientos no lineales, generan grandes valores de tensiones mecánicas en las porciones de fibra cercanas y en la interfase de éstas con la resina. Esto podría generar microfisuras internas que degradarían el compuesto.

La figura 4.10 ilustra la variación de la dirección del vector campo, y la presencia de las tres zonas mencionadas anteriormente. Puede observarse el aumento en la magnitud del campo eléctrico en las cercanías del electrodo.

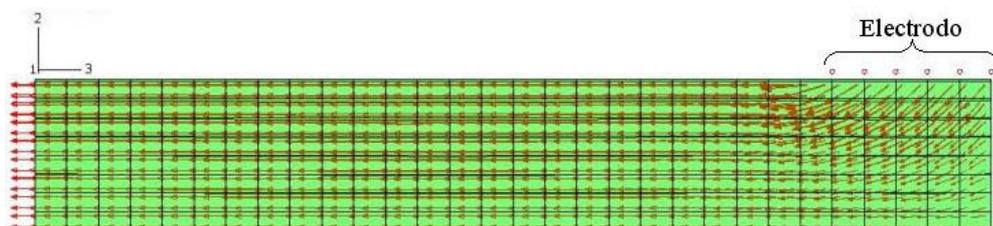


Figura 4.10: Distribución del campo eléctrico y la variación en la dirección del mismo entre los electrodos (círculos rojos) y el plano de simetría longitudinal (izquierda).

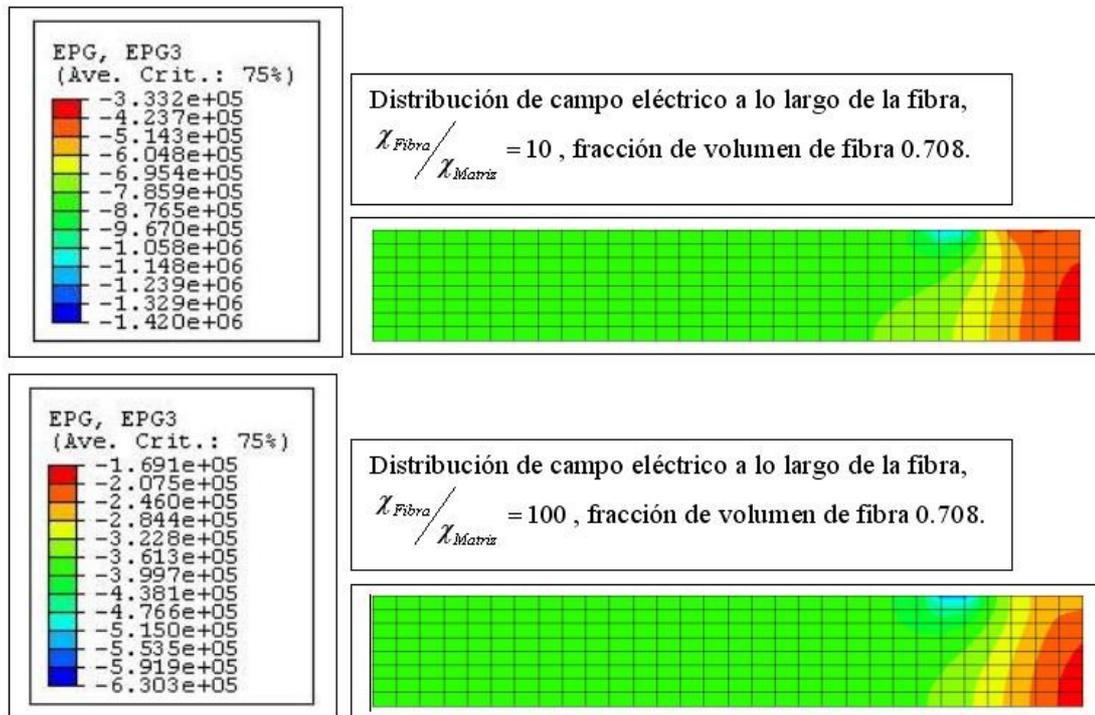


Figura 4.11: Magnitud y distribución de la componente de campo eléctrico paralelo a la fibra para valores de χ^{Fibra} 10 y 100 veces mayor al de la matriz.

La figura 4.11 muestra la marcada influencia de la diferencia de permitividad dieléctrica entre fibra y resina en la magnitud del campo eléctrico que alcanza a la fibra. También se observa la concentración de campo eléctrico en el borde del electrodo, sin embargo la malla utilizada no es lo suficientemente densa como para captar el fenómeno, salvo de manera cualitativa. Beckert et al. (2003) analizaron con el MEF este aspecto y la influencia de los parámetros geométricos sobre la deformación efectiva. Reportaron aumentos de entre 5 y 6 veces en el campo eléctrico efectivo en el borde del electrodo respecto del presente en la zona efectiva de la fibra.

4.3.2. Macromodelo

El enfoque macromecánico puede utilizarse para obtener expresiones para las diferentes componentes de los tensores constitutivos, en función de las correspondientes a cada fase, de las relaciones de volumen, de la separación y ancho de electrodos.

El modelo desarrollado es una generalización de la teoría de mezclas clásica y ha sido denominado modelo de Campos Uniformes por Bent y Hagood (1997). Utiliza sumas de componentes en serie y paralelo para modelar las propiedades efectivas del material compuesto por dos o más fases. De esta manera, numerosos investigadores han encontrado constantes efectivas para propiedades mecánicas y de transporte (conducción, coeficientes térmicos, etc.).

4.3.2.1. Desarrollo

Observando detenidamente una celda unitaria, es claro que la misma se puede construir mediante un ensamblaje de subcomponentes en tres etapas, esto se esquematiza en la figura 4.12, en donde se muestra la idealización de la celda unitaria y las tres etapas utilizadas para obtenerla.

Las dos primeras etapas consideran la combinación de componentes en paralelo y la tercera en serie. Esta última es la que incluye en el modelo los efectos de la diferencia de rigidez dieléctrica entre fibra y matriz, separación entre electrodos y distancia entre electrodos y fibra.

4.3.2.2. Hipótesis

Como su nombre lo indica, el modelo supone campos uniformes dentro de cada fase material y el comportamiento de la mezcla se considera en forma promedio, en el cual la contribución de cada componente se afecta de la fracción de volumen correspondiente. Cuando se lo aplica a la simulación del comportamiento de compuestos piezoeléctricos, interesa considerar los campos de naturaleza eléctrica además de los mecánicos.

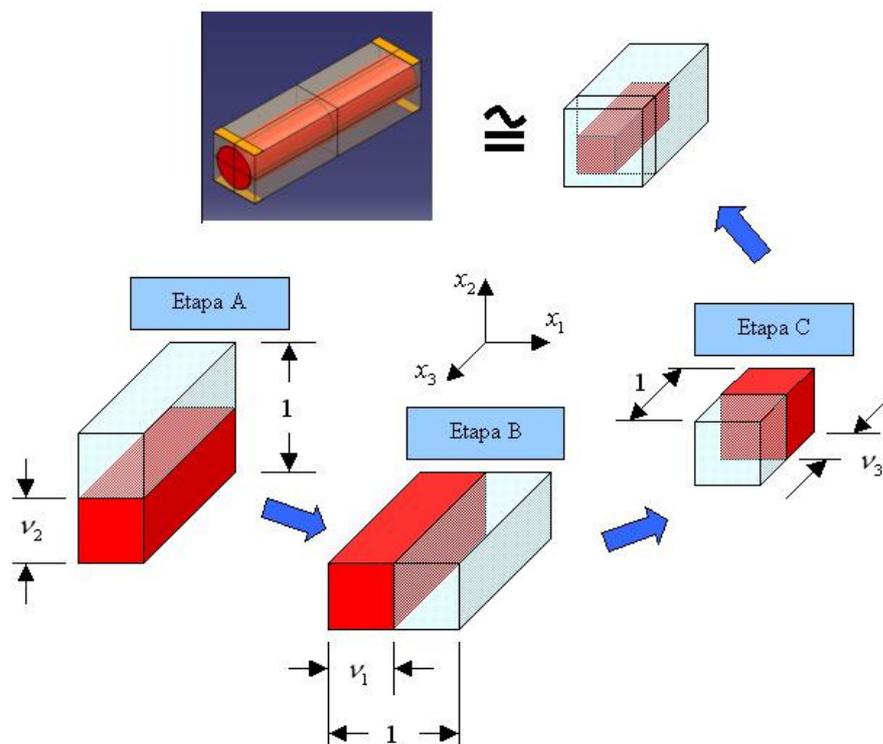


Figura 4.12: Esquema de la obtención del macromodelo mediante el ensamblaje en tres etapas.

Por la geometría de los dispositivos y por la presencia de los electrodos interdigitales, el campo eléctrico, en un gran porcentaje de la longitud de las fibras, será paralelo a las mismas.

Para los materiales considerados en el presente trabajo las tensiones de corte no presentan acoplamiento con dicha componente del campo, por lo tanto puede utilizarse una ecuación constitutiva que no tenga en cuenta dichas componentes. De esta manera, a los efectos de la determinación la relación constitutiva del compuesto piezoeléctrico estudiado, puede considerarse para cada fase una relación constitutiva “reducida” de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -e_{31} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -e_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & -e_{33} \\ e_{31} & e_{23} & e_{33} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Luego, en el análisis pueden utilizarse, como aproximación, las constantes de corte de la matriz.

4.3.2.3. Generación

El enfoque general del problema se muestra en las Figuras 4.12. El elemento de volumen representativo o celda unitaria se construye en tres etapas separadas de combinación, para captar la contribución de cada fase en la respuesta global del compuesto. Las etapas A y B, captan las respuestas eléctrica y mecánica predominantes lejos de los electrodos. A pesar de que la polarización se distorsiona bajo los electrodos, las etapas A y B suponen polarización uniforme en la dirección 3.

La etapa C refleja el comportamiento eléctrico local en el entorno del electrodo, incluyendo la concentración de campo en la matriz.

En las tres etapas, el procedimiento es básicamente el mismo y se resume en los siguientes pasos:

1° Paso: Distinción de las variables que mantienen el mismo valor en ambas fases, denominadas variables uniformes (VU).

2° Paso: Teniendo en cuenta la relación constitutiva reducida de cada material, obtención de una nueva expresión constitutiva en la que las variables independientes sean las llamadas uniformes. Las variables no uniformes (VNU) se relacionan con las uniformes con la nueva ecuación constitutiva a través de las matrices $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$, $[c_{ij}]$. Para la etapa A se tendría:

$$\text{Fibra: } \{VNU\}_{ET A}^F = [a]^F \{VU\}_{ET A}^F$$

$$\text{Matriz: } \{VNU\}_{ET A}^M = [a]^M \{VU\}_{ET A}^M$$

3° Paso: Obtención de las variables no uniformes del compuesto como una combinación lineal de las variables no uniformes de cada componente de la mezcla, esto es, suma de las mismas multiplicadas cada una por los correspondientes factores de peso ν_j^F , ν_j^M (fracciones de longitudes de fibra y resina respectivamente, en la dirección j considerada). Con esto se obtiene una relación constitutiva para cada etapa, que permite obtener las VNU en función de las VU a través de una matriz constitutiva equivalente para el compuesto.

$$\{VNU\}_{ET k} = \nu_j^M \{VNU\}_{ET k}^M + \nu_j^F \{VNU\}_{ET k}^F$$

Para la etapa A se obtiene:

$$\{VNU\}_{ET A} = \nu_j^M [a]^M \{VU\}_{ET A}^M + \nu_j^F [a]^F \{VU\}_{ET A}^F$$

$$\{VNU\}_{ET A} = (\nu_j^M [a]^M + \nu_j^F [a]^F) \{VU\}_{ET A} \Rightarrow [a]_{ET A}^{ef} = (\nu_j^M [a]^M + \nu_j^F [a]^F)$$

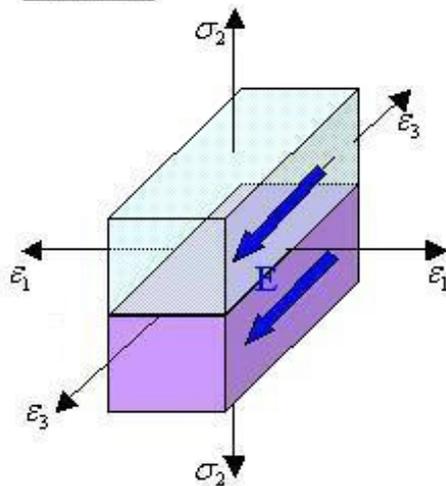
4° Paso: Con la misma expresión utilizada en el segundo paso, obtención de la matriz constitutiva en la forma original, pero ahora con las propiedades equivalentes.

En la etapa siguiente el procedimiento es exactamente el mismo, sólo que las propiedades piezoeléctricas y mecánicas de las fibras son las propiedades equivalentes obtenidas en la etapa anterior.

A continuación se presentan el esquema de cálculo de las propiedades materiales equivalentes de del laminado piezoeléctricos, es decir las tres etapas descritas anteriormente. En cada etapa se detalla cual es el vector de variables llamadas uniformes (VU) y no uniformes (VNU).

Esquema de cálculo:

Etapa A:



Material de la fibra

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^F \\ \epsilon_1^F \\ \sigma_3^F \\ D_3^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^F & a_{12}^F & a_{13}^F & a_{14}^F \\ a_{21}^F & a_{22}^F & a_{23}^F & a_{24}^F \\ a_{31}^F & a_{32}^F & a_{33}^F & a_{34}^F \\ a_{41}^F & a_{42}^F & a_{43}^F & a_{44}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1^F \\ \sigma_2^F \\ \epsilon_3^F \\ E_3^F \end{Bmatrix}$$

Material de la matriz

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^M \\ \epsilon_1^M \\ \sigma_3^M \\ D_3^M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^M & a_{12}^M & a_{13}^M & a_{14}^M \\ a_{21}^M & a_{22}^M & a_{23}^M & a_{24}^M \\ a_{31}^M & a_{32}^M & a_{33}^M & a_{34}^M \\ a_{41}^M & a_{42}^M & a_{43}^M & a_{44}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1^M \\ \sigma_2^M \\ \epsilon_3^M \\ E_3^M \end{Bmatrix}$$

Las variables no uniformes de la etapa se obtienen combinando linealmente las correspondientes a cada fase:

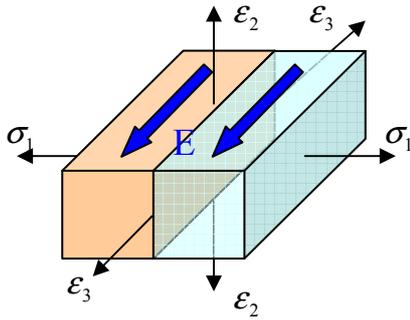
$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1^{ETA} \\ \bar{\epsilon}_2^{ETA} \\ \bar{\sigma}_3^{ETA} \\ \bar{D}_3^{ETA} \end{Bmatrix} = V_2^M \begin{Bmatrix} \sigma_1^M \\ \epsilon_1^M \\ \sigma_3^M \\ D_3^M \end{Bmatrix} + V_2^F \begin{Bmatrix} \sigma_1^F \\ \epsilon_1^F \\ \sigma_3^F \\ D_3^F \end{Bmatrix} = V_2^M [a_{ij}^M] \begin{Bmatrix} \epsilon_1^M \\ \sigma_2^M \\ \epsilon_3^M \\ E_3^M \end{Bmatrix} + V_2^F [a_{ij}^F] \begin{Bmatrix} \epsilon_1^F \\ \sigma_2^F \\ \epsilon_3^F \\ E_3^F \end{Bmatrix}$$

Puede sacarse factor común el vector de variables uniformes, y obtener una matriz que relaciones éstas con las no uniformes de la siguiente forma:

$$[a_{ij}^{efectiva}] = V_2^M [a_{ij}^M] + V_2^F [a_{ij}^F]$$

Mediante manipulaciones algebraicas se obtiene luego la matriz constitutiva convencional de la etapa $[Ca_{ij}^{\epsilon}]$

Etapa B:



Material obtenido en la Etapa A

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1^F \\ \sigma_2^F \\ \sigma_3^F \\ D_3^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^{ET A} & b_{12}^{ET A} & b_{13}^{ET A} & b_{14}^{ET A} \\ b_{21}^{ET A} & b_{22}^{ET A} & b_{23}^{ET A} & b_{24}^{ET A} \\ b_{31}^{ET A} & b_{32}^{ET A} & b_{33}^{ET A} & b_{34}^{ET A} \\ b_{41}^{ET A} & b_{42}^{ET A} & b_{43}^{ET A} & b_{44}^{ET A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1^F \\ \epsilon_2^F \\ \epsilon_3^F \\ E_3^F \end{Bmatrix}$$

Material de la matriz

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1^M \\ \sigma_2^M \\ \sigma_3^M \\ D_3^M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^M & b_{12}^M & b_{13}^M & b_{14}^M \\ b_{21}^M & b_{22}^M & b_{23}^M & b_{24}^M \\ b_{31}^M & b_{32}^M & b_{33}^M & b_{34}^M \\ b_{41}^M & b_{42}^M & b_{43}^M & b_{44}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1^M \\ \epsilon_2^M \\ \epsilon_3^M \\ E_3^M \end{Bmatrix}$$

Las variables no uniformes de la etapa B se obtienen combinando linealmente las correspondientes a cada fase:

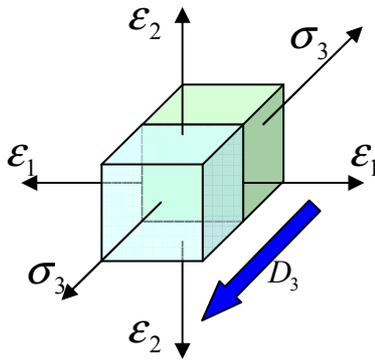
$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_1^{ET B} \\ \bar{\sigma}_2^{ET B} \\ \bar{\sigma}_3^{ET B} \\ \bar{D}_3^{ET B} \end{Bmatrix} = \nu_1^M \begin{Bmatrix} \epsilon_1^M \\ \sigma_1^M \\ \sigma_1^M \\ D_3^M \end{Bmatrix} + \nu_1^F \begin{Bmatrix} \epsilon_1^F \\ \sigma_1^F \\ \sigma_1^F \\ D_3^F \end{Bmatrix} = \nu_1^M [b_{ij}^M] \begin{Bmatrix} \sigma_1^M \\ \epsilon_2^M \\ \epsilon_3^M \\ E_3^M \end{Bmatrix} + \nu_1^F [b_{ij}^{ET A}] \begin{Bmatrix} \sigma_1^F \\ \epsilon_2^F \\ \epsilon_3^F \\ E_3^F \end{Bmatrix}$$

Puede sacarse factor común el vector de variables uniformes, y obtener una matriz que relaciones éstas con las no uniformes de la siguiente forma:

$$[b_{ij}^{efectiva}] = \nu_1^M [b_{ij}^M] + \nu_1^F [b_{ij}^{ET A}]$$

Mediante manipulaciones algebraicas se obtiene luego la matriz constitutiva convencional de la etapa $[Cb_{ij}^{ef}]$

Etapa C



Material obtenido en la Etapa B

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^F \\ \sigma_2^F \\ \sigma_3^F \\ E_3^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{ETB} & c_{12}^{ETB} & c_{13}^{ETB} & c_{14}^{ETB} \\ c_{21}^{ETB} & c_{22}^{ETB} & c_{23}^{ETB} & c_{24}^{ETB} \\ c_{31}^{ETB} & c_{32}^{ETB} & c_{33}^{ETB} & c_{34}^{ETB} \\ c_{41}^{ETB} & c_{42}^{ETB} & c_{43}^{ETB} & c_{44}^{ETA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1^F \\ \epsilon_2^F \\ \sigma_3^F \\ D_3^F \end{Bmatrix}$$

Material de la matriz

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^M \\ \sigma_2^M \\ \sigma_3^M \\ E_3^M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^M & c_{12}^M & c_{13}^M & c_{14}^M \\ c_{21}^M & c_{22}^M & c_{23}^M & c_{24}^M \\ c_{31}^M & c_{32}^M & c_{33}^M & c_{34}^M \\ c_{41}^M & c_{42}^M & c_{43}^M & c_{44}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1^M \\ \epsilon_2^M \\ \sigma_3^M \\ D_3^M \end{Bmatrix}$$

Las variables no uniformes de la etapa C se obtienen combinando linealmente las correspondientes a cada fase. Ésta etapa contempla solamente efectos eléctricos, no hay contribución mecánica del material de la matriz, por lo tanto los correspondientes coeficientes constitutivos son nulos. Solo es distinto de cero el coeficiente dieléctrico:

$$\begin{Bmatrix} \overline{\sigma}_1 \\ \overline{\sigma}_2 \\ \overline{\epsilon}_3 \\ \overline{E}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^{ETB} \\ \sigma_2^{ETB} \\ \epsilon_3^{ETB} \\ v_3^F E_3^{ETB} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_3^M E_3^M \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}^{ETB} & c_{12}^{ETB} & c_{13}^{ETB} & c_{14}^{ETB} \\ c_{21}^{ETB} & c_{22}^{ETB} & c_{23}^{ETB} & c_{24}^{ETB} \\ c_{31}^{ETB} & c_{32}^{ETB} & c_{33}^{ETB} & c_{34}^{ETB} \\ v_3^E c_{41}^{ETB} & v_3^E c_{42}^{ETB} & v_3^E c_{43}^{ETB} & v_3^E c_{44}^{ETB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_3^M c_{44}^M \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overline{\epsilon}_1 \\ \overline{\epsilon}_2 \\ \overline{\sigma}_3 \\ \overline{D}_3 \end{Bmatrix}$$

Mediante manipulaciones algebraicas se obtiene luego la matriz constitutiva convencional de la etapa C, $[C c_{ij}^{ef}]$.

4.3.2.4. Resultados

El procedimiento descrito anteriormente permite el cálculo de los valores de las constantes constitutivas del compuesto en función de las correspondientes a cada fase y de las relaciones de volumen de las mismas. En este trabajo se programó el procedimiento en el utilitario Matlab, (1998).

Las expresiones obtenidas son extremadamente extensas, por lo que se citan solamente los resultados volcados en gráficos sobre ejes cartesianos. Los resultados se adimensionalizaron, dividiéndolos por la constante correspondiente al material piezoeléctrico puro. Los círculos corresponden a resultados obtenidos con el modelo de elementos finitos.

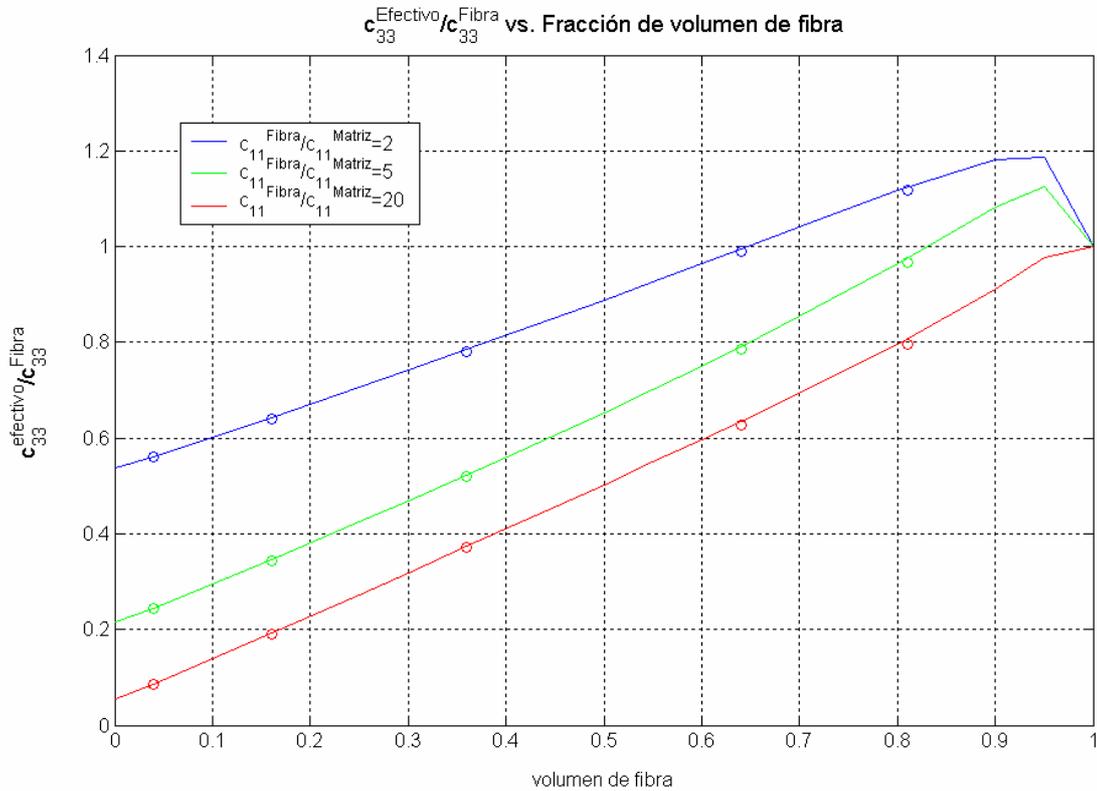


Figura 4.13: Valores de la componente C_{33} del laminado referida a la correspondiente a la fibra, para

diferentes valores C_{11} de la fibra. $\frac{\epsilon_{33}^{Fibra}}{\epsilon_{Resina}} = 500$.

En la figura 4.13 se representa el valor de la constante mecánica del compuesto C_{33}^{Comp} (rigidez mecánica en dirección de las fibras) en función de la fracción de volumen de fibra, allí se puede observar que para fracciones de volumen de fibra cercanos a la unidad, el valor de la constante elástica equivalente C_{33}^{Comp} (rigidez en la dirección de las fibras) del compuesto supera el correspondiente al material de la fibra. Esta particularidad se debe a la diferencia de rigidez dieléctrica entre fibra y resina, ya que debido a la misma, al deformar la celda, se genera un campo eléctrico en la fibra. Dicho campo eléctrico, en virtud de la ecuación constitutiva, hace que las tensiones mecánicas aumenten, provocando un incremento “aparente” en la rigidez del material. En este caso, ϵ_{33}^{Fibra} es 500 veces mayor a la correspondiente constante de la resina. El efecto observado disminuye en modelos en los que la diferencia de permitividad dieléctrica entre fibra y resina es menor.

