

TEORIA ELASTOPLASTICA MICROPOLAR DE COSSERAT PARA MATERIALES COHESIVOS FRICCIONALES

María Marcela Nieto
Santiago del Estero

Director de Tesis: Doctor Ingeniero José Guillermo Etse

Tesis elaborada en el Programa de Posgrado del Laboratorio de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán como requisito para la obtención del grado de Magister en Ingeniería Estructural.

Mi mas profundo agradecimiento

a la Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNSE, *Dra. Beatriz de Mishima* y al Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNSE, *Ing. Carlos Bonetti*, por su apoyo incondicional,

al *Dr. Rodolfo Danesi* por el enorme esfuerzo invertido en mi formación,

a *los docentes del Laboratorio de Estructuras*, por entregarme sus conocimientos y su cordialidad,

a *mis compañeros y al personal del Laboratorio*, por darme su afecto y su ayuda,

y, muy especialmente le doy las gracias

al *Dr. Ing. José Guillermo Etse*, por creer que merezco su dedicación, su confianza y su amistad,

a *mi padre*, donde este, por su ejemplo,

a *mi esposo, a mis hijos y a mi madre*, por que sin su amor y sin su apoyo esto no hubiera sido posible.

INDICE

CAPITULO 1

Conceptos Introdutorios y Alcances

1.1.- Introducción	1
1.2.- Estado del Arte	2
1.3.- Objetivos	4
1.4.- Desarrollo	4

CAPITULO 2

Estática y Cinemática de Sólidos

2.1.-Estática	
2.1.1.-Continuo clásico de Boltzmann	7
2.1.2.- Continuos micropolares de Cosserat	10
2.2.-Cinemática	
2.2.1.-Continuo clásico de Boltzmann	14
2.2.2.- Continuo micropolar de Cosserat	14

CAPITULO 3

Elasticidad Lineal.

3.1.- Ecuaciones constitutivas del continuo clásico.	18
3.2.- Ecuaciones constitutivas de continuos de Cosserat	19
3.2.1 Estado bidimensional. Cinemática, equilibrio y ecuaciones constitutivas.	21
3.2.2.-Problemas de valores de borde. Flexión simple elástica lineal	26
3.2.2.1.- Solución mediante el Método de las Diferencias Finitas	27
3.2.2.2.- Solución mediante el Método de Rayleigh - Ritz	30
3.2.2.3.- Evaluación de resultados	33

CAPITULO 4

Teoría del Flujo de la Plasticidad

4.1.- Elastoplasticidad en Continuos Clásicos	35
4.2.- Teoría del flujo de la Plasticidad en Continuos Micropolares	38
4.3.- Modelo elastoplástico de Von Mises	
4.3.1.- Continuo clásico de Boltzmann	41
4.3.2.- Continuos Cosserat	44

CAPITULO 5

Modelo Micropolar de Cosserat basado en Energía de Fractura

5.1.- Introducción	45
5.2.- Modelo Extendido de Leon para Continuos de Boltzmann	
5.2.1.- Generalidades del Modelo de León	46
5.2.2.- Formulación de ablandamiento isotrópico	48
5.2.3.- Degradación de la resistencia triaxial	49
5.2.4.- Función de Potencial Plástico	50
5.2.5.- Formulación basada en energía de fractura.	
Proceso de homogeneización.	51
5.2.5.1.- Modo de Fractura I	51
5.2.5.2.- Modo de Fractura II	54
5.3.- Modelo Micropolar de Leon	
5.3.1.- Función de Fluencia	56
5.3.2.- Formulación de Energía de Fractura	
Modo de Fractura Rotacional	57
5.4.- Implementación Computacional	61
5.5.- Análisis en estado de deformaciones planas.	66
5.5.1.- Conformación del Tensor elastoplástico	68

CAPITULO 6

Indicador de Falla Localizada

6.1.-Clasificación de falla	71
6.2.-Continuo Clásico de Boltzmann	72
6.3.-Continuo Micropolar de Cosserat	75
6.3.1.-Primera condición de localización	76
6.3.2.- Segunda condición de localización	77
6.4.- Modelo Micropolar de Leon. Análisis de Localización	
6.4.1.- Primera Condición de Localización	78

6.4.2.- Segunda Condición de Localización	82
---	----

CAPITULO 7

Problemas de Valores de Borde con el Método de los Elementos Finitos

7.1.- Criterio de Fluencia de Von Mises. Análisis de la capacidad regularizadora de los Continuos Micropolares	84
7.1.1.- Análisis de la Capacidad Regularizadora de los Continuos Micropolares	89
7.2.- Predicciones de Falla en Homigón. Modelo Micropolar de Leon.	90

CAPITULO 8

Conclusiones	94
--------------	----

REFERENCIAS	98
--------------------	-----------

INDICE DE FIGURAS

CAPITULO 2

2.1.- Tensiones planas en continuos clásicos.	8
2.2.- Tensiones para un plano de inclinación θ .	8
2.3.- Círculo de Mohr para tensiones simétricas. Estado bidimensional.	9
2.4.- Tensiones planas en continuos micropolares.	11
2.5.- Tensiones micropolares para un plano de inclinación θ	11
2.6.- Círculo de Mohr para tensiones micropolares. Estado bidimensional.	13
2.7.- Deformaciones y giros en el continuos infinitesimal de Cosserat.	16

CAPITULO 3

3.1.- Partición de la viga empotrada para el Método de las Diferencias Finitas.	27
3.2.- Deformaciones a lo largo de la viga empotrada. Método de las Diferencias Finitas.	29
3.3.- Deformaciones en la viga empotrada. Método de Rayleigh - Ritz.	32
3.4.- Longitud caracterstica = h . Comparación de resultados.	33
3.5.- Longitud caracterstica = $2 * h$. Comparación de resultados.	34
3.6.- Longitud caracterstica = 0 . Comparación de resultados.	34

CAPITULO 4

4.1.- Representación del criterio de fluencia de Von Mises. Plano Octaédrico.	42
---	----

CAPITULO 5

5.1.- Modo I. Banda de fisura en el elemento. Diagrama de tensiones y desplazamientos	52
5.2.- Modo I. Continuo equivalente. Diagrama de tensiones - deformaciones.	53
5.3.- Modo II. Esquema de fisuras en el elemento. Diagrama de tensiones y desplazamientos	54
5.4.- Modo II. Continuo equivalente. Diagrama de tensiones - deformaciones.	55
5.5.- Fractura rotacional en el elemento. Diagrama de momentos tensionales y microrotaciones.	58
5.6.- Continuo equivalente. Diagrama de momentos tensionales - microcurvaturas	58
5.7.- Esquema Predictor - Corrector	62

CAPITULO 6

6.1. Superficie de discontinuidad.	73
6.2.- Tensor de Localización. Flujo Asociado y No Asociado. $G_c > 0$	80
6.3.- Tensor de Localización. Flujo Asociado y No Asociado. $G_c = 0$	80
6.4.- Tensor de Localización. Estado de Tensiones Simétrico y No Simétrico.	81
6.5.- Tensor de Localización. Partición de los Desplazamientos	82

CAPITULO 7

7.1.- Geometría del ensayo de compresión. Criterio de Von Mises	85
7.2.- Curvas carga - desplazamiento en mallas regulares de 3x6, de 6x12 y de 12x24 elementos. $L_c = 1, 10, 100$ mm.	86
7.3.- Mallas regulares deformadas de 3x6 , 6x12 y de 12x24 elementos. Longitud característica = 0.1mm.	87
7.5.- Mallas irregulares deformadas de 8x16 elementos. Longitud característica = 0.1mm.	88
7.6.- Curvas carga - desplazamiento en mallas irregulares de 8x16 y regular de 12x24 elementos. $L_c = 0.1$ y 100 mm.	88
7.7.- Ensayo de Tracción para el Modelo Extendido de Leon. Comparación con el Modelo Micropolar.	90
7.8.- Ensayo de Compresión Uniaxial para el Modelo Extendido de Leon. Comparación con el Modelo Micropolar.	91
7.8.- Ensayo de Compresión Uniaxial para el Modelo Micropolar de Leon. Comparación de los casos Asociado y No Asociado.	92
7.10.- Ensayo de Compresión Triaxial para el Modelo Micropolar de Leon.	92

CAPITULO 1

1.- Conceptos Introdutorios y Alcances

1.1.- Introducción

En la modelación del comportamiento de materiales y estructuras, el análisis elástico ha provisto un marco de trabajo para aplicaciones ingenieriles realizando predicciones de tensiones aproximadas. El valor del estudio de los materiales en el régimen elástico radica en la facilidad de su implementación y en el bajo costo de su desarrollo a la hora de proveer al ingeniero de una aproximación del problema bajo estudio.

Sin embargo se hace necesario un análisis mas exacto a la hora de describir el comportamiento de materiales y estructuras, en particular el desempeño de los mismos mas allá de su límite lineal elástico, lo que ha llevado al desarrollo de técnicas de modelado basadas en la teoría de plasticidad.

Los materiales de tipo cohesivos - friccionales como el homigón presentan dificultades adicionales debido a que muestran comportamientos de ablandamiento luego de alcanzada su resistencia pico. La predicción acertada de estos comportamientos de ablandamiento permitirá determinar la transición del comportamiento estructural dúctil a uno de fractura frágil.

Se ha observado además que la respuesta inelástica de muchos materiales ingenieriles está frecuentemente asociada a la aparición de discontinuidades o bandas estrechas de deformaciones localizadas. Numerosas investigaciones han desarrollado formulaciones basadas en conceptos de fracturas difusas o continuas habiendo adquirido importancia particular los modelos basados en localización de tipo difuso. En estos, la dificultad que se presenta estriba en la fuerte dependencia de los resultados obtenidos, del tamaño y de la dirección de los elementos de las mallas de elementos finitos considerada en el análisis computacional.

Varias investigaciones realizadas proponen el uso de teorías alternativas a la formulación de los continuos clásicos, para abordar el problema señalado. Entre ellas la teoría Micropolar de los hermanos Cosserat [3] ha cobrado relevancia en los últimos tiempos, por su capacidad predictiva y por la objetividad de sus soluciones.

El propósito de este trabajo es extender la contribución del modelo micropolar a una formulación constitutiva sofisticada como lo es el Modelo Extendido de Leon [16],[17],[29] que describe el comportamiento de falla del hormigón para un amplio espectro de historias de carga.

1.2.- Estado del Arte

En la actualidad, el desarrollo de modelos y formulaciones constitutivas para materiales ingenieriles busca subsanar la dependencia del tamaño y de la orientación de los elementos de las mallas de elementos finitos implementadas, en las formulaciones de falla difusa.

Las investigaciones tendientes a evitar esta deficiencia han conducido a formulaciones regularizantes del comportamiento de ablandamiento. Merecen citarse entre otras, las formulaciones no locales integrales, formulaciones no locales de gradientes, modelos elastoplásticos basados en energía de fractura, teorías viscoplásticas tiempo dependientes y las formulaciones basadas en sólidos micropolares de Cosserat [3], [6], [7], [11], [18], [20].

Todas estas formulaciones que buscan regularizar el comportamiento de ablandamiento introducen una longitud característica en la relación tensión -

deformación, aunque varía considerablemente el significado de este parámetro en las diferentes formulaciones.

Con respecto a la teoría micropolar, esta enriquece el continuo clásico que considera tres grados de libertad traslacionales, con tres grados de libertad rotacionales independientes de cualquier campo de desplazamientos. Es así que en el continuo Cosserat cada punto material equivale a un cuerpo rígido infinitesimal de tal manera que se desarrollan no solo las tensiones convencionales sino también momentos tensionales.

El continuo de Cosserat constituye una teoría original ya que a nivel tensional equivale a admitir que el tensor de tensiones es asimétrico, lo cual en la teoría clásica es a priori rechazado en base al axioma de Boltzmann.

Recién muchas décadas después de ser propuesta, la teoría micropolar de Cosserat ha encontrado gran atención en la comunidad científica. Como consecuencia, autores varios han publicado trabajos prominentes en los cuales se establecían relaciones con el continuo clásico y se analizaban características particulares de la teoría micropolar. Entre otros podemos citar los trabajos de Mindlin [33], Toupin [47], Schaefer [42] y Eringen [16]. Estos fueron atraídos mas por el aspecto teórico de los continuos no convencionales que por la potencialidad que ellos brindaban para la simulación computacional del campo de deformación de sólidos, cosa que en aquella época estaba fuera de alcance.

En los últimos años ha surgido un interés renovado en los continuos Cosserat debido al hecho de que los parámetros materiales adicionales conducen a relevantes ventajas en los análisis computacionales. En particular estas ventajas son mas categóricas en el caso de simulación de procesos de localización de deformaciones en sólidos elastoplásticos que incluyen ablandamientos, a la hora de buscar regularizar los resultados que se obtienen respecto del tamaño de la malla de elementos finitos. Entre otros podemos citar en este contexto los autorizados trabajos de Mühlhaus [34], de Borst [6], [7] y Steinmann y Willam [44], [45].

Los continuos micropolares presentan interés por su cualidad a partir de que introducen la influencia de los efectos en la vecindad de la zona de deformación localizada resultando una descripción no local del problema. Difieren de la formulación clásica en un sentido básico: no solo debe argumentarse la discontinuidad en el gradiente de velocidades sino que además debe considerarse los saltos que tienen lugar en el gradiente de rotaciones, como una condición que debe satisfacerse

simultáneamente. Esta condición adicional juega un relevante rol para regularizar la localización.

La implementación de estos continuos enriquecidos se ha llevado adelante en modelos simples que describen el comportamiento de metales, a través de criterios de fluencia como los de Von Mises y de Drucker - Prager. No se han implementado hasta hoy modelos que contemplen el comportamiento de geomateriales como el hormigón menos aún bajo consideraciones de energía de fractura con formulación micropolar.

1.3.- Objetivos

1. Desarrollar un modelo computacional elastoplástico basado en continuos micropolares.
2. Extender los códigos computacionales de elementos finitos formulados sobre la base de continuos clásicos para incluir los grados de libertad adicionales de Cosserat.
3. Desarrollar sobre la base del Modelo Extendido de Leon, una formulación elastoplástica micropolar incluyendo los conceptos de mecánica de fractura .
4. Analizar la capacidad predictiva del modelo desarrollado frente a un gran espectro de condiciones de carga, realizando comparaciones con los resultados que se obtienen en la formulación clásica.
5. Estudiar las predicciones de falla localizada de la formulación constitutiva elastoplástica de Cosserat para estados tensionales de compresión triaxial y tracción.
6. Analizar procesos de falla del modelo con el Método de los Elementos Finitos.

El desarrollo del presente trabajo se mantiene en el marco de las pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.

1.4.- Desarrollo

El presente trabajo ha sido estructurado en 8 capítulos. El Capítulo 2 presenta las ecuaciones básicas de la estática de los cuerpos deformables, tanto de los continuos clásicos como de los micropolares. Luego presenta la cinemática describiendo el campo de los desplazamientos y el tensor de las deformaciones en ambos casos.

El Capítulo 3 se introduce en la elasticidad lineal describiendo las ecuaciones constitutivas para luego centrar el análisis al estado particular de dos dimensiones, del que se describe tanto sus desplazamientos y deformaciones como condiciones de borde y ecuaciones constitutivas para buscar una expresión de los giros de Cosserat. Se desarrolla posteriormente un problema de valores de borde de flexión simple elástica lineal por dos métodos: el de las Diferencias Finitas y el de Rayleigh - Ritz, presentándose al final gráficas comparativas de los resultados obtenidos.

El Capítulo 4 se introduce en la elastoplasticidad desarrollando la teoría incremental del flujo de la plasticidad y la condición de consistencia tanto en los continuos de Boltzmann como en los de Cosserat. Además se estudia el criterio de fluencia de Von Mises que será implementado en un problema de valores de borde posteriormente. Se establece aquí la forma que presenta el segundo invariante de tensiones, esencial para el desarrollo de esta formulación, y la forma del parámetro de endurecimiento.

En el Capítulo 5 se describe al Modelo Extendido de Leon , su formulación de ablandamiento isotrópico, la degradación de la resistencia en compresión triaxial, describiendo el proceso de homogeneización en la formulación de energía de fractura que permite describir el Modo I de falla y su extensión al Modo II, dentro de las bases de los continuos clásicos. Luego se describe la implementación de esta formulación para el caso de continuos de Cosserat, con la determinación del tercer invariante de tensiones, para una condición de fluencia con valor de endurecimiento unitario. Se extienden los conceptos de energía de fractura para la implementación de un Modo Rotacional que contempla los grados de libertad adicionales de la formulación enriquecida.

Luego centra el análisis del Modelo Extendido de Leon, en el estado plano de deformaciones para continuos micropolares.

El Capítulo 6 aborda el análisis de la falla localizada, efectuando una primera descripción de las formas de falla de los materiales, para luego centrar el análisis en la forma difusa de la misma. Describe la condición de falla en continuos clásicos y las dos

condiciones de localización que se presentan en los micropolares. Se estudia en particular la localización en el estado plano de deformaciones.

La primera condición de localización se desarrolla graficándose los valores del determinante del tensor de localización para diferentes condiciones de flujo y valores de los parámetros. La segunda condición de localización se plantea para este caso de tensores de gradiente no simétricos.

El capítulo 7 describe dos problemas de valores de borde. En primer lugar el criterio de plasticidad de Von Mises se implementa en ensayos de compresión para mallas de diferentes tamaños, regulares e irregulares para estudiar la dependencia de los resultados con las mallas de elementos finitos seleccionadas.

En el segundo problema se implementa el Modelo Extendido de Leon Micropolar en ensayos de tracción, compresión uniaxial y triaxial con distintos niveles de confinamiento, comparándose los resultados con los obtenidos en los continuos de Boltzmann.

El último capítulo elabora una síntesis de los resultados obtenidos y las conclusiones a que se han arribado durante la elaboración del presente trabajo.

CAPITULO 2

2.-Estática y Cinemática de Sólidos

2.1.-Estática

2.1.1.-Continuo clásico de Boltzmann

Dado el dominio $\beta \in \mathfrak{R}^3$ y siendo $\partial\beta$, la superficie ocupada por un cuerpo, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describe un problema de valores de borde de la mecánica de los continuos clásico de Boltzmann, consiste en el balance del momento lineal que proporciona una ecuación de equilibrio

$$\operatorname{div}(\sigma)^t + \rho \cdot B = 0 \quad (2.1)$$

en la cual se consideran despreciables las fuerzas de inercia (forma fuerte del equilibrio) y donde

ρ : densidad de masa

B : fuerzas del cuerpo por unidad de masa

De esta ecuación resulta como consecuencia la simetría del tensor de tensiones $\sigma = \sigma^t$. En la figura 2.1 se representan las tensiones en el elemento infinitesimal.

Las condiciones de contorno en la frontera del dominio β son (en notación tensorial e indicial)

$$N_i \cdot \sigma_{ij} = t_j \quad \text{en } \partial\beta \quad (2.2)$$

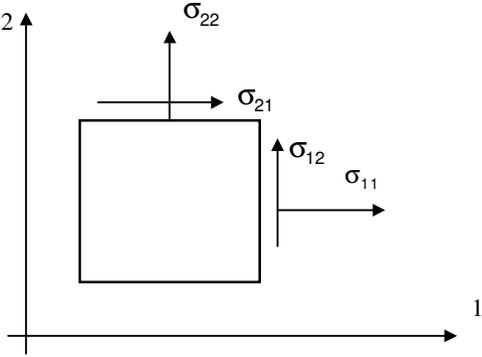


Figura 2.1. Tensiones planas en continuos clásicos

Como se ve en la Figura 2.1, el primer índice de las tensiones señalan la dirección de la normal a la superficie sobre la cual actúan y el segundo, su dirección. En un plano de dirección arbitraria, el estado de tensiones resulta

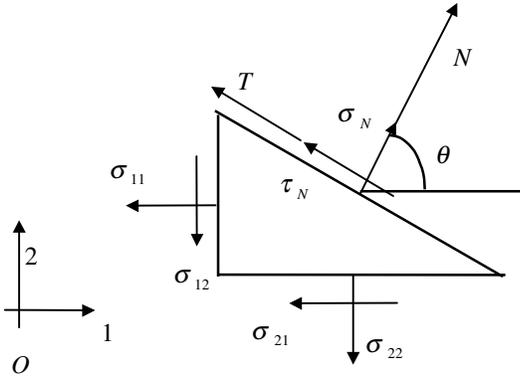


Figura 2.2. Tensiones para un plano de inclinación θ

Las componentes del vector de tensiones sobre una superficie de normal N y tangente T , con la condición $N \perp T$ conducen a las ecuaciones

$$\sigma = N \cdot \sigma \cdot N = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \quad (2.3)$$

$$\tau = N \cdot \sigma \cdot T = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \quad (2.4)$$

Despejando el valor del ángulo 2θ de las ecuaciones (2.3) y (2.4) resulta la ecuación de un círculo

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 = r^2 \quad (2.5)$$

con

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad \text{y} \quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (2.6)$$

que puede representarse a través del Círculo de Mohr

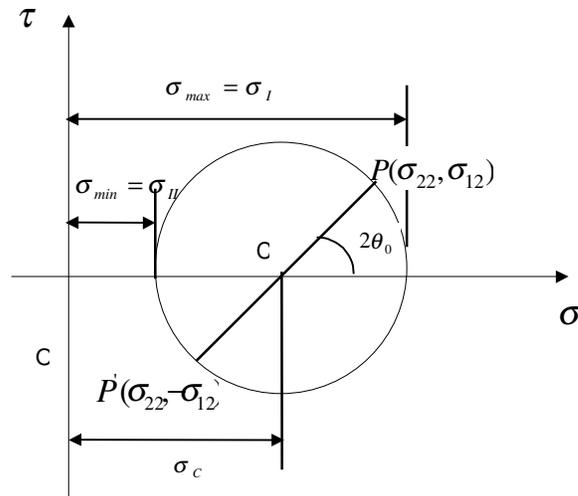


Figura 2.3. Círculo de Mohr para tensiones simétricas. Estado bidimensional.

