

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN



TESIS DOCTORAL

Modelo de daño no local para hormigón afectado por reacción álcali-sílice

Director de tesis:

Dra. Ing. Mariela Luege

Autor:

Ing. Martín Ernesto Almenar

Director de beca CONICET:

Dr. Ing. Antonio Orlando

Jurado de Tesis:

Dr. Ing. Adrián Pablo Cisilino (CONICET-UNMdP)

Dr. Ing. Martín Ignacio Idiart (CONICET-UNLP)

Dra. Ing. María Bibiana Luccioni (CONICET-UNT)

*Tesis presentada para acceder al
grado de Doctor en Ingeniería*

en el

Instituto de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

Mayo 2017

"A mis padres"

—

Resumen

Modelo de daño no local para hormigón afectado por reacción álcali-sílice

Palabras claves: modelo no local, modelo de daño, ablandamiento, método arc-length, reacción álcali-sílice, reacción álcali-agregado, deterioro químico.

En esta tesis se desarrolló un modelo constitutivo macroscópico adecuado para representar el comportamiento del hormigón afectado por reacción álcali-sílice (RAS). En la actualidad son muchas las estructuras que se encuentran sujetas a este tipo de reacción (puentes, presas, etc) y requieren de una herramienta numérica de análisis que permita ayudar a tomar decisiones relativas a su reparación y estimación de vida útil. Es en este punto donde se hace imprescindible contar con una herramienta como lo es un modelo constitutivo macroscópico para realizar dicho análisis. La formulación de un modelo constitutivo de estas características posee dos aspectos fundamentales. Por un lado representar correctamente el comportamiento mecánico del material, y por otro lado, tener en cuenta el efecto químico y su influencia sobre el comportamiento mecánico. En este trabajo se formuló un modelo de daño no local adecuado para representar el comportamiento mecánico de un material cuasi-frágil como el hormigón. Este modelo no local incluye en su formulación una cantidad no local, el gradiente espacial del daño, con el objetivo de evitar obtener un problema mal puesto en problemas con ablandamiento. Otro problema que presenta la determinación del camino de equilibrio en el postpico es la propagación inestable de fisuras, causando ramas de snap-back difíciles de sortear por los controles tradicionales (fuerza o desplazamiento). Esto se logra subsanar utilizando un método arc-length, basado en el control de la disipación de la energía. La formulación del modelo mecánico fue extendida con el objetivo de representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS. Para esto se consideró al material en el marco de la teoría poromecánica de Biot. De este modo, el hormigón afectado por RAS es concebido a nivel macro como la homogeneización de un sistema bifásico formado por un esqueleto sólido y una fase líquida-gel que ejerce presión en el interior de los poros del hormigón conforme avanza la RAS. También fue necesario modificar el criterio de daño propuesto originalmente en el modelo mecánico con el fin de tener en cuenta el daño producido por la presión del gel de la RAS. El modelo fue finalmente verificado y validado con diversos ensayos de laboratorio disponibles en la literatura y elementos estructurales.

Abstract

Non-local damage model for concrete affected by alkali-silica reaction

Keywords: non-local model, damage model, strain-softening, arc-length method, alkali-silica reaction, alkali-aggregate reaction, chemical deterioration.

In this work a macroscopic constitutive model suitable to represent the behavior of the concrete affected by alkali-silica reaction (RAS) is developed. Nowadays, many structures are subject to this type of reaction (bridges, dams, etc.) and have a numerical analysis tool to help take decisions regarding their repair and estimation of useful life. For this reason, it is essential to have a tool such as a macroscopic constitutive model to perform such analysis. The formulation of a constitutive model of these characteristics has two fundamental aspects. First, to correctly represent the mechanical behavior of the material and on the other hand to take into account the chemical effect and its influence on the mechanical behavior. In this work a model of non-local damage suitable to represent the mechanical behavior of a quasi-brittle material such as concrete is formulated. This non-local model includes in its formulation a non-local quantity as is the spatial gradient of the damage, in order to avoid obtaining a ill-post problem when reproducing strain-softening. Another problem with the determination of the equilibrium path in the postpeak is the unstable propagation of cracks, causing snap-back branches difficult to overcome by traditional controls (force or displacement). This is achieved by using an arc-length method, based on control of energy dissipation. The formulation of the mechanical model was extended with the objective of representing the behavior of the concrete affected by ASR. To this end a Biot poromechanic theory is considered. In this way the concrete material affected by RAS is conceived at the macro level as the homogenization of a two-phase system formed by a solid skeleton and a liquid-gel phase that exerts pressure inside the pores of the concrete as the ASR progresses. It is also necessary to modify the damage criterion originally proposed in the mechanical model in order to take into account the damage caused by the pressure of the ASR gel. Finally the model is validated using experimental results available in the literature and structural elements.

Agradecimientos

A Dios por haber colocado este desafío en mi camino y por encontrar en Él todo la fuerza que necesito día a día.

A mi directora de tesis Mariela por su infinita paciencia y por todo el tiempo dedicado para que este trabajo salga adelante.

A mi director de Beca Antonio por haber confiado en mi y haberme proporcionado todo lo necesario para que yo pueda trabajar de la mejor manera.

A mi mamá Pili y a mi papá Hugo por apoyarme siempre en mis decisiones y haberme inculcado buenos valores de los cuales me siento orgulloso.

A mi novia Fátima por ser una excelente compañera y amiga que supo sostenerme durante toda esta carrera.

A mis amigos y compañeros del Instituto: Javier, Nicolás, Exequiel, Andrés, Gonzalo, Daniela, Pablo, Gabriel, José, Alejandra y demás compañeros de las distintas maestrías que pasaron durante mi instancia doctoral, por el apoyo, los consejos y los muy amenos almuerzos que compartimos en el Instituto.

A las autoridades del Instituto, Director Sergio Gutierrez y miembros de la Comisión Académica Bibiana Luccioni, Domingo Sfer y Gustavo Perez, por haberme recibido de la mejor manera y crear un buen clima de trabajo.

A todo el personal docente y no docente del Instituto por el trato cordial y respetuoso de todos los días.

Al CONICET por financiar mi carrera, de otra forma esta tesis no habría sido posible.

Índice general

Resumen	II
Abstract	III
Agradecimientos	IV
Lista de Figuras	IX
Lista de Tablas	XIV
Abreviaciones	XV
Símbolos	XVI
1. Introducción, motivaciones y objetivos	1
1.1. Presentación del problema y motivaciones	1
1.2. Antecedentes de modelos constitutivos macroscópicos para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS	2
1.3. Objetivos de la tesis	4
1.3.1. Objetivo general	4
1.3.2. Objetivos en cuanto al modelo mecánico	4
1.3.3. Objetivos en cuanto al modelo químico	5
1.4. Modo de trabajo seguido en la tesis	5
2. Estado del Arte	7
2.1. Introducción	7
2.2. Modelos no locales de daño	7
2.2.1. Modelo de Fremond	9
2.2.2. Modelo de Nedjar	11
2.2.3. Modelo de Miehe	12
2.2.4. Modelo de Lorentz	13
2.3. Aspectos a tener en cuenta en la modelación de la RAS en el hormigón	15
2.3.1. Mecanismo de RAS	15
2.3.1.1. Formación del gel de la RAS	15
2.3.1.2. Composición del gel de la RAS	17
2.3.1.3. Mecanismo de expansión y fisuración	18

2.3.2.	Modelos de RAS en distintas escalas	20
2.3.3.	Descripción de los principales modelos macropscópicos para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS	21
2.3.3.1.	Modelo de Bangert	21
2.3.3.2.	Modelo de Comi	24
2.3.3.3.	Modelo de Pesavento	28
3.	Modelo mecánico propuesto	32
3.1.	Introducción	32
3.2.	Notación y consideraciones	34
3.3.	Ecuaciones principales que definen el modelo	34
3.3.1.	Leyes constitutivas generales	34
3.3.2.	Ecuaciones de equilibrio	35
3.3.3.	Alternativas para resolver el problema planteado	37
3.4.	Resolución del problema planteado	39
3.4.1.	Formulación variacional	39
3.5.	Parámetros del modelo y elección de la función de daño	43
3.5.1.	Parámetros introducidos durante la formulación	43
3.5.2.	Función de rigidez	44
3.5.3.	Criterio de daño para hormigón adoptado en la formulación	45
3.5.4.	Resumen de parámetros del modelo	54
3.6.	Incorporación en la formulación de un método arc-length basado en el control de disipación de energía	55
3.7.	Solución numérica del problema planteado	58
3.7.1.	Linealización	58
3.7.2.	Discretización espacial	60
3.8.	Expresiones del sistema linealizado	63
3.8.1.	Cálculo de derivadas auxiliares	65
3.8.1.1.	Derivadas de la variable α	66
3.8.1.2.	Derivadas de la potencia de las fuerzas internas	67
3.8.1.3.	Derivadas de la tensión	68
3.8.1.4.	Derivadas del criterio de daño	69
3.9.	Esquema de resolución del modelo propuesto	70
3.10.	Anexo: desarrollo para la obtención de la ecuaciones de equilibrio	74
3.11.	Anexo: cálculo de derivadas direccionales de la energía potencial total modificada	76
4.	Ejemplos realizados con el modelo mecánico	80
4.1.	Ensayo en probeta trapecial: análisis de convergencia en trapecio	81
4.2.	Placa con perforación excéntrica: control de disipación	85
4.3.	Ensayo de flexión en viga entallada: Energía de fractura y función de rigidez	89
4.4.	Viga entallada con carga excéntrica: Ancho de localización	94
4.5.	Ensayo de corte puro: influencia de la relación entre resistencia a tracción y compresión ℓ_1	99
5.	Modelo de RAS propuesto	103
5.1.	Introducción	103
5.2.	Comportamiento constitutivo del material hormigón afectado por RAS	105

5.2.1.	Empleo de la teoría de Biot en un modelo bifásico	105
5.2.2.	Introducción de la variable que mide el progreso de la RAS en un sistema unidimensional elástico	109
5.2.3.	Ley de evolución del progreso de la RAS ξ	112
5.3.	Formulación del modelo de daño no local para hormigón afectado por RAS	116
5.3.1.	Función de energía libre utilizada	117
5.3.2.	Evaluación de la función de daño	120
5.3.3.	Resumen de parámetros del modelo	120
5.3.4.	Esquema de resolución del modelo propuesto	121
6.	Ejemplos realizados con el modelo de RAS	124
6.1.	Simulación del ensayo de expansión en probetas cilíndricas sometidas a distintos modos de confinamiento	124
6.1.1.	Presentación del problema	124
6.1.2.	Modo de resolución	125
6.1.3.	Resultados obtenidos	128
6.2.	Simulación del ensayo de flexión	140
6.2.1.	Presentación del problema	140
6.2.2.	Reproducción del ensayo de expansión libre	141
6.2.3.	Reproducción del ensayo de flexión	143
6.2.4.	Modificación de f_t y G_f : Propuesta 1	146
6.2.5.	Modificación de f_t y G_f : Propuesta 2	149
6.3.	Evaluación de una presa de gravedad de Hormigón afectada por RAS	151
6.3.1.	Resolución del problema térmico	152
6.3.2.	Resolución del problema químico	155
6.3.3.	Resolución del problema mecánico	157
7.	Conclusiones	166
7.1.	Conclusiones referidas al modelo mecánico	166
7.2.	Conclusiones referidas al modelo químico	169
7.3.	Sugerencias para trabajos futuros	172
7.4.	Indicadores académicos	173
A.	Álgebra tensorial	184
A.1.	Producto escalar entre vectores	184
A.2.	Producto entre tensor de segundo orden y vector	185
A.3.	Producto tensorial	185
A.4.	Producto escalar entre tensores de segundo orden	186
A.5.	Gradiente, divergencia y Laplaciano	186
B.	Tecnología de elementos finitos	188
B.1.	Dominio en coordenadas geométricas y naturales	188
B.2.	Funciones de interpolación y sus derivadas	189
B.3.	Ordenes de las matrices y vectores introducidos en el MEF e integración numérica	190
B.4.	Cálculo de la matriz Jacobiana	191

B.5. Puntos de Gauss en un dominio triangular 192

Índice de figuras

2.1. Manifestación numérica del problema de ablandamiento. a) Problema no regularizado. b) Problema regularizado.	8
2.2. Etapas de la RAS [Dent Glasser & Kataoka, 1981].	17
2.3. Condiciones que deben cumplirse para que la RAS puede llevarse a cabo.	18
2.4. Fracciones volumétricas en el modelo de Bangert et al. [2004].	22
2.5. Ajuste numérico presentado por Bangert et al. [2004]. (a) Ajuste de los parámetros químicos por medio de un ensayo de expansión libre. (b) Ajuste lineal de los parámetros químicos para distintos grados de saturación.	24
2.6. Ensayos de viga de hormigón simple presentado por Bangert et al. [2004]. (a) Configuración del ensayo . (b) Historia de condiciones de p^l . (c) Expansión RAS en distintos puntos. (d) Diagrama carga-factor de desplazamiento a distintas edades.	25
2.7. EVR propuesto por Comi.	26
2.8. Ensayo de Multon & Toutlemonde [2006]: a) expansión libre; b) carga axial de compresión, $P = -10MPa$ y $P = -20MPa$; c) confinamiento pasivo con anillos de acero, $e = 3mm$ y $e = 5mm$; d) carga axial de compresión y confinamiento pasivo.	28
2.9. Configuración del ensayo en vigas, mapas de grado de saturación, progreso de reacción, y daño realizado en el trabajo de Comi et al. [2012].	29
2.10. Ajuste numérico con el modelo de Pesavento de los ensayos experimentales de: A) ensayos de expansión libre de Larive [1997] y B) ensayos con ciclos de humectación y secado de Poyet [2003].	31
3.1. Dominio y fronteras del cuerpo analizado.	36
3.2. Comparación de criterios de daño en ensayo biaxial.	49
3.3. Representación de los criterios de daño en el espacio de High-Westergard. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En rojo y azul el criterio propuesto.	50
3.4. Representación de los criterios de daño en el plano tensión hidrostática $I_1^0/3$ vs tensión octaédrica $(2/3J_2^0)^{0,5}$. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En azul y rojo el criterio propuesto.	50
3.5. Ensayo biaxial. Aumento de σ_3 en tracción.	51
3.6. Ensayo biaxial. Aumento de σ_3 en compresión. Una superficie por cada σ_3	51
3.7. Ensayo biaxial. Aumento de σ_3 en compresión. Dos superficie por cada σ_3	52
3.8. Representación de los criterios de daño en el espacio de High-Westergard. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En verde y azul el criterio propuesto modificado.	53

3.9. Representación de los criterios de daño en el plano tensión hidrostática $I_1^0/3$ vs tensión octaédrica $(2/3J_2^0)^{0.5}$. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En verde y azul el criterio propuesto modificado.	54
3.10. Ejemplo de problema a resolver con la restricción path following. Energía total a disipar entre los puntos $P1$ y $P2$	56
3.11. Ejemplo de problema a resolver con la restricción path following. Obtención de puntos intermedios en la rama de snap-back.	56
4.1. Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para probeta trapecial.	82
4.2. Carga vs desplazamiento para probeta trapecial.	83
4.3. Mapa de daño para probeta trapecial.	83
4.4. Tensión vertical para probeta trapecial correspondientes a la malla T-F. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$	84
4.5. Energía disipada para probeta trapecial.	84
4.6. Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para placa con perforación excéntrica.	85
4.7. Carga vs desplazamiento para placa con perforación excéntrica.	86
4.8. Mapa de daño para placa con perforación excéntrica. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$	87
4.9. Tensión vertical para la placa con perforación excéntrica. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$	88
4.10. Energía disipada para la placa con perforación excéntrica.	88
4.11. Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para la viga entallada.	90
4.12. Carga vs desplazamiento para la viga entallada. Comparación de energía de fractura.	90
4.13. Carga vs desplazamiento para la viga entallada. Comparación parámetro p de función de rigidez.	91
4.14. Carga vs desplazamiento para la viga entallada. Comparación parámetro q de función de rigidez.	91
4.15. Mapa de daño en la cabeza de la fisura para la viga entallada. Comparación de energía de fractura.	92
4.16. Mapa de daño en la cabeza de la fisura para la viga entallada. Comparación parámetro p de función de rigidez.	92
4.17. Mapa de daño en la cabeza de la fisura para la viga entallada. Comparación parámetro q de función de rigidez.	92
4.18. Tensión horizontal para la viga entallada G_{f2} . Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$	92
4.19. Energía disipada para la viga entallada.	93
4.20. Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla viga entallada con carga excéntrica.	95
4.21. Carga vs desplazamiento para viga entallada con carga excentrica. Comparacion de ancho de localizacion D	95
4.22. Carga vs desplazamiento para viga Rilem con carga excéntrica. Comparación de mallas regular (Malla RC-A) e irregular (Malla RC-B).	96
4.23. Mapa de daño para viga entallada con carga excentrica. Comparacion de semiancho de localizacion D	96
4.24. Mapa de daño para viga entallada con carga excéntrica. Comparación de mallas regular (Malla RC-A) e irregular (Malla RC-B)	97

4.25. Mapa de daño para viga entallada con carga excéntrica (Malla RC-D). Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{02}$.	97
4.26. Tensión horizontal para la viga entallada con carga excéntrica (Malla RC-D). Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{02}$.	98
4.27. Energía disipada para la viga entallada con carga excéntrica.	98
4.28. Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para el ensayo de corte.	99
4.29. Carga vs desplazamiento para ensayo de corte. Comparacion del parámetro ℓ_1 .	100
4.30. Mapa de daño para ensayo de corte.	100
4.31. Mapa de daño para ensayo de corte, $\ell_1 = 10$. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{01}$.	101
4.32. Mapa de tensión cortante para el ensayo de corte, $\ell_1 = 10$. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{01}$.	101
4.33. Energía disipada para el ensayo de corte.	101
5.1. Fases del EVR.	106
5.2. Tensiones en el EVR para el material bifásico.	106
5.3. Representación unidimensional del hormigón afectado por RAS según Ulm et al. [2000].	110
5.4. forma de la curva de expansión libre. Tiempo de la latencia τ_l , tiempo característico τ_c y expansión ascintótica volumétrica ϵ^∞ para la curva de temperatura \bar{T} y curvas para las temperaturas T_1 y T_2 .	115
6.1. Ensayo de Multon & Toutlemonde [2006]: a) expansión libre; b) carga axial de compresión, $P = -10MPa$ y $P = -20MPa$; c) confinamiento pasivo con anillos de acero, $e = 3mm$ y $e = 5mm$; d) carga axial de compresión y confinamiento pasivo.	125
6.2. Coordenadas utilizadas en la resolución del problema para el ensayo de Multon & Toutlemonde [2006].	126
6.3. Ajuste para expansión libre.	129
6.4. Ajuste para confinamiento pasivo, $e = 3mm$.	130
6.5. Ajuste para confinamiento pasivo, $e = 5mm$.	130
6.6. Ajuste para carga axial, $P = -10MPa$.	131
6.7. Ajuste para confinamiento mixto, $e = 3mm$.	131
6.8. Ajuste para carga mixto, $e = 5mm$.	132
6.9. Evolución de daño. Confinamiento pasivo.	132
6.10. Evolución de daño. Carga axial.	133
6.11. Evolución de daño. Confinamiento pasivo y Carga axial.	133
6.12. Evolución de ϵ_z vs tiempo. Carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$.	134
6.13. Evolución de ϵ_r vs tiempo. Carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$.	134
6.14. Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$.	135
6.15. Evolución de ϵ_z vs tiempo. Confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$.	135
6.16. Evolución de ϵ_r vs tiempo. Confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$.	136

6.17. Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$	136
6.18. Evolución de ε_z vs tiempo. Confinamiento pasivo fijo en $e = 3mm$ y carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$	137
6.19. Evolución de ε_r vs tiempo. Confinamiento pasivo fijo en $e = 3mm$ y carga axial variable de $P = 0$, a $P = 20MPa$	137
6.20. Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Confinamiento pasivo fijo en $e = 3mm$ y carga axial variable de $P = 0$, a $P = 20MPa$	138
6.21. Evolución de ε_z vs tiempo. Carga axial fija $P = 7,5MPa$ y confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$	138
6.22. Evolución de ε_r vs tiempo. Carga axial fija $P = 7,5MPa$ y confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$	139
6.23. Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Carga axial fija $P = 7,5MPa$ y confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$	139
6.24. Curvas de expansión libre para el ensayo de Giaccio et al. [2008].	142
6.25. Curvas $(1 - R)$ vs tiempo.	142
6.26. Geometría, condiciones de carga y apoyo, y malla utilizada en el ensayo de flexión.	144
6.27. Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R2$ a distintas edades.	145
6.28. Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R3$ a distintas edades.	145
6.29. Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R4$ a distintas edades.	146
6.30. Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R2$ a distintas edades. Propuesta 1.	148
6.31. Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R4$ a distintas edades. Propuesta 1.	148
6.32. Nivel de daño en expansión libre.	150
6.33. Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R2$ a distintas edades. Propuesta 2.	150
6.34. Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R4$ a distintas edades. Propuesta 2.	150
6.35. Geometría, cargas y malla utilizada en la presa analizada.	151
6.36. Variación de la temperatura del agua y de aire a lo largo del año.	153
6.37. Variación del nivel de agua en la presa a lo largo del año.	153
6.38. Distribución de temperaturas en el cuerpo de la presa.	155
6.39. Distribución de un campo similar al grado de saturación.	156
6.40. Progreso de la RAS ξ vs tiempo para las temperaturas extremas en la presa.	157
6.41. Distribución de ξ en el cuerpo de la presa.	158
6.42. Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con temperaturas disminuidas en un 20%.	159
6.43. Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con temperaturas aumentadas en un 20%.	160
6.44. Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con τ_c y τ_l disminuidos en un 20%.	161

6.45. Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con τ_c y τ_l aumentados en un 20 %	162
6.46. Distribución de daño en el cuerpo de la presa.	163
6.47. Distribución de deformaciones volumétricas en el cuerpo de la presa.	164
6.48. Distribución de daño en el ensayo <i>overtopping</i> en el año 0. A) comienzo de ensayo, B) fin de ensayo. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$.165	165
6.49. Distribución de daño en el ensayo <i>overtopping</i> en el año 12. A) comienzo de ensayo, B) fin de ensayo. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$	165
6.50. desplazamiento de cresta vs relación <i>overtopping</i> para esta inicial y para 12 años. Comparación entre el modelo propuesto y el modelo de Comi et al. [2009]. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$	165
B.1. Dominio del elementos triangular en coordenadas geométricas y naturales. 188	188

Índice de cuadros

4.1. Parámetros materiales.	80
4.2. Datos de mallas para la probeta trapecial.	82
4.3. Parámetros de vigas entallada	89
4.4. Parámetros de vigas entallada con carga excéntrica.	94
4.5. Datos de mallas para la viga entallada con carga excéntrica.	94
4.6. Parámetros del ensayo de corte.	99
6.1. Parámetros del modelo para los ensayos de Multon & Toutlemonde [2006].	128
6.2. Parámetros del modelo para los ensayos de Giaccio et al. [2008].	144
6.3. Parámetros del modelo para los ensayos de Giaccio et al. [2008]. Propuesta 1.	147
6.4. Parámetros del modelo para la simluación de la presa.	152
B.1. Coordenadas de los puntos de Gauss para un dominio triangular.	192

Abreviaciones

EVR	E lemento de V olumen R epresentativo
MDC	M étodo de D escomposición- C oordinación
MEF	M étodo de los E lementos F initos
MEI	M étodo de E uler I mplicito
MNR	M étodo de N ewton- R aphson
MEG	M odelo E stándar G eneralizado
RAS	R eacción Á lcali- S ílice

Símbolos

\mathbf{u}	Campo de desplazamientos.
\mathbf{u}_0	Desplazamientos prescritos.
β	Campo de daño.
λ	Campo de multiplicadores de Lagrange.
α	Variable auxiliar al daño.
ζ	Incógnita de la restricción path-following.
t	Tiempo.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformaciones.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensiones de Cauchy.
$\boldsymbol{\sigma}^0$	Tensión sin dañar.
$\boldsymbol{\sigma}^{ef}$	Tensión efectiva.
$\boldsymbol{\sigma}^{ief}$	Tensión inelástica efectiva.
$\boldsymbol{\sigma}_0^{ief}$	Tensión inelástica efectiva sin dañar.
V	Parte escalar de la fuerza termodinámicamente asociada al daño.
V^*	Reemplazo de V .
\mathbf{A}	Parte vectorial de la fuerza termodinámicamente asociada al daño.
ξ	Progreso de la RAS.
A^g	Afinidad química.
A_0^g	Afinidad química inicial.
T	Campo de temperaturas.
T^0	Campo de temperaturas inicial.
\bar{T}	Temperatura de referencia.
Ω	Dominio del sólido analizado.
Γ	Contorno del dominio analizado.
Γ^f	Parte del contorno donde se prescriben fuerzas superficiales.

Γ^d	Parte del contorno donde se prescriben desplazamientos \mathbf{u}_0 .
γ	Normal saliente al contorno Γ .
\mathbf{f}	Fuerzas volumétricas.
\mathbf{F}	Fuerzas superficiales.
\mathbf{F}^f	Fuerzas superficiales prescriptas en Γ^f .
\mathbf{F}^u	Reacciones sobre Γ^u .
$\underline{\mathbf{F}}^f$	Fuerzas superficiales de referencia.
Ψ	Potencial de energía libre global.
Ψ_1	Parte local del potencial de energía libre global.
Ψ_2	Parte no local del potencial de energía libre global.
Φ	Potencial de disipación global.
ψ	Potencial de energía libre local.
ϕ	Potencial de disipación local.
ψ_q	Potencial químico local.
ψ_{pm}	Potencial poromecánico local.
ψ_T	Potencial térmico local.
ϖ	Función de energía elástica.
ϖ^*	Reemplazo de ϖ .
R	Función de rigidez.
\mathcal{S}	Tensión global.
\mathcal{B}	Fuerza global asociada al daño.
$\mathcal{W}_{int}^u(\delta\mathbf{u})$	Trabajo virtual interno asociado al desplazamiento.
$\mathcal{W}_{int}^\beta(\delta\beta)$	Trabajo virtual interno asociado al daño.
$\mathcal{W}_{ext}^u(\delta\mathbf{u})$	Trabajo virtual externo asociado al desplazamiento.
P	Energía potencial total original.
$P\alpha$	Energía potencial total con la introducción de α .
$P\alpha r$	Energía potencial total con la introducción de α y el penalizador r .
\mathcal{L}	Energía potencial total modificada.
I_+	Función indicador positiva.
I_-	Función indicador negativa.
\mathcal{C}	Criterio de daño.
δ	Tensor identidad de segundo orden.
\mathbf{I}	Tensor identidad de cuarto orden.

\mathbf{C}^0	Tensor constitutivo elástico de cuarto orden sin dañar.
E	Módulo de Young.
E^s	Módulo de Young de la fracción sólida.
E^g	Módulo de Young de la fracción gel.
μ	Coefficiente de Poisson.
K	Módulo de volumétrico.
K^s	Módulo de volumétrico la fracción sólida
\mathbf{B}	Tensor de Biot.
M	Módulo de Biot.
b	Coefficiente de Biot.
\mathbf{e}	Tensor desviador de $\boldsymbol{\varepsilon}$.
\mathbf{S}^0	Tensor desviador de $\boldsymbol{\sigma}^0$.
I_1^0	Primer invariante de $\boldsymbol{\sigma}^0$.
J_2^0	Segundo invariante de \mathbf{S}^0 .
σ_{max}^0	Máximo autovalor de $\boldsymbol{\sigma}^0$.
\mathbf{v}	Autovector correspondiente a σ_{max}^0 .
k	Umbral de la función de daño.
c	Parámetro que mide la influencia del gradiente de daño.
r	Penalizador.
D	Semiancho de localización.
G_f	Energía de Fractura.
f_t	Resistencia a tracción uniaxial.
f_c	Resistencia a compresión uniaxial.
p, q	Parámetros de la función de rigidez.
ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3	Parámetros del criterio de daño.
τ	Umbral de disipación.
\mathcal{G}	Disipación Total.
\mathcal{V}	Potencia de la fuerzas internas.
\mathcal{P}_{ext}	Potencia de la fuerzas externas.
J	Matriz jacobiana.
\tilde{w}	Factor de peso en un punto de Gauss.
p^g	Presión del gel de la RAS
τ_l	Tiempo de latencia.

τ_c	Tiempo característico.
U_l	Energía de activación de latencia.
U_c	Energía de activación característica.
ϵ^∞	Expansión asintótica volumétrica.
ς	Coefficiente de daño químico.
α^g	Coefficiente de dilatación del gel.
α^s	Coefficiente de dilatación del sólido.
k^T	Conductividad térmica.
c^T	Capacidad calorífica.
RU	Funcional de residuos de desplazamientos.
RA	Funcional de residuos de daño.
RL	Funcional de residuos de mutiplicadores de Lagrange.
RG	Funcional de residuos disipación.
LRU	Linealización de RU .
LRA	Linealización de RA .
LRL	Linealización de RL .
LRG	Linealización de RG .
N_e^u	Función de interpolación para el campo u .
N_e^β	Función de interpolación para el campo β .
N_e^λ	Función de interpolación para el campo λ .
B^u	Derivada de N_e^u .
B^β	Derivada de N_e^β .
U_e^u	Vector de u nodales por elemento.
U_e^β	Vector de β nodales por elemento.
U_e^λ	Vector de λ nodales por elemento.
RU_e^u	Forma discreta de RU por elemento.
RU_e^β	Forma discreta de RA por elemento.
RU_e^λ	Forma discreta de RL por elemento.
RG_e	Forma discreta de RG por elemento.
LRU_e^u	Linealización de RU_e^u .
LRU_e^β	Linealización de RU_e^β .
LRU_e^λ	Linealización de RU_e^λ .
LRG_e	Linealización de RG_e .

\mathbb{K}_e^{ab}	Matriz de rigidez por elemento para los campos $(a, b) = \mathbf{u}, \beta, \lambda, \zeta$.
$\mathbb{R}\mathbf{U}^u$	Ensamblaje de $\mathbb{R}\mathbf{U}_e^u$.
$\mathbb{R}\mathbf{U}^\beta$	Ensamblaje de $\mathbb{R}\mathbf{U}_e^\beta$.
$\mathbb{R}\mathbf{U}^\lambda$	Ensamblaje de $\mathbb{R}\mathbf{U}_e^\lambda$.
$\mathbb{R}\mathbf{G}$	Ensamblaje de $\mathbb{R}\mathbf{G}_e$.
\mathbb{K}^{ab}	Ensamblaje de \mathbb{K}_e^{ab} .
\mathbf{U}^u	Ensamblaje de \mathbf{U}_e^u .
\mathbf{U}^β	Ensamblaje de \mathbf{U}_e^β .
\mathbf{U}^λ	Ensamblaje de \mathbf{U}_e^λ .
\mathbb{K}	Matriz de rigidez tangente.
\mathbb{R}	Vector de residuos total.
$\Delta\mathbb{S}$	Vector de incrementos totales de incógnitas nodales.

Capítulo 1

Introducción, motivaciones y objetivos

1.1. Presentación del problema y motivaciones

El hormigón es uno de los materiales más utilizados en la construcción de obras civiles, por lo que resulta de vital importancia tener conocimiento de las distintas patologías que pueden afectarlo. Entre estas patologías, se encuentran aquellas que pueden ser producidas por distintos tipos de ataques químicos y, entre ellos, la reacción álcali-sílice (RAS) es, sin duda, una de las más populares. La RAS es una reacción deletérea que se da en el interior del hormigón al reaccionar la sílice reactiva que contienen los agregados con los álcali presentes en la solución de poros de la pasta de cemento. El producto de dicha reacción es un gel higroscópico, es decir que se expande al entrar en contacto con agua. El gel de RAS se expande en el interior de la porosidad del hormigón hasta que consigue llenarla. A partir de ese momento, comienza a ejercer una presión interna que puede causar micro fisuras y, en algunos casos más avanzados, fisuras que son reconocidas a simple vista. El proceso antes mencionado causa, sin duda, deterioro en las propiedades mecánicas del hormigón y afecta la seguridad de la estructura del que forma parte. En las condiciones en las que se encuentran la mayoría de las estructuras (temperatura, humedad, estado de carga, composición del hormigón, etc), la RAS suele desarrollarse de forma muy lenta hasta mostrar signos visibles de su incidencia (luego de 10 a 15 años). Esto hace que hoy en día muchas estructuras se encuentren afectadas

por esta reacción y requieran de herramientas numéricas para su correcto análisis y para poder tomar, por ejemplo, medidas tendientes a la reparación de las mismas. Es en este punto donde se hace imprescindible contar con un modelo constitutivo macroscópico adecuado para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS. Estos tipos de modelos comenzaron a surgir en la literatura a partir de la última década y, a pesar de los años transcurridos, aún hoy en día se continúa trabajando en la temática. Esto es así debido a distintos factores como: la gran cantidad de variables que afectan la evolución de la RAS, la complejidad que existe en determinar correctamente el efecto mecánico que produce la presión del gel en el material, la interacción que existe entre la RAS y otros fenómenos producidos en el hormigón a lo largo del tiempo como el creep, la retracción, etc. Por este motivo cualquier aporte que pueda realizarse en la modelación constitutiva del hormigón afectado por RAS, constituye un avance para poder brindar en el futuro una herramienta a la práctica profesional capaz de realizar un diagnóstico sencillo de estructuras afectadas por RAS.

1.2. Antecedentes de modelos constitutivos macroscópicos para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS

Los modelos para representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS que se disponen hoy en día surgen de modificar convenientemente un modelo mecánico para hormigón, de tal forma de poder tener en cuenta dicho efecto. El progreso de la reacción química en este tipo de modelos se rige por la cinética propuesta por [Larive \[1997\]](#) y sus modificaciones posteriores realizadas por [Ulm et al. \[2000\]](#) y [Steffens et al. \[2003\]](#), para poder tener en cuenta el efecto de la variación de la temperatura y de la humedad, respectivamente. En el trabajo de [Saouma & Perotti \[2006\]](#) se realizó una propuesta para incluir en el progreso de la RAS el estado tensional y más recientemente en [Sellier et al. \[2009\]](#) se realizó una propuesta para poder considerar el tamaño de los agregados en el progreso de la RAS. La variable que mide el progreso de la RAS en los trabajos antes citados terminan afectando la parte volumétrica en las relaciones tensión deformación en dos sentidos diferentes: Considerando a la expansión producida por la RAS como una deformación impuesta, similar a lo que se considera en un problema

térmico, o considerándola como el producto de una presión, la cual tiene origen en las teorías poromecánicas. Una vez introducida la expansión por RAS en la relación tensión deformación, algunos autores dejan que el modelo mecánico se encargue del deterioro del material mientras que otros, considerando que la expansión por RAS es de origen distinto a las deformaciones producidas por las acciones mecánicas, realizan cambios en los indicadores de falla o bien definen una nueva variable de deterioro químico. Uno de los primeros modelos que surgió para representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS fue el de [Ulm et al. \[2000\]](#). Dicho modelo, considera en el progreso de la RAS la acción de la variación de la temperatura en el cuerpo en estudio. Luego, la expansión de la RAS es introducida en el modelo como una presión, producto de una fase gel, que responde a la teoría de Biot. Finalmente, el deterioro del material es tenido en cuenta por medio de un modelo de plasticidad con la superficie umbral de [Willam & Warnke \[1975\]](#). El modelo de [Bangert et al. \[2004\]](#) considera en el progreso de la RAS la acción de la variación del grado de saturación en el cuerpo en estudio. Luego, la expansión de la RAS se introduce como una deformación impuesta. En cuanto al deterioro del material, es considerado por un modelo no local de daño que se expone en [Peerlings et al. \[1996\]](#). En el modelo de [Saouma & Perotti \[2006\]](#) se considera al progreso de la RAS dependiente del estado de tensiones. Luego, la expansión de la RAS se introduce como una deformación impuesta. Finalmente el deterioro del material es considerado por un modelo tipo *smearred crack*. El modelo de [Sellier et al. \[2009\]](#) considera en el progreso de la RAS la acción de la variación del grado de saturación y temperatura en el cuerpo en estudio. También se considera para el cálculo de progreso de la RAS el efecto del tamaño de los agregados. Luego, la expansión de la RAS es introducida en el modelo como una presión que responde a la teoría de Biot. El deterioro del material es considerado por medio del modelo de daño de Kachanov, teniendo en cuenta dos superficies de falla. Para tracción se utiliza el criterio de Rankine, mientras que para compresión se utiliza el criterio de Drucker-Prager. El modelo de [Pesavento et al. \[2012\]](#) considera en el progreso de la RAS la acción de la variación de la temperatura y grado de saturación en el cuerpo en estudio. Luego, la expansión de la RAS es introducida en el modelo mediante una deformación impuesta. Finalmente, el deterioro del material es considerado por medio de una variable de daño mecánica y otra química. La variable de daño mecánica responde al modelo no local de daño de [Mazars & Pyaudier-Cabot, 1989\]](#). El modelo de [Comi et al. \[2009\]](#) considera en el progreso de la RAS la acción de la variación de la temperatura en el cuerpo en estudio. Luego, la expansión de la RAS es introducida en el modelo como

una presión, producto de una fase gel, que responde a la teoría de Biot. Finalmente, el deterioro del material es considerado por medio de una modificación del modelo de daño propuesto por Comi [2001b], en el cual se toman superficies de fallas distintas para tracción y compresión. En esta modificación, el espacio de tensiones sobre el que se calcula el daño tiene una componente atribuida al daño mecánico y otra componente atribuida al daño químico. En una modificación posterior realizada en Comi et al. [2012], se incorpora en el cálculo del progreso de la RAS el efecto de la variación del grado de saturación. Sobre la misma línea del modelo propuesto por Comi, Pignatelli et al. [2013] proponen el cálculo independiente de una variable de daño que solo tiene en cuenta el efecto químico.

1.3. Objetivos de la tesis

1.3.1. Objetivo general

El objetivo general de esta tesis es formular un modelo constitutivo macroscópico adecuado para representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS.

1.3.2. Objetivos en cuanto al modelo mecánico

- Formular un modelo de daño no local dependiente del gradiente del daño para regularizar el problema y obtener resultados independientes de la malla de elementos finitos.
- Plantear una formulación variacionalmente consistente que permita una resolución adecuada de las incógnitas del problema.
- Introducir en la formulación un criterio de daño adecuado que permita reproducir el comportamiento del hormigón.
- Reproducir el camino de equilibrio completo, aun en ensayos que conduzcan a ramas de snap-back.
- Estudiar la influencia de los distintos parámetros del modelo mediante la reproducción de ensayos numéricos.

- Validar el modelo mediante la reproducción numérica de ensayos de laboratorio y estructuras de ingeniería.

1.3.3. Objetivos en cuanto al modelo químico

- Extender la formulación del modelo de daño para poder representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS.
- Validar el modelo mediante la reproducción de ensayos de laboratorio en condiciones ambientales constantes.
- Incorporar en el modelo la dependencia de la respuesta mecánica y química con la acción térmica, para poder reproducir el comportamiento de estructuras masivas.
- validar el modelo completo mediante la reproducción de la respuesta de una estructura masiva de ingeniería como lo es una presa de gravedad de hormigón.

1.4. Modo de trabajo seguido en la tesis

Para poder formular un modelo macroscópico adecuado para representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS se abordan dos aristas principales. Por un lado, se debe proponer un modelo mecánico adecuado para representar el comportamiento de falla del hormigón. Por el otro lado, se debe tener en cuenta en el modelo la cinética de la reacción y su interacción con el comportamiento mecánico del material.

En cuanto al modelo mecánico, de la recopilación de antecedentes de modelos constitutivos macroscópicos para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS se nota una mayor prevalencia de modelos mecánicos de daño. Esto se debe a dos razones principalmente. Primero, debido a la naturaleza de la RAS, la misma produce daño en tracción en el hormigón con escasas o nulas deformaciones permanentes [Comi et al., 2009] y segundo, los modelos de daño resultan más adecuados para realizar estudios a nivel estructural debido a su menor costo computacional en relación a otros tipos de modelos. Por esta razón, en esta tesis se propone un modelo de daño no local adecuado para simular el comportamiento de materiales cuasi-frágiles como el hormigón. Para regularizar el modelo en un problema con ablandamiento, se introduce en la formulación

el gradiente espacial del daño. Para poder representar correctamente el proceso de deterioro del hormigón, se propone redefinir la superficie de daño mediante una función que representa de manera realista el comportamiento en distintos estados tensionales. Otro problema que presenta la obtención del camino de equilibrio en materiales cuasi-frágiles es la presencia de ramas de snap-back. Para poder sortear este inconveniente se incorpora en el modelo un método arc-length, basado en el control de la disipación de energía durante un paso de carga, lo cual resulta novedoso en este tipo de modelo. El control de la energía disipada resulta un indicador global en el método, lo que le posibilita obtener el camino de equilibrio sin conocimiento previo de la zona de falla. Finalmente, se realizan distintos ensayos numéricos con modelo mecánico propuesto.

Luego se extiende la formulación del modelo mecánico para poder representar la respuesta del hormigón afectado por RAS. Para esto, se modifica la función de energía libre de tal manera de poder considerar al hormigón afectado por RAS como un material bifásico. Una de las fases es el esqueleto sólido, que es una homogenización de los agregados, mortero y poros donde no se aloja el gel. La otra fase corresponde al gel de la RAS la cual ejerce presión sobre el esqueleto sólido. Otro aspecto a modificar en el modelo mecánico es el criterio de daño. Esto se hace para poder diferenciar en el mismo el daño producido por la acción mecánica del daño producido por la acción química. En cuanto al progreso de la RAS consideramos su cálculo variable con la temperatura del cuerpo analizado. También se considera en el modelo propuesto afectar otras propiedades mecánicas, adicionales al módulo de elasticidad y corte, que muestran evidencia de deterioro por efectos de la RAS (resistencia a tracción y energía e fractura), y que no habían sido tenidas en cuenta aún por lo modelos actuales. El modelo es finalmente verificado y validado con diversos ensayos de laboratorio disponibles en la literatura y elementos estructurales.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Introducción

En esta sección se presenta una recopilación de antecedentes en la que se muestran algunos de los principales modelos no locales de daño de los que se dispone hoy en día para representar el comportamiento del hormigón. Seguidamente se presentan antecedentes relativos a la química de la RAS, modo en el que se forma el gel, efectos y mecanismos de la reacción. Finalmente se describen algunos modelos macroscópicos para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS.

2.2. Modelos no locales de daño

La mecánica de daño continuo resulta un marco óptimo para describir las distintas etapas de falla de una estructura: el inicio del daño, el crecimiento de microfisuras y propagación de macrofisuras hasta el colapso. Sin embargo se sabe que las relaciones constitutivas locales de daño conducen a un problema mal puesto. El problema ocurre al intentar reproducir la pérdida progresiva de la rigidez, llegando inevitablemente a una respuesta con ablandamiento. Esto ocasiona desde el punto de vista matemático, la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones de equilibrio, obteniendo un problema mal puesto (ver [Benallal et al. \[1993\]](#)). Desde el punto de vista numérico la respuesta que brindan los modelos que no regularizan este fenómeno muestra una fuerte dependencia de los resultados respecto de la malla elegida para resolver el problema (ver [Bazant et al.](#)

[1984]). La figura (2.1) a) muestra que cuando un conjunto de acciones produce daño en un cuerpo, al utilizar un modelo no regularizado, el daño tiende a concentrarse en una banda de elementos. La figura (2.1) b) muestra el mismo problema pero utilizando ahora un modelo regularizado. Vemos que en este último caso el daño se concentra en una zona de ancho $2D$ independientemente de la malla.

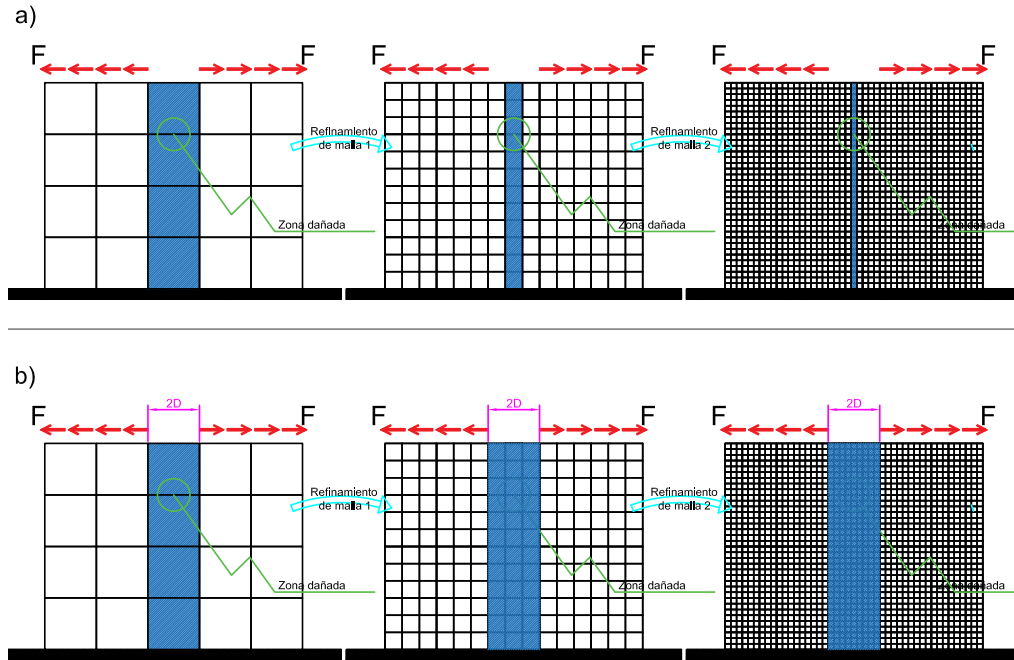


FIGURA 2.1: Manifestación numérica del problema de ablandamiento. a) Problema no regularizado. b) Problema regularizado.

Para poder subsanar este problema se han introducido relaciones constitutivas no locales, lo cual ayuda a controlar los gradientes de daño. A pesar de algunos intentos de derivar los términos no locales a través de la homogeneización (ver Drugan & Willis [1996] y Andrieux et al. [1996]), se introducen principalmente sobre la base de consideraciones fenomenológicas . Esto conduce a varias clases de formulaciones, entre las cuales se tiene:

- la regularización de las variables de estado [Lorentz & Andrieux, 2003], entre la que se encuentran el modelo no local integral [Bazant & Pijaudier-Cabot, 1987], y el modelo de gradiente implícito [Peerlings et al., 1996];
- la introducción de gradientes de orden superior del campo de desplazamiento que abarca, en particular, modelos de gradiente de deformación (ver Triantafyllidis & Aifantis [1986] y Chambon et al. [2001]);

- la introducción de gradientes de campos variables internos (ver [Muhlhaus & Alfantis \[1991\]](#) y [Svedberg & Runesson \[1997\]](#)) o nuevos grados cinemáticos de libertad [[Pijaudier-Cabot & Burlion, 1996](#)].

De los tipos de formulaciones antes mencionadas, se escoge para el desarrollo de esta tesis aquella que introduce en la formulación del gradiente de variables internas, más precisamente el gradiente espacial del daño. Una de las principales ventajas que tiene este tipo de formulación respecto a las otras es que se añade a la misma el gradiente de la variable que mide el deterioro de material, limitando de ese modo el número de incógnitas a encontrar. A continuación se hace una breve descripción de los principales modelos locales que utilizan al gradiente espacial del daño para regularizar el problema.

2.2.1. Modelo de Fremond

En el modelo presentado en el trabajo de [Frémond & Nedjar \[1996\]](#), con el objetivo de tener en cuenta a nivel macro el efecto de los micro movimientos producidos por el daño, se incorpora en la potencia de las fuerzas internas un término que depende de la variación en el tiempo del daño. También, para tener en cuenta en una zona afectada por daño la participación de puntos vecinos, se incorpora en la potencia de las fuerzas internas un término que contiene a la variación temporal del gradiente del daño. Se define entonces a la potencia interna P_{int} sobre un sólido de volumen Ω y contorno Γ como:

$$P_{int}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\beta}) = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} [V \dot{\beta} + \mathbf{A} \cdot \nabla \dot{\beta}] d\Omega, \quad (2.1)$$

donde β es la variable de daño escalar que vale 0 para el material totalmente dañado y 1 cuando está sano; \mathbf{u} es el campo de desplazamientos; la operación $\dot{\bullet}$ es la derivada en el tiempo de \bullet ; $\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}})$ es el tensor de deformaciones aplicado al $\dot{\mathbf{u}}$; $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones; V y \mathbf{A} son la fuerza escalar y vectorial asociadas al daño respectivamente. La potencia de las fuerzas externas P_{ext} es definida como:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega} f^{\beta} \dot{\beta} d\Omega + \int_{\Gamma} F^{\beta} \dot{\beta} d\Gamma, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{f} y \mathbf{F} son las fuerzas de volumen y superficie, mientras que f^{β} y F^{β} son fuentes de daño externas volumétrica y superficial respectivamente.

Una vez definidas P_{int} y P_{ext} , la aplicación del principio de las potencias virtuales conduce a las ecuaciones de equilibrio, que son:

$$div(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.3)$$

$$div(\mathbf{A}) - V + f^\beta = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con} \quad \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma} = F^\beta \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.4)$$

donde $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector unitario normal saliente a Γ . La primera es la ecuación de equilibrio clásica para el campo de desplazamientos, mientras que la segunda ecuación no es clásica y es producto de las modificaciones realizadas en la potencia interna. Esta última ecuación es la que ayuda a determinar la evolución del daño.

El modelo cierra con la definición de los potenciales de energía libre $\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \beta, \nabla\beta)$ y de disipación $\phi(\dot{\beta}; \boldsymbol{\epsilon}, \beta)$, los cuales deben ser funciones convexas y el potencial de disipación mínimo en 0, para derivar una formulación termodinámicamente consistente (ver Germain et al. [1983], Coleman & Noll [1963] y Coleman & Gurtin [1967]). Estos potenciales son:

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \beta, \nabla\beta) = \frac{1}{2}\beta \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2}c \nabla\beta \cdot \nabla\beta, \quad (2.5)$$

$$\phi(\dot{\beta}; \boldsymbol{\epsilon}, \beta) = -\dot{\beta} \left[k + \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon} - \beta^p S(\boldsymbol{\epsilon}) \right] + I_-(\dot{\beta}), \quad (2.6)$$

Estas funciones ayudan a definir las relaciones constitutivas y su elección es adecuada para representar el comportamiento del hormigón. \mathbf{C}^0 es el tensor constitutivo de cuarto orden sin dañar, c es un parámetro que mide la influencia del gradiente del daño en el modelo, k es el umbral de daño, p es un parámetro que controla el endurecimiento y ablandamiento y $\boldsymbol{\epsilon}^+$ es la parte positiva del tensor de deformaciones. $I_-(\dot{\beta})$ es la función indicador negativa que fuerza la condición de irreversibilidad del daño, y vale $I_-(\dot{\beta}) = 0$ para $\dot{\beta} \leq 0$ y $I_-(\dot{\beta}) = +\infty$ para $\dot{\beta} > 0$. Las relaciones constitutivas finales son entonces:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}} = \beta \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}, & \text{(b)} \quad V &= \frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{\partial\phi}{\partial\dot{\beta}} = \beta^p S(\boldsymbol{\epsilon}) - k + \partial I_-, \\ \text{(c)} \quad \mathbf{A} &= \frac{\partial\psi}{\partial\nabla\beta} = c \nabla\beta, & \text{(d)} \quad S(\boldsymbol{\epsilon}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^+ : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}^+. \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde ∂I_- representa la subdiferencial de la función indicador. Las ecuaciones finales del problema se consiguen combinado las ecuaciones (2.7) con las ecuaciones (2.3) y (2.4). Para poder abordar el problema que presenta la subdiferencial de la función indicador, en

la ecuación que gobierna la evolución del daño, se la sustituye por una función suavizada de acuerdo al trabajo de Brauner et al. [1986].

2.2.2. Modelo de Nedjar

Los trabajos presentados en Nedjar [2001] y Nedjar [2002] parten de la misma base del modelo de Fremond con algunas diferencias. En el primer trabajo mencionado se presenta un modelo de daño y plasticidad mientras que en el segundo se plantea un modelo de daño para grandes deformaciones. Las ecuaciones básicas que definen a ambos modelos son las ecuaciones de equilibrio (2.3) y (2.4) más las ecuaciones constitutivas (2.7). En esta sección se describe el modo de resolución que adopta Nedjar para resolver las ecuaciones que definen el modelo. Para esto se plantea la formulación variacional, presentando a continuación la forma débil del sistema que define al problema:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0, \quad (2.8)$$

$$\int_{\Omega} c \nabla \beta \cdot \nabla \delta \beta \, d\Omega + \int_{\Omega} S(\boldsymbol{\varepsilon}) \beta^p \delta \beta \, d\Omega - \int_{\Omega} k \delta \beta \, d\Omega = 0, \quad \text{con } \dot{\beta} \leq 0, \quad (2.9)$$

donde $\delta \mathbf{u}$ y $\delta \beta$ son las variaciones de los campos de desplazamiento y daño respectivamente.

En el trabajo de Nedjar [2001] se propone un método de resolución desacoplado entre las ecuaciones que expresan las formas débiles. Es decir, al iniciar un paso de carga se comienza primero con un incremento en el campo de desplazamientos dejando el daño fijo y se resuelve la ecuación (2.8) y luego se pasa a la ecuación (2.9) dejando el campo de desplazamientos fijo y calculando el daño. Luego, se vuelve a la ecuación (2.8), si el incremento en el campo de desplazamientos es menor a la tolerancia fijada, se termina el paso de carga, sino se realiza otra iteración.

En el trabajo de Nedjar [2002] se propone un método de resolución acoplado entre ambas formas débiles. Para ese fin se define una variable de historia de daño α , que cumple:

$$\beta(\mathbf{X}, t) \leq \alpha(\mathbf{X}, t) \iff \beta(\mathbf{X}, t) - \alpha(\mathbf{X}, t) \leq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega, \forall t, \quad (2.10)$$

Luego, utilizando el método de Lagrange aumentando se logra reescribir la ecuación (2.9) como:

$$\int_{\Omega} c \nabla \beta \cdot \nabla \delta \beta \, d\Omega + \int_{\Omega} S(\boldsymbol{\varepsilon}) \beta^p \delta \beta \, d\Omega - \int_{\Omega} k \delta \beta \, d\Omega + \int_{\Omega} \langle \lambda + r(\beta - \alpha) \rangle^+ \delta \beta \, d\Omega = 0, \quad (2.11)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange, r es un penalizador y $\langle \bullet \rangle^+$ la función positiva. El modo en el que se trabaja con estas nuevas ecuaciones es: se comienza actualizando los multiplicadores de Lagrange con $\lambda = \langle \lambda^0 + r(\beta - r) \rangle^+$. Luego, se resuelven en forma acopladas las ecuaciones (2.8) y (2.11). Por ultimo, se verifica la condición impuesta por la ecuación (2.10). Si se cumple, se avanza al siguiente paso de carga, mientras que si no se cumple, se vuelve a actualizar λ y se itera nuevamente.

2.2.3. Modelo de Miehe

El modelo phase field de Miehe et al. [2010] se basa en la introducción de una variable denominada phase field β para tener en cuenta la formación de fisuras en un material. Esta variable es análoga a la variable de daño de los modelos descritos anteriormente. En este trabajo se define un funcional denominado superficie de la fisura $\Gamma^m(\beta, \nabla \beta)$, a partir de la forma débil de una ecuación diferencial cuya solución representa a β y que cumple las siguientes condiciones: $\beta = 1$ en el sitio donde se forma la fisura y $\beta = 0$ en el contorno Γ del sólido de volumen Ω . El funcional mencionado anteriormente es:

$$\Gamma^m(\beta, \nabla \beta) = \int_{\Omega} \gamma^m(\beta, \nabla \beta) \, d\Omega, \quad \gamma^m(\beta, \nabla \beta) = \frac{1}{2D} \beta^2 + \frac{D}{2} \nabla \beta \cdot \nabla \beta, \quad (2.12)$$

donde D es el semi ancho de localización.

A partir de este último funcional, se define la función de disipación global como:

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{\beta}, \nabla \dot{\beta}, \beta, \nabla \beta) &= \int_{\Omega} \phi(\dot{\beta}, \nabla \dot{\beta}, \beta, \nabla \beta) \, d\Omega, \\ \phi(\dot{\beta}, \nabla \dot{\beta}, \beta, \nabla \beta) &= g^m \dot{\gamma}^m(\beta, \nabla \beta) + I_-(\dot{\beta}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde g^m es la energía de fractura crítica de Griffith. En la ecuación anterior, la función indicador es la encargada de la irreversibilidad de β . Dicha función indicador es aproximada por una función suavizada.

Se define luego la función de energía libre global como:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) d\Omega, \quad \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) = [(1 - \beta)^2 + r^m] \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.14)$$

donde r^m es un parámetro numérico para evitar la pérdida total de la rigidez.

Lo último que se requiere para derivar las ecuaciones de equilibrio mediante el principio de las potencias virtuales es la potencia de las fuerzas externas. Para esto se emplea la ecuación (2.2), sin la presencia de las fuerzas asociadas a las fuentes de daño. Como se mencionó previamente, del principio de las potencias virtuales se obtienen las ecuaciones de equilibrio, las cuales son dos. La primera corresponde al campo de desplazamientos, y es idéntica a la ecuación (2.3), mientras que la segunda se utiliza para determinar la evolución de β y tiene la siguiente forma:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nabla \beta}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nabla \beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (2.15)$$

Si se reemplazan las funciones ψ y ϕ en la ecuación (2.15), se encuentra que tiene la misma forma que la ecuación (2.4), salvando las diferencias que se hicieron en cada modelo tanto en la función de energía libre como en la función de disipación.

2.2.4. Modelo de Lorentz

En el modelo propuesto por Lorentz & Godard [2011] se encuentra definido también por las dos ecuaciones de equilibrio (2.3) y (2.4) que se vieron para los modelos anteriores, considerando nulas las fuerzas asociadas a alguna fuente de daño.

En general, se puede decir que existen dos maneras de trabajar con las ecuaciones (2.3) y (2.4) y sortear la dificultad que presenta la última ecuación introducida por la subdiferencial de la función indicador que fuerza la condición de irreversibilidad del daño. En la primera forma, considerando un material rate-independent, la ecuación que gobierna la evolución del daño puede resolverse mediante el uso de una función de daño que cumpla con las condiciones de carga y descarga. La dificultad que presenta el atacar el problema de este modo es que esa función de daño resulta no local, debido a la introducción del gradiente y, por lo tanto, es complicado desde el punto de vista numérico hacer cumplir la condiciones de carga y descarga en cada punto de Gauss. La

otra forma de atacar el problema es resolver de manera acoplada las ecuaciones (2.3) y (2.4) introduciendo de alguna forma en la última ecuación la condición de irreversibilidad del daño. Una de esas formas es el empleo de aproximaciones de la función indicador como se vio en [Frémond & Nedjar \[1996\]](#) y [Miehe et al. \[2010\]](#), presentando muchas dificultades en la resolución por el empleo del penalizador que se usa para aproximar esta función. Otra manera es la que propone [Nedjar \[2002\]](#), pero como se ve en el esquema de resolución, el mismo presenta dos iteraciones anidadas, una para el sistema de ecuaciones con el que se determinan los campos de desplazamiento y daño, y otra para controlar la condición que debe cumplir la variable de historia de daño, lo cual lo vuelve muy costoso computacionalmente.

El modelo de [Lorentz & Godard \[2011\]](#) propone una formulación variacional que se resuelve a partir de la aplicación del método descomposición coordinación (MDC). Dicho método consiste en añadir una variable auxiliar de daño, y escribir parte de la formulación en términos de la misma. Esta nueva variable auxiliar toma la parte local del problema y es a la que se atribuye la disipación, mientras que el resto de la formulación continua en términos de la variable de daño original, a la que le respondería la parte no local. Luego, la igualdad entre las dos partes que componen la variable de daño se encuentra coordinada por multiplicadores de Lagrange, que se añaden a la formulación. La ventaja que presenta la forma de atacar el problema mediante el MDC que se emplea en el modelo de Lorentz, es que se resuelve en cada etapa del proceso iterativo de un paso de carga la parte de la variable de daño que conduce a un problema más sencillo. La parte local de la variable se resuelve mediante el empleo de una función de daño y las condiciones de carga y descarga en cada punto de Gauss. Este problema resulta sencillo debido a que la función de daño ya no cuenta con la parte no local del gradiente. Luego, la parte de la variable de daño a la que se le atribuye el gradiente se resuelve de manera acoplada junto con la ecuación de equilibrio para el campo de desplazamientos y la ecuación que fuerza la igualdad en entre la parte local y no local de la variable de daño.

La metodología adoptada en el trabajo de [Lorentz & Godard \[2011\]](#) es en la que se basa esta tesis para resolver el modelo no local de daño propuesto. Más detalles sobre la misma pueden encontrarse en la sección (3.4.1).

2.3. Aspectos a tener en cuenta en la modelación de la RAS en el hormigón

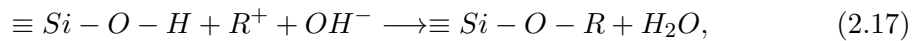
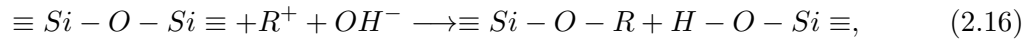
El hormigón es uno de los materiales más utilizados en la construcción obras de civiles, por lo que resulta de vital importancia tener conocimiento de las distintas patologías que pueden afectarlo. Entre estas patologías, se encuentran aquellas que pueden ser producidas por distintos tipos de ataques químicos, y entre los ataques químicos la reacción álcali-sílice (RAS), es sin duda una de las más populares. La RAS es una reacción deletérea que se da en el interior del hormigón al reaccionar la sílice reactiva que contiene los agregados con los álcali presentes en la solución de poros de la pasta de cemento. El producto de dicha reacción es un gel higroscópico, es decir que se expande al entrar en contacto con agua. El gel de RAS se expande en el interior de la porosidad del hormigón hasta que consigue llenarla. A partir de ese momento comienza a ejercer una presión interna que puede causar micro fisuras y en algunos casos más avanzados fisuras que son reconocidas a simple vista. El proceso antes mencionado causa sin duda deterioro en las propiedades mecánicas del hormigón y afecta la seguridad de la estructura del que se encuentra formando parte. A continuación, presentamos una recopilación de antecedentes tendientes a explicar el proceso de formación del gel de la RAS, su expansión, composición química y modo de fisurar al hormigón. Dichos antecedentes son la base de las expresiones utilizadas para calcular la cinética de la RAS, que se exponen en el capítulo (5.2.3). También se expone un breve resumen de la modelación de la RAS en distintas escalas, ahondando sobre algunos de los principales modelos macroscópicos que sirvieron de punto de partida para esta tesis.

2.3.1. Mecanismo de RAS

2.3.1.1. Formación del gel de la RAS

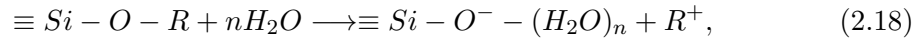
La RAS en el hormigón es una reacción química que ocurre entre la sílice reactiva de los agregados y los álcalis en la solución de poros en la pasta de cemento. El resultado de dicha reacción es un gel higroscópico que expande al absorber agua. El proceso de la RAS es complejo, y consta de varias etapas. En el trabajo de [Dent Glasser & Kataoka \[1981\]](#) se describe un proceso simplificado de la RAS en dos etapas, el cual puede resumirse en la figura (2.2). La primera etapa es aquella que tiene por resultado final la formación de

un gel higroscópico, por efecto de disolución de la sílice. Dicha etapa se compone, a su vez, de dos partes. Por un lado, se produce la ruptura de las redes de siloxanos causada por el ataque de los iones hidroxilos, produciendo silicato alcalino y ácido silícico. Luego, el ácido silícico reacciona inmediatamente con otros iones hidroxilo, produciendo más silicato alcalino. El silicato alcalino es un gel higroscópico que tiene gran capacidad de absorber agua. Estas dos partes del proceso de formación del gel son el resultado de la disolución de la sílice y se pueden describir por las siguientes ecuaciones:



donde R^+ denota un ion alcalino de sodio o potasio (Na^+ o K^+).

La segunda etapa es la expansión del gel higroscópico por absorción del agua libre y se puede describir como:



donde n es el número de hidratación.

[Dron & Brivot \[1993\]](#) reprodujeron el mecanismo de disolución de la sílice en estudios experimentales usando varios tipos de sílice. Sus resultados muestran que la disolución de la sílice puede ser interpretada como un mecanismo de reacción que sigue una ley cinética de primer orden. En un entorno suficientemente húmedo, el gel higroscópico absorbe agua, lo que resulta en una expansión del mismo. Por comparación de tiempos de expansión de gel sintéticos y probetas de hormigón, se puede concluir, que la absorción de agua por un gel es mucho más rápida que el proceso de deterioro de hormigón afectado por RAS. Esto lleva a la conclusión que la absorción de agua por gel puede ser considerada como un proceso instantáneo en comparación con la formación de gel por la disolución de la sílice (ver [Larive \[1997\]](#)). Dado a que en un proceso de varias etapas el proceso más lento controla la cinética global, es razonable asumir que la RAS (formación más expansión del gel) es gobernada por la ley no instantánea de formación de gel.

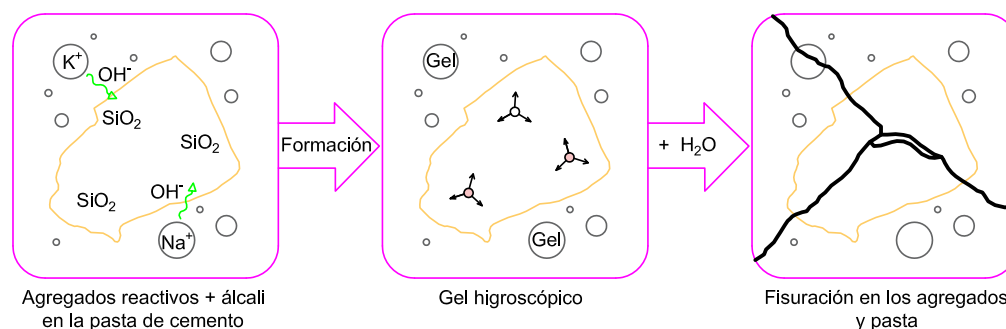


FIGURA 2.2: Etapas de la RAS [Dent Glasser & Kataoka, 1981].