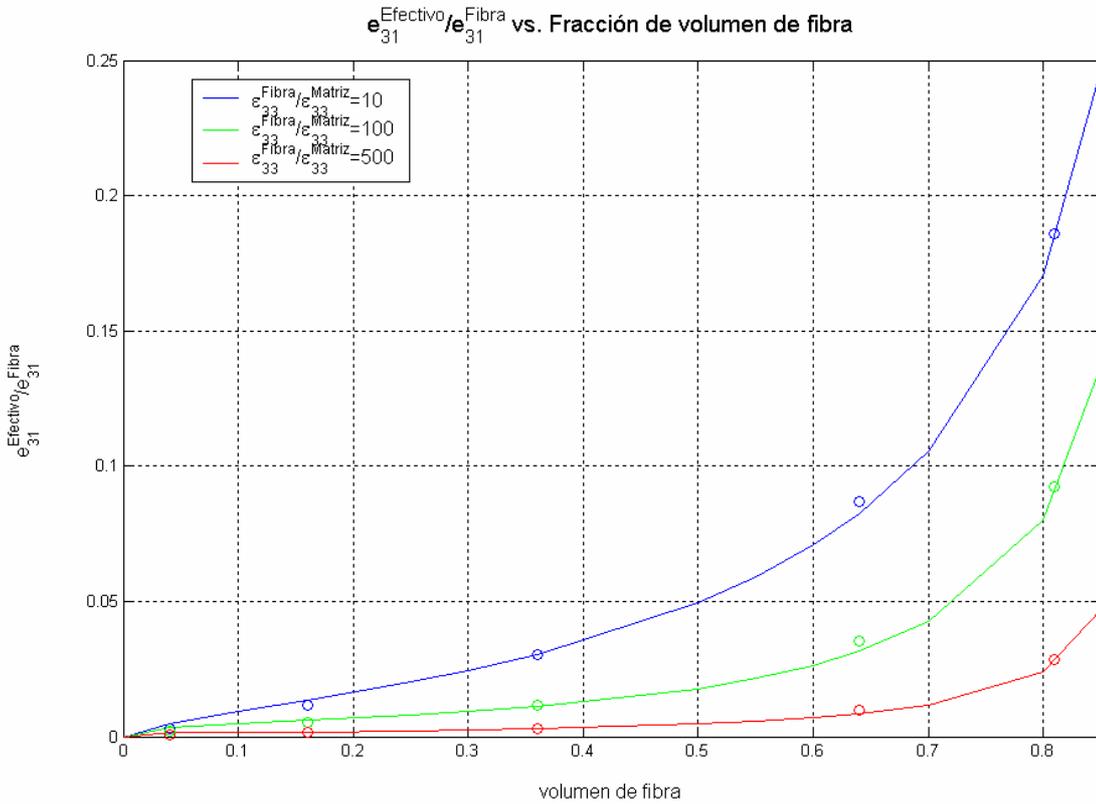


Figura 4.14: Constante piezoeléctrica e_{31} del laminado, referida a la correspondiente de la fibra para diferentes relaciones entre las permitividades dieléctricas de la fibra y la resina.

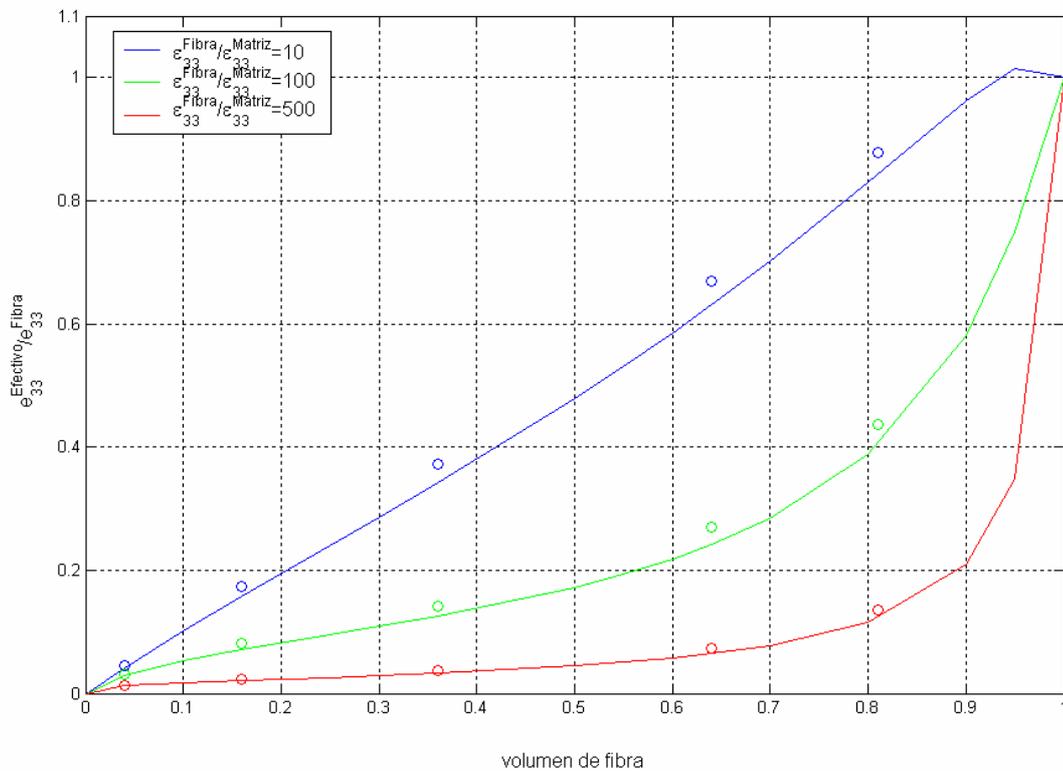


Figura 4.15: Constante piezoeléctrica e_{33} del laminado, referida a la correspondiente de la fibra para diferentes relaciones entre las permitividades dieléctricas de la fibra y la matriz.

Las figuras 4.14 y 4.15 muestran los valores de las constantes piezoeléctricas equivalentes del compuesto $e_{31}^{Comp.}$ y $e_{33}^{Comp.}$, transversal y longitudinal a las fibras, respectivamente. Los resultados fueron obtenidos por medio del modelo de combinaciones implementado y el

análisis de la celda unitaria con elementos finitos, ambos están referidos a los correspondientes valores del material de las fibras.

Como se puede observar en las figuras 4.13, 4.14 y 4.15, el modelo de combinaciones y el análisis con elementos finitos de la celda unitaria arrojan valores muy parecidos. Sin embargo, como se muestra en la figura 4.15, los resultados relativos a la constante piezoeléctrica e_{33} obtenidos con los enfoques micro y macromecánico presentan una leve diferencia y se debe principalmente a que durante el procedimiento detallado en 4.3.1.5 se utilizó un valor de campo eléctrico medio.

Capítulo 5

Ejemplos de Aplicación

5.1. Introducción

La posibilidad de controlar estructuras en forma activa ha despertado un creciente interés en muchas ramas de la ingeniería durante los últimos años. Numerosos trabajos de investigación realizados durante la última década, pusieron de manifiesto el gran potencial que poseen las estructuras adaptativas para mejorar su desempeño, (Bhattacharya et al, 2002). Comparadas con las estructuras pasivas, las activas manifiestan un mejor comportamiento o desempeño frente a perturbaciones o cambios en las condiciones del ambiente en el que se emplazan y operan. Esto se logra adaptando continuamente y en forma adecuada, ciertos parámetros de la estructura.

En general, la utilización de materiales activos integrados a determinadas estructuras, permite aumentar la habilidad de las mismas para cambiar su respuesta frente a cambios en las condiciones del entorno. Los materiales piezoeléctricos se emplean extensamente en el desarrollo de estructuras inteligentes y pueden utilizarse, ya sea como actuadores o como sensores, (Mittra et al, 2004). Crawley et al, (1987) fueron unos de los pioneros en la utilización de actuadores piezoeléctricos en estructuras inteligentes. Ellos trabajaron con vigas, primero de aluminio y luego de grafito/epoxy, provistas de actuadores piezoeléctricos. Utilizaron controladores proporcionales a la velocidad.

La efectividad global del sistema depende, tanto de la distribución de material activo como del diseño del controlador. La distribución de actuadores y sensores afecta la controlabilidad y observabilidad de la estructura controlada y tiene mucha influencia en la eficiencia y esfuerzo de control requerido para cumplir con un determinado criterio de diseño. El problema de la ubicación óptima de actuadores y sensores fue abordado por numerosos

investigadores. Ryou et al, (1997) abordaron el problema de optimización utilizando algoritmos genéticos. Kermani et al, (2004) presentan un resumen de distintos métodos desarrollados recientemente para resolver el problema de la ubicación óptima de actuadores y sensores.

En el presente capítulo se presentan dos ejemplos en los que se aplican configuraciones de múltiples actuadores piezoeléctricos, como los analizados en ésta tesis. En primer lugar se considera la atenuación de vibraciones flexionales de una viga en voladizo. Luego se presenta el control de vibraciones torsionales de una estructura tipo cajón.

La formulación en el espacio de estados permite construir fácilmente, modelos de sistemas complejos, especificando combinaciones de entradas, salidas y variables de estado, (Bevan, 2001). En esta tesis, el diseño del sistema de control se realiza utilizando la teoría de control óptimo cuadrático con realimentación de estado según una ley lineal. Es decir, dado el sistema cuya ecuación de estado es:

$$\{x(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} + [E]\{f^{pert}(t)\} \quad (5.1)$$

en donde $\{x(t)\}$ es el vector de estado, $[A]$ es la matriz del sistema, $[B]$ es la matriz de control, $\{u(t)\}$ es el vector de control (potenciales eléctricos), $[E]$ es la matriz de perturbaciones y $\{f^{pert}(t)\}$ es el vector de perturbaciones, término que incluye las fuerzas mecánicas, cargas eléctricas, desplazamientos, velocidades y aceleraciones prescriptas sobre determinados sectores de la estructura.

Y cuya ecuación de salidas es:

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\} \quad (5.2)$$

en donde $\{y(t)\}$ es el vector de salidas y $[C]$ es la matriz de salidas.

El problema consiste en encontrar la matriz de ganancias $[Gan]$ tal que la ley de control lineal:

$$\{u(t)\} = -[Gan]\{x(t)\} \quad (5.3)$$

minimice el índice de desempeño cuadrático:

$$J = \int_0^{\infty} (\{x\}'[Q]\{x\} + \{u\}'[R]\{u\})dt \quad (5.4)$$

En la ecuación (5.4) $[Q]$ es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva o semidefinida positiva y $[R]$ es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. Las Matrices $[Q]$ y $[R]$ determinan la importancia del error y del gasto de energía del sistema, Ogata, (1998).

En el Anexo 5.1 se presenta un tratamiento general para obtener la ecuación de estado de un sistema a partir de las ecuaciones de equilibrio dinámico de elementos finitos.

El gran número de grados de libertad necesarios para modelar las estructuras analizadas hace muy pesado el proceso de cálculo requerido para el diseño del sistema de control. Por lo tanto, es conveniente trabajar con un modelo sustituto que represente al original y contenga una cantidad adecuada de grados de libertad. Es necesario realizar una condensación de las matrices de rigidez y de masa para lograr un sistema de ecuaciones más pequeño que se puedan manejar con mayor facilidad. Sin embargo, para que el modelo refleje el comportamiento real de la estructura, al menos en el rango de interés, la reducción debe implementarse reteniendo una cantidad suficiente de grados de libertad.

En esta Tesis, los modelos de elementos finitos se generan con el programa comercial de elementos finitos Abaqus versión 6.3.1 y se utiliza una reducción de Guyan para condensar los grados de libertad y arribar a un modelo equivalente conveniente para el análisis. Con el programa Matlab, (1998) se diseña el controlador y se realiza la simulación numérica en el espacio estados.

En la mayoría de los problemas reales, no se puede acceder al estado completo del sistema, por lo que es necesario utilizar observadores que reconstruyan el estado del sistema observando las señales de los sensores, (Lim et al, 1999). En los ejemplos presentados a continuación se considera que el estado del sistema es conocido completamente y se encuentra disponible para ser realimentado.

5.2. Desempeño y características de los sistemas de control

En este capítulo se presentan dos ejemplos de control activo, ciertos aspectos de su desempeño se reflejan en la ubicación de los polos de la función de transferencia a lazo cerrado en la respuesta en frecuencia, y en la respuesta estacionaria a ruido blanco. Por lo tanto, se presenta una pequeña introducción a cada uno de estos conceptos.

5.2.1. Lugar de raíces

Reemplazando la ecuación (5.3) en (5.1) y planteando la transformada de Laplace de las ecuaciones resultantes (Rohrs, 1993), se obtiene:

$$s\{X(s)\} = ([A] - [B][Gan])\{X(s)\} + [E]\{F^{pert}(s)\} \quad (5.5)$$

Despejando $\{X(s)\}$, resulta:

$$\{X(s)\} = (s[I] - [A_c])^{-1} [E]\{F^{pert}(s)\} \quad (5.6)$$

La transformada de Laplace de la ecuación de salidas es:

$$\{Y(s)\} = [C]\{X(s)\} \quad (5.7)$$

Multiplicando ambos miembros de (5.6) por la matriz de salida $[C]$ se obtiene:

$$\{Y(s)\} = [C](s[I] - [A_c])^{-1} [E]\{F^{pert}(s)\} \quad (5.8)$$

Por lo tanto la función de transferencia entre salida y el vector de perturbaciones es:

$$F_{TRANS}(s) = [C](s[I] - [A_c])^{-1} [E] \quad (5.9)$$

Teniendo en cuenta que:

$$(s[I] - [A_c])^{-1} = \frac{Adj(s[I] - [A_c])}{Det(s[I] - [A_c])} \quad (5.10)$$

se obtiene finalmente la función de transferencia de lazo cerrado, entre salida y perturbaciones que resulta:

$$F_{TRANS}(s) = [C] \frac{Adj(s[I] - [A_c])}{Det(s[I] - [A_c])} [E] \quad (5.11)$$

La ecuación característica de lazo cerrado se obtiene igualando a cero el denominador, es decir:

$$Det(s[I] - [A_c]) = 0 \quad (5.12)$$

Los valores de s que satisfacen la ecuación característica (5.12) son los polos de lazo cerrado del sistema y son justamente los autovalores de la matriz de lazo cerrado del sistema, dichos polos se representan con la letra griega λ .

El hecho de utilizar realimentación de estado hace que se modifique la matriz $[A_C]$ del sistema como si se estuvieran modificando la rigidez y el amortiguamiento del sistema. Para cada matriz de ganancias obtenida, se determinan los autovalores de $[A_C]$ que son los polos del sistema de lazo cerrado, cuya expresión es:

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta^2 - 1)\omega_n^2} \quad (5.13)$$

Si el amortiguamiento del sistema controlado es superior al crítico, ambos polos serán números reales. Si el amortiguamiento es igual al crítico, ambos polos toman el valor $-\zeta\omega_n$; y si el amortiguamiento es inferior al crítico, los polos de lazo cerrado son complejos conjugados, y en términos de la frecuencia natural y el amortiguamiento, dichos polos tienen la siguiente expresión (Rohrs, 1993):

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (5.14)$$

La frecuencia natural del modo resulta:

$$\omega_n = |\lambda| = \sqrt{(-\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \quad (5.15)$$

mientras que el coeficiente de amortiguamiento correspondiente a ese modo es:

$$\zeta = -\frac{\text{Re}(\lambda)}{\omega_n} \quad (5.16)$$

5.2.2. Respuesta en frecuencia

Partiendo de las ecuaciones de estado del sistema y de la ley de control utilizada, se obtiene:

$$\{x(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} + [E]\{f^{pert}(t)\} \quad (5.17)$$

Considerando que la perturbación externa es una función armónica general, se tendría:

$$\{f^{pert}(t)\} = \{F^{pert}\}e^{j\omega t} \quad (5.18)$$

Por otra parte, luego de superado el régimen transitorio, la respuesta del sistema, o sea el vector de estado valdrá:

$$\{x(t)\} = [H_{xf}]\{F^{pert}\}e^{j\omega t} \quad (5.19)$$

La matriz $[H_{xf}]$ relaciona el estado del sistema con la entrada $\{f^{pert}\}$ en estado estacionario.

La derivada del vector de estado será:

$$\{\dot{x}(t)\} = j\omega [H_{xf}] \{F^{pert}\} e^{j\omega t} \quad (5.20)$$

En régimen permanente se tiene:

$$j\omega [H_{xf}] \{f^{pert}\} e^{j\omega t} = ([A] - [B][Gan]) [H_{xf}] \{f^{pert}\} e^{j\omega t} + [E] \{f^{pert}\} e^{j\omega t} \quad (5.21)$$

Por lo tanto:

$$[H_{xf}] = (j\omega [I] - ([A] - [B][Gan]))^{-1} [E] \quad (5.22)$$

De igual manera, se pueden obtener matrices de respuesta en frecuencia de la salida del sistema:

$$[H_{yf}] = [C] [H_{xf}] \quad (5.23)$$

y del vector de control:

$$[H_{uf}] = -[Gan] [H_{xf}] \quad (5.24)$$

5.2.3. Respuesta estacionaria a ruido blanco

Ruido blanco es un modelo ideal de banda ancha. El contenido de potencia de la señal es constante en todo el espectro.

La covarianza de la señal de entrada es:

$$E[w(t), w(t)] = I_w \delta(t - \tau) \quad (5.25)$$

Donde I_w es la intensidad de ruido blanco y el operador $\delta(\)$ es la delta de Dirac.

La covarianza del vector de estado es:

$$P_{XX} = E[X, X^T] \quad (5.26)$$

P_{XX} se obtiene resolviendo la ecuación de Lyapunov:

$$[A]P_{XX} + P_{XX}[A]^T = -[B]I_w[B]^T \quad (5.27)$$

La covarianza del vector de salida es:

$$P_{YY} = E[Y, Y^T] = [C]P_{XX}[C]^T \quad (5.28)$$

Y finalmente la covarianza del vector de control es:

$$P_{UU} = [Gan]P_{xx}[Gan]^T \quad (5.29)$$

5.3. Aplicación del Macromodelo en sistemas de control activo realimentado

5.3.1. Control de vibraciones flexionales en una viga en voladizo

5.3.1.1. Descripción del problema

El presente ejemplo ilustra una viga en voladizo provista de múltiples parches piezoeléctricos funcionando como actuadores.

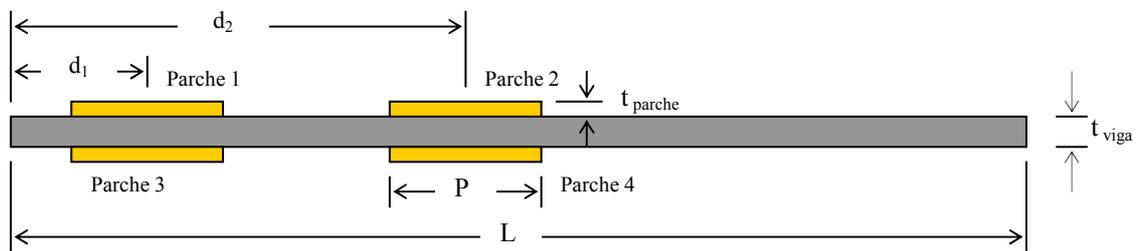


Figura 5.1: Viga en voladizo provista de parches actuadores.

La figura 5.2 muestra un detalle de la malla de elementos finitos y de los nodos retenidos durante la condensación de grados de libertad para obtener las matrices de rigidez y masa del sistema. Las dimensiones generales de la viga y de los parches se presentan en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Dimensiones generales de la viga analizada.

L [mm]	P [mm]	t _{viga} [mm]	t _{parche} [mm]
300.0	30.0	1.2	0.3

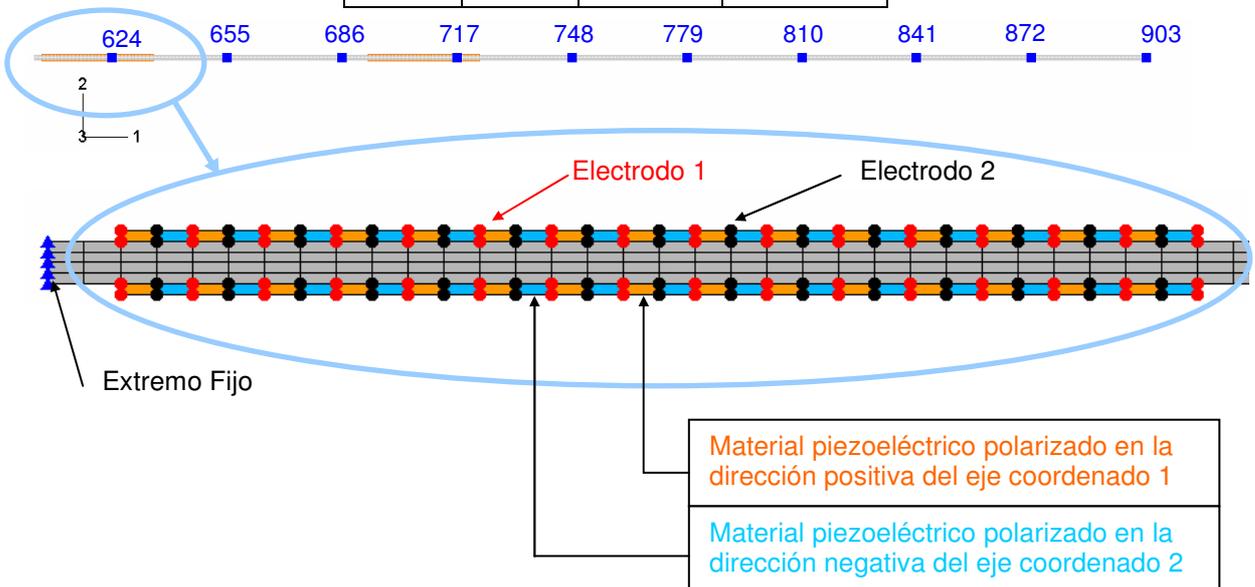


Figura 5.2: Viga en voladizo, detalle de la malla de elementos finitos y nodos retenidos para condensar los grados de libertad

Los parches N° 1 y N° 3 están conectados de tal manera que el voltaje aplicado en ambos es el mismo pero las deformaciones inducidas son de signo contrario. Para lograr esto, los nodos del electrodo 1 del parche N° 1 se conectaron al mismo potencial eléctrico que los nodos del electrodo 2 del parche N° 3. Lo mismo se hizo con los parches N° 2 y N° 4.

Para la viga de aluminio se utilizó un modelo elástico isótropo con las siguientes propiedades mecánicas, $E = 71.0E9 \frac{N}{m^2}$ y $\nu = 0.33$.

Para el modelo se consideró un actuador piezoeléctrico comercial cuyas características se obtuvieron a partir de las especificaciones técnicas publicadas por el fabricante. La designación comercial es M-8557 de la firma Smart Material. Las propiedades electromecánicas se detallan en la tabla 5.2.

Para modelar la viga y los parches se usaron elementos sólidos bidimensionales en tensión plana, CPS4 y CPS4E respectivamente, (Abaqus, 2002).

En el extremo fijo de la viga, antes de realizar la reducción del orden, se restringieron los grados de libertad horizontales de los nodos que allí yacen. Los potenciales eléctricos de los nodos correspondientes a los electrodos 2 de los cuatro parches se fijaron en valor nulo.

Durante la reducción del orden, se retuvieron los grados de libertad correspondientes a los desplazamientos mecánicos verticales de los nodos etiquetados (624 a 903) en la figura 5.2 y de los nodos del extremo fijo, representados en la figura 5.2 con marcas triangulares. Se retuvieron dos grados de libertad eléctricos, uno por cada par de parches.

Tabla 5.2: Propiedades constitutivas de los parches utilizados

Constantes elásticas (GPa)																	
C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}									
17.56	3.89	17.56	6.65	6.65	34.46	6.84	5.52	5.52									
Constantes piezoeléctricas ($\frac{C}{m^2}$)																	
e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}	e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.98	-0.98	11.52	0	0	0
Constantes dieléctricas $\times 10^{-8} (\frac{F}{m})$																	
χ_{11}						χ_{22}						χ_{33}					
-						-						0.8414					

Densidad del parche: $\rho = 4500 \left(\frac{Kg}{m^3} \right)$

El rango lineal del parche es: -500, +1000 Volts.

Cada configuración corresponde a posiciones diferentes de los actuadores Nro 2 y Nro 4. Las posiciones de los actuadores para cada viga se resumen en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Posiciones de los actuadores de las vigas analizadas

	d_1 [mm]	d_2 [mm]
Viga1	17.0	150.0
Viga2	17.0	105.0
Viga3	17.0	60.0

En el diseño del controlador se utilizaron las siguientes matrices de peso para determinar la matriz de ganancias:

$$Q = \gamma_q \times [I] \quad (5.30)$$

$$R = 100 \times [I] \quad (5.31)$$

donde $\gamma_q \in [0, \infty)$ es un factor de peso.

El amortiguamiento mecánico del sistema se consideró del tipo de Rayleigh con un valor del factor de amortiguamiento de 0.5 % para el 1° modo y 2.5% para el 10° modo. A partir de estos valores, se determinó el amortiguamiento de los modos intermedios.

5.3.1.2. Resultados

En primer lugar se presentan las gráficas de las formas modales de las vigas para analizar la variación de sus características en función de la ubicación de los actuadores respecto de las formas modales.

- Formas modales

Viga 1:

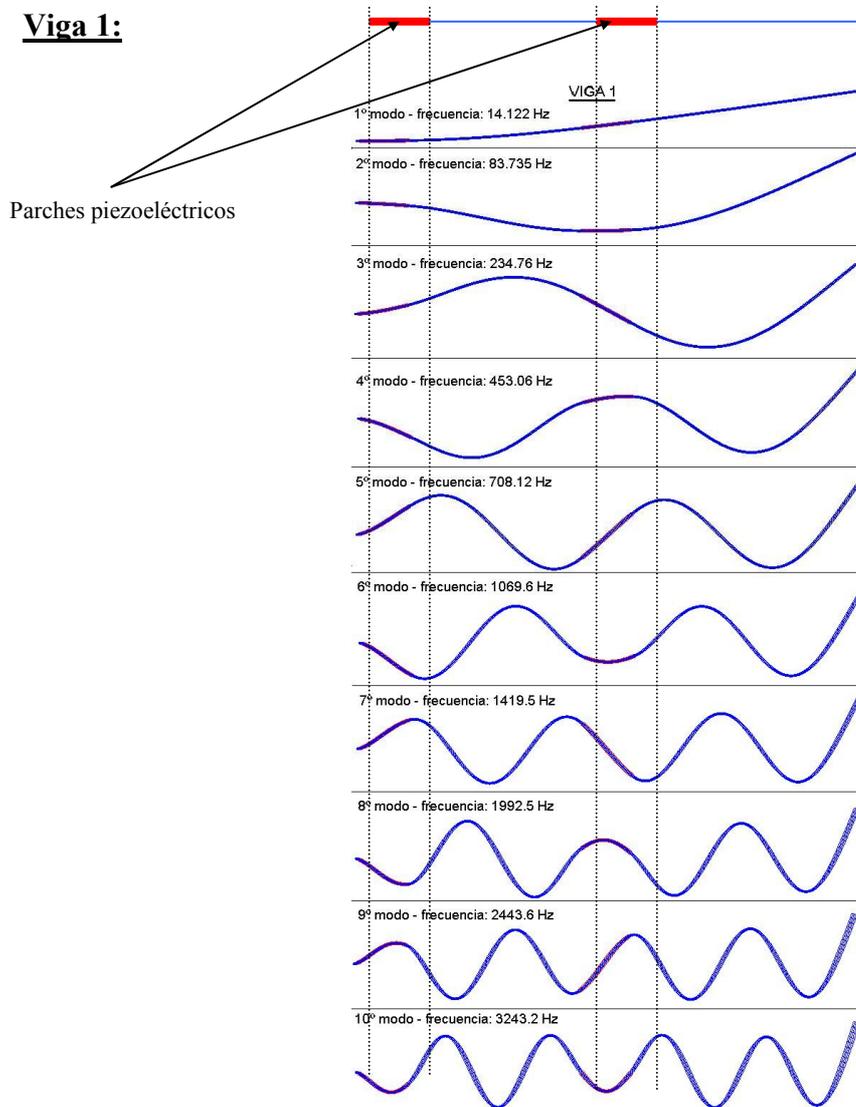


Figura 5.3: Formas modales de la Viga 1

En la figura 5.3 se observa que los parches 2 y 4 se encuentran ubicados en nodos correspondientes a los modos 3, 5, 7 y 9.