Los valores de σ_I y σ_{II} corresponden a dos autovalores reales del tensor simétrico de dos dimensiones y sus autovectores definen las direcciones de los

planos principales en los que se verifica que las tensiones de corte se anulan. Los puntos sobre el círculo representan los estados de tensiones de cualquier plano arbitrario cuya normal N de orientación θ se mide a partir de la línea CP.

2.1.2.- Continuos micropolares de Cosserat

El continuo micropolar de Cosserat (1909) está caracterizado por un tensor de tensiones Σ que está constituido por el tensor de tensiones σ , no simétrico, al que se le agregan los momentos tensionales μ , también no simétricos de modo que $\mu \neq \mu^t$ en el estado de equilibrio del elemento y que representan momentos por unidad de superficie.

Dado el dominio $\beta \in \mathfrak{R}^3$ y $\partial\beta$ la superficie ocupada por un cuerpo, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describe un problema de valores de borde de la mecánica de los continuos micropolares, consiste en el balance del momento lineal y del momento angular [4], [6], [27]

$$\text{div}(\sigma)^t + \rho \cdot B = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{div}(\mu)^t + e : \sigma + \rho \cdot B_m = 0 \quad (2.8)$$

siendo :

B_m : cuplas del cuerpo por unidad de masa

En estas ecuaciones se desprecia los términos correspondientes a las fuerzas de inercia y a los momentos de inercia del cuerpo.

De la segunda ecuación se deduce que el tensor de tensiones es simétrico, $e : \sigma = 0$ si y solo si los momentos tensionales se auto equilibran, es decir que $\text{div}(\mu)^t = 0$, con lo cual $\sigma = \sigma^t$.

La figura 2.4 indica el campo de tensiones en el elemento micropolar infinitesimal.

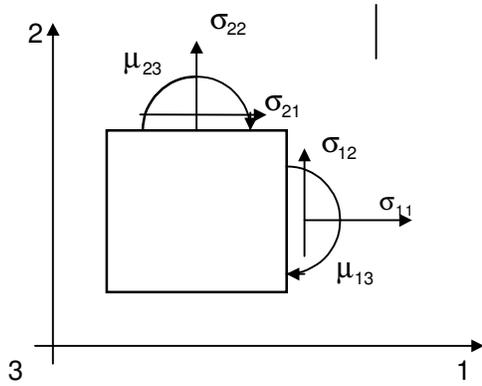


Figura 2.4. Tensiones en continuos micropolares planos.

Las condiciones en la frontera del dominio β conducen a

$$N \cdot \sigma = t^\sigma \quad N_i \sigma_{ij} = t_j^\sigma \quad \text{en } \partial\beta^\sigma \quad (2.9)$$

$$N \cdot \mu = t^\mu \quad N_i \mu_{ik} = t_k^\mu \quad \text{en } \partial\beta^\mu \quad (2.10)$$

donde $\partial\beta = \partial\beta^\sigma \cup \partial\beta^\mu$ y $\partial\beta^\sigma \cap \partial\beta^\mu = \emptyset$

Como se ve en la figura 2.4, el primer índice de las tensiones y momentos tensionales indica la dirección de la normal a la superficie sobre la cual estas componentes actúan, y el segundo marca su dirección.

El estado de tensiones en un sólido de Cosserat para un plano cualquiera de inclinación θ es

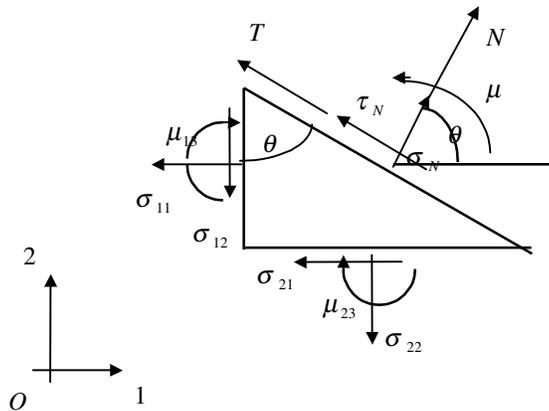


Figura 2.5. Tensiones de Cosserat en un plano de inclinación θ

Este estado de tensiones no simétrico se representa en un plano a través del Círculo de Mohr [27]. El centro del mismo se encuentra ahora desplazado del eje que representa a las tensiones normales. La componente normal y tangencial de las tensiones se definen como

$$\sigma = N \cdot \sigma \cdot N \quad (2.11)$$

$$\tau = N \cdot \sigma \cdot T \quad (2.12)$$

sobre una superficie elemental arbitraria de normal N y cuyo vector tangente T es perpendicular a N.

La tensión normal y la tensión de corte en un plano elemental de inclinación arbitraria θ están definidas como:

$$\sigma = \sigma_{11} \cdot \cos^2 \theta + \sigma_{22} \cdot \sin^2 \theta + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (2.13)$$

$$\tau = \sigma_{12} \cdot \cos^2 \theta - \sigma_{21} \cdot \sin^2 \theta + (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (2.14)$$

$$\mu = \mu_{13} \cdot \cos \theta + \mu_{23} \cdot \sin \theta \quad (2.15)$$

La representación geométrica de estos estados no simétricos a través del círculo de Mohr con ecuación de segundo grado

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + (\tau - \tau_c)^2 = r^2 \quad (2.16)$$

donde

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad \tau_c = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \quad (2.17)$$

$$r^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \right)^2 \quad (2.18)$$

se muestra en la figura 2.6

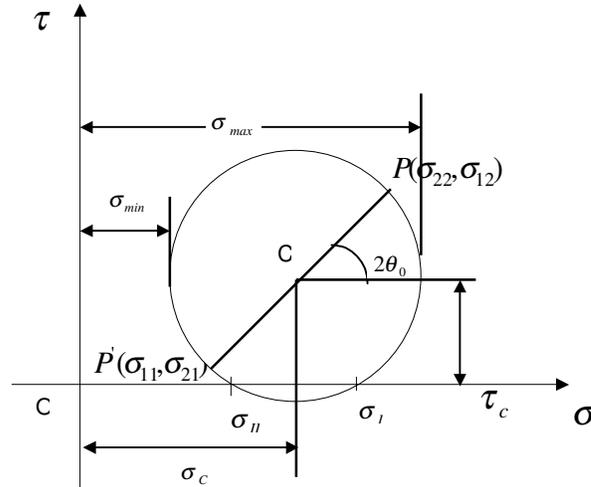


Figura 2.6. Círculo de Mohr para tensiones micropolares. Estado bidimensional.

El tensor de tensiones σ puede ser descompuesto en dos subtensores, uno simétrico y otro antisimétrico. De la figura 2.6 se infiere que el desplazamiento del centro del Círculo de Mohr respecto del eje de las tensiones σ constituye una medida de la pérdida de simetría del tensor [27]. Los autovalores y las tensiones principales serán reales en tanto el discriminante permanezca positivo, esto es, en el caso de estado bidimensional

$$\Delta_{\sigma} = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}\sigma_{21} > 0 \quad (2.19)$$

Si el discriminante es menor que cero, los autovalores serán complejos conjugados y este estado corresponde a un círculo de Mohr que no interseca al eje de las σ y que por tanto, no tiene tensiones principales reales. El estado de tensiones simetrizado arroja autovalores que se relacionan con los autovalores mayor y menor del estado nosimétrico y con los límites de Bromwich de la siguiente manera

$$\sigma_{min} = \sigma_{II}^{sim} \leq R(\sigma_{II}) \leq R(\sigma_I) \leq \sigma_I^{sim} = \sigma_{max} \quad (2.20)$$

2.2.-Cinemática

2.2.1.-Continuo clásico de Boltzmann

El medio continuo clásico se idealiza a nivel macroscópico como un continuo con tres grados de libertad traslacionales descritos por el campo de los desplazamientos $u : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$. Se asume que tanto los desplazamientos como sus gradientes son pequeños y por tanto las deformaciones resultantes pueden aproximarse por los términos lineales del Tensor Euleriano como

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_x^t u + \nabla_x u) \quad (2.21)$$

en notación indicial

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (2.22)$$

de modo que el tensor de deformaciones queda conformado como

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.2.2.- Continuo micropolar de Cosserat

La cinemática de los medios continuos micropolares está caracterizada por grados de libertad rotacionales $\omega : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ que son independientes de los movimientos de translación descritos por el campo de los desplazamientos $u : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$.

De esta forma, el campo de macrorotaciones del continuo no coincide con las microrotaciones en cada partícula material.

El tensor de deformaciones puede descomponerse en una componente simétrica y una antimétrica de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{sym} + \boldsymbol{\varepsilon}^{skw} \quad (2.24)$$

con

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{sym} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_x^t \boldsymbol{u} + \nabla_x \boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(ij)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{skw} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_x^t \boldsymbol{u} - \nabla_x \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{[ij]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \boldsymbol{e}_{ijk} \boldsymbol{\omega}_k \quad (2.26)$$

En las expresiones anteriores \boldsymbol{e} denota el tensor permutación.

La componente simétrica del gradiente de desplazamiento define el tensor de deformación infinitesimal del continuo clásico, mientras que la componente antimétrica contiene la contribución del gradiente de desplazamientos y microrotaciones, es decir que representa la diferencia entre las rotaciones macro y micropolares. Cuando ambas coinciden se recupera la cinemática del continuo clásico.

Aquí $\boldsymbol{\omega}_k$ representa el giro local asociado al punto material, el cual es independiente de los desplazamientos.

En la figura 2.7 se señalan las deformaciones y los giros micropolares del continuo de Cosserat plano [14].

El tensor de deformaciones queda definido completamente en forma matricial, tanto en su componente simétrica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{sym} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{12} + \boldsymbol{\varepsilon}_{21}) & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{13} + \boldsymbol{\varepsilon}_{31}) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{21} + \boldsymbol{\varepsilon}_{12}) & \boldsymbol{\varepsilon}_{22} & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{23} + \boldsymbol{\varepsilon}_{32}) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{31} + \boldsymbol{\varepsilon}_{13}) & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{32} + \boldsymbol{\varepsilon}_{23}) & \boldsymbol{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

como en la antisimétrica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{skw} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{12} - \boldsymbol{\varepsilon}_{21}) - \boldsymbol{\omega}_3 & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{13} - \boldsymbol{\varepsilon}_{31}) + \boldsymbol{\omega}_2 \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{21} - \boldsymbol{\varepsilon}_{12}) + \boldsymbol{\omega}_3 & 0 & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{23} - \boldsymbol{\varepsilon}_{32}) - \boldsymbol{\omega}_1 \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{31} - \boldsymbol{\varepsilon}_{13}) - \boldsymbol{\omega}_2 & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{32} - \boldsymbol{\varepsilon}_{23}) + \boldsymbol{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

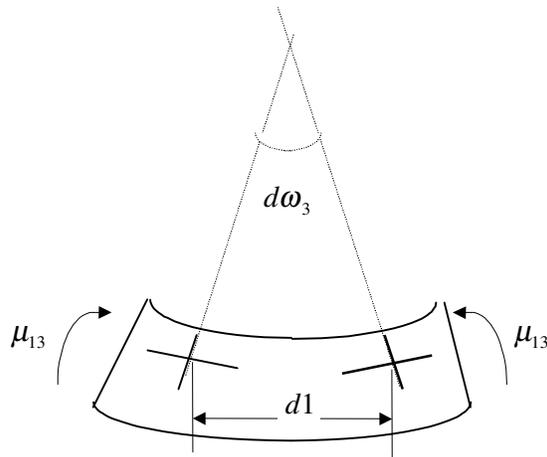
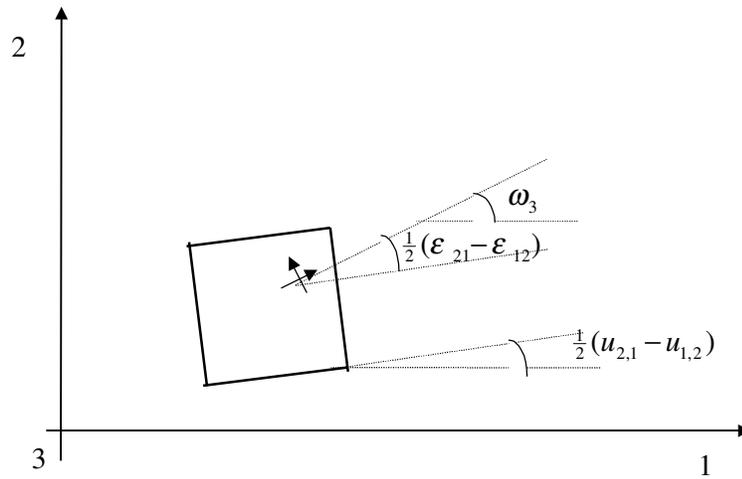


Figura 2.7. Deformaciones, giros y curvaturas en el continuo plano infinitesimal de Cosserat

En adición a este campo de deformaciones no simétrico se considera el tensor de microcurvaturas, que se relaciona energéticamente con los momentos tensionales. Este resulta del gradiente del campo de microrotaciones independientes

$$\kappa = \nabla_{ix} \omega \quad \kappa_{ij} = \omega_{j,i} \quad (2.29)$$

El tensor κ debe designarse mas precisamente como tensor de torsión y radio de giro ya que sus tres componentes con igual índice describen deformaciones de torsión y aquellas en índices desiguales describen deformaciones de giro.

CAPITULO 3

3.- Elasticidad lineal.

3.1.- Ecuaciones constitutivas del continuo clásico.

En el marco de la hiperelasticidad el potencial elástico de un cuerpo está representado por una función de energía de deformación de la que se pueden derivar los tensores de tensión y de deformación como

$$U = W = \int_{\beta} \delta W = \int_{\beta} \sigma . d\varepsilon \quad (3.1)$$

es decir que

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\varepsilon : E_0 : \varepsilon) \quad (3.2)$$

Las tensiones en el cuerpo pueden obtenerse de la expresión

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = E_0 : \varepsilon \quad (3.3)$$

y el operador material resulta

$$E_0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \otimes \partial \varepsilon} \quad (3.4)$$

Dada la simetría del tensor de tensiones, el operador material de cuarto orden posee simetría mayor y menor de forma que

$$E_{ijkl}^0 = E_{klij}^0 = E_{jikl}^0 \quad (3.5)$$

Este operador puede expresarse, para un material de comportamiento isotrópico, de la forma

$$E_0 = \phi_1 \cdot I_2 \otimes I_2 + 2\phi_2 \cdot I_4^{sym} \quad (3.6)$$

que incorpora dos constantes materiales independientes ϕ_1 y ϕ_2 .

Los valores de I_2 e I_4 están dados por

$$I_2 = (\delta_{ij}) \quad \forall i, j \in \{1,2,3\} \quad (3.7)$$

$$I_4^{sym} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.8)$$

Las constantes ϕ_1 y ϕ_2 son los parámetros de Lamé y se relacionan con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson de la forma

$$\phi_1 = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{y} \quad \phi_2 = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.9)$$

3.2.- Ecuaciones constitutivas de continuos de Cosserat

De igual manera que para los continuos clásicos, en el marco de la hiperelasticidad, se asume la existencia de una función de energía de deformación de la que se puede derivar los tensores de tensión y de deformación [6], [11], [12], [14]

$$U = W = \int \delta W^t + \int W^r = \int_{\beta} \sigma^{sym} \cdot \delta \varepsilon^{sym} + \int_{\beta} \sigma^{skw} \cdot \delta \varepsilon^{skw} + \int_{\beta} \mu \cdot \delta \kappa \quad (3.10)$$

Es decir que

$$W(\xi) = \frac{1}{2} (\xi : E_0 : \xi) \quad (3.11)$$

en general acopla la energía de membrana con la energía de flexión. Expandiendo esta forma cuadrática en sus componentes, se obtienen los términos que describen el acoplamiento membrana-flexión. Cuando este acoplamiento es despreciable, es decir

$$E_0^{uu} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad E_0^{\omega\omega} \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

el tensor de tensiones sólo se relaciona con el tensor de deformación y el tensor de momentos tensionales sólo con el tensor de microcurvaturas de la forma

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = E_0^{uu} : \varepsilon \quad \text{y} \quad \mu = \frac{\partial W}{\partial \kappa} = E_0^{\omega\omega} : \kappa \quad (3.13)$$

siendo

$$E_0^{uu} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon \otimes \partial \varepsilon} \quad \text{y} \quad E_0^{\omega\omega} = \frac{\partial W}{\partial \kappa \otimes \partial \kappa} \quad (3.14)$$

La forma mas general de representación de estos dos tensores de cuarto orden [6] es

$$I_{ijkl} = \alpha_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + \alpha_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.15)$$

que contiene tres parámetros independientes α_1, α_2 y α_3 . Luego los tensores elásticos isotrópicos de cuarto orden, en el caso mas general de tres dimensiones, pueden ser representados de la forma

$$E_0^{uu} = \phi_1 I_2 \otimes I_2 + (\phi_2 + \phi_3) I_4^{sym} + (\phi_2 - \phi_3) I_4^{skw} \quad (3.16)$$

$$E_0^{ooo} = \varphi_1 I_2 \otimes I_2 + (\varphi_2 + \varphi_3) I_4^{sym} + (\varphi_2 - \varphi_3) I_4^{skw} \quad (3.17)$$

Es decir incorporan seis constantes materiales independientes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Los valores de I_4^{sym} e I_4^{skw} están dados por

$$I_4^{sym} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.18)$$

$$I_4^{skw} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.19)$$

El tensor unitario simétrico I_4^{sym} y el antimétrico I_4^{skw} acoplan las componentes simétricas y antimétricas de los tensores de segundo orden σ, ε, μ y κ

Consecuentemente, un estado de tensiones asimétrico se expresa como

$$\sigma = \phi_1 tr(\varepsilon) I_2 + \phi_2 \varepsilon + \phi_3 \varepsilon^t \quad (3.20)$$

$$\mu = \varphi_1 tr(\kappa) I_2 + \varphi_2 \kappa + \varphi_3 \kappa^t \quad (3.21)$$

3.2.1. Estado bidimensional. Cinemática, Equilibrio y Ecuaciones Constitutivas

En el estado plano el tensor de deformaciones, en su parte simétrica y asimétrica estará completamente definido por cuatro de sus componentes [12], [19]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{(11)} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{[11]} = 0 \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{(22)} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{[22]} = 0 \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3 \quad \varepsilon_{(12)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad \varepsilon_{[12]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - \omega_3 \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 \quad \varepsilon_{(21)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad \varepsilon_{[12]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \omega_3 \quad (3.25)$$

Aquí $\varepsilon_{(ij)}$ describe el giro medio compatible con el campo de desplazamientos, el cual debe diferenciarse del vector ω que describe el giro local asociado al punto material.

El tensor de microcurvaturas κ_{i3} , para el caso plano con $i=1,2$ resulta

$$\kappa_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \quad (3.26)$$

$$\kappa_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \quad (3.27)$$

Este representa la medida de la rotación sobre cada eje del sistema de coordenadas.

El equilibrio de fuerzas y momentos descrito en las ecuaciones (2.7) y (2.8) conduce a las ecuaciones de tensiones

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} - (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0 \quad (3.30)$$

en las cuales fueron consideradas nulas las fuerzas del cuerpo B y los momentos de volumen B_m .

Las condiciones de borde en la superficie del cuerpo se expresan en las ecuaciones (2.9) y (2.10).

La ecuación constitutiva puede ser ahora expresada en notación matricial, de la forma

$$\Sigma = E \cdot \xi \quad (3.31)$$

con los tensores de tensiones y deformaciones linealizados como los vectores

$$\Sigma' = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, m_{13} / l_c, m_{23} / l_c] \quad (3.32)$$

$$\xi' = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_{13} l_c, \kappa_{23} l_c] \quad (3.33)$$

y la matriz material

$$E = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G + G_c & G - G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G - G_c & G + G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta l_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta l_c^2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

En esta matriz, G_c es el módulo de corte de Cosserat y βl_c^2 el parámetro que relaciona la curvatura con los momentos tensionales, teniendo β la misma dimensión del módulo elástico.

En lo que sigue buscamos una expresión que relacione el giro ω_3 de Cosserat con los desplazamientos [19].

Desarrollando las ecuaciones constitutivas (3.20) y (3.21) obtenemos

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.35)$$

$$\sigma_{22} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.36)$$

$$\sigma_{12} = (G + G_c) \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right] + (G - G_c) \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right] \quad (3.37)$$

$$\sigma_{21} = (G - G_c) \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right] + (G + G_c) \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right] \quad (3.38)$$

$$m_{13} = \beta l_c^2 \kappa_{13} = \beta l_c^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \quad (3.39)$$

$$m_{23} = \beta l_c^2 \kappa_{23} = \beta l_c^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \quad (3.40)$$

Las expresiones de las tensiones de corte se simplifican como

$$\sigma_{12} = (G + G_c) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (G - G_c) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2G_c \omega_3 \quad (3.41)$$

$$\sigma_{21} = (G - G_c) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (G + G_c) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2G_c \omega_3 \quad (3.42)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones de equilibrio (3.28), (3.29) y (3.30) obtenemos

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (G - G_c) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (G + G_c) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2G_c \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} = 0 \quad (3.43)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (G + G_c) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (G - G_c) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2G_c \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = 0 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \beta l_c \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_1^2} + (G + G_c) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (G - G_c) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2G \omega_3 + \beta l_c \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_2^2} - \\ & - (G - G_c) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - (G + G_c) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2G_c \omega_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Derivando las dos primeras ecuaciones (3.43) y (3.44) respecto de x_1 y de x_2 respectivamente se obtiene

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + (G - G_c) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + (G + G_c) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} + 2G_c \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.46)$$

$$\lambda \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + (G + G_c) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} + (G - G_c) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2G_c \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.47)$$

y sumándolas, obtenemos una expresión para el Laplaciano $\nabla^2 \omega_{z,xx}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1^2} = & -\frac{(\lambda + 2G)}{2G_c} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\lambda}{2G_c} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \\ & - \frac{(G - G_c)}{2G_c} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{(G + G_c)}{2G_c} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} + \frac{\lambda}{2G_c} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \\ & + \frac{(\lambda + 2G)}{2G_c} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{(G + G_c)}{2G_c} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} + \frac{(G - G_c)}{2G_c} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

De la ecuación (3.45) obtenemos otra expresión del operador Laplaciano, como

$$\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_1^2} = \frac{2G_c}{\beta I_c^2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{2G_c}{\beta I_c^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{4G_c}{\beta I_c^2} \omega_3 \quad (3.49)$$

Iguando las dos expresiones (3.48) y (3.49), obtenemos finalmente la relación buscada entre el giro y los desplazamientos

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{(G + G_c)}{(2G_c)^2} \right) \frac{\beta I_c^2}{2} \left[\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} - \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} \right] \quad (3.50)$$

3.2.2.-Problemas de valores de borde. Flexión simple elástica lineal

Aplicamos las ecuaciones constitutivas de la sección 3.2.1 a la solución de un problema de flexión simple en un dominio micropolar de Cosserat. Se analiza una barra de acero ($E=30.000 \text{ N/mm}^2$), empotrada en un extremo y libre en el otro, con longitud de 40 mm. y altura de 10 mm., sometida en su extremo libre a una carga puntual de 3 N. El valor del parámetro β se toma igual a $E/12$. El caso particular de la flexión de vigas de pequeño porte podemos enmarcarlo dentro del criterio de conservación de la linealidad de las secciones de acuerdo a la hipótesis de Bernoulli. El valor del corrimiento en el sentido transversal al eje longitudinal de la pieza es en este caso

$$u_1 = -y \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.51)$$

El giro ω_3 se reduce entonces a [19]

$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.52)$$

Las tensiones y momentos en el caso de flexión simple donde se desprecia la incidencia del esfuerzo de corte, resultan

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -EI \frac{\partial u_2}{\partial x_1^2} \quad (3.53)$$

$$m_{13} = \beta.l_c^2 \kappa_{13} = \beta.l_c^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = -\beta.l_c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \quad (3.54)$$

Nota: la hipótesis de Bernoulli, secciones planas luego de la deformación, condiciona el rango de variación de la longitud de Cosserat, de acuerdo a $h \leq l_c$, siendo h la altura de la pieza.