2.3.1.2. Composición del gel de la RAS

Para que la RAS pueda ocurrir en el hormigón, se sabe que deben cumplirse tres condiciones en forma simultánea: la presencia de agregados reactivos, elevado nivel de alcalinidad en la solución de poros de la pasta de cemento y suficiente humedad (no menos del 80 % de humedad relativa en los poros del hormigón). Si alguna de estas condiciones no está presente, la RAS no puede llevarse a cabo. Una vez iniciada, la RAS es sensible a estas tres condiciones como se muestra en la figura (2.3). La expansión del gel de la RAS por absorción de agua induce fisuración en los agregados y en la pasta de cemento circundante, resultando en el deterioro del hormigón. La composición química del gel determina su capacidad de expandir y sus propiedades mecánicas, lo cual tiene incidencia en el mecanismo de deterioro del hormigón.

Muchos científicos investigaron la composición química de gel realizando análisis con microscopios, entre otros estudios (ver Knudsen & Thaulow [1975] y Thaulow et al. [1996]). Thaulow et al. [1996] encontraron que la composición química de gel caía dentro del rango de 53 a 63 % de sílice, 20 a 30 % de calcio y 15 % aproximadamente de sodio y potasio. La composición química del gel de la RAS varía fuertemente dependiendo de la posición del gel. Se encontró que el gel dentro de los poros y grietas en la pasta de cemento tiene mayor contenido de calcio en comparación con el gel cerca y en los agregados reactivos [Fernandes, 2009]. La exudación de gel en estado viscoso consta de silicio y álcali, pero no de calcio [Fernandes, 2009]. La ausencia de calcio se puede atribuir a un transporte corto dentro de la pasta de cemento. La composición de gel también variaría con el tiempo de acuerdo con Thaulow et al. [1996] y Sachlová et al. [2010].

Muchos investigadores (ver [Thaulow et al. \[1996\]](#), [Kawamura & Fuwa \[2003\]](#)) han tratado de establecer la relación entre la composición del gel y la expansibilidad, pero aún no se entiende totalmente el papel de la composición química en la expansividad. [Powers & Steinour \[1955\]](#) encontraron que la expansión producida por el gel de la RAS podría ser segura o insegura dependiendo del contenido de calcio en el producto de reacción. Un gel de alto contenido en calcio, no expande, y no causará fisuración en el hormigón. Sin embargo, si las concentraciones de iones de calcio son bastante bajas, se forman geles muy expansivos dando lugar a severos problemas de fisuración. Sin embargo, [Diamond \[2000\]](#) señaló que la composición y las propiedades del gel de la RAS son complejas y el modelo de Powers y Steinour puede ser razonable pero no universal. [Scrivener \[1994\]](#) encontró un tipo de gel de la RAS con mayor contenido de calcio absorbiendo una cantidad similar de agua en comparación con un gel con menos calcio. [Fernandes et al. \[2007\]](#) señalaron que la expansión debido a la RAS se verificó en el hormigón, incluso con bajos contenidos de calcio.

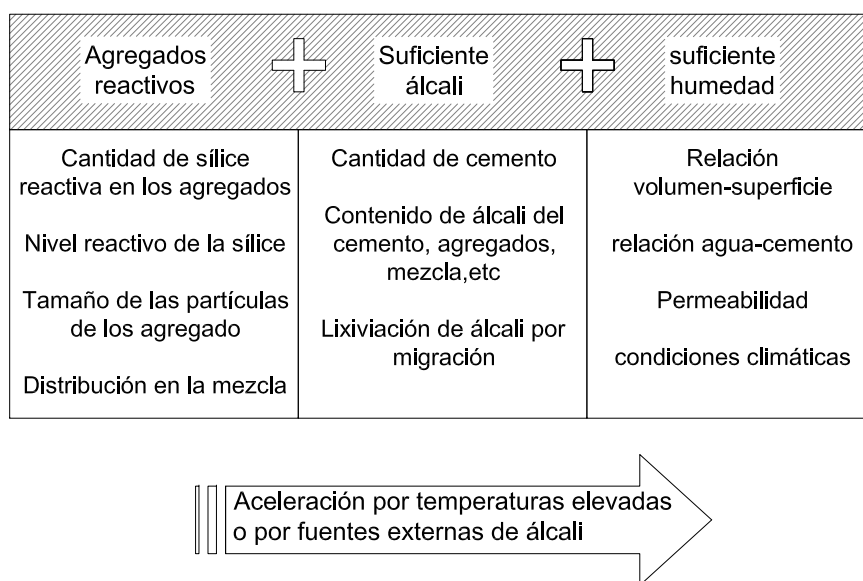


FIGURA 2.3: Condiciones que deben cumplirse para que la RAS puede llevarse a cabo.

2.3.1.3. Mecanismo de expansión y fisuración

Está ampliamente aceptado que el deterioro del hormigón afectado por RAS se debe a la absorción de agua por parte del gel higroscópico y a su expansión. La expansión del gel genera una presión interna, causando apertura y propagación de fisuras cuando se

excede la resistencia a tracción del hormigón. Sin embargo, el mecanismo de fisuración y expansión no es aún entendido de manera clara, habiéndose realizado muchos intentos por explicarlo. Uno de los primeros estudios fue el de Hansen [1944], quien propuso una teoría de presión osmótica. Esta teoría sugiere que la pasta de cemento circundante al agregado reactivo se comporta como una membrana semipermeable. Debido a la presencia de la membrana, los iones silicato alcalino no pueden difundirse de los sitios reactivos en la pasta de cemento circundante, pero el agua puede pasar a través de la solución de poro. De este modo, se forma una celda de presión osmótica y el gel de la RAS se expande con una presión hidrostática creciente, induciendo agrietamiento en la pasta de cemento. Dent Glasser [1979] también está de acuerdo con esta teoría. McGowan & Vivian [1952] propusieron una teoría mecánica para explicar la expansión del gel de la RAS. En esta teoría, se forma una capa sólida de silicato alcalino sobre la superficie del agregado reactivo, absorbe la humedad de la solución de poro y se transforma de un sólido a un gel. El gel luego se hincha e induce fisuración en la pasta de cemento. La teoría de la presión osmótica y la teoría de la expansión mecánica son fundamentalmente las mismas [Powers & Steinour, 1955]. El gel de la RAS puede existir en forma de fluido sólido o coloidal, dependiendo fuertemente de la cantidad de agua embebida. La expansión del hormigón se genera principalmente a través de la celda de presión osmótica del gel fluido o a través del hinchamiento del gel sólido. Bazant et al. [2000] propusieron que la expansión del hormigón debido a RAS es causada por la presión acumulada en la zona de transición interfacial entre el agregado y la pasta de cemento circundante. La absorción de agua genera una presión en el gel, que se libera inicialmente empujando el gel para llenar los microporos en la pasta de cemento situada cerca de la superficie del agregado. Una vez que los poros alrededor del agregado reactivo están completamente llenos por el gel, una formación adicional del gel induce la presión creciente, agrietando así la pasta de cemento. Dron & Brivot [1993] supusieron que la sílice disuelta se difunde lejos de los agregados reactivos en los poros conectados en la pasta de cemento y luego se producen la absorción de agua para inducir el agrietamiento del hormigón. De acuerdo con los mecanismos de hinchamiento anteriormente mencionados, la fisuración tiene lugar solamente en la pasta de cemento y el agregado sometido a una presión de compresión no se fractura. Sin embargo, Ponce & Batic [2006] han demostrado que los patrones de fisuración del hormigón afectado por RAS dependen de la naturaleza mineralógica del agregado. Ponce y Batic llevaron a cabo un examen petrográfico y concluyeron que los agregados tales como rocas volcánicas opales y vítreas con formación de gel y expansión

en la interfaz agregado-pasta causaron fisuración de la pasta de cemento; mientras que los agregados de mineralogía mixta, que son más comunes en el campo, con reacción en el interior generaron grietas tanto en los agregados como en la pasta de cemento.

2.3.2. Modelos de RAS en distintas escalas

Las RAS juega un rol vital en la vida de la estructura de hormigón, esto lleva a que sea de gran interés tomar medidas para evitarla o reducirla. Algunas de estas medidas consiste en identificar a los agregados reactivos (ver [Mather \[1999\]](#) y [Alasali & Malhotra \[1991\]](#)) y/o añadir a la dosificación del hormigón adiciones tales como la ceniza volante (ver [Shehata & Thomas \[2000\]](#) y [Karakurt \[2011\]](#)). En búsqueda de medidas más efectivas para mitigar la RAS es fundamental entender el mecanismo de la química de la reacción. Para abordar este problema se desarrollaron algunos modelos matemáticos, basados en estudios y observaciones experimentales, los cuales son denominados micro y meso modelos. Los micro modelos se usan generalmente para probar las distintas hipótesis que se tiene con relación al mecanismo de expansión y fisuración que produce la RAS (sección (2.3.1.3)) pudiendo ser puramente mecánicos (ej. [Charpin, 2012](#)), puramente químicos (ej. [Saouma et al., 2015](#)) o mixtos (ej. [Bazant et al. \[2000\]](#), [Suwito et al. \[2002\]](#), [Poyet et al. \[2007\]](#)). Los micro modelos generalmente examinan un elemento de volumen representativo (EVR) que está compuesto de una partícula esférica rodeada de pasta de cemento. Los meso modelos son modelos multifases donde se representan individualmente la fase agregado, pasta de cemento y gel interactuado entre sí. De este modo la anisotropía puede ser representada explícitamente en el hormigón. En los modelos mesoscópicos existentes la expansión provocada por la RAS puede ser tenida en cuenta por simple expansión del agregado [[Comby-Peyrot et al., 2009](#)] o por expansión del gel ubicado aleatoriamente en el agregado [[Dunant, 2010](#)].

Con respecto al gran número de estructuras existentes realizadas con agregados potencialmente peligrosos para producir RAS, el único modo de reducir el peligro es tomando medidas tales como la reparación o sellado de fisuras. Las medidas a tomar dependen en gran parte de la predicción del campo de tensiones y desplazamientos en el hormigón reactivo. Es por esto, que se requieren los modelos macro para una simulación realista de la expansión inducida por la RAS en la estructura. En los últimos años se desarrollaron muchos modelos macroscópicos que reprodujeron con éxito el campo de desplazamientos

de las estructuras afectadas por RAS. Muchos de los modelos macroscópicos son formulados en el marco de los elementos finitos introduciendo en el modelos constitutivo la cinética de la reacción. Se considera aquí la degradación del material por medio de modelos de plasticidad o de daño isótropo o anisótropo, entre otros (ver [Ulm et al. \[2000\]](#), [Huang & Pietruszczak \[1999\]](#), [Comi et al. \[2009\]](#)). Algunos modelos constitutivos más sofisticados incluyen incluso los fenómenos de *creep* y *shrinkage* durante el proceso de RAS (ver [Grimal et al. \[2008a\]](#), [Grimal et al. \[2008b\]](#), [Pesavento et al. \[2012\]](#)). Para la cinética de la reacción se adopta la cinética propuestas originalmente por [Larive \[1997\]](#) o sus modificaciones posteriores propuestas por [Steffens et al. \[2003\]](#), entre otros. Varios factores de los que dependen de la RAS se introdujeron en la cinética, como por ejemplo los efectos de la temperatura, la humedad, el estado de tensiones, entre otros.

2.3.3. Descripción de los principales modelos macroscópicos para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS

A la recopilación de antecedentes realizada en el capítulo (1.2), agregamos la descripción de algunos de los principales modelos constitutivos macroscópicos de los que se disponen hoy en día para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS.

2.3.3.1. Modelo de Bangert

El modelo planteado por [Bangert et al. \[2004\]](#) considera al material hormigón afectado por RAS como un sistema trifásico, cuyas fases son: sólida, líquida y gaseosa. Estas fases se denotan como \bullet^φ , con $\varphi = s, l$ o ga ; donde \bullet es una determinada variable. se utilizará para la fases fluidas \bullet^{fl} con $fl = l$ o ga . La RAS se considera mediante un pasaje progresivo dentro de la fase sólida de material no reaccionado a material reaccionado. Estas sub-fases de la fase sólida se notarán como \bullet^u y \bullet^r para el material no reaccionado y reaccionado respectivamente. Lo anterior puede verse en la figura (2.4) donde se muestra cómo evolucionan la fracción volumétricas ϕ^s desde un tiempo $t = 0$, cuando la reacción no ha comenzado, hasta un tiempo $t \rightarrow \infty$, cuando la reacción se ha agotado completamente.

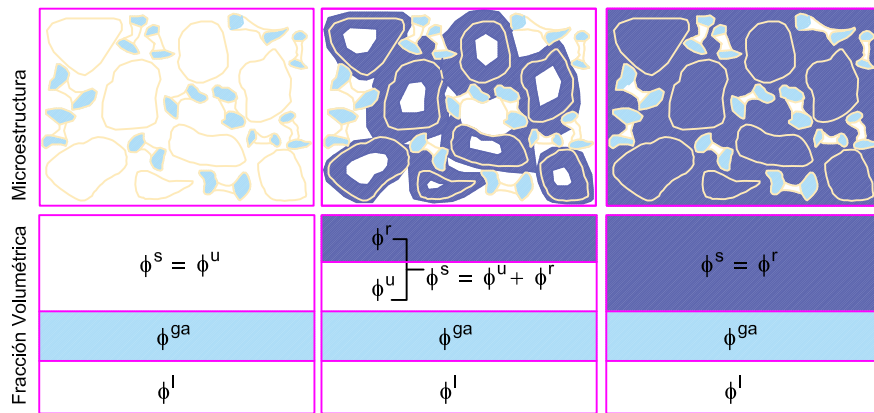


FIGURA 2.4: Fracciones volumétricas en el modelo de Bangert et al. [2004].

Ecuaciones de balance y leyes constitutivas

La ley constitutiva que se utiliza para establecer la relación entre la tensión $\boldsymbol{\sigma}$, la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y la presión total de la fase fluida p^{FL} , es la Ley de Bishop, expresada como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{ef} - p^{FL} \boldsymbol{\delta}, \quad (2.19)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{ef}$ es la tensión efectiva y $\boldsymbol{\delta}$ es el tensor identidad de segundo orden. se aclara en este modelo la presión p^{FL} sólo corresponde a la fase fluida, es decir liquido y gas, y no tiene relación con el efecto de la RAS. El efecto de la RAS en este modelo se tiene en cuenta por una deformación impuesta que se mostrará más adelante. La ley constitutiva de la ecuación (2.19) se debe ser introducir en la ecuación de equilibrio mecánico para resolver el problema. La ecuación de equilibrio mecánico para el caso cuasiestático es:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.20)$$

donde Γ es el contorno del sólido analizado y $\boldsymbol{\gamma}$ la normal saliente al contorno; \mathbf{F} y \mathbf{f} son las fuerzas de superficie y de volumen respectivamente. Para definir la presión total de la fase fluida se utiliza la ley de Dalton $p^{FL} = \sum s^{fl} p^{fl}$, y para definir las presiones p^{fl} se utilizan las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad s^{fl} &= \frac{\phi^{fl}}{\phi^l + \phi^{ga}}, & \text{(b)} \quad p^c &= p^{ga} - p^l, \\ \text{(c)} \quad p^c &= p^r \left[[s^l]^{-\frac{1}{m}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}, & \text{(d)} \quad \phi^{fl} \mathbf{w}^{fl} &= -\frac{k^{fl}}{\mu^{fl}} \nabla p^{fl}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde la ecuación (2.21)(a) es la relación entre el grado de saturación s^{fl} y la fracción volumétrica ϕ^{fl} ; (2.21) (b) es la definición de la presión capilar p^c ; (2.21) (c) es la relación entre la presión capilar p^c y el grado de saturación de la fase líquida s^l , dada por la ley de Van Genuchten [1980]; (2.21) (d) es la relación entre la presión p^{fl} y la velocidad \mathbf{w}^{fl} , dada por la ley de Darcy. Los parámetros p^r , m y n , pueden ser determinados de ensayos. k^{fl} y μ^{fl} son la permeabilidad y viscosidad dinámica respectivamente de las fases fluidas, y pueden obtenerse mediante ensayos.

Las leyes constitutivas de las ecuaciones (2.21) se deben combinar con las ecuaciones de balance para las fases fluidas. En estas ecuaciones se considera que no hay intercambio entre la fase líquida y sólida producto de la RAS. Las ecuaciones de balance para las fases líquida y gaseosa son:

$$(a) \quad \frac{\partial \phi^l}{\partial t} + \text{div}(\phi^l \mathbf{w}^l) = 0, \quad (b) \quad \frac{\partial [\phi^{ga} \rho^{ga}]}{\partial t} + \text{div}(\phi^{ga} \rho^{ga} \mathbf{w}^{ga}) = 0. \quad (2.22)$$

Las ecuaciones de balance (2.22) y las ecuaciones constitutivas (2.21) se resuelven generalmente de manera acoplada para obtener las presiones en las fases fluidas. Por último la tensión efectiva $\boldsymbol{\sigma}^{ef}$ de la ecuación (2.19) se calcula asumiendo comportamiento homogéneo e isotrópico del material y considerando al efecto de la RAS como una deformación volumétrica impuesta. Se tiene entonces:

$$\boldsymbol{\sigma}^{ef} = [1 - \beta] \{2G\mathbf{e} + K [\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varepsilon^g] \boldsymbol{\delta}\}, \quad (2.23)$$

donde G y K son el módulo de corte y volumétrico respectivamente. $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ y \mathbf{e} son la traza de la deformación y el tensor desviador de deformaciones respectivamente de $\boldsymbol{\varepsilon}$. La variable β es el daño encargado del deterioro del material. En este caso la variable β responde a un modelo de daño no local según el trabajo de Peerlings et al. [1996]. La variable ε^g es la deformación volumétrica producida por efectos de la RAS. La deformación ε^g puede calcularse en función de la ecuación de balance de sólidos, considerando un pasaje de sólido no reaccionado a sólido reaccionado según una ley cinética de primer orden y considerando también que cada constituyente de la fase sólida es incompresible. Se tiene entonces:

$$(a) \quad \varepsilon^g = \frac{\phi^s}{\phi_0^s} - 1, \quad (b) \quad \frac{\partial \phi^u}{\partial t} = -k^g \phi^u, \quad (c) \quad \frac{\partial \phi^r}{\partial t} = \frac{\rho^u}{\rho^r} k^g \phi^u, \quad (2.24)$$

donde k^g y $\frac{\rho^u}{\rho^r}$ (cociente de densidades de cada parte de la fracción sólida) son parámetros que pueden obtenerse de ensayos.

Calibración y ejemplos resueltos

La calibración de los parámetros químicos se obtiene de ensayos de expansión libre como se muestra en la figura (2.5)(a). Luego la variación de estos parámetros con el grado de saturación puede obtenerse mediante un ajuste lineal como se muestra en la figura (2.5)(b).

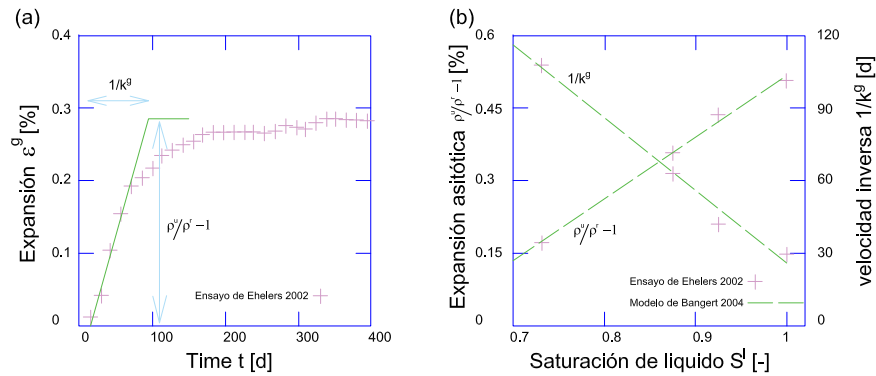


FIGURA 2.5: Ajuste numérico presentado por Bangert et al. [2004]. (a) Ajuste de los parámetros químicos por medio de un ensayo de expansión libre. (b) Ajuste lineal de los parámetros químicos para distintos grados de saturación.

Otro ejemplo presentado por Bangert et al. [2004] corresponde al ensayo de una viga de hormigón reactivo sometida a presiones de líquido en sus bordes y a una carga concentrada. La configuración del ensayo se puede ver en la figura (2.6)(a). Las condiciones de presión variable en los bordes de la viga se pueden ver en la figura (2.6)(b). La expansión a través del tiempo de los puntos A, B y C de la viga, conforme avanza la reacción afectada por el campo de grado de saturación, se puede ver en la figura (2.6)(c). Por último, en la figura (2.6)(d), se puede ver la respuesta factor de carga vs carga del ensayo de flexión. Dichos ensayos se realizaron en dos edades distintas (0 días y 100 días).

2.3.3.2. Modelo de Comi

El modelo planteado por Comi (Comi et al. [2009] y Comi et al. [2012]) considera al material hormigón afectado por RAS como un sistema bifásico. Las fases que constituyen al material son: esqueleto sólido y fase húmeda. El esqueleto sólido es una homogeneización de los agregados, matriz y porosidad donde no se aloja la el gel. Se hace referencia

a las cantidades asociadas a esta fase mediante el superíndice s . La fase húmeda es una homogeneización la fase gel, fase líquida y la fase gaseosa; cuyas cantidades asociadas son referidas con los superíndices g , l y ga respectivamente. Se hace referencia a las cantidades asociadas a la fase húmeda con el superíndice gw . En la figura (2.7) se puede ver un esquema de un elemento de volumen representativo (EVR) que adopta Comi de volumen V y compuesto los volúmenes de las fases a las que se hizo referencia anteriormente. En este modelo, aparte de la ecuación de equilibrio mecánico, se considera una ecuación de balance de líquido y, a diferencia del trabajo de Bangert et al. [2004], se considera la dependencia del progreso de la RAS no solo de la humedad, sino también de la temperatura. Por el motivo antes mencionado, se incorpora la ecuación del calor. La evolución de la fase gel se tiene en cuenta a partir de expresiones que derivan del trabajo de Larive [1997].

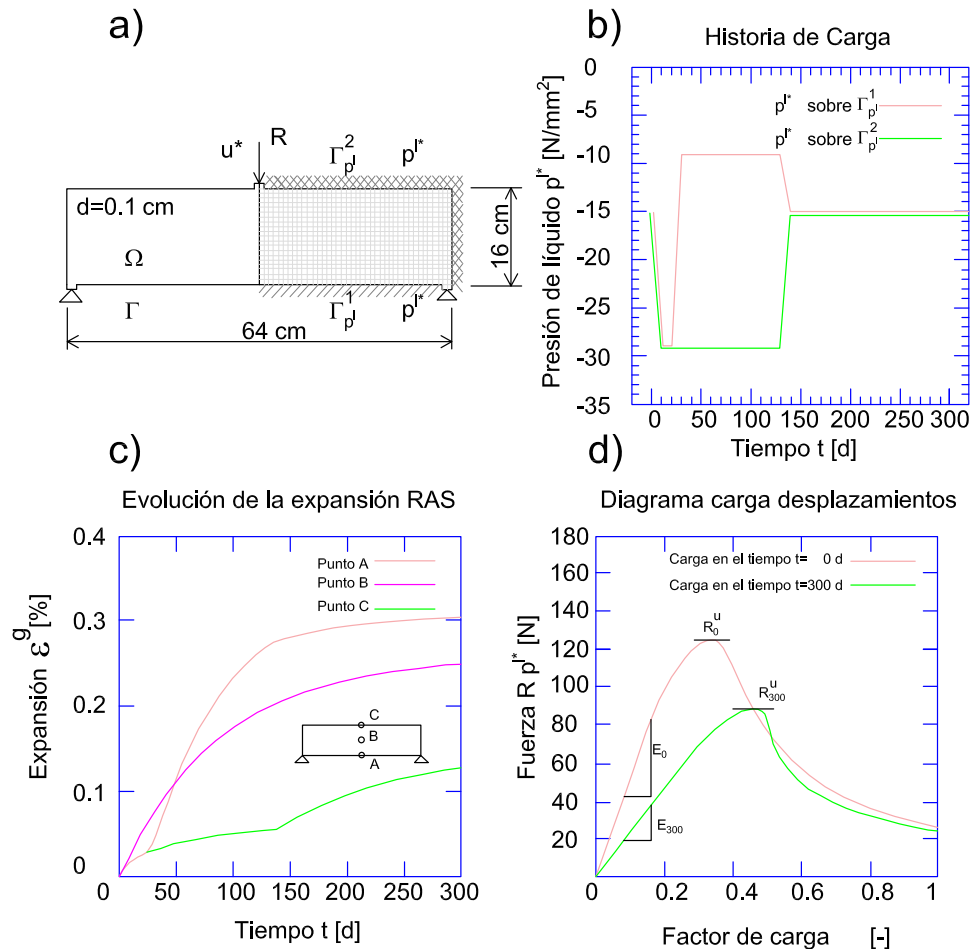


FIGURA 2.6: Ensayos de viga de hormigón simple presentado por Bangert et al. [2004]. (a) Configuración del ensayo. (b) Historia de condiciones de p^l . (c) Expansión RAS en distintos puntos. (d) Diagrama carga-factor de desplazamiento a distintas edades.

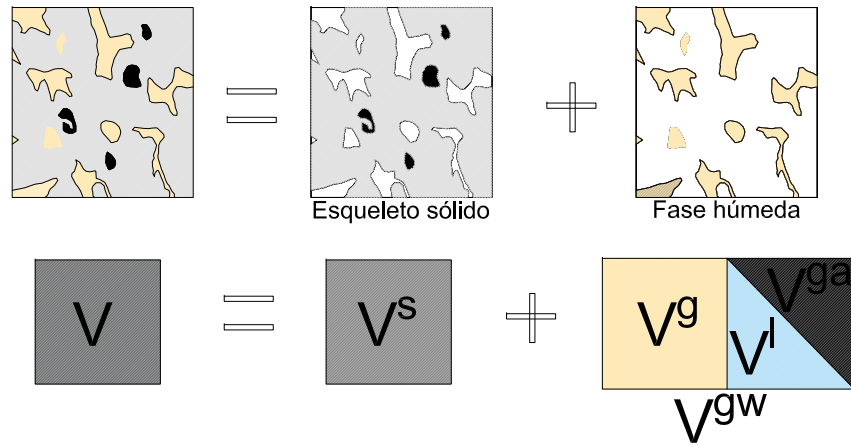


FIGURA 2.7: EVR propuesto por Comi.

Ecuaciones de balance y leyes constitutivas

Comi incorpora en su modelo una presión del gel p^g , producida por la fase húmeda, que permite tener en cuenta el efecto de la RAS. Esto difiere del trabajo de [Bangert et al. \[2004\]](#), quien considera a la RAS por una expansión adicional de la fase sólida. Adicionalmente, Comi desprecia el efecto mecánico de la presión de la fase gas y de la fase líquida. La presión de la fase líquida se desprecia teniendo en cuenta el hecho de que en elevados contenidos de humedad, que es lo que necesita la RAS para progresar, el efecto de la presión de líquido en un punto es demasiado bajo. La ley constitutiva para relacionar la tensión σ , la deformación ε y la presión de gel p^g , esta basada en la teoría de Biot desarrollada en [\[Coussy, 2004\]](#). Esta relación constitutiva, considerando al material homogéneo e isótropo, y se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sigma &= [1 - d] \{ 2Ge + K [tr(\varepsilon) - \alpha^s [T - T^0]] \delta \} - bp^g \delta, \\
 \text{(b)} \quad p^g &= -[1 - \beta]M \left\{ btr(\varepsilon) - \left[\frac{\epsilon^\infty \xi}{B} + \alpha^g [T - T^0] \right] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

donde M y b son el módulo y el coeficiente de Biot respectivamente, y $B = \frac{Mb}{K+Mb^2}$. α^s y α^g son los coeficientes de dilatación el material hormigón afectado por RAS y del gel respectivamente, T es la temperatura y T^0 la temperatura inicial, ϵ^∞ es la deformación volumétrica asintótica, que es la deformación volumétrica sufrida por una probeta en expansión libre cuando la RAS se agota. ξ es una variable que mide el progreso de la RAS y vale $\xi = 0$ cuando la RAS no ha comenzado y $\xi = 1$ cuando la RAS se agota completamente. La variable de daño β es la encargada de producir deterioro en el

material. Esta variable responde a un modelo escalar de daño local regularizado, según se muestra en el trabajo de Comi [2001b]. Si bien en el modelo de Comi el estado mecánico no afecta al progreso de la RAS, Comi plantea su modelo de tal forma que el cálculo de la variable de daño requiera de un parámetro químico que se obtiene de ensayos de expansión de probetas reactivas. El problema finalmente se resuelve combinando la ley constitutiva de la ecuación (2.25) con la ecuación de equilibrio mecánico, mostrada en (2.20).

Para obtener el campo de temperaturas T se resuelve la ecuación del calor en régimen transitorio, incorporando como relación entre el gradiente de temperatura y el flujo de calor a la ley de Fourier. Se debe resolver entonces:

$$k^T \operatorname{div}(\nabla T) = c^T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.26)$$

donde k^T y c^T son la conductividad térmica y capacidad calórica respectivamente.

El modelo de Comi también requiere de las ecuaciones constitutivas y de balance para la parte líquida dadas por las ecuaciones (2.21) y (2.22). Para la resolución del conjunto de ecuaciones antes mencionado, se considera nula a la presión de la fase gaseosa y la presión de la fase líquida sólo se calcula a los fines de obtener el grado de saturación s^l , para luego obtener el progreso de la RAS ξ .

Para cerrar el modelo el cálculo del progreso de la RAS se realiza resolviendo una ecuación diferencial que expresa la variación de ξ mediante una ley cinética de primer orden, que se propone en los trabajos de Larive [1997], Ulm et al. [2000] y Steffens et al. [2003].

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\langle f_{sw}(s^l) - \xi \rangle^+}{\hat{t}(\tau_c(s^l, T), \tau_l(s^l, T))}, \quad (2.27)$$

donde $\langle \bullet \rangle^+$ es la función que toma la parte positiva de \bullet . Las funciones f_{sw} y \hat{t} dependen de la temperatura T y del grado de saturación s^l . Se ve también que la función \hat{t} depende del tiempo característico τ_c y el tiempo de latencia τ_l .

Calibración y reproducción de ejemplos

En este caso, al igual que en el trabajo de Bangert et al. [2004], los parámetros químicos del modelo requieren el conocimiento de curvas de ensayos de expansión libre a distintos grados de saturación. Adicionalmente, El modelo de Comi requiere de ensayos

donde puedan medirse las propiedades mecánicas el material según avance la RAS. Para este fin Comi considera los ensayos realizados por [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#) donde probetas cilíndricas reactivas son sometidas a distintos tipos de confinamiento como se ve en la figura (2.8).

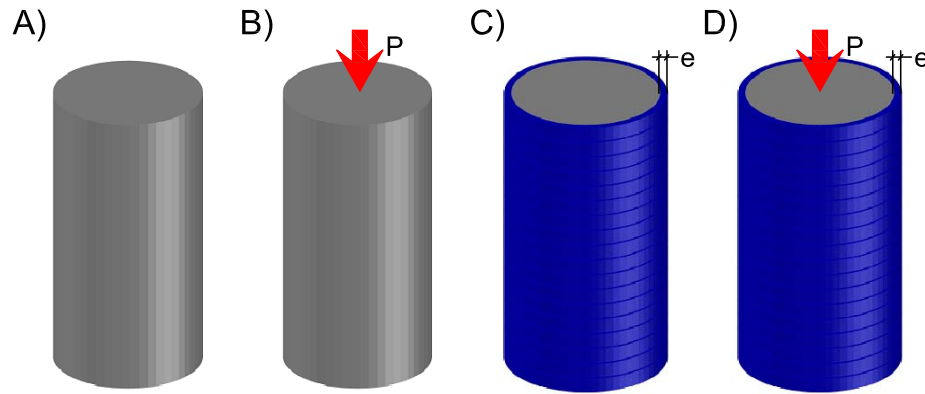


FIGURA 2.8: Ensayo de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#): a) expansión libre; b) carga axial de compresión, $P = -10MPa$ y $P = -20MPa$; c) confinamiento pasivo con anillos de acero, $e = 3mm$ y $e = 5mm$; d) carga axial de compresión y confinamiento pasivo.

Luego, con el fin de probar la capacidad del modelo de reproducir el daño causado en una pieza de hormigón por gradientes de reacción química producidos por condiciones de humedad variable, se reprodujo los ensayo de [Multon & Toutlemonde \[2010\]](#). Este ensayo consiste en reproducir la respuesta de vigas de hormigón simple y armado sometidas a condiciones de humedad variable en el tiempo. (ver figura (2.9)).

2.3.3.3. Modelo de Pesavento

El modelo planteado por [Pesavento et al. \[2012\]](#) considera al material hormigón afectado por RAS como un sistema trifásico, cuyas fases son: sólida, líquida y gaseosa. Este modelo, al igual que el de [Bangert et al. \[2004\]](#), considera a la RAS como una deformación volumétrica impuesta en la fase sólida, pero en este caso toda esta fase va cambiando su densidad y volumen conforme avanza la RAS. La diferencia fundamental de este modelo con los anteriores es que las ecuaciones de balance de masa de sólido y líquido consideran un término de intercambio de entre una y otra, lo que representa el pasaje de líquido para transformarse en gel de la RAS en la fase sólida. El modelo también considera desde lo constitutivo un acoplamiento entre el daño mecánico, el progreso de la RAS y las propiedades de conducción de humedad del material lo cual hace que

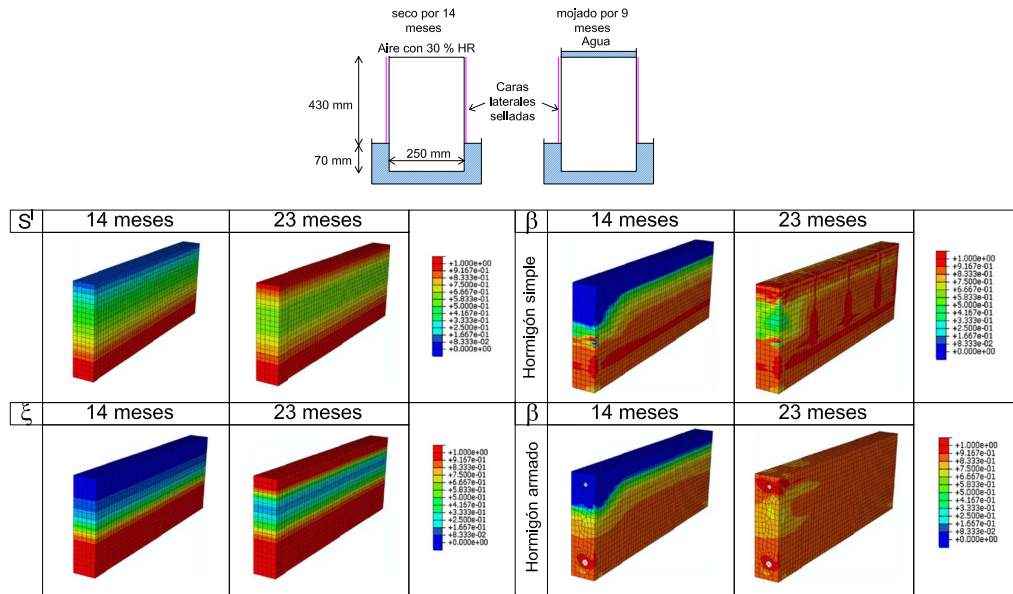


FIGURA 2.9: Configuración del ensayo en vigas, mapas de grado de saturación, progreso de reacción, y daño realizado en el trabajo de Comi et al. [2012].

las ecuaciones de balance de masa antes citadas y la ecuación de equilibrio mecánico no puedan ser resueltas de manera desacoplada. En el modelo también se considera la ecuación del calor y de balance de la fase gas cuyos términos de acoplamiento con la evolución de la RAS pueden ser despreciados.

Leyes constitutivas

En este modelo el progreso de la RAS es calculado, al igual que en el modelo de Comi, por la ecuación (2.27). Luego, la expansión producida por la RAS puede ser calculada como:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{\partial \varepsilon^g}{\partial t} &= k^{p1} \frac{\partial m^g}{\partial t} \delta, \\
 \text{(b)} \quad \frac{\partial m^g}{\partial t} &= M^g (s^l) [1 - \xi]^{k^{p2}} \frac{\partial \xi}{\partial t},
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde m^g es la masa de gel de la RAS por unidad de volumen y k^{p1} , k^{p2} y M^g son parámetros que pueden obtenerse según el trabajo de Steffens et al. [2003]. La masa de gel de la RAS por unidad de volumen tiene en cuenta, en este caso, la pérdida de expansión del gel por efectos del secado por medio de k^{p2} . La masa de gel de la RAS por unidad de volumen es también la masa de gel que se tiene en cuenta en el intercambio de masa entre la fase sólida y la fase líquida.

En cuanto a la relación constitutiva que se tiene en cuenta para establecer la relación entre la tensión total σ , la deformación ε y la presión total de la fase fluida p^{FL} , se

considera al igual que en el modelo de [Bangert et al. \[2004\]](#), la ecuación (2.19).

La determinación de la presión total de la fase fluida p^{FL} se realiza en base a las ecuaciones de balance de la fase líquido y de la fase gas, sumadas a las ecuaciones (2.21)(b) y (2.21)(d) y también a las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & p^{FL} = p^{ga} - x^l p^c, \\
 \text{(b)} \quad & s^l(p^c, m^g) = s^l(p^c, 0) + \frac{m^g}{m^{g\infty}} \left[s^l(p^c, m^{g\infty}) - s^l(p^c, 0) \right], \\
 \text{(c)} \quad & k^l(m^g, \beta) = k_0^l 10^{A_k \frac{m^g}{m^{g\infty}}} 10^{A_\beta \beta}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

La ecuación (2.29)(a) es la expresión adoptada para la presión total de la fase fluida p^{FL} , según [Gray & Schrefler \[2007\]](#). En dicha ecuación, x^l representa la parte de la fracción sólida en contacto con la fracción líquida, por lo que esta variable es la encargada de producir la retracción ante bajos grados de saturación. La expresión que [Pesavento et al. \[2012\]](#) propone para x^l es dependiente de m^g , por lo que también se considera el consumo de líquido causado por la RAS. La ecuación (2.29)(b) considera en el cálculo del grado de saturación la influencia de la RAS. Los términos $s^l(p^c, 0)$ y $s^l(p^c, m^{g\infty})$ representan los grados de saturación del material sin efectos de la RAS y cuando la RAS se a agotado por completo respectivamente. Dichos valores pueden ser obtenidos mediante la ecuación propuesta por [Van Genuchten \[1980\]](#), que se muestra en (2.22)(c). El valor $m^{g\infty}$ es la masa de gel de la RAS por unidad de volumen al final de la reacción. La ecuación (2.29)(c) representa la afectación de la permeabilidad k^l (parámetro de la ley de Darcy, ecuación (2.21)(d)) con el efecto de la RAS, mediante m^g , y con el efecto mecánico, mediante la variable de daño β . Esta última expresión hace que el la ecuación de equilibrio mecánico no se puede resolver en manera desacoplada con las ecuaciones de balance para la fase líquida y sólida.

Por último la tensión efectiva σ^{ef} de la ecuación (2.19) se calcula del siguiente modo.

$$\sigma^{ef} = [1 - \beta][1 - \beta^q] \mathbf{C}^0 [\varepsilon - \varepsilon_c - \varepsilon_t - \varepsilon^g \delta], \tag{2.30}$$

donde ε_c y ε_t representan las deformaciones por creep y térmica respectivamente. La deformación por creep es calculada en base al modelo de [Gawin et al. \[2007\]](#). \mathbf{C}^0 es el tensor constitutivo de cuarto orden para el material virgen. β es una variable de

daño mecánica que corresponde a un modelo daño isótropo no local, según el trabajo de Mazars [1986]. β^q es una variable que considera el daño producido por la RAS que se calcula en base al trabajo de Pesavento et al. [2008].

Ejemplos resueltos

Los resultados experimentales con los que se probó este modelo fueron probetas de hormigón cilíndricas expuestas a distintos grados de saturación (pero constantes en el tiempo) en el caso de Larive [1997] y probetas de hormigón cilíndricas expuestas a ciclos de humectación y secado en el caso de Poyet [2003].

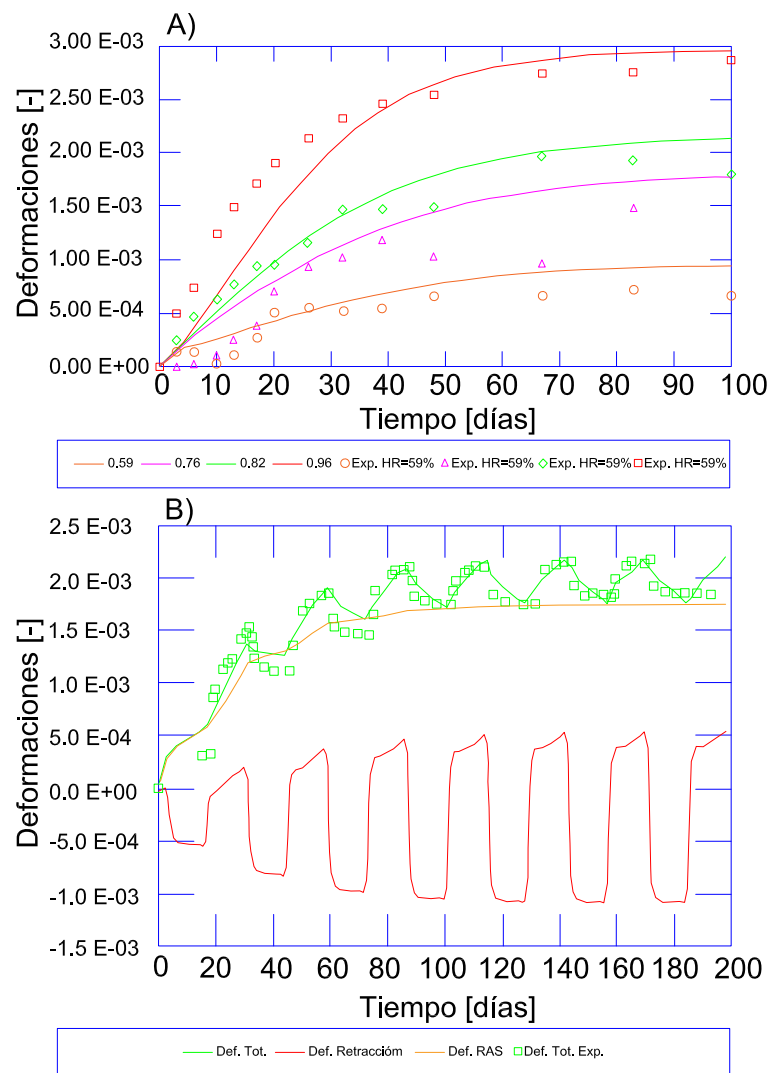


FIGURA 2.10: Ajuste numérico con el modelo de Pesavento de los ensayos experimentales de: A) ensayos de expansión libre de Larive [1997] y B) ensayos con ciclos de humectación y secado de Poyet [2003].

Capítulo 3

Modelo mecánico propuesto

3.1. Introducción

En los últimos años hubo mucho interés en modelar desde el punto de vista fenomenológico la respuesta de una gran cantidad de materiales empleados en ingeniería, como por ejemplo el hormigón. El interés se centró en modelar la pérdida progresiva de la rigidez al aumentar la carga hasta alcanzar la falla. Este proceso lleva inevitablemente a una respuesta con ablandamiento. Desde el punto de vista matemático, ello implica la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones de equilibrio, obteniendo un problema mal puesto (ver [Benallal et al. \[1993\]](#)). Desde el punto de vista numérico la respuesta que brindan los modelos que no regularizan este fenómeno muestran una fuerte dependencia de los resultados con la malla elegida para resolver el problema (ver [Bazant et al. \[1984\]](#)). Para poder solucionar este inconveniente, en este capítulo se presenta la formulación de un modelo no local de daño adecuado para representar el comportamiento del hormigón. La cantidad no local que se incorpora en la formulación es el gradiente espacial de daño. La idea que se tiene al incorporar estas cantidades es que ante un proceso de daño la cantidad no local logre afectar a puntos vecinos dentro de una determinada zona. De este modo se logra obtener la misma evolución de la variable que describe el daño en el problema independientemente de la malla elegida ([Frémond & Nedjar \[1996\]](#), [Nedjar \[2001\]](#), [Nedjar \[2002\]](#), [Lorentz & Godard \[2011\]](#), [Comi \[2001a\]](#), etc).

En el modelo planteado, la variable β describe el proceso de daño en el material y la cantidad no local introducida será el gradiente espacial del daño, $\nabla\beta$. Esta cantidad no local es introducida mediante la modificación del potencial de energía libre, llevando posteriormente al surgimiento de una nueva ecuación de balance que controla la evolución del daño (ver [Frémond & Nedjar \[1996\]](#), [Lorentz & Godard \[2011\]](#)). Para representar adecuadamente el comportamiento del hormigón tanto en tracción y compresión uniaxial como en estados combinados de tensión, se introduce en la función de daño un criterio adecuado para tal fin, como es el criterio de [Lubliner et al. \[1989\]](#). Para poder realizar la incorporación del criterio de daño se toma como base el trabajo de [Lorentz & Kazymyrenko \[2014\]](#), con la diferencia que en esta tesis se llega a obtener una forma explícita del criterio de daño distinta a la forma implícita del trabajo tomado como base, realizado de este modo un aporte a la formulación de los modelos de daño no locales. Esto trae grandes simplificaciones al realizar los cálculos de las distintas derivadas que se requieren para linealizar el problema y poder resolverlo en forma numérica. Otro problema que surge al tratar de obtener el camino de equilibrio completo en materiales cuasi-frágiles como el hormigón, es la propagación inestable de fisuras, presentándose ramas de snap-back en la respuesta. Dichas ramas no son posibles de sortear con los controles ordinarios que se realizan en los pasos de carga (fuerza o desplazamientos) por lo que para obtenerlas se debe recurrir a método arc-length. Se incorpora en la formulación un método un arc-length basado en el control de disipación de energía en un paso de carga, el cual se basa en el trabajo de [Verhoosel et al. \[2009\]](#). Esta incorporación resulta otro aporte original dado que no se encuentran referencias en la bibliografía de la incorporación de un método arc-length ,basado en el control de la disipación, en un modelo de daño no local. Una vez planteada toda la formulación del modelo se muestra su tratamiento numérico realizando la linealización del sistema de ecuaciones y la posterior introducción de las funciones de interpolación, acorde al método de los elementos finitos. Se indica la forma en la que se actualizan las distintas variables del problema acorde al método de Newton-Raphson (MNR) y se muestra la forma de la matriz de rigidez del sistema. Finalmente el modelo es utilizado para la resolución de distintos ejemplos, que se presentan en el capítulo (4).

3.2. Notación y consideraciones

En el siguiente desarrollo se utiliza la hipótesis de pequeños desplazamientos. Los vectores y tensores se denotan con letras en negrita. El producto escalar entre tensores se denota con “:”. El producto escalar entre vectores se denota con “·”. El producto tensorial se denota con “ \otimes ”. La operación $\dot{\bullet}$ es la derivada en el tiempo de \bullet . La operación $\nabla\bullet$ es el gradiente espacial de \bullet . La operación $div(\bullet)$ es la divergencia de \bullet . La operación $(\bullet)^T$ es la transpuesta del tensor de segundo orden \bullet . El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$ es el gradiente simétrico del campo de desplazamientos \mathbf{u} . Más detalles de la notación pueden encontrarse en el Apéndice (A).

3.3. Ecuaciones principales que definen el modelo

3.3.1. Leyes constitutivas generales

En este modelo el estado del material queda definido por la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y por el daño β mediante el potencial de energía libre global $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)$ y el potencial de disipación global $\Phi(\dot{\beta})$ del siguiente modo:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) = \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) + \Psi_2(\beta), \quad (3.1)$$

$$\Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) d\Omega, \quad \Psi_2(\beta) = \int_{\Omega} \frac{c}{2} \nabla\beta \cdot \nabla\beta d\Omega,$$

$$\Phi(\dot{\beta}) = \int_{\Omega} \phi(\dot{\beta}) d\Omega, \quad (3.2)$$

donde $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)$ y $\phi(\dot{\beta})$ son la función de energía libre local y el potencial de disipación local respectivamente, Ω denota el dominio del sólido analizado y $c > 0$ es un parámetro mediante el cual el gradiente daño tiene influencia en el modelo. Nótese que a pesar de la incorporación del gradiente del daño en la formulación, el potencial de disipación global solo depende de $\dot{\beta}$. Esto implica que la disipación en el modelo solo está causada por $\dot{\beta}$ y no por su gradiente.

Las funciones anteriores permiten formular el modelo en el marco de los modelos estándar generalizados (MEG) a nivel global. Para tal fin se exige que la función $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)$ sea convexa con respecto a $\boldsymbol{\varepsilon}$ y a β separadamente. Se exige también que la función $\Phi(\dot{\beta})$

sea convexa y mínima en 0. Las ecuaciones anteriores permiten definir las funciones escalares que son la tensión global $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ y la fuerza global asociada al daño $\mathcal{B}(B)$, por medio de las siguientes derivadas direccionales.

$$\mathcal{S}(\mathbf{E}) = D[\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)]\mathbf{E} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} \, d\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{B}(B) = -D[\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)]B = \int_{\Omega} V B \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla B \, d\Omega, \quad (3.4)$$

$$V = -\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)}{\partial \beta}, \quad \mathbf{A} = -c \nabla \beta,$$

$$\mathcal{B} \in \partial_{\dot{\beta}} \Phi(\dot{\beta}), \quad (3.5)$$

donde el operador $D[\bullet(\circ)]\diamond$ es la derivada direccional de \bullet centrada en \circ y en la dirección \diamond . \mathbf{E} es una función de test, dada por un tensor de segundo orden, compatible con el campo $\boldsymbol{\varepsilon}$. B es una función de test, dada por un escalar, compatible con el campo β . $\boldsymbol{\sigma}$ es la fuerza asociada termodinámicamente a $\boldsymbol{\varepsilon}$, dada por un tensor de segundo orden, que es el tensor de tensiones de Cauchy. V y \mathbf{A} son la fuerza escalar y vectorial respectivamente asociadas termodinámicamente al campo β . El operador $\partial_{\circ}(\bullet)$ indica la sub-diferencial o derivada generalizada de \bullet respecto de \circ . La última exigencia de los MEG tiene que ver con el cumplimiento de la ecuación (3.5), la cual indica que la fuerza global asociada al daño \mathcal{B} debe estar contenida en el conjunto que representa la derivada generalizada del potencial de disipación $\Phi(\dot{\beta})$.

3.3.2. Ecuaciones de equilibrio

A partir de las ecuaciones (3.3) y (3.4) se pueden definir respectivamente los trabajos virtuales asociados al campo de desplazamiento y daño como:

$$\mathcal{W}_{int}^u(\delta \mathbf{u}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u})) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{W}_{int}^{\beta}(\delta \beta) = \mathcal{B}(\delta \beta) = \int_{\Omega} V \delta \beta \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla \delta \beta \, d\Omega, \quad (3.7)$$

donde el operador $\delta \bullet$ indica la variación de \bullet . La ecuación (3.6) resulta clásica para definir el trabajo interno asociado al campo de desplazamientos \mathbf{u} . El primer término de la ecuación (3.7) que depende de $\delta \beta$ es el que tiene en cuenta el trabajo de los micro movimientos producidos por el daño, mientras que el segundo término de esta última

ecuación que depende de $\nabla\delta\beta$ es el que tiene en cuenta la participación de puntos vecinos en un proceso de daño.

Considerando que solo se tiene en cuenta fuerzas externas asociadas al campo de desplazamientos \mathbf{u} , se define el trabajo virtual de las fuerzas externas como:

$$\mathcal{W}_{ext}(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{f} y \mathbf{F} son los vectores que representan las fuerzas volumétricas y superficiales respectivamente. Γ es el contorno de Ω . El contorno se divide de tal forma que $\Gamma = \Gamma^f \cup \Gamma^u$ y $\Gamma^f \cap \Gamma^u = \emptyset$. La fuerza superficial es igual a $\mathbf{F} = \mathbf{F}^f + \mathbf{F}^u$ siendo:

$$\mathbf{F}^f = \overline{\mathbf{F}}^f \chi^f, \quad \mathbf{F}^u = \overline{\mathbf{F}}^u \chi^u, \quad (3.9)$$

$$\chi^f = \begin{cases} 1 & \text{sobre } \Gamma^f \\ 0 & \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma^f \end{cases}, \quad \chi^u = \begin{cases} 1 & \text{sobre } \Gamma^u \\ 0 & \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma^u \end{cases}.$$

En Γ^f se prescribe como condición de tipo Neumann el vector de fuerza superficial \mathbf{F}^f , mientras que en Γ^u se prescribe como condición de tipo Dirichlet el vector de desplazamientos \mathbf{u}_0 . El vector \mathbf{F}^u son las reacciones sobre el borde Γ^u , y pueden calcularse luego de aplicar las condiciones de tipo Dirichlet. Lo anterior puede verse en la figura (3.1).

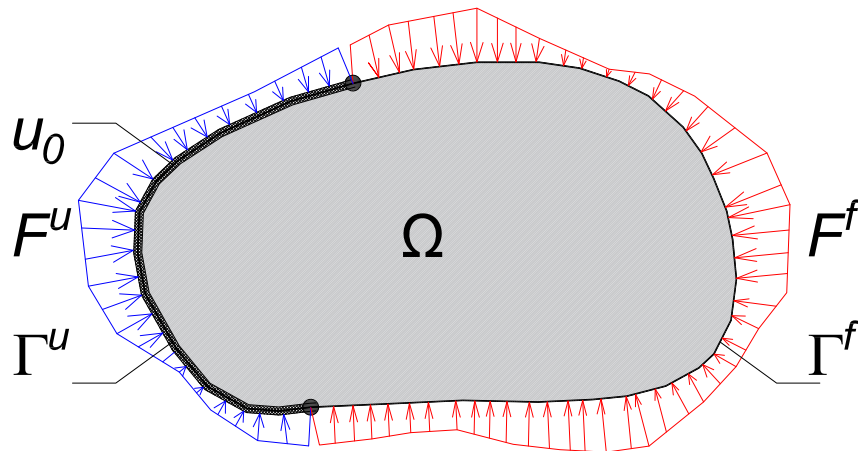


FIGURA 3.1: Dominio y fronteras del cuerpo analizado.

Considerando el caso cuasiestático, de tal forma de no tener en cuenta la participación de las fuerzas de inercia, el principio de los trabajos virtuales, para el campo de

desplazamientos, puede aplicarse como:

$$\forall \delta \mathbf{u} \quad \mathcal{W}_{int}^u(\delta \mathbf{u}) = \mathcal{W}_{ext}(\delta \mathbf{u}) \quad \text{en } \Omega. \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) permite derivar la ecuación de equilibrio correspondiente al campo de desplazamientos, para esto se aplica integración por parte y se utiliza el teorema fundamental del cálculo variacional. Las ecuaciones (3.7) y (3.5) permiten derivar la ecuación de equilibrio correspondiente al campo de daño para esto se aplica integración por partes y se emplea lo indicado en el trabajo de Lorentz & Benallal [2005]. El procedimiento antes indicado puede verse en la sección (3.10), obteniendo:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{en } \Omega, \text{ con } \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}^f \quad \text{sobre } \Gamma^f, \text{ y } \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{sobre } \Gamma^u, \quad (3.11)$$

$$V + c \nabla^2(\beta) \in \partial_\beta(\phi(\dot{\beta})) \quad \text{en } \Omega, \text{ con } \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3.12)$$

donde $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector normal unitario saliente a Γ y el operador $\nabla^2(\bullet)$ indica el Laplaciano de \bullet . La ecuación (3.12) permite determinar la evolución del daño en el dominio Ω .

3.3.3. Alternativas para resolver el problema planteado

El problema planteado puede abordarse resolviendo el sistema dado por las ecuaciones (3.11) y (3.12). En dicho sistema la ecuación que requiere un tratamiento más complejo es la (3.12). Restrigiéndose al caso de comportamiento material rate-independent, la ecuación (3.12) puede resolverse mediante el cumplimiento de una regla de flujo y la condición de consistencia como se indica a continuación:

$$y = V + c \nabla^2(\beta) \in \partial_\beta(\phi(\dot{\beta})) \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\beta} = \epsilon \frac{df}{dy}(y), \\ f(y) \leq 0, \quad \epsilon \geq 0, \quad \epsilon f(y) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

y eligiendo

$$\phi(\dot{\beta}) = k \dot{\beta} + I_+(\dot{\beta}) \quad \text{con} \quad I_+(\dot{\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{\beta} \geq 0, \\ +\infty & \text{si } \dot{\beta} < 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$f(V + c \nabla^2(\beta)) = V + c \nabla^2(\beta) - k, \quad (3.15)$$

En la ecuación (3.14) se ve que la función de disipación elegida es convexa y mínima en 0. Esta función de disipación contiene la función indicador positiva I_+ , cuya misión es imponer la irreversibilidad del daño, pues vemos que para tener un valor coherente de disipación solo cabe la posibilidad $\dot{\beta} \geq 0$. La ecuación (3.15) es una función de daño en la que el parámetro $k > 0$ actúa como un umbral.

El problema a resolver finalmente queda definido por las ecuaciones (3.11) y (3.13), sin embargo este enfoque no resulta tan atractivo de abordar por el difícil tratamiento que requiere el Laplaciano del daño en la función de daño dada por la ecuación (3.15). El abordaje clásico de estas ecuaciones consiste en derivar la formulación variacional y realizar la discretización espacial mediante el método de elementos finitos (MEF). Esto se logra escribiendo la forma débil de la ecuación (3.11) y linealizándola mediante el MNR para resolver el problema iterativamente. En estas iteraciones la actualización de la variable de daño β se realiza mediante la ecuación (3.13) en cada punto de integración de los distintos elementos finitos. Esta actualización puntual resulta difícil de realizar debido a la presencia del término del laplaciano del daño en la función, producto de la incorporación del término no local $\nabla\beta$ en la formulación. Lo anterior hace que el modo de resolución planteado en esta sección resulte poco atractivo, aunque resulta interesante pues pone en manifiesto la dificultad en la resolución de este tipo de modelos.

En el capítulo (2.2) se mencionaron otras maneras de abordar problemas de este estilo. En los trabajos de [Frémond & Nedjar \[1996\]](#) y [Miehe et al. \[2010\]](#) se propone utilizar aproximaciones de la función indicador de tal manera de poder sustituir la subdiferencial por una derivada ordinaria. El problema que tiene ese método es el empleo de un penalizador en la aproximación de la función indicador, lo cual pueden causar inestabilidad numérica. La propuesta realizada por [Nedjar \[2002\]](#) se basa en definir una variable de historia de daño la cual debe cumplir una cierta condición con la variable de daño original (ver ecuación (2.10)), el control de esta condición conduce a dos procesos iterativos anidados: uno para el control de la condición antes mencionada, y otro, para la resolución del sistema de ecuaciones que define los campos de desplazamiento y daño. Como consecuencia de esto, este enfoque resulta computacionalmente muy costoso

3.4. Resolución del problema planteado

Como se mencionó en la sección anterior, el problema planteado por las ecuaciones (3.11) y (3.12) presenta ciertas dificultades causadas por la introducción del gradiente del daño en la formulación. El enfoque que se sigue a continuación para resolver el problema se basa en el trabajo de Lorentz & Godard [2011]. Con esta propuesta las ecuaciones de equilibrio que rigen el problema son derivadas a partir de la búsqueda del punto de silla de un funcional que define la energía potencial del problema. Estas ecuaciones representan la formulación variacional del problema, formada por un sistema de ecuaciones de equilibrio en forma débil. Dicho funcional es previamente modificado incorporando nuevas variables que lo transforman en un funcional mixto, de tal forma de poder aplicar posteriormente el MDC en la resolución del problema. Para la solución final del problema, el sistema de ecuaciones que se presenta en esta sección debe ser linealizado y discretizado espacialmente por el método de los elementos finitos. Dichos pasos se muestran en la sección (3.7.2).

3.4.1. Formulación variacional

Considerando que el tiempo transcurrido para pasar del paso de carga N al $N + 1$ es Δt , la energía potencial total, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.8), están dados por: se define como:

$$P(\mathbf{u}, \beta) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) + \Delta t \Phi \left(\frac{\beta - \beta^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u}), \quad (3.16)$$

donde $\mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u})$ es el trabajo de las fuerzas externas (ver ecuación (3.8)).

Los campos incógnitas $\mathbf{u}^{\mathbf{N}+1}$ y $\beta^{\mathbf{N}+1}$ al final del paso se obtiene a partir de la ecuación (3.16) del siguiente modo:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{N}+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}} P(\mathbf{u}, \beta^{\mathbf{N}+1}), \quad \beta^{\mathbf{N}+1} = \operatorname{argmin}_{\beta} P(\mathbf{u}^{\mathbf{N}+1}, \beta), \quad (3.17)$$

Si se pretendiera resolver el sistema de ecuaciones dado por (3.17) se encontraría que estas ecuaciones representan la forma débil de las ecuaciones de equilibrio dadas por (3.11) (3.12), por lo que se tendría el mismo problema explicado en la sección anterior

al tratar de resolverlas. Para evitar este problema surge la idea de modificar el funcional dado por la ecuación (3.16), de tal manera de poder aplicar el método descomposición coordinación (MDC). La idea principal es introducir un campo auxiliar $\alpha \in L^2(\Omega)$ que se asume igual al campo de daño $\beta \in H^1(\Omega)$. Luego, con esta nueva variable se expresa en la formulación la parte que no depende del gradiente daño en términos de α (parte local), mientras que la parte que depende del gradiente del daño (parte no local) continúa expresada en términos de β . Reemplazamos entonces las ecuaciones (3.1), (3.3), (3.4) y (3.5) por

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \alpha) = \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) + \Psi_2(\beta), \quad (3.18)$$

$$\Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) d\Omega, \quad \Psi_2(\beta) = \int_{\Omega} \frac{c}{2} \nabla \beta \cdot \nabla \beta d\Omega,$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{E}) = D[\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \alpha)]\mathbf{E} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} d\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{B}(B^\alpha, B^\beta) = \mathcal{B}^\alpha(B^\alpha) + \mathcal{B}^\beta(B^\beta),$$

$$\mathcal{B}^\alpha(B^\alpha) = -D[\Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)]B^\alpha = \int_{\Omega} V B^\alpha d\Omega, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{B}^\beta(B^\beta) = -D[\Psi_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)]B^\beta = \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla B^\beta d\Omega,$$

$$V = -\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{A} = -c \nabla \beta,$$

$$\mathcal{B} \in \partial_{\alpha} \Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \quad (3.21)$$

respectivamente. En la ecuación (3.20) B^α y B^β son funciones de test escalares compatibles con los campos α y β respectivamente. Notamos también en la ecuación (3.21) que es a esta nueva variable auxiliar α a la que se le atribuye la disipación, escribiendo la función de disipación en términos de α .

En función de lo desarrollado anteriormente se reescribe la energía potencial total de la ecuación (3.16) como:

$$P\alpha(\mathbf{u}, \beta, \alpha) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \alpha) + \Delta t \Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u}). \quad (3.22)$$

Para dar coercibilidad, se añade un término con el penalizador escalar $r > 0$, conforme al método de Lagrange aumentado. Este término no tiene influencia en tanto se cumpla

la condición $\alpha = \beta$, obteniendo:

$$Par(\mathbf{u}, \beta, \alpha) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \alpha) + \Delta t \Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} \frac{r}{2} [\beta - \alpha]^2 d\Omega. \quad (3.23)$$

La restricción $\alpha = \beta$ se consigue introduciendo un término con el multiplicador de Lagrange $\lambda \in L^2(\Omega)$, de tal forma de coordinar la igualdad $\alpha = \beta$, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \alpha) + \Delta t \Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u}) + \\ \int_{\Omega} \frac{r}{2} [\beta - \alpha]^2 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda [\beta - \alpha] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Este último funcional obtenido, debido a la introducción de α y λ , resulta un funcional mixto.

El problema finalmente se reduce a encontrar el punto de silla del funcional de la ecuación (3.24), que equivale a resolver el sistema de ecuaciones de las derivadas direcciones del funcional en dirección de cada variación de los campos incógnitas igualadas a 0. En este caso cada una de las ecuaciones obtenidas del modo antes indicado representa la forma débil de la ecuación de equilibrio correspondiente al campo tomado como dirección en el cálculo de la derivada direccional. El cálculo de cada derivada direccional puede verse en la sección (3.8). Finalmente el sistema a resolver es:

$$\forall \delta \mathbf{u} \in K^A \quad RU = D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta \mathbf{u} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \mathcal{W}_{ext}(\delta \mathbf{u}) = 0, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \forall \delta \beta \in H^1(\Omega) \quad RA = D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta \beta = \\ \int_{\Omega} c \nabla \beta \cdot \nabla \delta \beta d\Omega + \int_{\Omega} r [\beta - \alpha] \delta \beta d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \delta \beta d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\forall \delta \lambda \in L^2(\Omega) \quad RL = D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta \lambda = \int_{\Omega} [\beta - \alpha] \delta \lambda d\Omega = 0, \quad (3.27)$$

$$\forall \delta\alpha \in L^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} V \delta\alpha d\Omega + \int_{\Omega} \{r [\beta - \alpha] + \lambda\} \delta\alpha d\Omega \in \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right) \delta\alpha d\Omega. \quad (3.28)$$

donde K^A es el campo cinemáticamente admisible correspondientes a los desplazamientos \mathbf{u} .