Viga 2:

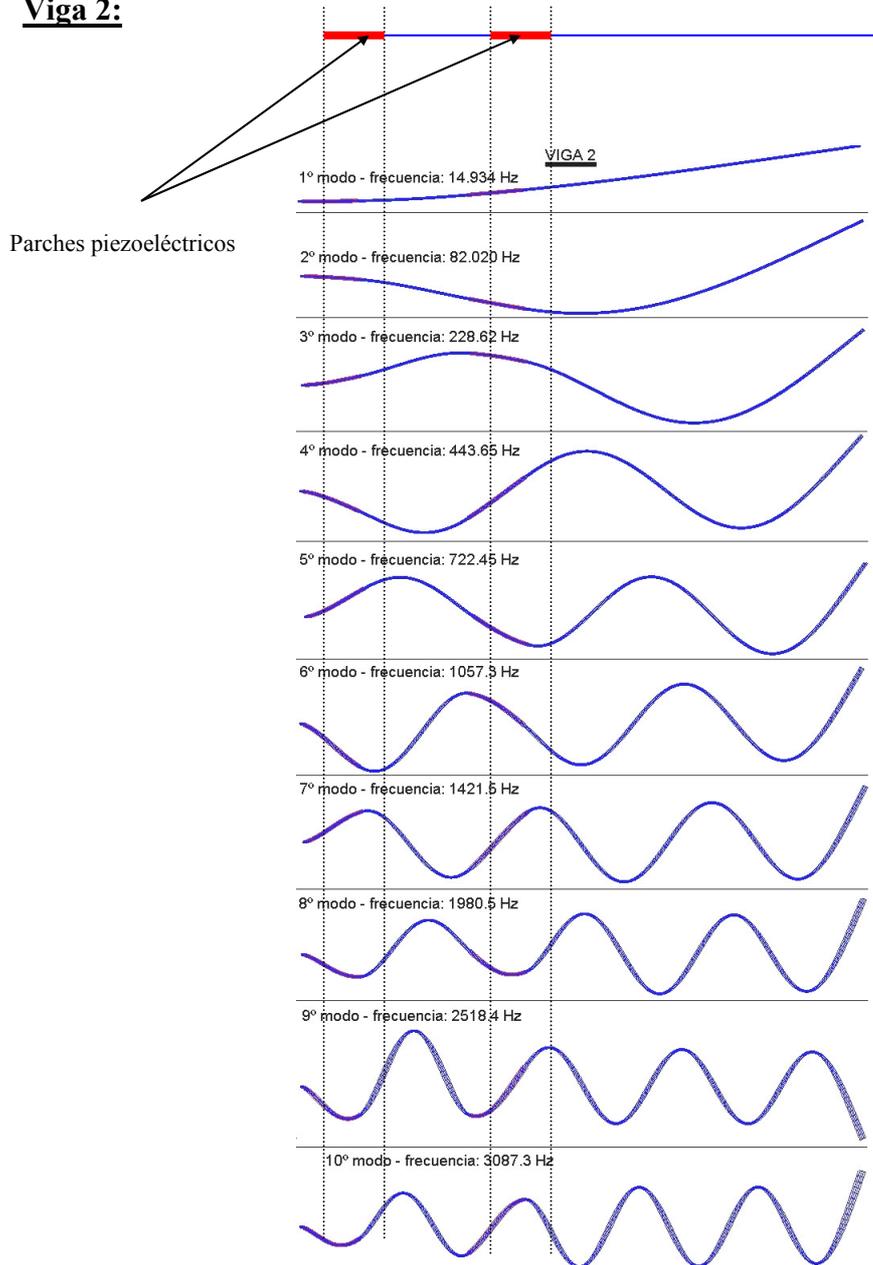


Figura 5.4: Formas modales de la Viga 2

Puede observarse en la figura 5.4 que los parches 2 y 4, están ubicados prácticamente en nodos de los modos 2, 4 y 7.

Viga 3:

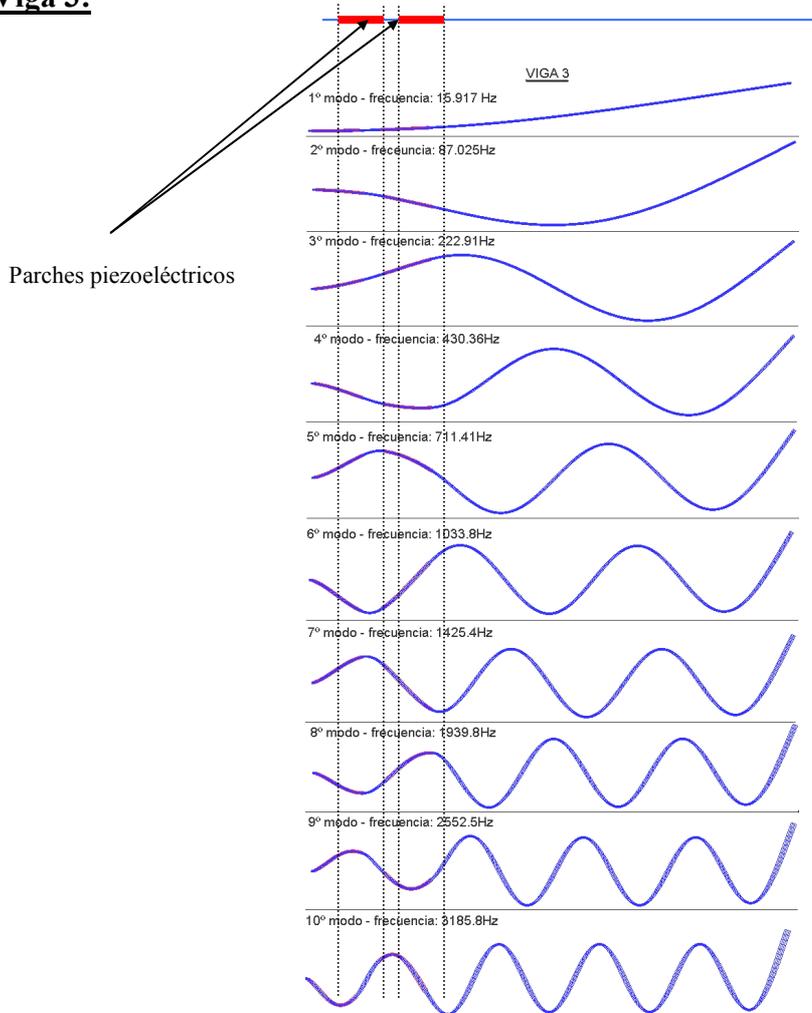


Figura 5.5: Formas modales de la Viga 3

La figura 5.5 muestra que los parches 2 y 4, se ubican prácticamente en nodos correspondientes a los modos 2, 3, 6 y 7.

- Lugar de raíces

En virtud de la simetría de las gráficas respecto del eje real, se presenta solo el semiplano superior. El efecto que produce el controlador sobre el sistema se refleja en el movimiento de los polos de lazo cerrado. A medida que aumenta el factor de peso γ_q utilizado para determinar la matriz de ganancias, los polos afectados por el controlador se mueven en el plano complejo. Para facilitar la visualización de dicho comportamiento se dividió el rango de γ_q y se asoció a cada intervalo un color, luego se graficaron los polos correspondientes con dichos colores. Así se pudieron comparar los valores de ganancias necesarios para modificar los polos correspondientes a cada modo. Debido a que en ciertos casos, las trayectorias se superponían, se disminuyó el tamaño de las marcas utilizadas en la representación a medida que aumentaba γ_q .

Viga 1:

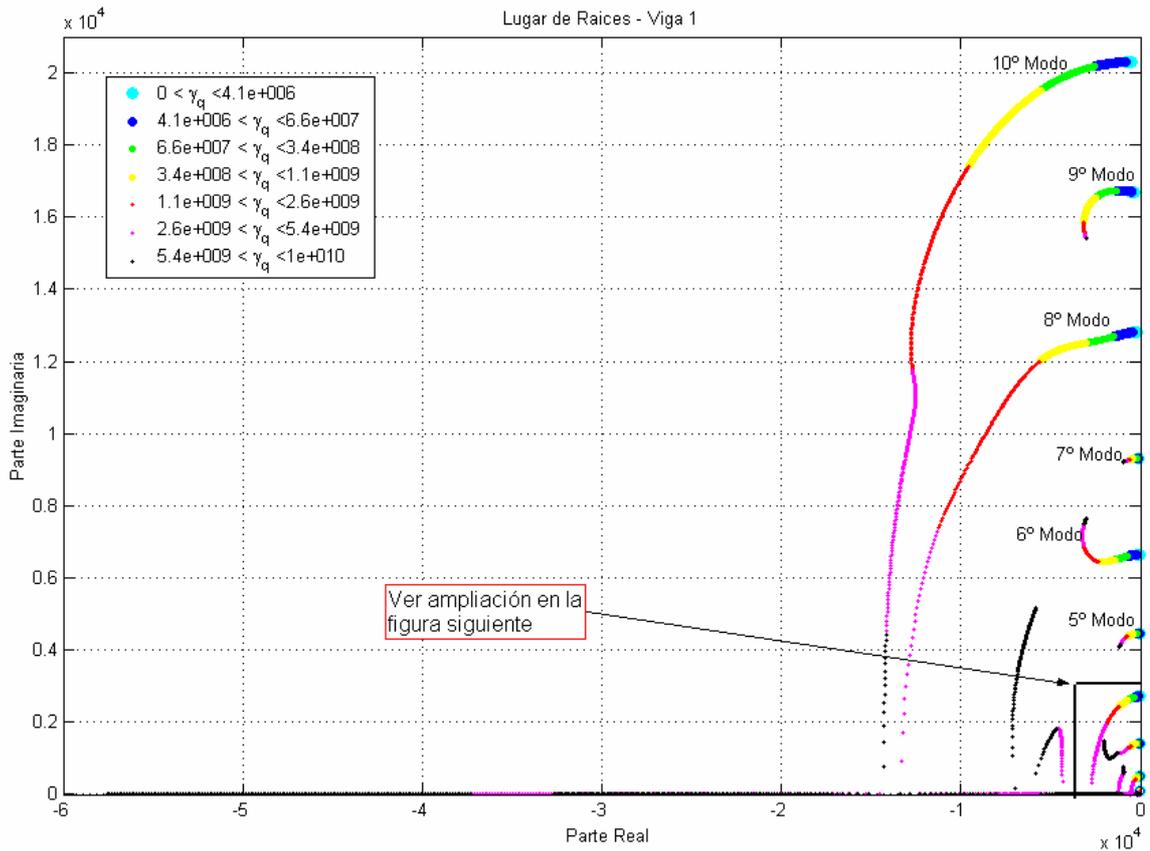


Figura 5.6: Lugar de raíces del modelo correspondiente a la viga 1.

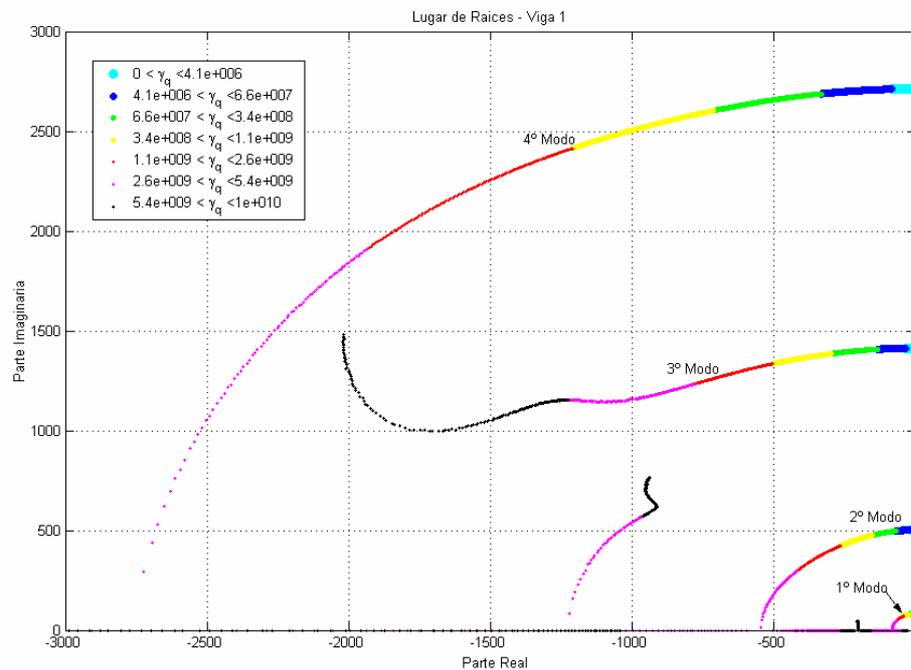


Figura 5.7: Detalle ampliado de la zona encerrada en el rectángulo en la figura 5.6.

Como puede observarse en las figuras 5.6 y 5.7, los polos correspondientes al primer, segundo, cuarto, octavo y décimo modo son “llevados” por el sistema de control hasta el semieje real, sin embargo esto no ocurre con los polos del tercer modo, tampoco con los del quinto, sexto, séptimo y noveno. En relación a dicho comportamiento, se observa en la figura 5.3 que los actuadores 2 y 4 están ubicados justamente en un nodo del tercer, quinto y séptimo

modo natural de la viga y por lo tanto no son capaces de introducir deformaciones o fuerzas de control que afecten los autovalores asociados a dichos modos.

Viga 2:

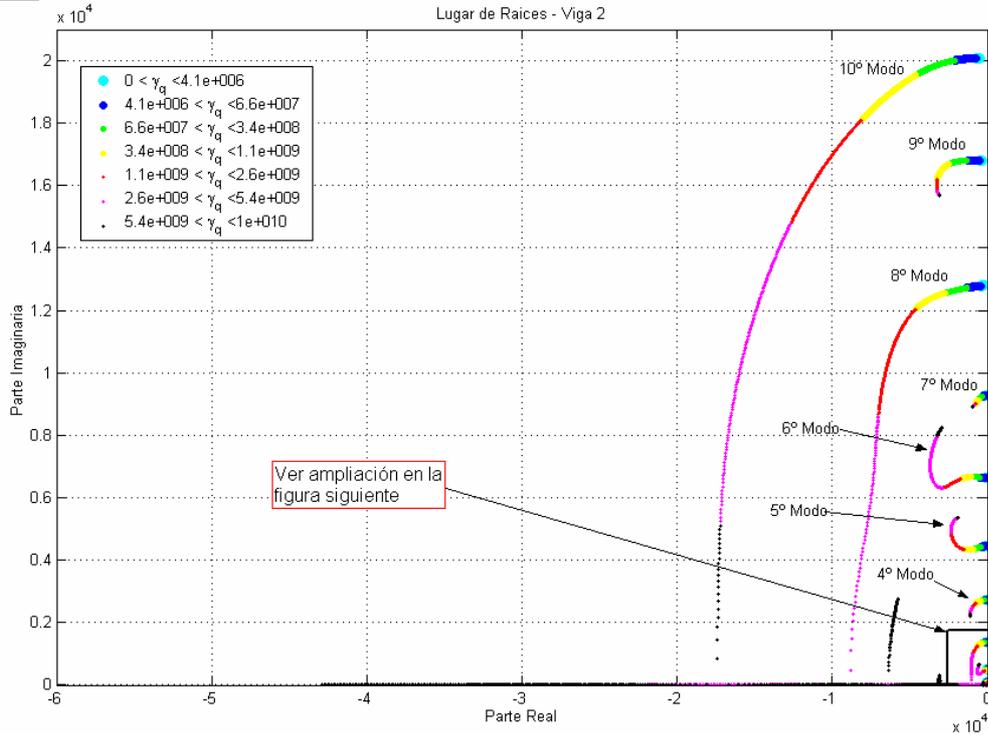


Figura 5.8: Lugar de raíces del modelo correspondiente a la viga 2.

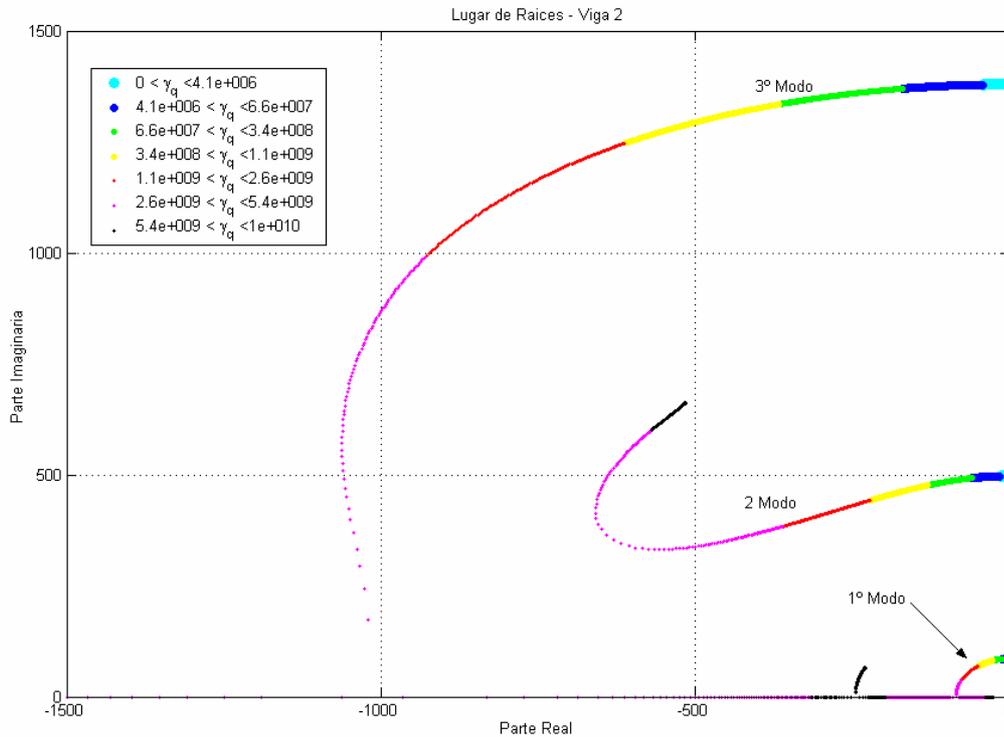


Figura 5.9: Detalle ampliado de la zona encerrada en el rectángulo en la figura 5.8.

En las figuras 5.8 y 5.9 puede observarse como el sistema de control es capaz de mover los polos de lazo cerrado, correspondientes a los modos 1, 3, 8 y 10 hasta el semieje real negativo, sin embargo no ocurre lo mismo con los polos correspondientes a los modos 2, 4, 5, 6, 7 y 9 (ver ampliación en la figura 5.9). Este comportamiento está íntimamente relacionado

con la ubicación de los parches respecto de la forma del segundo modo natural, mostrada en la figura 5.4.

Viga 3:

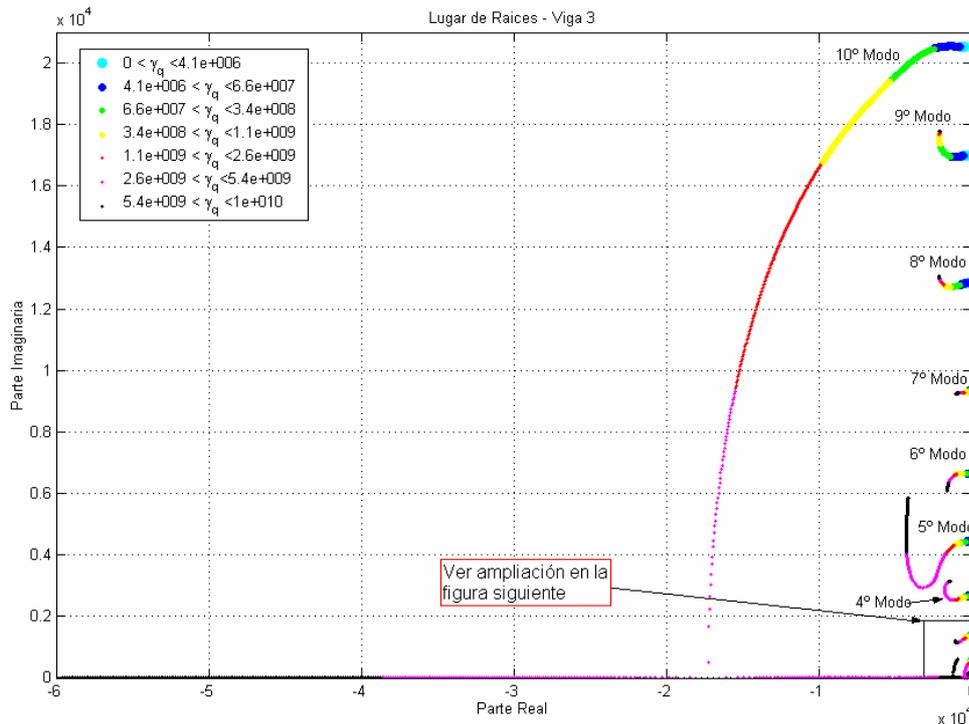


Figura 5.10: Lugar de raíces del modelo correspondiente a la viga 3

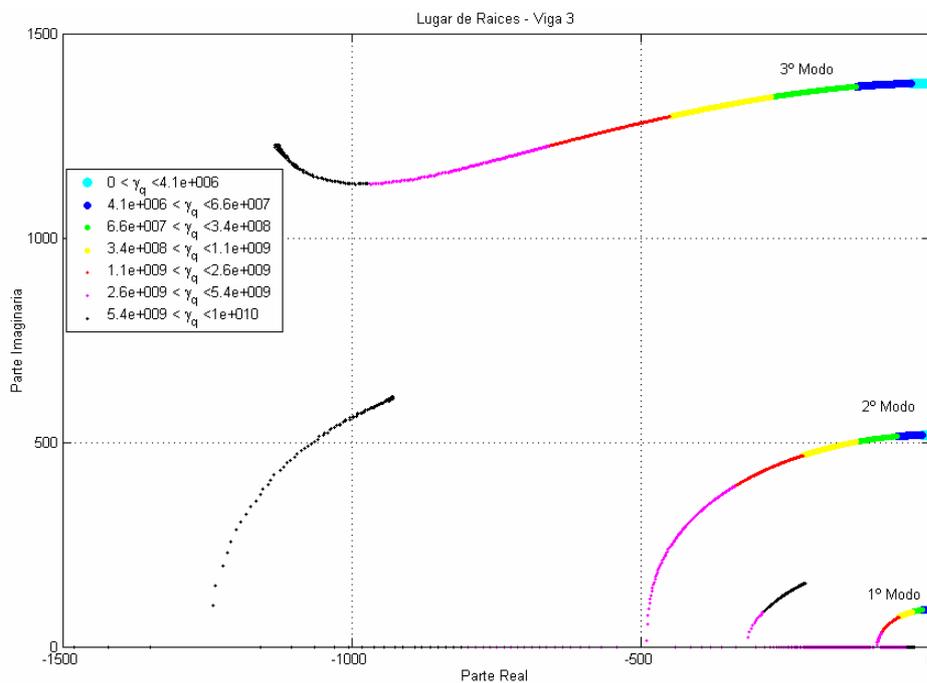


Figura 5.11: Detalle ampliado de la zona encerrada en el rectángulo en la figura 5.10

En la figura 5.11 se observa que el sistema de control no es capaz de llevar los polos del tercer modo hasta el semieje real negativo. Prácticamente ocurre lo mismo con todos los otros modos. Comparando con las vigas 1 y 2 se observa que en la viga 3, el sistema de control lleva los polos del primer modo hasta el semieje real con valores menores de ganancia. Desde este punto de vista, la ubicación de actuadores de la viga 3 es más conveniente.

● Respuesta en frecuencia

El análisis de la respuesta en frecuencia se realiza utilizando una carga distribuida uniformemente a lo largo de la viga de valor $0.1667 \frac{N}{m}$. La variación temporal está dada por la función $e^{j\omega t}$. Se obtiene como respuesta el desplazamiento vertical del extremo libre de la viga.

Viga 1:

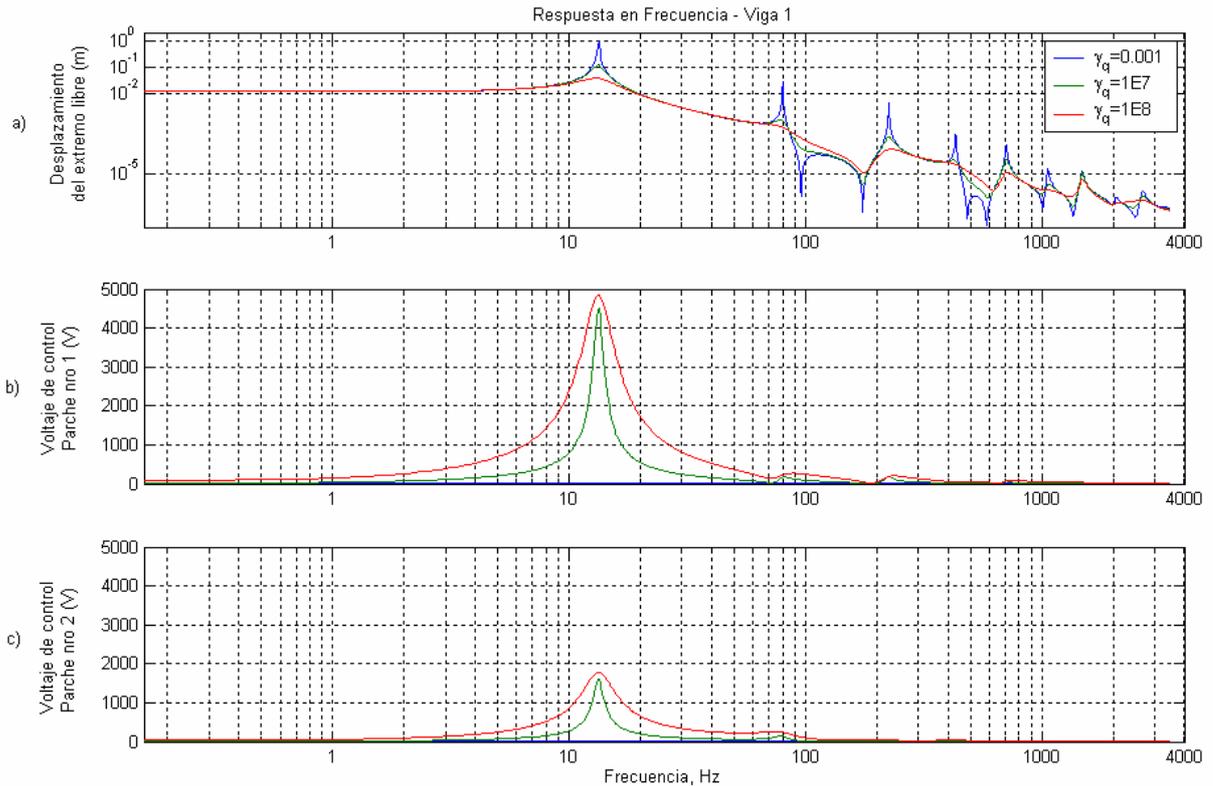


Figura 5.12: Respuesta en frecuencia de la viga 1. a) Desplazamiento del extremo libre de la viga 1 ante la aplicación de una carga de 0.1667 N/m uniformemente distribuida a lo largo de la misma, b) voltaje de control aplicado al parche nro 1. c) voltaje de control aplicado al parche nro 2.