3.2.2.1.- Solución mediante el Método de las Diferencias Finitas

De las expresiones definidas en la sección anterior puede deducirse una ecuación diferencial de equilibrio cuya solución la encontramos con el Método de las Diferencias Finitas.

El momento externo que actúa sobre la pieza se obtiene sumando los momentos producidos por los esfuerzos internos [19] de acuerdo a

$$M = -\int_0^l \sigma_{11} b y dy - m_{13} b h \quad (3.55)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.53) y (3.54) se obtiene

$$M = -EI \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \beta l_c^2 b h \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = -(EI + \beta l_c^2 b h) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \quad (3.56)$$

Si llamamos

$$C = -(EI + \beta l_c^2 b h) \quad (3.57)$$

la ecuación diferencial queda de la forma

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{M}{C} \quad (3.58)$$

Para aplicar el Método de las Diferencias Finitas, dividimos la viga en ocho tramos iguales

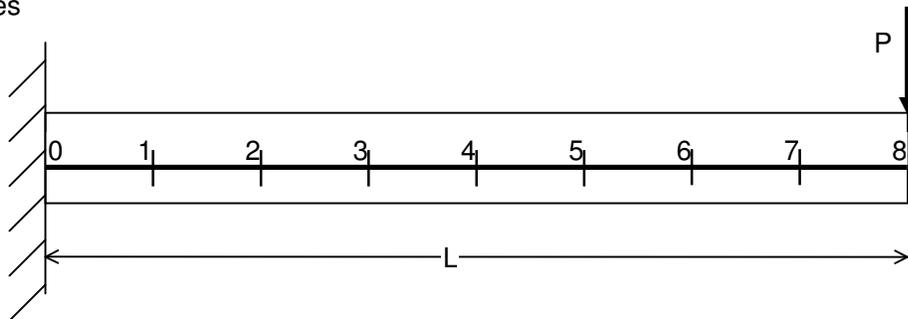


Figura 3.1.- Partición de la viga empotrada para el Método de las Diferencias Finitas

las condiciones de borde para este problema son:

para $x=0$ $u_{20}=0$ y $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0=\frac{1}{2a}(u_{y9}-u_{y1})\Rightarrow u_{y1}=u_{y9}$ (3.59)

El sistema de ecuaciones en función de las incógnitas u_{yi} i resulta

$$\frac{1}{a^2}(u_{y9} - 2u_{y0} + u_{y1}) = \frac{1}{a^2}(2u_{y1} - 2u_{y0}) = \frac{1}{a^2}(2u_{y1}) = \frac{M_0}{C} = \frac{Pl}{C}$$

$$\frac{1}{a^2}(u_{y0} - 2u_{y1} + u_{y2}) = \frac{M_1}{C} = \frac{7Pl}{8C}$$

$$\frac{1}{a^2}(u_{y1} - 2u_{y2} + u_{y3}) = \frac{M_2}{C} = \frac{3Pl}{4C}$$

$$\frac{1}{a^2}(u_{y2} - 2u_{y3} + u_{y4}) = \frac{M_{13}}{C} = \frac{5Pl}{8C}$$

$$\frac{1}{a^2}(u_{y3} - 2u_{y4} + u_{y5}) = \frac{M_4}{C} = \frac{Pl}{2C}$$

$$\frac{1}{a^2}(u_{y4} - 2u_{y5} + u_{y6}) = \frac{M_5}{C} = \frac{3Pl}{8C}$$

$$\frac{1}{a^2}(u_{y5} - 2u_{y6} + u_{y7}) = \frac{M_7}{C} = \frac{Pl}{4C}$$

$$\frac{1}{a^2}(u_{y6} - 2u_{y7} + u_{y8}) = \frac{M_7}{C} = \frac{Pl}{8C}$$

Para el ejemplo numérico consideramos los siguientes valores datos

$$P=3 \text{ N}$$

$$l=40 \text{ mm}$$

$$b=10 \text{ mm}$$

$$h=10 \text{ mm}$$

$$\beta = \frac{E}{12}$$

$$l_c=h$$

$$\text{resulta } C = -bh\left(\frac{Eh^2}{12} + \beta l_c^2\right) = -5 \cdot 10^7$$

Por lo tanto la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

y el vector de los momentos debidos al esfuerzo exterior P

$$M = \left[Pl \quad \frac{7Pl}{8} \quad \frac{3Pl}{4} \quad \frac{5Pl}{8} \quad \frac{Pl}{2} \quad \frac{3Pl}{8} \quad \frac{Pl}{4} \quad \frac{Pl}{8} \right] \cdot \frac{l^2}{64C}$$

El vector de las deflexiones para $l_c=h$, resulta

$$V = M \cdot A^{-1} = \left[-3 \cdot 10^{-5} \quad -1125 \cdot 10^{-4} \quad -24 \cdot 10^{-4} \quad -405 \cdot 10^{-4} \quad -6 \cdot 10^{-4} \quad -8175 \cdot 10^{-4} \quad -0001^{-4} \quad -0001 \right]$$

En el caso que $l_c=2 \cdot h$ obtenemos

$$C = -bh \left(\frac{Eh^2}{12} + \beta l_c^2 \right) = -1.25 \cdot 10^8$$

$$V = M \cdot A^{-1} = \left[-12 \cdot 10^{-5} \quad -45 \cdot 10^{-5} \quad -96 \cdot 10^{-5} \quad -162 \cdot 10^{-4} \quad -24 \cdot 10^{-4} \quad -327 \cdot 10^{-4} \quad -42 \cdot 10^{-4} \quad -516 \cdot 10^{-4} \right]$$

Finalmente si $l_c=0$ obtenemos la misma solución del continuo clásico

$$C = -bh \left(\frac{Eh^2}{12} + \beta l_c^2 \right) = -2.5 \cdot 10^7$$

Los resultados numéricos para los diferentes valores de l_c considerados, se muestran en la figura 3.2.

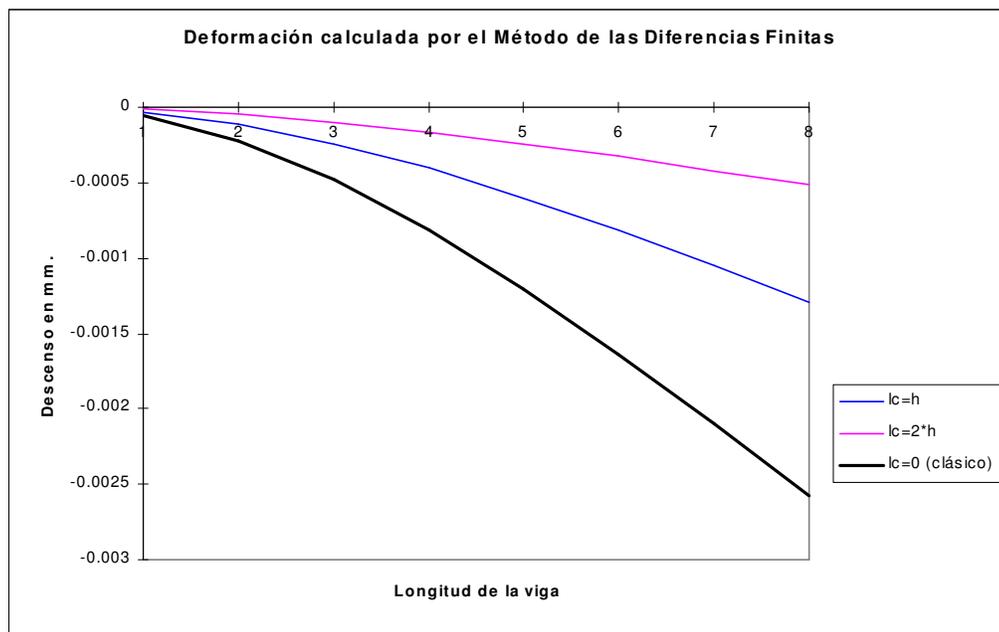


Figura 3.2.- Deformaciones a lo largo de la viga empotrada. Método de las Diferencias Finitas.

Como se ve en la figura, mayores valores del parámetro del continuo micropolar conducen a deformaciones menores en la flexión de la pieza empotrada, recuperándose el caso clásico cuando la longitud característica toma el valor cero.

3.2.2.2.- Solución mediante el Método de Rayleigh - Ritz

El mismo ejemplo numérico resuelto antes, correspondiente a la viga empotrada en un extremo y con una carga puntual en el extremo libre, se resuelve en este punto aplicando el Método de Rayleigh Ritz. En este caso el potencial de la energía viene dado de la forma

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \beta l_c^2 bh \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx - Pu_y \Big|_0^l = 0 \quad (3.60)$$

Las condiciones de borde, correspondientes a los valores de descenso y de giro de la pieza en el empotramiento

$$x=0 \quad u_{y0}=0 \quad (3.61)$$

$$x=0 \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad (3.62)$$

Consideramos para el campo de desplazamientos verticales [19] una ecuación polinómica de la forma:

$$u_y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \quad (3.63)$$

De la condición expresada en la ec.(3.61) resulta

$$a_1 = 0$$

y

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = a_2 + 2a_3 x \quad (3.64)$$

y de la condición (3.62)

$$a_2 = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 2a_3 \quad (3.65)$$

Reemplazando los valores obtenidos en la ec. (3.60) obtenemos

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^l (2a_3)^2 dx + \frac{\beta l_c^2 bh}{2} \int_0^l (2a_3)^2 dx - P(a_3 x^2) \Big|_0^l = 0 \quad (3.66)$$

o sea

$$\pi = 2EI a_3^2 l + 2\beta l_c^2 bh a_3^2 l - P a_3 l^2 = 0$$

A partir de aquí obtenemos el valor de a_3

$$a_3 = \frac{Pl}{2(EI + \beta l_c^2 bh)}$$

De esta forma la ecuación de los descensos verticales de la viga para el estado de cargas planteado es

$$u_y = \frac{P}{2C} l x^2$$

El mismo ejemplo numérico desarrollado por el método de las diferencias finitas, se calcula con el método de Rayleigh Ritz y arroja los siguientes resultados para el primer caso $l_c=h$

$$C = -bh \left(\frac{Eh^2}{12} + \beta l_c^2 \right) = -5 \cdot 10^7$$

$$u_y = \frac{P}{2C} l (x_i^2)$$

$$u_y = [0 \quad -2.785 \cdot 10^{-5} \quad -1.1 \cdot 10^{-4} \quad -2.362 \cdot 10^{-4} \quad -4 \cdot 10^{-4} \quad -5.937 \cdot 10^{-4} \quad -8.1 \cdot 10^{-4} \quad -1.04125 \cdot 10^{-3} \quad -1.28 \cdot 10^{-4}]$$

Si ahora $l_c=2 \cdot h$ resulta

$$C = -bh\left(\frac{Eh^2}{12} + \beta l_c^2\right) = -1.25 \cdot 10^8$$

$$u_y = \left[0 \quad -1.15 \cdot 10^{-5} \quad -4.4 \cdot 10^{-5} \quad -9.45 \cdot 10^{-5} \quad -1.6 \cdot 10^{-4} \quad -2.375 \cdot 10^{-4} \quad -3.24 \cdot 10^{-4} \quad -4.165 \cdot 10^{-4} \quad -5.12 \cdot 10^{-4}\right]$$

En el caso en que $l_c=0$ obtenemos la misma solución que en el continuo clásico

$$C = -bh\left(\frac{Eh^2}{12} + \beta l_c^2\right) = -2.5 \cdot 10^7$$

$$u_y = \left[0 \quad -5.75 \cdot 10^{-5} \quad -2.2 \cdot 10^{-4} \quad -4.725 \cdot 10^{-4} \quad -8 \cdot 10^{-4} \quad -1.1875 \cdot 10^{-3} \quad -1.62 \cdot 10^{-3} \quad -2.0825 \cdot 10^{-3} \quad -2.56 \cdot 10^{-3}\right]$$

En la figura 3.3 se visualizan los resultados obtenidos por el método de Rayleigh Ritz, para los valores de la longitud característica antes indicados.

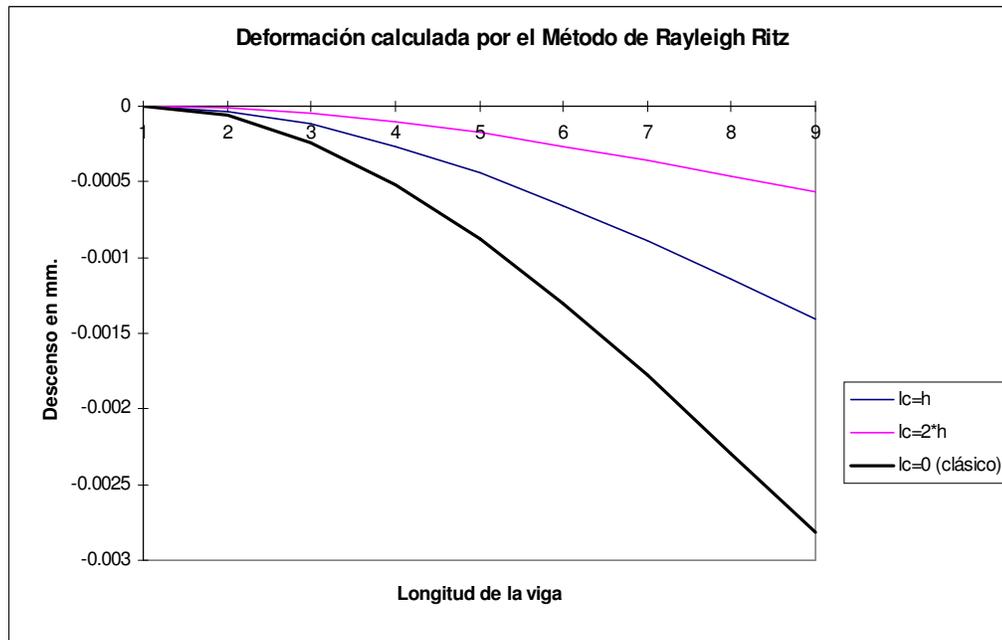


Figura 3.3.- Deformaciones en la viga empotrada. Método de Rayleigh - Ritz

3.2.2.3.- Evaluación de resultados

El análisis de un problema de flexión de sólidos unidimensionales micropolares elásticos lineales, mediante el método de las Diferencias Finitas y el método de Rayleigh Ritz, conduce a la conclusión que la ductilidad o rigidez flexional es fuertemente dependiente de la longitud característica de Cosserat.. En el caso límite, cuando l_c tiende a cero, la solución del continuo micropolar reproduce el campo de desplazamientos correspondiente a la teoría clásica, si bien en este caso la longitud característica es menor que la altura de la viga.

La comparación entre los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis para diferentes valores de l_c se grafica en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 donde se indican los resultados para diferentes valores del parámetro de los continuos micropolares.

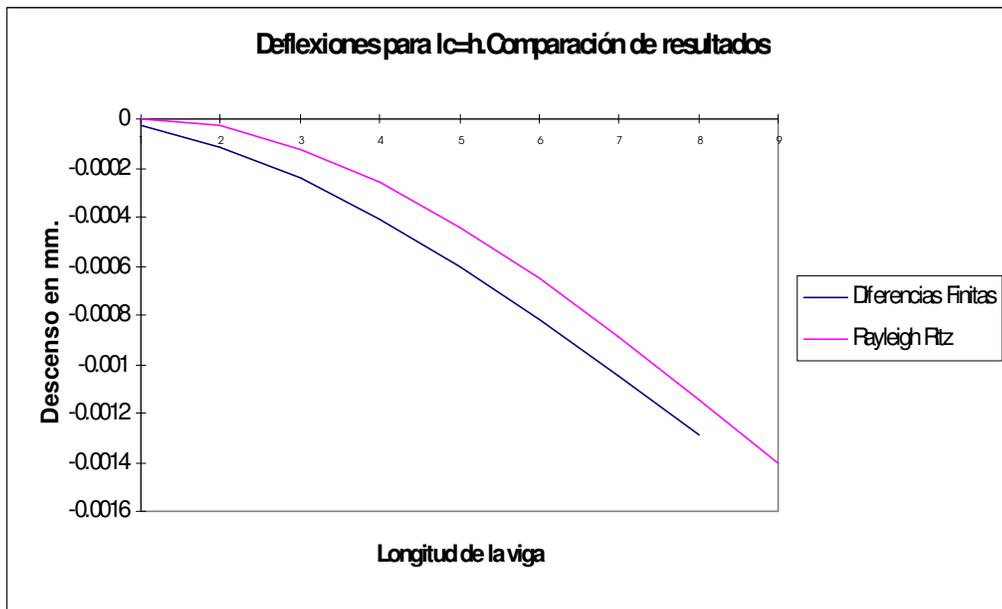


Figura 3.4.- Longitud característica = h. Comparación de resultados

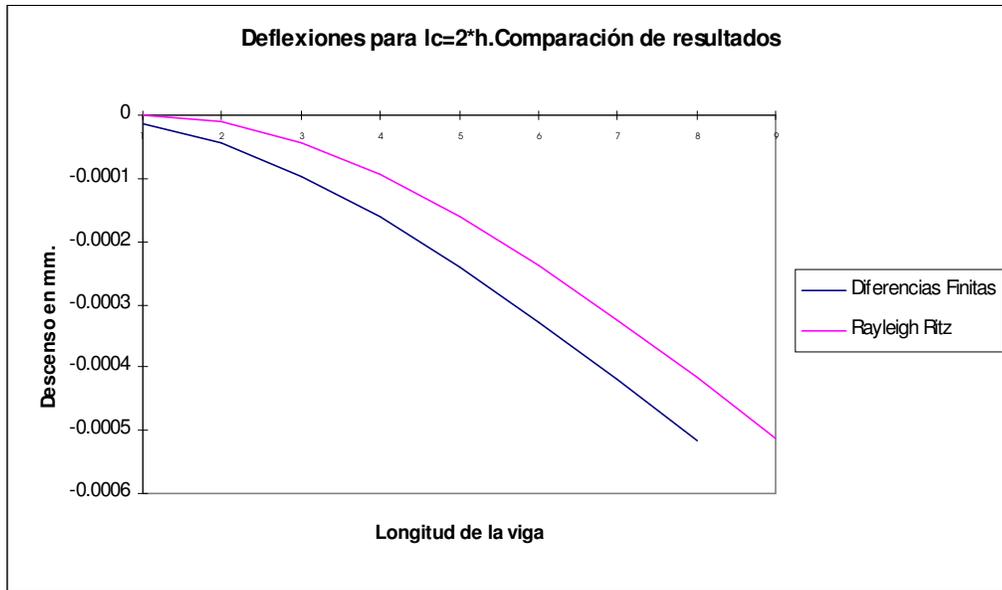


Figura 3.5.- Longitud característica = $2 \cdot h$. Comparación de resultados

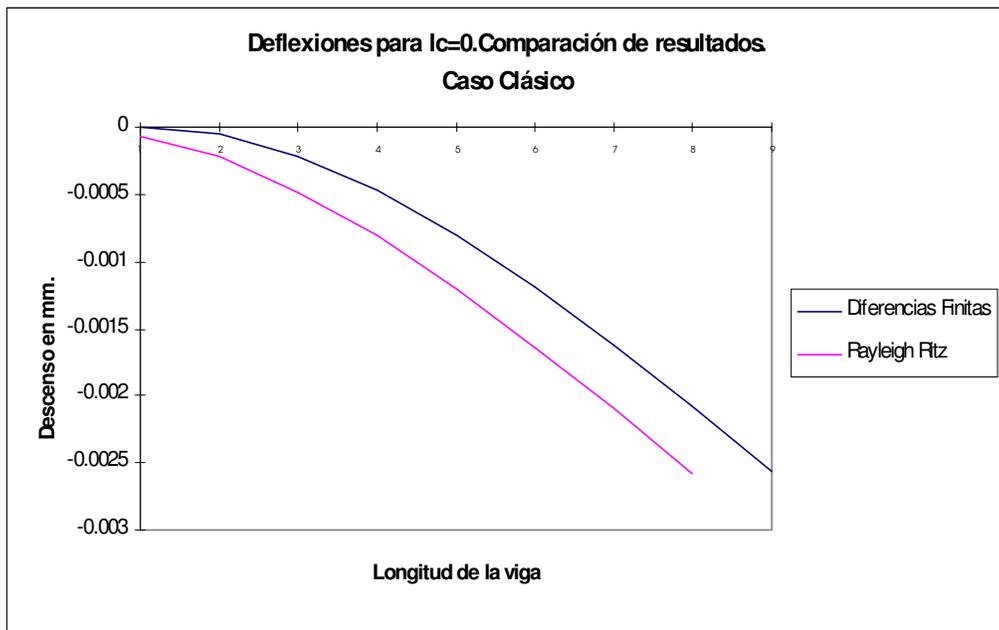


Figura 3.6.- Longitud característica = 0. Comparación de resultados

CAPITULO 4

4.-Teoria del Flujo de la Plasticidad

4.1.- Elastoplasticidad en Continuos Clásicos

Se asume que el material es isotrópico y permanece isotrópico a través de toda la historia de carga. Además se considera que las propiedades del módulo de elasticidad no se degradan durante el flujo plástico [24]. Como consecuencia de esto la tasa de deformación total que sufre el continuo puede descomponerse en dos partes independientes: una tasa de deformación elástica y una tasa de deformación plástica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \text{o en forma indicial} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (4.1)$$

La respuesta elástica queda definida por la Ley generalizada de Hooke a través del tensor elástico (3.3), definiendo la tasa de tensiones como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = E_0 : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad (4.2)$$

La respuesta plástica está gobernada por la regla de flujo

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot m \quad \text{donde } m = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (4.3)$$

aquí λ es un valor escalar que denota al multiplicador plástico y la función Q define al potencial plástico, que en el caso mas simple coincide con la función de fluencia.