A continuación se expresa en forma fuerte la ecuación (3.28). Para esto se desarrolla la ecuación (3.21) para los campos $\delta\alpha$ y $\delta\beta$ se obtiene:

$$\mathcal{B}(\delta\alpha, \delta\beta) = \int_{\Omega} V \delta\alpha d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla \delta\beta d\Omega \in \partial_{\alpha} \left(\Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right). \quad (3.29)$$

Si se compara las ecuaciones (3.28) y (3.29) se nota que la condición que debe cumplir la fuerza global asociada al daño con respecto a la subdiferencial de la función de disipación puede ser reemplazada por el primer miembro de la ecuación (3.28). De este modo, se ve que el aporte no local brindado a la fuerza global asociada al daño por el término de integrando $\mathbf{A} \cdot \nabla \delta\beta$, en la ecuación (3.29), es ahora dado por el término de integrando $\{r [\beta - \alpha] + \lambda\} \delta\alpha$ de la ecuación (3.28). En base a lo expuesto en el trabajo de [Lorentz & Benallal \[2005\]](#) se tiene que para que se cumpla la ecuación (3.28), la parte de los argumentos de la integrales que acompañan a $\delta\alpha$ deben cumplir:

$$\mathcal{B} \in \partial_{\alpha} \left(\Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right) \iff V + r[\beta - \alpha] + \lambda \in \partial_{\alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right) \text{ en } \Omega. \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) puede resolverse en cada punto de integración como se indicó en la ecuación (3.13). Para lograr el cumplimiento de la ecuación (3.30), es decir que el primer término esté contenido en la derivada generalizada que aparece en el segundo término se considera comportamiento del material rate-independent pudiendo aplicar la ecuación (3.13), se tiene entonces:

$$\begin{cases} \text{si } V(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha^{\mathbf{N}}) + r [\beta - \alpha^{\mathbf{N}}] + \lambda - k \leq 0 & \text{entonces } \alpha = \alpha^{\mathbf{N}}, \\ \text{si no, encuentre } \alpha \geq \alpha^{\mathbf{N}} & \text{tal que } V(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) + r [\beta - \alpha] + \lambda - k = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Si bien la ecuación (3.31) está expresada en términos de la variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, β y λ de forma continua, debe entenderse esto como un exceso de notación dado que la variable α se obtiene por un conjunto de valores definido por el conjunto de ecuaciones algebraicas

que se obtiene de reemplazar en la ecuación (3.31) por los valores de las variables en cada punto de integración.

De la manera antes desarrollada el problema queda definido por las ecuaciones (3.25), (3.26), (3.27) y (3.31). La última ecuación permite descomponer el campo α en un conjunto de ecuaciones algebraicas resueltas en cada punto de integración.

Las tres primeras ecuaciones que representan las formas débiles de las ecuaciones de equilibrio para los campos de desplazamientos \mathbf{u} , daño β y multiplicadores de Lagrange λ respectivamente deben ser resueltas de manera global por lo que requieren ser linealizadas, discretizadas espacialmente por el MEF y ser resueltas iterativamente por el MNR (ver sección (3.7.2)).

En resumen, la aplicación del MDC en este problema consiste en definir la variable auxiliar α y reescribir la parte local del daño en la formulación según las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.20). Una vez hecho esto, la variable auxiliar α se obtiene realizando su *descomposición* en un conjunto de ecuaciones algebraicas dadas por (3.31) y luego se debe resolver de modo global el sistema dado por las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27), realizado la *coordinación* de $\alpha = \beta$ mediante la última ecuación antes nombrada, resultante de la incorporación de los multiplicadores de Lagrange λ al problema. Mayores detalles sobre la aplicación general del MDC puede encontrarse en Fortin & Glowinski [1983].

3.5. Parámetros del modelo y elección de la función de daño

3.5.1. Parámetros introducidos durante la formulación

La formulación del modelo de daño antes descrito requiere el conocimiento de parámetros necesarios para su funcionamiento. Dichos parámetros son: c , k , y r . El parámetro c controla la influencia del gradiente del daño en la formulación, es introducido en la definición del potencial de energía libre global $\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \beta)$ de la ecuación (3.1). El parámetro k es el umbral de la función de daño y es introducido al elegir la forma de la función de daño que cumple con la regla de flujo y la condición de consistencia (ver ecuación (3.15) y (3.31)). El parámetro r es penalizador que se añade en un término que modifica a la

energía potencial total (ver ecuación (3.23)). Los parámetros c y k pueden ser correlacionados a datos obtenidos de ensayos experimentales mediante un análisis unidimensional que proponen Lorentz & Godard [2011]. En dicho trabajo también se indica que el valor del penalizador r debe ser el mayor posible, siempre y cuando no provoque inestabilidad numérica durante el proceso de resolución, proponiendo una relación con el umbral k corroborada numéricamente. Las relaciones usadas para los parámetros introducidos durante la formulación son:

$$k = \frac{3 G_f}{4 D}, \quad c = \frac{1}{2} k D^2, \quad r = 10^3 k, \quad (3.32)$$

donde G_f es la energía de fractura y D es el semiancho de localización. El semiancho de localización D es la semi longitud donde se concentra el daño sufrido por el material. El valor de D deber ser elegido en principio como mucho más pequeño que la máxima dimensión de la estructura que se desea resolver.

3.5.2. Función de rigidez

La función de rigidez es la encargada del deterioro progresivo de la rigidez del material y, al igual que en Lorentz & Godard [2011], se introduce dentro de la función de energía libre local (ver ecuación (3.18)) del siguiente modo:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) = R(\alpha) \varpi(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (3.33)$$

donde $R = R(\alpha)$ es la función de rigidez y $\varpi = \varpi(\boldsymbol{\varepsilon})$ es la función de energía elástica. En los ejemplos desarrollados posteriormente en este capítulo la función de energía elástica elegida tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varpi &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \mathbf{C}^0 &= \frac{E}{1 + \mu} \mathbf{I} + \frac{\mu E}{[1 - 2\mu][1 + \mu]} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde \mathbf{C}^0 es el tensor constitutivo de cuarto orden para material isótropo y homogéneo, $\boldsymbol{\delta}$ y \mathbf{I} son los tensores identidad de segundo y cuarto orden respectivamente. E es el módulo de Young y μ es el coeficiente de Poisson.

A partir de las ecuaciones (3.33), (3.19) y (3.20) se puede definir la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y a la fuerza escalar termodinámicamente asociada al daño V como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = R \frac{\partial \varpi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = R \boldsymbol{\sigma}^0, \quad (3.35)$$

$$V = -\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)}{\partial \alpha} = -R' \varpi, \quad (3.36)$$

donde el tensor de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}^0$ es la tensión sin dañar y R' es la derivada de la función de rigidez respecto de α .

Como se ve en la ecuación (3.35), la función de rigidez adopta el sentido físico que en otros modelos se le da a $(1 - \alpha)$, la función de rigidez vale 1 cuando el material está sano y 0 cuando se encuentra totalmente dañado. Por la introducción de la función de rigidez, $(1 - \alpha)$ pierde el sentido físico que se le suele dar en instancias intermedias, convirtiéndose en una variable incorporada solo con fines matemáticos. Desde el punto de vista estrictamente matemático, la función de rigidez controla la distribución del daño dentro del semiancho de localización D . Dicho de otro modo, en este modelo el “ancho de una fisura” queda representado por el ancho de localización D , en este ancho el valor del daño debe tener una transición suave desde el centro hasta las fronteras. La función encargada de dar dicha transición, de tal forma de no tener inconvenientes durante el proceso numérico de resolución, es la función de rigidez.

La función de rigidez adoptada en este trabajo es la propuesta en [Lorentz & Kazymyrenko \[2014\]](#), dada por:

$$R(\alpha) = \frac{[1 - \alpha]^2}{[1 - \alpha]^2 + \frac{3 E G_f}{2 f_t^2 D} \alpha [1 + p \exp(q\alpha^2)]}, \quad (3.37)$$

donde p y q son parámetros que controlan la rama de ablandamiento en una curva carga desplazamiento. Los parámetros materiales E y f_t son respectivamente el módulo de Young y la resistencia a tracción uniaxial.

3.5.3. Criterio de daño para hormigón adoptado en la formulación

En esta sección se explica el criterio de daño que se utiliza y el modo de introducirlo en la formulación con el objetivo de poder representar el comportamiento del material

con el que se desea trabajar (en este caso hormigón). La introducción del criterio de daño se basa en el trabajo de [Lorentz & Kazymyrenko \[2014\]](#). En dicho trabajo se sustituye la fuerza escalar asociada al daño V , de la ecuación (3.36), por una función V^* , de tal modo que:

$$V^* = -R' \varpi^*(\boldsymbol{\sigma}^0), \quad (3.38)$$

donde $\varpi^*(\boldsymbol{\sigma}^0)$ es una función que debe ser positiva, homogénea de segundo grado y coincide con la función de energía elástica ϖ en el caso de tracción uniaxial para preservar la consistencia termodinámica del modelo [[Lorentz & Kazymyrenko, 2014](#)]. En la sección (4) puede corroborarse numéricamente que los ejemplos desarrollados en esta tesis cumplen con la condición de disipación no negativa. Se ve que ϖ^* es expresada en términos de la tensión sin dañar $\boldsymbol{\sigma}^0$, con la intención de utilizar un criterio de daño en tensiones. Esto difiere del modelo originalmente planteado por [Lorentz & Godard \[2011\]](#), donde el criterio de daño se define en términos de deformaciones, por medio de ϖ .

Con la modificación explicada anteriormente la ecuación (3.31) que define la evolución de daño, es sustituida por:

$$\begin{cases} \text{si } V^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha^{\mathbf{N}}) + r [\beta - \alpha^{\mathbf{N}}] + \lambda - k \leq 0 & \text{entonces } \alpha = \alpha^{\mathbf{N}}, \\ \text{si no, encuentre } \alpha \geq \alpha^{\mathbf{N}} & \text{tal que } V^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) + r [\beta - \alpha] + \lambda - k = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

En el trabajo de [Lorentz & Kazymyrenko \[2014\]](#) la función ϖ^* es definida del siguiente modo:

$$(a) \quad \varpi^* = \frac{1}{2E} [\sigma^*]^2, \quad (b) \quad \widehat{\mathcal{E}} \left(f_t \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma^*} \right) = 0, \quad (3.40)$$

donde σ^* es un escalar positivo que queda definido implícitamente por medio de la ecuación (3.40)(b) y $\widehat{\mathcal{E}}$ es un criterio de daño dado por una función convexa.

En esta tesis, se propone la siguiente expresión para ϖ^* :

$$\varpi^* = \frac{1}{2E} \mathcal{E}^2, \quad (3.41)$$

donde \mathcal{E} es una función homogénea de primer grado, obtenida a partir de $\widehat{\mathcal{E}}$, con el recaudo para tener coincidencia entre ϖ y ϖ^* para el caso de tracción uniaxial. De este modo, la propuesta dada en la ecuación (3.41) para ϖ^* satisface las condiciones nombradas anteriormente.

A diferencia de la forma implícita para ϖ^* que propone [Lorentz & Kazymyrenko \[2014\]](#), mostrada en la ecuación (3.40), en esta tesis, el ecuación (3.41) propone una forma explicita. Esto simplifica enormemente la tarea de linealización del sistema de ecuaciones que define el modelo.

Como ya se mencionó, interesados en simular la respuesta del hormigón, el criterio de daño que se decide adaptar a la formulación de este trabajo es el propuesto en [Lubliner et al. \[1989\]](#), cuya expresión completa es:

$$\widehat{\mathcal{C}} = \frac{1}{1 - \ell_2} \left[\sqrt{3J_2^0} + \ell_2 I_1^0 + \ell_3 \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+ - \ell_4 \langle -\sigma_{max}^0 \rangle^+ \right] - \widehat{k}, \quad (3.42)$$

con $\ell_3 = \ell_1[1 - \ell_2] - [1 + \ell_2]$,

donde I_1^0 es el primer invariante, J_2^0 es el segundo invariante del tensor desviador y σ_{max}^0 es el máximo autovalor. Las tres cantidades antes mencionadas se calculan sobre σ^0 . La función positiva vale $\langle \bullet \rangle^+ = \frac{1}{2}[\bullet + |\bullet|]$. Los parámetros ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_4 se ajustan mediante ensayos. A continuación se indica que representa cada uno y se dan valores típicos para el caso de hormigón. El parámetro ℓ_1 indica la relación entre la resistencia uniaxial a compresión y tracción, es decir $\ell_1 = f_c/f_t$. El valor de ℓ_1 vale alrededor de 10. El parámetro ℓ_2 es una relación entre la resistencia a compresión uniaxial y equibiaxial, este valor varía entre $0,08 < \ell_2 < 0,12$. El parámetros ℓ_3 es el encargado de regular la relación entre la resistencia uniaxial de compresión y tracción cuando se alcanza el primer límite de discontinuidad. El valor de ℓ_3 está dado por la ecuación (3.42) y resulta aproximadamente 7,66. El parámetro ℓ_4 es función de la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión. ℓ_4 vale es aproximadamente 3,5. El valor \widehat{k} es un umbral de daño el cual puede ser tomado como el valor absoluto de la resistencia compresión, es decir $\widehat{k} = f_c = \ell_1 f_t$. Para más detalle sobre los parámetros ver [Lubliner et al. \[1989\]](#).

Con el fin de poder utilizar el criterio de daño propuesto en la ecuación (3.42), se realiza la siguiente modificación:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\ell_1[1 - \ell_2]} \left[\sqrt{3J_2^0} + \ell_2 I_1^0 + \ell_3 \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+ - \ell_4 \langle -\sigma_{max}^0 \rangle^+ \right]. \quad (3.43)$$

Para poder obtener la ecuación final que permite calcular la evolución del daño se procede del siguiente modo: se expresa la ecuación (3.39) b para daño nulo ($\beta = 0$), por

lo que $\alpha = 0$ y $\lambda = 0$. Se tiene en cuenta el umbral k de la ecuación (3.32), la función de rigidez R de la ecuación (3.37) evaluada en $\beta = 0$ y las ecuaciones (3.38) y (3.41) que presentan la fuerza escalar del daño particularizadas para la función (3.43). Con esto se tiene:

$$\frac{3 E G_f}{4 f_t^2 D} \frac{1}{E} \varphi^2 - \frac{3 G_f}{4 D} = 0. \quad (3.44)$$

Verificaremos ahora que la ecuación (3.44) conduce a falla para el estado de tracción uniaxial, como también veremos la respuesta del criterio para otros estados de tensiones. Para el estado de tracción uniaxial se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} f_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J2 = \frac{f_t^2}{3}, \quad I_1^0 = f_t; \quad \sigma_{max}^0 = f_t, \quad (3.45)$$

Para el estado de compresión uniaxial se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} -f_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J2 = \frac{f_c^2}{3}, \quad I_1^0 = -f_c, \quad \sigma_{max}^0 = 0, \quad f_c = \ell_1 f_t. \quad (3.46)$$

Para los estados de tensión representados por las ecuaciones (3.45) y (3.46) se satisface la ecuación (3.44) que representa el criterio propuesto. Con lo anterior se asegura, al igual que en Lubliner et al. [1989], que tenemos umbrales distintos en tracción y compresión manejados por el valor de la resistencia a tracción f_t (o compresión f_c) y la relación entre resistencia a compresión y tracción ℓ_1 .

Se graficará ahora la ecuación (3.44) para un estado biaxial σ_1 vs σ_2 con $\sigma_3 = 0$ (estado plano de tensiones), adimensionalizando las tensiones con el valor de resistencia a compresión uniaxial f_c , tal cual lo muestran la figura (3.2). La relación entre resistencia a compresión y tracción utilizada es $\ell_1 = 10$. En este tipo de ensayo (tensión plana) $\langle -\sigma_{max}^0 \rangle^+$ es siempre igual a 0, pues si el máximo entre σ_1 y σ_2 es negativo entonces $\sigma_{max}^0 = \sigma_3 = 0$, por lo que no se adopta ℓ_4 . El valor de ℓ_2 se tomó variable en la figura (3.2) observando diferencias en la parte de compresión biaxial. Se observó que los valores de los parámetros E , D y G_f no modifican los gráficos de la figura (3.2). Por otro lado los gráficos mostrados en la figura (3.2) corresponden exactamente a los expresados por el criterio original de Lubliner et al. [1989], dado por la ecuación (3.42) igualada a 0, para el

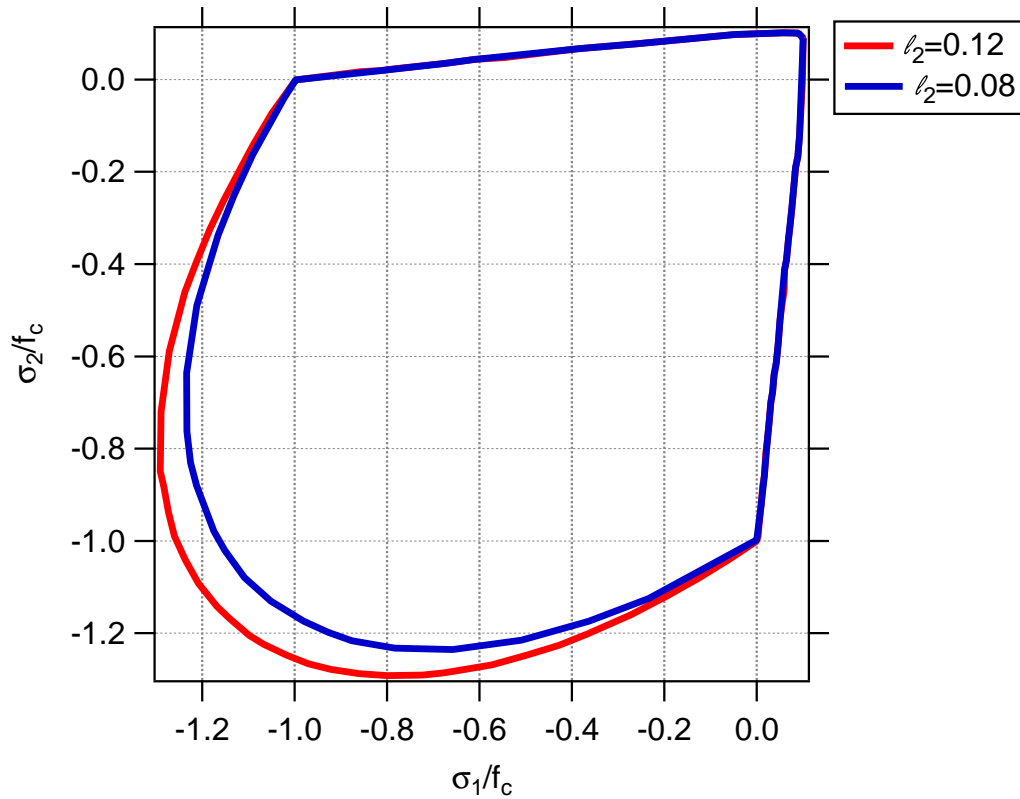


FIGURA 3.2: Comparación de criterios de daño en ensayo biaxial.

estado de tensiones y parámetros mencionados anteriormente. Con esto concluimos que la forma en la que se incluyó el criterio de daño en la formulación permite representarlo el estado plano de tensiones.

Se estudiará ahora qué ocurre con el criterio de daño introducido en la formulación para estados triaxiales de tensión. Para tal fin, se representan las ecuaciones (3.42) y (3.44) en el espacio de High-Westergard, como puede verse en la figura (3.3). En dicha figura la superficie en rojo representa al criterio de Lubliner et al. [1989] dado por la ecuación (3.42), mientras que las superficies en rojo y azul representan al criterio propuesto dado por la ecuación (3.44). La superficie en rojo es coincidente en ambos criterios, mientras que la superficie en azul indica fallas en estado triaxial de compresión para estados cercanos al estado hidrostático, cosa que no se corresponde con el criterio de Lubliner et al. [1989]. En la figura (3.4) pueden verse ambos criterios representados en el plano tensión hidrostática $I_1^0/3$ vs tensión octaédrica $(2/3J_2^0)^{0.5}$.

Para una mejor comprensión de la superficie de daño se realizan también seccionamientos de la misma en el plano σ_1 vs σ_2 con σ_3 variable como puede verse en las figuras

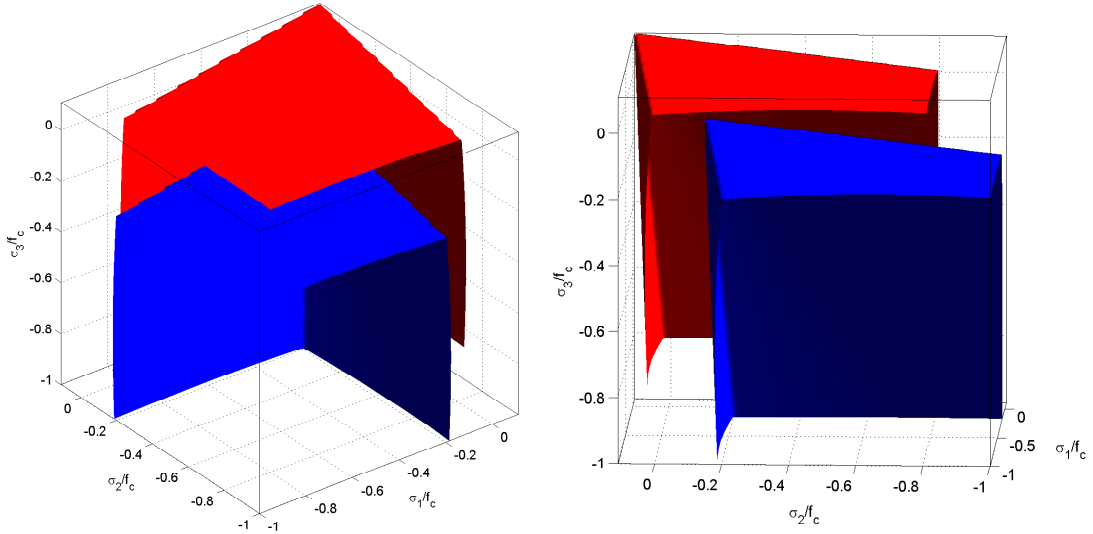


FIGURA 3.3: Representación de los criterios de daño en el espacio de High-Westergard. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En rojo y azul el criterio propuesto.

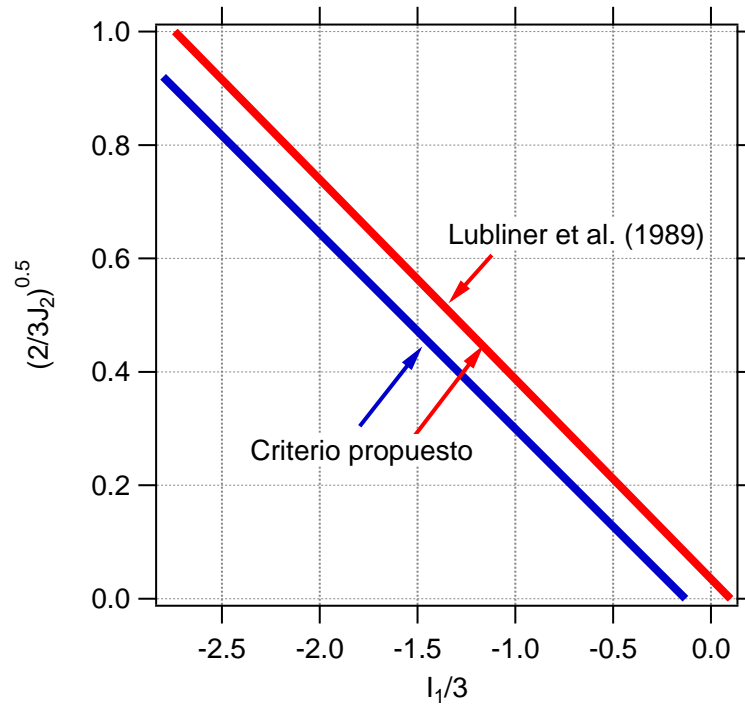


FIGURA 3.4: Representación de los criterios de daño en el plano tensión hidrostática $I_1^0/3$ vs tensión octaédrica $(2/3J_2)^{0.5}$. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En azul y rojo el criterio propuesto.

(3.5), (3.6) y (3.7). Los gráficos se realizaron con los mismos parámetros del ensayo biaxial de la figura (3.2), añadiendo $\ell_4 = 3,5$ y fijado $\ell_2 = 0,12$. La figura (3.5) muestra estados triaxiales con componente σ_3 de tracción. En este caso el criterio propuesto es coincidente con el de Lubliner et al. [1989]. La figura (3.6) muestra estados triaxiales con componentes σ_3 de compresión. Para los valores de σ_3 utilizados en la figura (3.6),

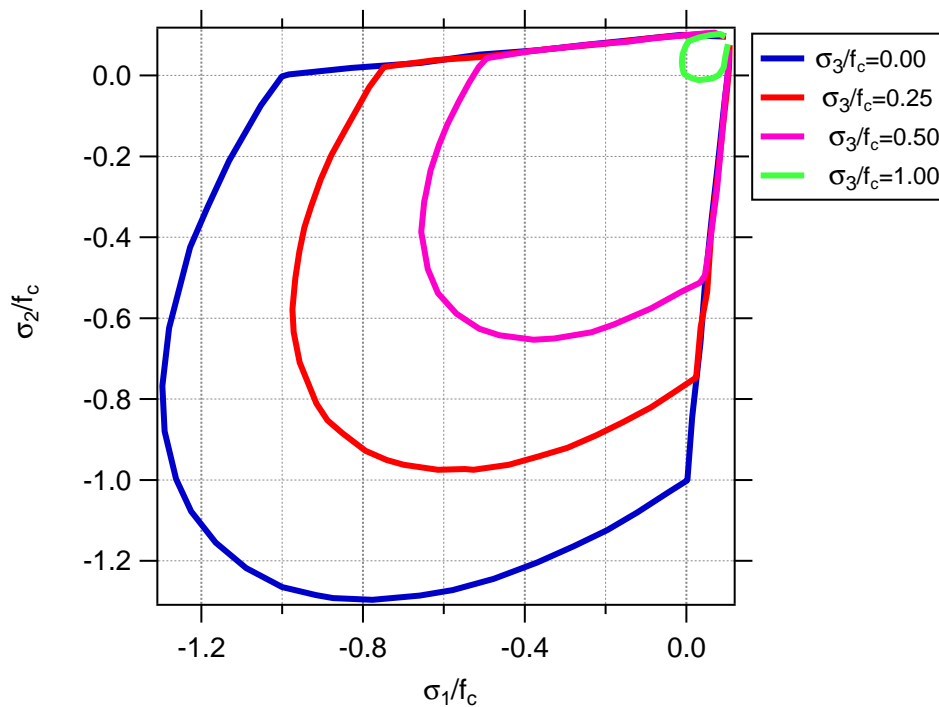


FIGURA 3.5: Ensayo biaxial. Aumento de σ_3 en tracción.

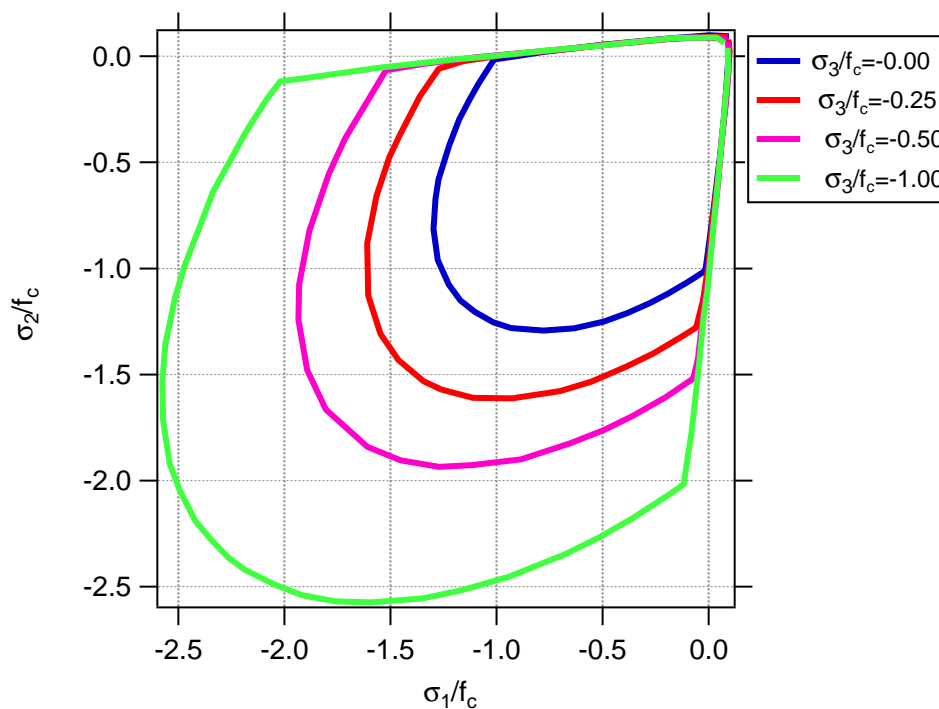


FIGURA 3.6: Ensayo biaxial. Aumento de σ_3 en compresión. Una superficie por cada σ_3 .

tanto el criterio propuesto como el de Lubliner et al. [1989] son aun coincidentes. Se ve entonces que esta coincidencia entre ambos criterios se da aproximadamente hasta $\sigma_3/f_c = -1,00$. Luego de esto, los valores de compresión adoptados por σ_3 para la figura

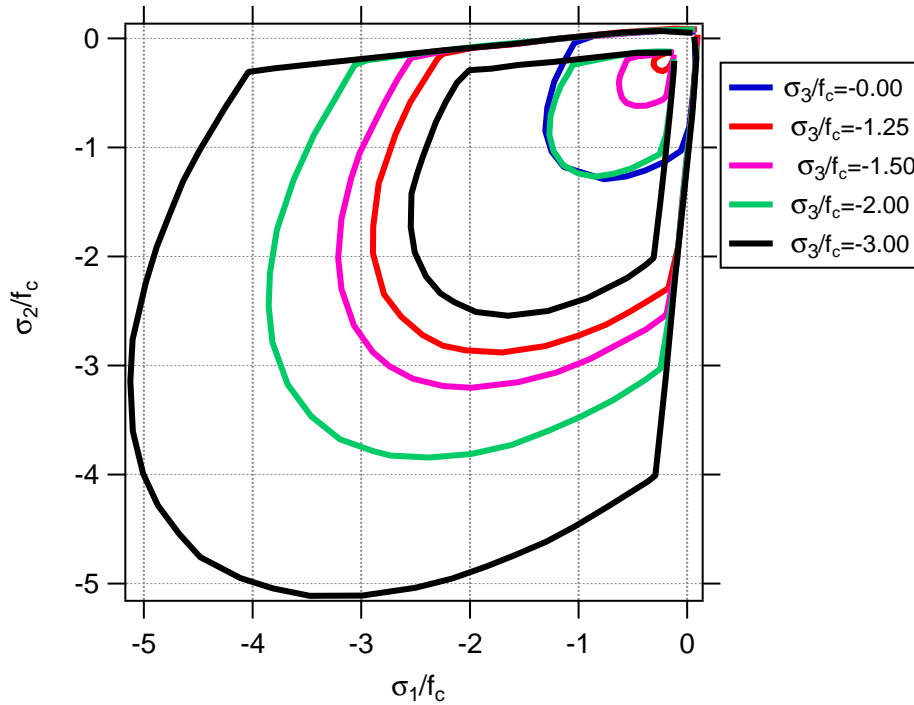


FIGURA 3.7: Ensayo biaxial. Aumento de σ_3 en compresión. Dos superficie por cada σ_3 .

(3.7) hacen que se genere una segunda superficie, interna en este caso, la cual no coincide con el criterio de Lubliner et al. [1989].

La superficie en azul en la figura (3.5) se genera para valores negativos de la función \mathcal{C} que al elevarse al cuadrado hacen que el primer término de la ecuación (3.44) supere al segundo término. Los valores negativos de la función \mathcal{C} en la propuesta original de Lubliner et al. [1989] no están asociados a falla, sino que están asociados a un estado de confinamiento triaxial, para el cual el hormigón tiene elevada resistencia. A pesar de que la forma en la que se introdujo la función de daño en el modelo cumple con las condiciones nombradas por Lorentz & Kazymyrenko [2014] puede traer, en este caso, dificultades en la correcta representación del comportamiento del material elegido en estado combinado de tensión. Se verá a continuación cuáles son los límites hasta los que podemos utilizar el criterio propuesto.

Se propone una alternativa para poder utilizar el criterio de Lubliner et al. [1989] de la forma en la que se lo introdujo en este trabajo, sin realizar grandes modificaciones. Esta alternativa consiste en eliminar el término $\ell_4 \langle -\sigma_{max}^0 \rangle^+$ de la ecuación (3.44), al igual que se lo hace en el trabajo de Voyiadjis et al. [2008]. Esto puede verse en la figura (3.8). En dicha figura se ve en rojo el criterio Lubliner et al. [1989] y en verde y azul las

superficies externa e interna respectivamente del criterio propuesto. Esta modificación tiene el siguiente efecto. La superficie interna aparece para estados de compresión triaxial mucho más elevados que en el caso anterior. Sobre el eje hidrostático esta superficie se genera aproximadamente en $\sigma_3/f_c = -2,5$. La superficie del criterio propuesto comienza a alejarse hacia adentro respecto a la del criterio de Lubliner et al. [1989] a partir del límite $\sigma_3/f_c = -1,00$. Desde el límite antes mencionado hacia la parte de tracción, ambos criterios son coincidentes. En la figura (3.9) pueden verse ambos criterios representados en el plano tensión hidrostática $I_1^0/3$ vs tensión octaédrica $(2/3J_2^0)^{0,5}$.

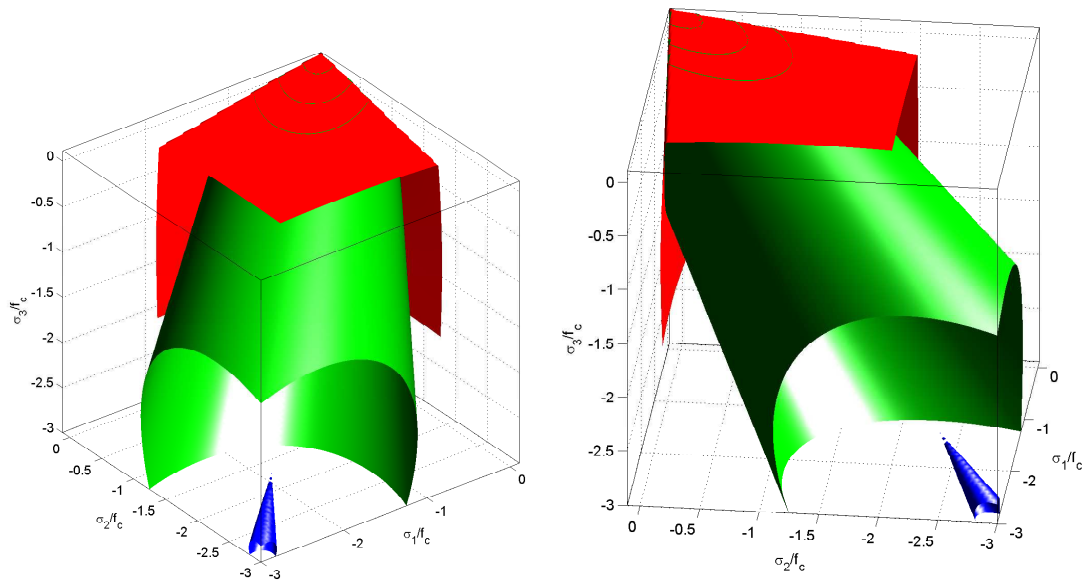


FIGURA 3.8: Representación de los criterios de daño en el espacio de High-Westergard. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En verde y azul el criterio propuesto modificado.

Con lo expuesto anteriormente se nota que la forma en la que se introdujo el criterio de daño no trae ninguna dificultad en la resolución de problemas en estado plano de tensión y tampoco en problemas en estado plano de deformaciones y estados combinados de tensiones donde la falla no sea alcanzada por compresión triaxial. El hecho de eliminar el término con ℓ_4 quita la posibilidad al criterio de representar la falla en compresión triaxial pero da más margen para poder representar los estados mencionados al comienzo de este párrafo, que son los estados a los que se limitarán los ejemplos realizados en esta tesis.

Con lo expuesto anteriormente la expresión del criterio de daño usada finalmente es:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\ell_1[1 - \ell_2]} \left[\sqrt{3 J_2^0} + \ell_2 I_1^0 + \ell_3 \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+ \right]. \quad (3.47)$$

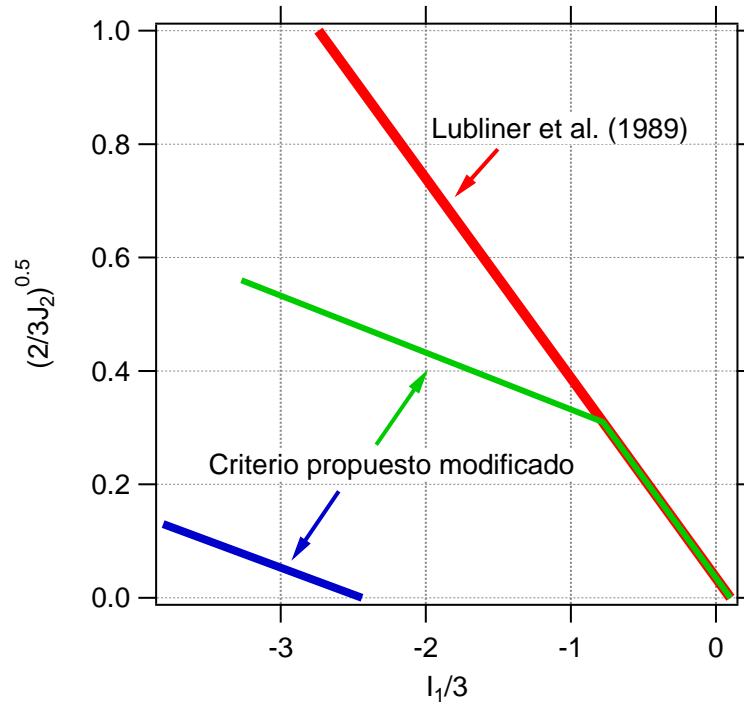


FIGURA 3.9: Representación de los criterios de daño en el plano tensión hidrostática $I_1^0/3$ vs tensión octaédrica $(2/3J_2)^{0.5}$. En rojo el criterio de Lubliner et al. [1989]. En verde y azul el criterio propuesto modificado.

Al introducir la ecuación (3.47) en la ecuación (3.44), se tiene la forma final de la función de daño, dada por:

$$\frac{3 E G_f}{4 f_t^2 D} \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{\ell_1[1 - \ell_2]} \left[\sqrt{3 J_2^0 + \ell_2 I_1^0 + \ell_3 \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+} \right] \right\}^2 - \frac{3 G_f}{4 D} = 0. \quad (3.48)$$

3.5.4. Resumen de parámetros del modelo

Se resume a continuación el conjunto de parámetros que requiere el modelo:

- Parámetros de la función de rigidez f_t , G_f , D , p y q .
- Parámetros del criterio de daño ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 .
- Parámetros que definen el comportamiento elástico E y μ para calcular el tensor constitutivo \mathcal{C}^0 .

En cuanto a los parámetros introducidos en la formulación k , c y r , se recuerda que estos pueden relacionarse a D y G_f mediante la ecuación (3.32).

3.6. Incorporación en la formulación de un método arc-length basado en el control de disipación de energía

Cuando se intenta reproducir la pérdida progresiva de la rigidez de materiales cuasi frágiles como el hormigón se llega inevitablemente a una respuesta con ablandamiento. Más allá de los inconvenientes que trae la reproducción de este tipo de problemas si no se regulariza adecuadamente (problema mal puesto), dependiendo de las condiciones del ensayo (geometría, cargas, parámetros del material) se pueden presentar ramas de snap-back dificultando la obtención completa del camino de equilibrio. La obtención del camino de equilibrio es importante para la determinación de algunas propiedades como la energía de fractura en materiales cuasi-frágiles. Aún en el caso de no estar interesado en la obtención completa del camino de equilibrio, sortear las ramas de snap-back implica un gran cambio entre el estado inicial y final del cuerpo analizado. Este gran cambio, en muchas ocasiones no puede ser resuelto por el control tradicional de fuerzas o desplazamientos debido a las limitaciones de los métodos como Newton-Raphson, utilizados para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales (el valor de inicio debe ser cercano al final).

Para poder obtener el camino de equilibrio completo en las situaciones antes nombradas se propusieron una serie de métodos denominados arc-length, cuyo enfoque tradicional consiste en conocer de antemano la zona de falla y parametrizar el camino de equilibrio en función de un parámetros denominado arc-length que involucra alguna norma en función de los grados de libertad que participan de la zona de falla. Una revisión completa de lo antes mencionado puede encontrarse en [de Borst \[1987\]](#), [Geers \[1999a\]](#) y [Geers \[1999b\]](#).

Propuestas más recientes como la de [Verhoosel et al. \[2009\]](#) y la de [Gutiérrez \[2003\]](#) añaden a la formulación una ecuación denominada restricción path-following, la cual está ligada a un indicador global del problema como lo es la energía disipada, de esta manera no es necesario conocer de antemano la zona de falla.

Para poder comprender más claramente la ventaja de introducir este tipo de ecuación en la formulación se hace referencia a las figuras (3.10) y (3.11). En estas figuras se muestra esquemáticamente la curva carga desplazamiento de un ensayo de flexión en una viga entallada. Se supone que en la figura (3.10)(A) se va obteniendo la curva del

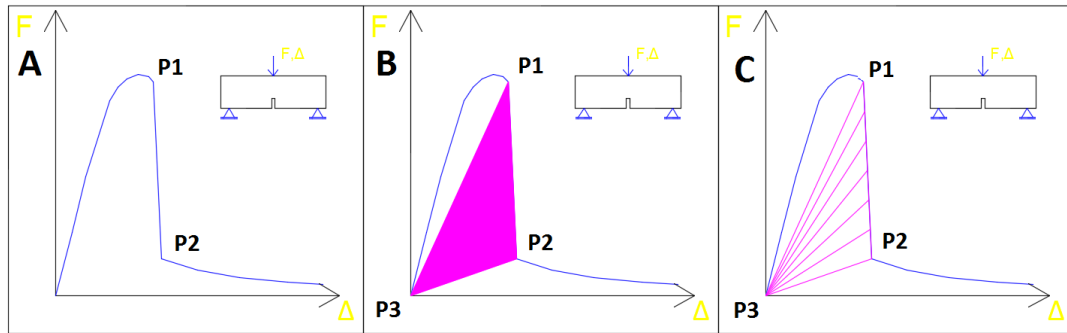


FIGURA 3.10: Ejemplo de problema a resolver con la restricción path following. Energía total a disipar entre los puntos $P1$ y $P2$.

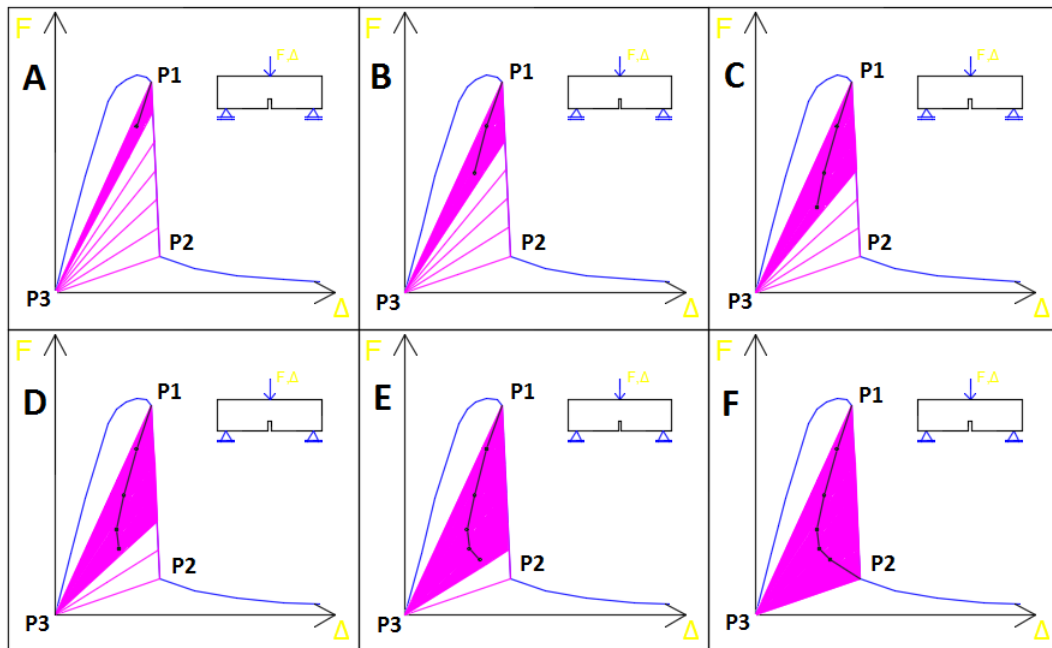


FIGURA 3.11: Ejemplo de problema a resolver con la restricción path following. Obtención de puntos intermedios en la rama de snap-back.

ensayo mediante control de desplazamientos desde el punto $P3$ hasta el punto $P1$. Al llegar al punto $P1$, las condiciones del ensayo (material, geometría, carga) hacen que la fisura que se generó en la probeta se propague de modo violento y disipando una gran cantidad de energía desde el punto $P1$ al $P2$, energía que se representa con el área del triángulo $P1, P2, P3$ en la figura (3.10)(B). Sin importar lo mucho que se reduzca el paso de carga con el control de desplazamientos, no pueden encontrarse puntos intermedios entre $P1$ y $P2$. Aún en el caso en el que no interese conocer que pasa con la curva carga desplazamiento entre los puntos $P1$ y $P2$, en muchas situaciones es imposible avanzar desde $P1$ a $P2$ pues los métodos numéricos como el MNR requiere que el valor inicial no diste mucho del final para encontrar solución. Por este motivo se decide realizar pasos

de carga donde la variable de control sea la energía disipada. En la figura (3.10)(C) se indican la cantidad de pasos que se realizan para cubrir la energía disipada entre $P1$ y $P2$. En estos pasos de carga se disipará una energía representada por el área de los triángulos contenidos en el triangulo mayor de vértices $P1$, $P2$ y $P3$. En la figura (3.11) se muestra como se va obteniendo la curva carga desplazamiento en los distintos pasos de carga. En la figura (3.11)(A) se ve sombreada el área del triangulo que representa la energía disipada en el primer paso realizado mediante control de disipación. Se ve como la curva carga desplazamiento continúa a la izquierda de $P1$ indicando un menor desplazamiento y una menor carga. El punto final de la curva carga desplazamiento, en este caso no corresponde a un punto de descarga elástica, pues este punto tiene una disipación asociada, es por esto que los puntos donde cae la carga y el desplazamiento pero con una disipación asociada se llaman puntos dentro de la rama de snap-back. En las figuras (3.11)(B) y (C) se continúan aplicando pasos de carga con control de disipación y obteniendo puntos dentro de la rama de snap-back. En las figuras (3.11)(D), (E) y (E) se observa que los puntos obtenidos se encuentran a la derecha del anterior, indicando que ya se encuentran fuera de la rama de snap-back. Dichos puntos pueden ser obtenidos mediante los controles ordinarios de fuerza o desplazamiento, o bien pueden ser obtenidos mediante el control de disipación pues este tipo de control no solo sirve para trazar las ramas de snap-back sino toda la curva carga desplazamiento.

En este trabajo se añade a la formulación del modelo no local de daño propuesto anteriormente una restricción path-following inspirada en el trabajo de [Verhoosel et al. \[2009\]](#).

En problemas donde el desplazamiento es una de las variables primarias se puede realizar un control de disipación de energía asociado a grados de libertad de desplazamientos o fuerzas. En el siguiente desarrollo se realizará un control de disipación de energía asociado a la fuerza.

Al sistema definido por las ecuaciones (3.25), (3.26), (3.27) y (3.39) se adiciona la siguiente restricción path-following:

$$RG = \mathcal{G} - \tau = 0, \quad \text{con} \quad \mathcal{G} = \mathcal{P}_{ext}(\dot{\mathbf{u}}, \zeta) - \mathcal{V}(\dot{u}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}). \quad (3.49)$$

La ecuación (3.49) establece que la disipación total \mathcal{G} menos un umbral τ debes ser igual a 0. El término $\mathcal{P}_{ext}(\dot{\mathbf{u}}, \zeta)$ es la potencia de las fuerzas externas, dependiente de una

nueva variable ζ , cuyo rol veremos más adelante. Definimos entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}(\dot{\mathbf{u}}, \zeta) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma^u} \mathbf{F}^u \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma^u + \int_{\Gamma^f} \mathbf{F}^f \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma^f = \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma^u} \mathbf{F}^u \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma^u + \zeta \int_{\Gamma^f} \underline{\mathbf{F}}^f \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma^f. \end{aligned} \quad (3.50)$$

En la ecuación (3.50) se expresa a las fuerzas prescriptas \mathbf{F}^f como el producto de un vector de fuerzas de referencia $\underline{\mathbf{F}}^f$ por una variable escalar ζ . La variable escalar ζ es la incógnita principal de la restricción path-following. Al realizar un paso de carga haciendo uso de la restricción path-following, las fuerzas \mathbf{F}^f dejan de ser dato y lo que se prescribe es la energía a disipar por medio de un valor de τ de tal forma de encontrar un valor de ζ que haga verificar la ecuación (3.49), junto con las otras ecuaciones que definen el problema. El término \mathcal{V} es la potencia de las fuerzas interna, el cual tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega - \int_{\Omega} V \dot{\alpha} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{A} : \nabla \dot{\beta} \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} R \frac{\partial \varpi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{\Omega} R' \dot{\alpha} \, \varpi \, d\Omega + \int_{\Omega} c \nabla \beta : \nabla \dot{\beta} \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (R \dot{\varpi} + \dot{R} \varpi + c \nabla \beta \cdot \nabla \dot{\beta}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{V}^i \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.7. Solución numérica del problema planteado

3.7.1. Linealización

El sistema no lineal a resolver está dado por ecuaciones (3.25), (3.26), (3.27), (3.49) y (3.39), las cuales se transcriben a continuación para realizar un mejor seguimiento tanto de esta sección como de las posteriores:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \mathcal{W}_{ext}(\delta \mathbf{u}) = 0, \quad (3.52)$$

$$\int_{\Omega} c \nabla \beta \cdot \nabla \delta \beta \, d\Omega + \int_{\Omega} r [\beta - \alpha] \delta \beta \, d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \delta \beta \, d\Omega = 0, \quad (3.53)$$

$$\int_{\Omega} [\beta - \alpha] \delta \lambda \, d\Omega = 0, \quad (3.54)$$

$$RG = \mathcal{P}_{ext}(\dot{\mathbf{u}}, \zeta) - \mathcal{V}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}) - \tau = 0, \quad (3.55)$$

$$\begin{cases} \text{si } V^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha^{\mathbf{N}}) + r [\beta - \alpha^{\mathbf{N}}] + \lambda - k \leq 0 & \text{entonces } \alpha = \alpha^{\mathbf{N}}, \\ \text{si no, encuentre } \alpha \geq \alpha^{\mathbf{N}} & \text{tal que } V^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) + r [\beta - \alpha] + \lambda - k = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

La ecuación (3.56) se resuelve para cada punto de integración a nivel local mientras que las tres primeras ecuaciones se resuelven de forma global mediante el MNR por lo que requieren ser linealizadas. La ecuación (3.55) solo se tendrá en cuenta en el caso de tener que realizar pasos de carga con el control de disipación. En tal caso, la ecuación (3.55) debe sumarse al sistema dado por las ecuaciones (3.52), (3.53) y (3.54) y resolverse también de modo global con el MNR. En el siguiente desarrollo se cuenta con todos los datos del paso de carga N y se quiere avanzar al paso de carga $N + 1$. Para el caso de $I = 0$ se inicia el método con los campos $\beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \beta^{\mathbf{N}}$, $\lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \lambda^{\mathbf{N}}$ y $\alpha_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \alpha^{\mathbf{N}}$, mientras que $\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ se inicia con un predictor elástico en función de la acción externa del paso (fuerza y/o desplazamiento prescripto para el paso). En en caso de realizar control de disipación, para $I = 0$ se inicia con $\zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = 1$, mientras que el vector de fuerza de referencia \mathbf{F}^f puede tomarse igual al del paso anterior o con un pequeño incremento similar a los pasos de cargar que vienen aplicándose en el problema. La linealización se expresa como:

$$\begin{aligned} LRU &= RU(p^0) + D[RU(p^0)](\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RU(p^0)](\Delta \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + \\ &D[RU(p^0)](\Delta \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RU(p^0)](\Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} LRA &= RA(p^0) + D[RA(p^0)](\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RA(p^0)](\Delta \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + \\ &D[RA(p^0)](\Delta \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RA(p^0)](\Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} LRL &= RL(p^0) + D[RL(p^0)](\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RL(p^0)](\Delta \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + \\ &D[RL(p^0)](\Delta \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RL(p^0)](\Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} LRG &= RG(p^0) + D[RG(p^0)](\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RG(p^0)](\Delta \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + \\ &D[RG(p^0)](\Delta \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) + D[RG(p^0)](\Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} &= \mathbf{u}_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1} - \mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, & \Delta \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} &= \beta_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1} - \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \\
 \Delta \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} &= \lambda_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1} - \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, & \Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} &= \zeta_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1} - \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1},
 \end{aligned}
 \tag{3.61}$$

donde $p^0 = (\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \alpha_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1})$. En las ecuaciones (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60); los funcionales LRU , LRA , LRL y LRG representan las formas lineales de los funcionales RU , RA , RL y RG dados por las ecuaciones (3.52), (3.53), (3.54) y (3.55) respectivamente. Las expresiones de cada uno de los términos de las formas lineales pueden encontrarse en la sección (3.8). Del sistema dado por las ecuaciones (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60) se podría calcular cantidades $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$, $\Delta \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$, $\Delta \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ y $\Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$. En caso de no cumplir la condición, residuo \leq tolerancia, con la ecuación (3.61) se podría calcular $\mathbf{u}_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1}$, $\beta_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1}$, $\lambda_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1}$ y $\zeta_{\mathbf{I}+1}^{\mathbf{N}+1}$, para avanzar a la siguiente iteración. Aunque lo expresado en la oración anterior resulta fácil de interpretar, resulta también impracticable sin antes asumir funciones de interpolación para los campos principales y los derivados, mediante la aplicación del método de elementos finitos. El desarrollo explicado en esta sección resulta interesante para entender cuáles son las ecuaciones a las que se les introducen las funciones de interpolación y conseguir así las expresiones de las matrices y vectores que conforman el método de elementos finitos.

3.7.2. Discretización espacial

Debido al modo de resolución descrito en el apartado anterior las incógnitas principales del problema son \mathbf{u} , β , λ y ζ . La incógnita α se actualiza a nivel punto de integración por lo que no requiere funciones de interpolación específicas. La incógnita ζ es un único escalar por lo que tampoco requiere funciones de interpolación específicas. Las forma en la que se interpolan las incógnitas principales y sus derivadas en el dominio Ω_e de un elemento finito es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_e &= \mathbf{u}|_{\Omega_e} \cong \mathbb{N}_e^u \mathbb{U}_e^u, & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_e) &= \boldsymbol{\varepsilon}_e \cong \mathbb{B}_e^u \mathbb{U}_e^u, \\
 \beta_e &= \beta|_{\Omega_e} \cong \mathbb{N}_e^\beta \mathbb{U}_e^\beta, & \nabla \beta_e &= \nabla \beta_e \cong \mathbb{B}_e^\beta \mathbb{U}_e^\beta, \\
 \lambda_e &= \lambda|_{\Omega_e} \cong \mathbb{N}_e^\lambda \mathbb{U}_e^\lambda
 \end{aligned}
 \tag{3.62}$$

donde \mathbb{N}_e^u , \mathbb{N}_e^β y \mathbb{N}_e^λ son las funciones de interpolación que permiten aproximar los campos de desplazamiento \mathbf{u} , daño β y multiplicadores de Lagrange λ respectivamente. Las

funciones \mathbb{B}_e^u y \mathbb{B}_e^β son las derivadas de las funciones de interpolación \mathbb{N}_e^u y \mathbb{N}_e^β respectivamente, las cuales permiten aproximar los campos de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_e)$ y gradiente del daño $\nabla\beta_e$ en un elemento finito. Los vectores \mathbb{U}_e^u , \mathbb{U}_e^β y \mathbb{U}_e^λ contienen los valores en los nodos de los elementos finitos para los campos de desplazamiento \mathbf{u}_e , daño β_e y multiplicadores de Lagrange λ_e respectivamente. Para la elección de las funciones de interpolación debe tenerse en cuenta que al derivarse las ecuaciones del problema de un funcional mixto (expresado en la sección (3.4.1)) las funciones elegidas aparte de poder soportar las derivadas que de ellas se requieran deben satisfacer la condición inf-sup. Este análisis se realizó en el trabajo de Lorentz & Godard [2011], en base al mismo, y teniendo en cuenta que en esta tesis solo se desarrollan ejemplos en estado plano, se elige para el campo \mathbf{u} elementos triangulares isoparamétricos de 6 nodos mientras que para los campos β y λ se eligen elementos triangulares isoparamétricos de 3 nodos. Más detalle referida a la tecnología de elementos finitos utilizada se puede encontrar en el Apéndice (B).

Si se introducen las funciones de interpolación de la ecuación (3.62) en el sistema linealizado dado por las ecuaciones (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60) se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned} \text{LRU}_e^u = \text{RU}_e^u(\mathcal{P}_e^0) + \mathbb{K}_e^{uu}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{u\beta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1} + \\ \mathbb{K}_e^{u\lambda}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{u\zeta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \text{LRU}_e^\beta = \text{RU}_e^\beta(\mathcal{P}_e^0) + \mathbb{K}_e^{\beta u}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{\beta\beta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1} + \\ \mathbb{K}_e^{\beta\lambda}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{\beta\zeta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \text{LRU}_e^\lambda = \text{RU}_e^\lambda(\mathcal{P}_e^0) + \mathbb{K}_e^{\lambda u}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{\lambda\beta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1} + \\ \mathbb{K}_e^{\lambda\lambda}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{\lambda\zeta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \text{LRG}_e = \text{RG}_e(\mathcal{P}_e^0) + \mathbb{K}_e^{\zeta u}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{\zeta\beta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1} + \\ \mathbb{K}_e^{\zeta\lambda}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \mathbb{U}_{e\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_e^{\zeta\zeta}(\mathcal{P}_e^0) \Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}\Delta U_{eI}^{uN+1} &= U_{eI+1}^{uN+1} - U_{eI}^{uN+1}, & \Delta U_{eI}^{\beta N+1} &= U_{eI+1}^{\beta N+1} - U_{eI}^{\beta N+1}, \\ \Delta U_{eI}^{\lambda N+1} &= U_{eI+1}^{\lambda N+1} - U_{eI}^{\lambda N+1},\end{aligned}\quad (3.67)$$

donde $\mathcal{P}_e^0 = (\mathbf{u}_e, \beta_e, \lambda_e, \alpha, \zeta)$. Cada término de las ecuaciones (3.63), (3.64), (3.65) y (3.66) representa la forma con la discretización espacial de cada término de las ecuaciones (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60) respectivamente, los cuales fueron acomodados ordenadamente. La expresión que corresponde a cada uno de estos términos puede verse en la sección (3.8). Las ecuaciones que solo contiene la linealización son referidas al dominio total Ω , mientras que las ecuaciones que contiene la discretización espacial son referidas al dominio de un elemento finito Ω_e , por esta razón tiene el subíndice e y no se encuentran iguales a cero. Para poder igualar las ecuaciones (3.63), (3.65), (3.65) y (3.66) con cero se debe realizar el ensamblaje de cada una de las matrices y vectores que en ellas intervienen. se denotará esta operación del siguiente modo: $\bullet_I^{N+1} = \Sigma \bullet_e(\mathcal{P}_e^0)$, donde $\bullet_e(\mathcal{P}_e^0)$ representan cada una de las matrices y vectores por elemento que interviene en las ecuaciones (3.63), (3.65), (3.65) y (3.66) y \bullet_I^{N+1} representa su versión ensamblada, correspondiente al paso de carga $N+1$ e iteración I . El operador Σ en este caso simboliza el ensamblaje. Luego de realizar el ensamblaje se tiene el siguiente sistema:

$$\mathbb{R}_I^{N+1} + \mathbb{K}_I^{N+1} \Delta \mathbb{S}_I^{N+1} = \Theta, \quad (3.68)$$

$$\mathbb{R}_I^{N+1} = \begin{Bmatrix} \mathbb{R}U_I^{uN+1} \\ \mathbb{R}U_I^{\beta N+1} \\ \mathbb{R}U_I^{\lambda N+1} \\ \mathbb{R}G_I^{N+1} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbb{S}_I^{N+1} = \begin{Bmatrix} \Delta U_I^{uN+1} \\ \Delta U_I^{\beta N+1} \\ \Delta U_I^{\lambda N+1} \\ \Delta \zeta_I^{N+1} \end{Bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$\mathbb{K}_I^{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}^{uu}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{u\beta}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{u\lambda}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{u\zeta}_I^{N+1} \\ \mathbb{K}^{\beta u}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\beta\beta}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\beta\lambda}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\beta\zeta}_I^{N+1} \\ \mathbb{K}^{\lambda u}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\lambda\beta}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\lambda\lambda}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\lambda\zeta}_I^{N+1} \\ \mathbb{K}^{\zeta u}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\zeta\beta}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\zeta\lambda}_I^{N+1} & \mathbb{K}^{\zeta\zeta}_I^{N+1} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

En la ecuación (3.68), \mathbb{R}_I^{N+1} es el vector total de residuos, \mathbb{K}_I^{N+1} es la matriz de rigidez tangente consistente y $\Delta \mathbb{S}_I^{N+1}$ es el vector de incrementos nodales de las variables

principales correspondientes a toda la malla. Cada una de las cantidades mencionadas anteriormente corresponde al paso de carga $N + 1$ y a la iteración I . La actualización de las variables principales para avanzar la siguiente iteración en caso que no se cumpla la condición $\|\mathbb{R}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}\| \leq TOL$ se realiza mediante la forma ensamblada de la ecuación (3.67), que es:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1} &= \mathbb{U}_{\mathbf{I}+1}^{u\mathbf{N}+1} - \mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1}; & \Delta \mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1} &= \mathbb{U}_{\mathbf{I}+1}^{\beta\mathbf{N}+1} - \mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1}; \\ \Delta \mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1} &= \mathbb{U}_{\mathbf{I}+1}^{\lambda\mathbf{N}+1} - \mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

La actualización de ζ se puede hacer directamente de la ecuación (3.61), pues recordemos que ζ es una incógnita escalar.