En la figura 5.12a se presenta la respuesta en frecuencia de la viga 1. La respuesta corresponde al desplazamiento vertical del extremo libre. En las figuras 5.12b y 5.12c se graficaron los valores de potenciales eléctricos aplicados a los parches 1 y 2. En la figura 5.12a se observa una notable disminución de la amplitud de oscilación del extremo libre de la viga entre la condición de lazo abierto y lazo cerrado durante las distintas condiciones de resonancia. Sin embargo los valores de potenciales eléctricos aplicados a los parches son excesivamente elevados en relación a los máximos admisibles.

Viga 2:

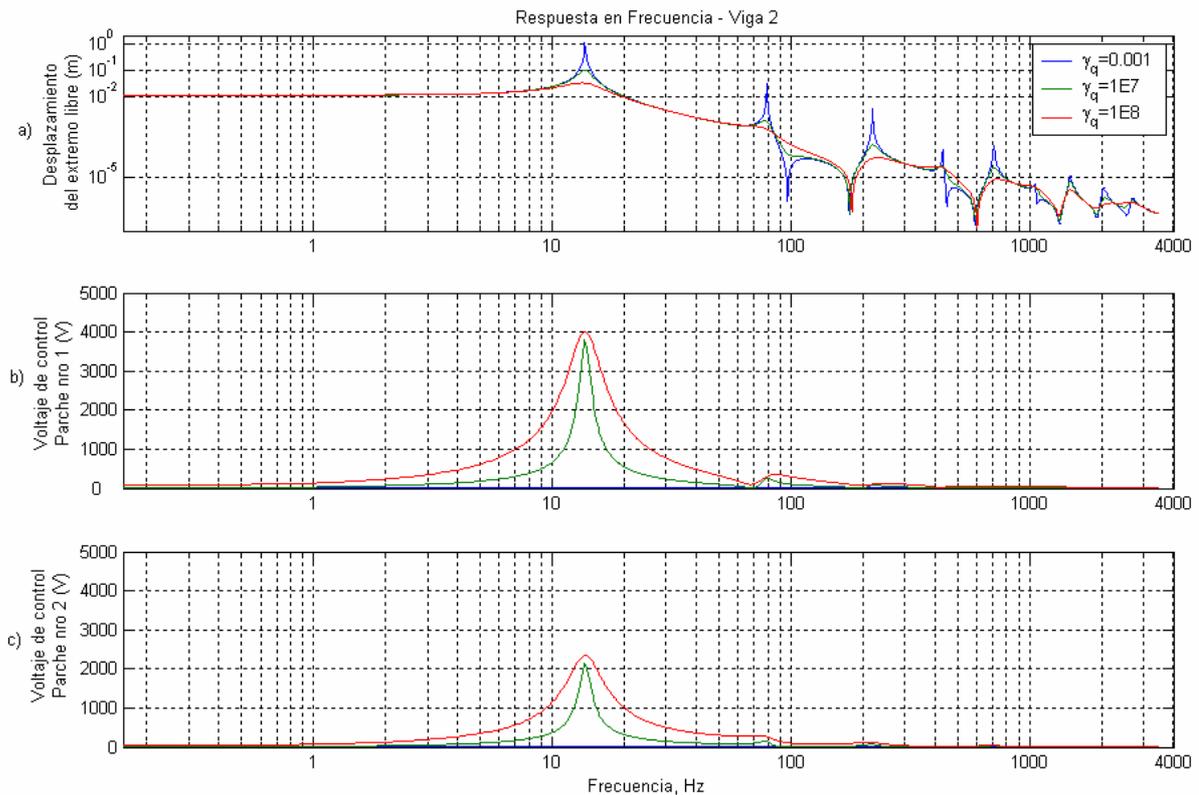


Figura 5.13: Respuesta en frecuencia de la viga 2. a) Desplazamiento del extremo libre de la viga 2 ante la aplicación de una carga de 0.1667 N/m uniformemente distribuida a lo largo de la misma, b) voltaje de control aplicado al parche nro 1. c) voltaje de control aplicado al parche nro 2.

En la figura 5.13a se presenta la respuesta en frecuencia de la viga 2. La respuesta corresponde al desplazamiento vertical del extremo libre. En las figuras 5.13b y 5.13c se graficaron los valores de potenciales eléctricos aplicados a los parches 1 y 2. En la figura 5.13a se observa que, en lazo cerrado, hay una marcada disminución de las amplitudes durante la resonancia, respecto de las amplitudes en lazo abierto. Los valores de fuerzas aplicados, generan estados de la estructura que hacen que el controlador genere potenciales de control excesivos para los parches.

Comparando las figuras 5.12b y 5.12c con 5.13b y 5.13c, se observa que los potenciales eléctricos de control disminuyen en la viga 2 y además disminuye la diferencia entre los potenciales aplicados a los parches 1 y 2.

Viga 3:

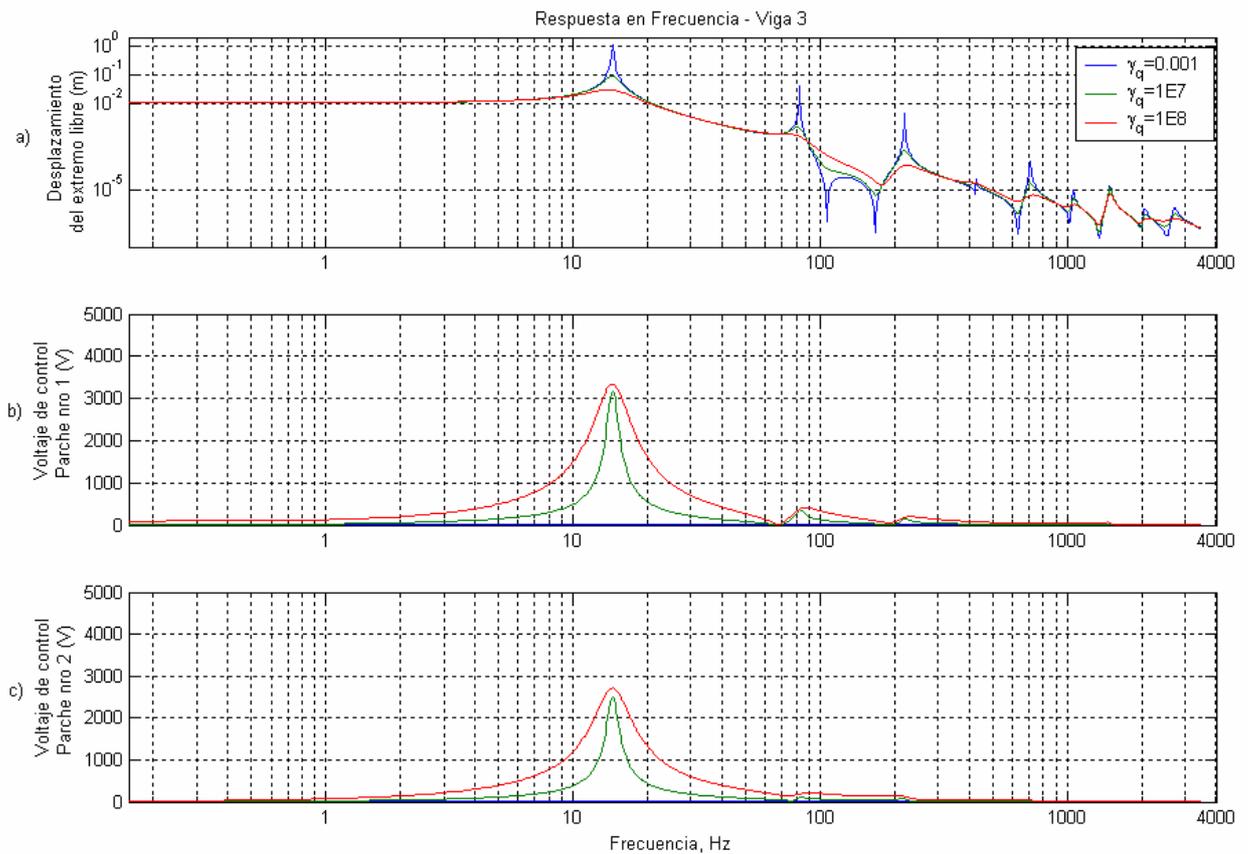


Figura 5.14: Respuesta en frecuencia de la viga 3. a) Desplazamiento del extremo libre de la viga 3 ante la aplicación de una carga de 0.1667 N/m uniformemente distribuida a lo largo de la misma, b) voltaje de control aplicado al parche nro 1. c) voltaje de control aplicado al parche nro 2.

En la figura 5.14a se presenta la respuesta en frecuencia de la viga 3. La respuesta corresponde al desplazamiento vertical del extremo libre. En las figuras 5.14b y 5.14c se graficaron los valores de potenciales eléctricos aplicados a los parches 1 y 2.

Como se puede observar en la figura 5.14a, los valores de amplitud durante la resonancia no se ven prácticamente alterados respecto de las vigas anteriores. Sin embargo, la figura 5.14b muestra que el potencial de control suministrado a los parches 1 y 3 disminuye considerablemente en esta viga, mientras en la figura 5.14c, se observa un aumento en el potencial eléctrico aplicado a los parches 2 y 4.

En las tres vigas se observa que, durante una condición de resonancia correspondiente a la primer frecuencia natural, al utilizar en la determinación de la matriz de ganancia un factor de peso $\gamma_q = 1 \times 10^8$, el sistema de control es capaz de limitar la amplitud del extremo libre a valores del orden de la deflexión estática (frecuencia nula) pero lo hace a expensas de utilizar voltajes de control que alcanzan valores de hasta 4 veces los máximos admisibles por los

parches. Sin embargo, en virtud de la linealidad del problema, se pueden extrapolar los resultados para valores inferiores de la carga aplicada.

- Respuesta estacionaria a ruido blanco

Se presentan las gráficas correspondientes a las tres vigas en una misma figura para facilitar su comparación.

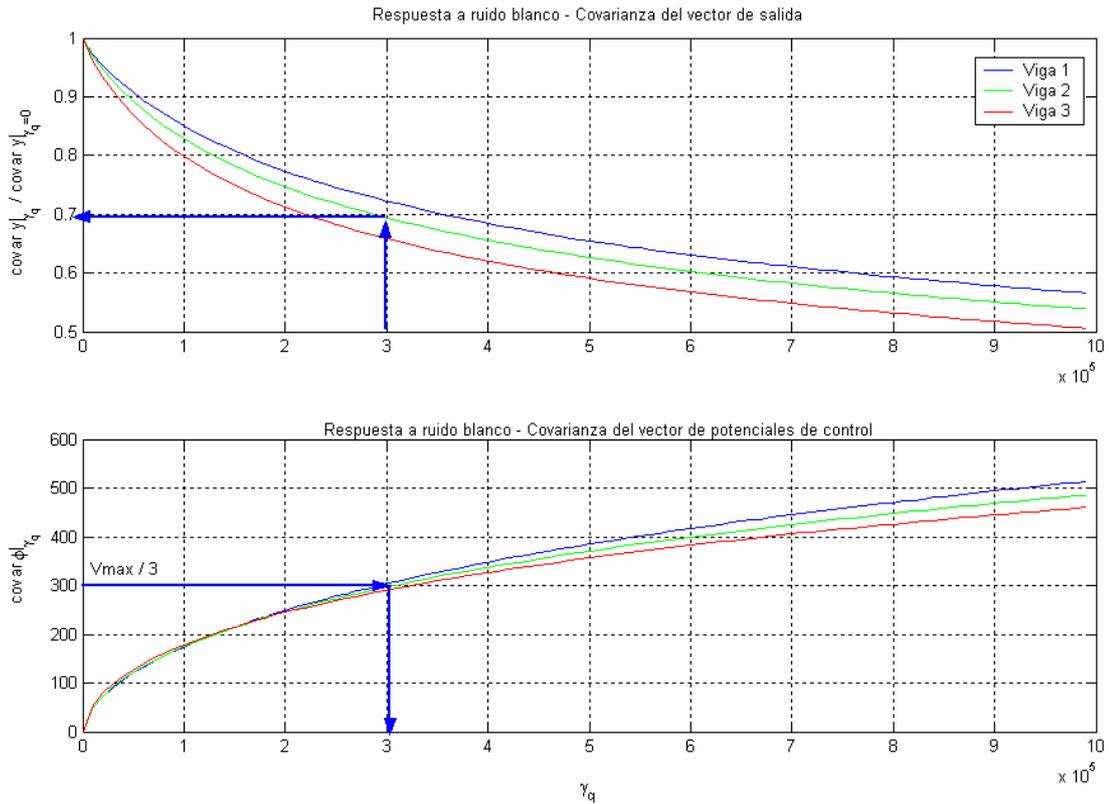


Figura 5.15: Respuesta estacionaria a ruido blanco de las vigas 1, 2 y3.

La figura 5.15 muestra cómo, al aumentar el factor de peso γ_q , disminuye la covarianza de la salida. Desde este punto de vista, la configuración de actuadores de la viga 3 resulta más conveniente. Teniendo en cuenta que el voltaje máximo admisible de los parches es 2000 Volts, se limita el valor máximo de γ_q , de manera de obtener $\text{cov}(\phi) = \frac{V_{\max}}{3} = 300 \text{ Volts}$, con lo que se obtienen, aproximadamente, una reducción del 25 % en la covarianza del vector de salida para la viga 1 y del 35 % para la viga 3.

- Respuesta transitoria

Se realizaron análisis de la respuesta transitoria de las tres vigas estudiadas, ante la aplicación de una carga distribuida uniforme de 0.33 N/m. La ley de variación temporal de la carga fue un escalón, de 0.25 segundos de duración.

Viga 1:

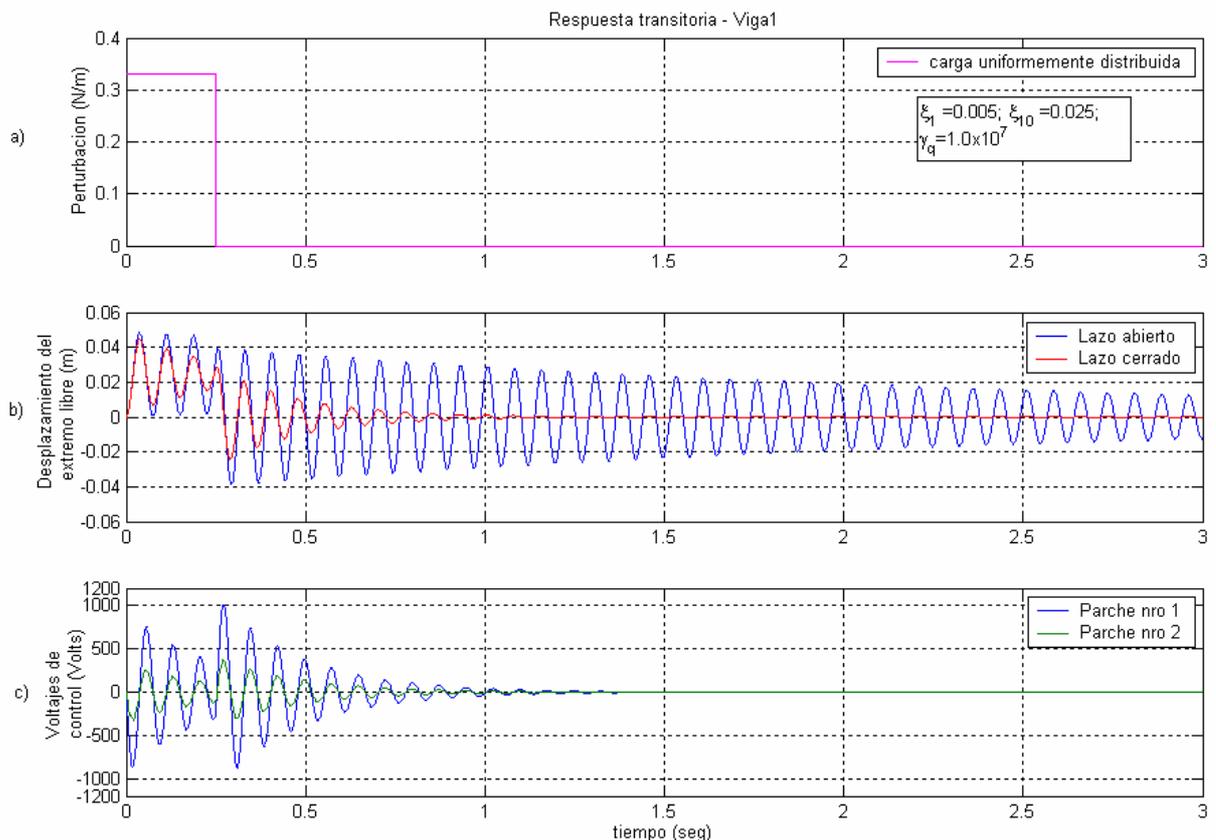


Figura 5.16: Respuesta transitoria de la viga 1. a) Carga aplicada. b) Respuesta transitoria de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales de control aplicados a los parches nro 1 y nro 2.

En la figura 5.16 se presenta la respuesta transitoria de la viga 1 ante la aplicación de una carga uniformemente distribuida cuya ley de variación temporal es un escalón de 0.25 segundos de duración.

En la figura 5.16b se observa la diferencia entre las respuestas de lazo abierto y lazo cerrado, allí se observa que el sistema de control, suministrando a los actuadores potenciales eléctricos admisibles, es capaz de introducir amortiguamiento en el sistema. Luego de 0.25 segundos de la perturbación, el controlador redujo la amplitud en un 40 % respecto de la respuesta de lazo abierto.

En la figura 5.16c se puede apreciar que los potenciales eléctricos de control toman valores admisibles para los parches. También se observa la diferencia entre los potenciales eléctricos aplicados a los parches nro 1 y nro 2.

Viga 2:

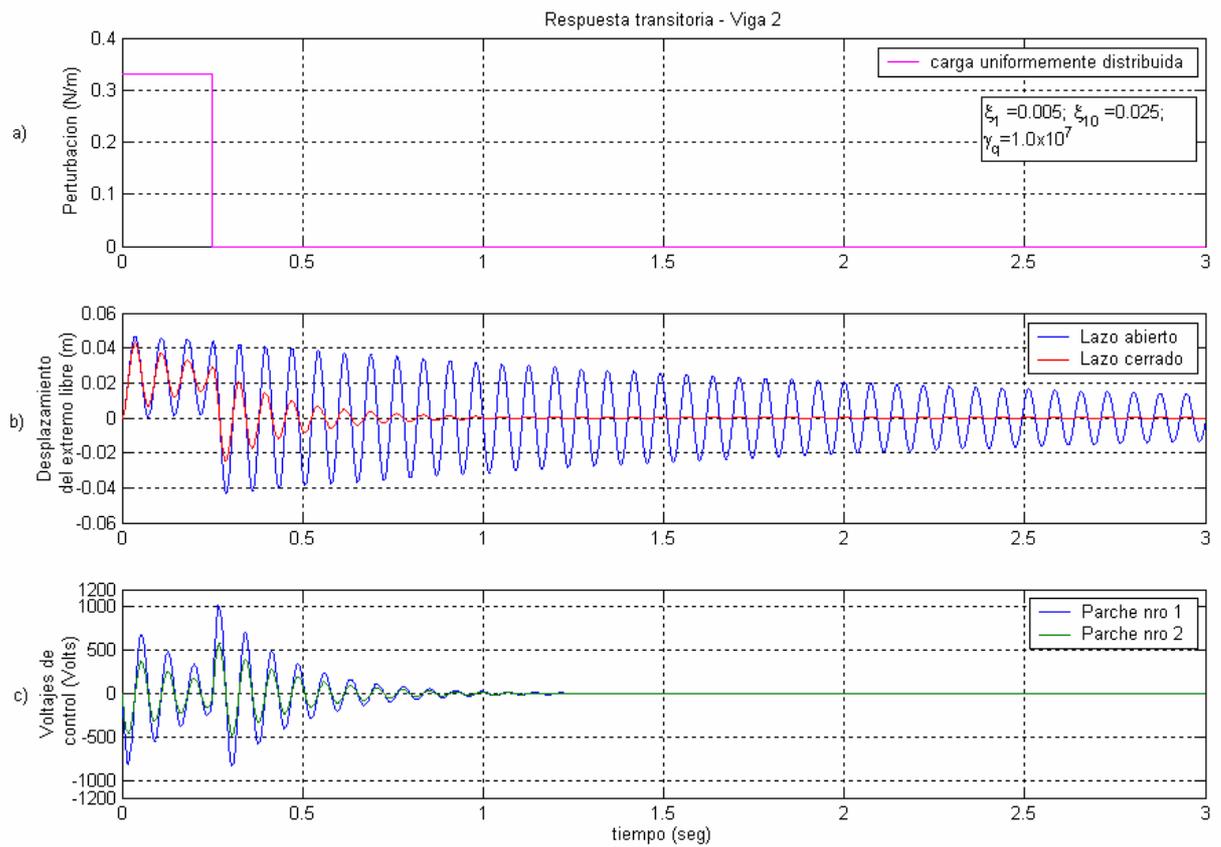


Figura 5.17: Respuesta transitoria de la viga 2. a) Carga aplicada. b) Respuesta transitoria de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales de control aplicados a los parches nro 1 y nro 2.

En la figura 5.17 se presenta la respuesta transitoria de la viga 2. La figura 5.17b muestra las respuestas en lazo abierto y en lazo cerrado, allí se puede apreciar el amortiguamiento introducido por el controlador. También se observa en 5.17c una disminución en la diferencia entre los potenciales de control aplicados a los parches nro 1 y nro 2.

Viga 3:

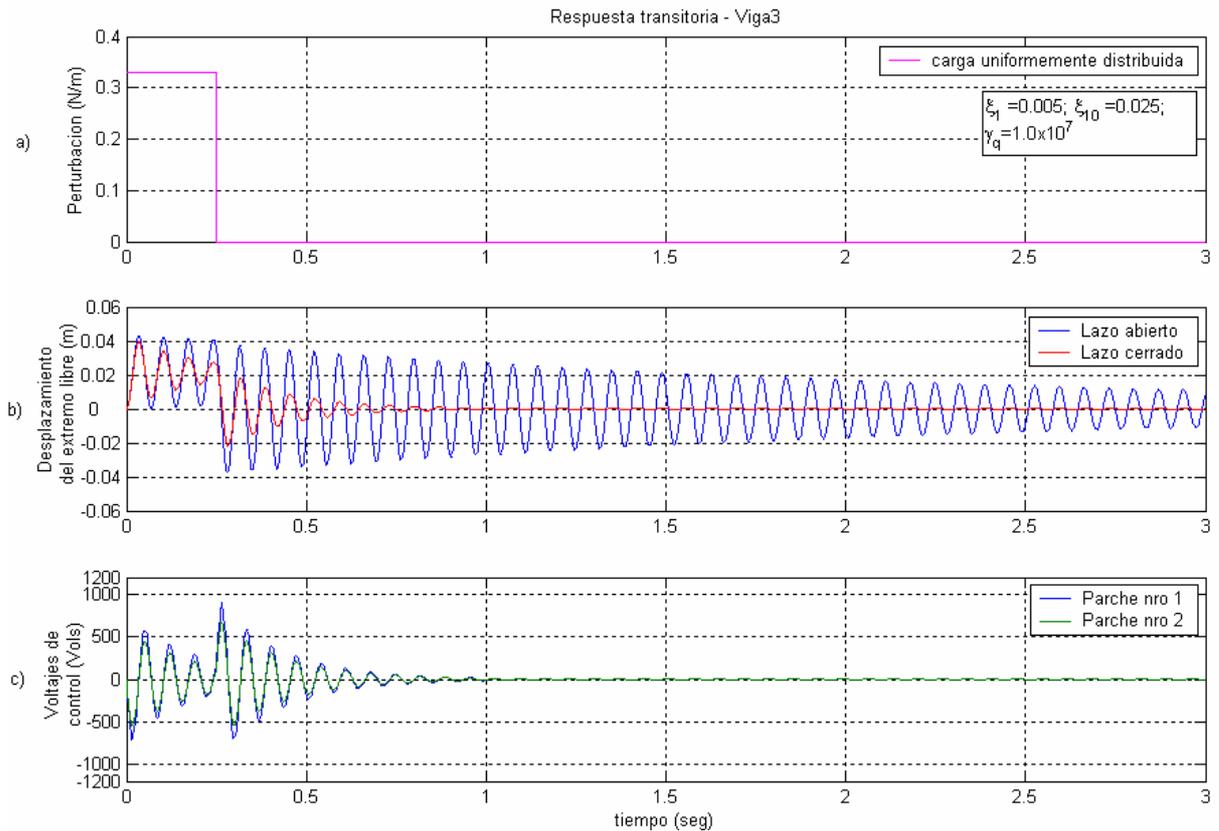


Figura 5.18: Respuesta transitoria de la viga 3. a) Carga aplicada. b) Respuesta transitoria de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales de control aplicados a los parches nro 1 y nro 2.

En la figura 5.18 se presenta la respuesta transitoria de la viga 3 ante la aplicación de una carga uniformemente distribuida cuya ley de variación temporal es un escalón de 0.25 segundos de duración. En la figura 5.18c se observa que los potenciales aplicados a los actuadores disminuyeron respecto de los aplicados a las vigas 1 y 2. Dicho comportamiento se relaciona directamente con la ubicación de los actuadores, mas cercana al extremo empotrado de la viga. El potencial eléctrico aplicado a todos los actuadores toma prácticamente el mismo valor, permaneciendo dentro de los límites máximos de comportamiento lineal de los mismos.

5.3.2. Control de vibraciones torsionales en una estructura cajón

5.3.2.1. Descripción del modelo

El ejemplo que se presenta a continuación consiste en el control de vibraciones torsionales de una estructura tipo cajón correspondiente a una superficie sustentadora. El perfil de la misma es simétrico, de la serie NACA de 4 dígitos, de espesor 12 % y una cuerda de 0.25 m. Se plantea la estructura de tipo mono-celda y bi-larguera. El larguero principal se ha ubicado al 12 % y el secundario al 72% de la cuerda. La envergadura del cajón es 1.35 m.

Adheridos en el extradós e intradós, se disponen parches elaborados con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales. Los parches del extradós se adhieren al recubrimiento con una inclinación de $+45^\circ$ respecto del eje longitudinal (eje 1), mientras que los del intradós se adhieren con -45° de inclinación. La figura 5.20 ilustra dicho aspecto geométrico.