El valor de m define la dirección del flujo plástico.

La condición de fluencia está dada por

$$F = F(\sigma, q) = 0 \quad (4.4)$$

delimitando F la región elástica en el espacio de tensiones, función que depende de las variables históricas q que gobiernan la evolución de esta superficie durante la carga plástica.

Dado que la superficie de carga que resulte de cualquier incremento de tensiones deben conducir a un estado de tensiones que descansa sobre la misma superficie, de la (4.4) se deduce que

$$\dot{F} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} \quad (4.5)$$

lo que tiene el efecto de confinar la trayectoria de tensiones a la superficie de fluencia.

En el caso de carga plástica se desarrollan deformaciones plásticas y el escalar λ es positivo. Para descarga elástica se tiene una función de fluencia negativa donde el escalar λ no se incrementa. Se tendrá entonces una de las dos siguientes situaciones

$$\dot{F} = 0, \quad \dot{\lambda} > 0 \quad \text{Carga plástica} \quad (4.6)$$

$$\dot{F} < 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \text{Descarga elástica} \quad (4.7)$$

Denotando con n la dirección normal a la superficie de fluencia dada por

$$n = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (4.8)$$

y definiendo el parámetro de endurecimiento

$$H_p = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} \quad (4.9)$$

la condición de consistencia (4.5) puede expresarse de la forma

$$\dot{F} = n : \dot{\sigma} - H_p \dot{\lambda} = 0 \quad (4.10)$$

Como en general las variables de endurecimiento q son función del tensor de deformación plástico, se puede obtener el parámetro anterior como

$$H_p = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varepsilon^p} : \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial \lambda} \quad (4.11)$$

Se tienen entonces tres casos posibles

$$\text{endurecimiento} \quad H_p > 0 \quad (4.12)$$

$$\text{plasticidad perfecta} \quad H_p = 0 \quad (4.13)$$

$$\text{ablandamiento} \quad H_p < 0 \quad (4.14)$$

Sustituyendo en la ecuación de consistencia (4.10), las expresiones (4.2), (4.3) y (4.9), obtenemos una expresión explícita para el multiplicador plástico

$$\dot{\lambda} = \frac{n : E_0 : \dot{\varepsilon}}{H_p + n : E_0 : m} = \frac{n : \dot{\sigma}_e}{h_p} \geq 0 \quad (4.15)$$

donde se asume que

$$h_p = H_p + n : E_0 : m > 0 \quad (4.16)$$

dado que, en carga plástica

$$n : \dot{\sigma}_e > 0 \quad (\dot{\lambda} > 0) \quad (4.17)$$

y en descarga

$$n : \dot{\sigma}_e < 0 \quad (\dot{\lambda} = 0) \quad (4.18)$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.2) podemos obtener la ecuación constitutiva elastoplástica

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E_0(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) = E_0 : (\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} m) = \\ &= E_0 : \dot{\epsilon} - E_0 : m \frac{n : E_0 : \dot{\epsilon}}{H_p + n : E_0 : m} = \\ &= \left(E_0 - \frac{E_0 : m \otimes n : E_0}{H_p + n : E_0 : m} \right) : \dot{\epsilon} = E_t : \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Siendo E_t el Operador Material Elastoplástico Tangente

$$E_t = E_0 - \frac{E_0 : m \otimes n : E_0}{H_p + n : E_0 : m} \quad (4.20)$$

que en el caso de tratarse de condición de flujo asociado es decir $n = m$ o $F = Q$ preserva las condiciones de simetría del operador material elástico E_0 .

4.2.- Elastoplasticidad en Continuos Micropolares

Como en el continuo clásico, la función de fluencia se define [6], [11], [14] en el espacio de tensiones, ahora extendido con los momentos tensionales

$$F(\Sigma, q) = 0 \quad (4.21)$$

donde q representa al conjunto de variables históricas que definen la evolución de la superficie de fluencia durante la historia de carga.

La tasa de deformación total viene dada ahora por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \text{y} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_e + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p \quad (4.22)$$

El incremento de tensiones resulta entonces

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} \end{Bmatrix} = E_0 : (\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_p) = \begin{bmatrix} E_0^{uu} & E_0^{u\omega} \\ E_0^{\omega u} & E_0^{\omega\omega} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

y la regla de flujo plástica

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \cdot m = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} m^\sigma \\ m^\mu \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma} \\ \partial Q / \partial \boldsymbol{\mu} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Siendo $Q = Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, q)$ potencial plástico.

La condición de consistencia puede expresarse de la forma

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} : \dot{\lambda} = 0 = n^\sigma : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + n^\mu : \dot{\boldsymbol{\mu}} - H_p \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (4.25)$$

donde m^σ y m^μ representan los gradientes del potencial plástico y n^σ y n^μ , los gradientes de la función de fluencia.

La condición de consistencia $\dot{F} = 0$ permite evaluar el multiplicador plástico $\dot{\lambda}$, el cual indica la carga plástica que se induce por deformación o por curvatura.

$$\dot{\lambda} = \frac{n^t : E_0 : \dot{\boldsymbol{\xi}}}{h_p} \quad \text{con} \quad h_p = H_p + n^t : E_0 : m \quad (4.26)$$

Las ecuaciones constitutivas elastoplásticas pueden formularse de manera compacta, como

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = E_{ep} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (4.27)$$

donde el operador material elastoplástico está formado por cuatro particiones

$$E_{ep} = \begin{bmatrix} E_{ep}^{uu} & E_{ep}^{u\omega} \\ E_{ep}^{\omega u} & E_{ep}^{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Si se verifica en el comportamiento elástico, que no hay acoplamiento membrana-
viga, es decir que $E_0^{u\omega} = E_0^{\omega u} = 0$, el valor de las particiones del tensor
elastoplástico es

$$E_{ep}^{uu} = E_0^{uu} - \frac{1}{h_p} * E_0^{uu} : m^u \otimes n^u : E_0^{uu} \quad (4.29)$$

$$E_{ep}^{u\omega} = -\frac{1}{h_p} * E_0^{uu} : m^u \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega} \quad (4.30)$$

$$E_{ep}^{\omega u} = -\frac{1}{h_p} * E_0^{\omega\omega} : m^\omega \otimes n^u : E_0^{uu} \quad (4.31)$$

$$E_{ep}^{\omega\omega} = E_0^{\omega\omega} - \frac{1}{h_p} * E_0^{\omega\omega} : m^\omega \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega} \quad (4.32)$$

La función escalar del denominador es

$$h_p = H_p + n^\sigma : E_0^{uu} : m^u + n^\omega : E_0^{\omega\omega} : m^\omega \quad (4.33)$$

En este caso los operadores que corresponden a los acoplamientos solo contienen
las contribuciones plásticas.

En el caso de plasticidad asociada ($m^u = n^u, m^\omega = n^\omega$) se satisface

$$E_{ep}^{u\omega} = \left(E_{ep}^{\omega u} \right)^t \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad E_{ijkl}^{u\omega} = E_{klij}^{\omega u} \quad (4.34)$$

En el caso de existir endurecimiento, las variables que representan la historia de
carga, son definidas como función de las componentes de deformación plástica.

De la ecuación (4.25) , con la notación

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -H_p \quad (4.35)$$

y aplicando la regla de diferenciación, se deduce

$$-H_p = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \xi} \right)^t \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} \quad (4.36)$$

Para el caso de endurecimiento isotrópico, definimos la deformación plástica equivalente como

$$\dot{\xi}_p = \sqrt{\dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p + lc^2 \cdot \dot{\kappa}_p : \dot{\kappa}_p} \quad (4.37)$$

que representa una medida escalar de la trayectoria de deformación plástica.

4.3.- Modelo elastoplástico de Von Mises

4.3.1.- Continuo clásico de Boltzmann

De acuerdo a este criterio de fluencia desarrollado para metales, la fluencia se inicia cuando el segundo invariante desviatorico de tensiones alcanza un cierto valor [5], [9], [10] , es decir que

$$J_2 < k^2 \quad \text{rango elástico} \quad (4.38)$$

$$J_2 = k^2 \quad \text{condición de fluencia} \quad (4.39)$$

por lo que se denomina también criterio J_2 .

El segundo invariante de tensiones está definido en el continuo clásico como

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \quad (4.40)$$

Si se considera un estado simple de tracción uniaxial

$$\sigma_{11} = \sigma_{ft}$$

en el que σ_{ft} representa el valor de la tensión de fluencia en tracción. Si el material es isotrópico

$$\sigma_{ft} = \sigma_{fc} = \sigma_f$$

por lo que, teniendo en cuenta las expresiones de las ecuaciones (4.39) y (4.40), la condición de fluencia puede expresarse

$$\frac{1}{3}\sigma_1^2 = k^2 = \frac{1}{3}\sigma_f^2 \quad (4.41)$$

Esta condición en el plano octaédrico, en el que el valor de la coordenada R esta dado por

$$R = \sqrt{2J_2} \quad (4.42)$$

se representa en la Fig. 4.1

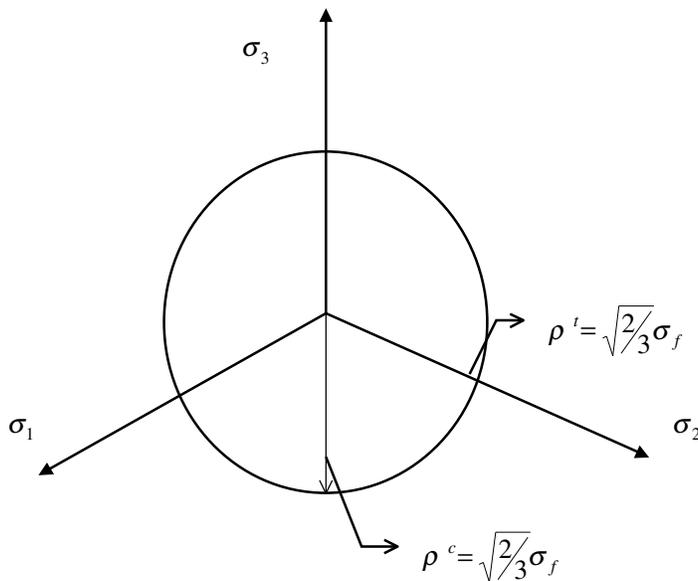


Figura 4.1.- Representación del criterio de fluencia de Von Mises. Plano Octaédrico.

La condición de fluencia se expresa en general como

$$F(\sigma, \mu) = 0 = \sqrt{3J_2} - Y(\varepsilon_p, \kappa_p) \quad (4.42)$$

La función de endurecimiento puede tener la forma de una función lineal del parámetro q de la forma

$$Y(\varepsilon_p, \kappa_p) = Y(q) = Y_0 + E_p \cdot q \quad (4.43)$$

que sigue una ley de evolución

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (4.44)$$

En el caso mas simple de plasticidad asociada, los valores de deformaciones y de las microcurvaturas se determinan a través de las expresiones

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2\sqrt{3J_2}} s_{ij} \quad (4.45)$$

con lo que reemplazando en la expresión del parámetro de endurecimiento (ec.4.44), se tiene

$$\dot{q} = \dot{\lambda} \frac{1}{\sqrt{3J_2}} \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} \cdot s_{ij}} = \dot{\lambda} \quad (4.46)$$

de manera que en la plasticidad clásica, se tiene igualdad entre el parámetro de endurecimiento y el multiplicador plástico.

4.3.2.- Continuos Cosserat

La condición de fluencia J_2 o plasticidad de Von Mises requiere de la determinación del segundo invariante del tensor desviatorico de tensiones, que viene dado en los continuos micropolares [14], por

$$J_2 = \frac{1}{2}(s^s : s^s + \frac{1}{l_c^2} \mu : \mu) \quad (4.47)$$

$$\text{con } s^s = \frac{s + s^t}{2} \quad \text{y} \quad s = \sigma - \frac{\text{tr}(\sigma)}{3} \quad (4.48)$$

La expresión de la ecuación (4.43) involucra el valor del parámetro de endurecimiento que sigue una ley de evolución

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{1}{3} \varepsilon_{ij}^p \cdot \varepsilon_{ij}^p + \frac{1}{3} \varepsilon_{ij}^p \cdot \varepsilon_{ji}^p + \frac{2}{3} \kappa_{ij}^p \cdot \kappa_{ij}^p \cdot l_c^2} \quad (4.49)$$

Considerando la condición de plasticidad asociada, se determinan los valores de deformaciones y de las microcurvaturas con las expresiones

$$\varepsilon_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{3}{4\sqrt{3}J_2} (s_{ij} + s_{ji}) \quad (4.50)$$

y

$$\kappa_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mu_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2\sqrt{3}J_2} \frac{\mu_{ij}}{l_c^2} \quad (4.51)$$

con lo que reemplazando en la expresión del parámetro de endurecimiento (ec. 4.49), se tiene

$$\dot{q} = \dot{\lambda} \frac{1}{\sqrt{3}J_2} \sqrt{3 \left(\frac{1}{4} s_{ij} \cdot s_{ij} + \frac{1}{4} s_{ij} \cdot s_{ji} + \frac{1}{2} \frac{\mu_{ij} \cdot \mu_{ij}}{l_c^2} \right)} = \dot{\lambda} \quad (4.52)$$

que indica que se mantiene la igualdad entre el parámetro de endurecimiento y el multiplicador plástico.

CAPITULO 5

5.- Modelo Micropolar de Cosserat basado en Energia de Fractura

5.1.- Introducción

Para predecir la respuesta estructural del hormigón mas allá del límite lineal elástico se han propuesto numerosos modelos. Estos deben ser capaces de reproducir el comportamiento de respuesta triaxial tan bien como las condiciones de falla frágil en tracción o el comportamiento dúctil observado en compresión con alto confinamiento, así como las transiciones entre estos estados.

La mayor dificultad en los modelos desarrollados radica en el hecho de que ese material exhibe un complejo comportamiento no lineal, dilatación, histéresis, ablandamiento, cambios en la resistencia con la presión de confinamiento y una respuesta fuertemente dependiente del camino de carga. En la búsqueda de cubrir las respuestas observadas en el espectro total de las historias de carga, se han desarrollado modelos basados en elasticidad no lineal, elastoplasticidad con ablandamiento y endurecimiento, degradación elástica basada en formulaciones de daño mecánico, y otras [6], [10].

En el presente capítulo se ha tomado como modelo el llamado Modelo Extendido de León, [17], [18], [40], [50], que describe la respuesta no lineal y el

comportamiento de falla del hormigón para un amplio espectro de historias de carga, que incluyen tracción y compresión con bajo y alto confinamiento.

Se pretende incorporar a este modelo la teoría micropolar de Cosserat, con el objeto de estudiar los resultados que se obtienen.

5.2.- Modelo Extendido de Leon para Continuos de Boltzmann

5.2.1.- Generalidades del Modelo de León

En este modelo, el criterio de falla considerado es el propuesto por León y extendido luego por Hoek y Brown, el cual combina dos parámetros: el de la ley de fricción de Mohr - Coulomb y el de cohesión de Rankine.

Este modelo fue originalmente formulado en términos de las tensiones principales mayor y menor, como una expresión parabólica de la envolvente de falla de Mohr como

$$F(\sigma) = F(\sigma_I, \sigma_{III}) = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{f_c'} \right)^2 + m_0 \left(\frac{\sigma_I}{f_c'} \right) - c_0 = 0 \quad (5.1)$$

siendo:

c_0 : parámetro de cohesión

m_0 : parámetro de fricción

f_c' : resistencia uniaxial de compresión

La calibración del parámetro de fricción en términos de la resistencia uniaxial de tracción con $\sigma_{III} = 0$ y $\sigma_I = f_t'$ conduce a

$$m_0 = \frac{c \cdot f_c'^2 - f_t'^2}{f_c' \cdot f_t'} \quad (5.2)$$

Alternativamente, el criterio de falla de Leon puede expresarse en términos de las coordenadas de tensión de Haigh - Westergard, p, p y τ , siendo

$$p = I_1 / 3 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (5.3)$$

$$\rho = \sqrt{2J_2} \quad (5.4)$$

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{27}J_3}{2J_2^{3/2}} \quad (5.5)$$

en la que la (5.1) toma ahora la forma

$$F(p, \rho, \theta) = \frac{\rho^2}{f_c'} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{m}{f_c'} \left(p + \sqrt{\frac{3}{2}} \rho \cos \theta \right) - c = 0 \quad (5.6)$$

Posteriores modificaciones realizadas por Etse y Willam [18], tendientes a evitar los quiebres en la traza desviat6rica del modelo, llevaron a reemplazar el radio vector desviat6rico por la coordenada polar $\rho.r(\theta)$ donde la segunda se define como

$$r(\theta) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}} \quad (5.10)$$

siendo e la excentricidad, definida como $e = \frac{\rho_t}{\rho_c}$. La coordenada polar $\rho.r(\theta)$ define

la variaci6n el6ptica del par6metro ρ . entre ρ_c y ρ_t , y toma valores entre

$$r(\theta = 0) = \frac{1}{e}$$

$$r(\theta = \pi / 3) = 1$$

La funci6n de fluencia puede ser reformulada como

$$F(p, \rho, \theta) = \frac{3}{2} \left(\frac{\rho.r(\theta)}{f_c'} \right)^2 + \frac{m_0}{f_c'} \left(p + \frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - c = 0 \quad (5.11)$$

Tambi6n fueron desarrollados modelos de ablandamiento y endurecimiento en el r6gimen de pre y postpico que conducen a la incorporaci6n de una constante

adicional k que varía entre $0 \leq k \leq 1$. Entonces, el régimen de respuesta lineal elástica comienza con una posición inicial de la superficie de carga, la cual crece monótonicamente con los incrementos de la deformación inelástica hasta el valor final $k=1$ cuando se alcanza la envolvente de falla del criterio de Leon.

La superficie de continuidad C^1 que constituye la función de fluencia del Modelo Extendido de León, en el régimen de endurecimiento y de ablandamiento, se define por

$$F(p, \rho, \theta, k, c) = \left\{ (1-k) \left(\frac{p}{f_c'} + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6} f_c'} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c'} \right\}^2 + \frac{k^2 \cdot m}{f_c'} \left(p + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (5.12)$$

5.2.2.- Formulación de ablandamiento isotrópico

El ablandamiento del hormigón constituye una manifestación de los drásticos cambios que ocurren en la micro y meso estructura de este material heterogéneo, cuando se propagan microdefectos que devienen en macrodefectos. De modo que el ablandamiento es un fenómeno estructural mas que una propiedad material. Siguiendo el concepto de falla difusa, la degradación de la resistencia se describe en términos de la relación de ablandamiento tensión - deformación , la cual no depende de la configuración del ensayo ni de las condiciones de borde. Con el objeto de superar esta inconsistencia entre el fenómeno de degradación física y la formulación de ablandamiento basada en fisura difusa, se han tomado en el presente trabajo, dos aproximaciones diferentes.

La primera tiene como base la identificación de las propiedades de fractura en el régimen de respuesta postcrítica que son independientes de la particular geometría de los ensayos y de sus condiciones de borde, e incorporar estas propiedades en la relación $\sigma - \varepsilon$. Esto conduce a una formulación de ablandamiento basada en energía de fractura.

La segunda aproximación parte de la incorporación de teorías no locales para suprimir la localización, o sea la bifurcación discontinua a nivel material.

5.2.3.- Degradación de la resistencia triaxial

El modo de falla del hormigón depende de su nivel de confinamiento. En régimen de compresión con bajo confinamiento, existe un punto de transición de fractura frágil - dúctil que separa el comportamiento de ablandamiento frágil del régimen de falla dúctil con pequeña o nula pérdida de resistencia [18].

En el régimen de ablandamiento, la superficie de fluencia considerada esta definida de la forma

$$F(\sigma, \rho, \theta) = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c'} \right]^2 + \frac{m_0}{f_c'} \cdot \left[\sigma + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right] - c = 0 \quad (5.13)$$

Cuando $c \rightarrow 0$, la tracción uniaxial y la resistencia en compresión se aproximan asintóticamente a cero, lo que equivale a una decohesión isotrópica.

En este estado, la resistencia remanente es debida puramente a la resistencia friccional de las partículas. En el límite, la superficie de carga en el régimen de ablandamiento colapsa en la resistencia residual

$$F(\sigma, \rho, \theta) = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c'} \right]^2 + \frac{m_r}{f_c'} \cdot \left[\sigma + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right] = 0 \quad (5.14)$$

Aquí, la envolvente de resistencia residual en el plano meridional, pasa a través del origen O y del punto TP de transición de falla frágil - dúctil, donde se une con la envolvente de resistencia original. Entonces, la degradación de la cohesión está conectada con el endurecimiento friccional simultáneo puesto que el punto de transición permanece fijo.