3.8. Expresiones del sistema linealizado

En esta sección se muestran las expresiones de cada término de las formas lineales de las ecuaciones (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60), y de sus correspondientes formas con discretización espacial dadas por las ecuaciones (3.63), (3.64), (3.65) y (3.66). Por cuestiones de claridad se omite que las funciones están evaluadas para su forma continua en $p^0 = (\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \beta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \lambda_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \alpha_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1})$ y para su forma discreta en el punto $\mathbf{p}_e^0 = (\mathbf{u}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \beta_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \lambda_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \alpha_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1})$. Luego de cada término de las formas lineales se expresa su forma discreta en la que se introducen las funciones de forma de la ecuación (3.62). Los órdenes de las matrices y vectores que componen las formas discretas pueden encontrarse en el apéndice (B.3).

$$RU = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \mathcal{W}_{ext}(\delta \mathbf{u}), \quad (3.72)$$

$$\mathbb{R}\mathbb{U}_e^u = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}_e^{uT} \boldsymbol{\sigma}_e d\Omega_e - \mathcal{W}_{ext}(\mathbb{N}_e^{uT}), \quad (3.73)$$

$$RA = \int_{\Omega} c \nabla \delta \beta \cdot \nabla \beta d\Omega + \int_{\Omega} \delta \beta [\beta - \alpha] r d\Omega + \int_{\Omega} \delta \beta \lambda d\Omega, \quad (3.74)$$

$$\mathbb{R}\mathbb{U}_e^{\beta} = \int_{\Omega_e} c \mathbb{B}_e^{\beta T} \nabla \beta_e d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbb{N}_e^{\beta T} [\beta_e - \alpha] r d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbb{N}_e^{\beta T} \lambda_e d\Omega_e, \quad (3.75)$$

$$RL = \int_{\Omega} \delta \lambda [\beta - \alpha] d\Omega, \quad (3.76)$$

$$\mathbb{R}\mathbb{U}_e^{\lambda} = \int_{\Omega_e} \mathbb{N}_e^{\lambda T} [\beta_e - \alpha] d\Omega_e, \quad (3.77)$$

$$RG = \mathcal{P}_{ext}(\dot{\mathbf{u}}, \zeta) - \int_{\Omega} \psi^i d\Omega - \tau, \quad (3.78)$$

$$\mathbb{R}G_e = \mathcal{P}_{ext}(\dot{\mathbf{u}}_e, \zeta) - \int_{\Omega_e} \psi^i d\Omega_e - \tau, \quad (3.79)$$

$$D[RU]\Delta\mathbf{u} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) : \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}) d\Omega, \quad (3.80)$$

$$\mathbb{K}_e^{uu} = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}_e^{uT} \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_e} \mathbb{B}_e^u d\Omega_e, \quad (3.81)$$

$$D[RU]\Delta\beta = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) : \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\beta} \Delta\beta d\Omega, \quad (3.82)$$

$$\mathbb{K}_e^{u\beta} = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}_e^{uT} \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_e}{\partial\beta_e} \mathbb{N}_e^\beta d\Omega_e, \quad (3.83)$$

$$D[RU]\Delta\lambda = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) : \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\lambda} \Delta\lambda d\Omega, \quad (3.84)$$

$$\mathbb{K}_e^{u\lambda} = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}_e^{uT} \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_e}{\partial\lambda_e} \mathbb{N}_e^\lambda d\Omega_e, \quad (3.85)$$

$$D[RU]\Delta\zeta = - \int_{\Gamma^f} \delta\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{F}}^f d\Gamma^f \Delta\zeta, \quad (3.86)$$

$$\mathbb{K}_e^{u\zeta} = - \int_{\Gamma_e^f} \mathbb{N}_e^{uT} \underline{\mathbf{F}}^f d\Gamma_e^f, \quad (3.87)$$

$$D[RA]\Delta\mathbf{u} = - \int_{\Omega} r \delta\beta \frac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}) d\Omega, \quad (3.88)$$

$$\mathbb{K}_e^{\beta u} = - \int_{\Omega_e} r \mathbb{N}_e^{\beta T} \frac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_e} \mathbb{B}_e^u d\Omega_e, \quad (3.89)$$

$$D[RA]\Delta\beta = \int_{\Omega} c \nabla\delta\beta \cdot \nabla(\Delta\beta) d\Omega + \int_{\Omega} r \delta\beta \left[1 - \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} \right] \Delta\beta d\Omega, \quad (3.90)$$

$$\mathbb{K}_e^{\beta\beta} = \int_{\Omega_e} c \mathbb{B}_e^{\beta T} \mathbb{B}_e^\beta d\Omega_e + \int_{\Omega_e} r \mathbb{N}_e^{\beta T} \left[1 - \frac{\partial\alpha}{\partial\beta_e} \right] \mathbb{N}_e^\beta d\Omega_e, \quad (3.91)$$

$$D[RA]\Delta\lambda = \int_{\Omega} \delta\beta \left[1 - r \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} \right] \Delta\lambda d\Omega, \quad (3.92)$$

$$\mathbb{K}_e^{\beta\lambda} = \int_{\Omega_e} \mathbb{N}_e^{\beta T} \left[1 - r \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_e} \right] \mathbb{N}_e^\lambda d\Omega_e, \quad (3.93)$$

$$D[RA]\Delta\zeta = \Theta, \quad (3.94)$$

$$\mathbb{K}_e^{\beta\zeta} = \Theta, \quad (3.95)$$

$$D[RL]\Delta\mathbf{u} = - \int_{\Omega} \delta\lambda \frac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}) d\Omega, \quad (3.96)$$

$$\mathbb{K}_{\lambda u} = - \int_{\Omega_e} \mathbb{N}_e^{\lambda T} \frac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_e} \mathbb{B}_e^u d\Omega_e, \quad (3.97)$$

$$D[RL]\Delta\beta = \int_{\Omega} \delta\lambda \left[1 - \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} \right] \Delta\beta \, d\Omega, \quad (3.98)$$

$$\mathbb{K}_e^{\lambda\beta} = \int_{\Omega_e} \mathbb{N}_e^{\lambda T} \left[1 - \frac{\partial\alpha}{\partial\beta_e} \right] \mathbb{N}_e^{\beta} \, d\Omega_e, \quad (3.99)$$

$$D[RL]\Delta\lambda = - \int_{\Omega} \delta\lambda \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} \Delta\lambda \, d\Omega, \quad (3.100)$$

$$\mathbb{K}_e^{\lambda\lambda} = - \int_{\Omega_e} \mathbb{N}_e^{\lambda T} \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_e} \mathbb{N}_e^{\lambda} \, d\Omega_e, \quad (3.101)$$

$$D[RL]\Delta\zeta = \Theta, \quad (3.102)$$

$$\mathbb{K}_e^{\lambda\zeta} = \Theta, \quad (3.103)$$

$$D[RG]\Delta\mathbf{u} = \frac{1}{\Delta t} \mathcal{P}_{ext}(\Delta\mathbf{u}, \zeta) - \int_{\Omega} \frac{\partial\psi^i}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}) \, d\Omega, \quad (3.104)$$

$$\mathbb{K}_e^{\zeta u} = \frac{1}{\Delta t} \mathcal{P}_{ext}(\mathbb{N}_e^u, \zeta) - \int_{\Omega_e} \frac{\partial\psi^i}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_e} \mathbb{B}_e^u \, d\Omega_e, \quad (3.105)$$

$$D[RG]\Delta\beta = - \int_{\Omega} \frac{\partial\psi^i}{\partial\beta} \Delta\beta \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial\psi^i}{\partial\nabla\beta} \cdot \Delta(\nabla\beta) \, d\Omega \quad (3.106)$$

$$\mathbb{K}_e^{\zeta\beta} = - \int_{\Omega_e} \frac{\partial\psi^i}{\partial\beta_e} \mathbb{N}_e^{\beta} \, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \frac{\partial\psi^i}{\partial\nabla\beta_e} \mathbb{B}_e^{\beta} \, d\Omega_e \quad (3.107)$$

$$D[RG]\Delta\lambda = - \int_{\Omega} \frac{\partial\psi^i}{\partial\lambda} \Delta\lambda \, d\Omega, \quad (3.108)$$

$$\mathbb{K}_e^{\zeta\lambda} = - \int_{\Omega_e} \frac{\partial\psi^i}{\partial\lambda_e} \mathbb{N}_e^{\lambda} \, d\Omega_e, \quad (3.109)$$

$$D[RG]\Delta\zeta = \int_{\Gamma^f} \underline{\mathbf{F}}^f \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma^f \Delta\zeta, \quad (3.110)$$

$$\mathbb{K}_e^{\zeta\zeta} = \int_{\Gamma_e^f} \underline{\mathbf{F}}^f \dot{\mathbf{u}}_e \, d\Gamma^f \Delta\zeta. \quad (3.111)$$

3.8.1. Cálculo de derivadas auxiliares

En esta sección se muestran las derivadas que se presentan en algunos de los términos de la sección anterior. Se muestran todas las formas continuas de las expresiones y solo aquellas formas discretas que puedan presentar alguna dificultad.

3.8.1.1. Derivadas de la variable α

Las siguientes ecuaciones se obtiene derivando implícitamente en función de α la ecuación (3.39).

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{R'}{b^a} \frac{\partial \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{r}{b^a}, \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{1}{b^a}, \quad (3.114)$$

$$b^a = R'' \varpi^* + r. \quad (3.115)$$

Calculamos ahora las derivadas segundas de las expresiones anteriores.

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} = -\frac{\left(R'' \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \frac{\partial \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + R' \frac{\partial^2 \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right) b^a - R' \frac{\partial \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes b^b}{(b^a)^2}, \quad (3.116)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{r b^b}{(b^a)^2}, \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{b^b}{(b^a)^2}, \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \beta} = -\frac{R'' \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} b^a - R' \frac{\partial \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} b^c}{(b^a)^2}, \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = -\frac{r b^c}{(b^a)^2}, \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda \partial \beta} = -\frac{b^c}{(b^a)^2}, \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \epsilon \partial \lambda} = - \frac{R'' \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \varpi^*}{\partial \epsilon} b^a - R' \frac{\partial \varpi^*}{\partial \epsilon} b^d}{(b^a)^2}, \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \lambda} = - \frac{r b^d}{(b^a)^2}, \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda^2} = - \frac{b^d}{(b^a)^2}, \quad (3.124)$$

$$b^b = R''' \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon} \varpi^* + R'' \frac{\partial \varpi^*}{\partial \epsilon}, \quad (3.125)$$

$$b^c = R''' \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \varpi^*, \quad (3.126)$$

$$b^d = R''' \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \varpi^*. \quad (3.127)$$

Nótese que las expresiones anteriores corresponden al caso en el que la evaluación de la función de daño $da > 0$ en la ecuación (3.39). Para el caso $da \leq 0$ las derivadas anteriores son nulas.

Las derivadas R' , R'' y R''' representan las derivadas primera, segunda y tercera de la función R , dada por la ecuación (3.37), respecto de α . Si bien su cálculo no resulta complejo, las expresiones resultan muy extensas por lo que no se incluyen en esta tesis. Dichas expresiones fueron calculadas en modo simbólico en el programa Matlab.

3.8.1.2. Derivadas de la potencia de las fuerzas internas

Las siguientes expresiones se consiguen derivando la ecuación (3.51).

$$\frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \dot{R}}{\partial \epsilon} \varpi + \dot{R} \frac{\partial \varpi}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \dot{\varpi} + R \frac{\partial \dot{\varpi}}{\partial \epsilon}, \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial \epsilon} = R'' \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon} \dot{\alpha} + R' \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \epsilon^2} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \epsilon} \dot{\beta} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda \partial \epsilon} \dot{\lambda} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon} \right], \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = R' \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon}, \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \beta} = \frac{\partial \dot{R}}{\partial \beta} \varpi + \frac{\partial R}{\partial \beta} \dot{\omega}, \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial \beta} = R'' \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \dot{\alpha} + R' \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \dot{\beta} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda \partial \beta} \dot{\lambda} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right], \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} = R' \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}, \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \nabla \beta} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \beta + \nabla \dot{\beta}, \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \lambda} = \frac{\partial \dot{R}}{\partial \lambda} \varpi + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \dot{\omega}, \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial \lambda} = R'' \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \dot{\alpha} + \frac{dR}{d\alpha} \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \lambda} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \lambda} \dot{\beta} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda^2} \dot{\lambda} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right], \quad (3.136)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = R' \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \quad (3.137)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \dot{\lambda}, \quad (3.138)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^N}{\Delta t}, \quad \dot{\beta} = \frac{\beta - \beta^N}{\Delta t}, \quad \dot{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda^N}{\Delta t}, \quad (3.139)$$

$$\dot{R} = R' \dot{\alpha}, \quad (3.140)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \varpi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.141)$$

En este modelo se hizo la consideración de caso cuasiestático por lo que se toma $\Delta t = 1$.

3.8.1.3. Derivadas de la tensión

Las siguientes expresiones se obtiene derivando la ecuación (3.35).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = R' \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \frac{\partial \varpi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + R \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}, \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \beta} = R' \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \varpi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.143)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \lambda} = R' \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \varpi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.144)$$

3.8.1.4. Derivadas del criterio de daño

Presentamos a las derivadas de la ecuación (3.41).

$$\frac{\partial \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{E} \mathcal{C} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}, \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} = \frac{1}{\ell_1[1-\ell_2]} \left[\sqrt{\frac{3}{4 J_2^0}} \mathbf{S}^0 + \ell_2 \boldsymbol{\delta} + \ell_3 \frac{\partial \langle \sigma_{0max} \rangle^+}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \right], \quad (3.146)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_{0max} \rangle^+}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} = \begin{cases} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} & \text{si } \sigma_{max}^0 \geq 0, \\ \boldsymbol{\theta} & \text{si } \sigma_{max}^0 < 0, \end{cases} \quad (3.147)$$

$$\frac{\partial \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} = \frac{1}{E} \mathcal{C} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0}, \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0} = \frac{1}{\ell_1[1-\ell_2]} \left[\sqrt{\frac{3}{4 J_2^0}} \mathbf{S}_e^0 + \ell_2 \boldsymbol{\delta}_e + \ell_3 \frac{\partial \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0} \right], \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0} = \begin{cases} \mathbf{w}_e & \text{si } \sigma_{max}^0 \geq 0, \\ \boldsymbol{\theta}_e & \text{si } \sigma_{max}^0 < 0, \end{cases} \quad (3.150)$$

donde \mathbf{S}^0 es el tensor desviador y \mathbf{v} es el autovector normalizado correspondiente a σ_{0max} , ambas cantidades calculadas del tensor $\boldsymbol{\sigma}^0$. $\boldsymbol{\delta}_e$ y \mathbf{w}_e son las formas vectoriales según el MEF de los tensores de segundo orden $\boldsymbol{\delta}$ y $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ respectivamente. Para problemas en estado plano la forma vectorial del tensor identidad es $\boldsymbol{\delta}_e = \{1 \ 1 \ 0\}^T$.

$$\frac{\partial^2 \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} = \frac{1}{E} \left\{ \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \right] \otimes \left[\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right] + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial (\boldsymbol{\sigma}^0)^2} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right\}, \quad (3.151)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial (\boldsymbol{\sigma}^0)^2} = \frac{1}{\ell_1[1-\ell_2]} \left[\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{\partial (J_2^{0-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} + \ell_3 \frac{\partial^2 \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+}{\partial (\boldsymbol{\sigma}^0)^2} \right], \quad (3.152)$$

$$\frac{\partial (J_2^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} = -\frac{1}{2} J_2^{0-\frac{3}{2}} \mathbf{S}^0 \otimes \mathbf{S}^0 + J_2^{-\frac{1}{2}} \left[(\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta})^\dagger - \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \right], \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial^2 \langle \sigma_{0max} \rangle^+}{\partial (\boldsymbol{\sigma}^0)^2} = \begin{cases} 2 (\sigma_{0max} \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\sigma}^0)^\dagger \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} & \text{si } \sigma_{max}^0 \geq 0, \\ \boldsymbol{\Theta} & \text{si } \sigma_{max}^0 < 0, \end{cases} \quad (3.154)$$

$$\frac{\partial^2 \varpi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e^2} = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial (\boldsymbol{\sigma}_e^0)^2} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \right], \quad (3.155)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial (\boldsymbol{\sigma}_e^0)^2} = \frac{1}{\ell_1[1-\ell_2]} \left[\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{\partial (J_2^{0-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_e^0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0} + \ell_3 \frac{\partial^2 \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+}{\partial (\boldsymbol{\sigma}_e^0)^2} \right], \quad (3.156)$$

$$\frac{\partial (J_2^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_e^0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_e^0} = -\frac{1}{2} J_2^{0-\frac{3}{2}} \mathbf{S}_e^0 \mathbf{S}_e^{0T} + J_2^{0-\frac{1}{2}} \left[\mathbf{I}_e - \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta}_e \boldsymbol{\delta}_e^T \right], \quad (3.157)$$

$$\frac{\partial^2 \langle \sigma_{max}^0 \rangle^+}{\partial (\boldsymbol{\sigma}_e^0)^2} = \begin{cases} 2 (\sigma_{max}^0 \boldsymbol{\delta}_e - \boldsymbol{\sigma}_e^0)^\ddagger \mathbf{w}_e^T & \text{si } \sigma_{max}^0 \geq 0, \\ \boldsymbol{\Theta}_e & \text{si } \sigma_{max}^0 < 0, \end{cases} \quad (3.158)$$

donde \bullet^\dagger denota la transpuesta de un tensor de cuarto orden donde se permuta la primera por la cuarta dimensión, \bullet^\ddagger denota la pseudoinversa de Moore Penrose y \mathbf{I}_e es matriz identidad.

3.9. Esquema de resolución del modelo propuesto

En base a lo desarrollado en las secciones anteriores se propone el siguiente esquema de resolución. El mismo fue implementado en un programa de elementos finitos ad hoc en el programa Matlab, para la resolución de distintos ejemplos numéricos expuestos en el capítulo (4).

1. Datos de entrada

a) Variables y funciones del paso de carga \mathbf{N}

$$\mathbb{U}^{u\mathbf{N}}, \mathbb{U}^{\beta\mathbf{N}}, \mathbb{U}^{\lambda\mathbf{N}}, \boldsymbol{\varepsilon}_e^{\mathbf{N}}, \beta_e^{\mathbf{N}}, \nabla \beta_e^{\mathbf{N}}, \lambda_e^{\mathbf{N}}, R^{\mathbf{N}}, R'^{\mathbf{N}}, \mathbf{F}^{\mathbf{N}}.$$

b) Parámetros del modelo

- Parámetros introducidos en la formulación: k , c y r .
- Parámetros de la función de rigidez: f_t , G_f , D , p y q .
- Parámetros del criterio de daño: ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 .
- Tensor constitutivo elástico: \mathbb{C}_e .

c) Acción del paso $\mathbf{N}+1$

Se requiere alguno de estos conjuntos de acciones:

- Control de desplazamiento: $\Delta \mathbb{U}_0^{u\mathbf{N}+1}$.
- Control de fuerzas: $\Delta \mathbf{F}^{f\mathbf{N}+1}$.

- Control de disipación: $\tau, \Delta \underline{\mathbf{F}}^{f\mathbf{N}+1}$.

d) Funciones de interpolación

$$\mathbb{N}_e^u, \mathbb{B}_e^u, \mathbb{N}_e^\beta, \mathbb{B}_e^\beta, \mathbb{N}_e^\lambda.$$

2. Inicialización

a) Inicio contador $I = 1$.

b) Predictor elástico en desplazamientos:

$$\text{Con } [\Delta \mathbf{U}_0^{u\mathbf{N}+1} \circ \Delta \mathbf{F}^{f\mathbf{N}+1} \circ \Delta \underline{\mathbf{F}}^{f\mathbf{N}+1}] \text{ y } \tilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \Delta \mathbf{U}^u.$$

c) Inicializo el resto de la variables

$$\Delta \mathbf{U}^\beta = \mathbf{\Theta}, \Delta \mathbf{U}^\lambda = \mathbf{\Theta}.$$

d) Si el paso es de control de disipación

- $\zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = 1$.

- Calcular y ensamblar $\mathbb{K}^{u\zeta^{\mathbf{N}+1}}$, $\mathbb{K}^{\beta\zeta^{\mathbf{N}+1}}$ y $\mathbb{K}^{\lambda\zeta^{\mathbf{N}+1}}$ con las ecuaciones (3.87), (3.95) y (3.103) respectivamente.

3. Pasaje de incógnitas principales a puntos de Gauss

a) Pasaje de incógnitas globales a nodales

- $\Delta \mathbf{U}^u \longrightarrow \Delta \mathbf{U}_e^u,$
- $\Delta \mathbf{U}^\beta \longrightarrow \Delta \mathbf{U}_e^\beta,$
- $\Delta \mathbf{U}^\lambda \longrightarrow \Delta \mathbf{U}_e^\lambda.$

b) Actualización de las variables de campo en los puntos de Gauss

- $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbb{B}_e^u \Delta \mathbf{U}_e^u \longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_e^{\mathbf{N}} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e,$
- $\Delta \beta_e = \mathbb{N}_e^\beta \Delta \mathbf{U}_e^\beta \longrightarrow \beta_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \beta_e^{\mathbf{N}} + \Delta \beta_e,$
- $\Delta(\nabla \beta_e) = \mathbb{B}_e^\beta \Delta \mathbf{U}_e^\beta \longrightarrow \nabla \beta_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \nabla \beta_e^{\mathbf{N}} + \Delta(\nabla \beta_e),$
- $\Delta \lambda_e = \mathbb{N}_e^\lambda \Delta \mathbf{U}_e^\lambda \longrightarrow \lambda_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \lambda_e^{\mathbf{N}} + \Delta \lambda_e.$

4. Evaluación de tension sin dañar e invariantes

a) Tensión sin dañar

$$\boldsymbol{\sigma}_{e\mathbf{I}}^{0\mathbf{N}+1} = \mathbb{C}_e^0 \boldsymbol{\varepsilon}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} \text{ (ecuaciones (3.34) y (3.35)).}$$

b) Invariantes de la tensión sin dañar

$$\boldsymbol{\sigma}_{e\mathbf{I}}^{0\mathbf{N}+1} \longrightarrow I_{1\mathbf{I}}^{0\mathbf{N}+1}, S_{e\mathbf{I}}^{0\mathbf{N}+1}, J_{2\mathbf{I}}^{0\mathbf{N}+1} \text{ y } \sigma_{max\mathbf{I}}^{0\mathbf{N}+1}.$$

5. Evaluación de la fuerza local asociada al daño

Con las ecuaciones (3.38) (3.41) (3.47), tenemos:

$$V^*(\boldsymbol{\epsilon}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \alpha^{\mathbf{N}}) = R^{\mathbf{N}} \frac{1}{2E} \left\{ \frac{1}{\ell_1[1-\ell_2]} \left[\sqrt{3J_{2\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}} + \ell_2 I_{1\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} + \ell_3 \langle \sigma_{max\mathbf{I}}^0 \mathbf{N}+1 \rangle^+ \right] \right\}^2.$$

6. Evaluación de superficie de daño y cálculo de α

En base a la ecuación (3.31) se calcula:

a) Superficie de daño

$$SUP(\boldsymbol{\epsilon}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \beta_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \lambda_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \alpha^{\mathbf{N}}) = SUP = V^*(\boldsymbol{\epsilon}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \alpha^{\mathbf{N}}) + r [\beta_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} - \alpha^{\mathbf{N}}] + \lambda_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} - k.$$

b) Si se cumple:

$$SUP \leq 0 \longrightarrow \alpha_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \alpha^{\mathbf{N}}.$$

c) Si no:

$$SUP > 0 \longrightarrow \text{reoslver } SUP(\boldsymbol{\epsilon}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \beta_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \lambda_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \alpha^x) = 0 \longrightarrow \alpha_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \alpha^x.$$

7. Evaluación de función de rigidez y tensión

a) Rigidez

$$R_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = R(\alpha_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}) \text{ con ecuación (3.37).}$$

b) Tensión

$$\boldsymbol{\sigma}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = R_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} \boldsymbol{\sigma}_{e\mathbf{I}}^{0\mathbf{N}+1} \text{ con ecuación (3.19).}$$

8. Evaluación de residuo

a) Cálculo y ensamblaje de $\mathbb{R}U_{\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{R}U_{\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1}$ y $\mathbb{R}U_{\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1}$ con las ecuaciones (3.73), (3.75) y (3.77) respectivamente.

b) Si el paso es de control de disipación

- Cálculo de $\varpi_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$, $\dot{\alpha}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$, $[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \dot{\beta}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \dot{\lambda}_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}]$, $\dot{R}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ y $\dot{\varpi}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ con las ecuaciones (3.34), (3.138), (3.139), (3.140) y (3.141) respectivamente.
- Cálculo y ensamblaje de $\mathbb{R}G_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ con la ecuación (3.87) .

c) Armado del vector de residuos:

$$\mathbb{R}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = [\mathbb{R}U_{e\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1}, \mathbb{R}U_{e\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1}, \mathbb{R}U_{\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1}, \mathbb{R}G_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}]^T$$

9. Control convergencia:

a) Si $\|\mathbb{R}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}\| \leq TOL$:

- Guardo salida para el próximo paso:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^{u\mathbf{N}+1} &= \mathbb{U}^{u\mathbf{N}} + \Delta\mathbb{U}^u, \quad \mathbb{U}^{\beta\mathbf{N}+1} = \mathbb{U}^{\beta\mathbf{N}} + \Delta\mathbb{U}^\beta, \quad \mathbb{U}^{\lambda\mathbf{N}+1} = \mathbb{U}^{\lambda\mathbf{N}} + \Delta\mathbb{U}^\lambda, \\ \beta_e^{\mathbf{N}+1} &= \beta_e^{\mathbf{N}+1}, \quad \nabla\beta_e^{\mathbf{N}+1} = \nabla\beta_e^{\mathbf{N}+1}, \quad \lambda_e^{\mathbf{N}+1} = \lambda_e^{\mathbf{N}+1}, \quad R^{\mathbf{N}+1} = R_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \\ R'^{\mathbf{N}+1} &= R'_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \quad \mathbf{F}^{\mathbf{N}+1} = \mathbb{R}\mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} + (\mathbf{F}^{\mathbf{N}} + \Delta\mathbf{F}^f{}^{\mathbf{N}+1}). \end{aligned}$$

- $N = N + 1$ y fin del paso de carga.

b) Si $\|\mathbb{R}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}\| > TOL$ entonces continuo.

10. Cálculo de matriz de rigidez.

a) Cálculo de $\frac{\partial \varpi^{*\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{e\mathbf{I}}}$, $\frac{\partial \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{e\mathbf{I}}}$, $\frac{\partial \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \beta_e^{\mathbf{N}+1}}$, $\frac{\partial \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \lambda_e^{\mathbf{N}+1}}$, $\frac{\partial \sigma_e^{\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{e\mathbf{I}}}$, $\frac{\partial \sigma_e^{\mathbf{N}+1}}{\partial \beta_e^{\mathbf{N}+1}}$ y $\frac{\partial \sigma_e^{\mathbf{N}+1}}{\partial \lambda_e^{\mathbf{N}+1}}$ con las ecuaciones (3.148), (3.112), (3.113), (3.114), (3.142), (3.143) y (3.144) respectivamente; y cálculo de $R''_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ y $w_{e\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$.

b) Cálculo y ensamblaje de $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{uu\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{u\beta\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{u\lambda\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\beta u\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\beta\beta\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\beta\lambda\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\lambda u\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\lambda\beta\mathbf{N}+1}$ y $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\lambda\lambda\mathbf{N}+1}$ con las ecuaciones (3.81), (3.83), (3.85), (3.89), (3.91), (3.93), (3.97), (3.99) y (3.101) respectivamente.

c) Si el paso es de control de disipación

- Cálculo de $\frac{\partial^2 \varpi^{*\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e^2 \mathbf{I}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e^2 \mathbf{I}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \beta_e \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{e\mathbf{I}}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \lambda_e \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{e\mathbf{I}}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e \partial \beta_e^{\mathbf{N}+1}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \beta_e^2 \mathbf{I}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \lambda_e \partial \beta_e^{\mathbf{N}+1}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e \partial \lambda_e^{\mathbf{N}+1}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \beta_e \partial \lambda_e^{\mathbf{N}+1}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \lambda_e^2 \mathbf{I}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e \mathbf{I}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \beta_e \mathbf{I}}$, $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \boldsymbol{\nabla} \beta_{\mathbf{I}}}$ y $\frac{\partial^2 \alpha^{\mathbf{N}+1}}{\partial \lambda_e \mathbf{I}}$ con las ecuaciones (3.155), (3.116), (3.117), (3.118), (3.119), (3.120), (3.121), (3.122), (3.123), (3.124), (3.128), (3.131), (3.134) y (3.135) respectivamente; y cálculo de $R'''_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ y $(\sigma_{max}^0 \boldsymbol{\delta}_e - \sigma_e^0)_{\mathbf{I}}^{\dagger\mathbf{N}+1}$.
- Cálculo y ensamblaje de $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta u\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta\beta\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta\lambda\mathbf{N}+1}$ y $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta\zeta\mathbf{N}+1}$ con las ecuaciones (3.105), (3.107), (3.109) y (3.111) respectivamente.

d) Armado matriz de rigidez

$$\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{uu\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{u\beta\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{u\lambda\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{u\zeta\mathbf{N}+1} \\ \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\beta u\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\beta\beta\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\beta\lambda\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\beta\zeta\mathbf{N}+1} \\ \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\lambda u\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\lambda\beta\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\lambda\lambda\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\lambda\zeta\mathbf{N}+1} \\ \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta u\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta\beta\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta\lambda\mathbf{N}+1} & \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\zeta\zeta\mathbf{N}+1} \end{bmatrix}.$$

11. Resolución del sistema de ecuaciones

$$\mathbb{R}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} + \mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} \Delta\mathbb{S}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \Theta \longrightarrow \Delta\mathbb{S}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = [\Delta\mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1}, \Delta\mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1}, \Delta\mathbb{U}_{\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1}, \Delta\zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}]^T.$$

Si el paso no es de control de disipación eliminar las últimas filas y columnas según corresponda de $\mathbb{R}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$, $\mathbb{K}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$ y $\mathbb{S}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}$.

12. Actualizo incógnitas principales

$$\Delta \mathbf{U}^u = \Delta \mathbf{U}^u + \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{I}}^{u\mathbf{N}+1},$$

$$\Delta \mathbf{U}^\beta = \Delta \mathbf{U}^\beta + \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{I}}^{\beta\mathbf{N}+1},$$

$$\Delta \mathbf{U}^\lambda = \Delta \mathbf{U}^\lambda + \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{I}}^{\lambda\mathbf{N}+1},$$

$$\zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} = \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1} + \Delta \zeta_{\mathbf{I}}^{\mathbf{N}+1}, \text{ (solo si el paso es de control de disipación),}$$

$$I = I + 1,$$

Se vuelve a (3).

3.10. Anexo: desarrollo para la obtención de la ecuaciones de equilibrio

Para la obtención de la ecuación de equilibrio correspondiente al campo de desplazamientos se parte de la aplicación del principio de trabajos virtuales:

$$\mathcal{W}_{int}^u(\delta \mathbf{u}) = \mathcal{W}_{ext}(\delta \mathbf{u}), \quad (3.159)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (3.160)$$

Sustituyendo con ayuda de la derivada del producto el integrando del primer miembro en la ecuación (3.160) se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) = -div(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} + div(\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}). \quad (3.161)$$

Remplazando la ecuación (3.161) en (3.160) se tiene:

$$- \int_{\Omega} div(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} div(\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (3.162)$$

Aplicando el Teorema de la divergencia se tiene:

$$- \int_{\Omega} div(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (3.163)$$

Si en la ecuación (3.163) se aplica el Teorema fundamental del cálculo variacional y tenemos en cuenta la partición del borde Γ explicada en la sección (3.3.2), se obtiene la ecuación de equilibrio para el campo de desplazamientos \mathbf{u} , dada por la ecuación (3.11).

Para la obtención de la ecuación de equilibrio correspondiente al campo de daño se parte de:

$$\mathcal{W}_{int}^{\beta}(\delta\beta) = \int_{\Omega} V \delta\beta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla\delta\beta d\Omega. \quad (3.164)$$

Sustituyendo con ayuda de la derivada del producto el segundo integrando del segundo miembro de la ecuación (3.164) se tiene:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla\delta\beta = -div(\mathbf{A}) \delta\beta + div(\mathbf{A} \delta\beta). \quad (3.165)$$

Remplazando la ecuación (3.165) en (3.164) se tiene:

$$\mathcal{W}_{int}^{\beta}(\delta\beta) = \int_{\Omega} V \delta\beta d\Omega - \int_{\Omega} div(\mathbf{A}) \delta\beta d\Omega + \int_{\Omega} div(\mathbf{A} \delta\beta) d\Omega. \quad (3.166)$$

Aplicando el Teorema de la divergencia se tiene:

$$\mathcal{W}_{int}^{\beta}(\delta\beta) = \int_{\Omega} V \delta\beta d\Omega - \int_{\Omega} div(\mathbf{A}) \delta\beta d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma} \delta\beta d\Gamma. \quad (3.167)$$

Si en el segundo término del segundo miembro de la ecuación (3.167) se sustituye la definición de la fuerza vectorial termodinámicamente asociada al daño dada por la ecuación (3.4), se tiene que $div(\mathbf{A}) = c \nabla^2\beta$. Por otro lado, en base a lo expuesto en el trabajo de Lorentz & Benallal [2005], se tiene que para que se cumpla la ecuación (3.5) la parte de los argumentos de la integrales de la ecuación (3.167) que acompañan a $\delta\beta$ deben cumplir:

$$\mathcal{B}(\delta\beta) \in \partial_{\beta}(\Phi(\dot{\beta})) \longleftrightarrow \begin{cases} V + c \nabla^2(\beta) \in \partial_{\beta}(\phi(\dot{\beta})) & \text{en } \Omega, \\ \text{con } \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (3.168)$$

3.11. Anexo: cálculo de derivadas direccionales de la energía potencial total modificada

Cálculo de la derivada direccional de la ecuación(3.25):

$$D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta\mathbf{u} = \left[\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha) \right]_{\epsilon=0} \quad (3.169)$$

$$= \left[\frac{d}{d\epsilon} \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}), \alpha) \right]_{\epsilon=0} - \left[\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}) \right]_{\epsilon=0}. \quad (3.170)$$

Calculando separadamente las dos últimas derivadas direccionales tenemos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\epsilon} \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}), \alpha) \right]_{\epsilon=0} &= \int_{\Omega} \left[\frac{d}{d\epsilon} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}), \alpha) \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}), \alpha)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u})} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u})}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.171)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}) \right]_{\epsilon=0} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \left[\frac{d}{d\epsilon} (\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}) \right]_{\epsilon=0} d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \left[\frac{d}{d\epsilon} (\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}) \right]_{\epsilon=0} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma = \mathcal{W}_{ext}(\delta\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.172)$$

Sustituyendo estas dos derivadas derivadas direccionales y reemplazando la definición de la tensión de la ecuación (3.19) se tiene:

$$D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta\mathbf{u} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega + \mathcal{W}_{ext}(\delta\mathbf{u}). \quad (3.173)$$

Cálculo de la derivada direccional de la ecuación(3.26):

$$D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta\beta = \left[\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta + \epsilon\delta\beta, \lambda, \alpha) \right]_{\epsilon=0} \quad (3.174)$$

$$= \left[\frac{d}{d\epsilon} \Psi_2(\beta + \epsilon\delta\beta) \right]_{\epsilon=0} + \int_{\Omega} \frac{r}{2} \left[\frac{d}{d\epsilon} (\beta + \epsilon\delta\beta - \alpha)^2 \right]_{\epsilon=0} d\Omega + \quad (3.175)$$

$$\int_{\Omega} \lambda \left[\frac{d}{d\epsilon} (\beta + \epsilon\delta\beta - \alpha) \right]_{\epsilon=0} d\Omega. \quad (3.176)$$

Calculando separadamente las dos primeras derivadas direccionales del último término de la ecuación antes desarrollada se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\epsilon} \Psi_2(\beta + \epsilon\delta\beta) \right]_{\epsilon=0} &= \int_{\Omega} \frac{c}{2} \left[\frac{d}{d\epsilon} (\nabla(\beta + \epsilon\delta\beta) \cdot \nabla(\beta + \epsilon\delta\beta)) \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \frac{c}{2} [2 \nabla\delta\beta \cdot \nabla(\beta + \epsilon\delta\beta)]_{\epsilon=0} d\Omega, = \int_{\Omega} c \nabla\delta\beta \cdot \nabla\beta d\Omega \quad (3.177) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{r}{2} \left[\frac{d}{d\epsilon} (\beta + \epsilon\delta\beta - \alpha)^2 \right]_{\epsilon=0} d\Omega &= \\ \int_{\Omega} \frac{r}{2} [2(\beta + \epsilon\delta\beta - \alpha)\delta\beta]_{\epsilon=0} d\Omega &= \int_{\Omega} r[\beta - \alpha]\delta\beta d\Omega. \quad (3.178) \end{aligned}$$

Sustituyendo estas dos derivadas derivadas direccionales y calculando la restante se tiene:

$$D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta\beta = \int_{\Omega} c \nabla\delta\beta \cdot \nabla\beta d\Omega + \int_{\Omega} r[\beta - \alpha]\delta\beta d\Omega + \int_{\Omega} \lambda\delta\beta d\Omega. \quad (3.179)$$

Cálculo de la derivada direccional de la ecuación (3.27):

$$\begin{aligned} D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta\lambda &= \left[\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda + \epsilon\delta\lambda, \alpha) \right]_{\epsilon=0} = \\ &= \int_{\Omega} (\beta - \alpha) \left[\frac{d}{d\epsilon} (\lambda + \epsilon\delta\lambda) \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \int_{\Omega} (\beta - \alpha)\delta\lambda d\Omega. \quad (3.180) \end{aligned}$$

Cálculo de la derivada direccional de la ecuación (3.28):

$$D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)]\delta\alpha = \left[\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha + \epsilon\delta\alpha) \right]_{\epsilon=0} \quad (3.181)$$

$$= \left[\frac{d}{d\epsilon} \Psi_1(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \alpha + \epsilon\delta\alpha) \right]_{\epsilon=0} + \Delta t \left[\frac{d}{d\epsilon} \Phi \left(\frac{\alpha + \epsilon\delta\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right]_{\epsilon=0} + \quad (3.182)$$

$$\int_{\Omega} \frac{r}{2} \left[\frac{d}{d\epsilon} (\beta - \alpha - \epsilon\delta\alpha)^2 \right]_{\epsilon=0} d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \left[\frac{d}{d\epsilon} (\beta - \alpha - \epsilon\delta\alpha) \right]_{\epsilon=0} d\Omega. \quad (3.183)$$

Calculando separadamente las tres primeras derivadas direccionales del último término de la ecuación antes desarrollada tenemos se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\epsilon} \Psi_1(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \alpha + \epsilon \delta \alpha) \right]_{\epsilon=0} &= \int_{\Omega} \left[\frac{d}{d\epsilon} \psi(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \alpha + \epsilon \delta \alpha) \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \alpha + \epsilon \delta \alpha)}{\partial(\alpha + \epsilon \delta \alpha)} \frac{d(\alpha + \epsilon \delta \alpha)}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha d\Omega, \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} \Delta t \left[\frac{d}{d\epsilon} \Phi \left(\frac{\alpha + \epsilon \delta \alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right]_{\epsilon=0} &= \Delta t \int_{\Omega} \left[\frac{d}{d\epsilon} \phi \left(\frac{\alpha + \epsilon \delta \alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \\ &= \Delta t \int_{\Omega} \left[\partial_{\alpha + \epsilon \delta \alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha + \epsilon \delta \alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right) \frac{d(\alpha + \epsilon \delta \alpha)}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} d\Omega = \\ &= \Delta t \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right) \delta \alpha d\Omega, \end{aligned} \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{r}{2} \left[\frac{d}{d\epsilon} (\beta - \alpha - \epsilon \delta \alpha)^2 \right]_{\epsilon=0} d\Omega &= \\ &= - \int_{\Omega} \frac{r}{2} [2 (\beta - \alpha - \epsilon \delta \alpha) \delta \alpha]_{\epsilon=0} d\Omega = - \int_{\Omega} r (\beta - \alpha) \delta \alpha d\Omega. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Sustituyendo estas tres derivadas direccionales, reemplazando la definición de la fuerza escalar termodinámicamente asociada al daño de la ecuación (3.20) y calculando la última derivada direccional se tiene:

$$\begin{aligned} D[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha)] \delta \alpha &= - \int_{\Omega} V \delta \alpha d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right) \delta \alpha d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} r (\beta - \alpha) \delta \alpha d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \delta \alpha d\Omega. \end{aligned} \quad (3.187)$$

Como se expresa en la sección (3.4.1), la derivada direccional de la energía potencial total en dirección de la variable auxiliar al daño, obtenida en la ecuación (3.187) debe ser igual a cero, obtenido:

$$\int_{\Omega} V \delta \alpha d\Omega + \int_{\Omega} \{r [\beta - \alpha] + \lambda\} \delta \alpha d\Omega = \Delta t \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^{\mathbf{N}}}{\Delta t} \right) \right) \delta \alpha d\Omega. \quad (3.188)$$

Como el segundo miembro de la ecuación (3.188) es una subdiferencial, la cual representa un conjunto de valores, es correcto expresar esta última ecuación del siguiente modo:

$$\int_{\Omega} V \delta\alpha d\Omega + \int_{\Omega} \{r [\beta - \alpha] + \lambda\} \delta\alpha d\Omega \in \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) \right) \delta\alpha d\Omega. \quad (3.189)$$

Capítulo 4

Ejemplos realizados con el modelo mecánico

A continuación se usa el modelo antes descrito para la resolución de algunos ejemplos numéricos. Estos ejemplos se resuelven implementando el esquema de la sección (3.9) en un programa ad hoc realizado en Matlab.

En el cuadro (4.1) se exponen los parámetros con los que se realizan los ejemplos resueltos en el presente capítulo. En caso de usar algún parámetro distinto se lo especificará en cada ejemplo en particular.

CUADRO 4.1: Parámetros materiales.

P. elásticos		
$E =$	30000	[MPa]
$\mu =$	0,20	[-]
P. función de rigidez		
$D =$	$5,00E - 02$	[m]
$G_f =$	$1,00E - 04$	[MPa m]
$f_t =$	3,00	[MPa]
$p =$	2,00	[-]
$q =$	0,00	[-]
P. función de daño		
$\ell_1 =$	10	[-]
$\ell_2 =$	0,10	[-]

Todos los ensayos que se presentan a continuación se realizan en estado plano de tensiones utilizando un espesor de $1mm$. Se recuerda, como se indica en la sección (3.7.2), que los desplazamientos se interpolan utilizando funciones cuadráticas mediante triángulos de 6 nodos y para daño y multiplicadores de Lagrange se utilizan funciones lineales mediante triángulos de 3 nodos. En base al siguiente ejemplo sencillo se explica cómo se contabilizan elementos y nodos. Si se tiene una malla constituida por 2 elementos formando un cuadrilátero entonces habría 2 elementos para desplazamientos, 2 elementos para daño y 2 elementos para multiplicadores de Lagrange. Se dice entonces que esa malla tiene 2 elementos. En el caso de los grados de libertad, se tienen 18 para desplazamiento (9 para desplazamiento X y 9 para desplazamiento Y), 4 para daño y 4 para multiplicadores de Lagrange. Se dice entonces que esta malla tiene $18 + 4 + 4 = 26$ grados de libertad, lo cual coincide con el número de filas o columnas de la matriz de rigidez global.

4.1. Ensayo en probeta trapecial: análisis de convergencia en trapecio

A continuación presentamos el ensayo de una probeta trapecial con una entalla sujeta a desplazamientos verticales en sentidos opuestos como se muestra en la figura (4.1). El objetivo del ensayo es ir refinando la malla de elementos finitos para estudiar las diferencias en la respuesta carga-desplazamiento y el mapa de daño. Llamamos mapa de daño al ploteo de los valores $(1 - R)$ en el dominio analizado.

La probeta presentada en la figura (4.1) tiene simetría respecto de un eje horizontal por lo que las mallas solo representan la mitad superior. En el cuadro (4.2) indicamos la cantidad de elementos regulares dentro del semiancho D y la cantidad total de elementos y nodos para cada discretización.

Las figuras (4.2) y (4.3) muestran las curvas carga desplazamiento y mapas de daño respectivamente para los ensayos realizados con cada una de las distintas mallas. En la figura (4.4) se muestran los mapas de tensión vertical obtenidos para la Malla T-F en los Punto A, B y C indicados en la figura (4.2).

Como se observa en la figura (4.3) la zona donde se concentra el daño queda incluida en el semiancho de localización D .

CUADRO 4.2: Datos de mallas para la probeta trapecial.

-	Elementos en D	Elementos totales	Nodos totales
Malla T-A	$\frac{1}{2}$	200	1118
Malla T-B	1	543	2896
Malla T-C	2	1417	7380
Malla T-D	4	3812	19574
Malla T-F	8	7603	38910
Malla T-F	16	22792	115626

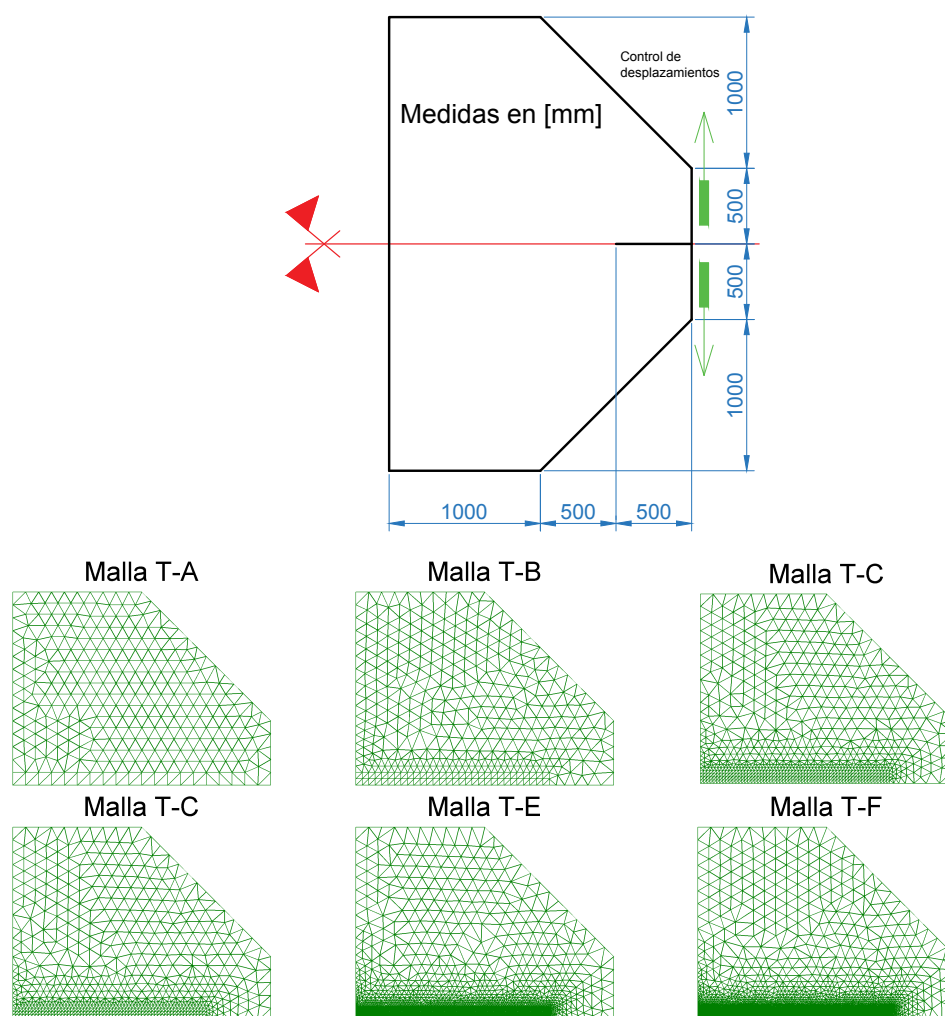


FIGURA 4.1: Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para probeta trapecial.

En la figura (4.2) se nota que para el caso de la Malla T-A no obtenemos convergencia por parte del modelo pasando el pico del ensayo. Se recalca que para esta malla sólo la mitad de un elemento está contenida en el semiancho de localización D . Para las otras mallas se nota que las respuestas se van acercando cada vez más entre sí a medida que se refina la malla.

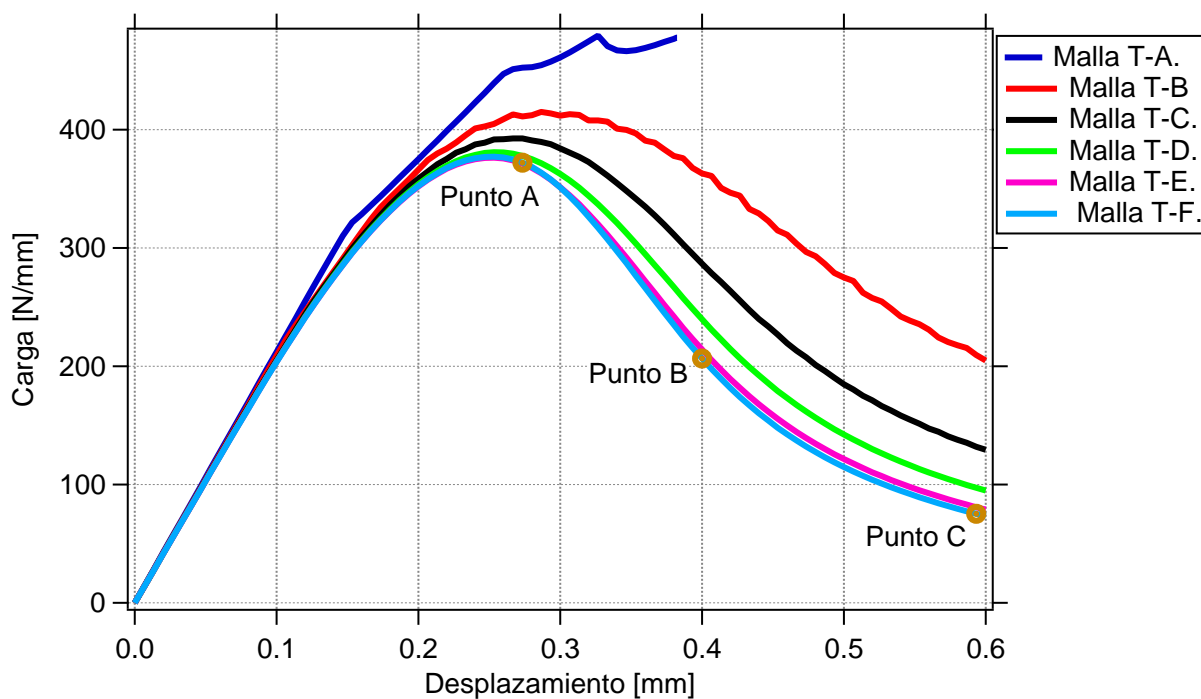


FIGURA 4.2: Carga vs desplazamiento para probeta trapecial.

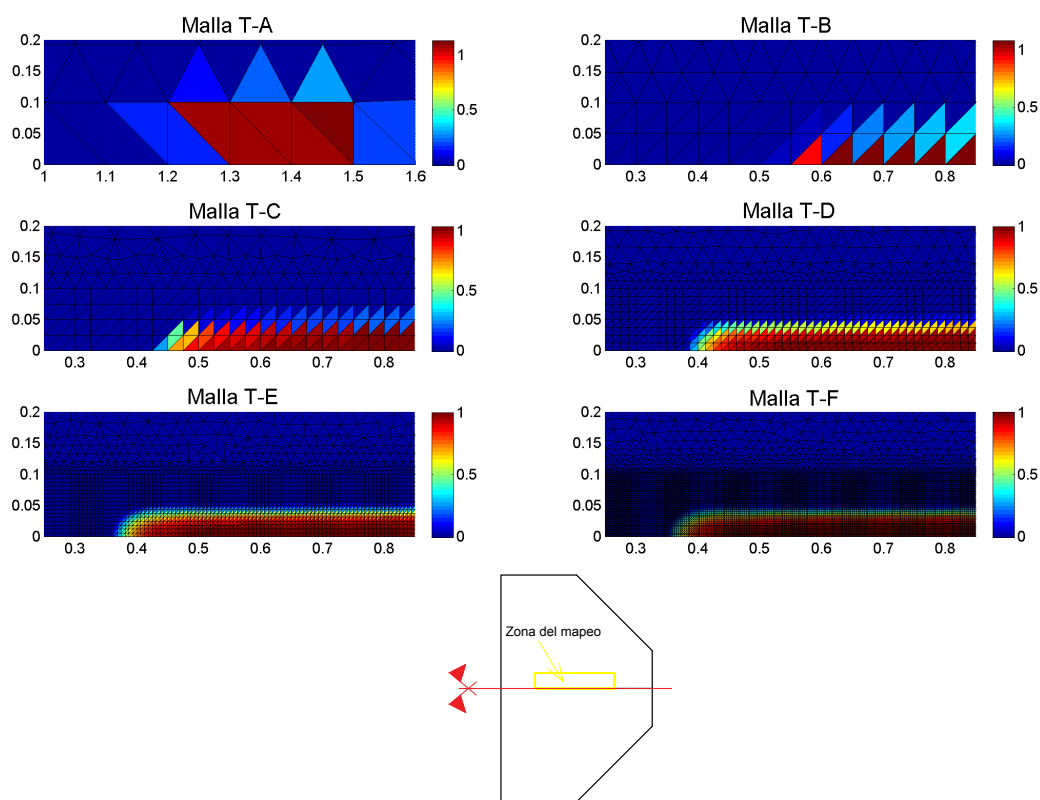


FIGURA 4.3: Mapa de daño para probeta trapecial.

En la figura (4.5) se grafica la energía disipada calculada como $\Sigma V\dot{\alpha}$ y como $\Sigma V^*\dot{\alpha}$ en función de la fuerza escalar asociada al daño V , correspondiente a un modelo estándar

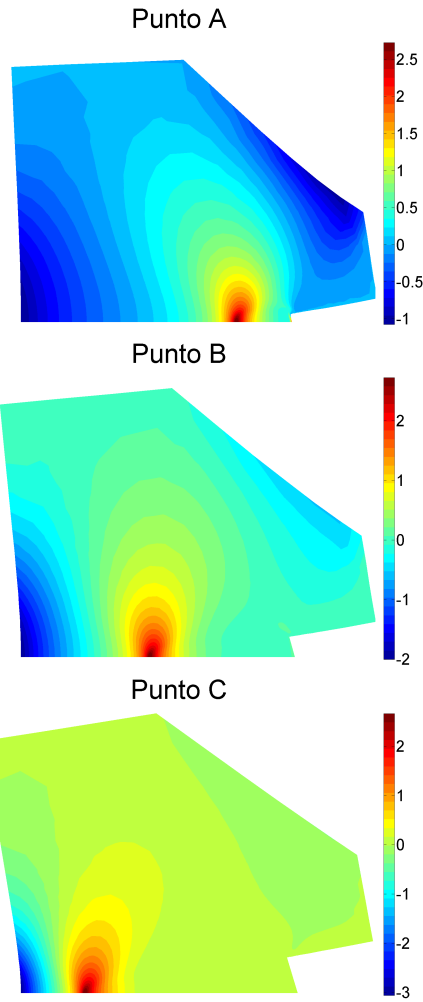


FIGURA 4.4: Tensión vertical para probeta trapecial correspondientes a la malla T-F. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$.

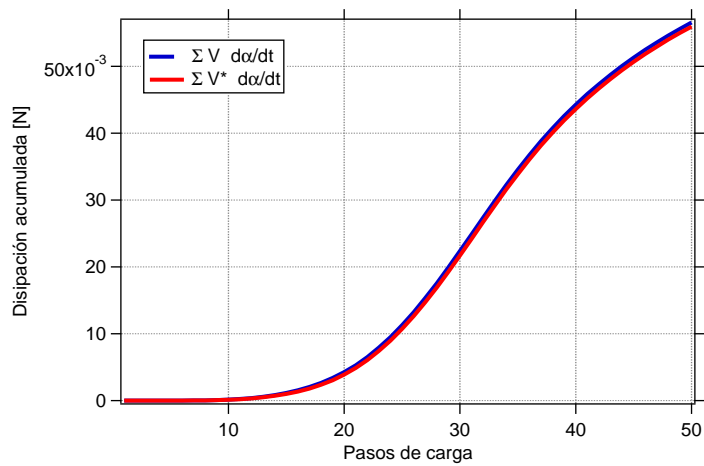


FIGURA 4.5: Energía disipada para probeta trapecial.

generalizado, y a V^* del modelo propuesto. No se aprecian diferencias significativas entre ambas curvas. Esta figura corresponde a la Malla T-D.

4.2. Placa con perforación excéntrica: control de disipación

El ensayo sobre la placa con perforación excéntrica tiene una respuesta con ramas de snap-back en la curva carga-desplazamiento. Más aún, este ejemplo es de tipo multifractura, ya que el daño comienza por el lado más corto y continua luego por el más largo. Todo ellos hace que la resolución numérica se dificulte ante la presencia de inestabilidades y se deba utilizar una ecuación tipo path-following incorporada al sistema que se indica en la sección (3.6) , la cual permite realizar pasos de carga controlando la energía disipada.

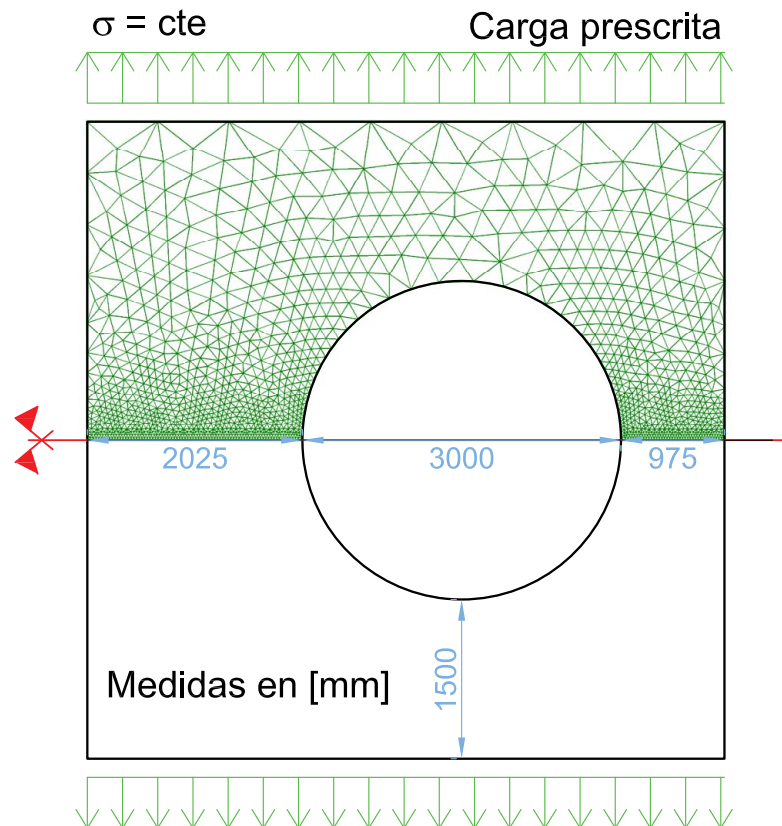


FIGURA 4.6: Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para placa con perforación excéntrica.

La probeta presentada en la figura (4.6) tiene simetría respecto de un eje horizontal por lo que la malla solo es representada en la mitad superior. La malla utilizada tiene 2767 elementos y 14478 nodos.

En la figura (4.7) se muestra la curva carga-desplazamiento del ensayo, y se distinguen los tramos:

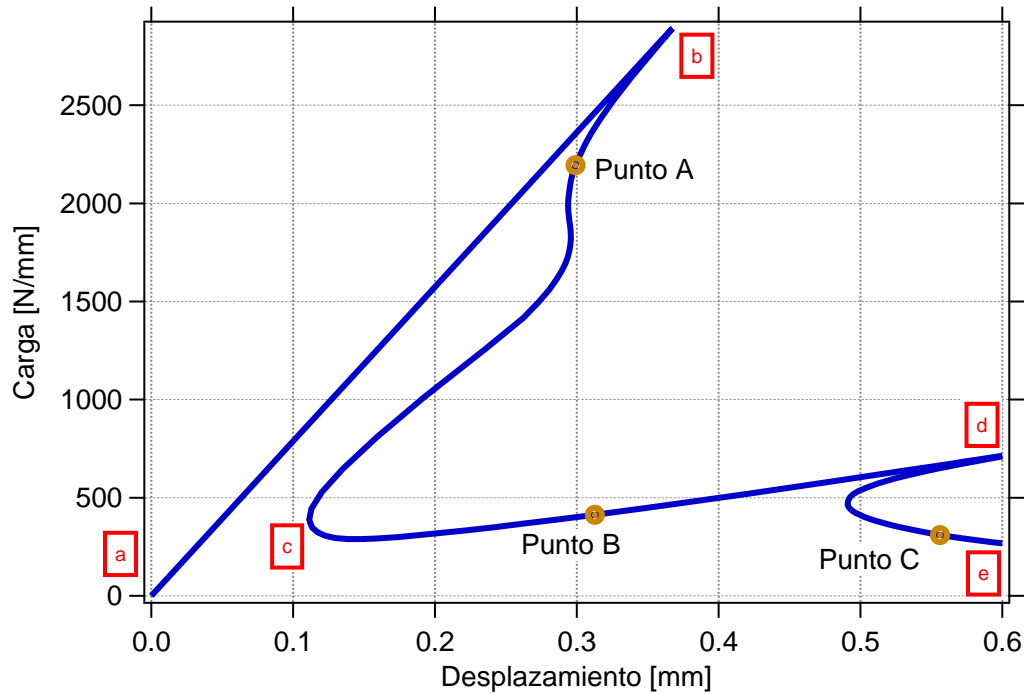


FIGURA 4.7: Carga vs desplazamiento para placa con perforación excéntrica.

- tramo a-b: primera carga elástica.
- tramo b-c: primera rama de snap-back. Se desarrolla hasta que se termina de cortar la sección de la derecha.
- tramo c-d: segunda carga elástica.
- tramo e-f: segunda rama de snap-back. Se desarrolla mientras se corta la sección de la izquierda

El ensayo se realizó con control de fuerzas hasta el final del tramo A-B. Luego el ensayo se continuó con control de disipación.

Las figuras (4.8) y (4.9) muestran los mapas de daño y tensión vertical respectivamente en los Puntos A, B y C indicados en la figura (4.7).

En la figura (4.10) se grafica la energía disipada calculada como $\Sigma V\dot{\alpha}$ y como $\Sigma V^*\dot{\alpha}$ en función de la fuerza escalar asociada al daño V , correspondiente a un modelo estándar generalizado, y a V^* del modelo propuesto. No se aprecian diferencias significativas entre ambas curvas. En esta figura se aprecian también las distintas etapas del ensayo. Hasta el paso de carga 7 se realizó con control de fuerza. Luego, solo un poco antes del pico, en el tramo a-b, se pasó a control de disipación con $\tau = 5E - 4 N$, para poder hacer

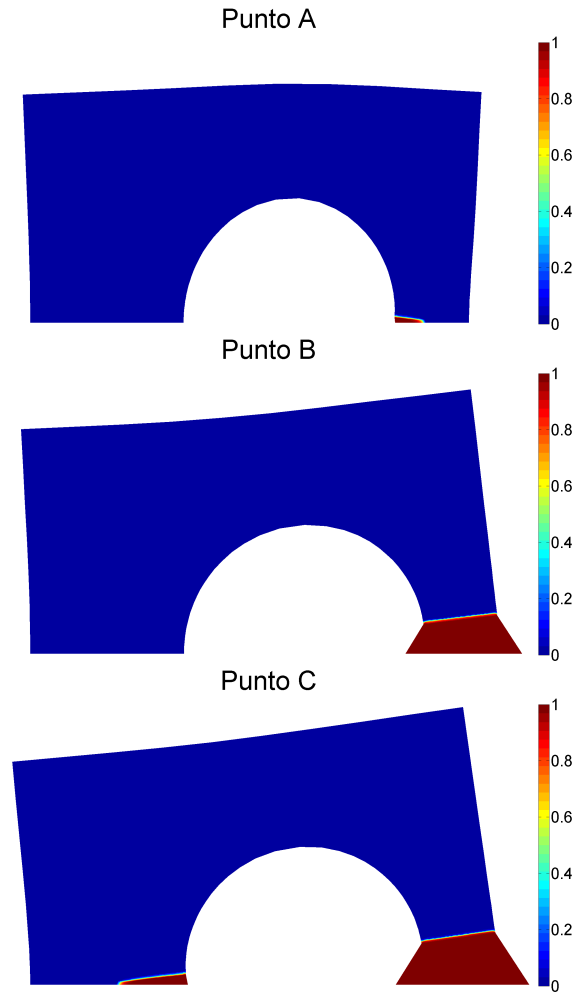


FIGURA 4.8: Mapa de daño para placa con perforación excéntrica. Factor de ampli-
cación de desplazamientos $1E^{03}$.

un pasaje sin problemas desde el primer tramo a-b a la primera rama de snap-back. Este valor se conservó hasta el paso 15, a partir del cual se adoptó $\tau = 1E - 3 N$. Con este valor se terminó la primera rama de snap-back y se pasó al tramo c-d hasta poco antes de entrar en la segunda rama de snap-back. Para poder entrar sin problemas a esta segunda rama, poco antes del final de tramo c-d, se adopta $\tau = 1E - 4 N$ en el paso 65, y se conserva este valor hasta que se realizan algunos pasos en la segunda rama de snap-back, hasta paso 100. El ensayo se culmina elevando el valor $\tau = 1E - 3 N$ hasta el paso 120. Los distintos valores de τ nombrados anteriormente corresponden a las pendientes de las rectas que se aprecian en la figura (4.10).

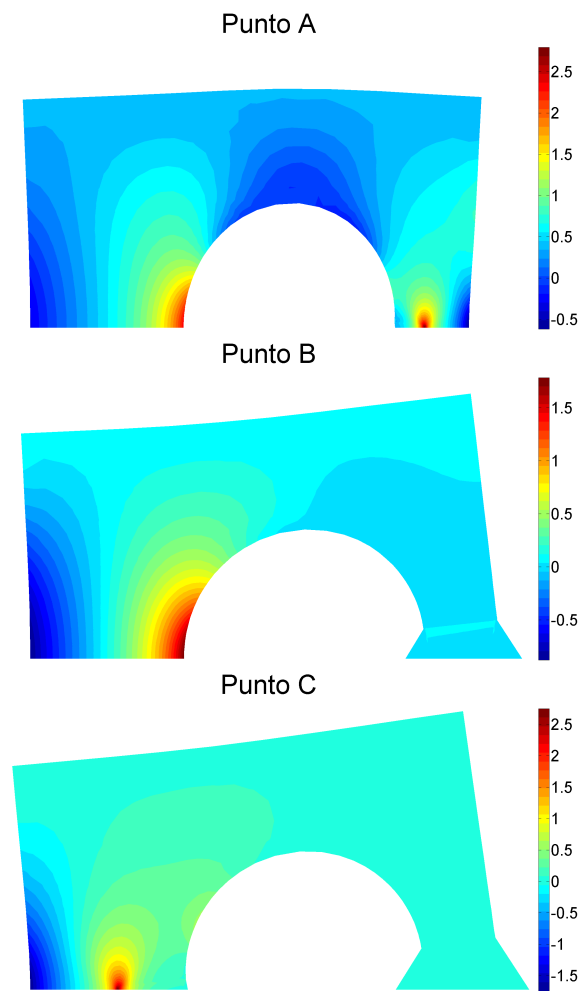


FIGURA 4.9: Tensión vertical para la placa con perforación excéntrica. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$.

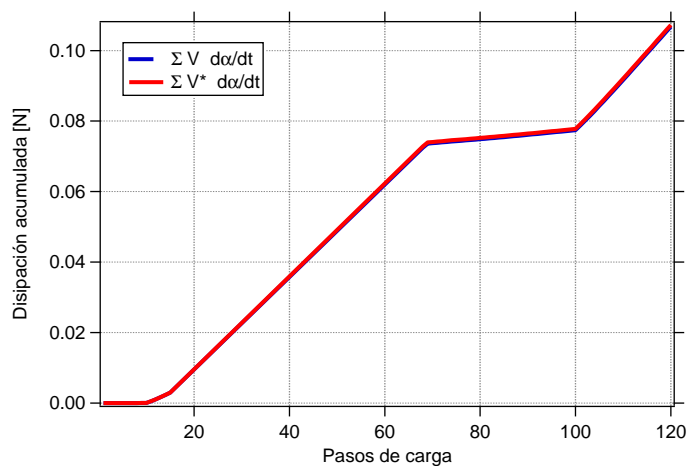


FIGURA 4.10: Energía disipada para la placa con perforación excéntrica.

CUADRO 4.3: Parámetros de vigas entallada

P. elásticos		
$E =$	36500	[MPa]
$\mu =$	0,18	[-]
P. función de rigidez		
$D =$	$5,00E - 03$	[m]
$G_{f1} =$	$5,00E - 06$	[MPa m]
$G_{f2} =$	$1,00E - 05$	[MPa m]
$G_{f3} =$	$2,00E - 05$	[MPa m]
$G_{f4} =$	$3,00E - 05$	[MPa m]
$G_{f5} =$	$5,00E - 05$	[MPa m]
$f_t =$	3,19	[MPa]
$p_1 =$	2,00	[-]
$p_2 =$	4,00	[-]
$p_3 =$	8,00	[-]
$q_1 =$	0,00	[-]
$q_2 =$	1,00	[-]
$q_3 =$	2,00	[-]
P. función de daño		
$\ell_1 =$	25	[-]

4.3. Ensayo de flexión en viga entallada: Energía de fractura y función de rigidez

En este ejemplo se ensayan a flexión una vigas entallada variando la energía de fractura G_f y los parámetros de la función de rigidez p y q con el objetivo de estudiar su influencia en la respuesta. En este ejemplo se escoge una viga con una entalla poco profunda para asegurar que para los valores de energía de fractura mas bajos se tenga en la respuesta pospico una rama de snap-back [Carpinteri, 1989]. En el cuadro (4.3) se exponen los parámetros de los ensayos.

La probeta presentada en la figura (4.11) tiene simetría respecto de un eje vertical por lo que la malla solo representa la mitad izquierda. La malla utilizada tiene 2653 elementos y 13794 nodos. En la zona donde se propaga el daño se dispusieron los elementos de tal manera de formar cuadrados compuestos de dos elementos triangulares. Dentro del semiancho de localización se dispusieron 4 de estos cuadrados.