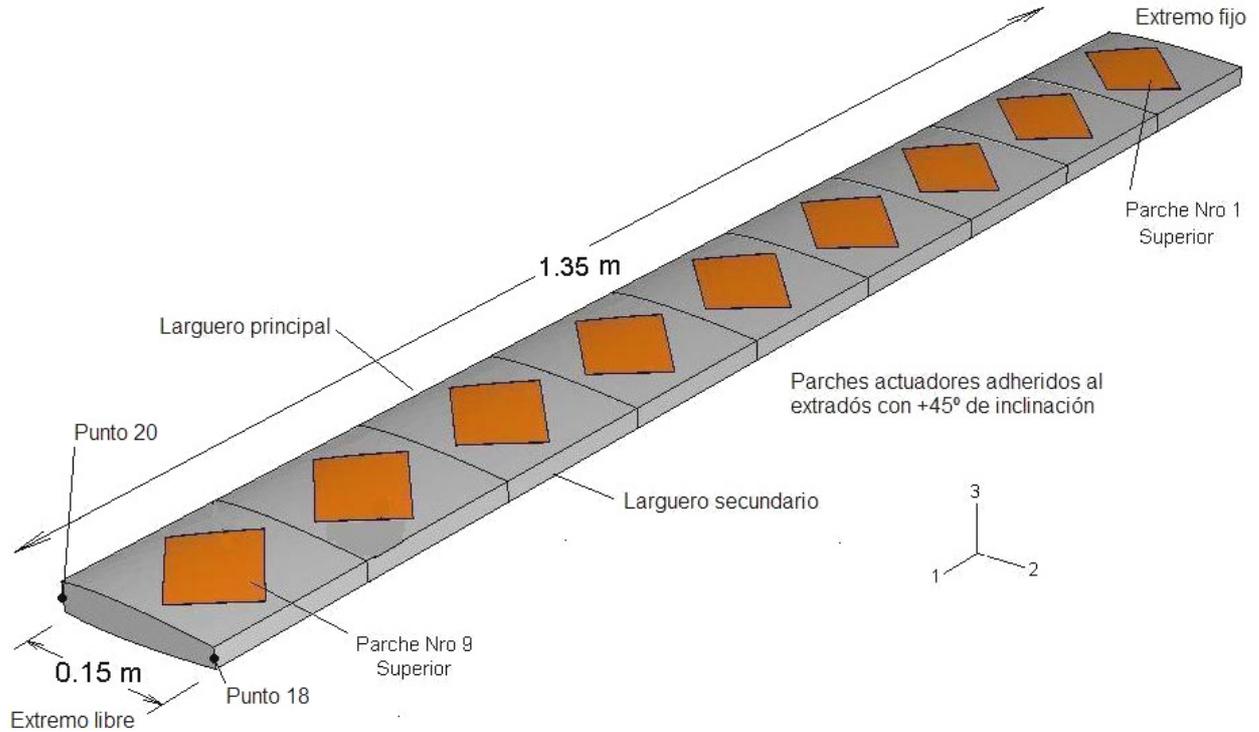


Figura 5.19: Geometría del tramo de superficie sustentadora analizada, con los parches piezoeléctricos adheridos sobre su recubrimiento.

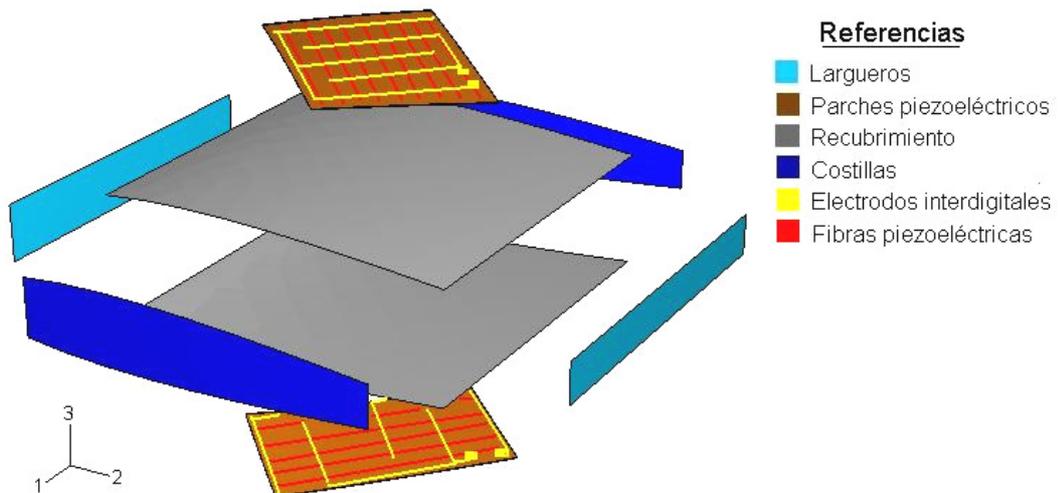


Figura 5.20: Detalle de un sector del cajón modelado.

La figura 5.20 muestra una especie de despiece de un sector del cajón mostrado en la figura 5.19, allí se puede observar la manera en que está construida la estructura.

Cada paño (porción de recubrimiento entre dos costillas) tiene adherido un parche piezoeléctrico. Los parches adheridos a los paños superior e inferior se encuentran conectados eléctricamente de manera tal que el potencial aplicado genera en ambos el mismo sentido de deformación. Es decir, el voltaje aplicado a los parches de cada sector de cajón es el mismo, y se puede controlar independientemente de los otros sectores.

El modelo de elementos finitos se realizó con el programa comercial ABAQUS, utilizando elementos tipo cáscara S4R para modelar la zona pasiva de la estructura, es decir, recubrimiento, costillas y largueros y elementos sólidos piezoeléctricos lineales de 8 nodos C3D8E para modelar los parches. El comportamiento del parche con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales se modela a nivel constitutivo, utilizando las constantes electromecánicas obtenidas en el capítulo 4. La figura 5.21 muestra la malla utilizada para analizar el cajón.

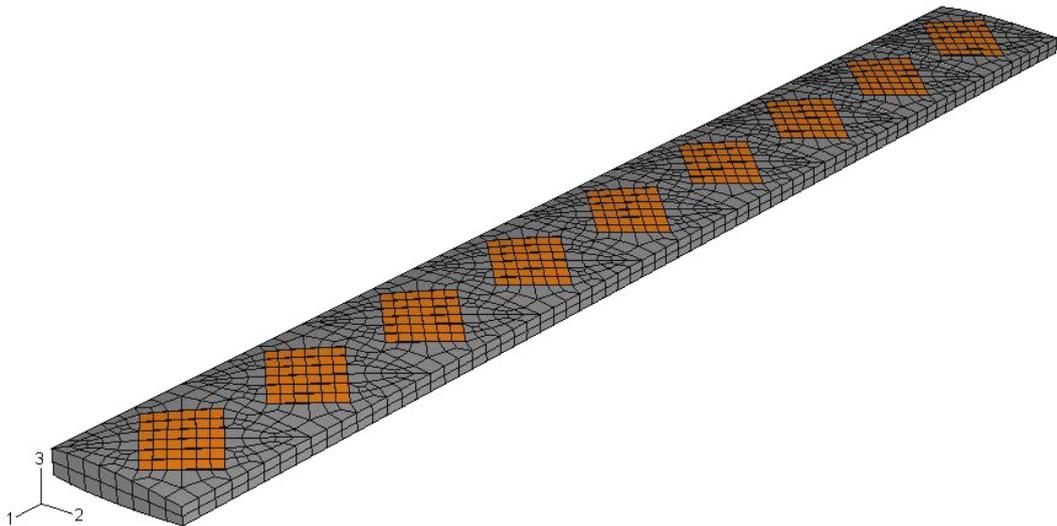


Figura 5.21: Malla de elementos finitos utilizada para analizar el cajón con los parches piezoeléctricos.

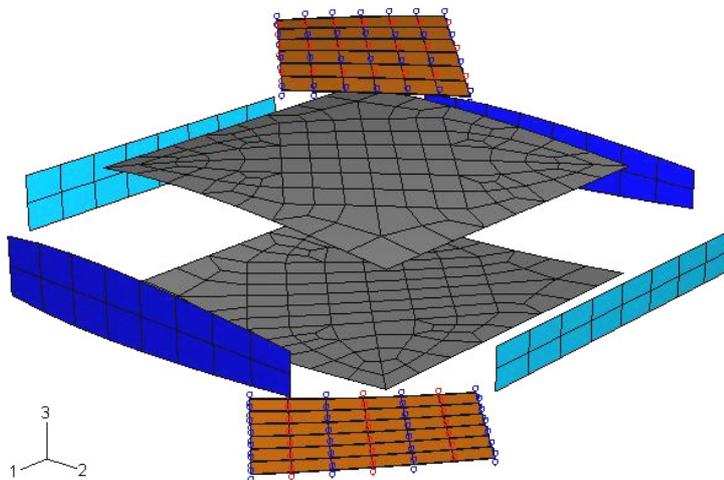


Figura 5.22: Detalle de la malla de elementos finitos de un sector del cajón con los parches piezoeléctricos, los círculos rojos representan los electrodos positivos y los rojos los negativos.

Las conexiones eléctricas de los electrodos de los parches se incluyen en el modelo de elementos finitos mediante la definición de ecuaciones de restricciones sobre los grados de libertad que corresponden a los electrodos de los parches. La figura 5.22 muestra en detalle el mallado de un sector del cajón y de los nodos que representan los electrodos.

Se retienen los grados de libertad correspondientes a los desplazamientos verticales de los nodos ubicados en la línea media longitudinal de los largueros, y los correspondientes a los terminales de alimentación de los parches, de manera de representar en el modelo el comportamiento flexo-torsional y tener capacidad de controlar las deformaciones torsionales.

Se utilizaron los mismos materiales y parches que en las vigas analizadas en el punto 5.3. El amortiguamiento estructural se consideró del tipo Rayleigh con un valor de 2.5% para el primer modo y 5.0% para el 20° modo, a partir de estos valores se determinó el amortiguamiento de los modos intermedios. Para la determinación de la matriz de ganancias se utilizaron las siguientes matrices de peso:

$$Q = \gamma_q \times [I] \quad (5.32)$$

$$R = 100 \times [I] \quad (5.33)$$

donde $\gamma_q \in [0, \infty)$.

A partir de los desplazamientos verticales de los puntos 18 y 20, se calculó el giro del extremo libre con la siguiente expresión:

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{y_{20} - y_{18}}{0.15} \right) \quad (5.34)$$

A continuación, se presentan los resultados obtenidos. En primer lugar se presentan las gráficas correspondientes al lugar geométrico de las raíces de la matriz de lazo cerrado, $[A_C]$ del sistema. Luego se presentan las gráficas de las funciones de respuesta en frecuencia, la respuesta transitoria ante una excitación tipo escalón y finalmente se realiza una evaluación del comportamiento del sistema ante una excitación de ruido blanco (modelo ideal de banda ancha).

5.3.2.2. Lugar de raíces

En virtud de la simetría de las gráficas respecto del eje real, se presenta solo el semiplano superior. Así mismo, al igual que para el caso de las vigas, se muestran en diferentes colores los polos correspondientes a los distintos valores de γ_q .

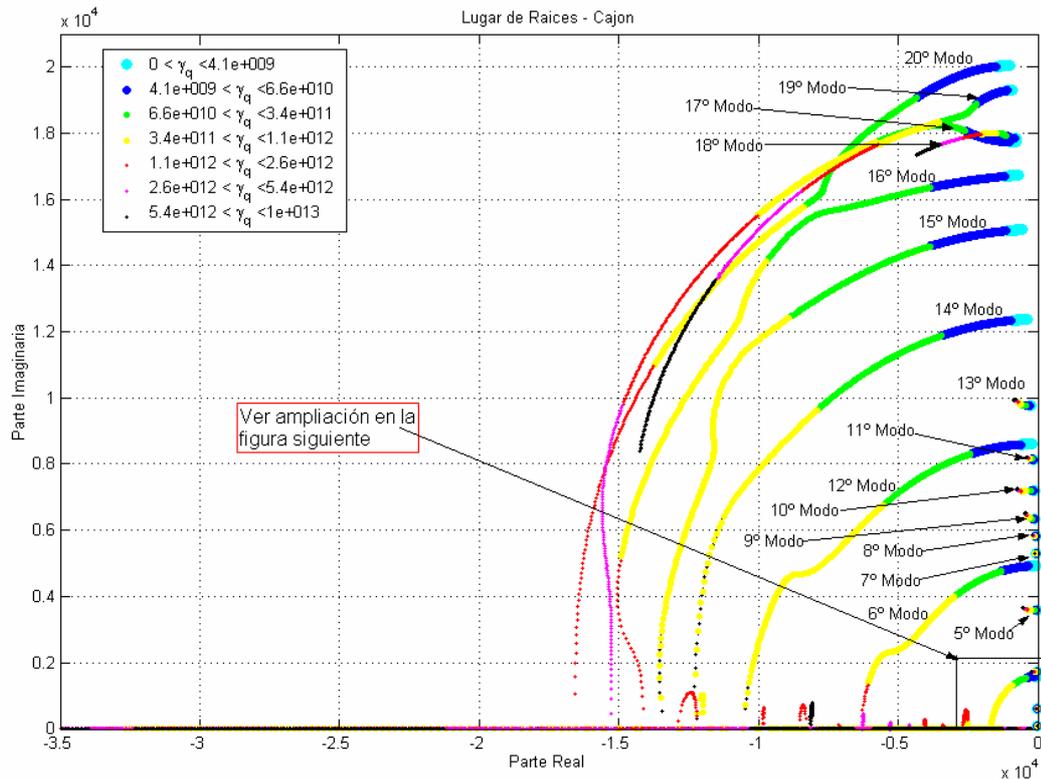


Figura 5.23: Lugar de raíces del modelo correspondiente al cajón de torsión.

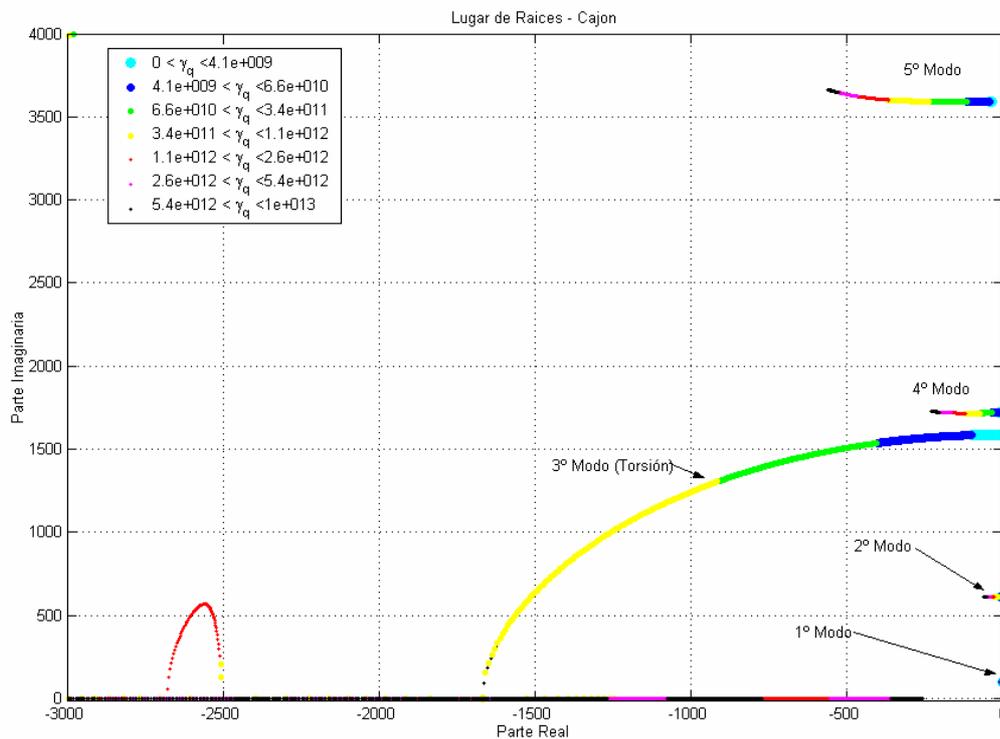


Figura 5.24: Detalle ampliado correspondiente a los primeros modos.

Las gráficas 5.23 y 5.24 muestran claramente que el hecho de adherir en el recubrimiento del cajón parches en direcciones $\pm 45^\circ$ y conectar el parche superior e inferior de cada sector de manera de tener en ambos el mismo sentido de deformación, proporciona capacidad de mover los polos de lazo cerrado correspondientes a los autovalores de los modos torsionales, pero no ocurre lo mismo para los valores característicos correspondientes a los modos

flexionales. En la figura 5.24 se observa claramente que las dos primeras raíces no se mueven en absoluto cuando se varía el factor de peso γ_q utilizado para determinar la matriz de ganancias.

5.3.2.3. Respuesta en frecuencia

En este caso, la fuerza perturbadora es tal que introduce en la estructura solamente esfuerzos torsionales. Para ello se colocaron cargas distribuidas de igual magnitud y sentidos opuestos en los largueros principal y secundario. El valor de la carga distribuida utilizada fue de 20 N/m.

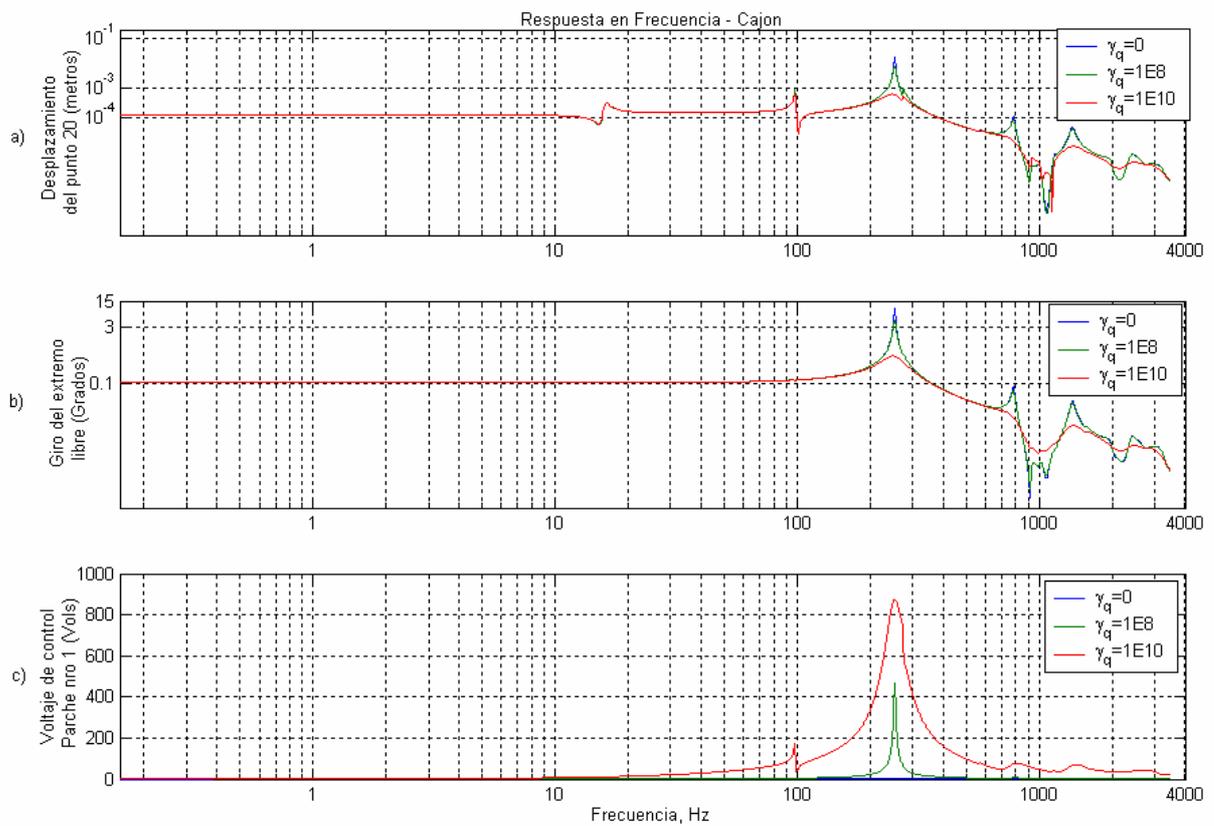


Figura 5.25: Respuesta en frecuencia del cajón. a) Desplazamiento del punto 20. b) Giro del extremo libre. c) voltaje de control aplicado al parche nro 1.

La figura 5.25 muestra la respuesta en frecuencia del cajón analizado ante la aplicación del momento torsor uniformemente distribuido de valor 3 Nm/m. En la figura 5.25a se presenta el desplazamiento vertical del punto 20 y en 5.25b, el giro del extremo libre, obtenido a partir de la Ec. 5.34. Se obtuvieron dichas gráficas para diferentes valores del factor de peso γ_q utilizado en el funcional cuadrático para determinar la matriz de ganancias óptima. También se presenta en la figura 5.25c, los potenciales eléctricos de control aplicados al parche número 1.

La figura 5.25b muestra que el sistema de control es capaz de limitar el giro del extremo libre a valores de 1 grado durante una condición de resonancia, sin exceder el potencial máximo admisible aplicado a los parches.

5.3.2.4. Respuesta estacionaria a ruido blanco

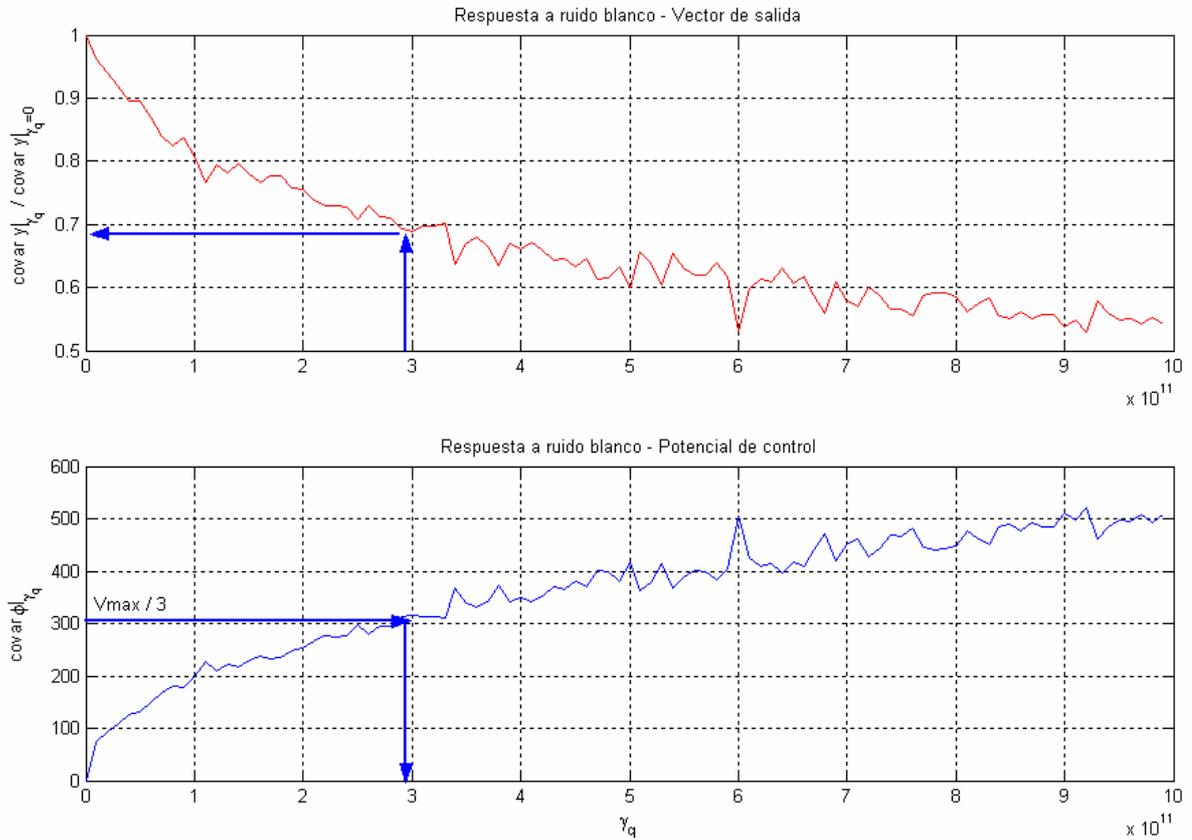


Figura 5.26: Respuesta estacionaria a ruido blanco. Covarianza de la salida y vector de control en función del factor de peso utilizado para determinar la matriz de ganancias.

La figura 5.26 muestra la covarianza del vector de salidas y el vector de estado en función del factor de peso utilizado para determinar la matriz de ganancias. Allí se puede observar la disminución de la covarianza de la salida al aumentar la ganancia del sistema de control y se remarca que limitando el valor máximo de γ_q de manera de obtener

$$\text{cov}(\phi) = \frac{V_{\max}}{3} = 300 \text{ Volts},$$

se obtiene una reducción de aproximadamente un 30 % en la covarianza del vector de salida.

5.3.2.5. Respuesta transitoria

Se realizó un análisis de la respuesta transitoria del cajón, ante la aplicación de una momento distribuido uniformemente a lo largo de la envergadura de 6 Nm/m. La ley de variación temporal del momento aplicado fue un escalón, de 0.1 segundos de duración.

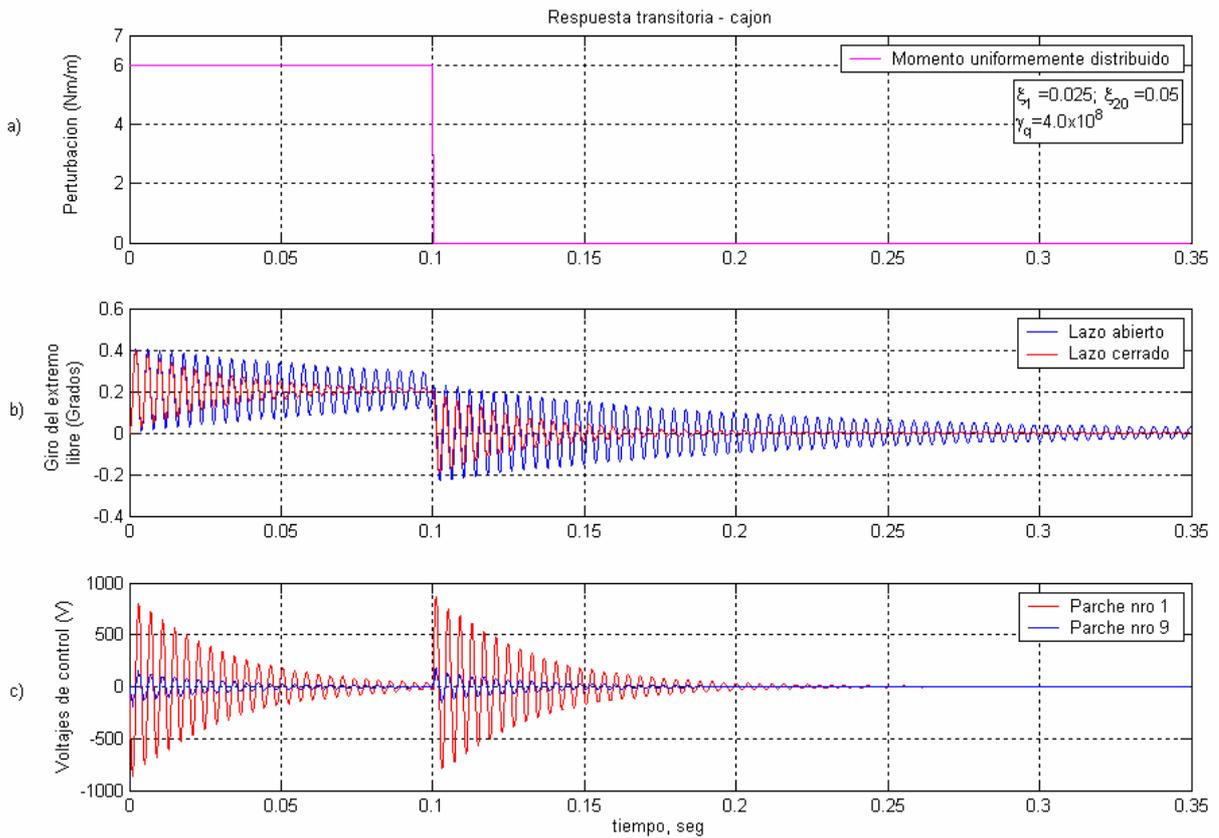


Figura 5.27: Respuesta transitoria del cajón. a) Perturbación. b) Giro del extremo libre para las condiciones de lazo abierto y lazo cerrado. c) Potenciales eléctricos de control aplicados a los parches nro 1 y nro 9.