Los estados de ablandamiento describen la degradación de la resistencia de tracción en términos del parámetro de decohesión

$$c_s = \frac{\sigma_t}{f_t'} \quad \text{donde } 0 \leq c_s \leq 1 \quad \text{y } \sigma_t : \text{ resistencia a la tracción}$$

y el endurecimiento asociado al parámetro de fricción se relaciona al valor de la decohesión a través de

$$m_s = m_r - (m_r - m_0)c_s \quad \text{con } m_0 \leq m_s \leq m_r \quad (5.15)$$

de modo que

$$m = m_0 \quad \text{para} \quad c = c_0 = 1$$

$$m = m_r \quad \text{para} \quad c = c_r = 0$$

5.2.4.- Función de Potencial Plástico

Debido al efecto de Poisson, el corrector de tensiones plásticas no es en general coaxial con la dirección del incremento plástico de las deformaciones, cuando se calculan las predicciones de falla de los modelos de plasticidad de los materiales.. Solo se verifica en el caso de superficies de fluencia cilíndricas [22] que el corrector de tensiones plásticas retorna la tensión elástica de prueba normal a la superficie, en la implementación numérica de los modelos. La condición de flujo no asociado es necesaria para llevar el camino de tensiones hacia la superficie de falla en el espacio de tensiones.

La función de potencial en el contexto del Modelo de Leon, en los casos de implementación de flujo no asociado que se consideran, de acuerdo a Etse y Willam [18], está basada en una modificación del parámetro de fricción y tiene la forma

$$Q(p, \rho, \theta, k, c) = \left\{ (1-k) \left(\frac{p}{f_c'} + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6} f_c'} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c'} \right\}^2 + \frac{k^2}{f_c'} \left(m_q + m \cdot \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (5.16)$$

similar a la función de fluencia excepto por el parámetro m_q que se define en términos de su gradiente como

$$\frac{\partial m_q}{\partial p} = D \exp E x^2 + F \quad (5.17)$$

donde

$$x = \frac{-p + f_c'/3}{f_c'} \quad (5.18)$$

Los parámetros materiales D , E y F son calibrados a partir de tres diferentes ensayos midiendo valores de dilatación en tracción sin confinamiento y compresión con niveles de bajo y alto confinamiento.

5.2.5.- Formulación basada en energía de fractura.

Proceso de homogeneización.

Para formular un modelo constitutivo generalizado en tracción es necesario realizar un proceso de mapeado en el cual una propiedad material localizada, se distribuye en un continuo que es capaz de reproducir la respuesta de ablandamiento del elemento localizado. La formulación de ablandamiento se basa en la homogeneización de la zona de falla localizada en una región finita, siguiendo el modelo de Fractura Compuesta propuesto por Willam, Bicanic, Pramono y Sture [51]. En tracción esto corresponde a proponer un modelo de fractura donde la propagación de la fractura por tracción en un volumen elemental se describe como un proceso de ablandamiento plástico equivalente en el cual se mantiene el valor de la energía de fractura [17], [18], [50].

5.2.5.1.- Modo de Fractura I

El comportamiento de ablandamiento, representado en el espacio de tensiones - desplazamiento de fisura $\sigma - \mu_f$ (figura 5.1), permite valorar al módulo E_d como

$$E_d = \frac{\partial \sigma}{\partial \mu_f} \quad (5.19)$$

Entonces, si se considera un elemento de dimensiones $h_t \cdot b_t \cdot t$, que se fisura en su sección media normal a la dirección de la tensión máxima, la banda de fractura localizada tiene un área $A_t = b_t \cdot t$, normal a la dirección de la tensión normal máxima:

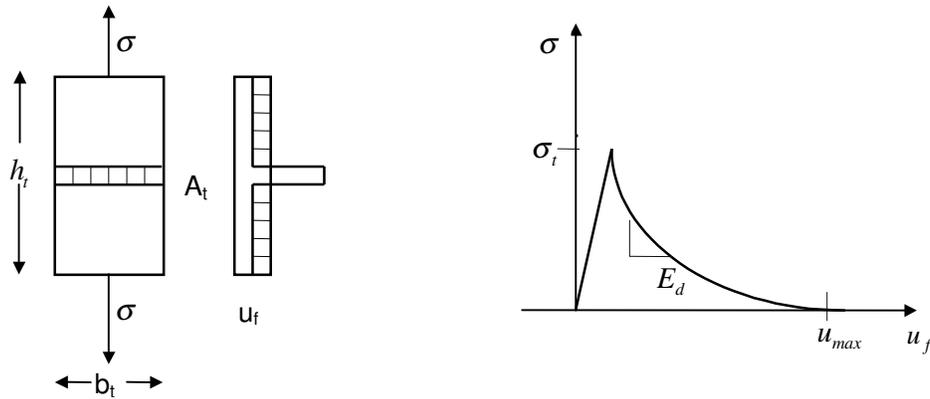


Figura 5.1.- Modo I. Banda de fisura en el elemento. Diagrama de tensiones y desplazamientos

De acuerdo a los datos experimentales, la degradación de la resistencia a la tracción es una función de la apertura de fisura, que para probetas cilíndricas de diferentes alturas, sigue una función exponencial decreciente de la forma

$$\sigma_t(u_f) = f_t' \exp\left(-5 \frac{u_f}{u_r}\right) \quad (5.20)$$

en la cual \$f_t'\$ representa la resistencia uniaxial de tracción y \$u_r\$ el desplazamiento de rotura para tensión residual nula.

La energía de fractura total disipada en el discontinuo tiene el valor :

$$dG_f^I \cdot A_t = \int_{A_t} \sigma_t \cdot du_f \cdot dA \quad (5.21)$$

introduciendo el concepto de tasa de energía de fractura disipada, en el proceso de ablandamiento, cuyo valor esta dado por

$$G_f^I = \int_0^{u_f} \sigma_t \cdot du_t = f_t' \frac{u_r}{5} \left[1 - \exp\left(-5 \frac{u_f}{u_r}\right) \right] \quad (5.22)$$

con G_f^I , valor de la densidad de energía de fractura en el modo I de falla que representa el área bajo la curva del diagrama $\sigma - \mu_f$.

Como resultado del proceso de homogeneización, la energía disipada durante el ablandamiento plástico de un continuo equivalente que reproduce la falla del elemento, de volumen V_t , que se deforma por efecto de la misma tensión de tracción, tendrá el mismo valor que el deducido antes

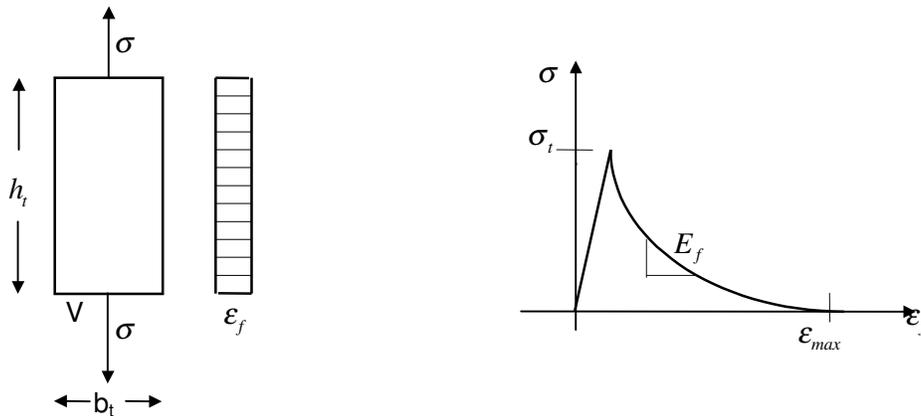


Figura 5.2.- Modo I. Continuo equivalente. Diagrama de tensiones - deformaciones.

El valor de energía disipada

$$dW_f = \int_{V_t} \sigma_t \cdot d\epsilon_f \cdot dV \quad (5.23)$$

donde la magnitud ϵ_f designa la deformación de fractura equivalente en modo de falla I.

Comparando las expresiones obtenidas para el discontinuo y el continuo equivalente, el valor de la apertura de fisura u_f puede expresarse en términos de la deformación de fractura equivalente a través de la magnitud h_t

$$du_f = \frac{V}{A_t} d\epsilon_f = h_t \cdot d\epsilon_f \quad (5.24)$$

La altura h_t representa en este modelo la separación entre fisuras. En el caso de Modo *I* de falla o falla por tracción este valor corresponde a la altura de la pieza. El decaimiento del parámetro de decohesión se calcula con la expresión

$$c = \frac{\sigma_t}{f_t} = 1 \cdot \exp\left[-5 \frac{u_f}{u_r}\right] = \exp\left[-5 \frac{d\varepsilon_f \cdot h_t}{u_r}\right] \quad (5.25)$$

5.2.5.2.- Modo de Fractura II

El modelo de Willam, Bicanic, Pramono y Sture [51] puede extenderse al Modo *II* de falla, efectuándose una generalización de los resultados anteriores, a través de un proceso de homogeneización similar. Se puede observar que en condiciones de bajo confinamiento, se forma una banda de corte inclinada, que puede ser tratada con las mismas consideraciones usadas en el Modo *I*. Se tiene entonces las fisuras en el elemento y en el continuo equivalente que se representan en las figuras 5.3 y 5.4.

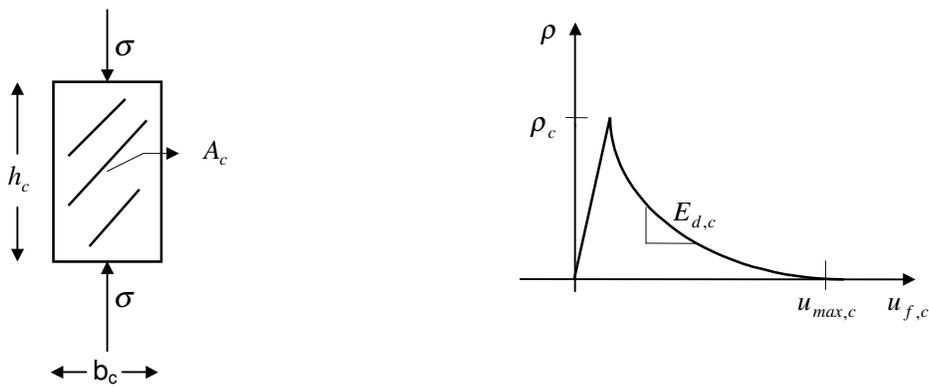


Figura 5.3.- Modo II. Esquema de fisuras en el elemento. Diagrama de tensiones y desplazamientos

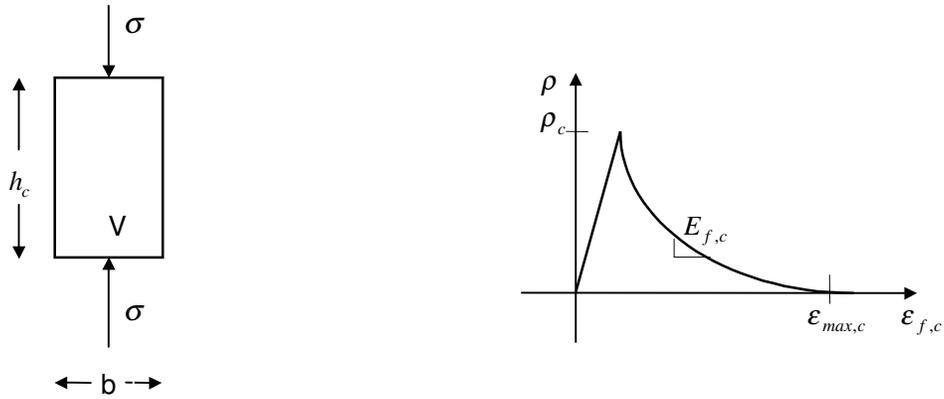


Figura 5.4.- Modo II. Continuo equivalente. Diagrama de tensiones - deformaciones.

Esta consideración involucra un concepto de energía de fractura disipada durante la formación de una banda de corte en una superficie A_c con una altura h_c . Este valor se obtiene de la integral

$$dG_f^{II} . A_c = \int_{A_c} \rho_c . du_{f,c} . dA \quad (5.26)$$

donde u_s corresponde al desplazamiento de rotura para tensión residual nula en el Modo II de fractura. Considerando la relación de la energía de fractura por corte con aquella del continuo equivalente plástico de tamaño V_s , se establece la relación

$$du_{f,c} = d\epsilon_{f,c} . h_c \quad (5.27)$$

y de la misma forma que en el Modo I de fractura, establecemos la relación

$$\rho_c = \rho_c' . \exp \left[-5 . \frac{u_c}{u_r} \right] \quad (5.28)$$

donde ρ_c' la resistencia de compresión que en materiales friccionales es función de la presión volumétrica p .

Como en el Modo I de fractura, la decohesión se expresa como

$$c = \frac{\rho_c}{\rho_c} = 1 \cdot \exp\left[-5 \frac{u_{f,c}}{u_r}\right] = \exp\left[-5 \frac{d\varepsilon_{f,c} \cdot h_c}{u_r}\right] \quad (5.29)$$

5.3.- Modelo Micropolar de Leon

5.3.1.- Función de Fluencia

La formulación del Modelo Extendido de León se realiza considerando la función de fluencia expresada como se indica en la ecuación (5.12), en la cual se ha considerado el valor del endurecimiento $k = 1$

$$F(p, \rho, \theta, k, c) = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c} \right]^2 + \frac{m}{f_c} \left(p + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - c = 0 \quad (5.30)$$

Las coordenadas cilíndricas del espacio de Haigh - Westergaard que determinan el valor de los parámetros del modelo están dadas por las ecuaciones (5.3) y (5.4). La segunda requiere de la determinación del segundo invariante del desviador de tensiones, para el que se adopta [8]

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{s_{ij} \cdot s_{ij} + s_{ij} \cdot s_{ji}}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_{ij} \cdot \mu_{ij} + \mu_{ij} \cdot \mu_{ji}}{lc^2} \right) \quad (5.31)$$

donde la expresión de s_{ij} corresponde a

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot p \quad (5.32)$$

La función del ángulo polar dada por la ecuación (5.10) y se conserva en la presente descripción micropolar. Dado que la determinación de θ , requiere del valor del tercer invariante del desviador de tensiones, ec. (5.5) se ha adoptado para el mismo la forma de los determinantes de las matrices de tensiones y de momentos tensionales

$$s = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$y \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

de manera que el valor de J_3 tiene la forma

$$J_3 = \det(s) + \frac{\det(\mu)}{lc^3} \quad (5.35)$$

Se debe tener en cuenta que los valores de la diagonal principal del tensor de momentos tensionales corresponden a tensiones de torsión, que en general tienen valor nulo.

El parámetro de fricción se relaciona al valor de la decohesión de la forma indicada en la ecuación (5.15).

El valor de la decohesión se determinará posteriormente al analizar la formulación de energía de fractura de los continuos micropolares.

5.3.2.- Formulación de Energía de Fractura. Modo de Fractura Rotacional

Dada que los continuos micropolares presentan grados de libertad adicionales, la formulación de Energía de Fractura debe también contemplarlos.

Una forma de fractura adicional que se produce como consecuencia de los giros o microcurvaturas que se desarrollan en el continuo enriquecido. Se tiene un Modo de Fractura Rotacional, que se agrega a los dos modos de fractura descritos anteriormente.

En este caso las fisuras debidas a los giros que se producen por los grados de libertad rotacionales del Modelo de Cosserat se describen en el elemento de fisura por giro que se muestra en la Fig. 5.5

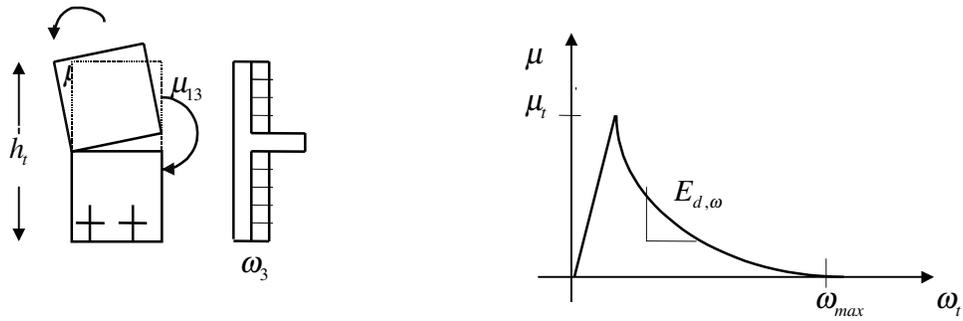


Figura 5.5.- Fractura rotacional en el elemento. Diagrama de momentos tensionales y microrotaciones.

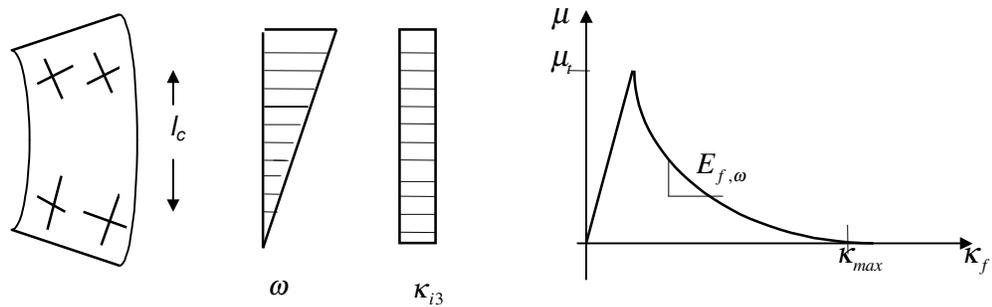


Figura 5.6.- Continuo equivalente. Diagrama de momentos tensionales - microcurvaturas

Como resultado del proceso de homogeneización la energía de fractura disipada por la fractura rotacional en el plano de área A_r toma el valor

$$dG_f^r \cdot A_r = \int_{A_r} \mu_{f,r} \cdot d\mu_f \cdot dA \quad (5.36)$$

que debe ser equivalente a la energía disipada durante el proceso de ablandamiento plástico en el volumen V_r que participa en el proceso de fractura rotacional

$$dW_f^{rot} = \int_{V_r} \mu \cdot d\kappa_f \cdot dV \quad (5.37)$$

donde $\mu \cdot d\kappa_f$ representa el trabajo de las tensiones de momentos o tensiones rotacionales.

En el presente modelo se considera que las micro y macro curvaturas son coincidentes en el continuo equivalente.

Teniendo en cuenta las magnitudes siguientes

$$dA_r = t \cdot dx$$

$$dV_r = t \cdot l_c \cdot dx$$

$$A_r = \int_0^{l_c} t \cdot dx = t \cdot l_c \quad (5.38)$$

$$V_r = \int_0^{l_c} t \cdot l_c \cdot dx = t \cdot l_c^2 \quad (5.39)$$

y las ecuaciones (5.36) y (5.37)

$$dG_f^r \cdot A_c = dW_f^{rot} \quad (5.40)$$

se tiene

$$\int_{A_c} \mu \cdot d\omega_f \cdot dA_c = \int_{A_c} \mu \cdot d\kappa_f \cdot l_c \cdot dA_c \quad (5.41)$$

de donde resulta

$$d\omega_f = d\kappa_f \cdot l_c \quad (5.42)$$

Consideramos para el ablandamiento en el prototipo o discontinuo la función exponencial

$$\mu = \mu_{max} \cdot \exp\left[-5 \frac{\omega_f}{\omega_{max}}\right] = \mu_{max} \cdot \exp\left[-5 \frac{\kappa_f \cdot l_c}{\omega_{max}}\right] \quad (5.43)$$

similar a la considerada en Modo I y Modo II de falla.

El valor de la deformación por tensiones de momentos κ_f corresponde a la microcurvatura de fractura equivalente

$$\dot{\kappa}_f = \sqrt{\dot{\kappa}_p : \dot{\kappa}_p} \quad (5.44)$$

con

$$\dot{\kappa}_{pij} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mu_{ij}} = \dot{\lambda} \cdot m_{\mu} \quad (5.45)$$

Como en el Modo I (tracción) y Modo II (corte) de fractura, también en Modo Rotacional, se puede interpretar que el parámetro que centraliza el proceso de ablandamiento es la cohesión

$$c = \frac{\sigma_t \cdot u}{f_t \cdot u_{max}} \quad (5.46)$$

En régimen de prepico, si se verifica que

$$\sigma_t = f_t \quad \text{y} \quad u = u_{max} \quad \text{implica que} \quad c = 1$$

En procesos de ablandamiento bajo Modo I o Modo II (ver ec. (5.25) y (5.29))

$$c = \exp\left[-5 \cdot \frac{d\varepsilon_f \cdot h_s}{u_r}\right] \cdot 1 \quad \text{ya que} \quad \sigma_t / f_t = 1$$

En ablandamiento bajo Modo Rotacional, la correspondiente expresión de la cohesión será

$$c = \exp\left[-5 \cdot \frac{\kappa_f \cdot l_c^2}{\omega_{max}}\right] \quad \text{con} \quad \frac{\sigma_t}{f_t} = 1 \quad \text{y} \quad u_r = \omega_{max} \cdot l_c$$

En procesos de ablandamiento combinado se tendrá el valor de la decohesión dado por la expresión

$$c = \exp \left[-5 \left(\frac{d\varepsilon_f \cdot h}{u_r} + \frac{d\kappa_c l_c^2}{\omega_{max}} \right) \right] \quad (5.47)$$

que combina el Modo Rotacional de fractura con el Modo I o II.

5.4.- Implementación Computacional

La implementación numérica tiene un rol muy importante en el desarrollo y la aplicación de los modelos constitutivos. La formulación de esta implementación se centra solo en la plasticidad incremental donde las variables de estado internas son función solo del incremento de las deformaciones plásticas [17], [29].

En el análisis de Elementos Finitos usando elementos isoparamétricos, las ecuaciones constitutivas se integran en puntos de Gauss. En cada paso incrementos de deformación son dados o conocidos y las incógnitas son las tensiones resultantes y el valor de las variables plásticas.