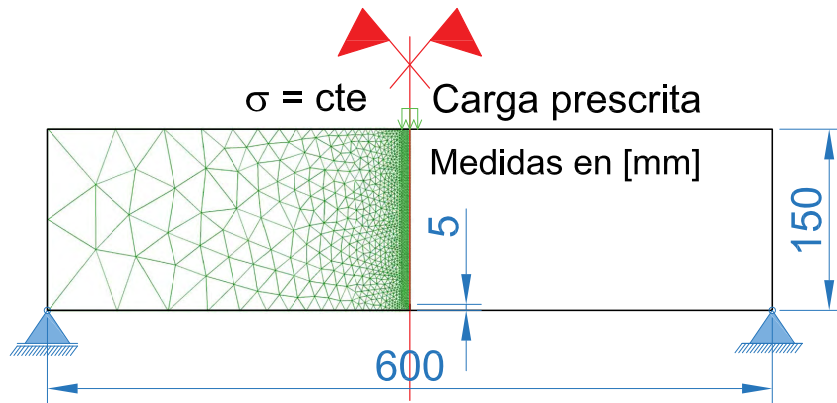


FIGURA 4.11: Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para la viga entallada.

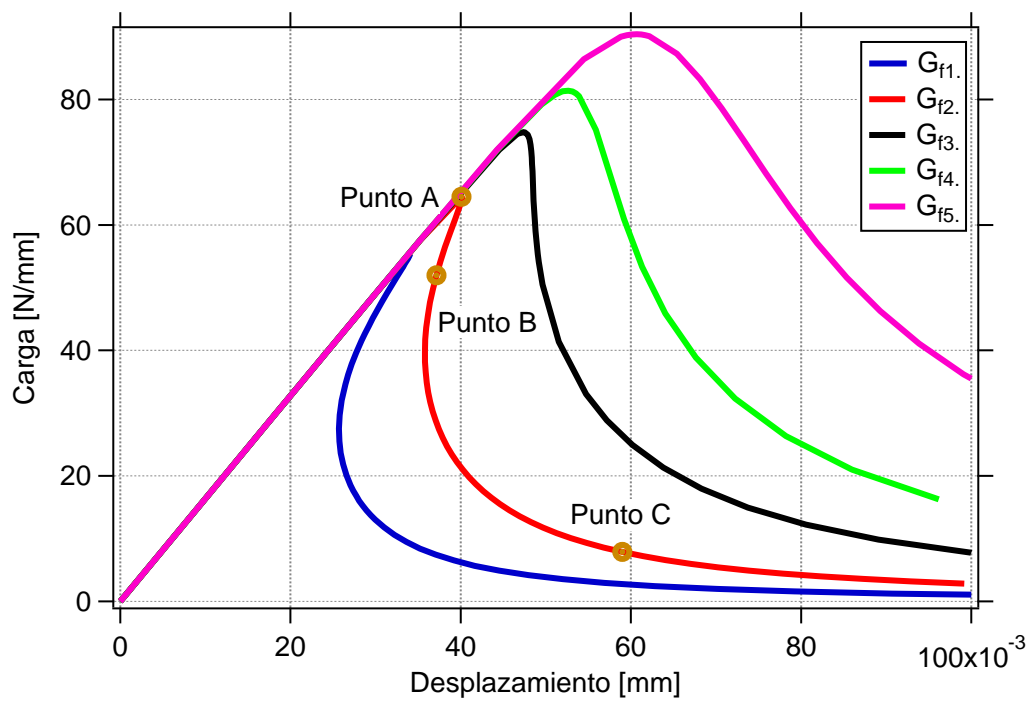


FIGURA 4.12: Carga vs desplazamiento para la viga entallada. Comparación de energía de fractura.

La figura (4.12) muestra las curvas carga-desplazamiento para distintas energías de fracturas G_f . En correspondencia se obtiene los mapas de daño de la figura (4.15). La figura (4.13) muestra las curvas carga-desplazamiento para los distintos parámetros p de la función de rigidez. En correspondencia se obtiene los mapas de daño de la figura (4.16). La figura (4.14) muestra las curvas carga-desplazamiento para los distintos parámetros q de la función de rigidez. En correspondencia se obtiene los mapas de daño de la figura (4.17). Las curvas carga-desplazamiento de las figuras (4.12), (4.13) y (4.14) se realizaron con control de carga hasta al pico y luego se continuó con control de disipación, puesto a

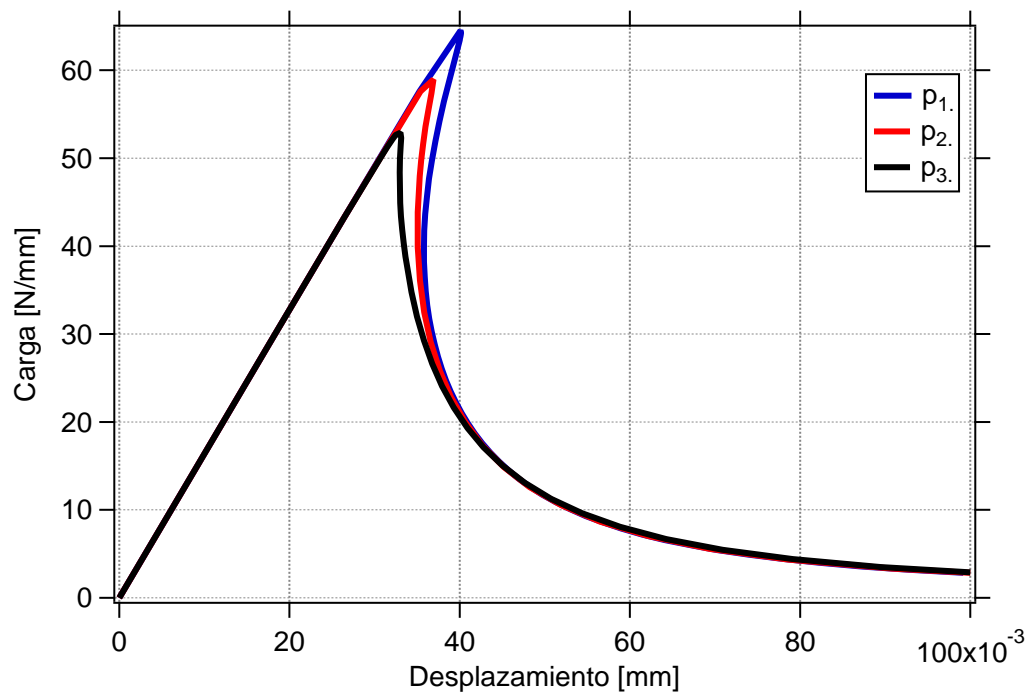


FIGURA 4.13: Carga vs desplazamiento para la viga entallada. Comparación parámetro p de función de rigidez.

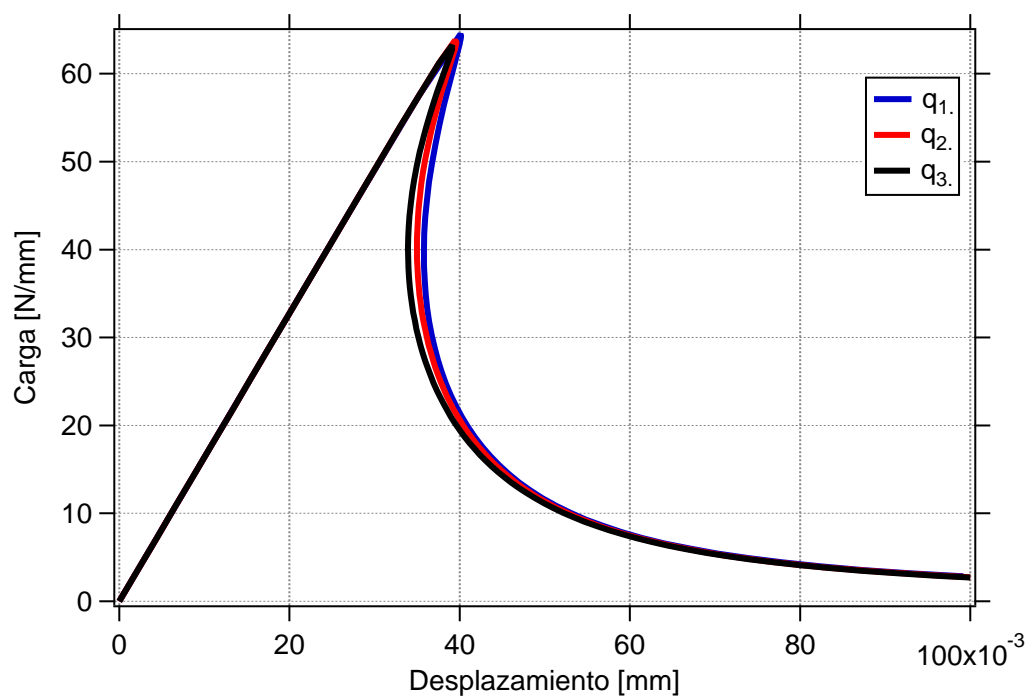


FIGURA 4.14: Carga vs desplazamiento para la viga entallada. Comparación parámetro q de función de rigidez.

que algunas de ellas presentan ramas de snap-back. La figura (4.18) muestra los mapas de tensión horizontal en los Puntos A,B y C indicados en la figura (4.12) correspondientes a G_{f2} .

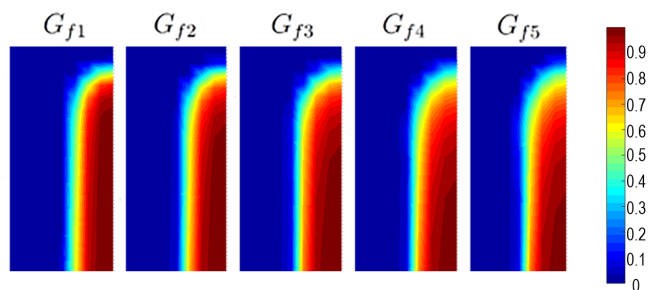


FIGURA 4.15: Mapa de daño en la cabeza de la fisura para la viga entallada. Comparación de energía de fractura.

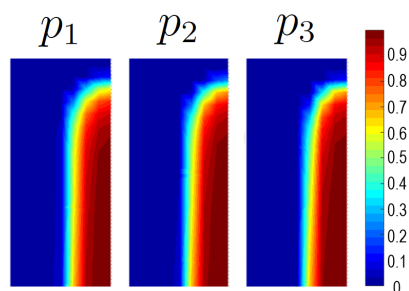


FIGURA 4.16: Mapa de daño en la cabeza de la fisura para la viga entallada. Comparación parámetro p de función de rigidez.

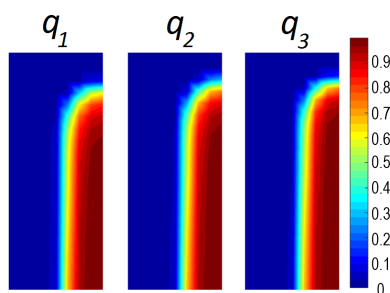


FIGURA 4.17: Mapa de daño en la cabeza de la fisura para la viga entallada. Comparación parámetro q de función de rigidez.

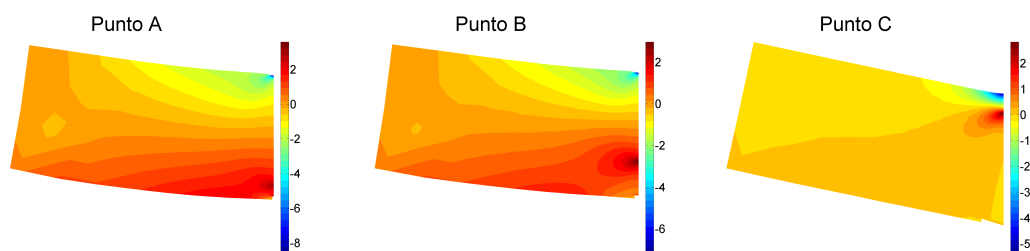


FIGURA 4.18: Tensión horizontal para la viga entallada G_{f2} . Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$.

En la figura (4.12) se observa cómo al aumentar la energía de fractura se incrementa el pico del ensayo y se pasa de un comportamiento pospico con presencia de una rama de snap-back, para las energías más bajas a un comportamiento donde no se presenta dicha

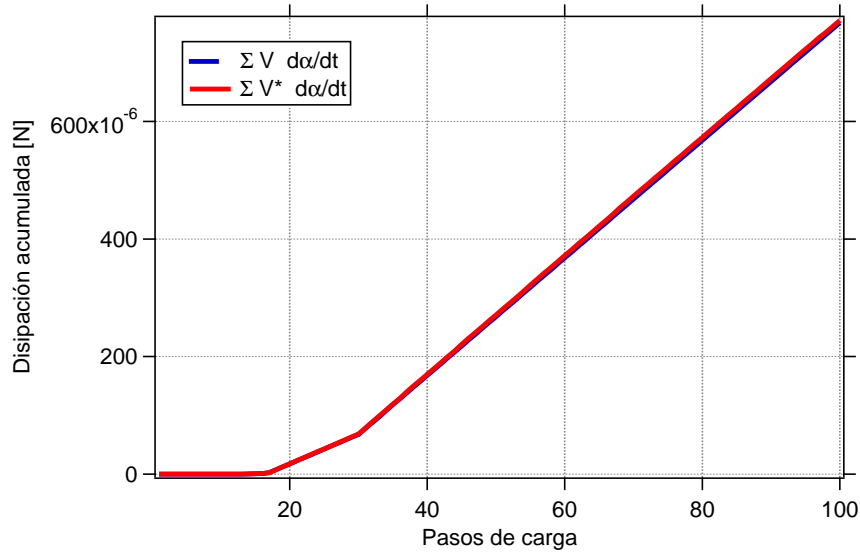


FIGURA 4.19: Energía disipada para la viga entallada.

rama para energías más altas. En en la figura (4.15) se observa cómo, al ir aumentando la energía de fractura, la zona de transición desde el estado totalmente dañado hasta un estado sin daño en la cabeza de la fisura, se hace más amplia. Es razonable pensar que al incrementarse esta zona de transición, la viga puede resistir más y presentar un comportamiento postpico no tan frágil.

En la figura (4.19) se grafica la energía disipada calculada como $\Sigma V \dot{\alpha}$ y como $\Sigma V^* \dot{\alpha}$ en función de la fuerza escalar asociada al daño V , correspondiente a un modelo estándar generalizado, y a V^* del modelo propuesto. Esta gráfica corresponde a la viga G_{f2} de la figura (4.12). No se aprecian diferencias significativas entre ambas curvas. En esta figura se aprecian también las distintas etapas del ensayo. Hasta el paso de carga 17 se realizo con control de fuerza. Luego, un poco antes del pico se pasa a control de disipación, con un valor de $\tau = 5E - 6 N$. Se continúa así hasta el paso 30 donde se pasa a $\tau = 1E - 5 N$, hasta culminar el ensayo . Los distintos valores de τ nombrados anteriormente corresponden a las pendientes de las rectas que se aprecian en la figura (4.19).

CUADRO 4.4: Parámetros de vigas entallada con carga excéntrica.

P. elásticos		
$E =$	33000	[MPa]
$\mu =$	0,18	[-]
P. función de rigidez		
$D_1 =$	$5,00E - 03$	[m]
$D_2 =$	$2,50E - 03$	[m]
$D_3 =$	$1,25E - 03$	[m]
$G_f =$	$5,00E - 05$	[MPa m]
$f_t =$	2,80	[MPa]
P. función de daño		
$\ell_1 =$	20	[-]

CUADRO 4.5: Datos de mallas para la viga entallada con carga excéntrica.

-	semiancho de localización	Elementos totales	Nodos totales
Mesh RC-A	D_1	2005	10416
Mesh RC-B	D_1	1449	7588
Mesh RC-C	D_2	4533	23170
Mesh RC-D	D_3	7594	38616

4.4. Viga entallada con carga excéntrica: Ancho de localización

En este ejemplo se realiza una viga entallada con carga excéntrica con el objetivo de mostrar que el modelo es capaz de reproducir una trayectoria de fisura curva. También se muestra que el modelo brinda respuestas aproximadamente idénticas al realizar un mismo ejemplo con distintas mallas. Por último, se estudia la influencia del parámetro que maneja el ancho de localización en la respuesta de este ejemplo. En el cuadro (4.4) se exponen los parámetros usados en los ensayos.

En la figura (4.20) se presentan la probeta ensayada, sus condiciones de carga y apoyo, y las mallas empleadas en los ejemplos. El cuadro (4.5) muestra los parámetros de ancho de localización que caracteriza a cada malla como así también la cantidad de elementos y nodos totales.

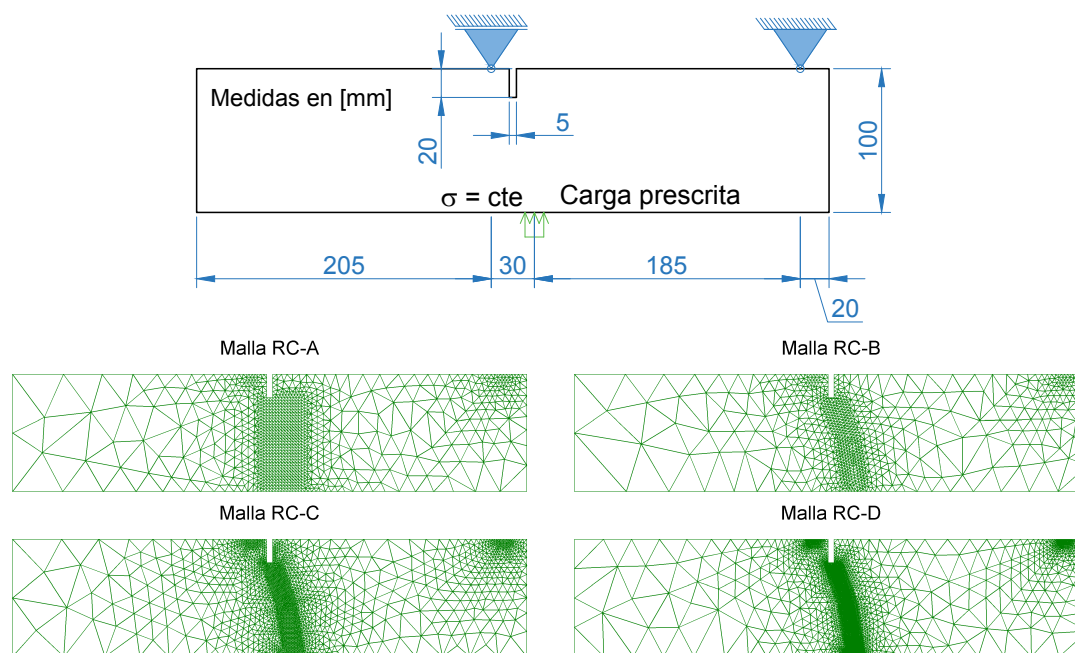


FIGURA 4.20: Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla viga entallada con carga excéntrica.

Si bien la Malla RC-A tiene el mismo ancho de localización que la Malla RC-B, la Malla RC-A posee un mallado regular en la zona donde se propaga el daño como se ve en la figura (4.24).

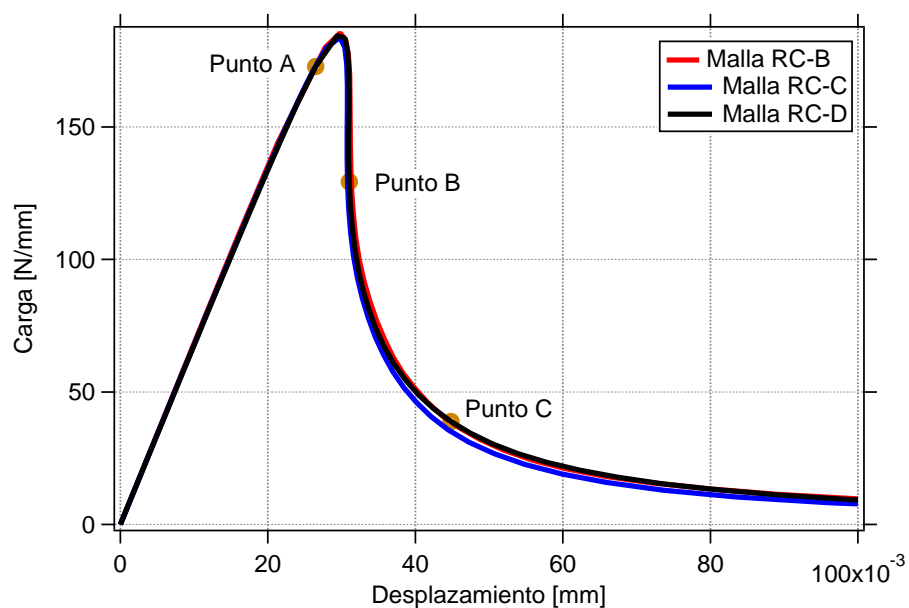


FIGURA 4.21: Carga vs desplazamiento para viga entallada con carga excéntrica. Comparación de ancho de localización D .

La figura (4.21) muestra las curvas carga-desplazamiento para distintos anchos de localización D . En correspondencia se obtiene los mapas de daño de la figura (4.23).

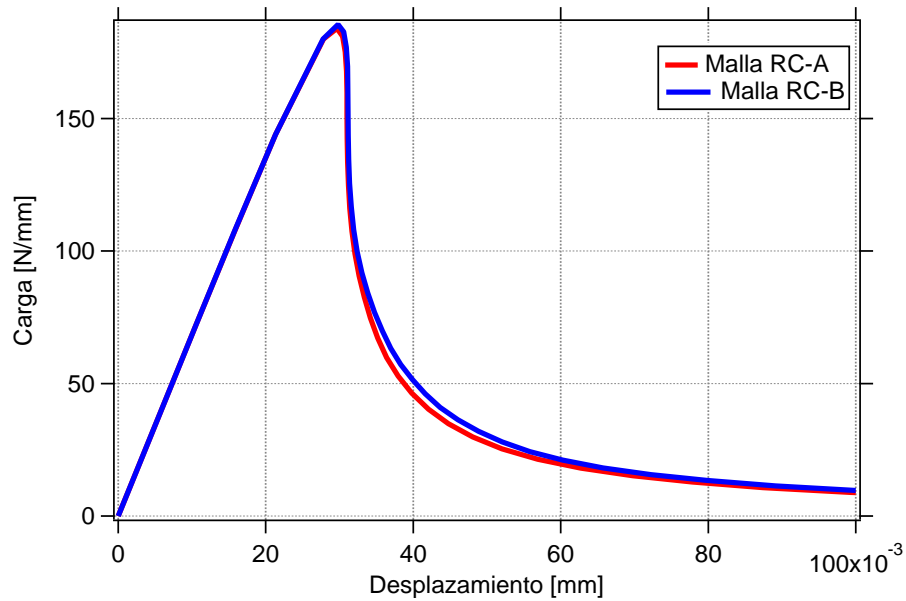


FIGURA 4.22: Carga vs desplazamiento para viga Rilem con carga excéntrica. Comparación de mallas regular (Malla RC-A) e irregular (Malla RC-B).

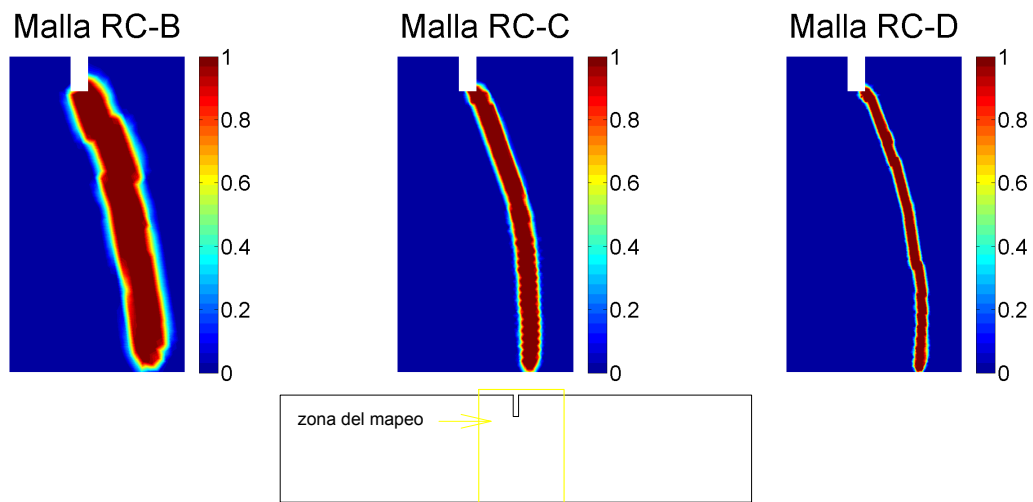


FIGURA 4.23: Mapa de daño para viga entallada con carga excéntrica. Comparación de semiancho de localización D.

La figura (4.22) muestra las curvas carga-desplazamiento para la malla regular (Malla RC-A) y para la malla irregular (Malla RC-B). En correspondencia se obtiene los mapas de daño de la figura (4.24). Las curvas carga-desplazamiento de las figuras (4.21) y (4.22) se realizaron con control de carga hasta al pico y luego se continuó con control de disipación. Las figuras (4.25) y (4.26) muestran los mapas de daño y tensión horizontal en los Puntos A, B y C indicados en la figura (4.21) correspondientes a la Malla RC-D.

Como primera observación en este ejemplo se verifica que el modelo es capaz de reproducir una trayectoria de fisura curva. En la figura (4.21) se nota que no existe una

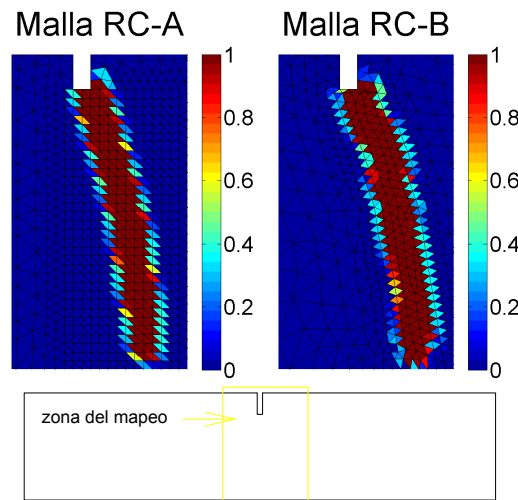


FIGURA 4.24: Mapa de daño para viga entallada con carga excéntrica. Comparación de mallas regular (Malla RC-A) e irregular (Malla RC-B)

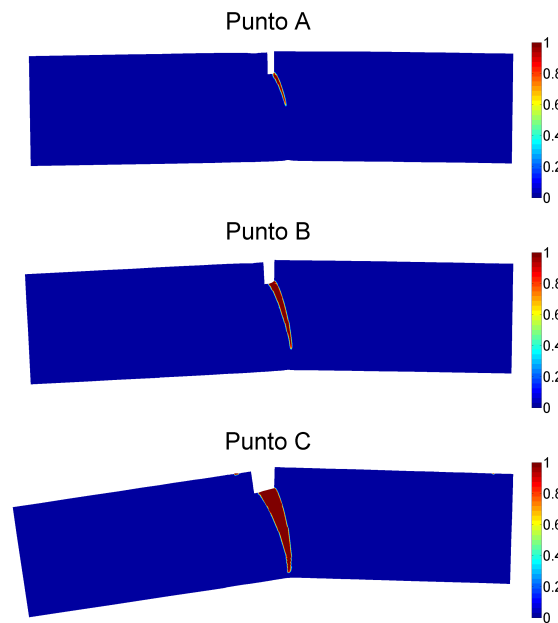


FIGURA 4.25: Mapa de daño para viga entallada con carga excéntrica (Malla RC-D). Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{02}$.

gran diferencia en la respuesta realizada con distintas mallas y semiancho de localización D . En cada caso se refinó la malla de tal forma que entre la misma cantidad de elementos en D , conforme este se va achicando (entran aproximadamente 2 elementos en D). El hecho de no encontrar grandes diferencias en al respuesta indica que el valor que se tome para D no es demasiado importante siempre y cuando se trabajen con medidas pequeñas comparadas con las dimensiones del ejemplo a resolver. En la figura (4.24) se nota cómo el modelo ubica en la misma zona el daño para el mismo ejemplo realizado con parámetros idénticos pero con distintas mallas.

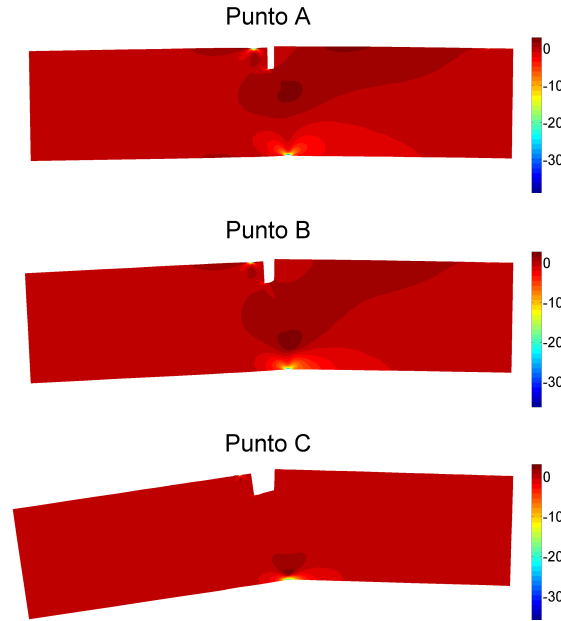


FIGURA 4.26: Tensión horizontal para la viga entallada con carga excéntrica (Malla RC-D). Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{02}$.

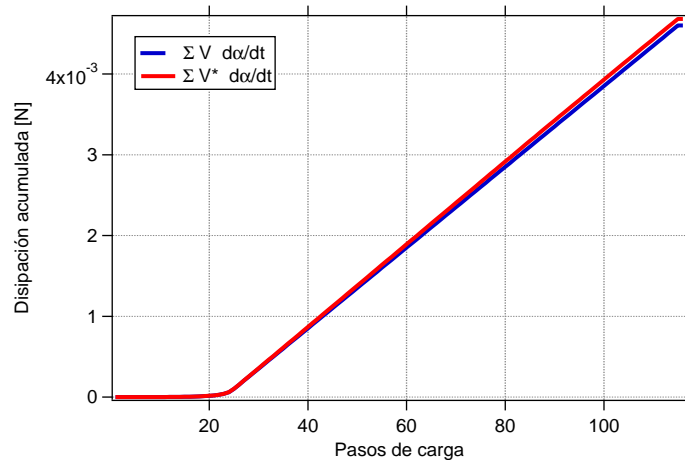


FIGURA 4.27: Energía disipada para la viga entallada con carga excéntrica.

En la figura (4.27) se grafica la energía disipada calculada como $\Sigma V \dot{\alpha}$ y como $\Sigma V^* \dot{\alpha}$ en función de la fuerza escalar asociada al daño V , correspondiente a un modelo estándar generalizado, y a V^* del modelo propuesto. Esta gráfica corresponde a la Malla RC-C. No se aprecian diferencias significativas entre ambas curvas. En esta figura se aprecian también las distintas etapas del ensayo. Hasta el paso de carga 25 se realizó con control de fuerza. Luego, un poco antes del pico se pasa a control de disipación, con un valor de $\tau = 5E - 5 N$. El valor de τ nombrado anteriormente corresponde a la pendiente de la recta que se aprecia en la figura (4.27).

CUADRO 4.6: Parámetros del ensayo de corte.

P. elásticos		
$E =$	210	[MPa]
$\mu =$	0,30	[-]
P. función de rigidez		
$D =$	$0,025E - 3$	[m]
$G_f =$	$1,00E - 05$	[MPa m]
$f_t =$	1,20	[MPa]
P. función de daño		
$\ell_1^1 =$	1	[-]
$\ell_1^2 =$	2	[-]
$\ell_1^3 =$	5	[-]
$\ell_1^4 =$	10	[-]
$\ell_1^5 =$	100	[-]
$\ell_1^6 =$	∞	[-]

4.5. Ensayo de corte puro: influencia de la relación entre resistencia a tracción y compresión ℓ_1

En este ejemplo se realiza un ensayo de corte sobre una probeta cúbica con una entalla y se analiza el cambio en la respuesta al variar el parámetro que controla la relación entre resistencia a tracción y compresión. En el cuadro (4.6) se exponen los parámetros usados en los ensayos.

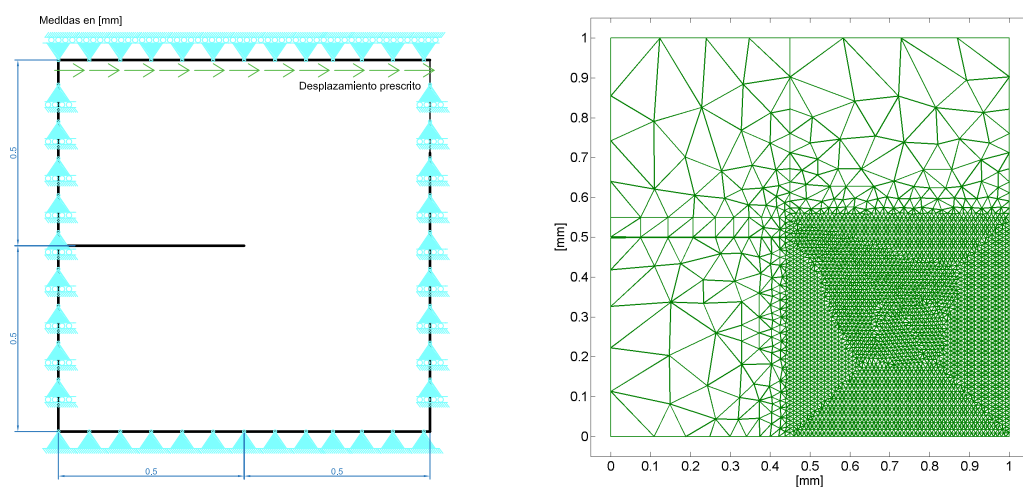


FIGURA 4.28: Geometría, condiciones de carga, apoyos y malla para el ensayo de corte.

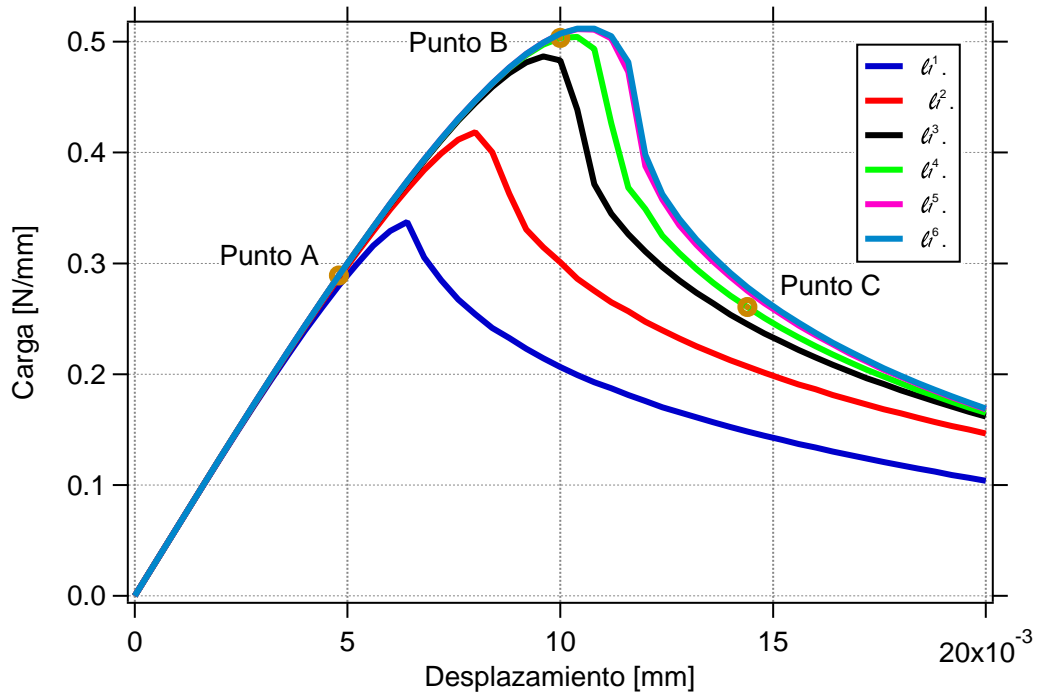


FIGURA 4.29: Carga vs desplazamiento para ensayo de corte. Comparacion del parámetro ℓ_1 .

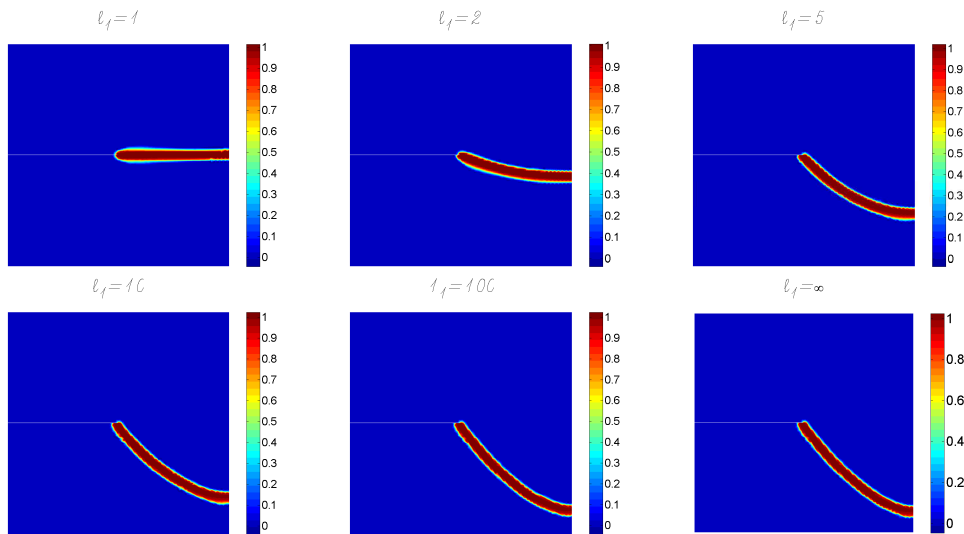


FIGURA 4.30: Mapa de daño para ensayo de corte.

En la figura (4.28) se presentan la probeta ensayada con la malla empleada en los ejemplos. En cuanto a las condiciones de apoyo, los dos bordes verticales tienen el desplazamiento en la dirección vertical impedido; el borde inferior tiene el desplazamiento horizontal y vertical impedido; por último, el borde superior tiene el desplazamiento vertical impedido mientras que el desplazamiento horizontal se prescribe. La malla utilizada tiene 7641 elementos y 38753 nodos. La figura (4.29) muestra las curvas carga-desplazamiento para distintos valores de ℓ_1 . En correspondencia se obtienen los mapas de

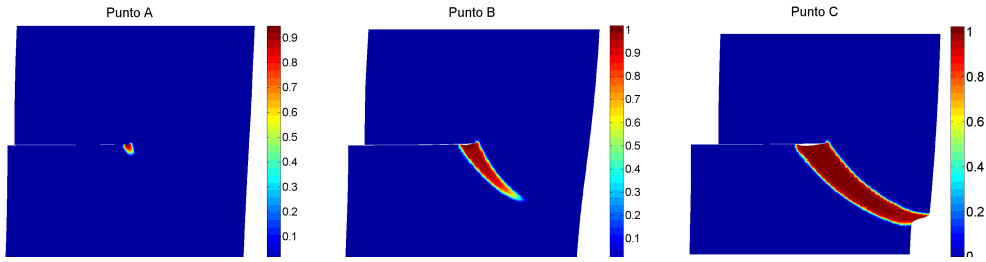


FIGURA 4.31: Mapa de daño para ensayo de corte, $\ell_1 = 10$. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{01}$.

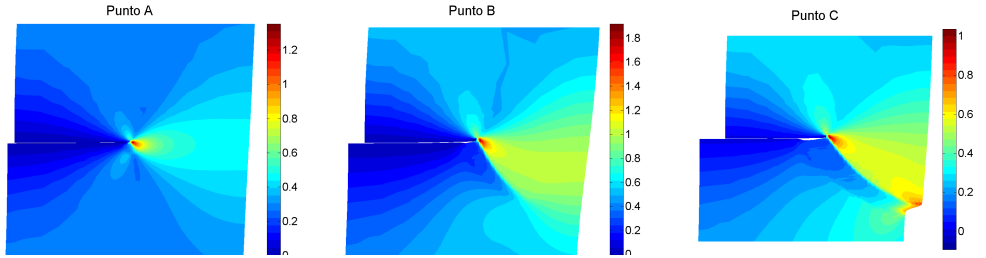


FIGURA 4.32: Mapa de tensión cortante para el ensayo de corte, $\ell_1 = 10$. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{01}$.

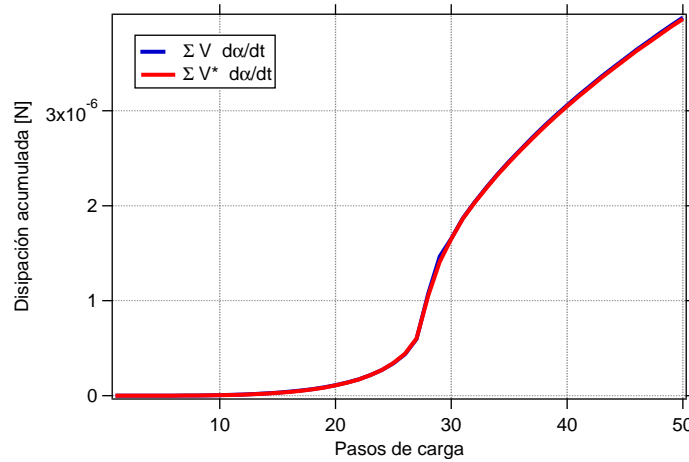


FIGURA 4.33: Energía disipada para el ensayo de corte.

daño de la figura (4.30), para el estado final de daño. Las curvas carga-desplazamiento de la figura (4.29) se realizaron con control de desplazamientos. Las figuras (4.31) y (4.32) muestran los mapas de daño y tensión cortante en los Puntos A, B y C indicados en la figura (4.29) correspondientes a $\ell_1 = 10$.

En la figura (4.30) se aprecia como en este ensayo

En la figura (4.30) se aprecia como en este ensayo el ángulo que toma la fisura varía según la relación entre resistencia a tracción y compresión ℓ_1 . El ángulo respecto a la

horizontal vale 0° para $\ell_1 = 1$ y vale aproximadamente 45° cuando ℓ_1 tiende a infinito. También se notan muy pocas variaciones en este ángulo a partir de $\ell_1 = 100$.

En la figura (4.33) se grafica la energía disipada calculada como $\Sigma V \dot{\alpha}$ y como $\Sigma V^* \dot{\alpha}$ en función de la fuerza escalar asociada al daño V , correspondiente a un modelo estándar generalizado, y a V^* del modelo propuesto. No se aprecian diferencias significativas entre ambas curvas. Esta figura corresponde al ensayo de $\ell_1 = 100$.

Capítulo 5

Modelo de RAS propuesto

5.1. Introducción

Una de las reacciones químicas más importantes que afecta al hormigón es la reacción álcali-sílice (RAS). La RAS en el hormigón es una reacción deletérea que se da en su interior al interactuar los iones alcalinos (Na^+ o K^+), presentes en la solución de poros de la pasta de cemento, con la sílice de estructura amorfa que se encuentra en los agregados. El producto de la RAS es un gel, que al entrar en contacto con agua expande. Al expandir en el interior de la porosidad del hormigón donde se aloja, causa presiones internas que pueden producir micro fisuración en el material e incluso, en casos extremos, fisuras apreciables a simple vista por donde puede también brotar el gel. Es evidente entonces que la RAS produce deterioro en la propiedades mecánicas del hormigón y, por consiguiente, esto afectará a las estructuras constituidas con este material. Por este motivo, al ser el hormigón uno de los materiales más utilizados en la construcción, es natural que el estudio de la RAS tenga una gran importancia en sus diversos aspectos. El primero en identificar el problema de la RAS fue [Stanton \[1941\]](#). Desde entonces, se realizaron muchas investigaciones sobre la RAS a nivel material y los efectos a nivel estructural, incluyendo estudios de la física y química de la reacción, respuesta de estructuras afectadas , ensayos acelerados y medidas para prevenir los efectos de la RAS.

Con respecto al gran número de estructuras existentes realizadas con agregados potencialmente peligrosos para producir RAS, el único modo de reducir el peligro es tomando medidas tales como la reparación o sellado de fisuras. Las medidas a tomar dependen en gran parte de la predicción del campo de tensiones y deformaciones en el hormigón reactivo. Es por esto, que se requieren los modelos constitutivos macroscópicos para una simulación realista de la expansión inducida por la RAS en la estructura. En los últimos años, se han desarrollado muchos de estos modelos que reprodujeron con éxito los campos de tensiones y deformaciones de las estructuras afectadas por RAS ([Léger et al., 1996] fue uno de los primeros). Todo modelo constitutivos macroscópico para reproducir el comportamiento del hormigón afectado por RAS posee dos elementos fundamentales. Por un lado, debe considerar el aspecto químico para el cual se introducen una serie de variables que tiene en cuenta el avance de la RAS en el tiempo (cinética de la reacción). Por otro lado, debe tener en cuenta la interacción de estas variables con el aspecto mecánico de la reacción de tal forma de producir deterioro en el material y por consiguiente afectar a la estructura que se desea analizar. Muchos modelos macroscópicos tiene en cuenta en sus leyes constitutivas el efectos de la RAS y luego son resueltos numéricamente con ayuda del método de los elementos finitos Se considera aquí la degradación del material por medio de modelos de plasticidad, de daño isótropo o anisótropo, entre otros (ver Pietruszczak [1996], Ulm et al. [2000], Huang & Pietruszczak [1999], Comi et al. [2009]). Algunos modelos constitutivos más sofisticados incluyen incluso los fenómenos de creep y retracción durante el proceso de RAS (ver Grimal et al. [2008a], Grimal et al. [2008b], Pesavento et al. [2012]). Para la cinética de la reacción se adopta la propuesta dada por Larive [1997], o su modificación posterior dada por Steffens et al. [2003], entre otros. Varios factores de los que depende la RAS se introdujeron en la cinética, como por ejemplo los efectos de la temperatura, la humedad, el estado de tensiones, entre otros.

En este capítulo se desarrolla la formulación de un modelo constitutivo macroscópico para representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS. El aspecto mecánico del modelo fue desarrollado en el Capítulo (3), por lo que a continuación sólo se indicará de qué forma se introduce el efecto químico en el comportamiento mecánico del material. Esta modificación se tiene en cuenta principalmente de dos maneras: por un lado, se utiliza una función de energía libre adecuada para representar el comportamiento de un material que se considera bifásico, constituido por la homogeneización de un esqueleto sólido (hormigón) y una fase gel. Por otro lado, se tiene en cuenta el efecto de

la RAS mediante una presión producida por el gel que responde a la Teoría de Biot. Esta presión modifica principalmente la función de daño que el modelo mecánico utiliza para calcular el progreso de la variable que mide la degradación del material. En el aspecto químico del modelo se explica de que modo se utiliza la teoría de Biot para representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS y cómo se incluye y calcula una variable que mide el progreso de la RAS. En el capítulo (6), se prueba el modelo mediante la reproducción de ensayos de los cuales se disponen resultados experimentales.

5.2. Comportamiento constitutivo del material hormigón afectado por RAS

En esta sección se explica cómo se emplea la teoría de Biot [Coussy, 2004] para representar el comportamiento del material hormigón afectado por RAS.

5.2.1. Empleo de la teoría de Biot en un modelo bifásico

En el modelo propuesto en esta tesis se utiliza la teoría de Biot ([Coussy, 2004]) para representar el comportamiento constitutivo del hormigón afectado por RAS siguiendo la línea de Ulm et al. [2000] y Comi et al. [2009]. Se considera que un punto del material hormigón afectado por RAS, en la meso escala es un elemento de volumen representativo (EVR) de volumen total Ω constituido por dos fases: esqueleto sólido (homogeneización de pasta de cemento, agregado y porosidad del hormigón) de volumen $d\Omega^s$ y una fase gel de volumen $d\Omega^g$ alojado en una porosidad (porosidad Lagrangeana) no contenida en la porosidad de la fase de esqueleto sólido, $d\phi^g = \frac{d\Omega^g}{d\Omega_0}$, referida al volumen total inicial Ω_0 (ver figura (5.1)). El gel comienza a expandirse dentro de la porosidad disponible ϕ^g hasta que la llena completamente. Una vez que llena dicha porosidad, un incremento del volumen del gel causa una presión p^g . En un proceso de expansión libre (el material solo está sometido a la expansión del gel) la presión del gel p^g es balanceada por las tensiones internas en el esqueleto sólido σ^s , de tal forma que la tensión total en el material σ es nula. En otras palabras la resultante de p^g que se llamará presión total de gel \mathbf{P}^g y la resultante de σ^s que se denominará tensión efectiva σ^{ef} , son ambas iguales y de sentido opuesto. En el caso de actuar cargas externas, la tensión total σ deja de ser nula.

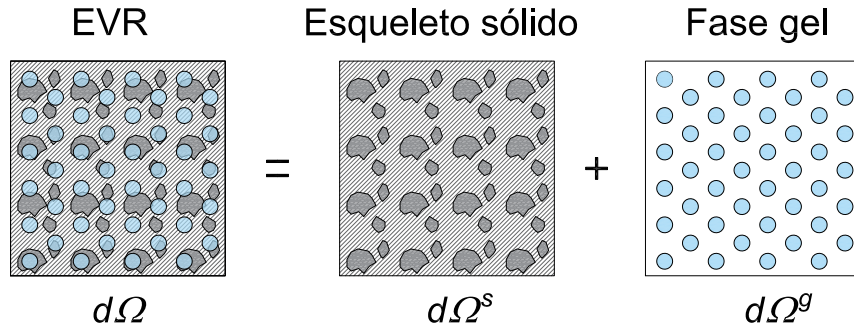


FIGURA 5.1: Fases del EVR.

En cualquiera de los dos casos anteriores, la relación entre las variables en la meso escala σ^s , p^g y ϕ^g y la variables en la macro escala σ , σ^{ef} , P^g y ε (ver la figura (5.2)) puede ser expresada mediante la teoría de Biot, asumiendo comportamiento elástico del esqueleto sólido, del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma^{ef} - P^g = C^0 : \varepsilon - B p^g, \\ p^g &= M[-B : \varepsilon + \phi^g - \phi_0^g].\end{aligned}\tag{5.1}$$

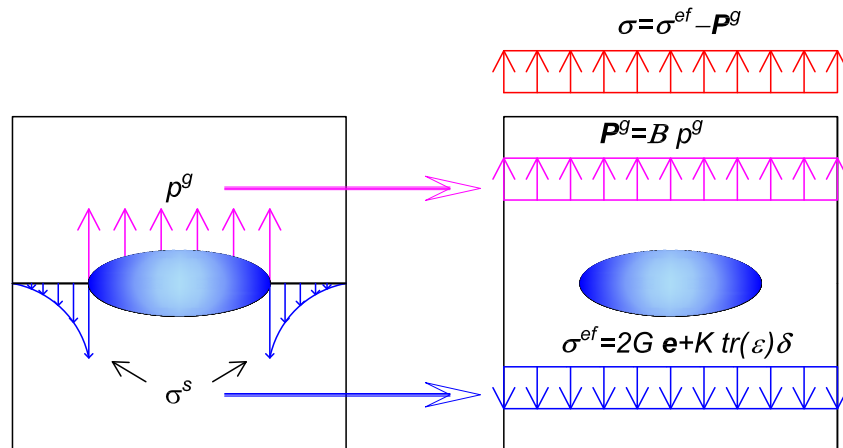


FIGURA 5.2: Tensiones en el EVR para el material bifásico.

En la ecuación (5.1) δ es el tensor identidad de segundo orden. C^0 es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden del material hormigón afectado por RAS. M y B son respectivamente el módulo y el tensor de Biot del material hormigón afectado por RAS. En la ecuación (5.1) se puede ver claramente el rol de estas dos últimas cantidades. El tensor de Biot B tiene dos funciones, por un lado, asocia la deformación total ε a

la diferencia de porosidad $[\phi^g - \phi_0^g]$, por otro lado, transforma la presión de gel en el interior del poro p^g (meso escala) en la presión total producida por el gel P^g (macro escala). El módulo de Biot M , por su parte, transforma la variación total de porosidad $[-\mathbf{B}:\boldsymbol{\varepsilon} + \phi - \phi_0]$ en la presión del gel p^g . Si se considera comportamiento isótropo tanto del esqueleto sólido como de la presión del gel producida en el espacio poroso, se tiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^{ef} - \mathbf{P}^g = 2G\mathbf{e} + Ktr(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta} - bp^g\boldsymbol{\delta}, \\ p^g &= M[-btr(\boldsymbol{\varepsilon}) + \phi^g - \phi_0^g],\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde \mathbf{e} y $tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ son el tensor desviador y la traza respectivamente de la deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$. G y K son los módulos de corte y volumétrico respectivamente del material hormigón afectado por RAS. b es el coeficiente de Biot del material hormigón afectado por RAS. La ecuación (5.2) también puede ser expresada de la siguiente manera, combinando las ecuaciones (5.2)a y (5.2)b,

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\mathbf{e} + Ktr(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta} - Mb^2 \left[-tr(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\phi^g - \phi_0^g}{b} \right] \boldsymbol{\delta}\tag{5.3}$$

donde $\frac{\phi^g - \phi_0^g}{b}$ es la deformación total sufrida por el gel de la RAS, menos la deformación volumétrica total del material $tr(\boldsymbol{\varepsilon})$, representa la deformación en exceso del gel que puede producir presión. Dicha deformación en exceso multiplicada por el coeficiente Mb^2 representa la presión P^g .

En el libro de Coussy [2004] pueden encontrarse las siguientes relaciones para el módulo y el coeficiente de Biot que involucran algunos parámetros de la meso escala:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad b &= 1 - \frac{K}{K^s}, \\ \text{(b)} \quad M &= \frac{K^s}{b - \phi_0^g},\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde K^s es el módulo volumétrico de la matriz sólida.

Se considera ahora el caso de expansión libre. En dicho proceso la tensión total $\boldsymbol{\sigma}$ es nula y la tensión interna que sufre la matriz sólida es balanceada por la presión interna que ejerce el gel. Reemplazando en la ecuación (5.2) $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, se tiene

$$Ktr(\boldsymbol{\varepsilon}) = P^g = bp^g.\tag{5.5}$$

Como la presión del gel P^g solo actúa en la parte volumétrica, según la ecuación (5.2), en la expansión libre solo se da una expansión volumétrica, por lo que \mathbf{e} es nulo y no interviene en la ecuación (5.5).

Al considerar el caso isótropo tenemos $tr(\varepsilon) = 3\varepsilon^g$, donde ε^g es la deformación en expansión libre sufrida por el material. Reemplazando esto en la ecuación (5.5) se tiene

$$\varepsilon^g = \frac{1}{3} \frac{bp^g}{K}. \quad (5.6)$$

El desarrollo que se muestra a continuación se expone en el trabajo de [Lemarchand et al. \[2005\]](#) y muestra cómo vincular la deformación en expansión libre ε^g con alguna variable que mida la cinética de la RAS. Con el fin de poder asociar la deformación ε^g con la producción de masa de gel de la RAS, se introduce la variable m^g que representa la masa de gel de la RAS producida en referencia al volumen inicial Ω_0 . El valor de m^g puede ser obtenido por el uso de modelos micro basándose en el proceso de difusión de los álcalis en el interior de los agregados ([Suwito et al. \[2002\]](#), [Multon et al. \[2009\]](#)) o puede ser evaluada experimentalmente [[Larive, 1997](#)]. El valor de m^g también puede ser vinculado a alguna variable que mida la cinética global del proceso de la RAS, como la utilizada en muchos modelos macro ([Ulm et al. \[2000\]](#), [Comi et al. \[2009\]](#), [Pesavento et al. \[2012\]](#)). Para el siguiente desarrollo, se añade la hipótesis de que el gel de la RAS se encuentra llenando totalmente la porosidad disponible para expandir. Bajo esta hipótesis se tiene:

$$m^g = \rho^g \phi^g, \quad (5.7)$$

donde ρ^g es la densidad del gel.

Si en la ecuación (5.2) (b) se reemplazan las ecuaciones (5.4) (b), (5.5), (5.7) y se tiene en cuenta que para expansión libre $tr(\varepsilon) = 3\varepsilon^g$, se obtiene:

$$p^g = K^s \left[\frac{b-1}{b-\phi_0^g(b-1)} \right] \left[\frac{m^g}{\rho^g} - \phi_0^g \right]. \quad (5.8)$$

Se ve entonces que la ecuación (5.8) permite evaluar la presión del gel p^g en función de la masa de gel m^g . Si se considera el caso de gel incompresible ($\rho^g = \rho_0^g$) y se introduce

la ecuación (5.8) en la ecuación (5.6) y se tiene en cuenta la ecuación (5.4) (a), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \varepsilon^g = T^g \mu^g, \\
 \text{(b)} \quad & T^g = \frac{1}{3} \frac{b}{b - \phi_0^g [1 - b]}, \\
 \text{(c)} \quad & \mu^g = \frac{m^g}{\rho_0^g} - \phi_0^g.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

En la ecuación (5.9) se ve como la deformación en expansión libre ε^g se vincula linealmente a la masa de gel adimensional μ^g por medio del coeficiente químico-elástico T^g . La vinculación lineal entre la deformación en expansión libre ε^g y alguna variable relacionada al progreso de la RAS, como la masa de gel adimensional μ^g , es típica en muchos modelos macro disponibles hoy en día (ver [Ulm et al. \[2000\]](#), [Bangert et al. \[2004\]](#), [Saouma & Perotti \[2006\]](#), [Grimal et al. \[2008a\]](#), [Comi et al. \[2009\]](#), [Pesavento et al. \[2012\]](#), [Pignatelli et al. \[2013\]](#), etc).

5.2.2. Introducción de la variable que mide el progreso de la RAS en un sistema unidimensional elástico

En el trabajo de [Ulm et al. \[2000\]](#) se asimila la representación del modelo bifásico de las figuras (5.1) y (5.2) a un esquema de resortes en paralelo en un sistema unidimensional como se muestra en la figura (5.3). De esta representación en paralelo, el sistema de la izquierda corresponde a un resorte de módulo E^s esquematizando a la matriz sólida sobre el que actúa la tensión resultante Σ^s y el sistema de la derecha representa al gel de la RAS expandido dentro de los poros. El gel de la RAS se representa como un resorte de módulo E^g en serie con una celda química que expande. La deformación total a la que está sometido el sistema es ε mientras que la deformación producida por la expansión del gel de la RAS es $k^g \xi$. Aquí se introduce la variable química $\xi \in [0, 1]$ que mide la cinética global de la RAS. Dicha variable vale 0 cuando la reacción no ha comenzado y vale 1 cuando la reacción se ha agotado completamente. La constante química k^g es la encargada de transformar el progreso de la RAS ξ en una deformación química. La presión total del gel a la que está sometido el sistema de la izquierda es P^g . En el caso de expansión libre se tiene que $\Sigma^s = P^g$, mientras que, en el caso de actuar alguna acción externa, se tiene que $\sigma = \Sigma^s - P^g$. Se puede escribir entonces:

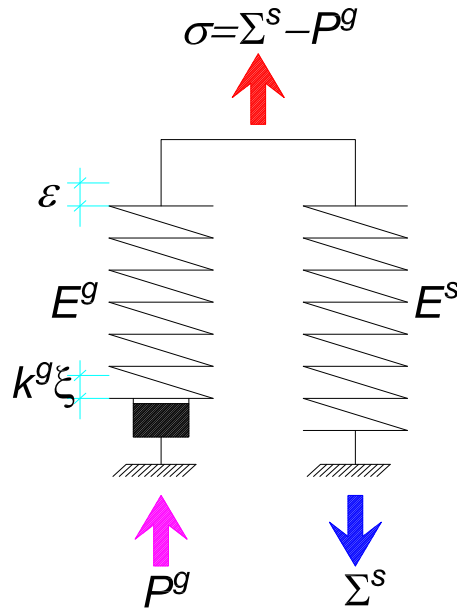


FIGURA 5.3: Representación unidimensional del hormigón afectado por RAS según Ulm et al. [2000].

$$\sigma = \Sigma^s - P^g = E^s \varepsilon - E^g [-\varepsilon + k^g \xi],$$

con: (5.10)

$$\Sigma^s = E^s \varepsilon; \quad P^g = E^g [-\varepsilon + k^g \xi].$$

Se ve que la ecuación (5.3) para caso tridimensional es análoga a la ecuación (5.10) para caso unidimensional. Se nota cómo la deformación total producida por la expansión del gel de la RAS expresada en la ecuación (5.2) como $\frac{\phi^g - \phi_0^g}{b}$ puede ahora ser calculada en términos de la cinética global de la RAS como $k^g \xi$.

Si se considera el caso de expansión libre ($\sigma = 0$) en la ecuación (5.10) y se llama ε^g a la deformación en expansión libre, se tiene

$$\varepsilon^g = \beta^g \xi; \quad \beta^g = \frac{k^g E^g}{E^g + E^s}. \quad (5.11)$$

Se ve que las ecuaciones (5.9) y (5.11) son similares. En la ecuación (5.11), β^g funciona ahora como coeficiente químico elástico y la masa adimensional de gel μ^g es reemplazada por el progreso de la reacción ξ .

Se plantea ahora la desigualdad de Clausius-Duhem para establecer la relación que existe entre las variables cinemáticas ε y ξ y las fuerzas termodinámicamente asociadas σ y A^g respectivamente, por medio de la función de energía libre ψ . Se define a A^g como la afinidad química, representando una medida del desbalance químico. La desigualdad de Clausius-Duhem queda:

$$-\dot{\psi} + \sigma\dot{\varepsilon} \geq 0. \quad (5.12)$$

En base al modelo de la figura (5.3), la forma que toma la energía libre es:

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ E^s \varepsilon^2 + E^g [-\varepsilon + k^g \xi]^2 \right\} + \psi_q(\xi), \quad (5.13)$$

donde el término entre llaves representa la energía libre correspondiente a los resortes (matriz sólida y gel), mientras que $\psi_q(\xi)$ es la energía libre correspondiente a la celda química.

Reemplazando la ecuación (5.13) en (5.12) se tiene:

$$\left\{ \sigma - [E^s \varepsilon - E^g [-\varepsilon + k^g \xi]] \right\} \dot{\varepsilon} + \left\{ k^g E^g [\varepsilon - k^g \xi] - \frac{\partial \psi_q}{\partial \xi} \right\} \dot{\xi} \geq 0. \quad (5.14)$$

De las ecuaciones (5.10) y (5.14) se tiene:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = E^s \varepsilon - E^g [-\varepsilon + k^g \xi]. \quad (5.15)$$

El segundo término de (5.14) representa a la afinidad química, dada por:

$$A^g = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -k^g P^g - \frac{\partial \psi_q}{\partial \xi}. \quad (5.16)$$

La disipación producida por la reacción química puede calcularse como:

$$A^g \dot{\xi} = - \left[k P^g + \frac{\partial \psi_q}{\partial \xi} \right] \dot{\xi} \geq 0. \quad (5.17)$$

El primer término de la ecuación (5.17) representa la disipación que se produce para que el gel tome la nueva forma luego de aplicada la acción. El segundo término representa la disipación de la celda química para producir la expansión. Según Ulm et al. [2000] el

primer término de la ecuación (5.17) es despreciable frente al segundo término, con lo que se tiene:

$$A^g \approx -\frac{\partial \psi_g}{\partial \xi}. \quad (5.18)$$

La ecuación (5.18) introduce una importante simplificación que permite el cálculo del progreso de la RAS independientemente del estado de tensiones y deformaciones del cual depende P^g .

5.2.3. Ley de evolución del progreso de la RAS ξ

Como ya se mencionó $\xi \in [0, 1]$ es una variable que mide el progreso de la RAS. Cuando se habla de progreso de la RAS, se hace referencia al avance global de la reacción, constituida por formación del gel más expansión. La evolución en el tiempo del progreso de la RAS ξ puede ser definida por una ley cinética de primer orden (ver sección (2.3.1.1)). Esta ley cinética es una ecuación que relaciona a la afinidad química A^g con la derivada en el tiempo del progreso de la RAS, es decir $\dot{\xi}$. El orden de la reacción (orden de la ecuación diferencial para calcular ξ) queda finalmente definido por la función A^g que se adopte [Atkins & De Paula, 2006]. se supondrá a la RAS como una reacción irreversible lo cual implica que $\dot{\xi} \geq 0$. Como ya se expresó, también la afinidad química es una medida del desbalance químico. Se puede decir entonces que la afinidad química toma un valor máximo en el comienzo de la reacción $A^g(\xi = 0) = A_0^g$, y toma un valor nulo cuando la reacción se agota $A^g(\xi = 1) = 0$. Dron & Brivot [1993] reprodujeron el mecanismo de difusión de la sílice en estudios experimentales usando distintos tipos de este mineral que fueron almacenados en solución de hidróxido de sodio. Sus resultados muestran que la disolución de la sílice puede ser interpretada como un mecanismo de reacción que sigue una ley cinética de lineal y una reacción de primer orden. Esto significa que la velocidad del proceso de disolución decrece linealmente de un valor inicial, cuando la reacción comienza, a cero, cuando la sílice es completamente disuelta. Lo anterior se condice con los resultados obtenidos por Larive [1997] en su campaña experimental. Teniendo en cuenta lo anterior, Coussy [2004] propone una ley cinética lineal,

$$A^g(\xi) = k^d \dot{\xi}, \quad (5.19)$$

donde $k^d > 0$. Para llegar a una ecuación que defina una reacción de primer orden, es suficiente también con escoger una relación lineal entre A^g y ξ ,

$$A^g(\xi) = A_0^g[1 - \xi]. \quad (5.20)$$

Reemplazando la ecuación (5.19) en (5.20), se llegamos a la ecuación que define ξ ,

$$1 - \xi = t^i \dot{\xi}, \quad (5.21)$$

donde $t^i = \frac{k^d}{A_0^g}$ es el tiempo intrínseco de la reacción que puede ser determinado experimentalmente. Este tiempo puede depender de distintos factores como temperatura, grado de saturación, estado tensional, tamaño de los agregados, etc, tal cual lo confirman algunos trabajos experimentales como Larive [1997], Haha et al. [2007], etc; y esto fue introducido en muchos de los modelos macro de los que se dispone hoy en día (ver Ulm et al. [2000], Comi et al. [2012], Pesavento et al. [2012], Grimal et al. [2008a], Saouma & Perotti [2006], etc.).