En las figura 5.27a, b y c se presenta la respuesta transitoria del cajón ante la aplicación de un momento uniformemente distribuido a lo largo de la envergadura, cuya variación temporal es una función escalón de 0.1 segundo de duración. En 5.27b, puede notarse el aumento de amortiguamiento que introduce el sistema de control utilizando, como se observa en 5.17c, valores admisibles de potenciales eléctricos. El resto de los parches son alimentados con potenciales intermedios pero no se presentan por claridad de la figura.

Anexo 5.1

Obtención de las ecuaciones en el espacio de estados a partir de las ecuaciones de equilibrio de elementos finitos.

La ecuación de elementos finitos, de equilibrio dinámico del problema piezoeléctrico acoplado, desarrollada en el capítulo 3, se escribe así:

$$\begin{bmatrix} [M_{mm}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_m\} \\ \{\ddot{q}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{mm}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_m\} \\ \{\dot{q}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{me}] \\ [K_{em}] & [K_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_m\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_m\} \\ \{F_e\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A5.1.1})$$

Donde:

$[M_{mm}]$: matriz de masa.

$[C_{mm}]$: matriz de amortiguamiento

$\{q_m\}$: vector de desplazamientos mecánicos nodales

$\{q_e\}$: vector de potenciales eléctricos nodales

$\{F_m\}$: vector de fuerzas mecánicas nodales

$\{F_e\}$: vector de cargas eléctricas nodales

Por otra parte, se distinguen en la estructura grados de libertad en los que se prescriben desplazamientos mecánicos y potenciales eléctricos. La ecuación (A5.1.1) queda:

$$\begin{bmatrix} [M_{mm}^{ll}] & 0 & [M_{mm}^{lp}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [M_{mm}^{pl}] & 0 & [M_{mm}^{pp}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_m^l\} \\ \{\ddot{q}_e^l\} \\ \{\ddot{q}_m^p\} \\ \{\ddot{q}_e^p\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{mm}^{ll}] & 0 & [C_{mm}^{lp}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [C_{mm}^{pl}] & 0 & [C_{mm}^{pp}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_m^l\} \\ \{\dot{q}_e^l\} \\ \{\dot{q}_m^p\} \\ \{\dot{q}_e^p\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{mm}^{ll}] & [K_{me}^{ll}] & [K_{mm}^{lp}] & [K_{me}^{lp}] \\ [K_{em}^{ll}] & [K_{ee}^{ll}] & [K_{em}^{lp}] & [K_{ee}^{lp}] \\ [K_{mm}^{pl}] & [K_{me}^{pl}] & [K_{mm}^{pp}] & [K_{me}^{pp}] \\ [K_{em}^{pl}] & [K_{ee}^{pl}] & [K_{em}^{pp}] & [K_{ee}^{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_m^l\} \\ \{q_e^l\} \\ \{q_m^p\} \\ \{q_e^p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_m^l\} \\ \{F_e^l\} \\ \{F_m^p\} \\ \{F_e^p\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A5.1.2})$$

Donde:

$\{q_m^l\}$: vector de desplazamientos mecánicos libres.

$\{q_e^l\}$: vector de potenciales eléctricos libres.

$\{q_m^p\}$: vector de desplazamientos mecánicos prescriptos.

$\{q_e^p\}$: vector de potenciales eléctricos prescriptos.

Desarrollando:

$$\begin{aligned} [M_{mm}^{ll}] \{\ddot{q}_m^l\} + [M_{mm}^{lp}] \{\ddot{q}_m^p\} + [C_{mm}^{ll}] \{\dot{q}_m^l\} + [C_{mm}^{lp}] \{\dot{q}_m^p\} + [K_{mm}^{ll}] \{q_m^l\} + \\ + [K_{me}^{ll}] \{q_e^l\} + [K_{mm}^{lp}] \{q_m^p\} + [K_{me}^{lp}] \{q_e^p\} = \{F_m^l\} \end{aligned} \quad (A5.1.3)$$

$$[K_{em}^{ll}] \{q_m^l\} + [K_{ee}^{ll}] \{q_e^l\} + [K_{em}^{lp}] \{q_m^p\} + [K_{ee}^{lp}] \{q_e^p\} = \{F_e^l\} \quad (A5.1.4)$$

$$\begin{aligned} [M_{mm}^{pl}] \{\ddot{q}_m^l\} + [M_{mm}^{pp}] \{\ddot{q}_m^p\} + [C_{mm}^{pl}] \{\dot{q}_m^l\} + [C_{mm}^{pp}] \{\dot{q}_m^p\} + \\ + [K_{mm}^{pl}] \{q_m^l\} + [K_{me}^{pl}] \{q_e^l\} + [K_{mm}^{pp}] \{q_m^p\} + [K_{me}^{pp}] \{q_e^p\} = \{F_m^p\} \end{aligned} \quad (A5.1.5)$$

$$[K_{em}^{pl}] \{q_m^l\} + [K_{ee}^{pl}] \{q_e^l\} + [K_{em}^{pp}] \{q_m^p\} + [K_{ee}^{pp}] \{q_e^p\} = \{F_e^p\} \quad (A5.1.6)$$

Despejando $\{q_e^l\}$ de (A5.1.4):

$$\{q_e^l\} = [K_{ee}^{ll}]^{-1} (\{F_e^l\} - [K_{em}^{ll}] \{q_m^l\} - [K_{em}^{lp}] \{q_m^p\} - [K_{ee}^{lp}] \{q_e^p\}) \quad (A5.1.7)$$

reemplazando (A5.1.7) en (A5.1.3):

$$\begin{aligned} [M_{mm}^{ll}] \{\ddot{q}_m^l\} + [M_{mm}^{lp}] \{\ddot{q}_m^p\} + [C_{mm}^{ll}] \{\dot{q}_m^l\} + [C_{mm}^{lp}] \{\dot{q}_m^p\} + [K_{mm}^{ll}] \{q_m^l\} + \\ + [K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} (\{F_e^l\} - [K_{em}^{ll}] \{q_m^l\} - [K_{em}^{lp}] \{q_m^p\} - [K_{ee}^{lp}] \{q_e^p\}) + \\ + [K_{mm}^{lp}] \{q_m^p\} + [K_{me}^{lp}] \{q_e^p\} = \{F_m^l\} \end{aligned} \quad (A5.1.8)$$

Agrupando y reordenando:

$$\begin{aligned} [M_{mm}^{ll}] \{\ddot{q}_m^l\} + [C_{mm}^{ll}] \{\dot{q}_m^l\} + ([K_{mm}^{ll}] - [K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} [K_{em}^{ll}]) \{q_m^l\} = \\ = \{F_m^l\} - [M_{mm}^{lp}] \{\ddot{q}_m^p\} - [C_{mm}^{lp}] \{\dot{q}_m^p\} + ([K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} [K_{em}^{lp}] - [K_{mm}^{lp}]) \{q_m^p\} - \\ - [K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} \{F_e^l\} + ([K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} [K_{em}^{lp}] - [K_{me}^{lp}]) \{q_e^p\} \end{aligned} \quad (A5.1.9)$$

La expresión (A5.1.9) es una ecuación diferencial cuya incógnita es el vector de desplazamientos mecánicos libres. El segundo miembro de (A5.1.9) es el vector de fuerza y en él se distingue, además de las fuerzas mecánicas y las generadas por la aplicación de cargas eléctricas, la contribución de los desplazamientos y potenciales prescriptos.

A continuación se expresa (A5.1.9) en forma compacta:

$$[M^*]\{\ddot{q}_m^l\} + [C^*]\{\dot{q}_m^l\} + [K^*]\{q_m^l\} = \{F^*\} \quad (\text{A5.1.10})$$

Donde:

$$[M^*] = [M_{mm}^{ll}] \quad (\text{A5.1.11})$$

$$[C^*] = [C_{mm}^{ll}] \quad (\text{A5.1.12})$$

$$[K^*] = [K_{mm}^{ll}] - [K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} [K_{em}^{ll}] \quad (\text{A5.1.13})$$

El vector de fuerzas se puede escribir también en forma compacta:

$$\{F^*\} = \{F_m^l\} + [P_1]\{\ddot{q}_m^p\} + [P_2]\{\dot{q}_m^p\} + [P_3]\{q_m^p\} + [P_4]\{F_e^l\} + [P_5]\{q_e^p\} \quad (\text{A5.1.14})$$

Donde:

$$[P_1] = -[M_{mm}^{lp}] \quad (\text{A5.1.15})$$

$$[P_2] = -[C_{mm}^{lp}] \quad (\text{A5.1.16})$$

$$[P_3] = [K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} [K_{em}^{lp}] - [K_{mm}^{lp}] \quad (\text{A5.1.17})$$

$$[P_4] = -[K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} \quad (\text{A5.1.18})$$

$$[P_5] = [K_{me}^{ll}] [K_{ee}^{ll}]^{-1} [K_{ee}^{lp}] - [K_{me}^{lp}] \quad (\text{A5.1.19})$$

Es conveniente expresar el vector de fuerzas $\{F^*\}$ como suma de dos términos, uno correspondiente a las perturbaciones y el otro debido a los potenciales eléctricos impuestos por el sistema de control:

$$\{F^*\} = [P_5]\{q_e^p\} + [P^p]\{f^{pert}\} \quad (\text{A5.1.20})$$

Donde:

$$[P^p] = [[I] \quad [P_1] \quad [P_2] \quad [P_3] \quad [P_4]] \quad (\text{A5.1.21})$$

$$\{f^{pert}\} = \begin{Bmatrix} \{F_m^l\} \\ \{\ddot{q}_m^p\} \\ \{\dot{q}_m^p\} \\ \{q_m^p\} \\ \{F_e^l\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A5.1.22})$$

La expresión (A5.1.10) puede pasarse al espacio de estados, definiendo como estado del sistema el vector de desplazamientos y velocidades:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{q_m^l\} \\ \{\dot{q}_m^l\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A5.1.23})$$

Despejando $\{\dot{q}_m^l\}$ de (A5.1.10) se obtiene:

$$\{\ddot{q}_m^l\} = [M^*]^{-1} ([P^p] \{f^p\} + [P_5] \{q_e^p\}) - [M^*]^{-1} [C^*] \{\dot{q}_m^l\} - [M^*]^{-1} [K^*] \{q_m^l\} \quad (\text{A5.1.24})$$

Usando la identidad:

$$\{\dot{q}_m^l\} = \{\dot{q}_m^l\} \quad (\text{A5.1.25})$$

y expresando (A5.1.24) y (A5.1.25) en una sola expresión matricial se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{q}_m^l\} \\ \{\ddot{q}_m^l\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M^*]^{-1}[K^*] & -[M^*]^{-1}[C^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_m^l\} \\ \{\dot{q}_m^l\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [M^*]^{-1}[P_5] & [M^*]^{-1}[P^p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_e^p\} \\ \{f^{pert}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A5.1.26})$$

La expresión (A5.1.26) es la ecuación de estado correspondiente al sistema considerado.

El término correspondiente a las perturbaciones externas y a las fuerzas de control puede expresarse separadamente:

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{q}_m^l\} \\ \{\ddot{q}_m^l\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M^*]^{-1}[K^*] & -[M^*]^{-1}[C^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_m^l\} \\ \{\dot{q}_m^l\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M^*]^{-1}[P_5] \end{bmatrix} \{q_e^p\} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M^*]^{-1}[P^p] \end{bmatrix} \{f^{pert}\} \quad (\text{A5.1.27})$$

Así:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{q_e^p\} + [E]\{f^{pert}\} \quad (\text{A5.1.28})$$

Donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M^*]^{-1}[K^*] & -[M^*]^{-1}[C^*] \end{bmatrix} \quad (\text{A5.1.29})$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [M^*]^{-1}[P_5] \end{bmatrix} \quad (\text{A5.1.30})$$

$$[E] = \begin{bmatrix} [0] \\ [M^*]^{-1}[P^p] \end{bmatrix} \quad (\text{A5.1.31})$$

El vector q_e^p contiene los potenciales eléctricos de control aplicados a los actuadores.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Introducción

En esta tesis se desarrolló, en forma unificada y sistemática, una serie de herramientas que permiten analizar numéricamente el comportamiento y desempeño de estructuras dotadas de dispositivos de control construidos con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales. Los modelos analizados pueden ser incorporados en análisis por elementos finitos de estructuras aeronáuticas de características reales, que permitan simular sistemas de control activo destinados a limitar oscilaciones.

Se investigó el comportamiento, dentro del rango lineal y cuasi-electroestático, de los compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales. Se obtuvieron sus propiedades constitutivas a partir de las correspondientes a las fibras y a la resina, utilizando dos enfoques. En primer lugar se realizó un análisis mesomecánico, basado en un modelo de elementos finitos de una porción representativa del compuesto estudiado. En segundo lugar, se realizó un análisis macromecánico basado en un modelo de campos uniformes, utilizando una teoría de mezclas generalizada para contemplar el aspecto electromecánico. De esta manera, se compararon los resultados obtenidos mediante ambos enfoques.

Utilizando las constantes materiales obtenidas con el análisis macromecánico, se realizaron ejemplos de control activo realimentado de vibraciones. Para lo cual se obtuvieron las ecuaciones de elementos finitos y a partir de ellas, mediante la implementación de un algoritmo, se obtuvieron las ecuaciones en el espacio de estados.

6.2. Conclusiones

En los dispositivos piezoeléctricos utilizados como actuadores, solo aparecerán tensiones mecánicas o deformaciones en el material si el campo eléctrico aplicado es paralelo a la dirección de polarización. Sin embargo, en virtud de la anisotropía del material, los valores de tensiones o deformaciones serán diferentes en cada dirección. En el plano perpendicular al eje de polarización, los valores de tensiones o deformaciones normales son máximos. Esto, comúnmente se conoce como efecto primario. Cuando los actuadores se construyen de manera tal que generen esfuerzos o deformaciones en las direcciones de polarización, se logra aprovechar al máximo el acoplamiento electromecánico.

En los dispositivos que funcionan como sensores, al deformarse, aparecerá un campo eléctrico en la dirección de polarización del material, dicho campo eléctrico será el responsable de inducir cargas eléctricas en los electrodos que luego, con la utilización de un circuito de medición se captará en forma de diferencia de potencial. En estos casos la disposición de los electrodos respecto de la dirección de polarización juega un papel muy importante en los valores de potenciales eléctricos inducidos.

Como se dijo en los párrafos anteriores, para aprovechar al máximo el acoplamiento electromecánico, los dispositivos piezoeléctricos deben ser utilizados para actuar o sensor en la dirección de polarización. En los compuestos piezoeléctricos estudiados, la configuración de electrodos interdigitales cumple dos funciones. Durante el proceso de fabricación permite polarizar el material in-situ, en la dirección que luego, ellos mismos introducirán el campo eléctrico cuando se utilicen como actuadores, o captarán la diferencia de potencial durante el funcionamiento como sensores. De esta manera, se logra que se manifieste el efecto piezoeléctrico primario del dispositivo justamente en la dirección de las fibras. Es por ello que los laminados estudiados, utilizados como actuadores, son capaces de introducir fuerzas en el plano, utilizando el máximo acoplamiento electromecánico. De ésta manera, se le agregan a las conocidas ventajas de los laminados convencionales, la capacidad de introducir fuerzas y sensor deformaciones especialmente en su plano y con una alto grado de anisotropía.

La comparación de los resultados obtenidos a partir del macromodelo con los obtenidos mediante el análisis mesomecánico, refleja que el modelo de mezclas generalizado utilizado permite obtener las propiedades constitutivas equivalentes del laminado para ser usadas en modelos computacionales de estructuras que incluyan dispositivos piezoeléctricos construidos con los laminados piezoeléctricos estudiados.

En la determinación de las constantes piezoeléctricas a partir de modelo de elementos finitos, fue necesario dividir las tensiones mecánicas obtenidas por el valor del campo eléctrico. Dicho valor de campo se obtuvo del mismo modelo en forma promedio. La diferencia entre los valores de las constantes piezoeléctricas, obtenidas a partir del mesomodelo y macromodelo, se deben principalmente al valor promedio utilizado para el campo eléctrico.

Aún teniendo en cuenta las hipótesis simplificativas utilizadas en la construcción del macromodelo, es posible obtener, con razonable aproximación, las propiedades electromecánicas equivalentes del compuesto con bastante rapidez y se puede, incluso, llegar a expresiones analíticas de las mismas que involucran la geometría y propiedades electromecánicas de los materiales constituyentes del compuesto. Este tipo de expresiones resulta de particular utilidad en el diseño de los dispositivos estudiados.

Las constantes piezoeléctricas efectivas dependen fuertemente de la diferencia entre las permitividades dieléctricas de fibra y resina, ya que dicha diferencia produce la disminución del valor de campo eléctrico que alcanza a la fibra. La diferencia de permitividades puede disminuirse “contaminando” la resina con polvo del mismo material con que se elaboran las fibras.

Cuando la diferencia de la permitividad dieléctrica entre la fibra y la resina es grande, dependiendo de la relación de rigidez transversal entre la fibra y la resina, la rigidez mecánica del compuesto en la dirección de la fibra aumenta a valores que pueden superar el valor de rigidez longitudinal de la fibra. Tanto el enfoque mesomecánico como el macromecánicos, reflejan dicho fenómeno.

La distancia entre electrodos y el ancho de los mismos es un factor sumamente importante en el desempeño de los laminados estudiados. Por un lado, para poder trabajar en una zona prácticamente lineal, los valores de campo eléctrico deben ser moderados. Si la separación entre electrodos aumenta, para mantener el campo, se debe incrementar el valor del potencial aplicado. Esto produciría fuertes concentraciones de campo eléctrico en la zona de transición, cerca de los electrodos, introduciendo fenómenos adversos como depolarización del material de las fibras, rotura dieléctrica de la resina y falla del dispositivo, sin mencionar que los cables de alimentación deberán transportar valores mayores de tensión. Por otra parte, el ancho de electrodos fija la zona activa de la fibra. Teniendo en cuenta que el valor del campo eléctrico se limita para evitar que se manifiesten los fenómenos adversos citados anteriormente, dicha zona condiciona el desempeño de los laminados.

En estructuras del tipo de cajones cerrados de paredes delgadas, típicas de uso aeronáutico, la inclusión de laminados piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales en el recubrimiento, en virtud de la anisotropía de los mismos, confiere capacidad de introducir flujo de corte distribuido y controlado mediante los potenciales de alimentación de los electrodos. El funcionamiento como sensores es también posible.

Los diferentes análisis realizados, de las estructuras que se trataron como ejemplos, revelan los efectos que el sistema de control produce en las mismas. Las gráficas del lugar de raíces muestran claramente la variación de la posición de los polos de lazo cerrado con la ganancia, lo que representa la modificación de los valores de amortiguamiento y frecuencias amortiguadas de cada modo. Simultáneamente, muestran la influencia que tiene la ubicación de los actuadores respecto de las formas modales en la trayectoria de los polos de lazo cerrado correspondientes y en los valores de ganancias necesarios para alcanzar determinados niveles de amortiguamiento y valores de frecuencias amortiguadas.

Las gráficas de respuesta en frecuencia, muestra también cómo el sistema de control afecta la respuesta dinámica y los valores de potencial eléctricos necesarios para lograr los objetivos de control. Dicho análisis pone de manifiesto la influencia de la posición de los actuadores sobre los potenciales eléctricos de control necesarios para limitar las amplitudes, especialmente durante condiciones críticas como la resonancia.

Los análisis de las respuestas transitorias de las estructuras muestran también la influencia del sistema de control y ponen de manifiesto la gran diferencia entre las respuestas de lazo abierto y lazo cerrado, y los valores de potenciales eléctricos necesarios en función de la posición de los actuadores.

En las respuestas transitorias de las estructuras analizadas, los valores de campo eléctrico aplicados a los parches por el controlador, no superaron los 1000 V/mm, lo cual asegura que los dispositivos trabajan en rango lineal y en concordancia con la hipótesis realizada. Dichos valores de potenciales eléctricos fueron suficientes para producir niveles de atenuación considerables.

En los análisis de respuesta en frecuencia de las vigas, con los valores de cargas aplicadas, durante la condición de resonancia a la primer frecuencia natural, los valores de potencial eléctrico aplicado a los parches son excesivamente altos. Sin embargo, se observa que la configuración de la viga N°3 es mejor desde este punto de vista, ya que los potenciales eléctricos de control son mucho menores que los de la viga N°1. En el cajón de torsión, los valores de potenciales de control durante la condición de resonancia están dentro de los admisibles y son capaces de producir altos valores de atenuación.

En virtud de la linealidad del problema, se podría hacer una extrapolación de los potenciales de control necesarios para diferentes valores de cargas aplicadas.

Desde el punto de vista de la fatiga, los niveles de atenuación obtenidos en las amplitudes de las oscilaciones en lazo cerrado podrían incrementar la vida útil de la estructura.

6.3. Recomendaciones para trabajos futuros

Todos los análisis de esta tesis se desarrollaron suponiendo un comportamiento lineal de los materiales piezoeléctricos y, además, que las frecuencias son suficientemente bajas como para considerar solo el comportamiento cuasi-electroestático.

Estas hipótesis limitan el rango de validez del modelo. La primera limita la validez del modelo a aquellos casos en que los campos eléctricos y los esfuerzos sean moderados. La segunda hipótesis limita las frecuencias máximas para las cuales los resultados obtenidos son válidos. Sería interesante determinar el rango de frecuencias de validez de esta hipótesis y en caso de ser necesario incluir en el modelo todas las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

Cuando sea necesario, el comportamiento de los laminados piezoeléctricos, más allá de los límites mencionados, debe ser analizado con modelos constitutivos y estrategias de análisis adecuadas.

El análisis con el método de elementos finitos de estructuras aeronáuticas, como alas, palas de helicóptero o superficies de control, construidas con laminados piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales o a las que se adhieran parches elaborados con dichos materiales, podría ser demasiado caro computacionalmente, sobre todo si se piensa en un modelo computacional que incluya el aspecto aerodinámico. En esos casos, para modelar la estructura, sería conveniente contar con elementos bidimensionales, especialmente formulados para soportar los materiales piezoeléctricos polarizados en el plano del elemento y cuyos grados de libertad mecánicos sean capaces de evolucionar en el espacio.

En los ejemplos realizados en esta tesis se consideró en forma muy simplificada las acciones o perturbaciones. En análisis concretos de estructuras aeroespaciales dotadas de laminados piezoeléctricos, sería conveniente resolver el problema acoplado teniendo en cuenta la interacción fluido estructura. De esta manera se podría evaluar el desempeño de los dispositivos y de las estrategias de control utilizadas ante la aparición de perturbaciones reales que tengan en cuenta la variación en la configuración fluidodinámica provocada por el movimiento de la estructura.

El sistema de control utilizado en esta tesis se basó en la teoría de control óptimo cuadrático con realimentación de estado según una ley lineal. Se consideró que el estado completo de la estructura era conocido y estaba listo para su realimentación. Esto, en la mayoría de los casos prácticos no es cierto, y debe recurrirse a técnicas para estimar el estado total en base a un número limitado de variables.

Todos los modelos realizados en esta tesis son modelos numéricos. Para medir el grado de ajuste del macromodelo de los dispositivos, se compararon los resultados con los de otro modelo numérico, el modelo de elementos finitos detallado, que, se estima, representa una mejor aproximación del problema pero no la solución exacta del mismo. Para tener una medida real es necesario comparar ambos modelos con resultados experimentales de los que no se dispone al momento.

Para la validación de los modelos de aplicación, la realización de modelos experimentales de estructuras provistas de los dispositivos piezoeléctricos estudiados, se considera de suma importancia. Dichos ensayos deben incluir modelos bajo cargas estáticas que permitan ajustar los parámetros utilizados en la generación de los modelos numéricos. También se deberían realizar ensayos dinámicos implementando las leyes de control. Incluso la realización de ensayos en túnel de viento de una porción de superficie sustentadora con actuadores piezoeléctricos, podría arrojar resultados experimentales muy útiles en el ajuste del modelo numérico y evaluación del sistema de control ante excitaciones reales.

Referencias

- ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.3.1, V I & II**, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 2002.
- Aldraihem OJ. Wetherhold RC, Singh T.** Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs. Euler Bernoulli theory. *J Intell Mater Syst Struct* 1997; 8:149-157.
- Allik H., Hughes T.J.R** Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 1970; 2: 151-157.
- Allik H, Webman K.M, Hunt J. T.** Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements. *Journal Acoust Soc Am* 1974; 56: 1782-1791.
- Auricchio F., Bisegna P. and Lovadina C.** Finite element approximation of piezoelectric plates. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2001; 50:1469-1499.
- Balachandran B., Sampath A. and Park J.** Active control of interior noise in a three-dimensional enclosure. *Smart Mater. Struct.* 5 (1996) 89–97.
- Bathe Klaus-Jürgen**, *Finite Elements Procedures*. Prentice Hall, Englewood, New Jersey, 1996.
- Beckert W., Kreher W. S.** Modeling piezoelectric modules with interdigitated electrode structures. *Computational Material Science* 26 (2003) 36-45.
- Benjeddou A.**, Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers and Structures* 2000; 76: 347-363.
- Bent A.A.**, *Active Fiber Composites for Structural Actuation*. PhD Thesis. Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- Bent A.A, Hagood N.W.** Piezoelectric Fiber Composites with Interdigitated Electrodes. *Journal of Intelligent Systems and Structures*, November 1997; 8: 903-919.