Un algoritmo aceptable debe satisfacer condiciones de consistencia con las relaciones constitutivas que se integran y estabilidad numérica, necesarias para obtener convergencia en la solución implementada, y cumplir la condición de consistencia plástica que requiere que el estado de tensiones computado en el algoritmo esté siempre contenido en el dominio elástico.

Un algoritmo para la integración de las ecuaciones constitutivas capaz de cumplir con estas condiciones es el Método de Retorno de Euler. Teniendo en cuenta las relaciones de la plasticidad incremental planteadas (ec. 4.22 y 4.24), la variación de las deformaciones y de las microcurvaturas esta dada por

$$\Delta \varepsilon_p = \varepsilon_p^{n+1} - \varepsilon_p^n = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \dot{\lambda} m_\sigma dt \quad (5.48)$$

$$\Delta \kappa_p = \kappa_p^{n+1} - \kappa_p^n = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \dot{\lambda} m_\mu dt \quad (5.49)$$

El incremento de las tensiones y momentos tensionales se obtiene por las integrales

$$\Delta\sigma = \int_{\Delta t} \dot{\sigma} dt = \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} E_0^{uu} : \dot{\epsilon} dt - \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} E_0^{uu} : \dot{\epsilon}_p dt = E_0^{uu} \Delta\epsilon - \Delta\lambda E_0^{uu} : m_\sigma \quad (5.50)$$

$$\Delta\mu = \int_{\Delta t} \dot{\mu} dt = \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} E_0^{\omega\omega} : \dot{\kappa} dt - \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} E_0^{\omega\omega} : \dot{\kappa}_p dt = E_0^{\omega\omega} \Delta\kappa - \Delta\lambda E_0^{\omega\omega} : m_\kappa \quad (5.51)$$

de modo que en el paso $n+1$ se proyecta un valor de tensión elástica de prueba con valor [10], [8], [22]

$$\sigma_e^{n+1} = \sigma^n + E_0^{uu} \Delta\epsilon \quad (5.52)$$

$$\mu_e^{n+1} = \mu^n + E_0^{\omega\omega} \Delta\kappa \quad (5.53)$$

que se corrige luego descontando el valor del corrector plástico, de modo que

$$\sigma^{n+1} = \sigma_e^{n+1} - \Delta\lambda E_0^{uu} : m_\sigma \quad (5.54)$$

$$\mu^{n+1} = \mu_e^{n+1} - \Delta\lambda E_0^{\omega\omega} : m_\mu \quad (5.55)$$

La figura 5.7 muestra el esquema Predictor - Corrector de la Proyección de Punto Cerrado.

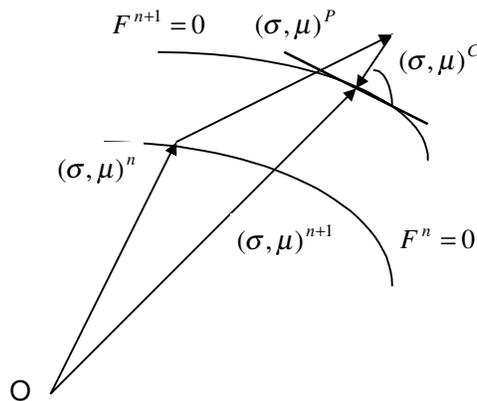


Figura 5.7.- Esquema Predictor - Corrector

Para obtener el valor de las variables de estado se utiliza el algoritmo de iteración de Newton. Con este, el valor de $\Delta\lambda$ en el punto j para el paso $n+1$ en la iteración $i+1$ tiene la forma

$$\left[{}^{n+1}\Delta\lambda^{i+1} \right]_j = \left[{}^{n+1}\Delta\lambda^i \right]_j - \left[\frac{F({}^{n+1}\Delta\lambda^i)}{{}^{n+1}g^i} \right]_j \quad (5.56)$$

con

$$g = \frac{\partial F(\Delta\lambda)}{\partial \Delta\lambda} = n_\sigma : \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} + n_\mu : \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} + \left(\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial \lambda} \quad (5.57)$$

Las iteraciones se interrumpen cuando se verifica la tolerancia dada por

$$\left[\frac{\| {}^{n+1}\Delta\lambda^{i+1} - {}^{n+1}\Delta\lambda^i \|}{\| {}^{n+1}\Delta\lambda^{i+1} \|} \right]_j < tol \quad (5.58)$$

Introduciendo estas expresiones en las ec. (5.54) y (5.55) y teniendo en cuenta los valores dados por las ec. (5.52) y (5.53), la expresión de las tensiones y momentos tensionales en el punto $n+1$ para la iteración $i+1$ se expresa como

$$\left[{}^{n+1}\sigma^{i+1} \right]_j = {}^n\sigma + E_0^{uu} : {}^{n+1}\Delta\varepsilon - \left[({}^{n+1}\Delta\lambda^{i+1}) E_0^{uu} : {}^{n+1}m_\sigma \right]_j \quad (5.59)$$

$$\left[{}^{n+1}\mu^{i+1} \right]_j = {}^n\mu + E_0^{\omega\omega} : {}^{n+1}\Delta\kappa - \left[({}^{n+1}\Delta\lambda^{i+1}) E_0^{\omega\omega} : {}^{n+1}m_\mu \right]_j \quad (5.60)$$

La condición de consistencia se verifica cuando se cumple

$${}^{n+1}\Delta F = 0 \quad (5.61)$$

La forma diferencial de esta condición de consistencia es

$$\begin{aligned} dF|_{I_{n+1}} &= \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \mu} : d\mu + \frac{\partial F}{\partial q} : dq \right]_{I_{n+1}} = \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \mu} : d\mu - E_p : d\lambda \right]_{I_{n+1}} = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

Si se utiliza el Método de iterativo de Newton - Raphson a nivel de equilibrio global, el uso de el tensor tangente definido en las ec. (4.29) a (4.32) destruye la tasa cuadrática de convergencia del esquema iterativo. A los fines de preservar esta tasa de convergencia se deriva un Tensor de Rigidez Tangente Consistente, incorporando un término en las ecuaciones (5.50) y (5.51) que corresponde a las derivadas de la dirección normal de la función de potencial y que se evalúan en el paso final de iteración, en el punto final de tensiones sobre la superficie de fluencia. Haciendo uso de este tensor de rigidez, se alcanza la fluencia con una tasa de convergencia cuadrática, con las iteraciones del Método de Newton - Raphson. Los incrementos diferenciales de tensiones y de momentos tensionales se expresan como

$$d\sigma|_{t_{n+1}} = E_0^{uu} : \left[d\varepsilon - d\lambda m_\sigma - \Delta\lambda \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma} : d\sigma \right]_{t_{n+1}} \quad (5.63)$$

$$d\mu|_{t_{n+1}} = E_0^{\omega\omega} : \left[d\kappa - d\lambda m_\mu - \Delta\lambda \frac{\partial m_\mu}{\partial \mu} : d\mu \right]_{t_{n+1}} \quad (5.64)$$

Estas ecuaciones (5.63) y (5.64) pueden expresarse agrupando términos

$$d\sigma|_{t_{n+1}} = \left[\left((E_0^{uu})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma} \right)^{-1} : (d\varepsilon - d\lambda m_\sigma) \right]_{t_{n+1}} \quad (5.65)$$

$$d\mu|_{t_{n+1}} = \left[\left((E_0^{\omega\omega})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial m_\mu}{\partial \mu} \right)^{-1} : (d\kappa - d\lambda m_\mu) \right]_{t_{n+1}} \quad (5.66)$$

Introduciendo las expresiones (5.65) y (5.66), las componentes del tensor elástico modificado resultan

$$E_m^{uu} = \left((E_0^{uu})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma} \right)^{-1} \quad (5.67)$$

$$E_m^{\omega\omega} = \left((E_0^{\omega\omega})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial m_\mu}{\partial \mu} \right)^{-1} \quad (5.68)$$

Despejando el valor de $d\lambda$ de la ecuación (5.62) y teniendo en cuenta las expresiones (5.67) y (5.68) se obtiene

$$d\lambda = \frac{n_\sigma : E_m^{uu} : d\varepsilon + n_\mu : E_m^{\omega\omega} : d\kappa}{n_\sigma : E_m^{uu} : n_\sigma + n_\mu : E_m^{\omega\omega} : n_\mu + E_p} \quad (5.69)$$

Las ecuaciones diferenciales de las tensiones y momentos tensionales son

$$d\sigma = E_{ep}^{uu} : d\varepsilon + E_{ep}^{u\omega} : d\kappa$$

$$d\mu = E_{ep}^{\omega u} : d\varepsilon + E_{ep}^{\omega\omega} : d\kappa$$

donde las particiones del nuevo operador material tangente tienen la forma

$$E_{ep}^{uu} = E_m^{uu} - \frac{E_m^{uu} : m_\sigma \otimes n_\sigma : E_m^{uu}}{n_\sigma : E_m^{uu} : m_\sigma + n_\mu : E_m^{\omega\omega} : m_\mu + E_p} \quad (5.70)$$

$$E_{ep}^{u\omega} = - \frac{E_m^{uu} : m_\sigma \otimes n_\mu : E_m^{\omega\omega}}{n_\sigma : E_m^{uu} : m_\sigma + n_\mu : E_m^{\omega\omega} : m_\mu + E_p} \quad (5.71)$$

$$E_{ep}^{\omega u} = - \frac{E_m^{\omega\omega} : m_\mu \otimes n_\sigma : E_m^{uu}}{n_\sigma : E_m^{uu} : m_\sigma + n_\mu : E_m^{\omega\omega} : m_\mu + E_p} \quad (5.72)$$

$$E_{ep}^{\omega\omega} = E_m^{\omega\omega} - \frac{E_m^{\omega\omega} : m_\mu \otimes n_\mu : E_m^{\omega\omega}}{n_\sigma : E_m^{uu} : m_\sigma + n_\mu : E_m^{\omega\omega} : m_\mu + E_p} \quad (5.73)$$

siendo

$$E_p = - \frac{\partial F}{\partial q} : H : m_\sigma - \frac{\partial F}{\partial q} : H : m_\mu \quad (5.74)$$

5.5.- Análisis en Estado de deformaciones planas.

Como se señala precedentemente se ha implementado la función de fluencia determinada para la condición de endurecimiento igual a uno que se describe en la ecuación (5.12). Para la condición de flujo no asociado la función de potencial plástico (ec. (5.16)) se simplifica como

$$Q(p, \rho, \theta, k, c) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c} \right)^2 + \frac{1}{f_c} \left(m_q + m \cdot \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - c = 0 \quad (5.75)$$

Los tensores de tensiones y de momentos tensionales tienen la forma

$$s = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

$$y \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

de modo que los invariantes de tensiones toman el valor

$$p = I_1 / 3 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (5.78)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2] + \frac{1}{4} (\sigma_{12} + \sigma_{21})^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu_{13}^2 + \mu_{23}^2}{l_c^2} \quad (5.79)$$

$$J_3 = \frac{1}{9} \sigma_{11}^2 \left(\frac{2}{3} \sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33} \right) + \frac{1}{9} \sigma_{22}^2 \left(\frac{2}{3} \sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33} \right) + \frac{1}{9} \sigma_{33}^2 \left(\frac{2}{3} \sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} \right) + \frac{4}{9} \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{1}{3} [(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma)(\sigma_{12} \sigma_{21})] \quad (5.80)$$

Se ve de estas expresiones que en el segundo invariante desviatorio de tensiones aparece la contribución de los momentos tensionales además de la diferenciación de las tensiones σ_{12} y σ_{21} que tienen diferentes valores, mientras que en el tercer invariante desviatorio desaparece la contribución de las cuplas tensionales.

Los gradientes de la condición de fluencia se expresan

$$n^u = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (5.81)$$

$$n^\omega = \frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \quad (5.82)$$

y los gradientes del potencial plástico como

$$m^u = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (5.83)$$

$$m^\omega = \frac{\partial Q}{\partial \mu} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \mu} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \quad (5.84)$$

lo que es lo mismo

$$n^u = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \theta}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \right] \quad (5.85)$$

$$n^\omega = \frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial J_2}{\partial \mu} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \theta}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mu} + \frac{\partial \theta}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \mu} \right] \quad (5.86)$$

y dada la forma de la función de flujo, en la condición de flujo no asociado

$$m^u = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \frac{1}{f_c} \left(\frac{\partial m_q}{\partial \sigma} - m \right) \quad (5.87)$$

$$m^\omega = \frac{\partial Q}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial \mu} \quad (5.88)$$

En la segunda expresión desaparece la contribución de m_q que al depender de la presión p es constante con respecto a las variables μ .

Los tensores de segundo orden que resultan son asimétricos dada la asimetría de las derivadas con respecto al tercer invariante de tensiones, contenidas en la expresión del ángulo θ .

5.5.1.- Conformación del Tensor elastoplástico

El tensor elastoplástico se obtiene aplicando los tensores de gradiente de la condición de fluencia y del potencial plástico al tensor elástico. Las expresiones de las cuatro particiones resultantes se señalan en las ecuaciones (4.29), (4.30), (4.31) y (4.32). En la condición de flujo asociado, las particiones correspondientes a los acoplamientos, satisfacen la condición

$$E_{ep}^{u\omega} = \left(E_{ep}^{\omega u} \right)^t \quad \text{o sea} \quad E_{ijkl}^{u\omega} = E_{klij}^{\omega u} \quad (5.89)$$

debido a que $n^u = m^u, n^\omega = m^\omega$, condición que se pierde en el caso de flujo no asociado.

Las componentes del tensor elástico, en el estado de deformaciones planas tienen los valores

$$E_{1111}^{uu} = E_{2222}^{uu} = E_{3333}^{uu} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \lambda + 2G \quad (5.90)$$

$$E_{1122}^{uu} = E_{2211}^{uu} = E_{1133}^{uu} = E_{3311}^{uu} = E_{2233}^{uu} = E_{3322}^{uu} = \phi_{13} = \lambda \quad (5.91)$$

$$E_{1212}^{uu} = E_{2121}^{uu} = \left(\frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right) + \left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{2} \right) = G + G_c \quad (5.92)$$

$$E_{1221}^{uu} = E_{2112}^{uu} = \left(\frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right) - \left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{2} \right) = G - G_c \quad (5.93)$$

$$E_{1313}^{\omega\omega} = E_{2323}^{\omega\omega} = \phi_2 = 2\beta l_c^2 \quad (5.94)$$

siendo los restantes valores nulos. Las particiones que abarcan el acoplamiento membrana - viga son nulas en todas sus componentes.

En lo que respecta a los gradientes de fluencia (ec. (5.85)) se tiene como ejemplo, la derivada con respecto a la tensión σ_{11} tiene el valor

$$n_{11}^u = \frac{1}{3} \frac{m}{f_c'} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{3\rho g(\theta)^2}{f_c'^2} + \frac{m g(\theta)}{\sqrt{6}f_c'} \right) (\sigma_{11} - p) +$$

$$+ \left(\frac{3\rho^2 g(\theta)}{f_c'^2} + \frac{m\rho}{\sqrt{6}f_c'} \right) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right)}} \right]$$

$$\cdot \left[\left(\frac{-9\sqrt{3}J_3}{4J_2^{5/2}} \right) 3(\sigma_{11} - p) + \frac{1}{9} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{3/2}} \right) (2\sigma_{11}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) - \sigma_{33}^2 + \sigma_{22}(4\sigma_{33} - 2\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 3\sigma_{12}\sigma_{21}) \right]$$

y la derivada con respecto a σ_{12}

$$n_{12}^u = \frac{1}{3\rho} \left(\frac{3\rho g(\theta)^2}{f_c'^2} + \frac{m g(\theta)}{\sqrt{6}f_c'} \right) \left(\frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{3\rho^2 g(\theta)}{f_c'^2} + \frac{m\rho}{\sqrt{6}f_c'} \right) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right)}} \right] *$$

$$* \left[\left(\frac{-9\sqrt{3}J_3}{4J_2^{5/2}} \right) \left(\frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{3/2}} \right) \sigma_{21}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) \right] \neq n_{21}^u$$

Son nulos valores de las derivadas con respecto a las tensiones σ_{13} , σ_{23} , σ_{31} y σ_{32} con lo que el tensor de gradiente de la función de fluencia correspondiente a las tensiones tiene las componentes

$$n^u = \begin{bmatrix} n_{11}^u & n_{12}^u & 0 \\ n_{21}^u & n_{22}^u & 0 \\ 0 & 0 & n_{33}^u \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

El gradiente derivado de los momentos tensionales (ec.(5.86))

$$n_{13}^{\omega} = \left(\frac{3\rho^2 g(\theta)}{f_c'^2} + \frac{m\rho}{\sqrt{6}f_c'} \right) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right)^2}} \right) \left[\left(\frac{-9\sqrt{3}J_3}{4J_2^{5/2}} \right) \frac{\mu_{13}}{l_c^2} \right]$$

y el tensor de segundo orden de los momentos tensionales solo posee dos componentes

$$n^{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_{13}^{\omega} \\ 0 & 0 & n_{23}^{\omega} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

Analizando el gradiente de la función de potencial, en el caso no asociado (ec. (5.87) y (5.88))

$$m_{11}^u = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}} + \frac{1}{f_c'} \left(\frac{\partial m_q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{11}} - m \right)$$

$$m_{13}^{\omega} = \frac{\partial Q}{\partial \mu_{13}} = \frac{\partial F}{\partial \mu_{13}}$$

Del análisis realizado de la forma que presenta el tensor elastoplástico se tiene que la partición E_{ep}^{uu} no conserva simetría mayor ni menor dada la asimetría del gradiente de la fluencia y del gradiente de potencial, mientras que la partición $E_{ep}^{u\omega}$ resulta distinta de la partición $E_{ep}^{\omega u}$ por la condición impuesta de flujo no asociado. Para la primera los valores no nulos corresponden a aquellos cuyos tercer y cuarto subíndice toma valores 1-3 y 2-3. La segunda tendrá valores diferentes de cero en las componentes cuyos primer y segundo subíndice sean 1-3 y 2-3.

La partición $E_{ep}^{\omega\omega}$ solo tendrá valor en las componentes $E_{1313}^{\omega\omega}$, $E_{1323}^{\omega\omega}$, $E_{2313}^{\omega\omega}$ y $E_{2323}^{\omega\omega}$ siendo las demás nulas.

CAPITULO 6

6.-Indicador de Falla Localizada

6.1.-Clasificación de falla

Dada la función $\phi : \beta \in \mathfrak{R}^3$ y $S \subset \beta$ una superficie que separa el dominio en dos partes β^+ y β^- ($\beta^- \cup \beta^+ = \beta, \beta^- \cap \beta^+ = \emptyset$), el salto de la función ϕ través de la superficie S se define como

$$[[\phi]] = \phi^+ - \phi^- \quad (6.1)$$

Discontinuidad de orden n en un campo cinemático o estático del continuo a través de la superficie S designa la discontinuidad de la n -ésima derivada espacial o temporal del campo correspondiente [14], [27], [28].

La evolución de un proceso de falla, que deviene en la fractura de los materiales puede ser descrito como una transición a través de tres fases, de acuerdo con el grado de continuidad del campo cinemático (de deformaciones o desplazamientos).

- **Falla continua:**

Describe el proceso de falla en el cual se satisfacen las condiciones cinemáticas de compatibilidad.

$$[[\dot{u}]] = 0 \quad \text{y} \quad [[\dot{\epsilon}]] = 0 \quad (6.2)$$

La singularidad del operador material tangente

$$\dot{\sigma} = E_t : \dot{\epsilon} = 0 \quad (6.3)$$

resulta en una tasa de deformación crítica que permanece siempre continua sin exhibir saltos.

- Falla localizada:

El proceso de falla exhibe saltos en el campo de deformaciones en tanto el campo de desplazamientos permanece continuo.

$$[[\dot{u}]] = 0 \quad \text{y} \quad [[\dot{\epsilon}]] \neq 0 \quad (6.4)$$

- Falla discreta:

Designa al proceso de falla que introduce saltos no solo en el campo de las deformaciones sino además en el campo de los desplazamientos. La formación de una discontinuidad en los desplazamientos conduce a un proceso de falla discreto.

$$[[\dot{u}]] \neq 0 \quad \text{y} \quad [[\dot{\epsilon}]] \neq 0 \quad (6.5)$$

6.2.-Continuo Clásico de Boltzmann

La condición de localización detecta la formación de discontinuidades espaciales en el campo cinemático de los desplazamientos a través de la superficie de singularidad S que se presenta en el cuerpo sometido a tensiones.

El continuo posee dos regiones con una frontera común S

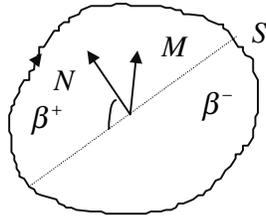


Figura 6.1. Superficie de discontinuidad.

que delimita un lado β^+ y un lado β^- . A través de la frontera S se asume que existe un salto en el gradiente de desplazamientos.

Cuando ocurre una singularidad de segundo orden en el campo de los desplazamientos, se tiene una discontinuidad débil, aún cuando el campo de la tasa de deformaciones permanece continuo

$$[[\dot{u}]] = \dot{u}^+ - \dot{u}^- = 0 \quad (6.6)$$

$$[[\nabla_x \dot{u}]] = \nabla_x \dot{u}^+ - \nabla_x \dot{u}^- \neq 0 \quad (6.7)$$

Aplicando el Teorema de Maxwell, la condición del salto en el gradiente de velocidad debe ser un tensor de segundo orden de rango uno dado por

$$[[\nabla_x \dot{u}]] = \dot{\gamma} M \otimes N \quad (6.8)$$

donde M define la dirección del salto, N la normal a la superficie de discontinuidad y $\dot{\gamma}$ la magnitud de dicho salto. Aplicando la ec. (6.8) a la ec. (2.21), el salto de la tasa de deformaciones será

$$[[\dot{\epsilon}]] = \frac{1}{2}(\nabla_x^t \dot{u} + \nabla_x \dot{u}) = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (N \otimes M + M \otimes N) \quad (6.9)$$

Considerando que a ambos lados de la superficie de singularidad S se tiene un estado plástico y teniendo en cuenta la simetría menor del operador material tangente, el salto de la tasa de tensiones definido en la ecuación (4.19) puede expresarse como

$$\llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = \dot{\gamma} E_t : (N \otimes M) \quad (6.10)$$

El Lema de Cauchy determina que el vector de variación de la tracción a través de la superficie de discontinuidad en el sólido, debe permanecer continuo, es decir que

$$\llbracket \dot{t} \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = 0 \quad (6.11)$$

La condición expresada en la ec. (6.11), combinada con las ecuaciones cinemáticas y constitutivas conduce a

$$\llbracket \dot{t} \rrbracket = (N \cdot E_t \cdot N) \cdot (\dot{\gamma} M) = Q_L \cdot (\dot{\gamma} M) = 0 \quad (6.12)$$

donde $Q_L = N \cdot E_t \cdot N$ denomina al tensor de localización y M , un autovector que define la dirección del salto en la tasa de deformación.