Se desarrolla, a continuación, el caso de condiciones ambientales constantes (humedad y temperatura) de tal forma que $t^i = cte$.

Se verá cómo se puede obtener t^i a partir de datos experimentales. Se considera el caso de expansión libre donde la deformación volumétrica del material es $tr(\varepsilon) = 3\varepsilon^g$, entonces mediante la ecuación (5.11) se tiene,

$$\xi(t) = \frac{tr(\varepsilon)}{\varepsilon^\infty}, \quad o \quad \varepsilon^g = \frac{\varepsilon^\infty}{3} \xi(t), \quad (5.22)$$

donde ε^∞ es la deformación volumétrica asintótica, es decir la deformación volumétrica al final de la reacción. Si se deriva respecto al tiempo la ecuación (5.22) y se combina con la ecuación (5.21) se obtiene,

$$\varepsilon^\infty - tr(\varepsilon) = t^i \dot{\varepsilon}^g, \quad (5.23)$$

donde $tr(\varepsilon)$ y $\dot{\varepsilon}^g$ pueden ser medidos, a lo largo del tiempo, en un ensayo de expansión libre para determinar ε^∞ y t^i .

Con ayuda de la ecuación (5.23), Larive [1997] observó la dependencia de t^i con la temperatura del ensayo \bar{T} y el progreso de la RAS ξ , proponiendo:

$$t^i = \tau_c(\bar{T})\lambda(\xi, \bar{T}),$$

$$\lambda(\xi, \bar{T}) = \frac{1 + \exp\left[-\frac{\tau_l(\bar{T})}{\tau_c(\bar{T})}\right]}{\xi + \exp\left[-\frac{\tau_l(\bar{T})}{\tau_c(\bar{T})}\right]}, \quad (5.24)$$

donde $\tau_l(\bar{T})$ y $\tau_c(\bar{T})$ son los tiempos característicos y de latencia de la reacción a la temperatura \bar{T} . Si se reemplaza la ecuación (5.24) en (5.21), y se resuelve teniendo en cuenta las condiciones ambientales constantes ($t^i = cte$) sumado a $\dot{\xi}(t = \infty) = 0$ se tiene:

$$\xi(t) = \frac{1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_c(\bar{T})}\right]}{1 + \exp\left[-\frac{t}{\tau_c(\bar{T})} + \frac{\tau_l(\bar{T})}{\tau_c(\bar{T})}\right]}. \quad (5.25)$$

Si se combinan las ecuaciones (5.23) y (5.25) se obtiene que un ensayo de expansión libre, en condiciones ambientales constantes y a una temperatura \bar{T} , puede ser ajustado por medio de una curva S como la que muestra la figura (5.4). Dicho ensayo permite calibrar los parámetros químicos del modelo $\tau_l(\bar{T})$, $\tau_c(\bar{T})$ y ϵ^∞ .

Para considerar el efecto de la variación de la temperatura a lo largo de la evolución del progreso de la RAS, Ulm et al. [2000] estudió el comportamiento de los tiempos τ_l y τ_c en función de la temperatura llegando a relacionarlos por medio de la ley de Arrhenius del siguiente modo:

$$(a) \quad \tau_l(T) = \tau_l(\bar{T}) \exp\left\{U_l \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{\bar{T}}\right]\right\},$$

$$(b) \quad \tau_c(T) = \tau_c(\bar{T}) \exp\left\{U_c \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{\bar{T}}\right]\right\}, \quad (5.26)$$

Las ecuaciones (5.26) indican que los tiempos τ_l y τ_c , en función de la temperatura T , responden a un ajuste exponencial. Dicho ajuste se realiza tomando como base los datos a una temperatura \bar{T} y luego determinando las constantes U_l y U_c , para cada caso, las cuales son denominadas energías de activación. Las ecuaciones (5.26) también dan al progreso de la RAS el comportamiento observado experimentalmente por Larive [1997]. Es decir, la temperatura modifica el comienzo y desarrollo de las RAS manejado por

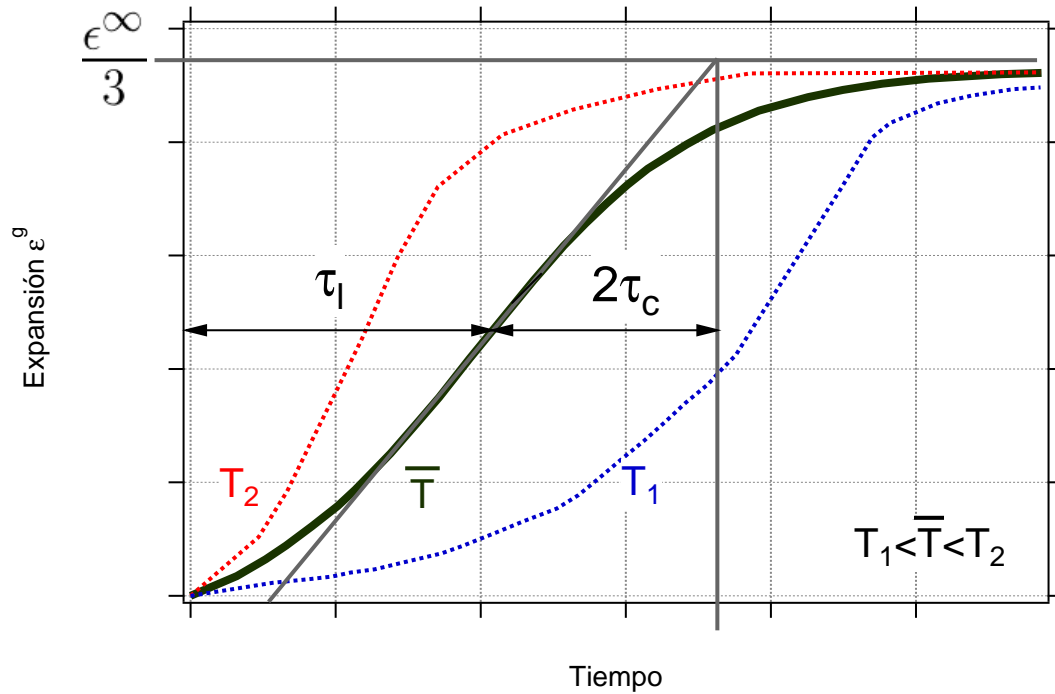


FIGURA 5.4: forma de la curva de expansión libre. Tiempo de la latencia τ_l , tiempo característico τ_c y expansión asintótica volumétrica ϵ^∞ para la curva de temperatura \bar{T} y curvas para las temperaturas T_1 y T_2 .

los tiempos τ_c y τ_l . Como se ve en la figura (5.4), las curvas para las temperaturas T_1 y T_2 se obtiene a partir de la curva a la temperatura \bar{T} . Para $T_1 < T_2$ la RAS tarda más en comenzar y se desarrolla mas lentamente. Al incluir esta modificación ya no se puede calcular el progreso de la RAS mediante la ecuación (5.25), dada para condiciones ambientales constantes, sino que se debe hacerlo resolviendo la ecuación (5.21), reemplazando previamente en ella las ecuaciones (5.24) y (5.26). En caso de considerar a la temperatura como una variable en el problema se debe resolver en el dominio del sólido analizado la ecuación del calor y se requerirá adicionalmente parámetros térmicos del material como: el coeficiente de conductividad térmica k^T y la capacidad calórica c^T . Más detalles referentes a la resolución de la ecuación para el progreso de la RAS en condiciones ambientales no constantes y la resolución de la ecuación del calor pueden encontrarse en la sección (5.3.4).

Según los trabajos de Ulm et al. [2000] y Steffens et al. [2003] las estructuras que requieren un análisis de la RAS pueden ser masivas, como presas de gravedad, o esbeltas, como secciones de puentes o muros de contención. En estructuras masivas la resolución de la ecuación del calor con condiciones de borde variables en el tiempo hacen que el

campo de temperaturas varíe desde el contorno hacia el interior de la estructura llevándola a una situación muy distinta al campo que se tomo inicialmente. Esto hace que es este tipo de estructuras sea imprescindible realizar un análisis térmico para una correcta determinación de la evolución de la RAS. Si se analiza el transporte de humedad con condiciones de borde variable en el tiempo en una estructuras masivas se observa que el campo de grado de saturación varía en un pequeño espesor próximo al borde de la estructura y el interior de la miasma conserva las condiciones iniciales prácticamente inalteradas. Según [Comi et al. \[2009\]](#), ante esta citación, en estructuras masivas es razonable asumir un contenido de humedad constante, lo cual, independiza el análisis de la RAS del contenido de humedad de la estructura analizada. En estructuras esbeltas ocurre lo contrario. El espesor del cuerpo analizado es tal que al aplicar las condiciones de contorno en humedad hacen variar el campo hacia el interior de estas estructuras. Esta situación hace que no pueda obviarse el análisis de transporte de humedad para la correcta determinación de la RAS.

En esta tesis se limita en adelante al análisis de estructuras masivas donde podemos obviar el análisis de transporte de humedad en el interior del cuerpo analizado. Más aclaraciones respecto a lo expuesto en el párrafo anterior pueden encontrarse en la sección [\(6.3.1\)](#).

5.3. Formulación del modelo de daño no local para hormigón afectado por RAS

En esta sección se extiende la formulación del modelo de daño no local del capítulo [\(3\)](#) para poder representar el comportamiento del hormigón afectado por RAS. Para esto, se adopta una función de energía libre local adecuada y se realiza una modificación sobre el criterio de daño para poder representar adecuadamente el comportamiento del hormigón afectado por RAS. finalmente se muestra un resumen de todos los parámetros del modelo y un esquema de resolución.

5.3.1. Función de energía libre utilizada

En base al trabajo de Comi et al. [2009] la función de energía libre de la ecuación (5.13) se extiende al caso tridimensional, adoptando la siguiente forma

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha, \xi, T) = R(\alpha) [\psi_{pm}(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi) + \psi_T(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi, T)] + \psi_q(\xi), \quad (5.27)$$

donde $\psi_{pm}(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi)$ es la energía libre del medio poroso, $\psi_T(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi, T)$ es la energía libre térmica y $\psi_q(\xi)$ es la energía libre química. La forma de estas energías libres se proponen también en base al trabajo de Comi et al. [2009].

Observando las ecuaciones (5.3), (5.10), y (5.15) se propone la energía libre del medio poroso $\psi_{pm}(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi)$ del siguiente modo:

$$\psi_{pm}(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi) = \frac{1}{2} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^2 + Mb^2 \left[\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{\epsilon^\infty}{B^g b} \xi \right]^2 \right\}, \quad (5.28)$$

donde $B^g = \frac{Mb}{K+Mb^2}$. La energía libre del medio poroso ψ_{pm} es la energía correspondiente a los resortes de la figura (5.3), suponiendo para el esqueleto sólido igual comportamiento en la parte volumétrica y de corte, y para la fase gel sólo comportamiento volumétrico.

Si en el problema se considera que las condiciones ambientales no son constantes, teniendo en cuenta la variación de la temperatura en el tiempo, entonces se debe añadir la siguiente función de energía libre térmica:

$$\psi_T(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi, T) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{R(\alpha)} \left[-\frac{c^T}{T^0} + M\alpha^g \right] [T - T^0]^2 - 2K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \alpha^s [T - T^0] - 2Mb \left[\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{\epsilon^\infty}{B^g b} \xi \right] \alpha^g [T - T^0] \right\}, \quad (5.29)$$

donde T^0 es la temperatura inicial, α^g y α^s son los coeficientes de dilatación térmicos del gel y del material respectivamente.

Observando las ecuaciones (5.18) y (5.20) se propone la energía libre de la parte química $\psi_q(\xi)$ del siguiente modo:

$$\psi_q(\xi) = \frac{1}{2} A_0^g (1 - \xi)^2. \quad (5.30)$$

La energía libre química ψ_q es la correspondiente a la celda química de la figura (5.3).

Con el fin de tener en cuenta el daño producido por las acciones mecánicas y químicas, se introduce la función de rigidez $R(\alpha)$ afectando a la función de energía libre. Durante el desarrollo del modelo mecánico se indica en el sección (3.5.2) como la variable de daño se introduce por medio de la función de rigidez $R(\alpha)$, para tener en cuenta el daño producido por la acción mecánica. En la sección (5.3.4) se verá como se introduce el efecto químico en la variable α .

Para no perder de vista el lugar donde interviene la función de energía libre local de la ecuación (5.27), se transcriben las ecuaciones (3.1) y (3.2) que corresponden a las funciones globales de energía libre y disipación respectivamente, agregando las variables ξ y T . Estas funciones sirven de base para definir la formulación desarrollada en el capítulo (3).

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha, \xi, T) = \Psi_1(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha, \xi, T) + \Psi_2(\beta), \quad (5.31)$$

$$\Psi_1(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha, \xi, T) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha, \xi, T) d\Omega, \quad \Psi_2(\beta) = \int_{\Omega} \frac{c}{2} \nabla \beta \cdot \nabla \beta d\Omega,$$

$$\Phi(\dot{\beta}) = \int_{\Omega} \phi(\dot{\beta}) d\Omega, \quad (5.32)$$

Como se observa, en esta sección se propone una forma particular la función de energía libre local que interviene en el primer término de la función de energía libre global dada por la ecuación (5.31). Por otro lado en la ecuación (5.32) se observa que la función global de disipación solo depende de la variable de daño, indicando que esta función de disipación corresponde a la parte mecánica del modelo. La otra variable que tiene asociada disipación es el progreso de la RAS ξ , pero al hacer su cálculo separado de la parte mecánica, no se tiene en cuenta su influencia en la ecuación (5.32).

Con la función de energía libre local ψ se pueden plantear las relaciones constitutivas locales del modelo propuesto:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = R \{ 2G\mathbf{e} + K [\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \alpha^s [T - T^0]] \boldsymbol{\delta} \} - bp^g \boldsymbol{\delta}, \\
\text{(b)} \quad p^g &= -R M \left\{ b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \left[\frac{\epsilon^\infty \xi}{B} + \alpha^g [T - T^0] \right] \right\}, \\
\text{(c)} \quad V &= -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -R' [\psi_{pm} + \psi_T], \\
\text{(d)} \quad A^g &= -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{\epsilon^\infty}{B} p^g + A_0^g (1 - \xi) \approx A_0^g (1 - \xi), \\
\text{(e)} \quad S &= -\frac{\partial \psi}{\partial [T - T^0]} = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi) + \left[\frac{c^T}{T^0} - M\alpha^{g2} \right] [T - T^0] \approx \left[\frac{c^T}{T^0} - M\alpha^{g2} \right] [T - T^0].
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Se ve que la ecuación (5.33)(b) es análoga a la ecuación (5.2)(b) donde la diferencia de porosidades $[\phi^g - \phi_0^g]$ fue remplazada en términos del progreso de la RAS por $\frac{\epsilon^\infty \xi}{B}$. Esto es una gran ventaja pues como ya se desarrolló en la sección (5.2.3), ξ puede ser calculado con ayuda de ensayos de expansión libre para condiciones ambientales constantes. En la ecuación (5.33)(d) se aplica la hipótesis de [Ulm et al. \[2000\]](#), en virtud de la cual se puede despreciar el término que involucra a p^g frente al que involucra A_0^g . Esta hipótesis es de gran importancia pues permite desacoplar el cálculo del progreso de la RAS ξ y luego introducirlo como dato de entrada. La ecuación (5.33) representa la relación que hay entre $[T - T^0]$ y su variable termodinamicamente conjugada, la entropía S . En dicha ecuación se desprecia a la función $f(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi)$, la cual representa a todos los términos de ψ que poseen un factor $[T - T^0]$, y que no se anulan al derivar. El despreciar esos términos implica desacoplar el problema térmico del problema mecánico y químico. En esta tesis se usa la ecuación del calor, para encontrar el campo de temperaturas, considerando que dicho campo no se ve afectado por el estado mecánico del material ni por la evolución de la RAS. Por lo tanto, el campo de temperatura puede ser calculado a priori, dependiendo únicamente de las condiciones de frontera. También se considera, que el rango de temperaturas para el que se desarrollan los ejemplos de esta tesis es limitado, de tal manera de que las propiedades mecánicas del material no se vean afectadas. Las consideraciones que se toman respecto a la ecuación del calor son ampliamente utilizadas en muchos modelos para hormigón afectado por RAS disponibles actualmente (ver [Ulm et al. \[2000\]](#), [Saouma & Perotti \[2006\]](#), [Grimal et al. \[2008a\]](#), [Comi et al. \[2009\]](#), [Comi et al. \[2012\]](#), [Pignatelli et al. \[2013\]](#)).

5.3.2. Evaluación de la función de daño

Para poder tener en cuenta el efecto químico en la variable de daño, se sustituyen las ecuaciones (3.38) (3.41) que expresan el cálculo de la fuerza escalar asociada al daño por las siguientes expresiones:

$$V^* = -R' \varpi^*(\varepsilon), \quad (5.34)$$

$$\varpi^*(\varepsilon) = \frac{1}{2E} \left[\mathcal{C}(\sigma_0^{ief}) \right]^2, \quad (5.35)$$

donde \mathcal{C} es algún criterio de daño en función de la tensión inelástica efectiva no dañada σ_0^{ief} .

La tensión inelástica efectiva es la tensión en la cual se basa el criterio de daño para poder contemplar en la variable de daño tanto el efecto mecánico como el químico. Al igual que en el trabajo de Comi et al. [2009] se define a dicha tensión como:

$$\sigma^{ief} = R\sigma_0^{ief} = \sigma + \varsigma p^g \delta = \sigma^{ef} + (\varsigma - b)p^g \delta \quad (5.36)$$

donde ς es el coeficiente de daño químico. Como se observa en la ecuación (5.36) ς controla el nivel de daño en un proceso de expansión libre, es decir cuando σ es nula. También se observa que ς indica que parte de la presión p^g es capaz de producir daño, debiendo ser siempre $\varsigma \leq b$.

5.3.3. Resumen de parámetros del modelo

Se resume a continuación el conjunto de parámetros que requiere el modelo:

- Parámetros de la función de rigidez f_t , G_f , D , p y q .
- Parámetros del criterio de daño ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 .
- Parámetros que definen el comportamiento poro elástico del material por medio de la función de energía libre local : K , G , b , M .
- Parámetros térmicos : k^T , c^T , α^s y α^g .
- Parámetros químicos: τ_l , τ_c , ϵ^∞ y ς .

5.3.4. Esquema de resolución del modelo propuesto

Para poder resolver las ecuaciones del modelo de daño no local para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS se ataca el problema de manera desacoplada, abordando por un lado el problema térmico, luego el químico y por último el mecánico. En primer lugar, se encuentra el campo de temperaturas. Luego, con el campo de temperaturas se obtiene el campo de progreso de la RAS. Una vez que se conocen los campos de temperatura y progreso de la RAS, se utilizan como datos de entrada para la resolución de problema mecánico. Al adoptar este modo de resolución desacoplado, en la función de energía libre local, las variables T y ξ pasan a ser parámetros $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha, \xi, T) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha; \xi, T)$, esto permite que cuando se resuelva el problema mecánico el esquema de la sección (3.9) pueda ser usado sin mayores modificaciones. A continuación, se indica el modo de resolver el problema total subdividido en problema térmico, químico y mecánico.

1. Problema térmico

El problema térmico se basa en la resolución de la ecuación del calor sobre el dominio Ω . A la ecuación del calor deben añadirse las condiciones de borde sobre $\Gamma = \Gamma^d \cup \Gamma^n$ que cumple $\Gamma^d \cap \Gamma^n = \emptyset$, siendo Γ^d el borde de Dirichlet donde se prescriben temperaturas T_0 y Γ^n el borde de Neumann donde se prescribe el flujo de calor \mathbf{F}^T . Lo anterior puede expresarse como:

$$k^T \operatorname{div}(\nabla T) = c^T \dot{T} \quad \text{en } \Omega, \quad T = T_0 \text{ sobre } \Gamma^d, \quad k^T \nabla T = \mathbf{F}^T \text{ sobre } \Gamma^n, \quad (5.37)$$

donde k^T es el coeficiente de conductividad térmica y c^T es la capacidad calórica. El abordaje de la ecuación (5.37) es bastante simple. Para el caso de régimen permanente ($c^T = 0$) el problema es lineal. Para el caso de régimen transitorio la derivada temporal de la temperatura \dot{T} es reemplazada para un paso temporal Δt de N a $N + 1$ mediante el método Euler implícito por $\frac{T^{N+1} - T^N}{\Delta t}$. Luego de hacer este reemplazo, cada paso temporal se transforma en un problema lineal. Para la resolución de la ecuación (5.37) se utiliza el método de los elementos finitos y en esta tesis, por cuestiones de simplicidad, se utilizan elementos triangulares de 3 nodos y 3 puntos de Gauss. La malla que se utiliza para el problema térmico es coincidente con la malla que se utiliza para el problema mecánico. Si bien para

el problema térmico es suficiente tomar solo un punto de Gauss, se elige trabajar con 3 para que estos estén en coincidencia con los puntos de Gauss del problema mecánico, donde si es necesario tomar 3 puntos de Gauss por utilizar elementos triangulares de 6 nodos para el campo de desplazamientos.

2. Problema químico

Una vez obtenido el campo de temperaturas, se debe determinar el progreso de la RAS ξ . En el caso de trabajar con temperatura uniforme en todo el dominio, el problema puede ser resuelto simplemente aplicando la ecuación (5.24) para la que se necesita conocer el tiempo de latencia τ_l y el tiempo característico τ_c a la temperatura del ensayo. En caso de tener temperatura variable, el problema se aborda mediante la resolución de la ecuación (5.21) combinándola con las ecuaciones (5.24) y (5.26) con lo que se tiene:

$$1 - \xi - \tau_c(T) \frac{1 + \exp\left[-\frac{\tau_l(T)}{\tau_c(T)}\right]}{\xi + \exp\left[-\frac{\tau_l(T)}{\tau_c(T)}\right]} \dot{\xi} = 0, \quad (5.38)$$

$$\text{con } \tau_i(T) = \tau_i(\bar{T}) \exp\left\{U_i \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{\bar{T}}\right]\right\}, \quad i = l \text{ o } c,$$

Para resolver la ecuación (5.38) se requieren los tiempos característico τ_c y de latencia τ_l a una temperatura de referencia \bar{T} y las energías de activación característica U_c y de latencia U_l . El progreso de la RAS ξ debe ser determinado para cada punto de Gauss que se toma en el dominio analizado (en conciencia con el problema térmico y mecánico). En un intervalo de tiempo Δt para pasar de un tiempo N a otro $N + 1$, la derivada temporal del progreso de la RAS $\dot{\xi}$ es reemplazada mediante el método de Euler implícito por $\frac{\xi^{N+1} - \xi^N}{\Delta t}$. Al hacer este reemplazo, la ecuación que se obtiene es no lineal por lo que requiere ser linealizada y resuelta por ejemplo, mediante el método de Newton-Raphson.

3. Problema mecánico

El problema mecánico se refiere al paso de carga en correspondencia con el paso temporal del problema térmico y químico para pasar de N a $N + 1$. El problema mecánico puede ser resuelto mediante el esquema de la sección (3.9) con las modificaciones indicadas a continuación:

1. Datos de entrada

Se agrega como dato de entrada la temperatura T y el progreso de la RAS ξ en cada punto de Gauss, como así también los parámetros poromecánicos b y M ; los parámetros térmicos α^s y α^g ; y los parámetros químicos ϵ^∞ y ς .

4. Evaluación de tensión sin dañar e invariantes

En este punto ya no se determina la tensión sin dañar sino que se determina la tensión inelástica efectiva sin dañar de la cual depende ahora el criterio de daño. Esto se hace con ayuda de la ecuación (5.36). Luego, sobre la tensión a la que se hizo anteriormente, se hace el cálculo de los invariantes que se requieren para el criterio de daño.

7. Evaluación de función de rigidez y tensión

Por último, en este apartado se determina la tensión mediante la ecuación (5.33)(a).

Capítulo 6

Ejemplos realizados con el modelo de RAS

En este Capítulo se desarrollan distintos ejemplos tendientes a probar el modelo macroscópico para hormigón afectado por RAS presentado en el capítulo (5). Los ejemplos presentados en las secciones (6.1) y (6.2) tiene por objetivo validar el modelo. En la sección (6.1) se realiza la reproducción numérica de la campaña experimental realizada en el trabajo de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#), quien obtuvo las curvas de expansión en probetas cilíndricas de hormigones reactivos sometidos a distintas condiciones de confinamiento. En la sección (6.2) se reproducen numéricamente los ensayos realizados en el trabajo de [Giaccio et al. \[2008\]](#), los cuales consisten en ensayos de flexión en vigas entalladas constituidas por hormigón afectado por RAS. Finalmente, en la sección (6.3) se prueba el modelo evaluando una presa de gravedad de hormigón.

6.1. Simulación del ensayo de expansión en probetas cilíndricas sometidas a distintos modos de confinamiento

6.1.1. Presentación del problema

En esta sección se valida el modelo propuesto mediante la reproducción de los ensayos realizados por [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#). En dicho trabajo se realizaron ensayos

sobre probetas cilíndricas de hormigón (diámetro= 130mm; altura= 240mm) mantenidas a temperatura uniforme ($\bar{T} = 38^{\circ}C$) y contenido de humedad uniforme durante todo el ensayo. A estas probetas se las sometió a 4 estados de carga distintos (ver figura (6.1)): expansión libre, carga axial de compresión (para $P = -10MPa$ y $P = -20MPa$), confinamiento pasivo con anillos de acero (para $e = 3mm$ y $e = 5mm$), carga axial de compresión y confinamiento pasivo.

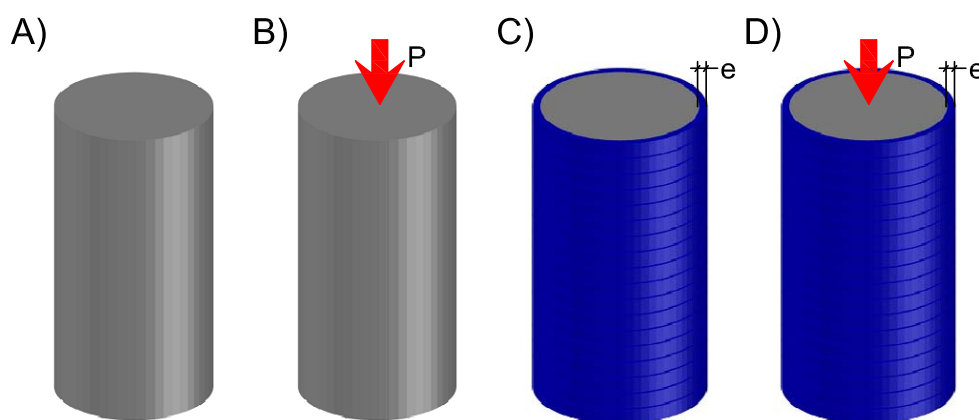


FIGURA 6.1: Ensayo de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#): a) expansión libre; b) carga axial de compresión, $P = -10MPa$ y $P = -20MPa$; c) confinamiento pasivo con anillos de acero, $e = 3mm$ y $e = 5mm$; d) carga axial de compresión y confinamiento pasivo.

Los estados de carga se mantuvieron durante todo el tiempo que duró el ensayo. La carga axial se aplicó a los 28 días luego del llenado. Para evitar al máximo el roce entre las probetas de hormigón y los anillos de acero se colocaron anillos de 10 mm hasta envolver totalmente al hormigón. Estos anillos se mantuvieron en estado plano de deformaciones durante el ensayo. Las curvas presentadas por [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#) no tuvieron en cuenta el efecto instantáneo de deformación producido por la carga axial, es decir, se tomó como referencia para la medición la probeta ya deformada por la carga axial. Debido a que se realizaron ensayos tanto en probetas reactivas como no reactivas, las curvas de evolución de la deformación (axial o radial) en el tiempo presentadas por [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#) solo consideran el efecto de la RAS, descontando con ayuda de las probetas no reactivas, el efecto de creep y retracción.

6.1.2. Modo de resolución

Como se ve en la descripción del ensayo, los campos de deformaciones y tensiones se mantienen uniformes para estos ejemplo, esto lleva que la evolución del daño también

sea uniforme en la probeta, por lo que el gradiente del daño es nulo. Teniendo en cuenta lo anterior, el Laplaciano del daño $\nabla^2\beta$ de la ecuación (3.15) resulta nulo, por lo que se tiene:

$$f = V^* - k \leq 0. \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) permite calcular la evolución del daño de un modo sencillo, sin necesidad de introducir en la formulación los multiplicadores de Lagrange λ y la variable auxiliar de daño α , como se indica en la sección (3.4). El modo de resolución adoptado detalla a continuación.

Las ecuaciones tensión-deformación en este caso se obtiene al iguales las tensiones y deformaciones radiales en la interfase entre la probeta de hormigón y la camisa de acero. La ecuaciones tensión-deformación que se consideran son las que surgen de la mecánica de los sólidos para el caso de un cilindro macizo con carga radial uniforme en sus laterales y un cilindro hueco de pared gruesa con presión uniforme en su interior. Para el caso del hormigón se utiliza la ley constitutiva definida por la ecuación (5.33), mientras que para la camisa de acero se considera una ley constitutiva dada por la ley de Hooke para material lineal elástico de comportamiento isótropo. El sistema de coordenadas utilizado para resolver este problema puede observarse en la figura (6.2). Las ecuaciones obtenidas son:

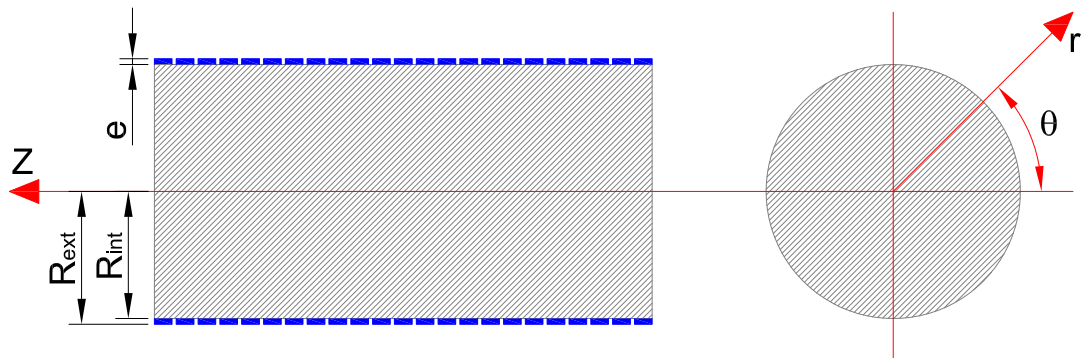


FIGURA 6.2: Coordenadas utilizadas en la resolución del problema para el ensayo de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#).

$$\begin{aligned} \sigma_z = P, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{c_2\sigma_z + R\varepsilon^g}{c_0 - c_1}, \\ \varepsilon_z = \frac{c_1\sigma_r + c_2\sigma_z}{R} + \varepsilon^g, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{c_3\sigma_r + c_4\sigma_z}{R} + \varepsilon^g, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^g &= \frac{1}{3}\varepsilon^\infty\xi, \quad K^{pm} = K + Mb^2, \\
 c_1 &= \frac{4G + 3K^{pm}}{18GK^{pm}}, \quad c_2 = \frac{2G - 3K^{pm}}{18GK^{pm}}, \\
 c_3 &= \frac{2G - 3K^{pm}}{9GK^{pm}}, \quad c_4 = \frac{G + 3K^{pm}}{9GK^{pm}}, \\
 c_0 &= \frac{(1 + \mu^{met})(1 - 2\mu^{met})R_{int}^2 + (1 + \mu^{met})R_{ext}^2}{E^{met}(R_{ext}^2 - R_{int}^2)},
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde E^{met} y μ^{met} son el modulo de Young y el coeficiente de Poisson de la camisa de acero.

A continuación en el algoritmo (1) se detalla el proceso de resolución para poder ajustar los ensayos realizados por [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#), donde se considera h particiones de tamaño Δt del intervalo de tiempo $[0, t]$ del problema.

Algorithm 1 : Esquema de resolución.

1. Inicio $N = 0$, con carga externa P y espesor de anillos $e = R_{ext} - R_{int}$.
 2. Si $N = 0$ entonces $\beta^N = 0$, si no $\beta^N = \beta^{N-1}$.
 3. Si $N \leq h$, el tiempo $t^N = N\Delta t$, si no finaliza el problema.
 4. Cálculo de ξ^N de ecuación (5.25).
 5. Cálculo de $[\sigma_r^N \ \sigma_z^N \ \sigma_\theta^N]^T$ y $[\varepsilon_r^N \ \varepsilon_z^N \ \varepsilon_\theta^N]^T$ de ecuación (6.2).
 6. Cálculo de p^g de ecuación(5.33), con $tr(\varepsilon) = \varepsilon_r^N + \varepsilon_z^N + \varepsilon_\theta^N$.
 7. $[\sigma_r^{iefN} \ \sigma_z^{iefN} \ \sigma_\theta^{iefN}]^T = [\sigma_r^N \ \sigma_z^N \ \sigma_\theta^N]^T + \varsigma p^g [1 \ 1 \ 1]^T$ de ecuación (5.36).
 8. Con $\frac{1}{R}[\sigma_r^{iefN} \ \sigma_z^{iefN} \ \sigma_\theta^{iefN}]^T$ calcular \mathcal{V}^{*N} de ecuación (5.34).
 9. Si se verifica $f^N = \mathcal{V}^{*N} - k \leq 0$ de ecuación (6.1) entonces $N = N + 1$ y voy a 2), si no, ir a 10).
 10. Determinación de β^N de la ecuación no lineal $f(\beta) = \mathcal{V}^*(\beta) - k = 0$.
 11. Actualización de $[\sigma_r^N \ \sigma_z^N \ \sigma_\theta^N]^T$ y $[\varepsilon_r^N \ \varepsilon_z^N \ \varepsilon_\theta^N]^T$ de ecuación (6.2), luego $N = N + 1$ e ir a 2).
-

CUADRO 6.1: Parámetros del modelo para los ensayos de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#).

P. poroelásticos		
$K =$	22202	[MPa]
$G =$	15287	[MPa]
$M =$	6000	[MPa]
$b =$	0,25	[-]
P. de daño		
$D =$	$3E - 3$	[m]
$G_f =$	$200E - 6$	[MPa m]
$f_t =$	4	[MPa]
$p =$	2	[-]
$q =$	0	[-]
$\ell_1 =$	0,1	[-]
$\ell_2 =$	10	[-]
P. químicos		
$\tau_l =$	130	[días]
$\tau_c =$	66	[días]
$\epsilon^\infty =$	0,003023	[-]
$\zeta =$	0,0873	[-]

6.1.3. Resultados obtenidos

Se pasa ahora a realizar el ajuste de los ensayos con el modelo propuesto. Para obtener los parámetros poroelásticos y de daño, se requieren ensayos de compresión, flexión, biaxiales, etc. Parte de estos parámetros fueron brindados por [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#) y parte fueron supuestos en base a valores típicos recomendados en [Comi et al. \[2009\]](#) y [Lubliner et al. \[1989\]](#). Dichos parámetros se muestran en el cuadro (6.1).

El verdadero objetivo de esta sección es la obtención de los parámetros químicos.

Se comienza por la obtención de τ_l , τ_c y ϵ^∞ . Para esto se impone la condición de expansión libre, que es $\sigma = 0$, que en la ecuación (6.2) equivale a $P = 0$ y $e = 0$, con lo que se tiene:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_z = \varepsilon^g = \frac{1}{3}\epsilon^\infty\xi, \quad (6.4)$$

Luego, la dependencia final de ε^g con τ_l , τ_c y ϵ^∞ puede verse reemplazando en la ecuación (6.4) la ecuación para el progreso de la RAS dado por (5.25).

El ajuste realizado para expansión libre se ve en la figura (6.3). Los parámetros que permiten obtener el ajuste de las curvas de expansión libre son τ_l , τ_c y ϵ^∞ , cuyo valor se muestran en el cuadro (6.1).

Luego, se ajusta el parámetro químico ζ . Se recuerda que dicho parámetro, como se indica en la sección (5.3.2), regula la influencia del daño mientras se produce la expansión de la RAS. Es por este motivo que para su calibración se requieren ensayos que aparte de estar afectados por RAS, estén sometidas a algún proceso de carga externa. La reproducción de estos ensayos puede verse de la figura (6.4) a la (6.8). El valor de ζ para ajustar los ensayos antes mencionados se presenta en el cuadro (6.1).

Para poder observar la evolución del daño en el tiempo para los ensayos anteriores se presenta en las figuras (6.9), (6.10) y (6.11) el valor de $(1 - R)$ vs el tiempo.

Para hacer referencia a todos los ensayos descritos anteriormente, se utiliza la notación $e\ mm - P\ MPa - A$ con $(e = 0, 3, 5)(P = 0, 10, 20)(A = z, r)$, representando espesor de la camisa de acero, carga axial de compresión y eje al que se refiere la curva respectivamente. Las curvas experimentales se indican con línea de trazo mientras que las numéricas con línea llena.

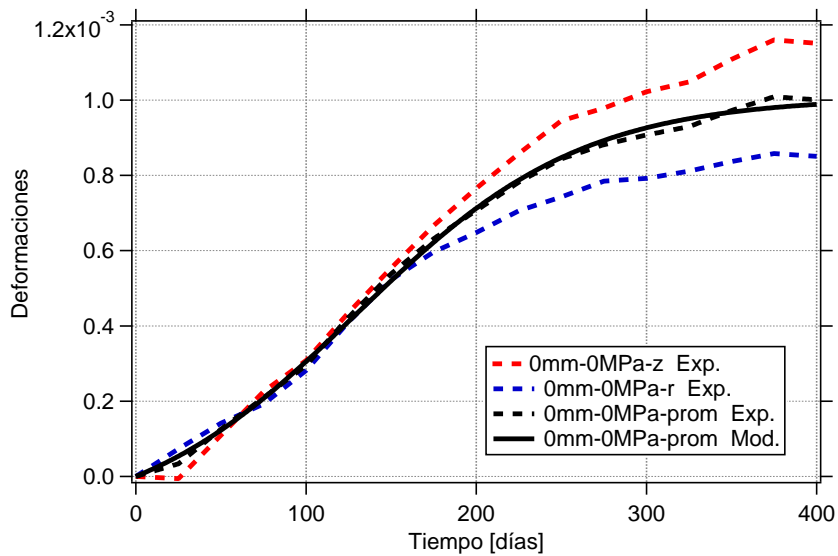


FIGURA 6.3: Ajuste para expansión libre.

Con el valor de los parámetros que se ajustaron para el trabajo de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#), presentados en el cuadro (6.1), se reprodujeron las siguientes situaciones:

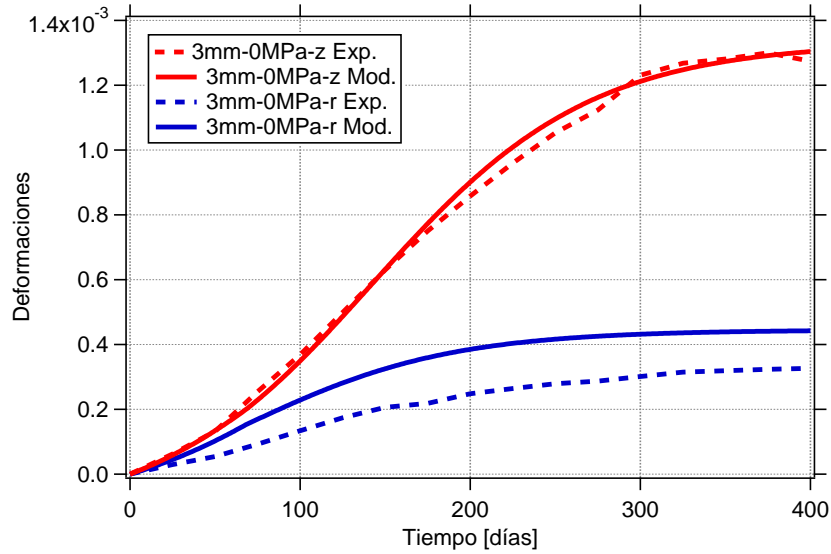


FIGURA 6.4: Ajuste para confinamiento pasivo, $e = 3mm$.

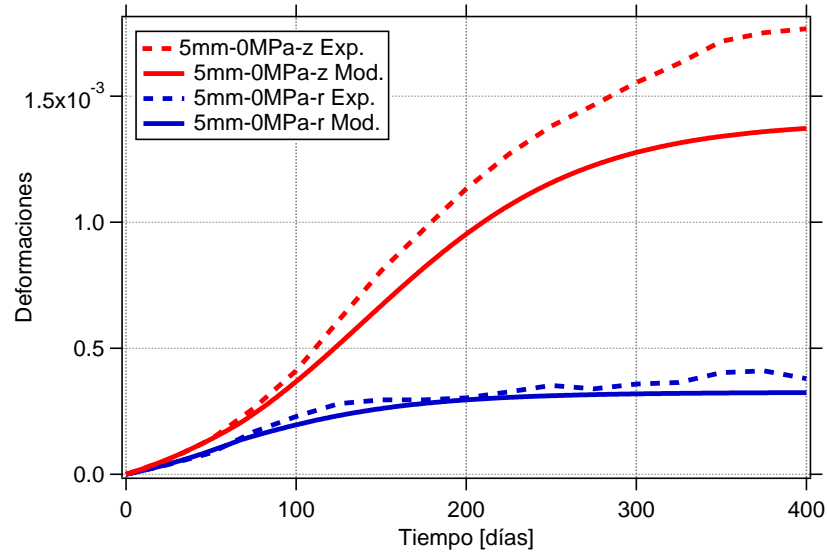


FIGURA 6.5: Ajuste para confinamiento pasivo, $e = 5mm$.

- En las figuras (6.12), (6.13) y (6.14) se ven los gráficos de la deformación axial, radial y el daño respectivamente cuando se tiene sólo carga axial variando entre $0MPa$ y $20MPa$.
- En las figuras (6.15), (6.16) y (6.17) se ven los gráficos de la deformación axial, radial y el daño, respectivamente, cuando se tiene solo confinamiento pasivo variando entre $0mm$ y ∞mm .
- En las figuras (6.18), (6.19) y (6.20) se ven los gráficos de la deformación axial, radial y el daño respectivamente cuando se hace tiene confinamiento pasivo fijo en $3mm$ y carga axial variando entre $0MPa$ y $20MPa$.

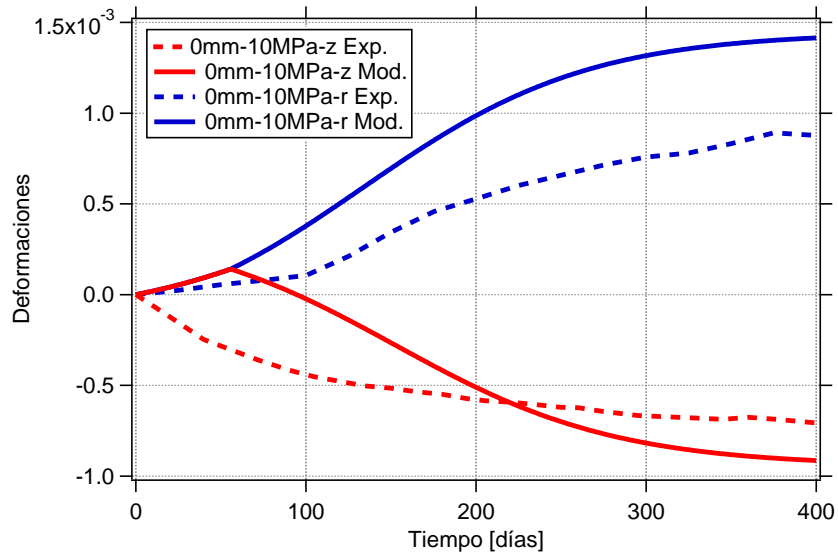


FIGURA 6.6: Ajuste para carga axial, $P = -10\text{MPa}$.

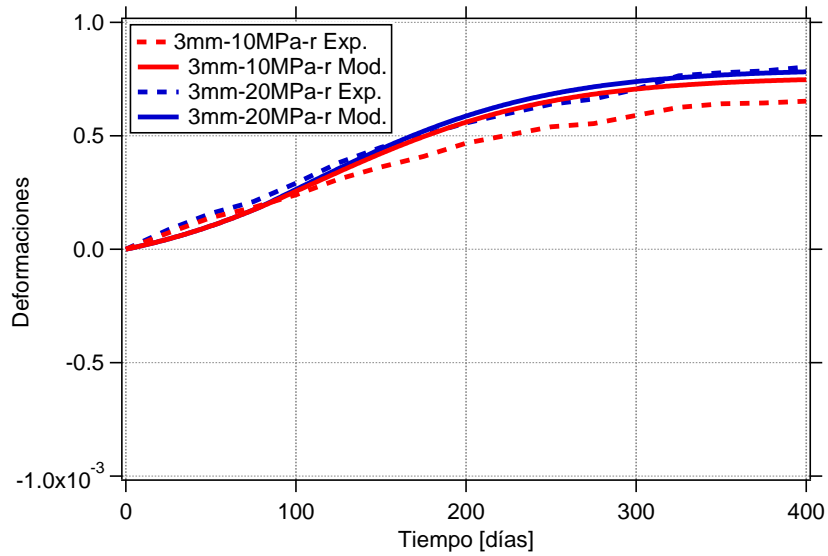


FIGURA 6.7: Ajuste para confinamiento mixto, $e = 3\text{mm}$.

- En las figuras (6.21), (6.22) y (6.23) se ven los gráficos de la deformación axial, radial y el daño cuando se hace tiene carga axial fija en $7,5\text{MPa}$ y confinamiento pasivo variando entre 0mm y ∞mm .

En todos los gráficos indicados en este párrafo, se muestra con una flecha el sentido de la evolución de la cantidad analizada en el tiempo (deformación o $(1 - R)$) y también se indica, ya sea con el valor de P o e , las curvas límites que arrojó el modelo. En general, el comportamiento en todos los casos es predecible de manera intuitiva, salvo el que se presenta en los casos donde se combina confinamiento pasivo y activo. En este caso, se observa en las figuras (6.19) y (6.22), que corresponden a la evolución de $(1 - R)$ en el

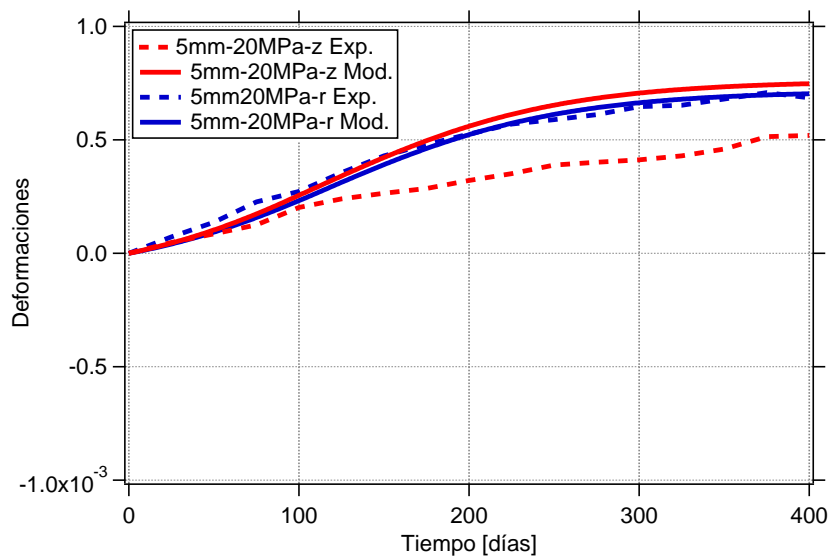


FIGURA 6.8: Ajuste para carga mixto, $e = 5mm$.

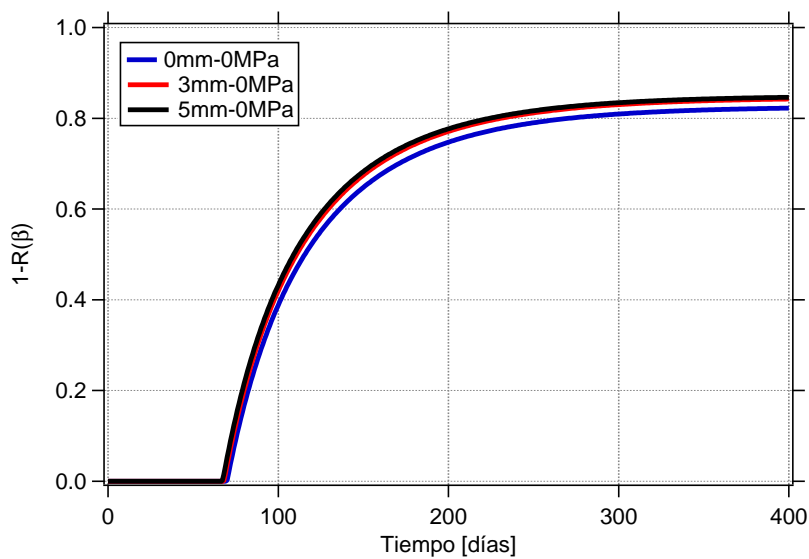


FIGURA 6.9: Evolución de daño. Confinamiento pasivo.

tiempo, cómo el efecto de la reacción retarda la aparición del daño, hasta que se llega a cierto punto donde el confinamiento deja de ser efectivo y el daño comienza a aumentar progresivamente.

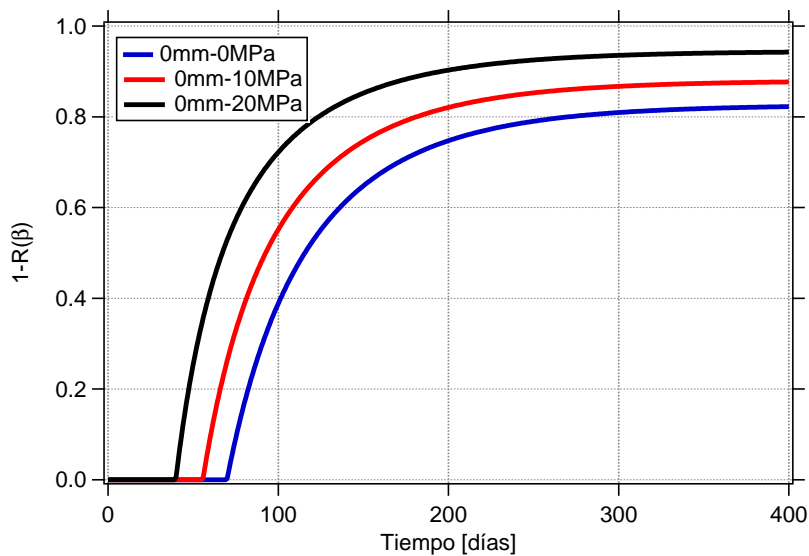


FIGURA 6.10: Evolución de daño. Carga axial.

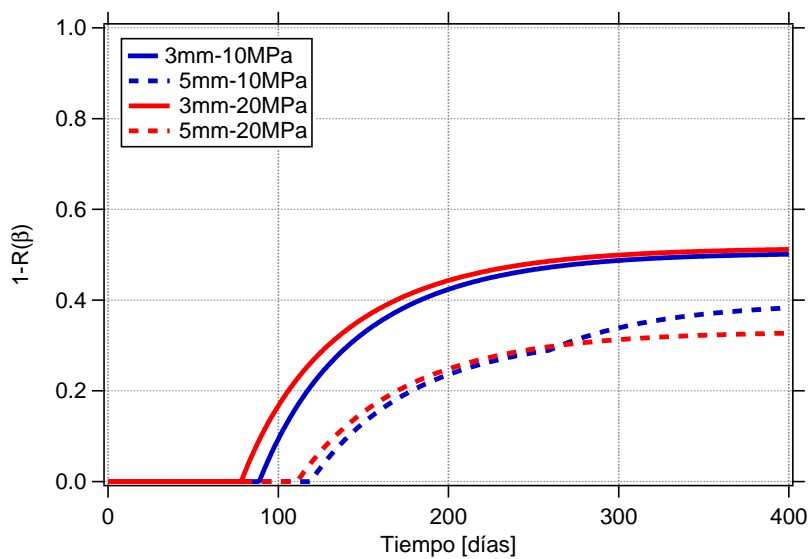


FIGURA 6.11: Evolución de daño. Confinamiento pasivo y Carga axial.

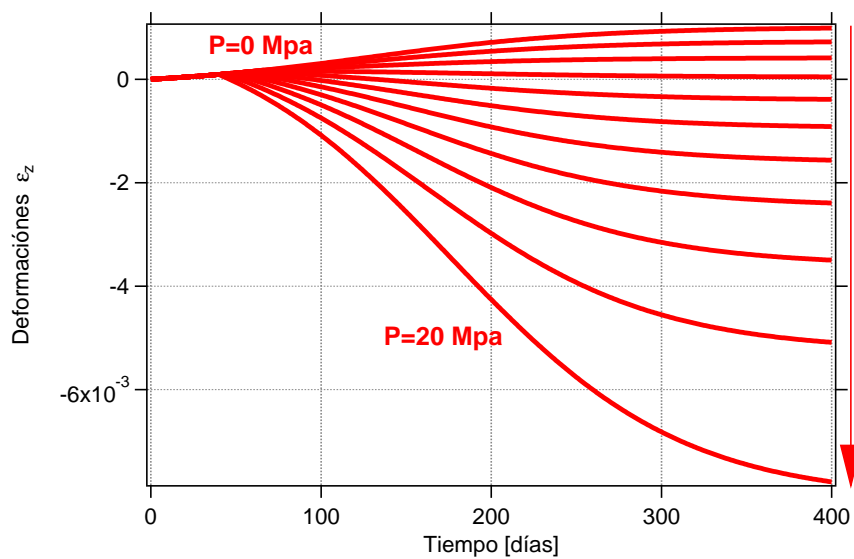


FIGURA 6.12: Evolución de ε_z vs tiempo. Carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$.

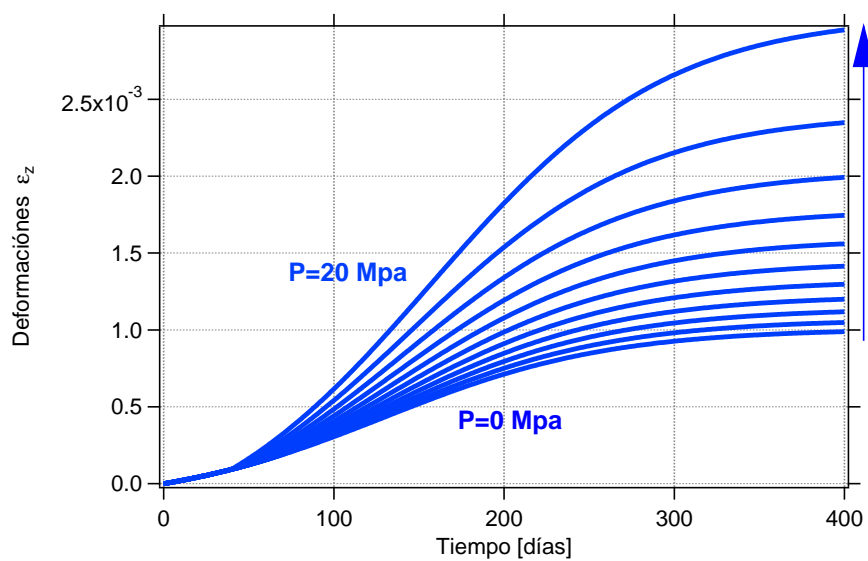


FIGURA 6.13: Evolución de ε_r vs tiempo. Carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$.

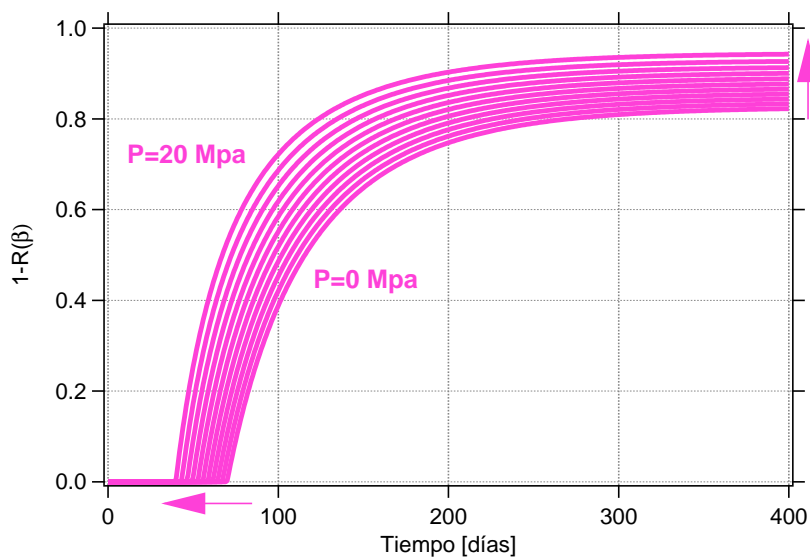


FIGURA 6.14: Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$.

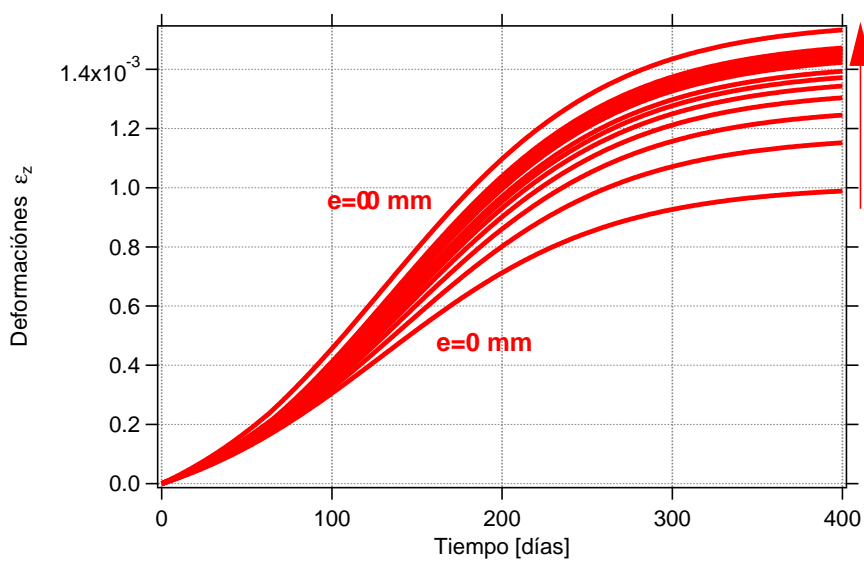


FIGURA 6.15: Evolución de ε_z vs tiempo. Confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$.

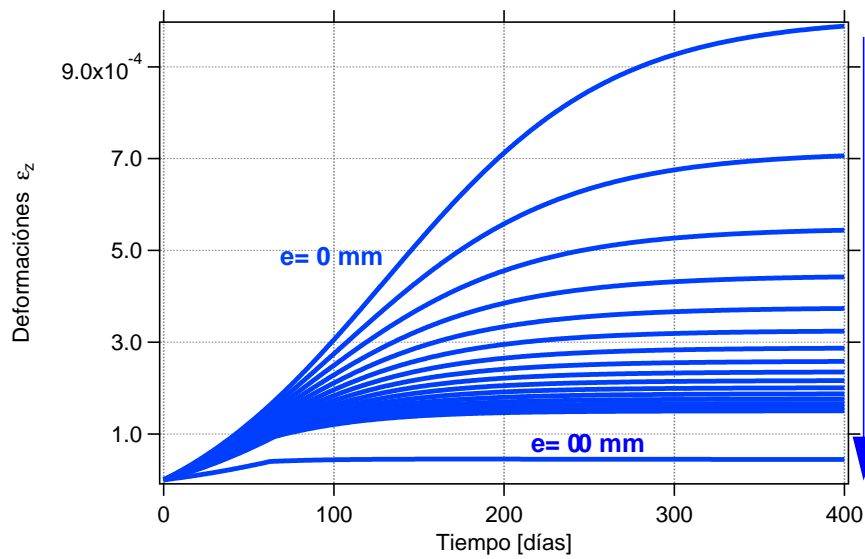


FIGURA 6.16: Evolución de ϵ_r vs tiempo. Confinamiento pasivo variable de $e = 0 \text{ mm}$, a $e = \infty$.

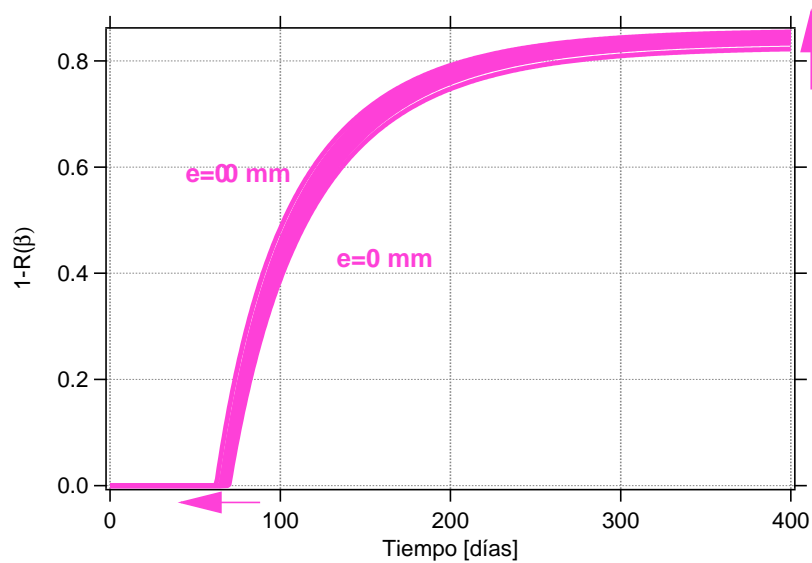


FIGURA 6.17: Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Confinamiento pasivo variable de $e = 0 \text{ mm}$, a $e = \infty$.

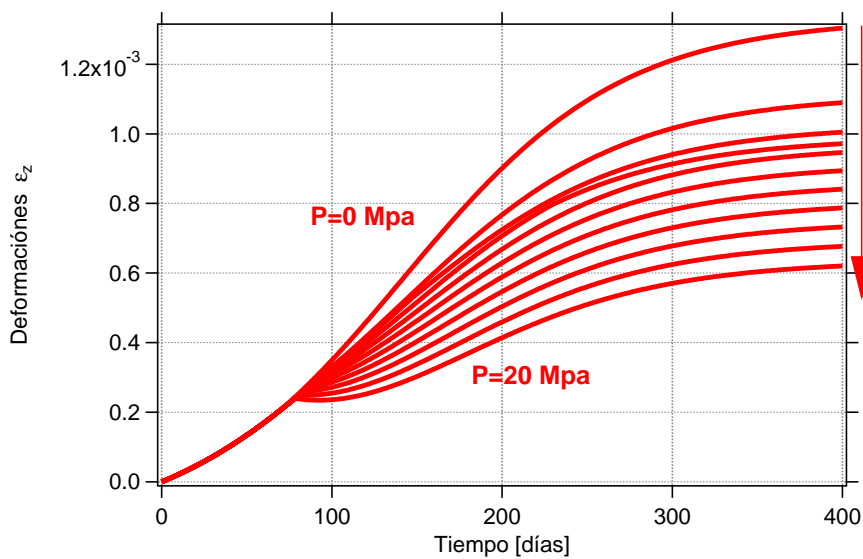


FIGURA 6.18: Evolución de ε_z vs tiempo. Confinamiento pasivo fijo en $e = 3mm$ y carga axial variable de $P = 0MPa$, a $P = 20MPa$.

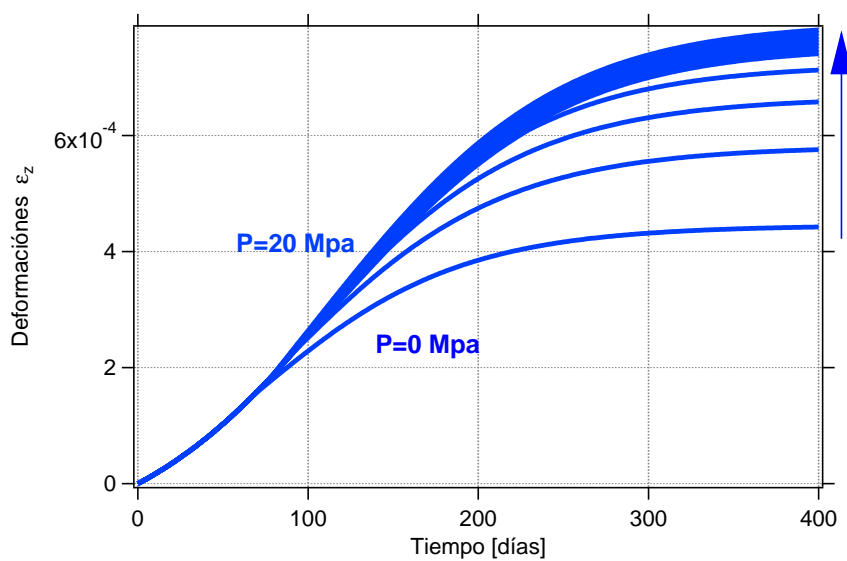


FIGURA 6.19: Evolución de ε_r vs tiempo. Confinamiento pasivo fijo en $e = 3mm$ y carga axial variable de $P = 0$, a $P = 20MPa$.

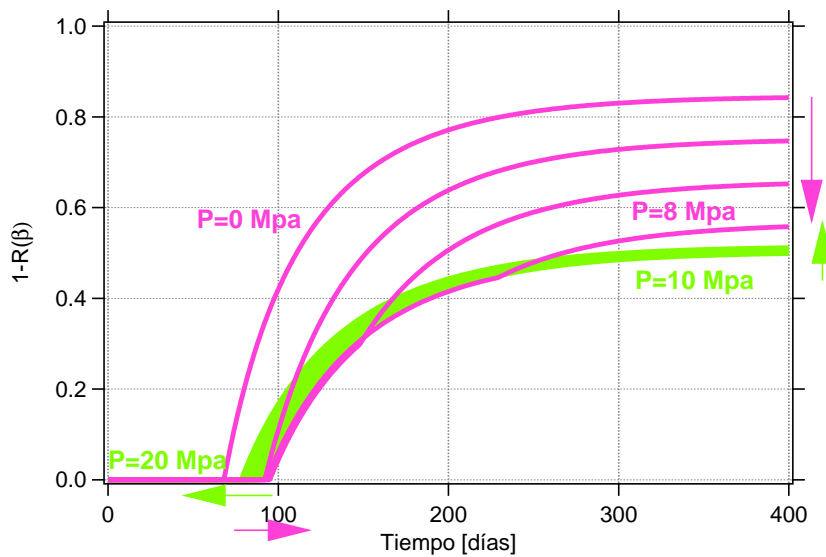


FIGURA 6.20: Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Confinamiento pasivo fijo en $e = 3\text{ mm}$ y carga axial variable de $P = 0$, a $P = 20\text{ MPa}$.