- Bevan, J., S.** Piezoceramic Actuator Placement for Acoustic Control of Panels. NASA/CR-2001-211265. 2001.
- Bhattacharya P., Suhail H., Sinha P.K.,** Finite element analysis and distributed control of laminated composite shells using LQR/IMSC approach. *Aerospace Science and Technology* 6 (2002) 273–281.
- Bhoir N., Singh S. N.,** Output feedback nonlinear control of an aeroelastic system with unsteady aerodynamics. *Aerospace Science and Technology* 8 (2004) 195–205.
- Bisplinghoff R, Ashley H.** Principles of Aeroelasticity. Dover Publication Inc. New York, 1962
- Buesson W. R.,** in the Physics and Chemistry of Science Publishing, Inc, 1963; 22-29.
- Cady W. G,** Piezoelectricity. Mc Graw Hill. New York, 1946.
- Carpenter M.** Using energy methods to derive beam finite elements incorporating piezoelectric materials. *J Intell Mater Syst Struct* 1997; 8:26-40.
- Cesnik C.E.S, Opoku D.G, Nitzsche F, Cheng T,** Active twist rotor blade modelling using particle-wake aerodynamics and geometrically exact beam structural dynamics. *Journal of Fluids and Structures* 19 (2004) 651–668.
- Chee C., Tong L., Steven G.** A mixed model for adaptive composite plates with piezoelectric for anisotropic actuation. *Computer and Structures* 2000; 77: 253-268.
- Chen P.C., Chopra I.** Induced strain actuation of composite beams and rotor blades with embedded piezoceramic elements. *Smart Mater. Struct.* 5 (1996) 35–48.
- Chin L.C., Varadan V.V., Varadan V.K.** Hybrid finite element formulation for periodic piezoelectric arrays subjected to fluid loading. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 1994; 37:2987-3003.
- Crawley E., de Luis J.** Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, *AIAA J.*, 25, 1373-1385 (1987).
- duPlessis, A.J., Hagood, N.W.** Modeling and experimental testing of twist actuated single cell composite beams for helicopter rotor blade control. AMSL Report 96-1, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- Ehlers, S.M.,** “Active Closed Cell Beam Shape Control”, Proceedings of the 35th AIAA/ASME/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Hilton Head SC, April 1994; 320-332.

Franco Correira, V., M., Aguiar Gomes, M. A., Suleman, A., Mota Soares, C., M., Mota Soares, C., A. Modelling and design of adaptive composite structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000; 185: 325-346.

Fung Y. C. An introduction to the theory of aeroelasticity. New York-John Willey & Sons, Inc. 1955.

García-Fogeda P., López Diez J. Apuntes de Aeroelasticidad. Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos; Madrid, España. 1992.

Ghandi K, Hagood NW. A hybrid finite element model for fase transition in nonlinear electromechanically coupled material. In: Varadan VV, Chandra J, editors. *Smart Structures and Materials*. Washington: SPIE 1997; 3039: 97-112.

Ghandi K. Nonlinear Modeling and Characterization Techniques for Phase Transitions in Electro-Mechanically Coupled Devices. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.

Glynn-Jones P, Beeby S.P, White N.M, Towards a piezoelectric vibration-powered microgenerator, *IEEE Proceedings: Science, Measurement and Technology* 148 (2) 68–72, 2001.

Ha S. K., Keilers C. and Chang F. K, Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators. *AIAA Journal* (1992) 30, 772-780.

Hagood, N.W. and Bent A. A, Development of Piezoelectric Fiber composites for structural actuation. AIAA Paper No. 93-1717, Proceedings of the 34th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, La Jolla, CA, 1993.

Han J. H., Cho K.D., Youn S.H. and Lee I. Vibration and actuation characteristics of composite structures with a bonded piezo-ceramic actuator. *Smart Mater. Struct.* 8 (1999) 136–143.

Jang Bor Z, *Advanced Polymer Composites: Principles and Applications*. ASM International. 1994.

Joshi S. P. Non-linear constitutive relations for piezoceramic materials. *Smart Mater. Struct.* 1 (1992) 8043.

Kim J., Varadan V.V., Ko B., Finite element modeling of active cabin noise control problems. Varadan VV, Chandra J, editors. *Smart Struct Mater*. Washington: SPIE 1997; 3039: 305-314.

Kim J., Varadan V. V., Varadan V. K., Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 817-832 (1997).

Kermani M.R., Moallem M., Patel R.V. Parameter selection and control design for vibration suppression using piezoelectric transducers. *Control Engineering Practice* 12 (2004) 1005–1015.

Kekana Marino, A static shape control model for piezo-elastic composite structures. *Composite Structures*, 2003; 59: 129-135.

Koconis D.B., Kollár L.P., Springer G.S. Shape control of composite plates and shells with embedded actuators and voltages specified. *J. Composite Materials* 28 (5) (1994) 415–457.

Lammering R., Mesecke-Rischmann S., Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. *Smart Materials and Structures*, 2003; 12: 904-913.

Lammering R., The application of a finite shell element for composites containing piezoelectric polymers in vibration control. *Computer & Structures*, 1991; 41:1101-1109.

Lee HJ, Saravanos DA. Generalized finite element formulation for smart multilayered thermal piezoelectric composite plates. *Int J Solids Struct* 1997; 34: 3355-3371.

Lee HJ, Saravanos DA. A mixed multi-field finite element formulation for termopiezoelectric composite shell. *International Journal of Solid and Structures* 2000; 37:4949-4967.

Lee, Taeoh, High Displacement Piezoelectric Trailing - Edge Flap Mechanism for Helicopter Rotors. PhD Thesis. University of Maryland , 1999.

Lesieutre G A, Ottman G K and Hofmann H F. Damping as a result of piezoelectric energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, 269: 991–1001, 2004.

Lim Y.H., Gopinathan S.V., Varadan V.V. and Varadan V.K. Finite element simulation of smart structures using an optimal output feedback controller for vibration and noise control. *Smart Mater. Struct.* 8 (1999) 324–337.

Lin, C.Y., Towards Optimal Strain Actuated Aeroelastic Control. PhD. Thesis Massachusetts Institute of Technology, 1996.

Lin, C.Y., Crawley, E.F. and Heeg, J., Open Loop and Preliminary Closed Loop Results of a Strain Actuated Active Aeroelastic Wing. *Proceedings of the 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* , New Orleans, LA, April 1995, pp. 1904-1914, AIAA Paper 95-1386-CP.

- Loewy Robert G.** Recent developments in smart structures with aeronautical applications. Review article. *Smart Mater. Struct.* 6 (1997) R11–R42.
- Lu F., Lee H. P. and Lim S. P.** Modeling and analysis of micro piezoelectric power generators for micro-electromechanical-systems applications. *Smart Mater. Struct.* 13 (2004) 57–63
- MATLAB 5.2**, The MathWorks, Inc. (1998).
- Mitra M., Gopalakrishnan S. and Bhat M. S.** Vibration control in a composite box beam with piezoelectric actuators. *Smart Mater. Struct.* 13 (2004) 676–690.
- Nam C, Kim Y**, Optimal Design of Composite Lifting Surface for Flutter Suppression with Piezoelectric Actuators. *AIAA Journal*, Vol. 33, N°10 (1995) 1897-1904.
- Ogata Katsuhiko**, Ingeniería de control moderna, 3° Edición, México. Prentice Hall, 1998.
- Raja S., Sinha P.K., Prathap G. and Bhattacharya P.** Influence of one and two dimensional piezoelectric actuation on active vibration control of smart panels. *Aerospace Science and Technology* 6 (2002) 209–216.
- Ray M. C., Mallik N.** Active control of laminated composite beams using a piezoelectric fiber reinforced composite layer. *Smart Mater. Struct.* 13 (2004) 146–152.
- Reddy J. N.**, On Laminates Composites Plates with Integrated Sensors and Actuators. *Engineering Structures*, 1999; 21:568-593.
- Robbins DH, Reddy JN.** Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. *Computer and Structures* 1991; 41:256-279.
- Rodgers J. P, Hagood N. W.** Hover Testing of a 1/6TH Mach-scale CH-47D blade with integral twist actuation. Presented at the 9th International Conference on Adaptive Structures and Technology, Cambridge, Ma, 1998.
- Rogacheva Nellya N.** The Theory of Piezoelectric Shells and Plates. CRC Press, 1994.
- Rohrs C.E, Melsa J.L, Schultz D.G.** Linear control systems. McGraw-Hill, 1993.
- Ryou, J. K., Park, K. Y., Kim, Y. H., Kim, S. J.** Electrode Pattern Design of Piezoelectric Sensors and Actuators by Genetic Algorithm. AIAA 97-1348, Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (Kissimee FL), AIAA, Washington, DC, 1997, pp. 1747-1754.
- Saravanos, D.A., Heyliger, P.R., Hopkins, D.A.**, “Layer-wise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates”. *Int. J. Solids and Structures*, 1997; Vol. 34, No. 3: 359-378.

- Scanlan R. H., Resenbaun R.** Aircraft Vibration and Flutter. Dover Publication Inc. New York, 1968.
- Shen M. H. H.**, Analysis of Beams Containing piezoelectric sensors and Actuators. Smart Materials and Structures, 1994; 3:439-447.
- Shirane G., Jona F., Pepinsky F.**, Some Aspects of Ferroelectricity. Proceedings of the IRE, Dec 1955, pp. 1738-1793.
- Song, O., Librescu, L and Rogers, C.A.**, Application of Adaptive Technology to Static Aeroelastic Control of Wing Structures. AIAA Journal , December 1992; Vol. 30, No. 12: 2882-2889.
- Suleman A. Venkayya V.B.** “A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezo-electric layers”. J Intell Mater Syst Struct 1995; 6:776-782.
- Suleman A., Costa A. P.** Adaptive control of an aeroelastic flight vehicle using piezoelectric actuators. Computers and Structures 82 (2004) 1303–1314.
- Sungsoo N., Librescu L.**, “Oscillation control of cantilevers via smart material technology and optimal feedback control: actuator location and power consumption issues”. Smart Materials and Structures, 1998; 7:833-842.
- Sze K.Y., Pan Y.S.** Hybrid finite element models for piezoelectric materials. Journal of Sound and Vibration 1999; 226(3), 519-547.
- Takawa T., Fukuda T. and Takada T.** Flexural–torsion coupling vibration control of fiber composite cantilevered beam by using piezoceramic actuators. Smart Mater. Struct. 6 (1997) 477–484.
- Thirupathi S.R, Seshu P, and Naganathan N.G.** A finite-element static analysis of smart turbine blades. Smart Mater. Struct. 6 (1997) 607–615.
- Tzou H. S.** Piezoelectric Shells: Distributed Sensing and Control of Continua. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- Tzou H.S., Ye R.** Analysis of piezoelectric systems with laminated piezoelectric triangular shell elements. AIAA Journal 1996; 110-115.
- Tzou H. S. and Tseng C. I.** Distributed Piezoelectric Sensor/Actuator Design for Dynamic Measurement/Control of Distributed Parameter Systems: A Finite Element Approach. (1990) Journal of Sound and vibration 138, 17-34.
- Varadan V.V, Chin L, Varadan V.K.** Finite element modeling of flextensional electroacoustic transducers. Smart Material and Structures 1993; 2:201-207.

Wada, B. K., Fanson, J. L. And Crawley E. F., Adaptive Structures. In adaptive Structures, ed. B. K. Wada. ASME, New Cork, 1989; 1-8.

Wagner K.W., Arch. Electrotech, 1914. Vol. 2: 371-387.

Wilbur M., Mirick P. H., Yeager W. T. Jr., Cesnik C. W. C. E. S. & SangJoon Shin, American Helicopter Society 57th Annual Forum, Washington, DC, May 9-11, 2001.

Wang Q., Quek S.T, Enhancing flutter and buckling capacity of column by piezoelectric layers. International Journal of Solids and Structures 39 (2002) 4167–4180.

Williams C B and Yates R. Analysis of a micro-electric generator for Microsystems. Sensors and Actuators A: Physical 52: 8–11, 1996.

Yan Y. J., Yam L.H. 2003, Mechanical interaction issues in piezoelectric composite structures. Composite Structures, 2003; 59: 61-65.

Chandrashekhara K, Smyser CP, Agarwal S. Dynamic modeling and neural control of composite shells using piezoelectric devices. Journal of Intelligent Material System and Structures 1998; 9:29–43.

Apéndice A1

Métodos variacionales aplicados a la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde.
Aplicación a la dinámica del continuo piezoeléctrico.

A1.1. Introducción

En este apéndice se presenta la deducción matemática rigurosa de la forma débil correspondiente al problema de equilibrio dinámico del continuo piezoeléctrico con condiciones de borde no homogéneas, planteado originalmente en forma fuerte en el punto 3.2.1 del Capítulo 3. Dichas ecuaciones corresponden a un problema con linealidad material y geométrica.

El tratamiento que se presenta en este apéndice es general y puede extenderse para la solución de cualquier problema de campo cuyas ecuaciones diferenciales cumplan con las hipótesis descritas. Los conceptos que se introducen y los resultados obtenidos, permiten aplicar los métodos variacionales a la solución de ecuaciones de operadores de la forma $Au = f$. En particular, permiten obtener la forma variacional (forma débil) correspondiente a problemas cuyas ecuaciones de campo están definidas por un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales (forma débil) con condiciones de borde no homogéneas.

El operador A representa en la primera parte la ecuación de equilibrio de la elasticidad. En la segunda parte se extiende al caso piezoeléctrico añadiendo la ecuación de conservación de la carga eléctrica.

A1.2. Definiciones

Se presentan en este punto algunas definiciones matemáticas necesarias para los desarrollos siguientes

6.1.1. Espacio de Hilbert

Considérese un conjunto M cuyos elementos pueden ser de una naturaleza muy general. El conjunto M podría estar constituido, por ejemplo, por funciones definidas en un cierto dominio G . Sin embargo M podría representar también un conjunto de vectores n -dimensionales, o el conjunto de sucesiones numéricas o de funciones.

Se dice que M es un conjunto lineal, si posee las siguientes propiedades:

- a) Para elementos arbitrarios u, v pertenecientes a M está definida la suma $u + v$, y para cada elemento $u \in M$ y para cada número real a , está definido el producto au . Más aún, $u + v$ y au son también elementos de M .

- b) Para las operaciones de suma y producto, introducidas en la propiedad “a)”, son válidos los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned}
 & \text{a. } u + v = v + u \\
 & \text{b. } u + (v + z) = (u + v) + z \\
 & \text{c. } a(u + v) = au + av \\
 & \text{d. } (a + b)u = au + bu \\
 & \text{e. } a(bu) = (ab)u \\
 & \text{f. } 1 \cdot u = u
 \end{aligned}
 \tag{A1.1}$$

- c) Existe un elemento $O \in M$ tal que $u + O = u \forall u \in M$. El elemento O se denomina elemento nulo del conjunto lineal M .

- d) Para cada elemento $u \in M$, existe otro elemento $v \in M$ tal que $u + v = O$. El elemento v se denomina el inverso de u .

Se dice que el producto interno está definido en el conjunto lineal M si par cada par de elementos u, v pertenecientes a M , existe un número real

$$(u, v) \tag{A1.2}$$

que posee las siguientes propiedades:

- a) $(u, v) = (v, u)$
 - b) $(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v)$
 - c) $(u, u) \geq 0$
 - d) $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ en M
- (A1.3)

$(u, v, u_1$ y v_1 son elementos arbitrarios de M , a_1 y a_2 son números reales arbitrarios).

Sea el producto interno definido en el conjunto lineal M , con las propiedades (A1.3). El número real

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad (A1.4)$$

recibe el nombre de norma del elemento u perteneciente a M . El número real

$$\rho(u, v) = \|u - v\| \quad (A1.5)$$

se denomina distancia entre los elementos $u \wedge v \in M$.

Un conjunto lineal M con la métrica definida con (A1.5), donde la norma está dada por (A1.4), se denomina espacio pre-Hilbert. También llamado espacio con un producto interno o espacio con métrica cuadrática. El espacio así definido se denota S_2 .

Se dice que un secuencia de elementos $u_n \in S_2$ converge en S_2 al elemento $u \in S_2$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0 \quad (A1.6)$$

El elemento u se denomina límite de la sucesión $\{u_n\}$.

El espacio S_2 se llama completo si cada sucesión $\{u_n\}$ en S_2 , converge a algún elemento $u_n \in S_2$.

Un espacio pre-Hilbert S_2 completo se denomina espacio de Hilbert y se denota en la presente tesis con la letra H .

6.1.2. Operador

Sean dos conjuntos M_1 y M_2 . Se dice que A es un operador definido en M_1 que mapea M_1 en M_2 si hay una regla dada mediante la cual, a cada elemento $u \in M_1$ se asigna un único elemento $v \in M_2$. La operación se escribe:

$$v = Au \quad (A1.7)$$

6.1.3. Operador lineal

Se dice que un operador A es lineal si su dominio D_A es un conjunto lineal y si para elementos arbitrarios de u_1, u_2, \dots, u_n pertenecientes a D_A y para números reales arbitrarios a_1, a_2, \dots, a_n , se cumple la relación:

$$A(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) = a_1Au_1 + \dots + a_nAu_n \quad (\text{A1.8})$$

6.1.4. Operador simétrico

Sea D_A un conjunto lineal en cierto espacio de Hilbert H . El operador A , que mapea D_A en H , es simétrico en D_A si es lineal y si para cada par de elementos u y v pertenecientes a D_A se cumple:

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (\text{A1.9})$$

6.1.5. Operador positivo

Un operador A es positivo en su dominio D_A si es simétrico en D_A y si $\forall u \in D_A$, se cumple las siguientes relaciones:

$$(Au, u) \geq 0 \quad (\text{A1.10})$$

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{en } D_A \quad (\text{A1.11})$$

Observación: Es muy importante tener en cuenta que las propiedades de dos operadores definidos por expresiones idénticas pueden ser totalmente diferentes si los dominios son diferentes.

A1.3. Teorema de mínimo del funcional cuadrático

Sea D_A un conjunto lineal en cierto espacio de Hilbert H , sea A un operador positivo en D_A y sea $f \in H$. Además sea $u_0 \in D_A$ una solución de la ecuación $Au = f$.

Entonces el funcional:

$$Fu = (Au, u) - 2(u, f) \quad (\text{A1.12})$$

Adopta su mínimo valor en D_A , precisamente para $u = u_0$, es decir que $Fu \geq Fu_0$ para todo $u \in D_A$.

Por otra parte, si el funcional alcanza su mínimo valor entre todos los elementos $u \in D_A$, para u_0 , entonces u_0 es solución de la ecuación $Au = f$.

Demostración:

1. Sea u_0 una función que satisface la ecuación $Au = f$, es decir $f = Au_0$. Sustituyendo en lugar de f se obtiene:

$$Fu = (Au, u) - 2(Au_0, u)$$

$$Fu = (Au, u) - (Au_0, u) - (Au_0, u)$$

Por la simetría del producto interno:

$$Fu = (Au, u) - (Au_0, u) - (u, Au_0)$$

Por la simetría de A puede escribirse:

$$Fu = (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0)$$

$$Fu = (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) + (Au_0, u_0) - (Au_0, u_0)$$

Agrupando términos:

$$Fu = (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0)$$

El término (Au_0, u_0) no depende de u .

Como el operador A es positivo,

$$(A(u - u_0), u - u_0) \geq 0 \quad \forall u \in D_A$$

con $(A(u - u_0), u - u_0) = 0$ si $u = u_0$

Por lo tanto $Fu \geq Fu_0$ con $Fu = Fu_0$ si y solo si $u = u_0$ en D_A

ó dicho de otra forma Fu es mínimo para $u = u_0$

2. Supóngase que el funcional Fu adopta su mínimo valor en D_A para el elemento u_0 . Esto significa que si se escoge un elemento arbitrario v , perteneciente a D_A y un número real cualquiera t , tal que $u_0 + tv \in D_A$, se cumple:

$$F(u_0 + tv) \geq Fu_0$$

Utilizando nuevamente la simetría del operador A y la del producto interno, se obtiene:

$$\begin{aligned} F(u_0 + tv) &= (A(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(f, u_0 + tv) = \\ &= (Au_0 + tAv, u_0 + tv) - 2(f, u_0) - 2t(f, v) = \\ &= (Au_0, u_0) + t(Au_0, v) + t(Av, u_0) + t^2(Av, v) - 2(f, u_0) - 2t(f, v) \end{aligned}$$

en virtud de la simetría del operador A :

$$(Au_0, v) = (Av, u_0)$$

Por lo tanto:

$$F(u_0 + tv) = (Au_0, u_0) + 2t(Au_0, v) + t^2(Av, v) - 2(f, u_0) - 2t(f, v)$$

Como $u_0 \in D_A$ y $f \in H$ son elementos fijos, para una $v \in D_A$ fija, la función $F(u_0 + tv)$ es una función cuadrática en la variable t . Como la función tiene un mínimo para $t = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt}(F(u_0 + tv)) \right|_{t=0} = 0$$

$$2(Au_0, v) - 2(f, v) = 0$$

De donde se desprende que:

$$(Au_0 - f, v) = 0$$

Como la expresión anterior se debe cumplir para cualquier v arbitrario, se concluye que $Au_0 = f$, por lo tanto u_0 es solución de la ecuación $Au = f$.

De esta forma queda demostrado el teorema.

A1.4. Condiciones de borde *no homogéneas*

El Teorema de Mínimo del funcional cuadrático fue demostrado suponiendo que el dominio del operador A es un conjunto lineal.

Si se trata de un problema con condiciones de borde homogéneas, el dominio del operador A que define la ecuación diferencial $Au = f$ es un conjunto lineal, ya que dos funciones arbitrarias de dicho conjunto, llámense u_1 y u_2 , toman el valor cero en la frontera S y por lo tanto allí se cumple que $u_1 + u_2 = 0$, condición necesaria para ser conjunto lineal. Bajo dicha condición, la solución de la ecuación diferencial es aquella que minimiza el funcional de la ecuación A1.11.

Si se tiene, en cambio, un problema definido por la ecuación diferencial $Au = f$, con condiciones de borde no homogéneas $u = u^*$ en S^u y $\sigma_{ij}v_j = T_i$ en S^σ , el dominio del operador A deja de ser un conjunto lineal. Para aplicar en estos casos el teorema de Mínimo del funcional cuadrático se plantea un cambio de variable, con el objetivo de convertir el problema con condiciones de borde no homogéneas en uno de condiciones de borde homogéneas.

Para ello se plantea:

$$u = z + w \tag{A1.13}$$

De la expresión A1.12:

$$z = u - w \tag{A1.14}$$

donde w es una función que cumple con las condiciones de borde no homogéneas del problema y z es una función que cumple con las condiciones de borde homogéneas, esto es:

$$z = 0 \quad \text{en la frontera } S^u \tag{A1.15}$$

$$\sigma_{ij}^z v_j = 0 \quad \text{en la frontera } S^\sigma \tag{A1.16}$$

Se tiene entonces:

$$A(z + w) = f \quad (\text{A1.17})$$

$$Az = f - Aw \quad (\text{A1.18})$$

El funcional en este caso sería:

$$Fz = (Az, z) - 2(f - Aw, z) \quad (\text{A1.19})$$

A1.5. Aplicación a un problema mecánico estático

6.1.6. Condiciones de borde homogéneas

En este problema las ecuaciones diferenciales de campo son las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + B_i = 0 \quad (\text{A1.20})$$

(Donde σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy, B_i son las fuerzas de cuerpo y x_i las coordenadas espaciales).

Con condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{en } S^u \\ \text{y} & \\ \sigma_{ij} \nu_j &= 0 \quad \text{en } S^\sigma \end{aligned} \quad (\text{A1.20})$$

El funcional cuadrático para este caso se expresa de la siguiente manera:

$$Fu = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i dV - 2 \int_V (-B_i) u_i dV \quad (\text{A1.21})$$

Integrando por partes el primer término y aplicando el teorema de Green:

$$Fu = \int_S \sigma_{ij} \nu_j u_i dS - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV + 2 \int_V B_i u_i dV \quad (\text{A1.22})$$

$$Fu = \int_S \sigma_{ij} \nu_j u_i dS - \int_V \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dV + 2 \int_V B_i u_i dV \quad (\text{A1.23})$$

Donde ε_{ij} es el tensor de deformaciones, ω_{ij} es el tensor de rotación, ν_j es el vector normal a la superficie en cada punto de la frontera del continuo y u_i es el vector de desplazamiento mecánico.

Como el tensor ω_{ij} es antisimétrico y el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico es nulo, a partir de la expresión (A1.23), se obtiene:

$$Fu = \int_S \sigma_{ij} \nu_j u_i dS - \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV + 2 \int_V B_i u_i dV \quad (A1.24)$$

Introduciendo la fórmula de Cauchy:

$$Fu = \int_S T_i u_i dS - \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV + 2 \int_V B_i u_i dV \quad (A1.25)$$

$S = S^u \cup S^\sigma$, por lo tanto $\int_S T_i u_i dS = \int_{S^u} T_i u_i dS + \int_{S^\sigma} T_i u_i dS$. Para condiciones de borde homogéneas $\int_S T_i u_i dS = 0$ porque $u = 0$ en S^u y $T_i = 0$ en S^σ .

Por lo tanto el funcional se expresa de la siguiente manera:

$$Fu = - \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV + 2 \int_V B_i u_i dV \quad (A1.26)$$

Este funcional es dos veces la energía potencial total para un problema sin fuerzas superficiales.

6.1.7. Condiciones de borde no homogéneas

Supóngase el mismo problema del apartado A.1.5.1 pero con condiciones de borde no homogéneas, esto es:

$$\begin{aligned} u &= u^* \quad \text{en } S^u \\ \text{y} \\ \sigma_{ij} \nu_j &= T_i \quad \text{en } S^\sigma \end{aligned} \quad (A1.27)$$

Se expresa $u = z + w$, donde w es una función que verifica las condiciones de borde. es decir:

$$\begin{aligned} w &= u^* \quad \text{en } S^u \\ \text{y} \\ \sigma_{ij}^w \nu_j &= T_i \quad \text{en } S^\sigma \end{aligned} \quad (A1.28)$$

donde σ_{ij}^w son las tensiones correspondientes al campo de desplazamientos w .

De esta manera se obtiene la nueva variable:

$$z = u - w \quad (A1.29)$$

y las condiciones de borde homogéneas:

$$\begin{aligned} z &= 0 \quad \text{en } S^u \\ \text{y} \\ \sigma_{ij}^z \nu_j &= 0 \quad \text{en } S^\sigma \end{aligned} \tag{A1.30}$$

Donde σ_{ij}^z son las tensiones correspondientes al campo de desplazamientos z . Como se trata de un sistema lineal, se cumple que $\sigma_{ij}^z = \sigma_{ij}^u - \sigma_{ij}^w$

La ecuación (A1.20) sujeta a las condiciones de borde no homogéneas (A1.27) se puede transformar entonces en una ecuación con condiciones de borde homogéneas en la variable z .