La **condición de localización** se cumple y se inicia el proceso de bifurcación discontinua cuando se verifica la singularidad del tensor de localización, es decir

$$\det(Q_L) = 0 \quad (6.13)$$

De igual manera que en la fractura mecánica, el autovector M determina el modo de falla, indicando el Modo I cuando se cumple $M \parallel N$ y el Modo II para la condición $M \perp N$.

El momento de la historia de carga del continuo en que se verifica la condición de falla localizada merece particular atención en el escenario de falla, dado que a partir de él, las ecuaciones constitutivas elastoplásticas deben satisfacerse a ambos lados de la superficie pero no a través de ella.

En materiales reales, la descarga elástica ocurre en la mayor parte del cuerpo mientras que las deformaciones plásticas se concentran en una banda delgada paralela a la superficie de falla.

6.3.-Continuo Micropolar de Cosserat

Las condiciones de localización derivan de la existencia de una superficie de discontinuidad de segundo orden en el campo cinemático de los desplazamientos u y de las microrotaciones ω , o lo que es lo mismo, una superficie de discontinuidad de primer orden en el campo de las deformaciones ε y de las microcurvaturas κ .

A través de una frontera común S entre las dos regiones que se visualizan en la Figura 6.1 se asume un salto en el gradiente de desplazamientos y de microrotaciones.

En el sólido continuo, los campos de velocidad (ec. (6.6)) y de tasa de rotación son inicialmente continuos [27], es decir

$$\llbracket \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\omega}^+ - \dot{\omega}^- = 0 \quad (6.14)$$

El salto en el gradiente de velocidad se define en la ec. (6.8) y el salto en el gradiente de la tasa de giro

$$\llbracket \nabla_x \dot{\omega} \rrbracket = \nabla_x \dot{\omega}^+ - \nabla_x \dot{\omega}^- \neq 0 \quad (6.15)$$

Aplicando en Teorema de Maxwell a cada campo de gradiente, se obtiene la ec. (6.8) y la expresión para el gradiente de la tasa de microgiros

$$\llbracket \nabla_x \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\gamma}^\omega M^\omega \otimes N \quad (6.16)$$

donde $M = [M^u, M^\omega]$ define la dirección del salto y $\dot{\gamma}^u$ y $\dot{\gamma}^\omega$ son dos escalares que representan las magnitudes de dichos saltos.

Con estas expresiones es posible describir completamente los saltos en la tasa de deformaciones como un tensor de rango uno y orden dos

$$\llbracket \dot{\varepsilon} \rrbracket = \llbracket \nabla_x' \dot{u} - e : \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\gamma}^u N \otimes M^u \quad (6.17)$$

y los saltos en la tasa de microcurvaturas

$$\llbracket \dot{\kappa} \rrbracket = \llbracket \nabla_x' \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\gamma}^\omega N \otimes M^\omega \quad (6.18)$$

Es de notar que las superficies de singularidad de segundo orden requieren discontinuidad de las segundas derivadas parciales. En la expresión de la tasa de deformaciones, la tasa de giros $\dot{\omega}$ puede permanecer continua.

Estas formulaciones de discontinuidad cinemática, en un estado de carga plástica considerado a ambos lados de la superficie de discontinuidad, conducen a un salto en las tensiones y en las cuplas tensionales, si se aplican las ecuaciones constitutivas

$$\llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = E_{ep}^{uu} : \llbracket \dot{\epsilon} \rrbracket + E_{ep}^{u\omega} : \llbracket \dot{\kappa} \rrbracket \quad \text{y} \quad \llbracket \dot{\mu} \rrbracket = E_{ep}^{\omega u} : \llbracket \dot{\epsilon} \rrbracket + E_{ep}^{\omega\omega} : \llbracket \dot{\kappa} \rrbracket \quad (6.19)$$

Dado que se requiere continuidad de los vectores de variación de la tracción debido a su contiguidad, de acuerdo al Lema de Cauchy, se infiere que

$$\llbracket \dot{i}^\sigma \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = 0 \quad \text{y} \quad \llbracket \dot{i}^\mu \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\mu} \rrbracket = 0 \quad (6.20)$$

6.3.1.-Primera condición de localización

Combinando las ecuaciones ((6.20.a) y (6.20.b)) obtenidas para los vectores de tracción con las expresiones de los saltos en las tasas de deformaciones y de microcurvaturas (6.17) (6.18) y con las ecuaciones constitutivas desarrolladas precedentemente, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\llbracket \dot{i}^\sigma \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = N \cdot E_{ep}^{uu} : \dot{\gamma}^u N \otimes M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} : \dot{\gamma}^\omega N \otimes M^\omega = 0 \quad (6.21)$$

$$\llbracket \dot{i}^\mu \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\mu} \rrbracket = N \cdot E_{ep}^{uu} : \dot{\gamma}^u N \otimes M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} : \dot{\gamma}^\omega N \otimes M^\omega = 0 \quad (6.22)$$

de donde se deriva, la **primera condición de localización**

$$N \cdot E_{ep}^{uu} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = Q_L^{uu} \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + Q_L^{u\omega} \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = 0 \quad (6.23)$$

$$N \cdot E_{ep}^{uu} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = Q_L^{\omega u} \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + Q_L^{\omega\omega} \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = 0 \quad (6.24)$$

que en forma compacta puede formularse

$$\begin{bmatrix} Q_L^{uu} & Q_L^{u\omega} \\ Q_L^{\omega u} & Q_L^{\omega\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\gamma}^u \cdot M^u \\ \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

donde el **tensor de localización** Q_L esta definido por sus particiones

$$Q_{ij}^{\eta\xi} = N_k \cdot E_{kij}^{\eta\xi} \cdot N_l \quad \text{siendo} \quad \eta, \xi \in \{u, \omega\} \quad (6.26)$$

Las dos contracciones del tensor elastoplástico de cuarto orden se efectúan en el primer y tercer subíndice.

Para satisfacer la condición de localización, el operador de localización Q_L debe ser singular, o lo que es lo mismo su determinante debe ser cero

$$\det(Q_L) = \det \begin{bmatrix} Q_L^{uu} & Q_L^{u\omega} \\ Q_L^{\omega u} & Q_L^{\omega\omega} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.27)$$

6.3.2.- Segunda condición de localización

La condición anterior es necesaria pero no suficiente ya que solo determina la necesidad de que las tracciones permanezcan continuas a través de la superficie de singularidad considerada. Una segunda condición se deriva del balance del momento angular y lineal [17] en ambos lados de la superficie. Haciendo uso de los conceptos de campos de tensiones y momentos tensionales bifurcados a cada lado de la superficie de singularidad y, considerando las ec. (2.7) y (2.8), la segunda condición de localización toma la forma

$$e : \left[\dot{\sigma} \right] = \dot{S}^u + \dot{S}^\omega = 0 \quad (6.28)$$

Esta condición deberá satisfacerse completamente en forma simultánea con la primera para admitir bifurcación discontinua.

Los dos términos vectoriales de la ec. (6.28) se definen como

$$\dot{S}^u = \dot{\gamma}^u e : E_{ep}^{uu} : (N \otimes M^u) \quad (6.29)$$

$$\dot{S}^\omega = \dot{\gamma}^\omega e : E_{ep}^{\omega\omega} : (N \otimes M^\omega) \quad (6.30)$$

Desarrollando esta segunda condición de localización (ec. (6.28)) se puede deducir que

$$e : \left[\dot{\sigma} \right] = 0 \Leftrightarrow \left[\dot{\sigma} - \dot{\sigma}' \right] = 0 \Leftrightarrow \left[\dot{\sigma}^{skw} \right] = 0 \quad (6.31)$$

es decir que no pueden existir saltos en el tensor antisimétrico de tensiones a través de la superficie S .

6.4.- Modelo Micropolar de Leon. Análisis de Localización

6.4.1.- Primera Condición de Localización

La primera condición de localización, expresada por la ec. (6.27) se cumple cuando el tensor acústico se singulariza. A este fin se implementa la evaluación del determinante del tensor de segundo orden que resulta de dimensiones de 6×6 dadas las particiones del tensor elastoplástico. A cada partición de éste se pre y postmultiplica por un vector (ec. (6.26)) que representa las direcciones de la superficie de singularidad, evaluándose en cada caso el valor del determinante que resulta.

Se puede notar que las particiones del tensor acústico correspondiente al estado plano de deformaciones, tienen las componentes siguientes

$$Q_{ep}^{uu} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{uu} & Q_{12}^{uu} & 0 \\ Q_{21}^{uu} & Q_{22}^{uu} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^{uu} \end{bmatrix} \quad Q_{ep}^{u\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{13}^{u\omega} \\ 0 & 0 & Q_{23}^{u\omega} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$Q_{ep}^{\omega u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q_{31}^{\omega u} & Q_{32}^{\omega u} & 0 \end{bmatrix} \quad Q_{ep}^{\omega \omega} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\omega \omega} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22}^{\omega \omega} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^{\omega \omega} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Los valores ceros de estas particiones no determinan a priori un valor de determinante nulo, por no ser nula una fila o columna de la matriz. La implementación numérica detecta las direcciones para las cuales se verifica la singularidad. Estas coinciden con las direcciones encontradas en la implementación del Modelo Extendido de Leon para el caso clásico [17]. Se puede observar que son nulos los determinantes de las particiones que corresponden a los acoplamientos de desplazamientos y de microgiros para cualquier inclinación de superficie.

En la implementación numérica se observa que es el determinante de la primera partición, correspondiente a $Q_{ep}^{\omega u}$ el que determina la dirección de la superficie de localización ya que el mismo se singulariza para las mismas direcciones que el tensor completo, como se muestra en la Figura 6.5.

En las Figuras 6.2, 6.3 y 6.4 se muestra la comparación de las prestaciones del tensor acústico en el caso clásico y en el caso micropolar, para inclinaciones de planos que varían entre 0 y 360 grados. Las direcciones de superficie de localización obtenidas son $\alpha = 32^0$ y $\alpha = 148^0$, las cuales coinciden con las del Modelo Extendido de Leon clásico [17].

Se consideran los casos de flujo asociado y no asociado para diferentes valores de los parámetros ϕ_2 y ϕ_3 , y para diferentes longitudes características (ver Figuras 6.2 y 6.3). Se implementa además un estado simetrizado de tensiones en la Figura 6.4, de forma que resulta $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

En la Figura 6.2 se considera condición de flujo asociado y de flujo no asociado con valores de Lc igual a uno, siendo Gc mayor que cero, en ambos. Se obtienen los menores valores de la relación entre los determinantes del tensor acústico plástico y elástico para los valores de ángulos $\alpha = 32^0$ y $\alpha = 148^0$, en el caso de no asociatividad. Se observa que cuando la función de fluencia es idéntica a la función de potencial, no se logra singularidad en el determinante del tensor acústico.

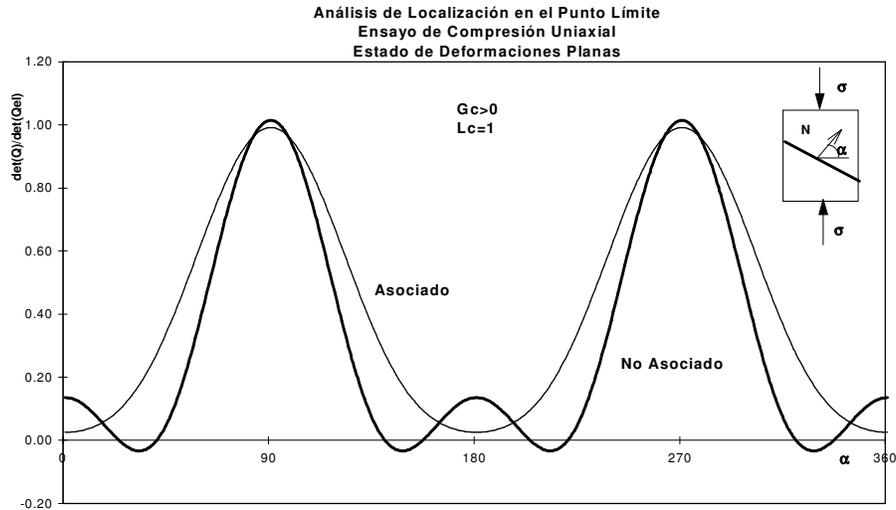


Figura 6.2.- Tensor de Localización. Flujo Asociado y No Asociado. $G_c > 0$

La figura 6.3 muestra los valores obtenidos en condición de flujo asociado y de flujo no asociado para valores de L_c igual a uno, siendo G_c igual a cero en ambos casos.

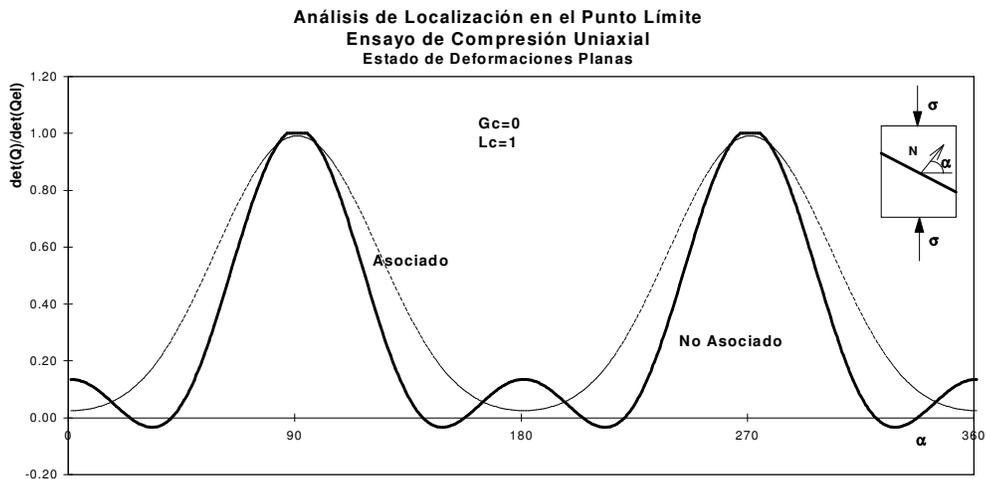


Figura 6.3.- Tensor de Localización. Flujo Asociado y No Asociado. $G_c = 0$

Se obtienen los menores valores de la relación entre los determinantes del tensor acústico plástico y elástico para los valores de ángulos $\alpha = 32^\circ$ y $\alpha = 148^\circ$, solo en flujo no asociado, al igual que en la determinación anterior. Dado que el parámetro G_c es nulo, este estado graficado corresponde a tensiones $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Por último se comparan los estados de tensiones simetrizado y no simetrizado, los dos para la condición de flujo no asociado considerando valores de L_c igual a cero, (G_c igual a cero en ambos casos). Aquí también se obtienen los menores valores del determinante normalizado del tensor acústico para $\alpha = 32^\circ$ y $\alpha = 148^\circ$, pudiéndose observar que los valores obtenidos para ambos casos muestran pequeñas diferencias.

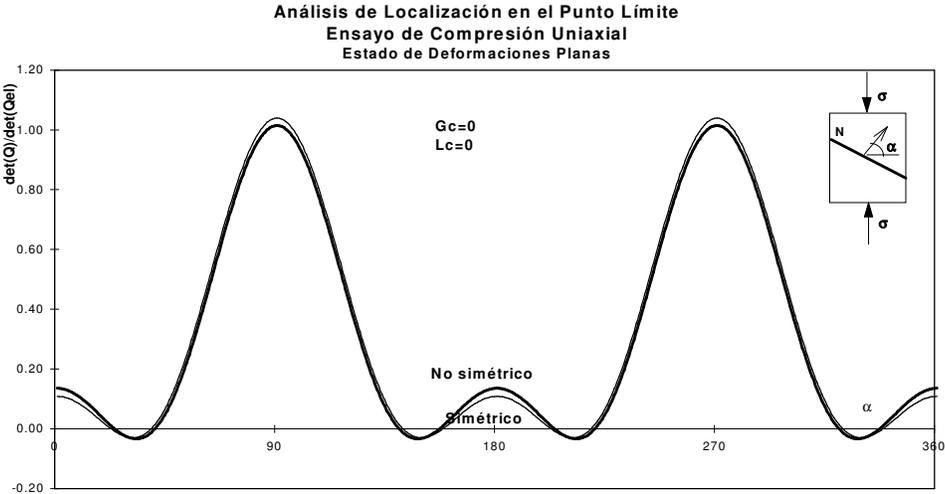


Figura 6.4.- Tensor de Localización. Estado de Tensiones Simétrico y No Simétrico.

A los fines de mostrar la variación de la partición correspondiente a los desplazamientos Q_{ep}^{uu} , se ha confeccionado la gráfica de la Figura 6.5 que como se observa presenta idéntica variación a la del determinante total correspondiente. Los determinantes de las restantes particiones son nulos, que es el caso de las correspondientes a los acoplamientos Q_{ep}^{uw} y Q_{ep}^{wu} , o constante en el caso de la partición de las microcurvaturas $Q_{ep}^{\omega\omega}$.

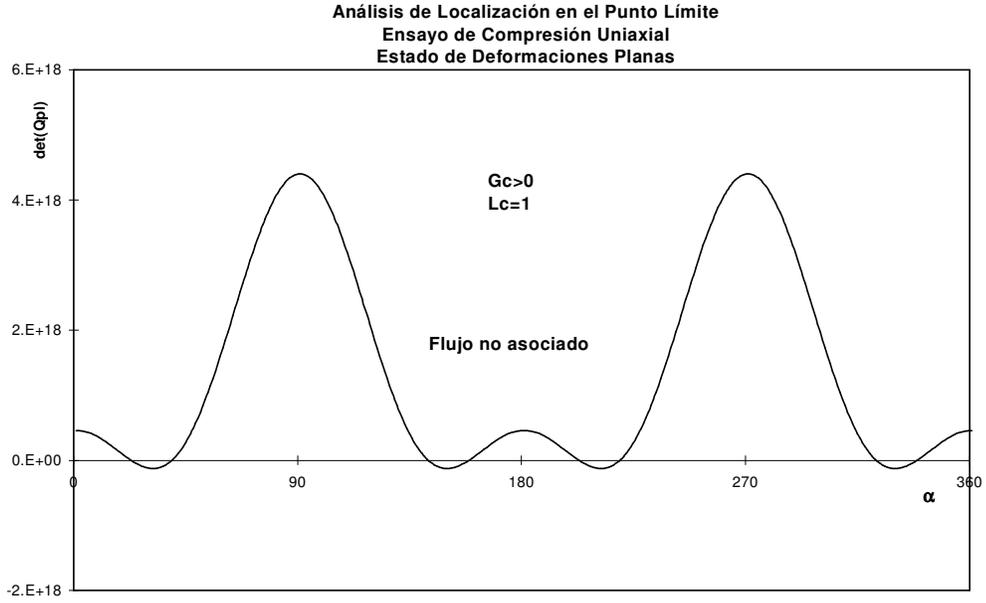


Figura 6.5.- Tensor de Localización. Partición de los Desplazamientos.

6.4.2.- Segunda Condición de Localización

La segunda condición de localización está dada por la expresión de la ecuación (6.28) que se puede expresar como

$$e : [\sigma] = 0 = \gamma^u e : E_{ep}^{uu} : (N \otimes M^u) + \gamma^\omega e : E_{ep}^{u\omega} : (N \otimes M^\omega) \quad (6.34)$$

Teniendo en cuenta la ec. (4.29), el primer término puede escribirse

$$S^u = \gamma^u e : E_{ep}^{uu} : (N \otimes M^u) = \gamma^u e : (E_0^{uu} - \frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^u : E_0^{uu}) : (N \otimes M^u) \quad (6.35)$$

y considerando el valor del tensor elastoplástico de la ec. (4.30), el segundo término se describe

$$S^\omega = \gamma^\omega e : E_{ep}^{\omega\omega} : (N \otimes M^\omega) = \gamma^\omega e : (-\frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega}) : (N \otimes M^\omega) \quad (6.36)$$

Dado la condición expresada en la ec. (6.31), se valora la parte antisimétrica de estos tensores

$$\begin{aligned} \gamma^u e : (E_0^{uu} - \frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^u : E_0^{uu}) : (N \otimes M^u) = \\ = \gamma^u e : (\phi_2 - \phi_3) I_4^{skw} (1 - \frac{1}{h_p} m^u \otimes n^u : E_0^{uu}) : (N \otimes M^u) \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} \gamma^\omega e : (-\frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega}) : (N \otimes M^\omega) = \\ = \gamma^\omega e : (\phi_2 - \phi_3) I_4^{skw} (-\frac{1}{h_p} m^u \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega}) : (N \otimes M^\omega) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Si $\phi_2 = \phi_3$, es decir si $G_c = 0$, la condición de la ec. (6.34) se satisface siempre. En otro caso la implementación del Modelo Extendido de Leon en el marco de la teoría micropolar conduce a tensores de gradiente asimétricos. La segunda condición de localización debe valorarse en forma numérica. Para ello es necesario comprobar la singularidad del tensor de localización y obtenida la dirección de la superficie de singularidad, encontrar el autovector que corresponde a un autovalor nulo, verificándose así la segunda condición.

El modo de falla resultante dependerá de la asimetría de los estados de tensiones evaluados.