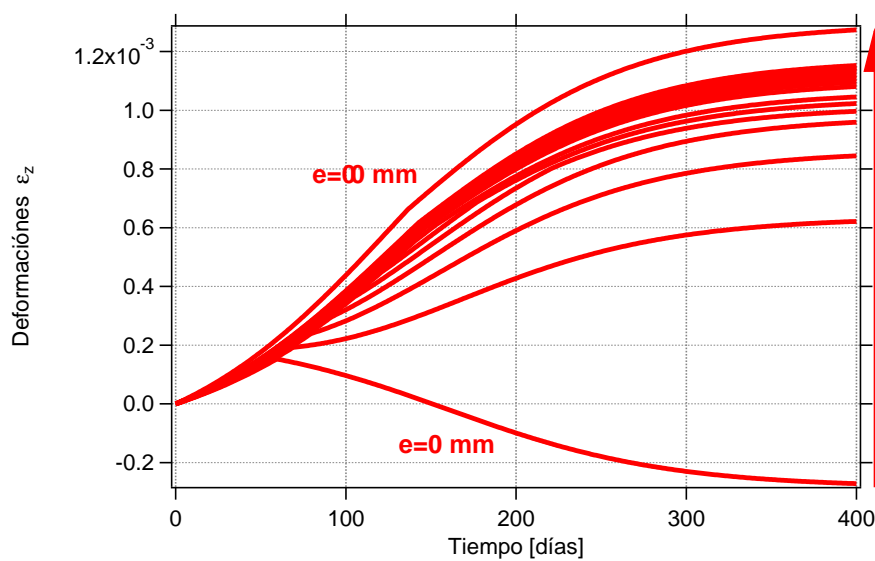


FIGURA 6.21: Evolución de ε_z vs tiempo. Carga axial fija $P = 7,5\text{ MPa}$ y confinamiento pasivo variable de $e = 0\text{ mm}$, a $e = \infty$.

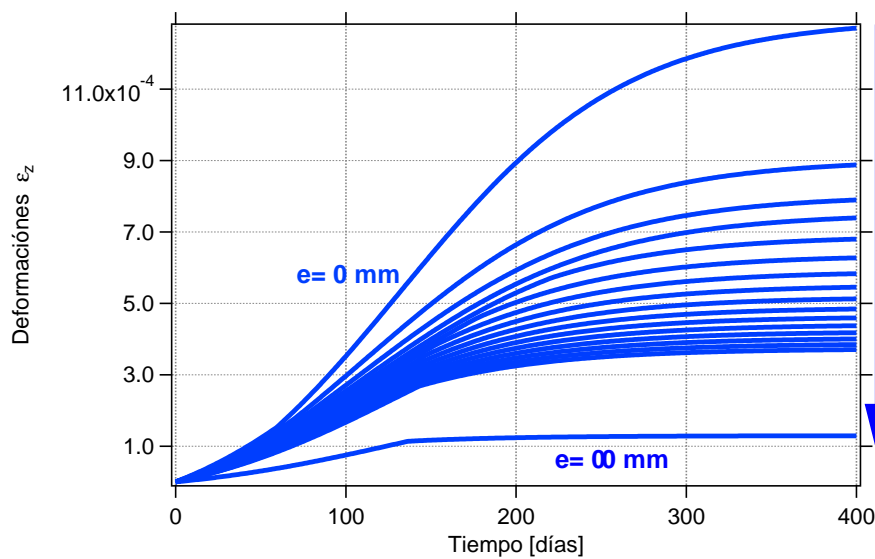


FIGURA 6.22: Evolución de ε_r vs tiempo. Carga axial fija $P = 7,5MPa$ y confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$.

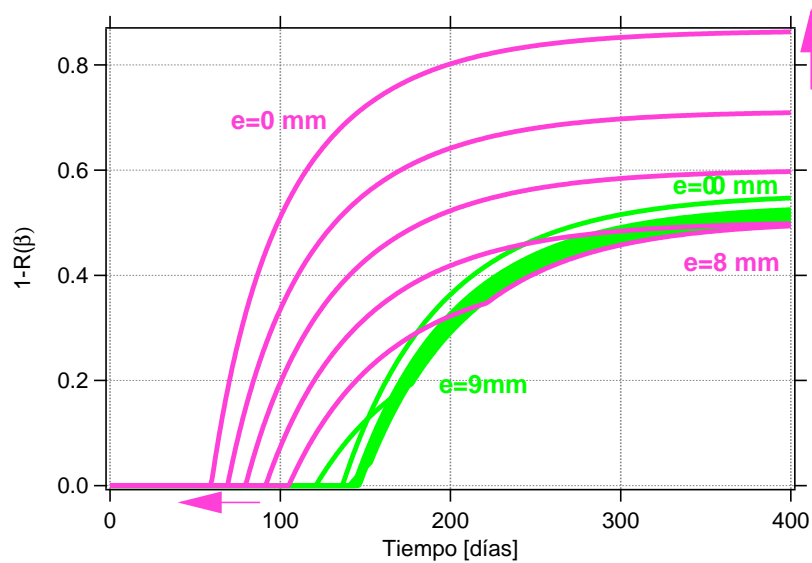


FIGURA 6.23: Evolución de $(1 - R)$ vs tiempo. Carga axial fija $P = 7,5MPa$ y confinamiento pasivo variable de $e = 0mm$, a $e = \infty$.

6.2. Simulación del ensayo de flexión

6.2.1. Presentación del problema

En esta sección se utilizará el modelo propuesto para reproducir numéricamente los ensayos de experimentales del trabajo de [Giaccio et al. \[2008\]](#). En dicho trabajo se presentan ensayos de expansión libre, compresión uniaxial, flexión en vigas entalladas y observaciones con microscopio, de hormigones afectados por RAS. Los hormigones elaborados tuvieron idéntica dosificación pero se constituyeron por agregados, gruesos y finos, de distinta naturaleza. En particular, se utilizaron tres tipos de agregados gruesos, dos de los cuales eran reactivos, mientras que el restante no lo era. En cuanto a los agregados finos, se utilizó una arena reactiva y otra no reactiva. Estos agregados se utilizaron en la dosificación de 4 tipos de hormigones, uno no reactivo denominado *C1* y otros tres reactivos denominados *R2*, *R3* y *R4* respectivamente (ver el trabajo de [Giaccio et al. \[2008\]](#) para más detalles). El objetivo que se persiguió en [Giaccio et al. \[2008\]](#) fue poner en evidencia las diferencias en las propiedades mecánicas en hormigones, a pesar de presentar niveles similares de expansión por la RAS. Esta diferencia se atribuye a los distintos mecanismos por los cuales la RAS produce micro fisuración en el hormigón, causadas, en este caso, por la diferencia en la mineralogía en los agregados (ver sección (2.3.1.3)).

Durante la campaña experimental se mantuvieron condiciones ambientales uniformes ($T = 21^\circ$ y condiciones de saturación total). Las curvas correspondientes al hormigón de referencia *C1* no evidencian efectos de retracción, debido a que las probetas se mantuvieron en saturación total. Los ensayos de compresión y flexión, fueron en realidad ensayos químico-mecánicos que se realizaron del siguiente modo. Por un lado, las probetas fueron sometidas a un proceso de expansión libre, hasta que se alcanzó la expansión deseada a una determinada edad. Obtenida dicha expansión, las probetas fueron sometidas a un ensayo mecánico (flexión o compresión). Al realizar el ensayo de este modo, los resultados no se ven afectados por el fenómeno de creep como ocurre en los ensayos descritos en la sección (6.1), donde la carga se sostiene en el tiempo. Puede decirse, entonces, que los principales fenómenos que afectan los resultados experimentales de [Giaccio et al. \[2008\]](#) son la RAS y el efecto mecánico. Esto hace que dichos ensayos sean adecuados para ser reproducidos por el modelo propuesto en este trabajo. En especial, se podrá poner a

prueba la formulación variacional realizada del problema y su posterior discretización mediante el método de los elementos finitos, al intentar reproducir los ensayos de flexión.

Se describe a continuación la forma en la que se reprodujeron los ensayos realizados por [Giaccio et al. \[2008\]](#), de tal forma de obtener los parámetros requeridos por el modelo. La descripción posterior se centra en la reproducción del ensayo de flexión, del cual se poseen curvas carga-desplazamiento para casa hormigón a distintas edades. La reproducción del ensayo de flexión se centra en la obtención de los parámetros químicos τ_l , τ_c , ϵ^∞ y ς y los parámetros de mecánicos f_t y G_f . De los parámetros restantes, algunos, fueron brindado directamente por los datos experimentales (proelásticos: K , G ; daño: ℓ_2), mientras que otros se adoptan según valores típicos en base a [Comi et al. \[2009\]](#) y [Lubliner et al., 1989](#)] (poroelástico: M , b ; rigidez: p , q ; daño: ℓ_1).

Para la reproducción del ensayo de flexión, se distinguirán dos partes. Por un lado, la reproducción del ensayo de expansión libre y ,luego, la reproducción del ensayo de flexión propiamente dicho.

6.2.2. Reproducción del ensayo de expansión libre

La reproducción del ensayo de expansión libre puede hacerse utilizando la ecuación (6.2) y el algoritmo (1), particularizando para $P = 0$ y $e = 0$. De este modo, se pueden obtener los parámetros químicos τ_l , τ_c y ϵ^∞ para los distintos hormigones. El ajuste de las curvas experimentales por medio del modelo se pueden ver en la figura (6.24). El hormigón C1 es descartado de los análisis posteriores, debido al bajo nivel de expansión que presenta y a su escasa velocidad de reacción. La curva de expansión libre para C1 sirve más bien para justificar el hecho de que para un hormigón no reactivo no se presenta retracción que afecte los resultados del análisis. Una vez que se obtienen los parámetros químicos τ_l , τ_c y ϵ^∞ , se puede obtener el parámetro químico restante ς , por medio también del ensayo de expansión libre, sumado a los datos experimentales que se tiene de los módulos de Young a distintas edades para cada hormigón. El valor del daño en la probeta a distintas edades puede ser representado por el valor $(1 - R)$ y este puede ser calculado como:

$$[1 - R]^t = 1 - \frac{E^t}{E^0}, \quad (6.5)$$

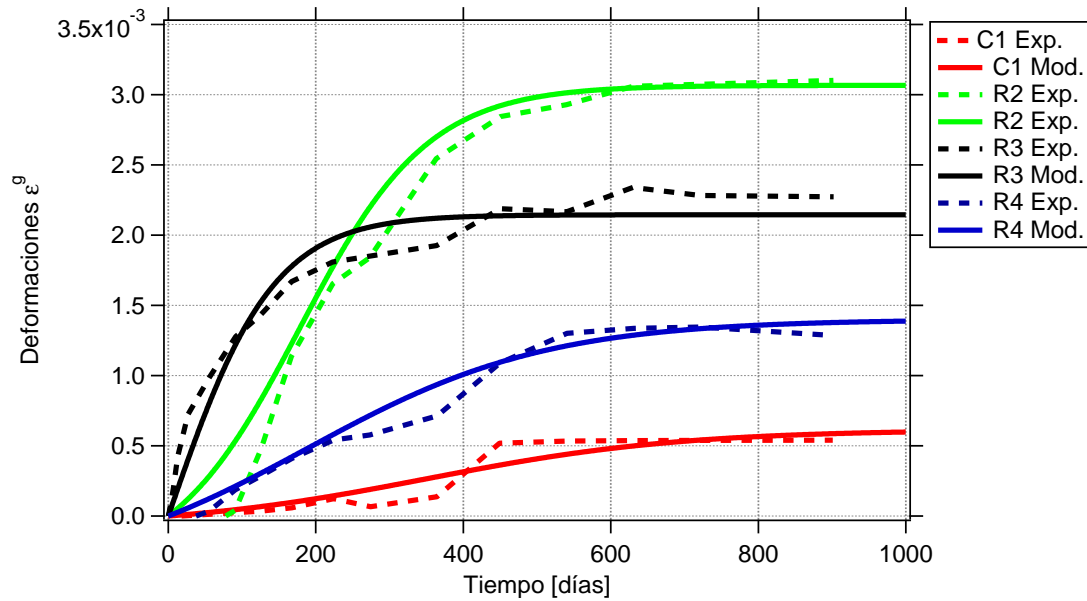


FIGURA 6.24: Curvas de expansión libre para el ensayo de [Giaccio et al. \[2008\]](#).

donde $[1 - R]^t$ y E^t son el nivel de daño y el módulo de Young al tiempo t y E^0 es el módulo de Young del material virgen. Lo que se hace entonces es reproducir el ensayo de expansión libre de tal manera de tener el nivel de daño dado por la ecuación (6.5), en el tiempo t . Se tiene en cuenta que el parámetro ζ no modifica la forma de la curva del ensayo de expansión libre, cuyos parámetros τ_l , τ_c y ϵ^∞ , ya fueron calibrados en el paso anterior. La variación de $(1 - R)$ en el tiempo puede verse en la figura (6.25) para los distintos hormigones.

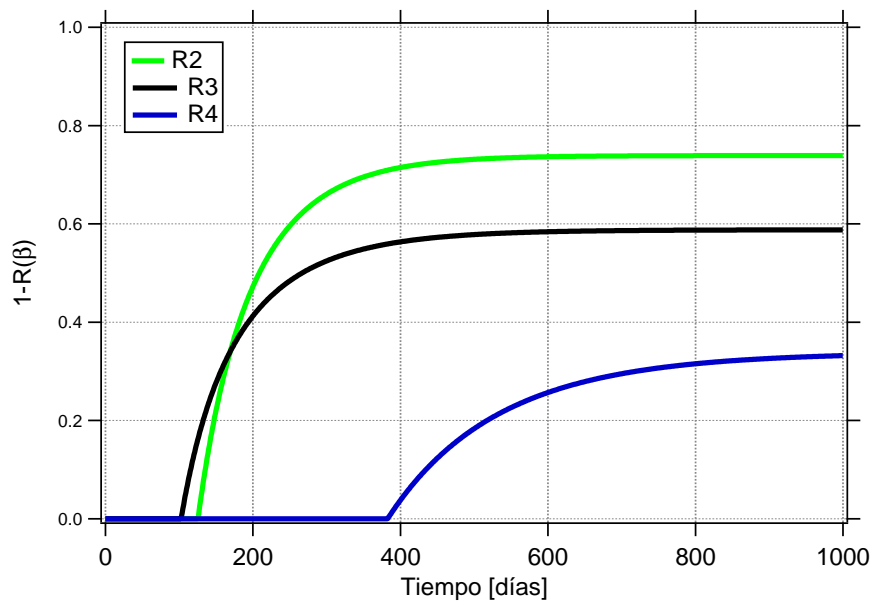


FIGURA 6.25: Curvas $(1 - R)$ vs tiempo.

Si se evalúan conjuntamente las figuras (6.24) y (6.25), se nota que el hormigón *R4* es el que tiene la menor expansión final y reacción más lenta; por lo que llega al nivel de daño más bajo y comienza a manifestar daño en manera más tardía que los otros hormigones. El Hormigón *R2* es el que tiene la mayor expansión y llega al mayor nivel de daño. Sin embargo comienza a manifestar el daño un poco más tarde que el hormigón *R3*, que posee una reacción más rápida que *R2*. El Hormigón *R3* es el que tiene la reacción más veloz y comienza a manifestar daño primero que los demás hormigones. Sin embargo, su expansión final es intermedia entre *R2* y *R4*, en concordancia con su nivel de daño. Entiéndase como velocidad de la reacción a la velocidad con la que varía la expansión en el tiempo, mostrada por la figura (6.24). A pesar de que la descripción realizada anteriormente resulta bastante intuitiva, puede, en algunos casos, no resultar de este modo dado a que el comportamiento de la expansión en relación al nivel de daño, no sólo depende de los parámetros químicos obtenidos hasta el momento, sino que también depende de los parámetros de daño como la resistencia a tracción f_t .

6.2.3. Reproducción del ensayo de flexión

Una vez que se logra obtener todos los parámetros químicos τ_l , τ_c , ϵ^∞ y ς ; se pasa a la reproducción de la curva carga-desplazamiento del ensayo de flexión. El objetivo en la reproducción de esta curva es chequear que los parámetros f_t y G_t que fueron previamente adoptados sean correctos. En caso de que el modelo no copie bien la curva experimental carga desplazamiento del ensayo de flexión, se proponen nuevos parámetros f_t y G_f , se recalibra el parámetro ς y se verifica nuevamente con la curva experimental del ensayo de flexión. La geometría, las condiciones de borde de carga y apoyos, y la malla utilizada se muestran en la figura (6.26).

La simulación del ensayo de flexión propiamente dicho, se realiza de forma numérica en dos etapas. Por un lado, se realiza control de carga hasta llegar al pico del ensayo, luego, el resto del ensayo se continua con control de energía hasta llegar a un desplazamiento del punto de aplicación de la carga de aproximadamente $2mm$.

Los ajustes del ensayo de flexión para los distintos hormigones pueden verse en las figuras (6.27), (6.28) y (6.29). En el cuadro (6.2) puede observarse un resumen de todos los parámetros obtenidos para cada hormigón a lo largo de todo el proceso antes descrito.

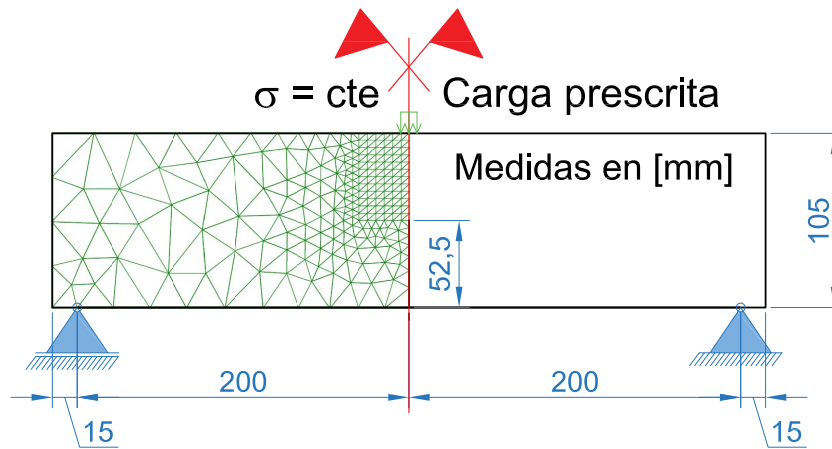


FIGURA 6.26: Geometría, condiciones de carga y apoyo, y malla utilizada en el ensayo de flexión.

CUADRO 6.2: Parámetros del modelo para los ensayos de [Giaccio et al. \[2008\]](#).

P. poroelásticos				
Parámetro	R2	R3	R4	Unidad
$K =$	17778	13944	21167e	[MPa]
$G =$	13333	10458	15875	[MPa]
$M =$	6000	6000	6000	[MPa]
$b =$	0,40	0,40	0,40	[-]
P. de daño				
$D =$	$20E - 3$	$20E - 3$	$20E - 3$	[m]
$G_f =$	$300E - 6$	$250E - 6$	$250E - 6$	[MPa m]
$F_t =$	1,50	2,20	5	[MPa]
$p =$	2	2	2	[-]
$q =$	0	0	0	[-]
$\ell_1 =$	0,1	0,1	0,1	[-]
$\ell_2 =$	24,5	13,5	10	[-]
P. químicos				
$\tau_l =$	178	0	189	[días]
$\tau_c =$	87	110	162	[días]
$\epsilon^\infty =$	0,0092	0,0044	0,0042	[-]
$\varsigma =$	0,0141	0,0336	0,0355	[-]

En las figuras (6.27), (6.28) y (6.29) los datos experimentales se indican con línea de trazo mientras que los resultados del modelo se indican con línea llena. Como se observa, para cada hormigón se poseen curvas experimentales a dos edades. Por esta razón se decidió tomar como base para el ajuste una de las curvas experimentales y ,luego, se intenta reproducir la otra. Para los hormigones R2 R3 y R4 se toman como base para el

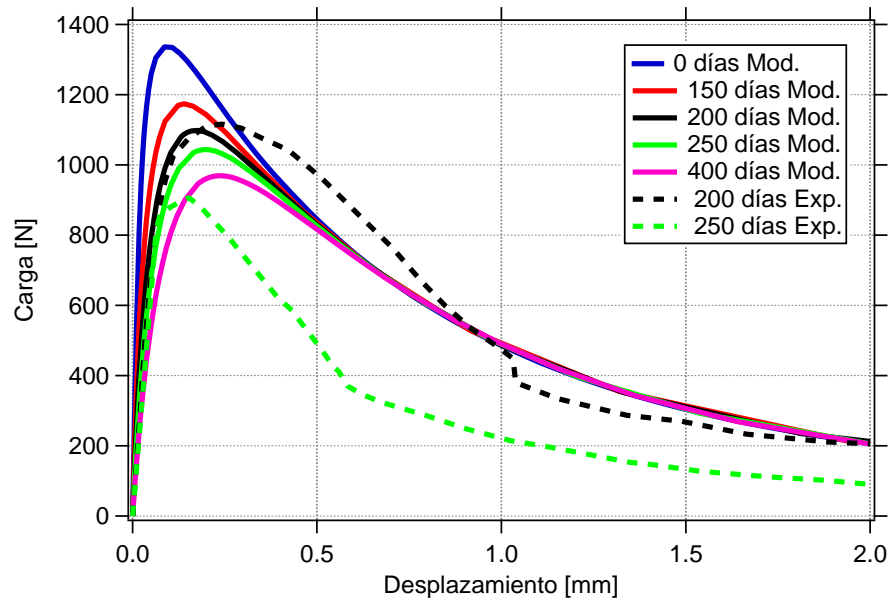


FIGURA 6.27: Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón R2 a distintas edades.

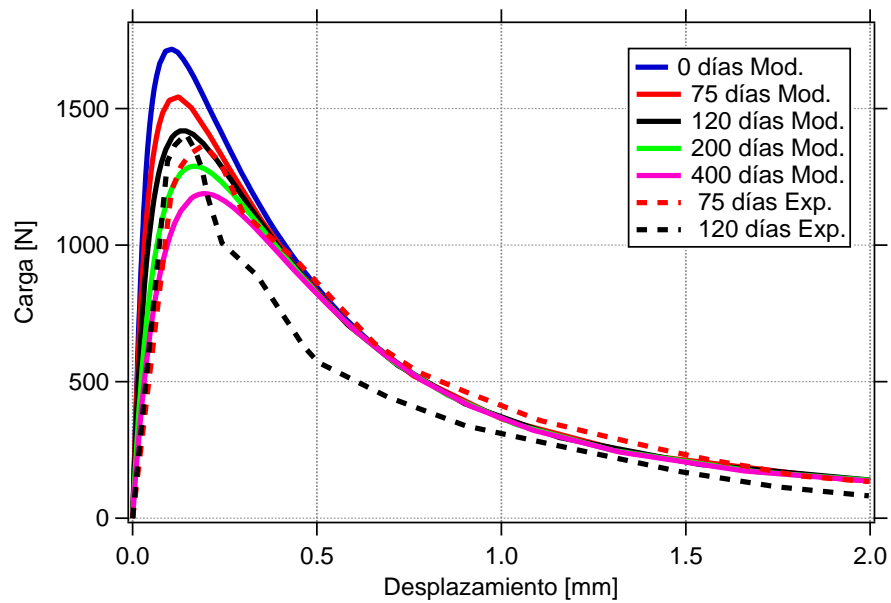


FIGURA 6.28: Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón R3 a distintas edades.

ajuste las curvas experimentales de 200, 120 y 485 días, y se intenta reproducir las curvas para 250, 75 y 745 días respectivamente. Luego, para cada hormigón se reproducen numéricamente ensayos a distintas edades para las cuales no se tiene datos experimentales. En el hormigón R3 se nota una situación atípica en la que la curva experimental a 75 días tiene un pico más elevado que a 120 días. Esta situación no puede ser descrita por el modelo, en el cual no se prevee una recuperación del material. Por esta razón, se descarta para análisis posteriores. Se observa que, si bien el modelo es capaz

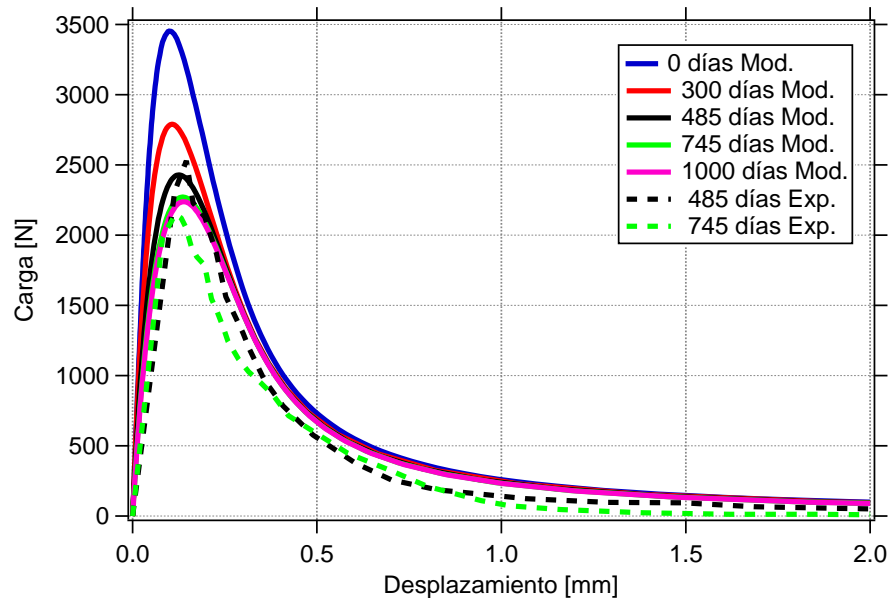


FIGURA 6.29: Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón $R4$ a distintas edades.

de reproducir de manera aceptable la curva que se toma como base para calibrar los parámetros, al intentar reproducir la curva restante, la respuesta del modelo evidencia un menor deterioro que el que se ve en la curva experimental. Apoyando esto, se ve un mejor resultado para el $R4$ donde las curvas numéricas copian un poco mejor las curvas experimentales que para el hormigón $R2$. En el hormigón $R2$ hay una fuerte variación en la energía de fractura evidenciada por la separación de las curvas experimentales en el pos pico. A pesar de existir esta diferencia en el hormigón $R4$, la variación de la energía de fractura no es tan pronunciada como en el caso anterior, por lo que el modelo puede reproducir mejor la respuesta. En la evaluación de los datos experimentales realizada por [Giaccio et al. \[2008\]](#), también se ve una variación en las distintas edades de la resistencia a tracción. En el modelo que se propone en este trabajo la variable de daño sólo se encuentra afectando las propiedades poroelásticas del material (K , G , b , M).

6.2.4. Modificación de f_t y G_f : Propuesta 1

Por los motivos mencionados en la sección anterior, se decide afectar tanto la resistencia a tracción f_t y la energía de fractura G_f por la influencia de RAS, mediante ξ . Se toma entonces la propuesta realizada por [Saouma & Perotti \[2006\]](#) para afectar la

CUADRO 6.3: Parámetros del modelo para los ensayos de [Giaccio et al. \[2008\]](#). Propuesta 1.

Parámetro	R2	R4	Unidad
$f_{t0} =$	2,25	5,00	[MPa]
$f_{t\infty} =$	1,00	5,00	[MPa]
$G_{f0} =$	400	250	[MPa m]
$G_{f\infty} =$	100	200	[MPa m]
$\varsigma =$	0,0156	0,0355	[-]

resistencia a tracción y se la hace extensiva para afectar la energía de fractura resultando:

$$f_t(\xi) = f_{t0} \left[1 - \left(1 - \frac{f_{t\infty}}{f_{t0}} \right) \xi \right], \quad (6.6)$$

$$G_f(\xi) = G_{f0} \left[1 - \left(1 - \frac{G_{f\infty}}{G_{f0}} \right) \xi \right], \quad (6.7)$$

donde f_{t0} y G_{f0} son las resistencia a tracción y la energía de fractura para el material virgen y $f_{t\infty}$ y $G_{f\infty}$ son las resistencia a tracción y la energía de fractura para el material al fin del proceso de la RAS. Los resultados obtenidos con esta modificación en el modelo pueden observarse en las figuras (6.30) (6.31). Los parámetros para estos ensayos corresponden también a el cuadro (6.2), salvo f_{t0} , $f_{t\infty}$, G_{f0} , $G_{f\infty}$ y ς , los cuales se indican en el cuadro (6.3). Al introducir esta modificación en el modelo, se hace necesario recalibrar el parámetro del modelo de daño ς . Recuérdese que este parámetro controla el nivel de daño en el proceso de expansión libre y si bien no depende G_f , si se modifica con f_t , por esto es necesaria su recalibración.

Como pueden observarse, los resultados con esta modificación resultan bastan buenos para el caso del hormigón R2, pero no ocurriendo lo mismo para el hormigón R4. Esto hace suponer que la variación de la resistencia a tracción y de la energías de fractura por medio del progreso de la RAS ξ no son representativas para el caso del hormigón R4. Se observa lo siguiente, el hormigón R4 es el hormigón con reacción más lenta y con menor expansión final. Se nota, según la figura (6.24) que para la edad a la que se toma la primera lectura (475 días) la reacción está prácticamente agotada y se tiene un progreso muy escaso de la reacción a la siguiente edad a la que se toma lectura (745 días). Esto significa que el rango de edades para el que se tiene datos el progreso de la RAS ξ tiene muy poca posibilidad de hacer variar la resistencia a tracción y la energía

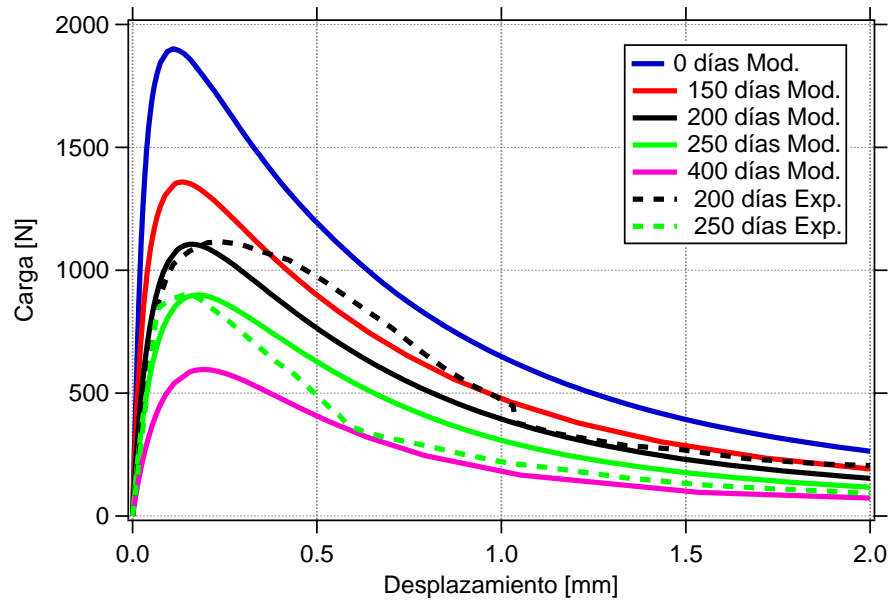


FIGURA 6.30: Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón *R2* a distintas edades. Propuesta 1.

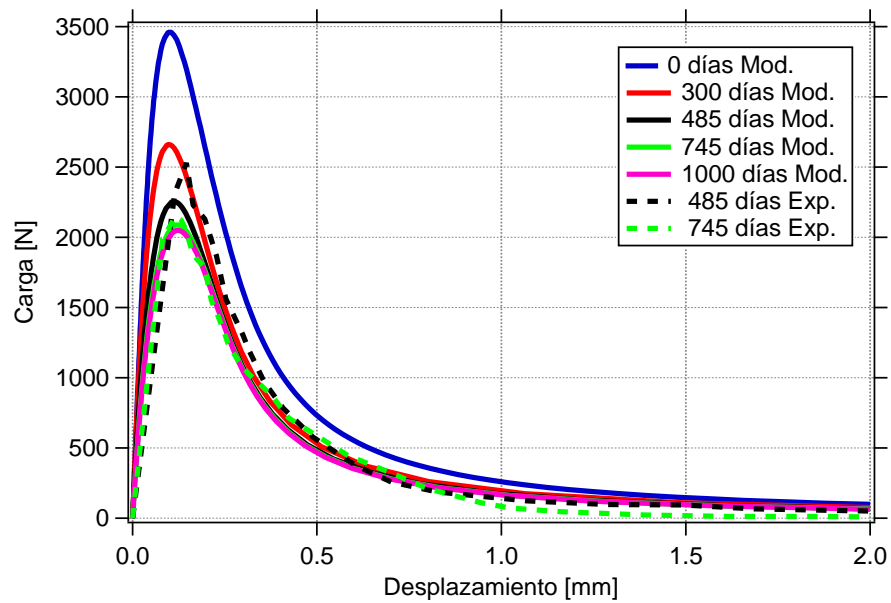


FIGURA 6.31: Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón *R4* a distintas edades. Propuesta 1.

de fractura. Como se observa en el cuadro en los datos experimentales de [Giaccio et al. \[2008\]](#), la resistencia a tracción sufre poca variación para el caso del hormigón *R4*, no así la energía de fractura. Como lo evidencia la figura (6.25) para los datos de módulo de elasticidad a distintas edades de lo que se dispone, se calibra un coeficiente ζ que recién hace producir daño sobre las propiedades poroelásticas del material para edades muy avanzadas.

6.2.5. Modificación de f_t y G_f : Propuesta 2

De lo expresado en la sección anterior se nota que el deterioro de la energía de fractura es más acorde con el daño producido en expansión libre que con el progreso de la RAS. Se propone entonces:

$$G_f([1 - R]^g) = G_{f0} \left[1 - \left(1 - \frac{G_{f\infty}}{G_{f0}} \right) \frac{[1 - R]^g}{[1 - R]^{g\infty}} \right], \quad (6.8)$$

donde $[1 - R]^g$ representa el nivel de daño en expansión libre y $[1 - R]^{g\infty}$ representa el nivel de daño al final del proceso de expansión libre, es decir cuando la reacción se ha agotado. Las curvas de evolución de $[1 - R]^g$ en el tiempo, usadas como entrada para la reproducción de los ensayos de flexión para los hormigones $R2$ y $R4$ se pueden ver en la figura (6.32). La evolución de $[1 - R]^g$ puede obtenerse tal y como se reprodujeron las curvas de la figura (6.25), y el valor $[1 - R]^{g\infty}$ reproduciendo dicho ensayo hasta donde se ve que $[1 - R]^g$ toma un valor asintótico. Los niveles de de daño finales para los hormigones $R2$ y $R4$ son $[1 - R]^{g\infty} = 0,84$ y $[1 - R]^{g\infty} = 0,34$ respectivamente. El resto de los parámetros se encuentran en los cuadros (6.2) y (6.3). Es muy importante tener en cuenta para la obtención de $[1 - R]^g$ que, en base a las distintas pruebas numéricas que se hicieron, el valor de $[1 - R]^g$ no depende de la energía de fractura en el ensayo de expansión libre, lo cual simplifica significativamente el cálculo. Con esta modificación, se ajustan las curvas experimentales como se ve en las figura (6.33) (6.34). Se nota en este caso un buen ajuste tanto para el hormigón $R2$ como $R4$. Con esto se concluye que la última modificación tenida en cuenta es más general pues es capaz de reproducir satisfactoriamente tanto el comportamiento de un hormigón con una reacción veloz como lo es el $R2$ como también el comportamiento de un hormigón con una reacción más lenta como lo es el $R4$.

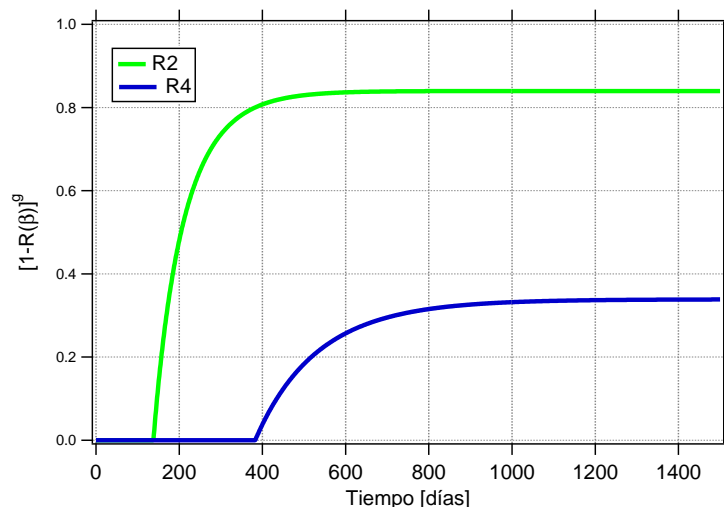


FIGURA 6.32: Nivel de daño en expansión libre.

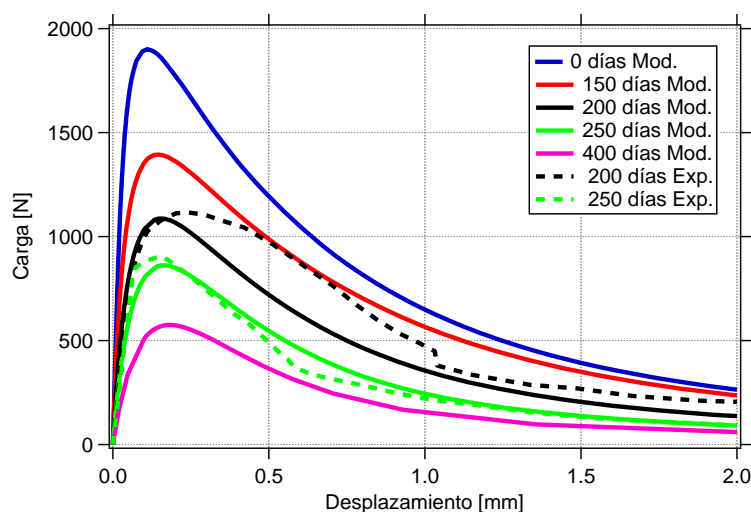


FIGURA 6.33: Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón *R2* a distintas edades. Propuesta 2.

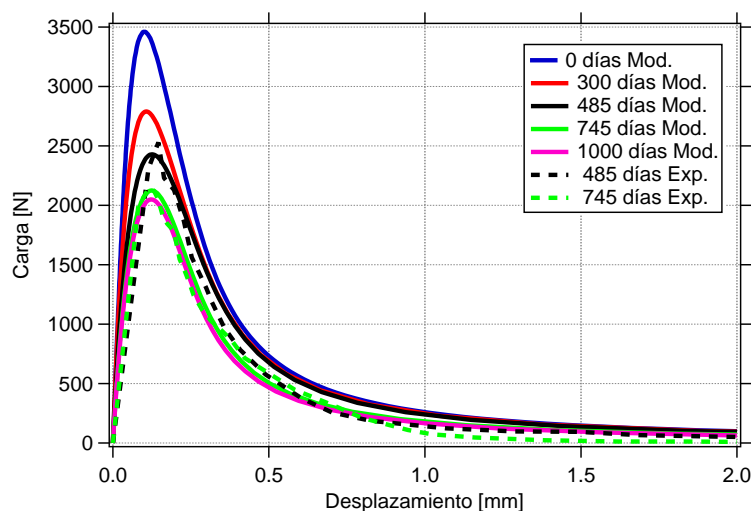


FIGURA 6.34: Curvas carga desplazamiento del ensayo de flexión para el hormigón *R4* a distintas edades. Propuesta 2.

6.3. Evaluación de una presa de gravedad de Hormigón afectada por RAS

Con el objetivo de poder probar el modelo completo se realiza el análisis de una presa de gravedad de hormigón afectada por RAS. En esta tesis se toman los datos para realizar esta simulación del trabajo de Comi et al. [2009], para luego poder comparar ambos resultados. La geometría, cargas y malla empleada en el ejemplo se pueden ver en la figura (6.35).

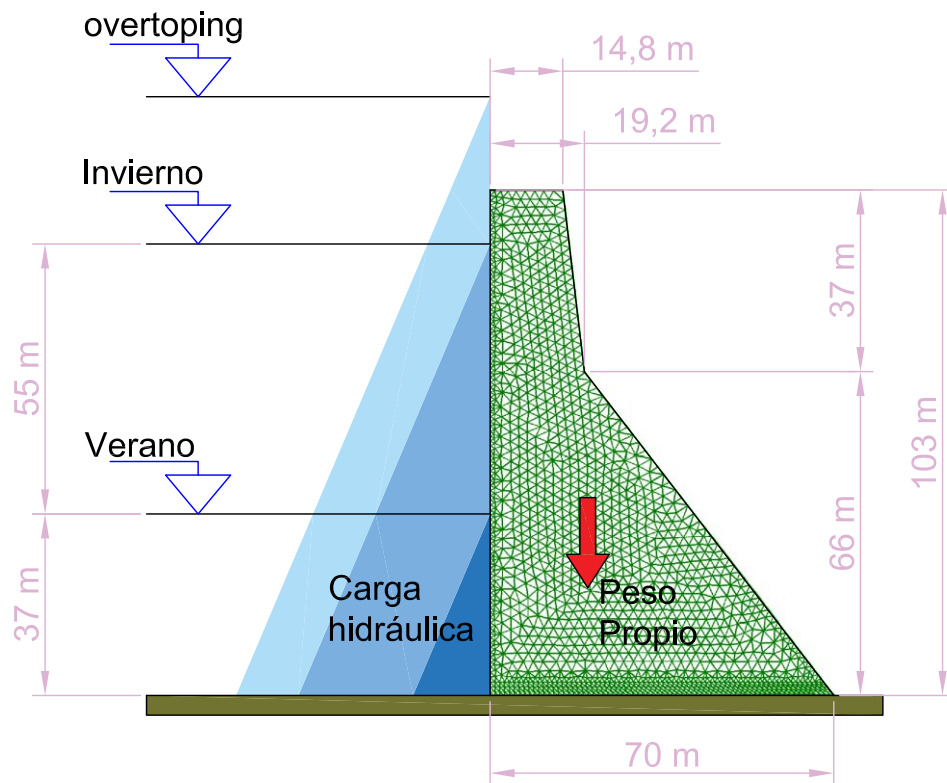


FIGURA 6.35: Geometría, cargas y malla utilizada en la presa analizada.

La presa analizada se trata de la presa Koyna construida en 1963 en Maharashtra (India), Tiene 103 m de altura y una ancho de 808 m. En 1967 un terremoto dañó severamente la presa dejándola en desuso, y desde entonces la misma es utilizada en diversas investigaciones relacionadas con la mecánica computacional.

En la resolución de este ejemplo se considera la variación a lo largo del año de la temperatura por lo que para resolver este ejemplo se requiere, como primera instancia,

CUADRO 6.4: Parámetros del modelo para la simulación de la presa.

P. poroelásticos		
$K =$	12222	[MPa]
$G =$	9166	[MPa]
$M =$	6000	[MPa]
$b =$	0,40	[-]
P. de daño		
$D =$	4	[m]
$G_f =$	$300E - 6$	[MPa m]
$f_t =$	2,1	[MPa]
$p =$	2	[-]
$q =$	0	[-]
$\ell_1 =$	0,12	[-]
$\ell_2 =$	12	[-]
P. químicos		
$\tau_l =$	130	[días]
$\tau_c =$	66	[días]
$\epsilon^\infty =$	0,00289	[-]
$\zeta =$	0,0873	[-]
$\bar{T} =$	9400	[°C]
$U_l =$	38	[K]
$U_c =$	5400	[K]
P. térmicos		
$k^T =$	3	[Wm ⁻¹ K ⁻¹]
$c^T =$	2327500	[Jm ⁻³ K ⁻¹]

la resolución de un problema térmico. Luego, con el problema térmico, se puede resolver el problema químico. Finalmente, utilizando como entrada de datos el campo de temperatura y de progreso de la RAS, se resuelve el problema mecánico.

6.3.1. Resolución del problema térmico

La resolución de problema térmico se realiza mediante la ecuación (5.37) para régimen transitorio. La sustitución de la derivadas temporales se realiza con el método de Euler implícito. El problema se resuelve para el caso de conducción de calor bidimensional empleando elementos finitos triangulares de 3 nodos y la malla mostrada en la figura (6.35). Los parámetros utilizados en la simulación térmica al igual que el resto de los parámetros para el ejemplo se pueden ver en el cuadro (6.4). El problema se resuelve imponiendo condiciones tipo Dirichlet en todo el contorno. La base de la presa

se considera durante todo el año a 6°C mientras que el resto de los bordes de la presa varían su temperatura durante el año según se encuentren en contacto con el agua o con el aire y teniendo en cuenta también la variación del nivel del agua a lo largo del año. Esta variación puede verse en las figuras (6.36) y (6.37).

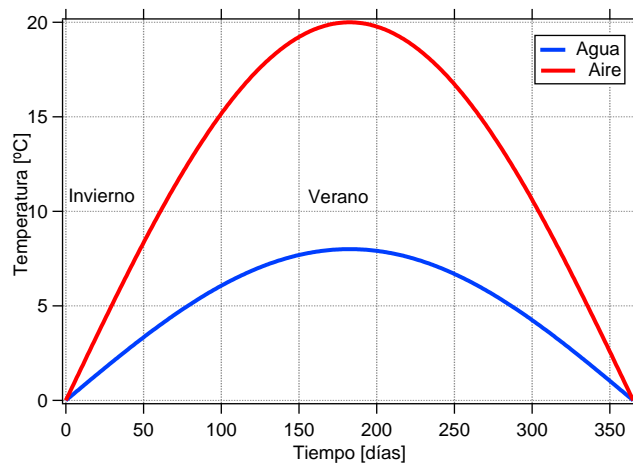


FIGURA 6.36: Variación de la temperatura del agua y de aire a lo largo del año.

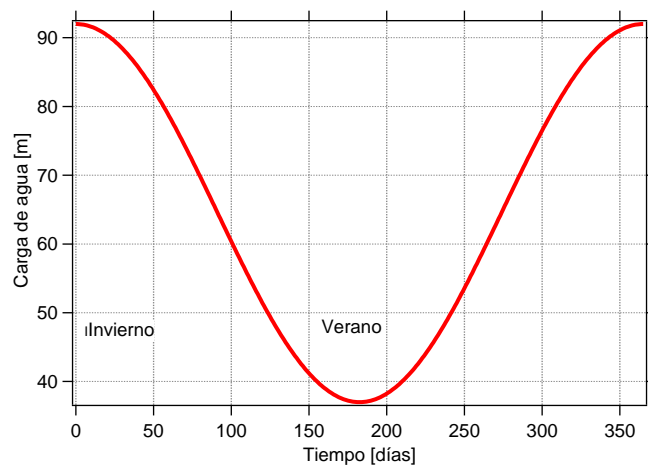


FIGURA 6.37: Variación del nivel de agua en la presa a lo largo del año.

El campo de temperaturas inicial T^0 se obtiene resolviendo el problema térmico para régimen estacionario ($c^T = 0$), e ingresando en dicho problema condiciones de borde tipo Dirichlet que se obtiene como promedio de la historia de temperatura. La simulación se realiza por un período de tiempo de 16 años y se utiliza un intervalo de tiempo de un mes. En la figura (6.38) se ve el campo de temperatura para el décimo año, encontrando que a partir del cuarto año las variaciones entre año y año resultan casi imperceptibles. Como se observa en la figura (6.38), las temperaturas variables en el borde de la presa logran modificar el campo de temperaturas hacia el interior de la

misma. En el sector más delgado de la presa, cercano a la cresta, se nota una marcada transición de temperaturas desde los bordes al interior. En este sector de la presa, el flujo térmico logra modificar totalmente, a lo largo del año, el campo de temperaturas inicial obtenido para régimen transitorio. En los sectores más gruesos de la presa se ve también como el flujo térmico logra penetrar modificando, aunque en menor medida que en el sector más delgado, el campo de temperaturas iniciales de la presa. De este análisis podemos decir que en general todo el cuerpo de la presa sufre cambios en la temperatura durante el año. Esto es importante para el cálculo del progreso de la RAS, en el cual ya no podemos considerar temperaturas constantes y se requiere su determinación con las mencionadas ambientales variables en temperatura. Se aprovecha el problema para dar una idea aproximada de que habría ocurrido si se hubiera considerado en el cálculo del progreso de la RAS dependencia con el grado de saturación. Para encontrar el campo de grado de saturación en el cuerpo de la presa se debe resolver una ecuación diferencial que tiene la misma forma de la ecuación del calor dada por (5.37). La diferencia entre ambos problemas es que para la ecuación del calor, aplicada a la resolución de conductividad en hormigón, se tiene una relación $C^T/k^T \approx 1E^{-6}$ mientras que para un problema de transporte de humedad dicha relación es de aproximadamente $1E^{-13}$. El campo obtenido en el cuerpo de la presa con esta relación de coeficientes se puede observar en la figura (6.39). En dicha figura se puede apreciar que la variación del campo obtenido en el interior del cuerpo de la presa es casi nula. Esto justifica el hecho de no realizar un análisis de transporte de humedad para obtener el progreso de la RAS en un problema como el estudiado en esta sección. En los trabajos de [Ulm et al. \[2000\]](#) y [Comi et al. \[2012\]](#) se llega a esta misma conclusión y se recomienda que en estructuras masivas, como una presa, es de poca importancia tener en cuenta la variación del grado de saturación en el cálculo del progreso de la RAS. Mencionan también la importancia de tener en cuenta en el cálculo del progreso de la RAS la variación de temperaturas. En los situados trabajos también se analiza la situación inversa, es decir estructuras esbeltas, como la sección de un puente. En este tipo de estructuras la situación es la inversa, es decir, toma más importancia para el cálculo del progreso de la RAS la variación del grado de saturación que la variación del campo de temperatura.

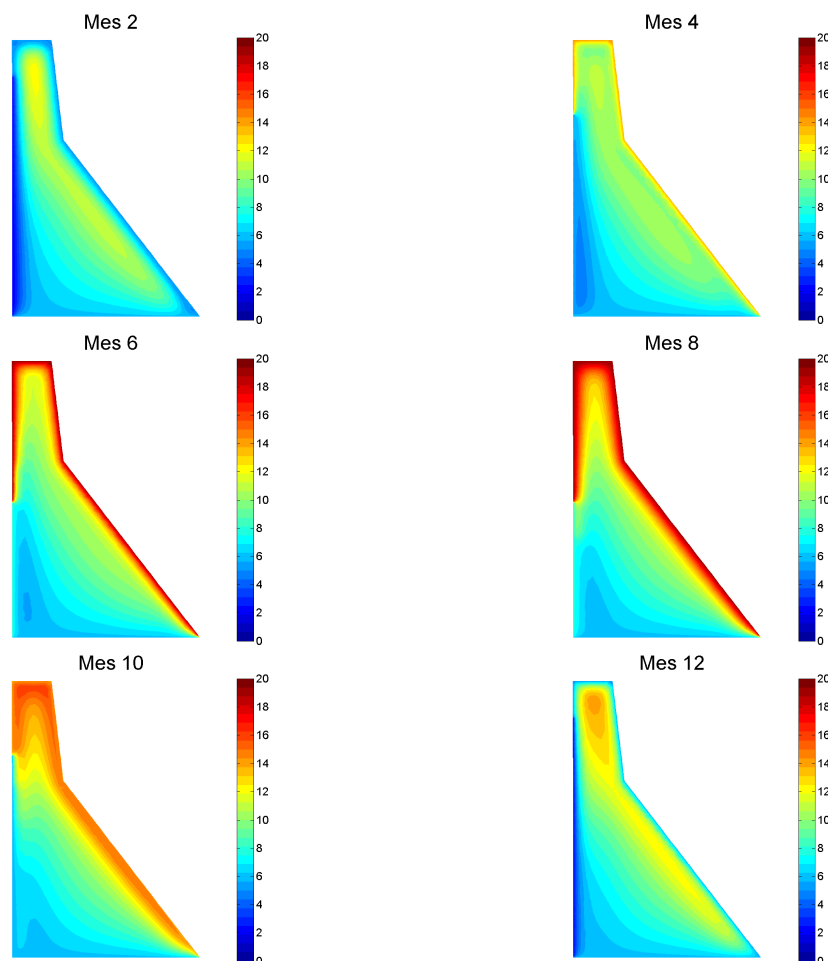


FIGURA 6.38: Distribución de temperaturas en el cuerpo de la presa.

6.3.2. Resolución del problema químico

Con el campo de temperaturas, se puede obtener el campo de progreso de la RAS por medio de la ecuación (5.38). Al considerar el caso de temperatura variable en el tiempo, esta última ecuación no puede ser resuelta de modo exacto y requiere de un tratamiento numérico. Para tal fin, se sustituye la derivada temporal del progreso de la RAS por medio del método de Euler implícito, y luego para resolver el paso temporal se requiere de la aplicación de MNR, por estar en presencia de una ecuación no lineal. La distribución del progreso de la RAS puede verse en la figura (6.41). Como se observa en dicha figura, la RAS progresa desde los sectores de la presa sometidos a mayor temperatura (espaldón y parte superior del paramento vertical que no está en contacto con agua) hacia las zonas de menos temperatura (base y parte inferior del paramento vertical en contacto con agua). Observamos también que la RAS tiene un progreso más pronunciado entre los años 10 y 16. En la figura (6.40) se muestran curvas de evolución del progreso de la RAS para las

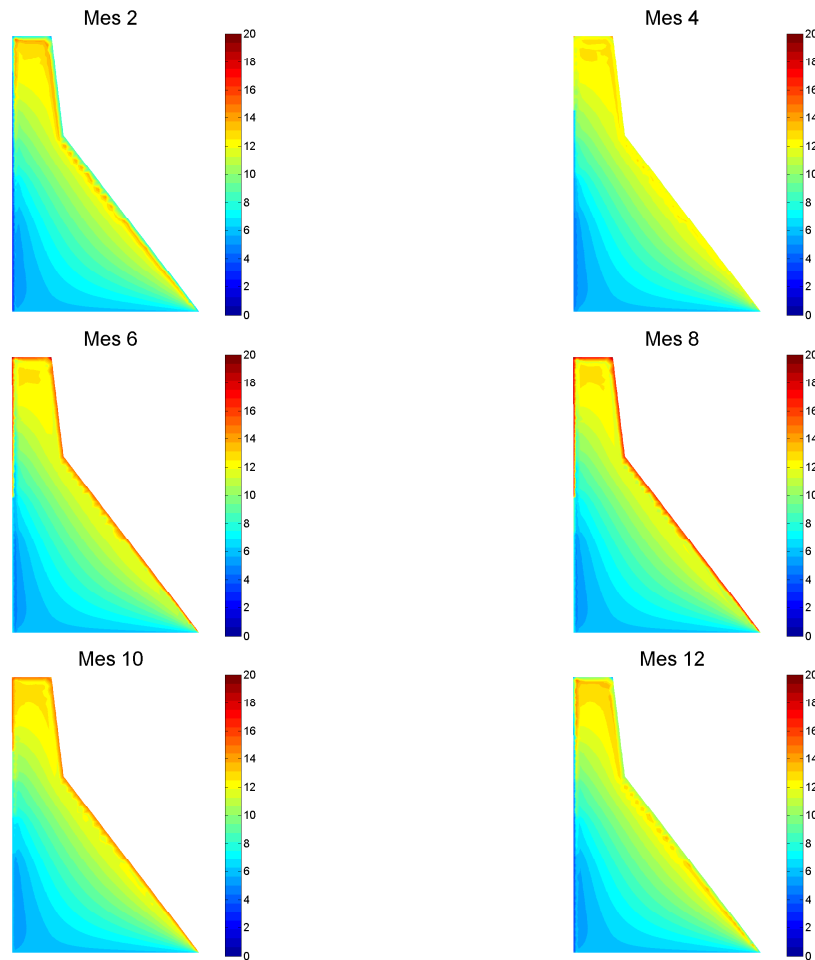


FIGURA 6.39: Distribución de un campo similar al grado de saturación.

temperaturas extremas de la presa, asumiéndolas constantes a través del del tiempo. Se observa, para los tiempos τ y τ que se toman en el ejemplo, una vez iniciada la reacción, la misma de desarrolla velozmente, para la curva de $20^{\circ}C$ se desarrolla en aproximadamente 3,5 años mientras que para la de $6^{\circ}C$ se desarrolla en aproximadamente 5 años. Se ve también que para $20^{\circ}C$ la reacción comienza casi desde el año 0, mientras que para la curva de $6^{\circ}C$ la RAS comienza luego de 15 años. Del análisis de estas curvas y, para los parámetros adoptados en el ejemplo, podemos decir que las bajas temperaturas retrasan notablemente la aparición del progreso de la RAS y en menor medida su desarrollo. En la figura (6.40) también se muestran curvas correspondientes a temperaturas $\pm 20\%$ de las extremas. Dichas curvas son practicamente paralelas con una separación de 3,5 años para las que tienen como centro a $6^{\circ}C$ y 5 años para las que tienen como a centro a $20^{\circ}C$. Las figuras (6.42) y (6.43) muestran los mapas de progreso de la RAS en el cuerpo de la presa para un campo de temperaturas disminuido y luego aumentando en un 20% respectivamente. En el caso de la figura (6.42) se ve que , al disminuir la temperatura,

la reacción comienza a mostrar progreso hacia el final del análisis (16 años), mientras que en la figura (6.43) se ve, al aumentar la temperatura, un comienzo más temprano que la situación original (figura (6.41)) y un desarrollo entre los años 8 y 14. Las figuras (6.44) y (6.45) muestran los mapas de progreso de la RAS en el cuerpo de la presa para una disminuido y aumentando respectivamente en un 20% de los tiempos τ_c y τ_l . En el caso de la figura (6.44) se ve, al disminuir los tiempos, un comienzo más temprano que la situación original (figura (6.41)) y un desarrollo entre los años 8 y 14, mientras que en la figura (6.45) se ve, al aumentar los tiempos, un comienzo más tardío que la situación original (figura (6.41)) y un desarrollo entre los años 10 y 16. Del análisis anterior destacamos como al disminuir sólo en un 20% la temperatura en el cuerpo de la presa, el comienzo de la RAS se retrasa notablemente.

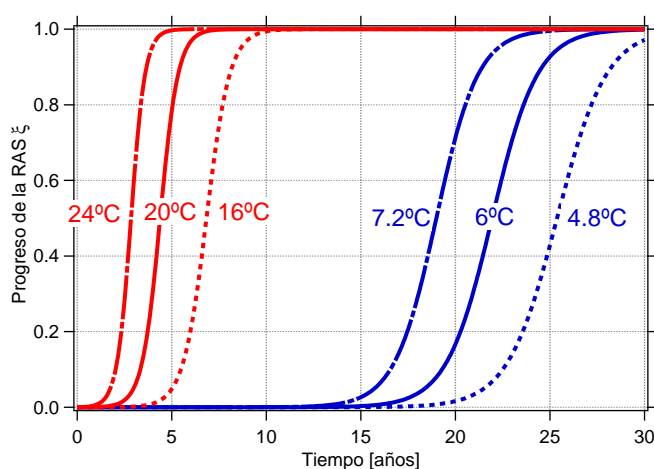


FIGURA 6.40: Progreso de la RAS ξ vs tiempo para las temperaturas extremas en la presa.

6.3.3. Resolución del problema mecánico

Una vez obtenido los campos de temperatura y de progreso de la RAS, lo mismos son utilizados como datos de entrada para la simulación mecánica. La simulación mecánica se realiza en dos etapas. En la primera se simula el comportamiento de la presa a lo largo de 16 años con la carga hidráulica variando a lo largo del año como lo indica la figura (6.37). Los mapas de daño y deformaciones volumétricas en el cuerpo de la presa se pueden ver en las figura (6.46) y (6.47). Tanto en los mapas de daño como en las deformaciones volumétricas se nota el mismo comportamiento que el progreso de la RAS mostrado en la figura (6.41), es decir a partir del año 10 y hasta el 16 se nota una concentración de

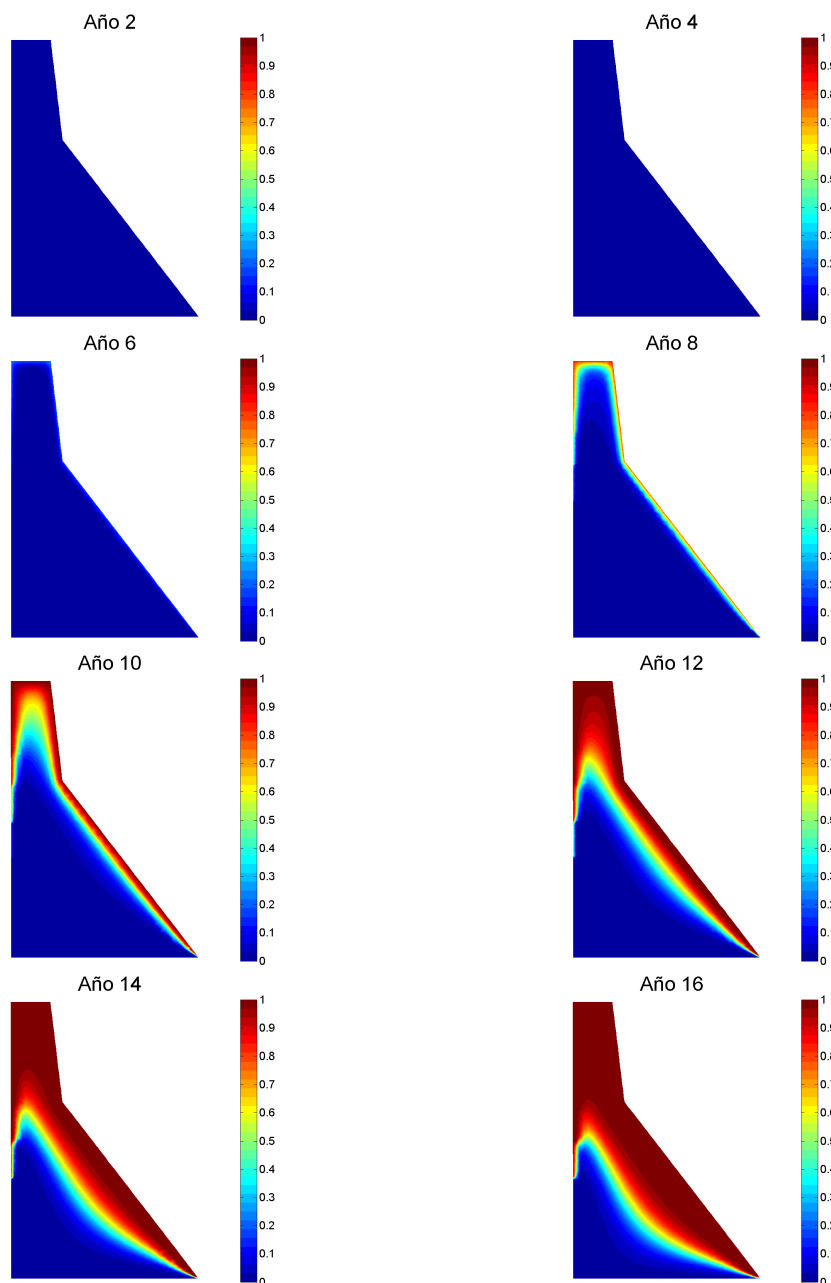


FIGURA 6.41: Distribución de ξ en el cuerpo de la presa.

la variable analizada que avanza desde el espaldón y parte superior de la presa, hacia la base y parte inferior del paramente vertical. En el caso de las deformaciones volumétricas se observa como se concentra la expansión en las zonas de progreso de la RAS mientras en las áreas restantes hay una transición hasta llegar a confinamiento en las zonas de menores temperaturas. Terminada esta simulación se realiza el ensayo *overtopping* el cual consiste en detener la simulación anterior en un instante de tiempo determinado y elevar el nivel del agua hasta obtener la falla de la presa. Se llama en adelante relación *overtopping* al cociente entre la altura de agua alcanzada y la altura de la presa. Este

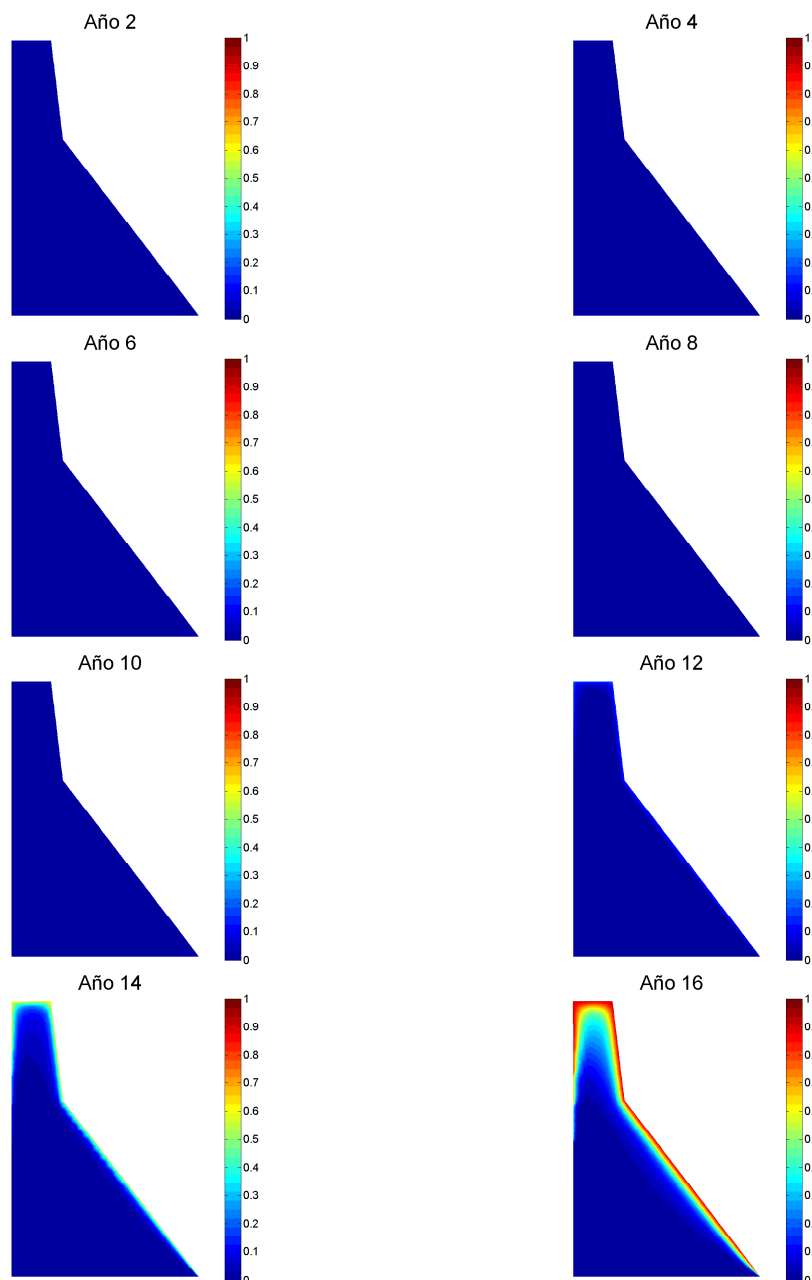


FIGURA 6.42: Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con temperaturas disminuidas en un 20 %.

ensayo fue realizado en la presa sin efectos de la RAS (año 0) y a los 12 años. Los mapas de daño al comienzo y al final del ensayo para ambos instantes de tiempo se pueden ver en las figuras (6.48) y (6.49) respectivamente. Los mapas de daño, en la situación sin RAS y con RAS, muestran la fallas de la presa por el progreso de fisuras en la base y en la zona opuesta al quiebre del espaldón. En la figura (6.50) se puede ver el desplazamiento de la cresta de la presa vs la relación *overtopping* tanto para el modelo propuesto en esta tesis como para el modelo propuesto por Comi et al. [2009]. En ambos modelos

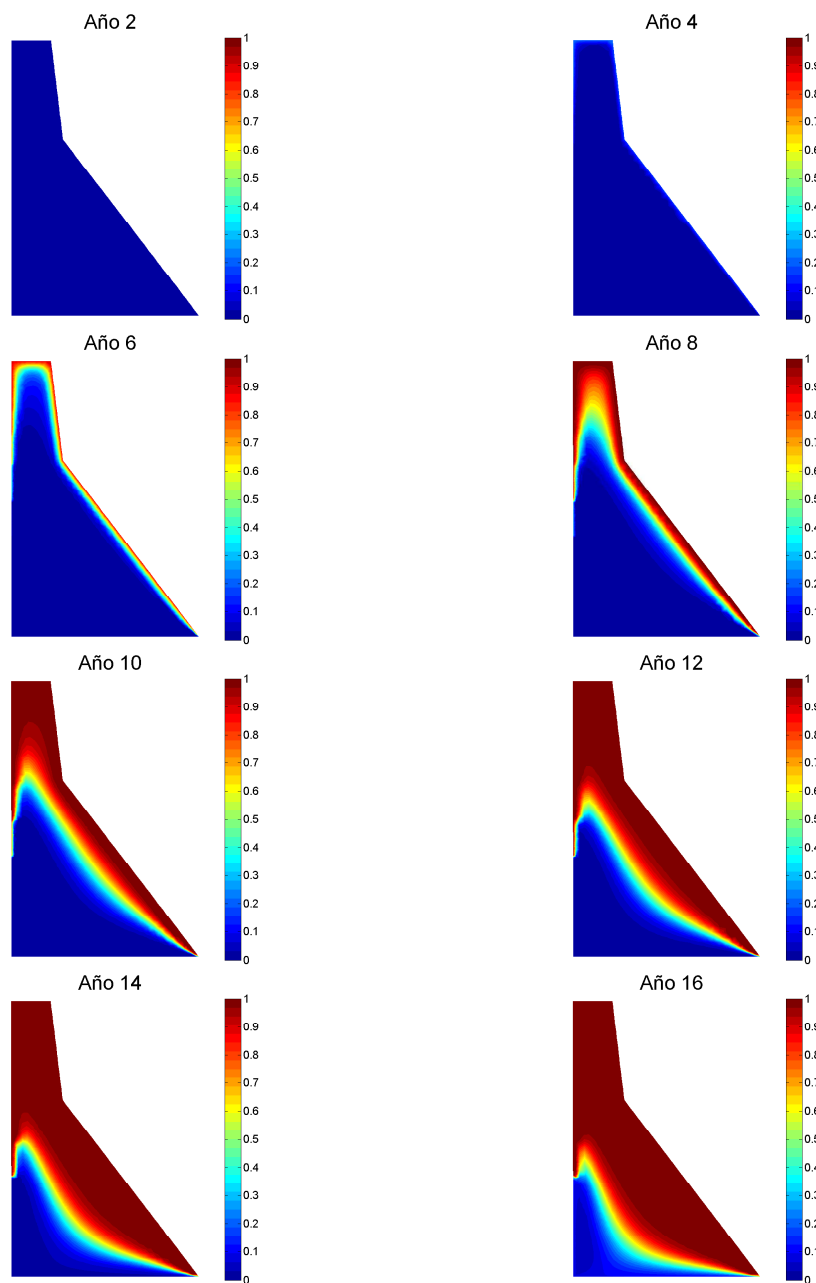


FIGURA 6.43: Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con temperaturas aumentadas en un 20 %.

se paresia como la relación *overtopping* disminuye, y los emplazamientos de la cresta se incrementan al aumentar el progreso de la RAS. Aunque entre las curvas sin RAS y con RAS ambos modelos muestran un decaimiento similar de la relación *overtopping*, se ve una leve diferencia atribuida a los distintos modelos mecánicos empleados en ambos trabajos.