El funcional cuadrático toma la forma:

$$Fz = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^z}{\partial x_j} z_i dV + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^w}{\partial x_j} z_i dV \tag{A1.31}$$

Integrando por partes y aplicando el teorema de Green resulta:

$$Fz = \int_S \sigma_{ij}^z z_i \nu_j dS - \int_V \sigma_{ij}^z \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \left\{ \int_S \sigma_{ij}^w z_i \nu_j dS - \int_V \sigma_{ij}^w \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV \right\} \tag{A1.32}$$

Por ser

$$\int_S \sigma_{ij}^z z_i \nu_j dS = \int_{S^u} \sigma_{ij}^z z_i \nu_j dS + \int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^z z_i \nu_j dS \tag{A1.33}$$

en virtud de (A1.30):

$$\int_S \sigma_{ij}^z z_i \nu_j dS = 0 \tag{A1.34}$$

Además:

$$\int_S \sigma_{ij}^w z_i \nu_j dS = \int_{S^u} \sigma_{ij}^w z_i \nu_j dS + \int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w z_i \nu_j dS \tag{A1.35}$$

por ser $z = 0$ en S^u ,

$$\int_{S^u} \sigma_{ij}^w z_i \nu_j dS = 0 \tag{A1.36}$$

Por lo tanto:

$$Fz = - \int_V \sigma_{ij}^z \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w z_i \nu_j dS - 2 \int_V \sigma_{ij}^w \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV \tag{A1.37}$$

Agrupando:

$$Fz = -\int_V (\sigma_{ij}^z + 2\sigma_{ij}^w) \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV + 2\int_V B_i z_i dV + 2\int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w z_i \nu_j dS \quad (A1.38)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = (\epsilon_{ij}^z + w_{ij})^z$ y por ser w_{ij} un tensor antisimétrico:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij}^z \quad (A1.39)$$

reemplazando (A1.39) en (A1.38):

$$\begin{aligned} Fz = & -\int_V (\sigma_{ij}^z + 2\sigma_{ij}^w) \epsilon_{ij}^z dV + 2\int_V B_i u_i dV - 2\int_V B_i w_i dV + \\ & + 2\int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w u_i \nu_j dS - 2\int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w w_i \nu_j dS \end{aligned} \quad (A1.40)$$

Si el problema es lineal, se cumple el principio de superposición, por lo tanto:

$$(\sigma_{ij}^z + 2\sigma_{ij}^w) = \sigma_{ij}^u - \sigma_{ij}^w + 2\sigma_{ij}^w = \sigma_{ij}^u + \sigma_{ij}^w \quad (A1.41)$$

Además:

$$\epsilon_{ij}^z = \epsilon_{ij}^u - \epsilon_{ij}^w \quad (A1.42)$$

con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij}^z + 2\sigma_{ij}^w) \epsilon_{ij}^z dV &= \int_V (\sigma_{ij}^u + \sigma_{ij}^w) (\epsilon_{ij}^u - \epsilon_{ij}^w) dV = \\ &= \int_V (\sigma_{ij}^u \epsilon_{ij}^u - \sigma_{ij}^u \epsilon_{ij}^w + \sigma_{ij}^w \epsilon_{ij}^u - \sigma_{ij}^w \epsilon_{ij}^w) dV \end{aligned} \quad (A1.43)$$

Como el problema es lineal:

$$\int_V (-\sigma_{ij}^u \epsilon_{ij}^w + \sigma_{ij}^w \epsilon_{ij}^u) dV = 0 \quad (A1.44)$$

por lo tanto el funcional queda:

$$\begin{aligned} Fz = & -\int_V \sigma_{ij}^u \epsilon_{ij}^u dV + 2\int_V B_i u_i dV + 2\int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w u_i \nu_j dS + \\ & + \int_V \sigma_{ij}^w \epsilon_{ij}^w dV - 2\int_V B_i w_i dV - 2\int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w w_i \nu_j dS \end{aligned} \quad (A1.45)$$

El funcional de la expresión (A1.45) se puede expresar en forma compacta como $Fz = Fu + Fw$, donde:

$$Fw = \int_V \sigma_{ij}^w \epsilon_{ij}^w dV - 2 \int_V B_i w_i dV - 2 \int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^w w_i \nu_j dS \quad (A1.46)$$

Fw no depende de u , por lo tanto minimizar Fz respecto de z , es equivalente a minimizar Fu respecto de u . Es decir, el problema se reduce ahora a encontrar un campo de desplazamientos u tal que cumpla con las condiciones de borde y minimice el funcional:

$$Fu = - \int_V \sigma_{ij}^u \epsilon_{ij}^u dV + 2 \int_V B_i u_i dV + 2 \int_{S^\sigma} T_i u_i dS \quad (A1.47)$$

Este funcional representa dos veces la energía potencial total de un sistema con fuerzas de volumen y de superficie.

A1.6. Aplicación a un problema piezoeléctrico estático

6.1.8. Condiciones de borde homogéneas

En este caso las ecuaciones diferenciales del problema son:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + B_i = 0 \quad (A1.48)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} - q = 0 \quad (A1.49)$$

Donde D_i representa el vector desplazamiento eléctrico y q es la densidad volumétrica de carga eléctrica.

Sujeto a las siguientes condiciones de borde homogéneas:

$$u = 0 \quad \text{en } S^u \quad (A1.50)$$

$$\sigma_{ij} \nu_j = T_i = 0 \quad \text{en } S^\sigma \quad (A1.51)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{en } S^\varphi \quad (A1.52)$$

$$D_i \nu_i = -Q = 0 \quad \text{en } S^q \quad (A1.53)$$

Las ecuaciones (A1.48) y (A1.49) pueden expresarse:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{ij} \\ D_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -B_i \\ q \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.54})$$

Y así, considerar una nueva ecuación de operador:

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f} \quad (\text{A1.55})$$

donde:

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.56})$$

$$\tilde{f} = \begin{Bmatrix} -B_i \\ q \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.57})$$

El funcional cuadrático asociado será:

$$F\tilde{u} = \int_V \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{ij} \\ D_i \end{Bmatrix} \right]^T \begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi \end{Bmatrix} dV - 2 \int_V \begin{Bmatrix} -B_i \\ q \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi \end{Bmatrix} dV \quad (\text{A1.58})$$

Desarrollando:

$$F\tilde{u} = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \varphi dV - 2 \int_V (-B_i) u_i + q \varphi dV \quad (\text{A1.59})$$

Integrando por partes el primer y el segundo término y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} F\tilde{u} &= \int_S \sigma_{ij} \nu_j u_i dS - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV + \int_S D_i \nu_i \varphi dS - \\ &\quad - \int_V D_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dV + 2 \int_V B_i u_i dV - \int_V q \varphi dV \end{aligned} \quad (\text{A1.60})$$

Por tratarse de condiciones de borde homogéneas, las integrales de superficie se anulan y resulta:

$$F\tilde{u} = - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV - \int_V D_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dV + 2 \int_V B_i u_i dV - \int_V q \varphi dV \quad (\text{A1.61})$$

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico $E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, que $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$, donde w_{ij} es el tensor de rotación, y que $\sigma_{ij}w_{ij} = 0$, la expresión (A1.61) puede escribirse de la siguiente manera:

$$F\tilde{u} = -\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV + \int_V D_i E_i dV + 2\int_V B_i u_i dV - \int_V q\varphi dV \quad (\text{A1.62})$$

6.1.9. Condiciones de borde no homogéneas

Supóngase el mismo problema del apartado A.1.6.1 pero con condiciones de borde no homogéneas, esto es:

$$u_i = u_i^* \quad \text{en } S^u \quad (\text{A1.63})$$

$$\sigma_{ij}v_j = T_i \quad \text{en } S^\sigma \quad (\text{A1.64})$$

$$\varphi = \varphi^* \quad \text{en } S^\varphi \quad (\text{A1.65})$$

$$D_i v_i = -Q \quad \text{en } S^q \quad (\text{A1.66})$$

Donde Q es la densidad superficial de carga eléctrica.

Si el vector:

$$\tilde{w} = \left\{ \begin{array}{l} w_i \\ \phi \end{array} \right\} \quad (\text{A1.67})$$

cumple con las condiciones de borde prescriptas en la frontera, análogamente al caso mecánico con condiciones de borde no homogéneas, se hace un cambio de variables para obtener una ecuación diferencial en \tilde{z} con condiciones de borde homogéneas. Haciendo el cambio de variables se obtiene:

$$\tilde{z} = \tilde{u} - \tilde{w} \Rightarrow \tilde{u} = \tilde{z} + \tilde{w} \quad (\text{A1.68})$$

Donde:

$$\tilde{z} = \left\{ \begin{array}{l} z_i \\ \psi \end{array} \right\} \quad (\text{A1.69})$$

$$\tilde{u} = \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ \varphi \end{array} \right\} \quad (\text{A1.70})$$

tal que:

$$w_i = u_i^* \quad \text{en } S^u \quad (\text{A1.71})$$

y

$$\phi = \phi^* \text{ en } S^\phi \quad (\text{A1.72})$$

Por lo tanto:

$$z_i = 0 \text{ en } S^u \quad (\text{A1.73})$$

y

$$\psi = 0 \text{ en } S^\phi \quad (\text{A1.74})$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$\tilde{A}(\tilde{z} + \tilde{w}) = \tilde{f} \quad (\text{A1.75})$$

$$\tilde{A}\tilde{z} + A\tilde{w} = \tilde{f} \quad (\text{A1.76})$$

se obtiene una ecuación homogénea en la variable \tilde{z} :

$$\tilde{A}\tilde{z} = \tilde{f} - A\tilde{w} \quad (\text{A1.77})$$

El funcional cuadrático asociado es:

$$F\tilde{z} = \int_V \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_i} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \{\sigma_{ij}\}^{(z)} \\ \{D_i\} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \{z_i\} \\ \{\psi\} \end{array} \right] dV - \\ - 2 \int_V \left[\begin{array}{c} \{-B_i\} \\ q \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_i} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \{\sigma_{ij}\}^{(\tilde{w})} \\ \{D_i\} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \{z_i\} \\ \{\psi\} \end{array} \right] dV \quad (\text{A1.78})$$

Desarrollando:

$$F\tilde{z} = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^{(z)}}{\partial x_j} z_i + \frac{\partial D_i^{(z)}}{\partial x_i} \psi dV - 2 \int_V \left(-B_i - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(\tilde{w})}}{\partial x_j} \right) z_i dV - 2 \int_V \left(q - \frac{\partial D_i^{(\tilde{w})}}{\partial x_i} \right) \psi dV \quad (\text{A1.79})$$

Integrando por partes y aplicando el teorema de la divergencia:

$$F\tilde{z} = \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \nu_j z_i dS - \int_V \sigma_{ij}^{(z)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV + \int_S D_i^{(z)} \nu_j \psi dS - \int_V D_i^{(z)} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV + \\ + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j z_i dS - 2 \int_V \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV - 2 \int_V q \psi dV + \\ + 2 \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_j \psi dS - 2 \int_V D_i^{(\tilde{w})} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dV \quad (\text{A1.80})$$

Por ser el problema lineal, se cumple que $\sigma_{ij}^{(z)} = \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} - \sigma_{ij}^{(\tilde{w})}$.

$$\begin{aligned}
 F\tilde{z} = & \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \nu_j z_i dS - \int_V (\sigma_{ij}^{(\tilde{u})} - \sigma_{ij}^{(\tilde{w})}) \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV + \int_S D_i^{(z)} \nu_j \psi dS - \\
 & - \int_V (D_i^{(\tilde{u})} - D_i^{(\tilde{w})}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j z_i dS - \\
 & - 2 \int_V \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV - 2 \int_V q \psi dV + 2 \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_j \psi dS - 2 \int_V D_i^{(\tilde{w})} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dV
 \end{aligned} \tag{A1.81}$$

Por las condiciones de borde:

$$\begin{aligned}
 \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \nu_j z_i dS &= 0 \\
 \int_S D_i^{(z)} \nu_j \psi dS &= 0
 \end{aligned} \tag{A1.82}$$

Por lo tanto, la expresión (A1.81) queda:

$$\begin{aligned}
 F\tilde{z} = & - \int_V (\sigma_{ij}^{(\tilde{u})} - \sigma_{ij}^{(\tilde{w})}) \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV - \int_V (D_i^{(\tilde{u})} - D_i^{(\tilde{w})}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV + \\
 & + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j z_i dS - 2 \int_V \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV - 2 \int_V q \psi dV + \\
 & + 2 \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_j \psi dS - 2 \int_V D_i^{(\tilde{w})} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dV
 \end{aligned} \tag{A1.83}$$

$$\begin{aligned}
 F\tilde{u} = & - \int_V (\sigma_{ij}^{(\tilde{u})} + \sigma_{ij}^{(\tilde{w})}) \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV - \int_V (D_i^{(\tilde{u})} + D_i^{(\tilde{w})}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV + \\
 & + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j z_i dS - 2 \int_V q \psi dV + \\
 & + 2 \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_j \psi dS
 \end{aligned} \tag{A1.84}$$

Por la antisimetría del tensor de rotaciones:

$$\begin{aligned}
 F\tilde{u} = & - \int_V (\sigma_{ij}^{(\tilde{u})} + \sigma_{ij}^{(\tilde{w})}) (\epsilon_{ij}^{(\tilde{u})} - \epsilon_{ij}^{(\tilde{w})}) dV - \\
 & - \int_V (D_i^{(\tilde{u})} + D_i^{(\tilde{w})}) (-E_i^{(\tilde{u})} + E_i^{(\tilde{w})}) dV + \\
 & + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j z_i dS - 2 \int_V q \psi dV + \\
 & + 2 \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_j \psi dS
 \end{aligned} \tag{A1.85}$$

$$\begin{aligned}
 F\tilde{u} = & - \int_V (\sigma_{ij}^{(\tilde{u})} \epsilon_{ij}^{(\tilde{u})} - \sigma_{ij}^{(\tilde{u})} \epsilon_{ij}^{(\tilde{w})} + \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \epsilon_{ij}^{(\tilde{u})} - \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \epsilon_{ij}^{(\tilde{w})}) dV - \\
 & - \int_V (-D_i^{(\tilde{u})} E_i^{(\tilde{u})} + D_i^{(\tilde{u})} E_i^{(\tilde{w})} - D_i^{(\tilde{w})} E_i^{(\tilde{u})} + D_i^{(\tilde{w})} E_i^{(\tilde{w})}) dV + \\
 & + 2 \int_V B_i z_i dV + 2 \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j z_i dS - 2 \int_V q \psi dV + 2 \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_j \psi dS
 \end{aligned} \tag{A1.86}$$

Si las ecuaciones constitutivas son lineales, se cumple que:

$$-\int_V (-\sigma_{ij}^{(\bar{u})} \varepsilon_{ij}^{(\bar{w})} + \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \varepsilon_{ij}^{(\bar{u})}) dV - \int_V (+D_i^{(\bar{u})} E_i^{(\bar{w})} - D_i^{(\bar{w})} E_i^{(\bar{u})}) dV = 0 \quad (A1.87)$$

Por lo tanto la expresión (A1.86) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F\tilde{Z} = & -\int_V (\sigma_{ij}^{(\bar{u})} \varepsilon_{ij}^{(\bar{u})} - \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \varepsilon_{ij}^{(\bar{w})}) dV - \\ & -\int_V (-D_i^{(\bar{u})} E_i^{(\bar{u})} + D_i^{(\bar{w})} E_i^{(\bar{w})}) dV + \\ & + 2\int_V B_i (u_i - w_i) dV + 2\int_S \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \nu_j z_i dS - \\ & - 2\int_V q(\varphi - \phi) dV + 2\int_S D_i^{(\bar{w})} \nu_j (\varphi - \phi) dS \end{aligned} \quad (A1.88)$$

$$\begin{aligned} F\tilde{u} = & -\int_V \sigma_{ij}^{(\bar{u})} \varepsilon_{ij}^{(\bar{u})} dV + \int_V \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \varepsilon_{ij}^{(\bar{w})} dV + \int_V D_i^{(\bar{u})} E_i^{(\bar{u})} dV - \\ & -\int_V D_i^{(\bar{w})} E_i^{(\bar{w})} dV + 2\int_V B_i u_i dV - 2\int_V B_i w_i dV + 2\int_S T_i u_i dS - \\ & - 2\int_S T_i w_i dS - 2\int_V q \varphi dV + 2\int_V q \phi dV + \\ & + 2\int_S (-Q) \varphi dS - 2\int_S (-Q) \phi dS \end{aligned} \quad (A1.89)$$

Nuevamente se obtiene una expresión que es suma de dos funcionales, uno depende exclusivamente de $\begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi \end{Bmatrix}$, y el otro de $\begin{Bmatrix} w_i \\ \phi \end{Bmatrix}$, por lo tanto, hacer estacionario el funcional $F\tilde{u}$ es equivalente a hacer estacionario el siguiente funcional:

$$\begin{aligned} F\tilde{u} = & -\int_V \sigma_{ij}^{(u_i, \varphi)} \varepsilon_{ij}^{(u_i, \varphi)} dV + \int_V D_i^{(u_i, \varphi)} E_i^{(u_i, \varphi)} dV + 2\int_V B_i u_i dV + 2\int_S T_i u_i dS - 2\int_V q \varphi dV + \\ & + 2\int_S (-Q) \varphi dS \end{aligned} \quad (A1.90)$$

La solución buscada es $\begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi \end{Bmatrix}$, tales que cumplan con las condiciones de borde no homogéneas especificadas.

A1.7. Aplicación a un problema mecánico dinámico

El problema dinámico se considera como una generalización del estático, y se extiende el dominio de análisis para incluir la variable tiempo.

El problema está definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + B_i = 0 \quad (\text{A1.91})$$

Con las condiciones de borde:

$$\begin{cases} u = u^*(t) & \text{en } S^u \quad \forall t \in [t_1, t_2] \\ \sigma_{ij} \nu_j = T^{\nu*}(t) & \text{en } S^\sigma \quad \forall t \in [t_1, t_2] \end{cases} \quad (\text{A1.92})$$

Y las soluciones en los extremos del intervalo de tiempo analizado, t_1 y t_2 :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t_1) = u^{*t_1}(x, y, z) & \forall (x, y, z) \in (V \cup S) \\ u(x, y, z, t_2) = u^{*t_2}(x, y, z) & \forall (x, y, z) \in (V \cup S) \end{cases} \quad (\text{A1.93})$$

que se suponen conocidas.

Las ecuaciones (A1.92) y (A1.93) se consideran como las condiciones de borde del problema definido en el espacio (x, y, z, t) .

Se escribe $u = z + w$

Donde w cumple con las condiciones de borde (A1.92) y (A1.93) y z es solución de la ecuación (A1.90) pero con condiciones de borde homogéneas.

Se supone válido el principio de superposición, por lo tanto $\sigma_{ij}^{(u)} = \sigma_{ij}^{(z)} + \sigma_{ij}^{(w)}$. La expresión (A1.91) se escribe:

$$\frac{\partial (\sigma_{ij}^{(z)} + \sigma_{ij}^{(w)})}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 (z_i + w_i)}{\partial t^2} + B_i = 0 \quad (\text{A1.94})$$

de donde:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(z)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(w)}}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + B_i = 0 \quad (\text{A1.95})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(z)}}{\partial x_i} + -\rho \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} = -B_i - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(w)}}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \quad (\text{A1.96})$$

La ecuación (A1.96) tiene condiciones de borde homogéneas, por lo tanto el funcional cuadrático asociado será:

$$Fz = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^{(z)}}{\partial x_i} z_i dV dt - \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} z_i dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(-B_i - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(w)}}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) z_i dV dt \quad (\text{A1.97})$$

Integrando por partes, aplicando el teorema de Green e intercambiando los símbolos de integración en los términos que contienen las derivadas segundas respecto del tiempo, se obtiene:

$$Fz = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(z)} v_i z_j dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt - 2 \int_V \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} dt dV + \quad (A1.98)$$

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i z_i dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} v_i z_j dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt - 2 \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} dt dV$$

$$Fz = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(z)} v_i z_j dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt - \int_V \rho \frac{\partial z_i}{\partial t} z_i \Big|_{t_1}^{t_2} dV + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial z_i}{\partial t} \frac{\partial z_i}{\partial t} dV dt + \quad (A1.99)$$

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i z_i dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} v_i z_j dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt - 2 \int_V \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} z_i \Big|_{t_1}^{t_2} dV +$$

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial z_i}{\partial t} dV dt$$

Por ser las condiciones de borde homogéneas para la variable z, resulta:

$$Fz = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i z_i dV dt \quad (A1.100)$$

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} v_i z_j dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) dV dt$$

$$Fz = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial w_i}{\partial t} dV dt + \quad (A1.101)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i u_i dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i w_i dV dt +$$

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} v_i z_j dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(w)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV dt -$$

$$- 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 dV dt$$

$$Fz = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (\sigma_{ij}^{(z)} + 2\sigma_{ij}^{(w)}) \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i u_i dV dt - \quad (A1.102)$$

$$- 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i w_i dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{S^u + S^\sigma} \sigma_{ij}^{(w)} v_i z_j dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 dV dt$$

$$\begin{aligned}
 Fz = & -\int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(u)} \varepsilon_{ij}^{(u)} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i u_i dV dt - \\
 & - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i w_i dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^{(w)} v_i u_i dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{S^\sigma} \sigma_{ij}^{(w)} v_i w_i dV dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 dV dt
 \end{aligned} \tag{A1.103}$$

Este funcional puede expresarse como la suma de un funcional de u_i y otro funcional de w_i , $Fz = Fu + Fw$. Minimizarlo respecto de z_i es equivalente a hacerlo respecto de u_i , ya que w_i es una función determinada. Además $\sigma_{ij}^{(w)} = \sigma_{ij}^{(u)}$, por lo tanto el funcional Fu es:

$$Fu = -\int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(u)} \varepsilon_{ij}^{(u)} dV + \int_V \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV + 2 \int_V B_i u_i dV + 2 \int_{S^\sigma} T_i u_i dV dt \tag{A1.104}$$

El integrando de la expresión (A1.104), es el doble del Lagrangeano $L = T - U$, donde T es la energía cinética y U es la energía potencial total.

A1.8. Aplicación a un problema piezoeléctrico dinámico

El problema está definido por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + B_i = 0 \tag{A1.105}$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} - q = 0 \tag{A1.106}$$

Con las siguientes condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u^*(t) \text{ en } S^u \\ \sigma_{ij} v_j = T^{v*}(t) \text{ en } S^\sigma \\ \varphi = \varphi^*(t) \text{ en } S^\varphi \\ D_i v_i = -Q(t) \text{ en } S^q \end{array} \right\} \forall t \in [t_1, t_2] \tag{A1.107}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t_1) = u^{*t_1} \text{ en } (V \cup S) \\ \varphi(t_1) = \varphi^{*t_1} \text{ en } (V \cup S) \\ u(t_2) = u^{*t_2} \text{ en } (V \cup S) \\ \varphi(t_2) = \varphi^{*t_2} \text{ en } (V \cup S) \end{array} \right\} \tag{A1.108}$$

Las porciones de frontera en las que se prescriben desplazamientos, fuerzas, potenciales eléctricos y cargas eléctricas deben cumplir con las siguientes condiciones: $S^u \cup S^\sigma = S$ y $S^\varphi \cup S^q = S$.

Se escribe:

$$\tilde{w} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.109})$$

tal que cumpla con las condiciones de borde prescriptas en la frontera.

Análogamente al caso mecánico con condiciones de borde no homogéneas, se hace un cambio de variables para obtener una ecuación diferencial en \tilde{z} con condiciones de borde homogéneas.

$$\tilde{z} = \begin{Bmatrix} z_i \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.110})$$

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_i \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.111})$$

Se propone:

$$\tilde{z} = \tilde{u} - \tilde{w} \Rightarrow \tilde{u} = \tilde{z} + \tilde{w} \quad (\text{A1.112})$$

tal que:

$$w_i = u_i^* \text{ en } S^u \quad (\text{A1.113})$$

$$\phi = \phi^* \text{ en } S^\varphi \quad (\text{A1.114})$$

Por lo tanto:

$$\tilde{z} = 0 \text{ en } S \quad (\text{A1.115})$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$\tilde{A}(\tilde{z} + \tilde{w}) = \tilde{f} \quad (\text{A1.116})$$

$$\tilde{A}\tilde{z} + A\tilde{w} = \tilde{f} \quad (\text{A1.117})$$

Obteniéndose así una ecuación homogénea en la variable \tilde{z} :

$$\tilde{A}\tilde{z} = \tilde{f} - A\tilde{w} \quad (\text{A1.118})$$

El funcional cuadrático asociado es:

$$F\bar{z} = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_j} & -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_i} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{ij}^{(z)} \\ z_i \\ D_i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} z_i \\ \psi \end{array} \right\}^T dV dt -$$

(A1.119)

$$- 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left\{ \begin{array}{c} -B_i \\ q \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_j} & -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_i} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \\ U_i \\ D_i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} z_i \\ \psi \end{array} \right\}^T dV dt$$

$$F\bar{z} = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^{(z)}}{\partial x_j} z_i - \rho \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} z_i + \frac{\partial D_i^{(z)}}{\partial x_i} \psi dV dt -$$

(A1.120)

$$- 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(-B_i - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(\bar{w})}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) z_i dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(q - \frac{\partial D_i^{(\bar{w})}}{\partial x_i} \right) \psi dV dt$$

Integrando por partes y aplicando el teorema de la divergencia:

$$F\bar{z} = \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(z)} \nu_j z_i dS dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(z)} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt + \int_V \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^2 dt dV +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_S D_i^{(z)} \nu_j \psi dS - \int_{t_1}^{t_2} \int_V D_i^{(z)} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV +$$

(A1.121)

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i z_i dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \nu_j z_i dS dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dV dt - 2 \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} z_i dt dV -$$

$$- 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V q \psi dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S D_i^{(\bar{w})} \nu_j \psi dS dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V D_i^{(\bar{w})} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV dt$$

$$F\bar{z} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V (\sigma_{ij}^{(\bar{u})} - \sigma_{ij}^{(\bar{w})}) (\epsilon_{ij}^{(\bar{u})} - \epsilon_{ij}^{(\bar{w})}) dV dt +$$

$$+ \int_V \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial w_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right) dt dV -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_V (D_i^{(\bar{u})} - D_i^{(\bar{w})}) (-E_i^{(\bar{u})} + E_i^{(\bar{w})}) dV + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i (u_i - w_i) dV dt +$$

(A1.122)

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(\bar{w})} \nu_j (u_i - w_i) dS dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(\bar{w})} (\epsilon_{ij}^{(\bar{u})} - \epsilon_{ij}^{(\bar{w})}) dV dt +$$

$$+ 2 \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right) dt dV - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V q (\varphi - \phi) dV dt +$$

$$+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S D_i^{(\bar{w})} \nu_j (\varphi - \phi) dS dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V D_i^{(\bar{w})} (-E_i^{(\bar{u})} + E_i^{(\bar{w})}) dV dt$$

$$\begin{aligned}
 F\tilde{z} = & -\int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(\tilde{u})} \varepsilon_{ij}^{(\tilde{u})} dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i u_i dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j u_i dS dt + \\
 & + \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dt dV + \int_{t_1}^{t_2} \int_V D_i^{(\tilde{u})} E_i^{(\tilde{u})} dV - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V q \phi dV dt + \\
 & + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_i \phi dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \varepsilon_{ij}^{(\tilde{w})} dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i w_i dV dt - \\
 & - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^{(\tilde{w})} \nu_j w_i dS dt - \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 dt dV - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_V D_i^{(\tilde{w})} E_i^{(\tilde{w})} dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V q \phi dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S D_i^{(\tilde{w})} \nu_i \phi dV dt
 \end{aligned} \tag{A1.123}$$

$D_i \nu_i = -Q$, donde Q es la densidad de carga eléctrica en la frontera S^q .

Se obtiene un funcional que es suma de uno función de u y otro función de w , la función w ya está determinada, por lo tanto minimizar $F\tilde{z}$ respecto de z es equivalente a hacerlo respecto de u .

$$\begin{aligned}
 F\tilde{u} = & -\int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^{(\tilde{u})} \varepsilon_{ij}^{(\tilde{u})} dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V B_i u_i dV dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S T_i u_i dS dt + \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dt dV + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_V D_i^{(\tilde{u})} E_i^{(\tilde{u})} dV - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_V q \phi dV dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_S Q \phi dV dt
 \end{aligned} \tag{A1.124}$$

El funcional de la expresión (A1.124) es idéntico al obtenido mediante el principio de los trabajos virtuales y el principio de Hamilton.

La solución buscada consiste en minimizar $F\tilde{u}$ respecto de \tilde{u} , dicha función debe cumplir con las condiciones de borde del problema.