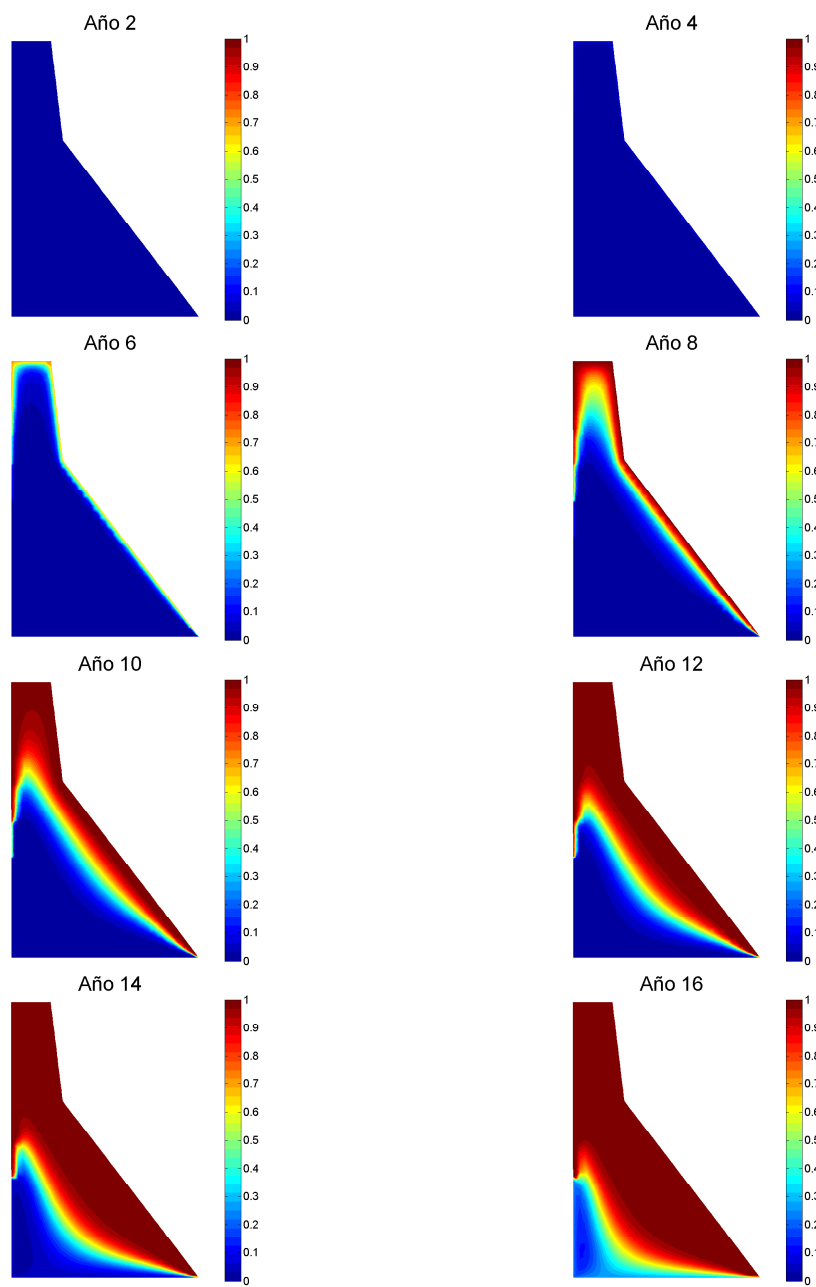


FIGURA 6.44: Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con τ_c y τ_l disminuidos en un 20%.

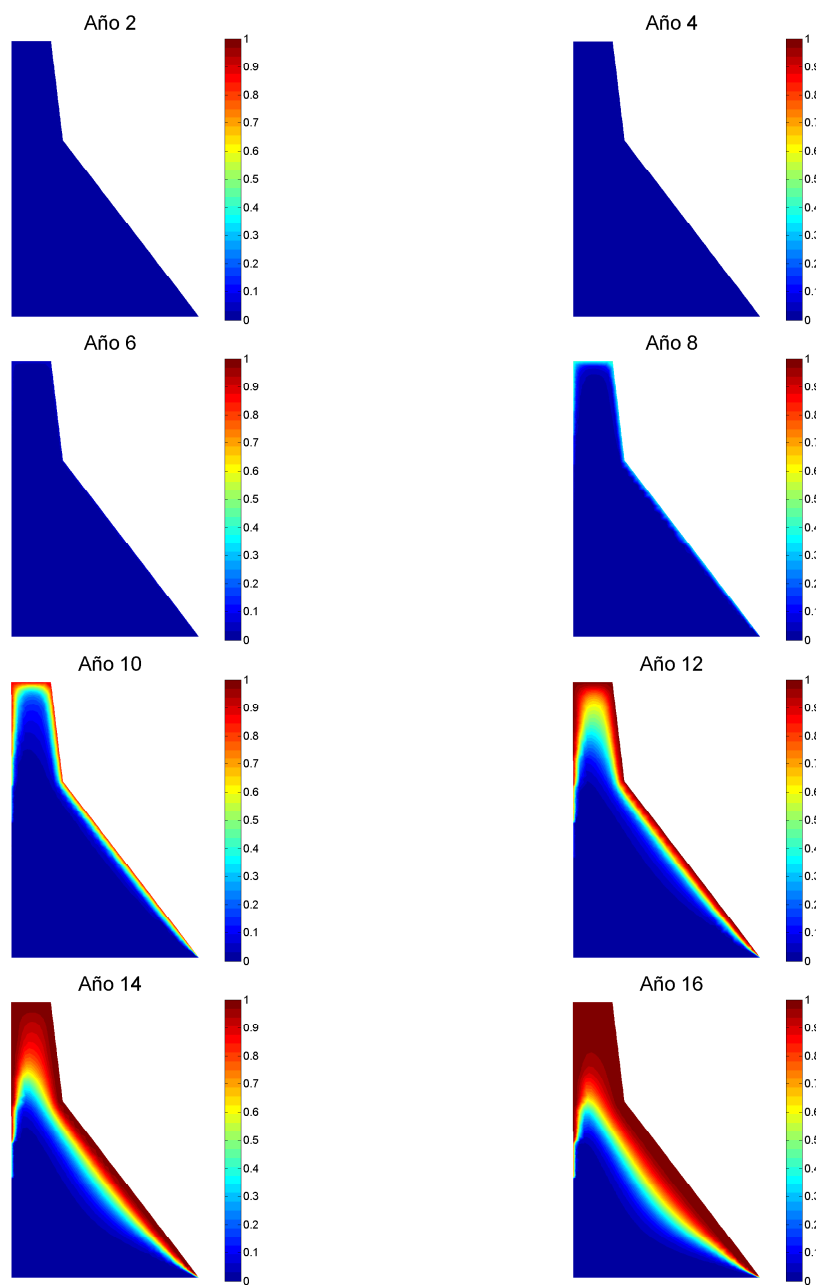


FIGURA 6.45: Distribución de ξ en el cuerpo de la presa, con τ_c y τ_l aumentados en un 20%.

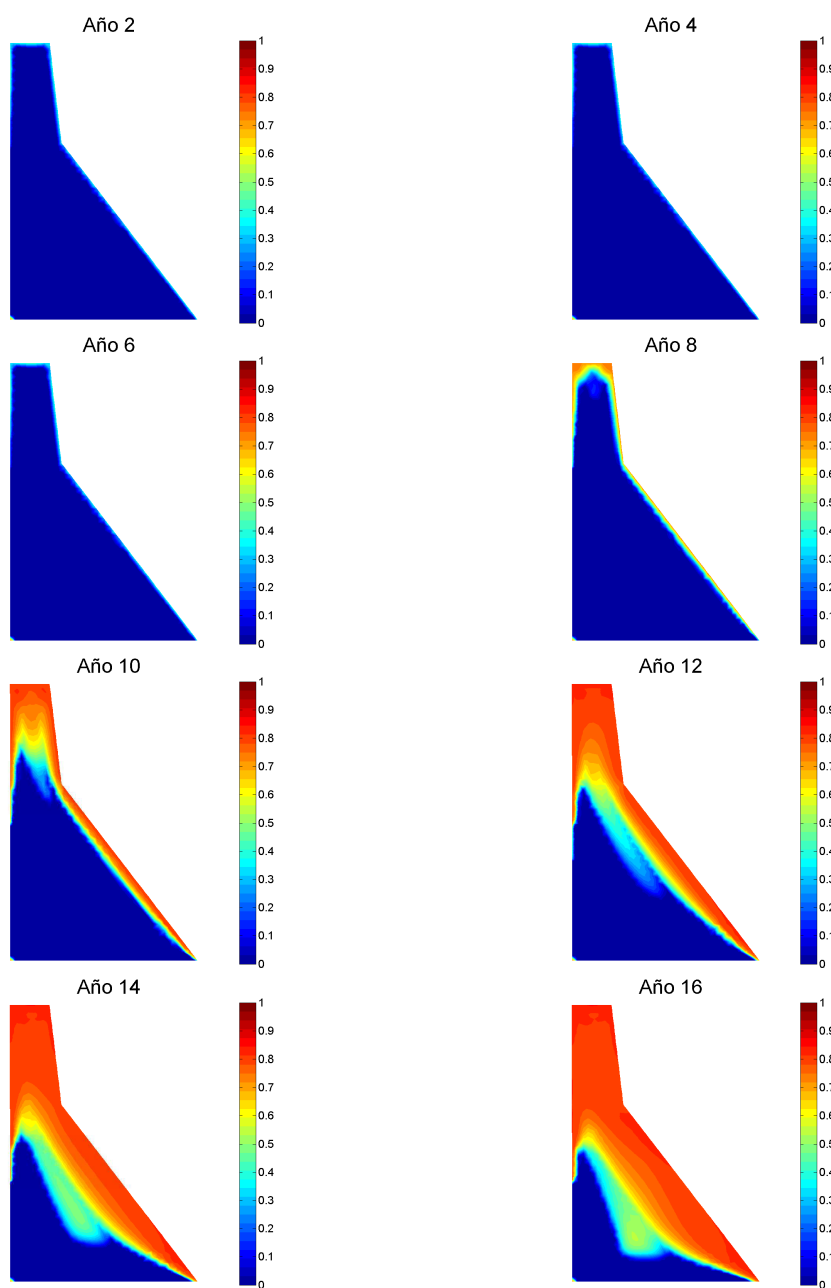


FIGURA 6.46: Distribución de daño en el cuerpo de la presa.

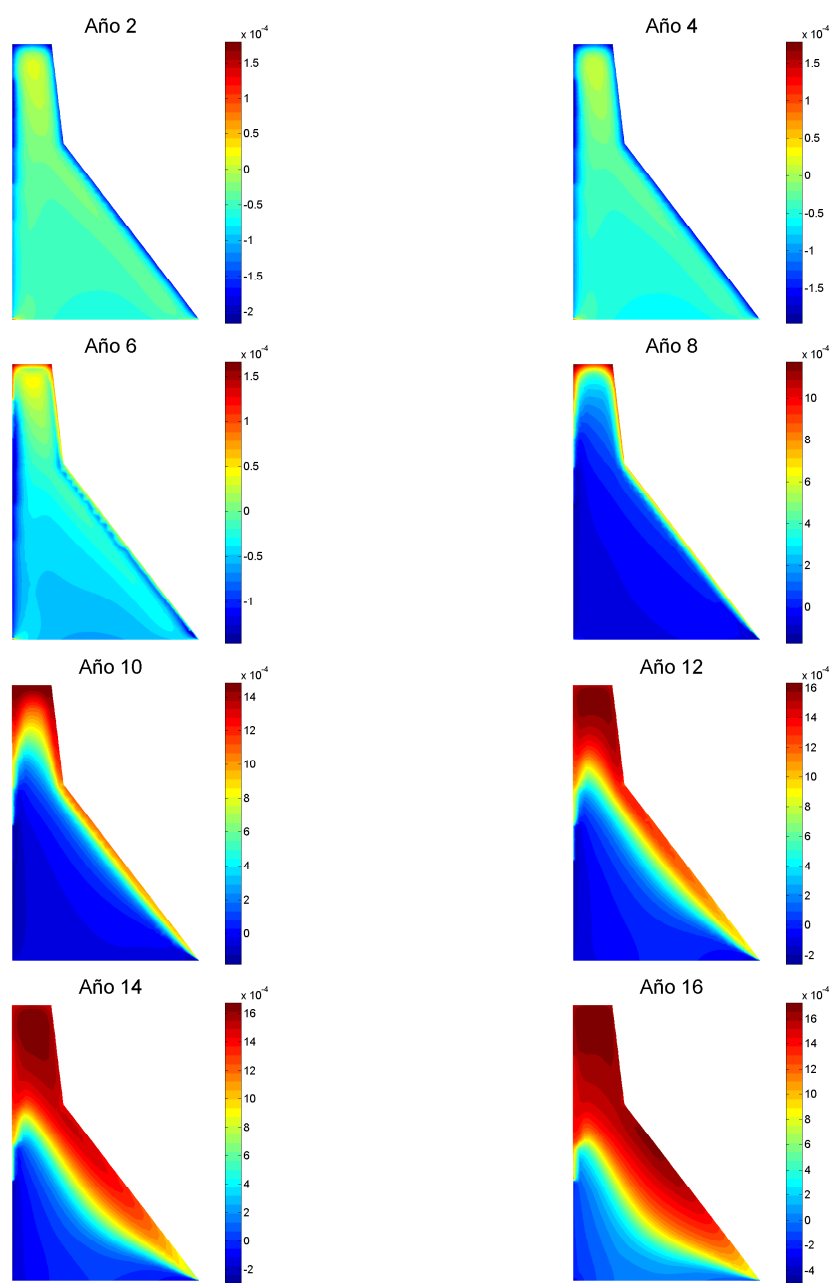


FIGURA 6.47: Distribución de deformaciones volumétricas en el cuerpo de la presa.

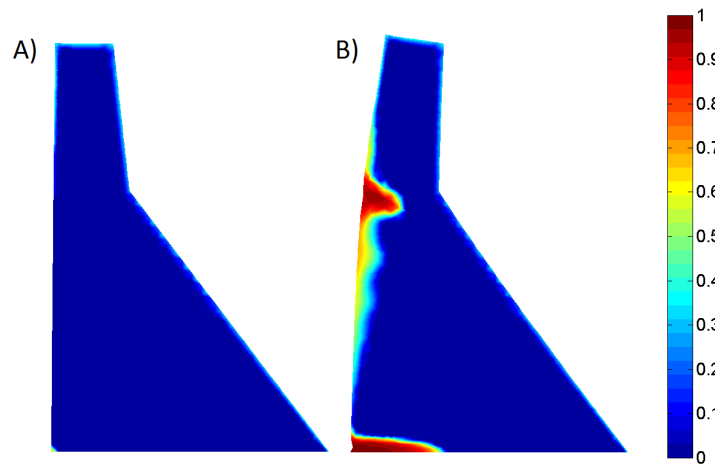


FIGURA 6.48: Distribución de daño en el ensayo *overtopping* en el año 0. A) comienzo de ensayo, B) fin de ensayo. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$.

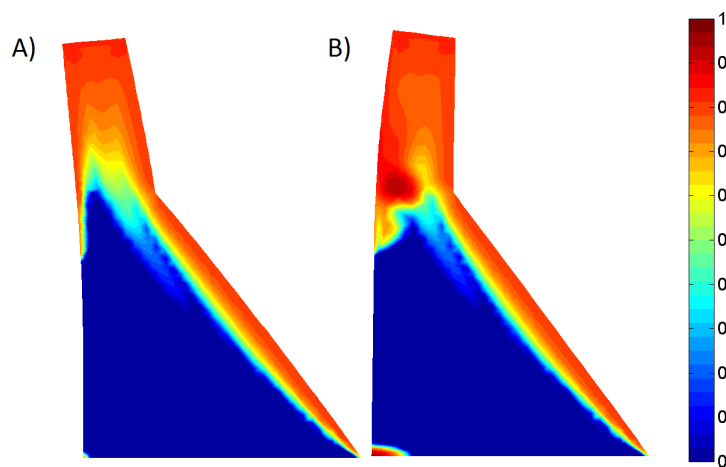


FIGURA 6.49: Distribución de daño en el ensayo *overtopping* en el año 12. A) comienzo de ensayo, B) fin de ensayo. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$.

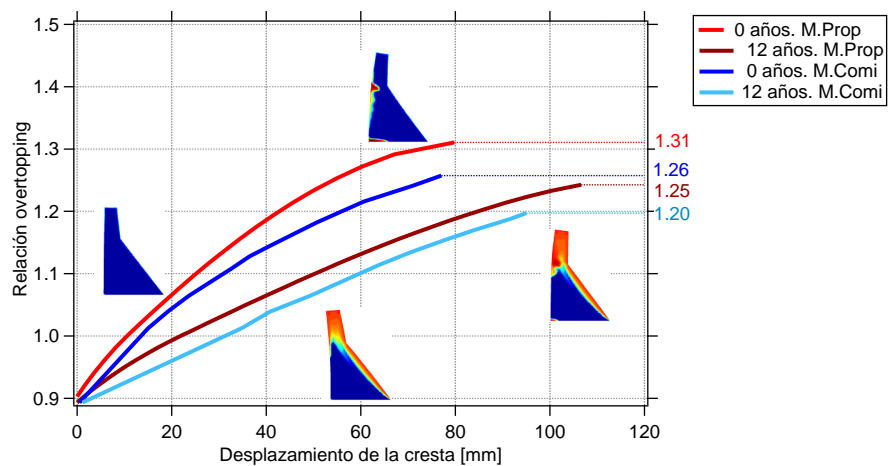


FIGURA 6.50: desplazamiento de cresta vs relación *overtopping* para esta inicial y para 12 años. Comparación entre el modelo propuesto y el modelo de Comi et al. [2009]. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se desarrolló un modelo constitutivo macroscópico adecuado para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS. Para formular este modelo se tuvo en cuenta dos aspectos fundamentales. Por un lado, se representó adecuadamente el comportamiento mecánico del material y por otro lado se incluyó el efecto químico en la formulación de tal modo de reproducir el daño que la RAS causa sobre las propiedades mecánicas. A continuación resumimos las principales conclusiones de este trabajo.

7.1. Conclusiones referidas al modelo mecánico

En esta tesis se genera un modelo mecánico adecuado para simular el comportamiento de un material cuasi-frágil como el hormigón. El modelo se formula en el marco de la Teoría de daño continuo y corresponde a un modelo de daño escalar. Dicho modelo incluye una variable de daño β que vale uno cuando el material se encuentra sano y vale cero cuando el material se encuentra totalmente dañado. Interesados en simular la pérdida progresiva de la rigidez conforme aumenta la carga se encuentra que esto conduce inevitablemente a una respuesta con ablandamiento. El ablandamiento causa problemas produciendo desde el punto de vista matemático pérdida de elipticidad de las ecuaciones de equilibrio y desde el punto de vista numérico una fuerte dependencia de los resultados con la malla de elementos finitos con la que se decide resolver el problema. Para superar este problema en esta tesis se decide enriquecer la formulación del modelo con una cantidad no local: el gradiente espacial del daño. Esta cantidad regulariza el

problema excitando a una cierta cantidad de puntos vecinos a la zona donde se produce daño haciendo que esta misma cantidad de puntos colaboren o intervengan el proceso de daño de manera independiente a la malla con la que se decida resolver el problema. Respecto a la formulación del modelo generado y su evaluación mediante los distintos ejemplos realizados se obtiene las siguientes conclusiones:

- La resolución del problema mediante el método de descomposición coordinación resulta satisfactoria. Para esto se introduce en la formulación una variable auxiliar al daño, que toma la parte local de la formulación, y permite la obtención de una ecuación de evolución del daño sencilla de abordar. Esta ecuación de evolución del daño, junto con las otras ecuaciones de equilibrio del modelo, se derivan a partir de un funcional que representa la energía potencial total del problema. Este funcional resulta mixto, pues a parte de la variable tradicionales, como el campo de desplazamiento \mathbf{u} y el daño β , depende de la nueva variable auxiliar α y los multiplicadores de Lagrange λ , encargados de forzar la igualdad $\beta = \alpha$.
- La forma en la que se incluye un criterio de daño adecuado para simular el comportamiento del hormigón como lo es el criterio de Lubliner et al. [1989], resulta satisfactoria. Este modo de incluir dicho criterio conduce a una forma explícita de la función de daño, a diferencia del trabajo de Lorentz & Kazymyrenko [2014], donde la función de daño queda definida de modo implícito por medio del criterio elegido. La manera en la que se introduce el criterio de daño en este trabajo conduce a expresiones que resultan más sencillas de linealizar para su posterior implementación numérica.
- El modo en el que se incluye el método arc-length en la formulación, para poder realizar pasos de carga donde se controla la cantidad de energía disipada, resulta satisfactorio. El método arc-length que se utiliza en esta tesis se basa en el trabajo de Verhoosel et al. [2009], quien propone utilizar la energía disipada en un paso de carga como un indicador global para controlar dicho paso. Este indicador global permite encontrar el camino de equilibrio sin el conocimiento previo de la zona dañada. En esta tesis se adaptó dicha propuesta a la formulación del modelo no local. La incorporación de este criterio, que permite controlar la disipación de energía, a un modelo de daño no local resulta algo novedoso de lo cual no se

encuentran precedentes en el estado del arte. Esta propuesta es probada por una serie de ejemplos numéricos que pueden encontrarse en la sección (4).

- Como se observa en el ejemplo realizado a la probeta trapecial de la sección (4.1), la zona donde se concentra el daño para un problema resultó con idénticos parámetros materiales, condiciones de carga y de apoyo, pero distintas mallas es igual en todos los casos y queda definida por el semiancho de localización D . Esto prueba la eficiencia de la incorporación del gradiente del daño en la formulación, logrando independizar los resultados obtenidos de la malla.
- En ejemplo de la probeta trapecial de la sección (4.1) se puede observar que cuando se define el semiancho de localización D se debe asegurarnos de que al menos un elemento quede contenido en dicho semiancho para poder obtener convergencia.
- En el ejemplo de la viga entallada de la sección (4.3) se puede observar que, al incrementar la energía de fractura en las vigas, se incrementan los picos de las curvas carga desplazamiento y se pasa de una respuesta donde se presenta rama de snap-back a situaciones donde la rama de snap-back desaparece. En cuanto a la incidencia que tiene la energía de fractura en la distribución de daño de la fisura, se observa que a mayor energía de fractura la zona de transición de daño nulo a daño máximo se incrementa extendiéndose desde la cabeza de la fisura y en sentido longitudinal a la misma.
- En el ejemplo de la viga entallada de la sección (4.3) se puede observar que al incrementar el valor de los parámetros de la función de rigidez p y q , se disminuye el pico en la curva carga desplazamiento. En cuanto al comportamiento postpico, se nota en el caso de p , que el mismo es menos frágil pudiendo pasarse de una respuesta donde se presenta snap-back a otra donde desaparece dicha rama. En cuanto al comportamiento postpico para el caso del parámetro q , se nota que al incrementarlo, la rama de snap-back se hace más pronunciada. En cuanto a la distribución de daño en la fisura, se nota que la modificación de dichos parámetros cambia la configuración de daño transversal a la fisura. A medida que se incrementan los parámetros, la transición entre la zona dañada y no dañada se hace más brusca.
- En el ejemplo de la viga con carga excéntrica de la sección (4.4) se puede apreciar que el modelo es capaz de reproducir de modo satisfactorio una trayectoria de fisura curva.

- En el ejemplo anterior también se muestra que las respuesta no se ve afectada por la orientación de la malla y por la elección del semiancho de localización D , siempre y cuando este valore resulte mucho menor que las dimensiones del problema a resolver.
- En el ensayo de corte puro sobre una probeta cúbica entallada de la sección (4.5) se aprecia cómo el ángulo que toma la fisura varía según la relación entre resistencia a tracción y compresión ℓ_1 . El ángulo respecto a la horizontal vale 0° para $\ell_1 = 1$ y vale aproximadamente 45° cuando ℓ_1 tiende a infinito. También se notan muy pocas variaciones en este ángulo a partir de $\ell_1 = 100$.
- En cuanto a las curvas de disipación acumulada evaluadas tanto con la fuerza termodinámicamente asociada al daño V como con su reemplazo V^* , se nota que las mismas son siempre crecientes y resultan bastante aproximadas una de otra.

7.2. Conclusiones referidas al modelo químico

En esta tesis se realizó la formulación de un modelo adecuado para reproducir el comportamiento del hormigón afectado por RAS, tomando como base el modelo mecánico realizado en el capítulo (3). Para representar el comportamiento constitutivo del material se tiene en cuenta la teoría de Biot. De este modo el material hormigón afectado por RAS se considera en la macro escala como la homogeneización de un material formado por dos fases: sólido y fase gel. El efecto químico también es tenido en cuenta mediante una modificación de la función de daño que permite reproducir degradación del material aún en el caso en el que sólo se experimente expansión libre, producto de la RAS. Se proponen también expresiones para la degradación de propiedades del material como lo son la energía de fractura y la resistencia a tracción por efectos de la RAS. Luego, el modelo es probado en la reproducción de distintos ensayos de laboratorio y también se prueba la formulación completa en la reproducción del comportamiento de una presa de gravedad de hormigón afectada por RAS. De la formulación del modelo y de los ejemplos reproducidos, se extraen las siguientes conclusiones.

- El uso de la Teoría de Biot para representar el comportamiento constitutivo del hormigón afectado por RAS resulta satisfactorio.

- El cálculo del progreso de la RAS por medio de las propuestas realizadas por [Ulm et al. \[2000\]](#) y [Larive \[1997\]](#) resulta satisfactoria.
- El esquema simplificado para la resolución del problema destinado a la reproducción de los ensayos de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#) en la sección (6.1), resulta satisfactorio. En este problema se representa el comportamiento de cilindros de hormigón reactivo sometidos a distintos estados de tensiones producidos por: expansión libre, carga axial de compresión, confinamiento pasivo por una camisa de acero y combinación de carga axial de compresión y confinamiento pasivo.
- En la reproducción de los ensayos de [Multon & Toutlemonde \[2006\]](#) de la sección (6.1), se ve un mejor ajuste por parte del modelo en los casos de expansión libre y confinamiento pasivo, mientras que en el caso de confinamiento por la carga de compresión axial se observan dificultades para reproducir los resultados experimentales por parte del modelo. Esto se debe a la influencia del creep en los resultados experimentales.
- En la sección (6.1) se realizó la reproducción numérica de probetas cilíndricas sometidas a distintas situaciones de confinamiento (carga axial de compresión y confinamiento pasivo por medio de camisa de acero). Se observa como al actuar solo uno de estos confinamientos, y al ir aumentando el valor del mismo, el daño en la probeta aparece a edades más tempranas. Esto se debe a que la dirección no confinada se ve más afectada en este caso. Al actuar los dos confinamientos de modo simultáneo se ve, en una primera instancia, un retardo en la aparición del daño hasta que el confinamiento deja de ser efectivo y se tiene nuevamente aparición de daño en edades más tempranas.
- En la sección (6.2) se ve la reproducción de ensayos de flexión a vigas de hormigón reactivo realizadas experimentalmente en el trabajo de [Giaccio et al. \[2008\]](#). En la reproducción de este tipo de ensayos se ve que las modificaciones realizadas en la formulación para tener en cuenta el efecto de la RAS son compatibles con la formulación variacional y permite una posterior implementación con el método de elementos finitos de forma satisfactoria.
- En la reproducción de los ensayos de flexión se ve que en la propuesta originalmente realizada por [Comi et al. \[2009\]](#) para tener en cuenta el efecto de la RAS se hace

necesario introducir la degradación por parte del efecto químico de la energía de fractura G_f y la resistencia tracción f_t .

- Se decide modificar la resistencia a tracción del material por efectos de la RAS mediante la propuesta realizada en [Saouma & Perotti \[2006\]](#) y hacer extensiva esta propuesta para la energía de fractura. En la propuesta de [Saouma & Perotti \[2006\]](#) se modifica la resistencia a tracción por medio del progreso de la RAS ξ . Al hacer esta modificación se observa un buen ajuste en el caso de un hormigón con reacción rápida como los es el $R2$, mientras que en un hormigón con reacción más lenta como el $R4$ el ajuste no resulta muy bueno.
- En la reproducción de los ensayos de flexión se decide mantener la modificación de la resistencia a tracción por la propuesta de [Saouma & Perotti \[2006\]](#), mientras que se decide modificar la energía de fractura por medio del daño químico obtenido en un ensayo de expansión libre. Esta última propuesta resulta más general obteniendo un ajuste satisfactorio tanto en el caso de hormigón con reacción rápida y reacción lenta.
- En la sección (6.3) se realiza la reproducción del comportamiento de una presa de gravedad de hormigón afectada por RAS. En este ejemplo se tiene posibilidad de probar de manera integral el modelo propuesto para hormigón afectado por RAS, dado a que aparte de la acción mecánica y química, se incluye el problema térmico producido por la variación de la temperatura en el cuerpo de la presa a lo largo del año. Para resolver este problema, en una primera instancia, se resuelve el problema térmico, obteniendo el campo de temperaturas en el cuerpo de la presa a lo largo de 16 años. Luego, con los datos del problema térmico, se obtiene la variable que mide el progreso de la RAS en el cuerpo de la presa. Finalmente, usando como datos de entrada los campos de temperatura y progreso de la RAS, se resuelve el problema mecánico. Este último problema se resuelve en dos situaciones. En primer lugar se realiza la simulación del comportamiento mecánico en servicio a lo largo de 16 años. Luego, se realiza un análisis overtopping, el cual consiste en elevar el nivel del agua hasta alcanzar la falla, en dos instantes de tiempo: uno sin efectos de RAS (0 años) y otro con efectos de RAS (12 años). Del problema térmico se observa como las condiciones de borde en temperatura variable a lo largo del año modifican la temperatura en el cuerpo de la presa también a lo largo del año.

Esto muestra que es este tipo de problema es indispensable considerar la variación de temperatura en el cálculo del progreso de la RAS. En cuanto al progreso de la RAS se destaca el retraso que tiene la misma ante la presencia de temperaturas bajas como en la base de la presa. En cuanto al ensayo *overtopping* se ve como la relación decae a los 12 años respecto de la obtenida a los 0 años, producto del progreso de la RAS.

7.3. Sugerencias para trabajos futuros

- Mejorar la forma de introducción del criterio de daño de tal manera de poder representar correctamente la falla en compresión triaxial.
- Extender el modelo al contexto de grandes deformaciones.
- Implementar en el modelo un método de malla adaptativa, necesario en este tipo de modelos que requiere gran cantidad de elementos en la zona donde se propaga el daño.
- Mejorar el modelo que representa el comportamiento del hormigón incluyendo efectos que dependen del tiempo como el creep y la retracción.
- Introducir en el cálculo del progreso de la RAS variables como el grado de saturación, estado de tensiones, tamaño de los agregados, etc.
- Realizar simulaciones numéricas en 3D tanto con el modelo mecánico, como con el modelo para RAS.
- Implementar el modelo para simular el comportamiento del hormigón afectado por RAS en un código que permita modificaciones, mediante rutinas de usuario por ejemplo, con el fin de poder evaluar estructuras más complejas.
- Aplicar el modelo para reproducir la respuesta de estructuras existentes en la Argentina y otros lugares del mundo.

7.4. Indicadores académicos

Para finalizar este capítulo se enumera en una lista la producción científica generada por el autor durante el desarrollo del período doctoral relacionada con la presente tesis:

Revistas Internacionales

- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Non-local damage model to simulate concrete behavior. to be Submitted.
- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Non-local damage model to simulate the behavior of the concrete affected by alkali-silica reaction. to be Submitted.

Congresos Nacionales e Internacionales

- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Método arc-length basado en el control de disipación de energía en un modelo de daño no local; VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, 2017.
- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Análisis termo-químico de una presa de gravedad de hormigón; VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, 2017.
- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Modelo no local de daño escalar para simular el comportamiento del hormigón; XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, 2016.
- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Modelo no local de daño para simular el comportamiento del hormigón afectado por reacción álcali sílice; XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, 2016.
- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; “Revisión de modelos constitutivos macroscópicos para hormigón afectado por reacción álcali sílice (RAS)”; VII de la Asociación Argentina de Tecnología del Hormigón , 2016.
- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Modelo no local de daño para hormigón afectado por reacción álcali sílice (RAS); XXI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, 2014.

- Almenar, M.E., Luege, M., Orlando, A.; Modelo de daño escalar para hormigón afectado por reacción álcali sílice; XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, 2013.

Bibliografía

- Alasali, M. M. & Malhotra, V. M. (1991). *ACI Materials Journal*, 88(2).
- Andrieux, S., Joussemet, M., & Lorentz, E. (1996). A class of constitutive relations with internal variable derivatives. derivation from homogenization and initial value problem. *Le Journal de Physique IV*, 06(C6), 463–472.
- Atkins, P. W. & De Paula, J. (2006). *Atkins' Physical chemistry*. Oxford University Press.
- Bangert, F., Kuhl, D., & Meschke, G. (2004). Chemo-hygro-mechanical modelling and numerical simulation of concrete deterioration caused by alkali-silica reaction. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 28(78), 689–714.
- Bazant, Z. P., Belytschko, T. B., & Chang, T.-P. (1984). Continuum theory for strain-softening. *J. Eng. Mech.*, 110(12), 1666–1692.
- Bazant, Z. P. & Pijaudier-Cabot, G. (1987). *Nonlocal Damage Theory*. American Society of Civil Engineers.
- Bazant, Z. P., Zi, G., & Meyer, C. (2000). Fracture mechanics of asr in concretes with waste glass particles of different sizes. *J. Eng. Mech.*, 126(3), 226–232.
- Benallal, A., Billardon, R., & Geymonat, G. (1993). Bifurcation and localization in rate-independent materials. some general considerations. *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*, (pp. 1–44).
- Brauner, C. M., Nicolaenco, B., & Fremond, M. (1986). Homographic approximations of free boundary problems characterized by variational inequalities. *Sci. Comput. Adv. Math. Suppl. Stud.*, 10, 119–151.

- Carpinteri, A. (1989). Softening and snap-back instability in cohesive solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(7), 1521–1537.
- Chambon, R., Caillerie, D., & Matsushima, T. (2001). Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, 38(46-47), 8503–8527.
- Charpin, LaurentEhrlacher, A. (2012). A computational linear elastic fracture mechanics-based model for alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 42(4), 613–625.
- Coleman, B. D. & Gurtin, M. E. (1967). Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47(2), 597–613.
- Coleman, B. D. & Noll, W. (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13(1), 167–178.
- Comby-Peyrot, I., Bernard, F., Bouchard, P.-O., Bay, F., & Garcia-Diaz, E. (2009). Development and validation of a 3d computational tool to describe concrete behaviour at mesoscale. application to the alkali-silica reaction. *Computational Materials Science*, 46(4), 1163–1177.
- Comi, C. (2001a). A non-local model with tension and compression damage mechanisms. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(1), 1–22.
- Comi, C., Fedele, R., & Perego, U. (2009). A chemo-thermo-damage model for the analysis of concrete dams affected by alkali-silica reaction. *Mechanics of Materials*, 41(3), 210–230.
- Comi, C., Kirchmayr, B., & Pignatelli, R. (2012). Two-phase damage modeling of concrete affected by alkali-silica reaction under variable temperature and humidity conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 49(23-24), 3367–3380.
- Comi, ClaudiaPerego, U. (2001b). Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 38(36-37), 6427–6454.
- Coussy, O. (2004). *Poromechanics*. Wiley.

- de Borst, R. (1987). Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. *Computers and Structures*, 25(2), 211–224.
- Dent Glasser, L. (1979). Osmotic pressure and the swelling of gels. *Cement and Concrete Research*, 9(4), 515 – 517.
- Dent Glasser, L. & Kataoka, N. (1981). The chemistry of ‘alkali-aggregate’ reaction. *Cement and Concrete Research*, 11(1), 1 – 9.
- Diamond, S. (2000). Chemistry and other characteristics of asr gels. *Proceedings of the 11th International Conference on Alkali-Aggregate Reaction in Concrete*, (pp. 31–41).
- Dron, R. & Brivot, F. (1993). Thermodynamic and kinetic approach to the alkali-silica reaction. part 2: Experiment. *Cement and Concrete Research*, 23(1), 93–103.
- Drugan, W. & Willis, J. (1996). A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(4), 497–524.
- Dunant, Cyrille F. Scriver, K. L. (2010). Micro-mechanical modelling of alkali-silica-reaction-induced degradation using the amie framework. *Cement and Concrete Research*, 40(4), 517–525.
- Fernandes, I. (2009). Composition of alkali-silica reaction products at different locations within concrete structures. *Materials Characterization*, 60(7), 655 – 668.
- Fernandes, I., Noronha, F., & Teles, M. (2007). Examination of the concrete from an old portuguese dam: Texture and composition of alkali-silica gel. *Materials Characterization*, 58(11-12), 1160–1170.
- Fortin, M. & Glowinski, R. (1983). *Augmented Lagrangian methods*. North-Holland Pub. Co., 1 edition.
- Frémond, M. & Nedjar, B. (1996). Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8), 1083–1103.
- Gawin, D., Pesavento, F., & Schrefler, B. A. (2007). Modelling creep and shrinkage of concrete by means of effective stresses. *Materials and Structures*, 40(6), 579–591.

- Geers, M. G. D. (1999a). Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. part i-the subplane control approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(2), 177–204.
- Geers, M. G. D. (1999b). Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. part ii-comparative performance analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(2), 205–230.
- Germain, P., Nguyen, Q. S., & Suquet, P. (1983). Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4b), 1010–1020.
- Giaccio, G., Zerbino, R., Ponce, J., & Batic, O. (2008). Mechanical behavior of concretes damaged by alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 38(7), 993–1004.
- Gray, W. & Schrefler, B. (2007). Analysis of the solid phase stress tensor in multiphase porous media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(4), 541–581.
- Grimal, E., Sellier, A., Pape, Y. L., & Bourdarot, E. (2008a). Creep, shrinkage, and anisotropic damage in alkali-aggregate reaction swelling mechanism-part i: A constitutive model. *ACI Materials Journal*, 105(3), 227–235.
- Grimal, E., Sellier, A., Pape, Y. L., & Bourdarot, E. (2008b). Creep, shrinkage, and anisotropic damage in alkali-aggregate reaction swelling mechanism–part ii: Identification of model parameters and application. *ACI Materials Journal*, 105(3), 236–242.
- Gutiérrez, M. A. (2003). Energy release control for numerical simulations of failure in quasi-brittle solids. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20(1), 19–29.
- Haha, M. B., Gallucci, E., Guidoum, A., & Scrivener, K. (2007). Relation of expansion due to alkali silica reaction to the degree of reaction measured by sem image analysis. *Cement and Concrete Research*, 37(8), 1206–1214.
- Hansen, W. C. (1944). Studies relating to the mechanism by which the alkali-aggregate reaction produces expansion in concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, 15, 213–227.
- Huang, M. & Pietruszczak, S. (1999). Modeling of thermomechanical effects of alkali-silica reaction. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(4), 476–485.

- Karakurt, CenkTopçu, I. B. (2011). Effect of blended cements produced with natural zeolite and industrial by-products on alkali-silica reaction and sulfate resistance of concrete. *Construction and Building Materials*, 25(4), 1789–1795.
- Kawamura, M. & Fuwa, H. (2003). Effects of lithium salts on asr gel composition and expansion of mortars. *Cement and Concrete Research*, 33(6), 913–919.
- Knudsen, T. & Thaulow, N. (1975). Quantitative microanalyses of alkali-silica gel in concrete. *Cement and Concrete Research*, 5(5), 443–454.
- Larive, C. (1997). *Apports combinés de l'expérimentation et de la modélisation à la compréhension de l'alcali-réaction et de ses effets mécaniques*. Theses, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Lemarchand, E., Dormieux, L., & Ulm, F.-J. (2005). Micromechanics investigation of expansive reactions in chemoelastic concrete. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 363(1836), 2581–2602.
- Léger, P., Côté, P., & Tinawi, R. (1996). Finite element analysis of concrete swelling due to alkali-aggregate reactions in dams. *Computers and Structures*, 60(4), 601–611.
- Lorentz, E. & Andrieux, S. (2003). Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures*, 40(12), 2905–2936.
- Lorentz, E. & Benallal, A. (2005). Gradient constitutive relations: numerical aspects and application to gradient damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(50-52), 5191–5220.
- Lorentz, E. & Godard, V. (2011). Gradient damage models: Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(21-22), 1927–1944.
- Lorentz, E. & Kazymyrenko, K. (2014). Application of a nonlocal damage law to model concrete fracture. In *Computational Modelling of Concrete Structures - Proceedings of EURO-C 2014*, volume 1 (pp. 209–217).
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., & Oñate, E. (1989). A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3), 299–326.

- Mather, B. (1999). How to make concrete that will not suffer deleterious alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 29(8), 1277 – 1280.
- Mazars, J. (1986). A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6), 729–737.
- Mazars, J. & Pyaudier-Cabot, G. (1989). Continuum damage theory-application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(2), 345–365.
- McGowan, J. K. & Vivian, H. E. (1952). Studies in cement-aggregate reaction: Correlation between crack development and expansion of mortars. *Australian Journal of Applied Science*, 3, 228–232.
- Miehe, C., Welschinger, F., & Hofacker, M. (2010). Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field fe implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10), 1273–1311.
- Muhlhaus, H. & Alfantis, E. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28(7), 845–857.
- Multon, S., Sellier, A., & Cyr, M. (2009). Chemo–mechanical modeling for prediction of alkali silica reaction (asr) expansion. *Cement and Concrete Research*, 39(6), 490–500.
- Multon, S. & Toutlemonde, F. (2006). Effect of applied stresses on alkali–silica reaction-induced expansions. *Cement and Concrete Research*, 36(5), 912–920.
- Multon, S. & Toutlemonde, F. (2010). Effect of moisture conditions and transfers on alkali silica reaction damaged structures. *Cement and Concrete Research*, 40(6), 924–934.
- Nedjar, B. (2001). Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 38(30-31), 5421–5451.
- Nedjar, B. (2002). A theoretical and computational setting for a geometrically nonlinear gradient damage modelling framework. *Computational Mechanics*, 30(1), 65–80.
- Peerlings, R., De Borst, R., Brekelmans, W. A. M., & De Vree, J. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19), 3391–3403.

- Pesavento, F., Gawin, D., & Schrefler, B. A. (2008). Modeling cementitious materials as multiphase porous media: theoretical framework and applications. *Acta Mechanica*, 201(1-4), 313–339.
- Pesavento, F., Gawin, D., Wyrzykowski, M., Schrefler, B. A., & Simoni, L. (2012). Modeling alkali–silica reaction in non-isothermal, partially saturated cement based materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225-228, 95–115.
- Pietruszczak, S. (1996). On the mechanical behaviour of concrete subjected to alkali-aggregate reaction. *Computers and Structures*, 58(6), 1093 – 1097.
- Pignatelli, R., Comi, C., & Monteiro, P. J. (2013). A coupled mechanical and chemical damage model for concrete affected by alkali–silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 53, 196–210.
- Pijaudier-Cabot, G. & Burlion, N. (1996). Damage and localisation in elastic materials with voids. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 1(2), 129–144.
- Ponce, J. & Batic, O. (2006). Different manifestations of the alkali-silica reaction in concrete according to the reaction kinetics of the reactive aggregate. *Cement and Concrete Research*, 36(6), 1148 – 1156.
- Powers, T. C. & Steinour, H. H. (1955). An interpretation of some published researchers on alkali-aggregate reaction. part 2—a hypothesis concerning safe and unsafe reactions with reactive silica in concrete. *ACI Journal Proceedings*, 51, 785–812.
- Poyet, S. (2003). *Study of Alkali-Silica Reaction affected concrete structures: experimental approach and multi-scale numerical simulations in a variable hydro-chemo-mechanical environment*. Theses, Université de Marne la Vallée. Rapporteurs : Franz-Josef Ulm et Erick Ringot
President du jury : Karen Scrivener
Jury : Francois Toutlemonde, Genevieve Thevenin-Foray, Eric Bourdarot, Bruno Capra et Alain Sellier.
- Poyet, S., Sellier, A., Capra, B., Foray, G., Torrenti, J.-M., Cognon, H., & Bourdarot, E. (2007). Chemical modelling of alkali silica reaction: Influence of the reactive aggregate size distribution. *Materials and Structures*, 40(2), 229–239.
- Sachlová, S., Prikryl, R., & Pertold, Z. (2010). Alkali-silica reaction products: Comparison between samples from concrete structures and laboratory test specimens. *Materials Characterization*, 61(12), 1379–1393.

- Saouma, V. & Perotti, L. (2006). Constitutive model for alkali-aggregate reactions. *ACI Materials Journal*, 103(3), 194–202.
- Saouma, V. E., Martin, R. A., Hariri-Ardebili, M. A., & Katayama, T. (2015). A mathematical model for the kinetics of the alkali–silica chemical reaction. *Cement and Concrete Research*, 68, 184 – 195.
- Scrivener, Karen L. Monteiro, P. J. M. (1994). The alkali-silica reaction in a monolithic opal. *Journal of the American Ceramic Society*, 77(11), 2849–2856.
- Sellier, A., Bourdarot, E., Multon, S., Cyr, M., & Grimal, E. (2009). Combination of structural monitoring and laboratory tests for assessment of alkali-aggregate reaction swelling: Application to gate structure dam. *ACI Materials Journal*, 106(3), 281–290.
- Shehata, M. H. & Thomas, M. D. A. (2000). The effect of fly ash composition on the expansion of concrete due to alkali–silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 30(7), 1063 – 1072.
- Stanton, T. E. (1941). *Expansion of concrete through reaction between cement and aggregate*, by Thomas E. Stanton. American Society of Civil Engineers.
- Steffens, A., Li, K., & Coussy, O. (2003). Aging approach to water effect on alkali–silica reaction degradation of structures. *J. Eng. Mech.*, 129(1), 50–59.
- Suwito, A., Jin, W., Xi, Y., & Meyer, C. (2002). A mathematical model for the pessimum size effect of asr in concrete. *Concrete Science and Engineering*, 4(-), 23–34.
- Svedberg, T. & Runesson, K. (1997). A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *International Journal of Plasticity*, 13(6-7), 669–696.
- Thaulow, N., Jakobsen, U. H., & Clark, B. (1996). Composition of alkali silica gel and ettringite in concrete railroad ties: Sem-edx and x-ray diffraction analyses. *Cement and Concrete Research*, 26(2), 309 – 318.
- Triantafyllidis, N. & Aifantis, E. C. (1986). A gradient approach to localization of deformation. i. hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 16(3), 225–237.
- Ulm, F.-J., Coussy, O., Kefei, L., & Larive, C. (2000). Thermo-chemo-mechanics of asr expansion in concrete structures. *J. Eng. Mech.*, 126(3), 233–242.

- Van Genuchten, M. T. (1980). Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892–898.
- Verhoosel, C. V., Remmers, J. J. C., & Gutiérrez, M. A. (2009). A dissipation-based arc-length method for robust simulation of brittle and ductile failure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(9), 1290–1321.
- Voyiadjis, G. Z., Taqieddin, Z. N., & Kattan, P. I. (2008). Anisotropic damage-plasticity model for concrete. *International Journal of Plasticity*, 24(10), 1946 – 1965.
- Willam, K. J. & Warnke, E. P. (1975). Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 19(9).

Apéndice A

Álgebra tensorial

En este anexo se muestra las distintas operaciones de producto utilizadas en esta tesis como así también alguna de sus propiedades y las operaciones de gradiente, divergencia y Laplaciano. Se indica las operaciones mencionadas anteriormente en notación indicial, teniendo en cuenta que índices repetidos implica suma sobre dicho índice, $v_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i v_i$ y una coma delante de un índice implica derivada espacial respecto de dicho índice, $v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

A.1. Producto escalar entre vectores

El producto escalar entre los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , pertenecientes a los espacios al espacio vectorial \mathbb{V}^n , se denota como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ y calcula en notación indicial como $x_i y_i$. Sean $\mathbf{z} \in \mathbb{V}^n$ y α un escalar perteneciente a los reales \mathcal{R} , el producto escalar entre vectores satisface:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}, \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y}), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}^n, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}, \quad (\text{A.4})$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ es el vector nulo.

A.2. Producto entre tensor de segundo orden y vector

Sea \mathbf{A} un tensor de segundo orden perteneciente al espacio \mathbf{Lin}^n . El producto entre un tensor de segundo orden y un vector satisface:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}^n, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}^n, \forall \mathbf{A} \in \mathbf{Lin}^n, \quad (\text{A.5})$$

y se calcula en notación indicial como $y_i = A_{ij}x_j$.

Este producto también cumple con:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}), \quad (\text{A.7})$$

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}), \quad (\text{A.8})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}. \quad (\text{A.9})$$

A.3. Producto tensorial

El producto tensorial entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} pertenecientes a \mathbb{V}^n se denota como $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ y da como resultado un tensor de segundo orden de componentes $a_i b_j$ perteneciente a \mathbf{Lin}^n . Sean $\mathbf{c} \in \mathbb{V}^n$ y $\beta \in \mathcal{R}$, el producto tensorial satisface también:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}), \quad (\text{A.10})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})] = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{y}, \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\alpha\mathbf{x})] = \alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{c} \otimes (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{b}, \quad (\text{A.13})$$

$$(\alpha\mathbf{a}) \otimes (\beta\mathbf{b}) = \alpha\beta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \quad (\text{A.14})$$

$$[\mathbf{c} \otimes (\mathbf{a} + \mathbf{b})]\mathbf{x} = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}), \quad (\text{A.15})$$

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c}]\mathbf{x} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}), \quad (\text{A.16})$$

$$(\alpha\mathbf{a}) \otimes (\beta\mathbf{b})\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{a})(\beta\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}). \quad (\text{A.17})$$

A.4. Producto escalar entre tensores de segundo orden

El producto escalar entre tensores de segundo orden entre los tensores $\mathbf{A} \in \mathbf{Lin}^n$ y $\mathbf{B} \in \mathbf{Lin}^n$ se denota como $\mathbf{A}:\mathbf{B}$, y se calcula en notación indicial como $A_{ij}B_{ij}$. Sea $\mathbf{C} \in \mathbf{Lin}^n$, este producto escalar satisface también:

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{B}:\mathbf{A}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{A}:(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}:\mathbf{B} + \mathbf{A}:\mathbf{C}, \quad (\text{A.19})$$

$$\alpha(\mathbf{A}:\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}):\mathbf{B} = \mathbf{A}:(\alpha\mathbf{B}), \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{A}:\mathbf{A} \geq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbf{Lin}^n, \quad \mathbf{A}:\mathbf{A} = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{\Theta}, \quad (\text{A.21})$$

donde $\mathbf{\Theta}$ es el tensor nulo de segundo orden.

Sea $\mathbf{d} \in \mathbb{V}^n$, $\mathbf{e} \in \mathbb{V}^n$ y $\mathbf{f} \in \mathbb{V}^n$, este producto también cumple:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}), \quad (\text{A.22})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : [(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})] = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})[(\mathbf{ab}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{f})] = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}), \quad (\text{A.23})$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}:\mathbf{\delta}, \quad (\text{A.24})$$

donde $\text{tr}(\bullet)$ es el operador traza y $\mathbf{\delta}$ es el tensor identidad de segundo orden.

A.5. Gradiente, divergencia y Laplaciano

El gradiente del escalar α da como resultado un vector, se denota como $\nabla\alpha$ y se calcula en notación indicial como $\alpha_{,i}$. El gradiente de un vector \mathbf{a} da como resultado un tensor de segundo orden, se denota como $\nabla\mathbf{a}$ y se calcula en notación indicial como $a_{i,j}$. La divergencia del vector \mathbf{a} se denota como $\text{div}(\mathbf{a})$, da como resultado un escalar y se calcula en notación indicial como $a_{i,i}$. La divergencia del tensor de segundo orden \mathbf{A} se denota como $\text{div}(\mathbf{A})$, da como resultado un vector y se calcula en notación indicial

como $A_{ij,j}$. Algunas algunas operaciones de la divergencia y el gradiente son:

$$\nabla \mathbf{a} : \mathbf{b} = \nabla \mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \mathbf{b}, \quad (\text{A.25})$$

$$\nabla \mathbf{A} \mathbf{x} = di \mathbf{A} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{A} div(\mathbf{x}), \quad (\text{A.26})$$

$$div(\mathbf{A} \mathbf{x}) = di \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} : \nabla \mathbf{x}, \quad (\text{A.27})$$

El Laplaciano de un escalar β se calcula como la divergencia del gradiente, por lo tanto da como resultado un escalar, se calcula en notación indicial como $\beta_{,i,i}$ y se denota como:

$$div(\nabla \beta) = \nabla^2 \beta, \quad (\text{A.28})$$

Apéndice B

Tecnología de elementos finitos

En esta sección se expresa la forma de funciones de interpolación \mathbb{N}_e^u , \mathbb{N}_e^p y \mathbb{N}^λ , y sus derivadas \mathbb{B}_e^u y \mathbb{B}^λ , en coordenadas naturales (ver ecuación (3.62)). También se explica el modo de terminar la matriz Jacobiana, necesaria para expresar la integración numérica de coordenadas geométricas a naturales. Se indica finalmente la posición de los puntos de Gauss, en un dominio triangular, necesario para evaluar las distintas integrales que permitan obtener las matrices de rigidez y vectores de residuos.

B.1. Dominio en coordenadas geométricas y naturales

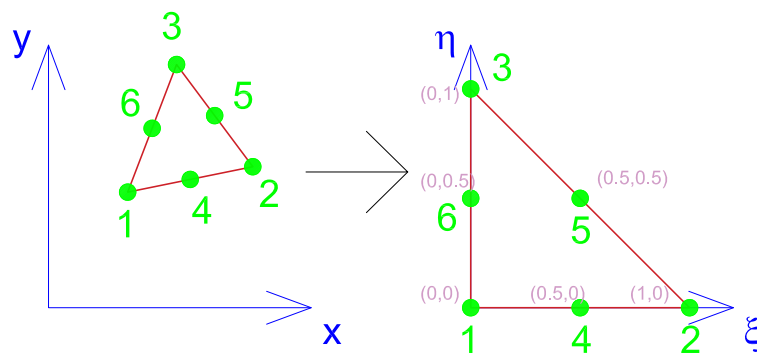


FIGURA B.1: Dominio del elementos triangular en coordenadas geométricas y naturales.

En la figura (B.1) se aprecia el dominio de un elementos triangular en coordenadas geométricas (x, y) y naturales (ξ, η) . La idea de los elementos isoparamétricos es trabajar con las funciones de interpolación y sus derivadas en coordenadas naturales y luego volver al dominio en coordenadas geométricas con ayuda de la matriz Jacobiana. En la figura

se muestra también la numeración y sus correspondientes coordenadas naturales para un elementos de 6 nodos. Para un elementos de tres nodos la numeración y coordenadas corresponden a los nodos de los vértices.

B.2. Funciones de interpolación y sus derivadas

Como se indica en la sección (3.7.2), para los campos de daño y multiplicadores de Lagrange se utilizan elementos triangulares isoparamétricos de 3 nodos, cuyas funciones de interpolación y derivadas son:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_e^\beta(\xi, \eta) &= \mathbb{N}_e^\lambda(\xi, \eta) = [N_1(\xi, \eta) \ N_2(\xi, \eta) \ N_3(\xi, \eta)], \\ N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_e^\beta(\xi, \eta) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -1, \quad \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -1, \quad \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 1, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Las funciones de interpolación anteriores también son utilizadas en la discretización espacial del problema térmico, definido por la ecuación (5.37).

Para el campo de desplazamientos se utilizan elementos triangulares isoparamétricos de 6 nodos, cuyas funciones de interpolación y derivadas son:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_e^u(\xi, \eta) &= \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & \dots & N_6(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & \dots & 0 & N_6(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \\ N_1(\xi, \eta) &= -(1 - \xi - \eta)(1 - 2(1 - \xi - \eta)), \quad N_2(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi), \\ N_3(\xi, \eta) &= -\eta(1 - 2\eta), \quad N_4(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta), \\ N_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \quad N_6(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbb{B}_e^u(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \dots & \frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \dots & 0 & \frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 1 - 4(1 - \xi - \eta), & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 1 - 4(1 - \xi - \eta), \\
\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -1 + 4\xi, & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 0, \\
\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -1 + 4\eta, \\
\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 4(1 - 2\xi - \eta), & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -4\xi, \\
\frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 4\eta, & \frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 4\xi, \\
\frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -4\eta, & \frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 4(1 - \xi - 2\eta),
\end{aligned} \tag{B.4}$$

B.3. Ordenes de las matrices y vectores introducidos en el MEF e integración numérica

El orden de las funciones de interpolación, sus derivadas y los vectores de incógnitas nodales pueden ser expresado en forma general para el modelo de esta tesis del siguiente modo:

$$\mathbb{N}_e^x [d^x \times d^x n^x], \quad \mathbb{B}_e^x [dg^x \times d^x n^x], \quad \mathbb{U}_e^x [d^x n^x \times 1], \quad \text{con } x = u, \beta, \lambda. \tag{B.5}$$

Esta tesis se limita a la resolución de problemas en estado plano (tensión o deformación) y los tipos de elementos finitos adoptados son para el campo \mathbf{u} elementos triangulares isoparamétricos de 6 nodos mientras que para los campos β y λ se eligen elementos triangulares isoparamétricos de 3 nodos. Para este tipo de elementos los números que definen el orden de las matrices y vectores toman el valor mostrado en la siguiente lista:

- $d^u = 2$,
- $d^\beta = d^\lambda = 1$,
- $n^u = 6$,

- $n^\beta = n^\lambda = 3$,
- $ng^u = 3$,
- $ng^\beta = ng^\lambda = 2$.

En la formulación se requieren expresar tensores de segundo y cuarto orden asociados al campo de desplazamientos en término de las matrices y vectores antes indicados. Los tensores de segundo orden como, por ejemplo, la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, la tensión $\boldsymbol{\sigma}_e$ o una derivada de un campo escalar respecto de un tensor de segundo orden como $\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}$, son representados en el MEF por un vector de orden $[ng^u \times 1]$. Los tensores de cuarto orden como, por ejemplo, el tensor constitutivo para estado plano \mathbb{C}_e , la derivada de un tensor de segundo orden respecto de otro como, por ejemplo, $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}$ o la derivada segunda de un escalar respecto de un tensor de segundo orden como por ejemplo $\frac{\partial \varpi^*}{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}$, son representados en el MEF por una matriz de orden $[ng^u \times ng^u]$.

Las integrales que se necesitan realizar para obtener las matrices y vectores que requiere el MEF se realizan con cuadratura de Gauss y se expresan del siguiente modo:

$$\int_{\Omega_e} \bullet d\Omega_e \approx \sum^{pg} \tilde{\bullet} \tilde{w} \det(J). \quad (\text{B.6})$$

La ecuación (B.6) indica que la integral sobre el dominio de un elemento es reemplazada por la sumatoria del integrando evaluado en los puntos de Gauss (se reserva la virgola para indicar que una cantidad está evaluada en un punto de Gauss) por el peso \tilde{w} que corresponde a cada punto de Gauss y por el determinante de la matriz Jacobiana expresado como $\det(J)$ que relaciona las coordenadas naturales a las que están referidas las funciones de interpolación con las coordenadas geométricas. En este trabajo todas las cuadraturas se realizaron utilizando 3 puntos de Gauss en los dominios triangulares de los elementos, notando que la precisión de las mismas ya no se incrementaba significativamente al aumentar los puntos de integración.

B.4. Cálculo de la matriz Jacobiana

El determinante de la matriz jacobiana es requerido como lo indica la ecuación (B.6) para poder volver, en la integración de las matriz de rigidez y vectores de residuos, de la

CUADRO B.1: Coordenadas de los puntos de Gauss para un dominio triangular.

-	ξ	η	\tilde{w}
1 P.G	1/3	1/3	1/2
3 P.G	1/6	1/6	1/6
	2/3	1/6	1/6
	1/6	2/6	1/6
4 P.G	1/3	1/3	-27/96
	1/5	1/5	25/96
	3/5	1/5	25/96
	1/5	3/5	25/96
6 P.G	0,0916	0,0916	0,0550
	0,8168	0,0916	0,0550
	0,0916	0,8168	0,0550
	0,4459	0,4459	0,1117
	0,1081	0,4459	0,1117
	0,4459	0,1081	0,1117

coordenadas naturales, donde se evalúan las funciones de interpolación y sus derivadas, a las coordenadas geométricas. El cálculo de dicha matriz para el elemento triangular isoparamétrico de 6 nodos puede expresarse como:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

donde $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ son las coordenadas geométricas del triángulo de 6 nodos. Para determinar el Jacobiano para el triángulo de 3 nodos, solo se debe considerar la expresión anterior hasta las derivadas de N_3 y la coordenadas (x_3, y_3) .

B.5. Puntos de Gauss en un dominio triangular

En el cuadro (4.1) se exponen la ubicación en coordenadas naturales de los puntos de Gauss y sus respectivos pesos para realizar las integraciones numéricas en un dominio triangular.