Dada la condición adicional de localización que deben satisfacer los continuos micropolares, la implementación de la Teoría de Cosserat en el Modelo Extendido de Leon proporciona una fuerte condición de regularización al suprimir la localización en la forma de bifurcación discontinua.

Si bien esta formulación no simétrica no suprime la localización para toda condición de carga, si reduce notablemente el espectro de estados tensionales o comportamientos de falla asociados con formas localizadas del campo de las deformaciones.

Se hace necesario avanzar en el estudio de esta segunda condición planteada para el caso de gradientes asimétricos con el fin de obtener resultados que permitan evaluar en forma apropiada los casos en los que ambas condiciones se verifican.

CAPITULO 7

7.- Problemas de Valores de Borde con el Método de los Elementos Finitos

7.1.- Criterio de Fluencia de Von Mises. Análisis de la Capacidad Regularizadora de los Continuos Micropolares

Se considera el caso de compresión de la placa de la Figura 7.1 sometida a compresión, bajo el estado de deformación plana. Debido a la doble simetría que presenta el problema planteado se efectuó la discretización de solo un cuarto de la probeta, eliminando en consecuencia la posibilidad de formas no simétricas de falla.

Las condiciones de apoyo planteadas consideran en el borde izquierdo e inferior no solo impedimentos de desplazamiento horizontal y vertical, sino además impedimentos a los giros a fin de garantizar las condiciones de simetría del continuo micropolar.

Las dimensiones de la pieza son: altura total $h=120$ mm, base $b=60$ mm, considerándose espesor unitario $t=1$ mm.

Los parámetros materiales elásticos tomados en el análisis son $E=4.000$ N/mm², $\nu=0,2$, límite de fluencia de 100 N/mm² y módulo plástico de $-0,1 \cdot E$ que define un comportamiento de endurecimiento. Los módulos de Cosserat se tomaron

$G_c=0,5 \cdot G$ y la longitud característica varía en un rango amplio a fin de estudiar su influencia en las predicciones de falla obtenidas.

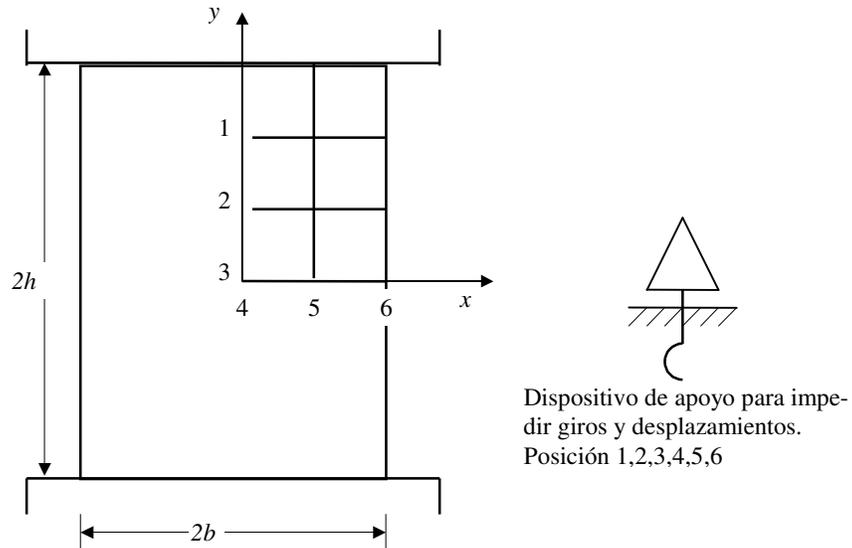


Figura 7.1. Geometría del ensayo de compresión. Criterio de Von Mises

A fin de convertir el problema de bifurcación en un problema de estado límite, se ha introducido en el material una imperfección consistente en una reducción de un 10 % de la tensión de fluencia en el elemento del extremo inferior izquierdo de la malla seleccionada.

En un primer paso se analizan mallas regulares (no direccionadas) de elementos isoparamétricos planos de cuatro nodos, a fin de evitar interferencias en el desarrollo del mecanismo de falla. Sin embargo también se analiza en un segundo paso, la capacidad de los elementos micropolares isoparamétricos de 4 nodos, ubicados en mallas no regulares, para reproducir comportamientos de falla según direcciones no coincidentes con sus lados

La Figura 7.2 muestra los diagramas carga - desplazamiento de la cara superior de las mallas regulares, obtenidos para tres valores de longitud característica ($l_c=0,1 - 10 - 100$ mm). Para cada valor de la longitud característica se consideraron 3 mallas, de 3×6 , de 6×12 y de 12×24 elementos, respectivamente.

Se observa que para valores mayores de longitud característica, se alcanza una objetividad o identidad de las predicciones de los comportamientos carga -

desplazamiento en el régimen de ablandamiento que sigue, luego de alcanzada la resistencia límite.

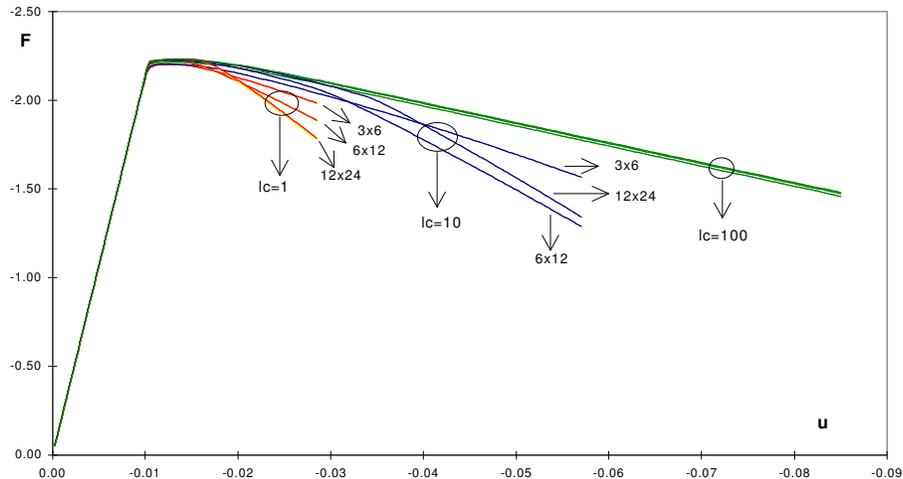


Figura 7.2.- Curvas carga - desplazamiento en mallas regulares de 3x6, de 6x12 y de 12x24 elementos. $L_c = 1, 10, 100$ mm.

Por otro lado, el menor valor de la longitud característica conduce a predicciones fuertemente dependientes de las dimensiones de los elementos, en coincidencia con las correspondientes a la plasticidad clásica. Esto es, reducciones importantes de la longitud característica de Cosserat conducen a soluciones computacionales con las mismas deficiencias que las correspondientes a los sólidos elastoplásticos clásicos o locales, tales como localización y pérdida discontinua de la unicidad. Esto último acontece a su vez por la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones de equilibrio del problema.

La Figura 7.3 muestra las mallas regulares deformadas de 3x6, 6x12 y de 12x24 elementos obtenidas con longitud característica de 0,1. Se observa que para este valor extremo del parámetro, la región involucrada por las deformaciones plásticas, depende fuertemente de la densidad de elementos considerada en la malla. En particular la malla deformada de 12x24 elementos, muestra una marcada localización en comparación con la configuración deformada de la malla de 3x6. Es importante notar que la banda de localización posee una inclinación de 45 grados, similar a la inclinación obtenida con la teoría clásica de Von Mises.

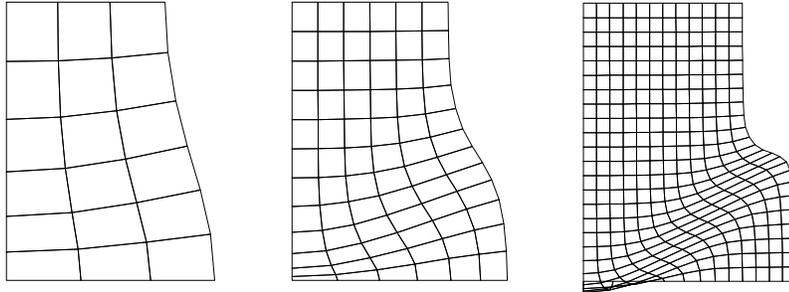


Figura 7.3.- Mallas regulares deformadas de 3x6 , 6x12 y de 12x24 elementos. Longitud característica = 0.1mm.

Para analizar la banda de corte que se desarrolla durante la falla, es de interés la consideración de la distribución del tercer grado de libertad nodal, que corresponde a las microrotaciones. En la Figura 7.4 se indica, en representación tridimensional, la distribución de giros nodales en la malla de 12x24 elementos en las cuales se consideran valores de $l_c = 0,1$ y $l_c = 10$. Valores crecientes de la longitud característica devienen en la supresión de la localización, obteniéndose modos difusos o continuos de falla. Es decir que la inclusión de los giros micropolares regulariza el comportamiento de ablandamiento debido a que las ecuaciones diferenciales de equilibrio conservan su buen condicionamiento durante historias de deformaciones arbitrarias.

A fin de analizar la influencia de la orientación de la malla de elementos isoparamétricos de 4 nodos, en la objetividad de las predicciones de falla, se consideran para el mismo estado de carga de compresión uniaxial, 2 mallas de 8x16 elementos con perturbaciones en las orientaciones de los elementos. En la Figura 7.5 se incluyen las mallas deformadas obtenidas con estos dos casos de análisis.

Se considera una longitud característica de 0,1 mm. La primera de las dos mallas irregulares incluye una densificación de elementos en una dirección de alrededor

de 60 grados, es decir no coincidente con la inclinación propia de la banda de corte.

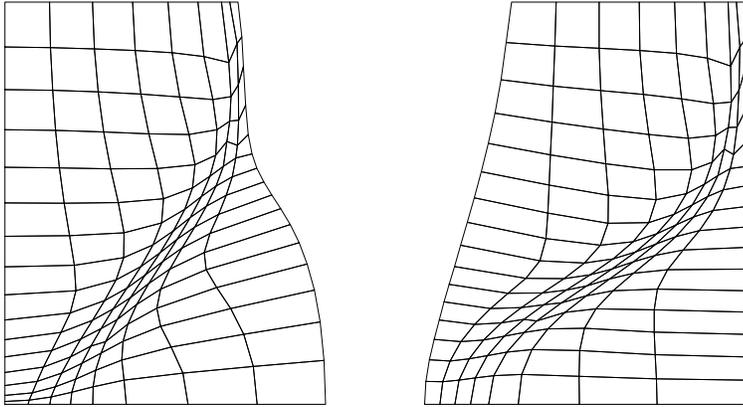


Figura 7.5.- Mallas irregulares deformadas de 8x16 elementos. Longitud característica = 0.1mm.

La segunda malla es idéntica a la primera con la salvedad de que ha sido girada respecto del plano de simetría axial, de forma que la densificación de los elementos ahora posee una inclinación de cerca de 75 grados respecto a la banda de localización que se desarrolla en este ejemplo.

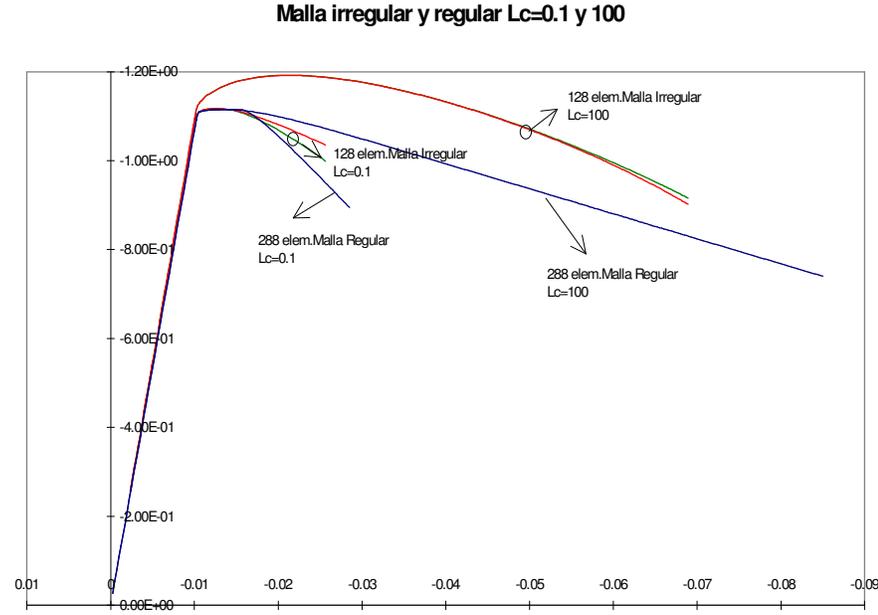


Figura 7.6.- Curvas carga - desplazamiento en mallas irregulares de 8x16 y regular de 12x24 elementos. Lc= 0.1 y 100 mm.

Se concluye que la mayor localización aparece en la malla regular seguida por la malla irregular no girada. La tercera, malla irregular girada, produce una fuerte difusión de la falla, conduciendo a una distribución casi continua de la deformación. La Figura 7.6 muestra las curvas carga - desplazamiento obtenidas con las tres mallas descritas y considerando valores de longitud de Cosserat de 0,1mm y 100 mm.

Se tiene que el mayor valor de este parámetro produce resultados objetivos de las dos mallas irregulares. Sin embargo, las predicciones son mas dúctiles que las correspondientes a la malla regular para igual valor de l_c , con menor cantidad de elementos. Esto permite concluir que la orientación de los elementos isoparamétricos influye de forma notable en las predicciones de falla, aún haciendo uso de teorías regularizantes del ablandamiento como la teoría micropolar de Cosserat.

7.1.1.- Análisis de la Capacidad Regularizadora de los Continuos Micropolares

En la discretización del problema de valores de borde, se extendió la aplicación de las funciones de interpolación lineales a los grados de libertad adicionales que corresponden a los giros micropolares. Los resultados obtenidos muestran que los continuos micropolares de Cosserat brindan objetividad de las soluciones cuando se utilizan valores adecuados de la longitud característica. En este caso las ecuaciones diferenciales de equilibrio no pierden sus características elípticas durante historias de deformaciones cuasiestáticas, obteniéndose modos de falla difusos en lugar de localizados.

Los resultados muestran además que valores bajos de la longitud característica conducen a resultados idénticos a los obtenidos en los continuos elastoplásticos clásicos caracterizados por fuertes dependencias de la densidad de las mallas de elementos finitos.

También se puede establecer que las predicciones obtenidas con continuos micropolares y con elementos isoparamétricos lineales son igualmente sensibles a la orientación de los elementos.

7.2.- Predicciones de Falla en Homigón. Modelo Micropolar de Leon.

Para la implementación numérica del modelo se asume un campo uniforme de propiedades de modo que la respuesta constitutiva del espécimen de hormigón se interpreta como un experimento numérico a nivel de punto material. Se desarrollan pequeños incrementos de desplazamiento a los fines de minimizar errores. El comportamiento del modelo propuesto se grafica en las Figuras 7.7, 7.8, 7.9 y 7.10. El espécimen se discretiza en un cuarto de su dimensión debido a las características de doble simetría que presenta el problema.

La implementación se realiza en el estado plano de deformaciones aplicando desplazamientos.

Las condiciones de apoyo son similares a las usadas en el criterio de fluencia de Von Mises, con dispositivos que impiden tanto los desplazamientos como los giros de los puntos.

Las dimensiones de la pieza son: altura total de 4.25 in. y base de 2.125 in.. El espesor se toma de valor unitario.

El ensayo de tracción se implementa para un valor de la longitud característica igual a la de la altura de la pieza y se compara con la respuesta obtenida con el Modelo extendido de Leon del continuo clásico.

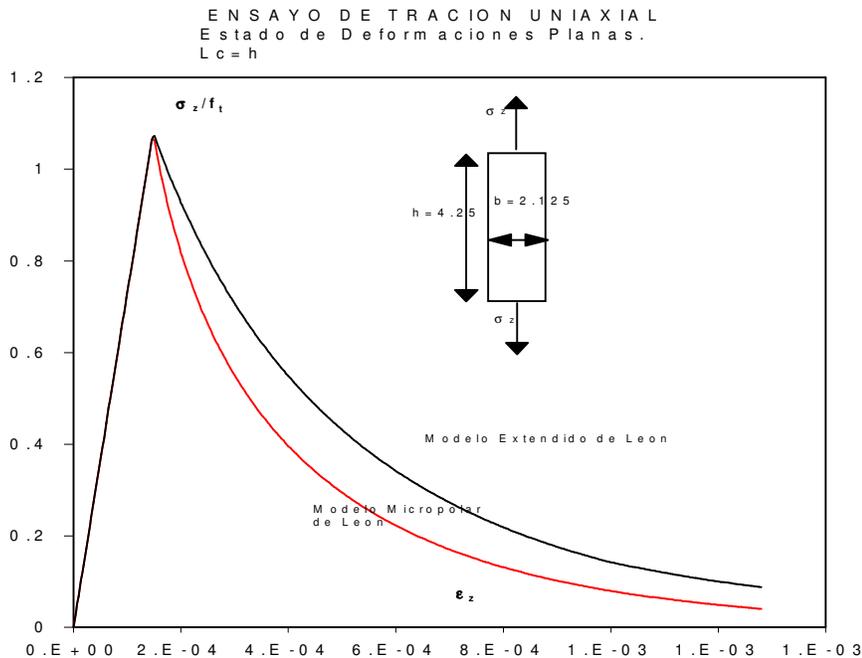


Figura 7.7.- Ensayo de Tracción para el Modelo Extendido de Leon. Comparación con el Modelo Micropolar.

Se puede ver que el Modelo Micropolar predice valores de tensiones de menor magnitud obteniéndose una respuesta mas frágil.

En la Figura 7.8 se muestran los resultados obtenidos para el ensayo de compresión uniaxial, donde se ha considerado el mismo valor de la longitud característica. En este estado de carga se predicen mayores valores para las tensiones obteniéndose un resultado mas dúctil que en la implementación de Leon Clásico.

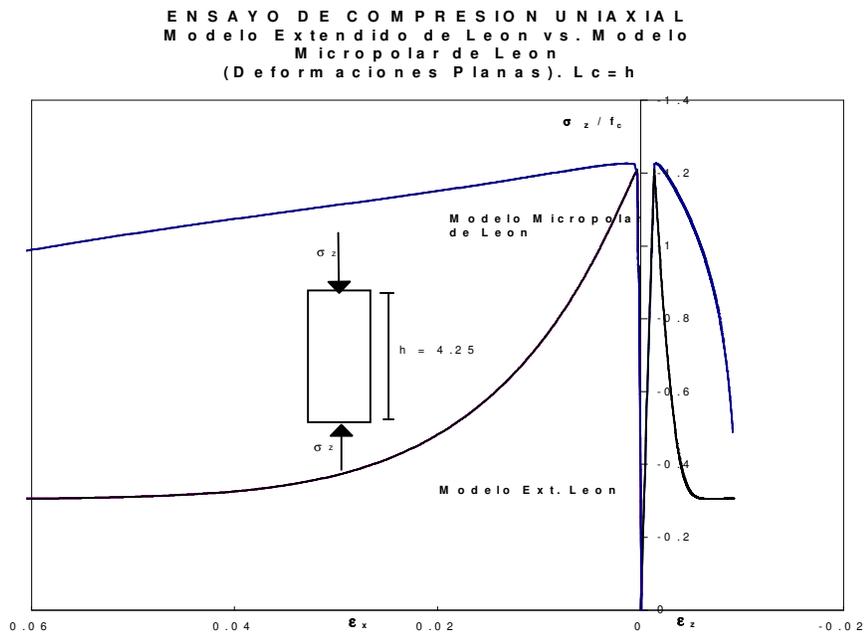


Figura 7.8.- Ensayo de Compresión Uniaxial para el Modelo Extendido de Leon. Comparación con el Modelo Micropolar.

La implementación de la función de potencial descrita en la ecuación 5.16 con valor de endurecimiento unitario para la condición de no asociatividad se muestra en la Figura 7.9, a la par de los resultados obtenidos en el caso asociado, que muestra que el comportamiento del material es muy sensible a la función de potencial que se considera. Como se ve en el gráfico, la condición de no asociatividad reduce la excesiva deformación que predice la regla de flujo asociado.

ENSAYO DE COMPRESION UNIAXIAL
Modelo Micropolar de Leon (Deformaciones Planas)
 $L_c = h$

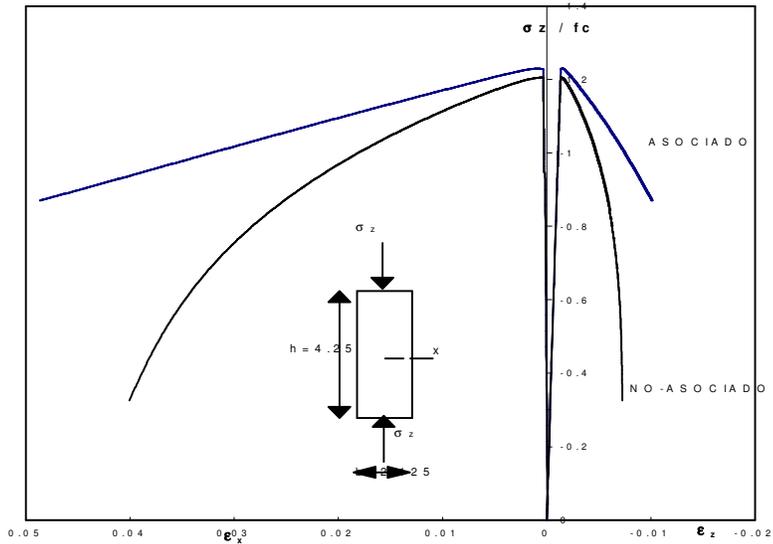


Figura 7.8.- Ensayo de Compresión Uniaxial para el Modelo Micropolar de Leon. Comparación de los casos Asociado y No Asociado.

La implementación del ensayo triaxial de la probeta de hormigón que se grafica en la Figura 7.10, se ha llevado adelante para diferentes niveles de tensión de confinamiento, desde el valor de 100 psi a el de 700 psi.

ENSAYO DE COMPRESION TRIAXIAL
Estado de Deformaciones Planas
 $L_c = h$

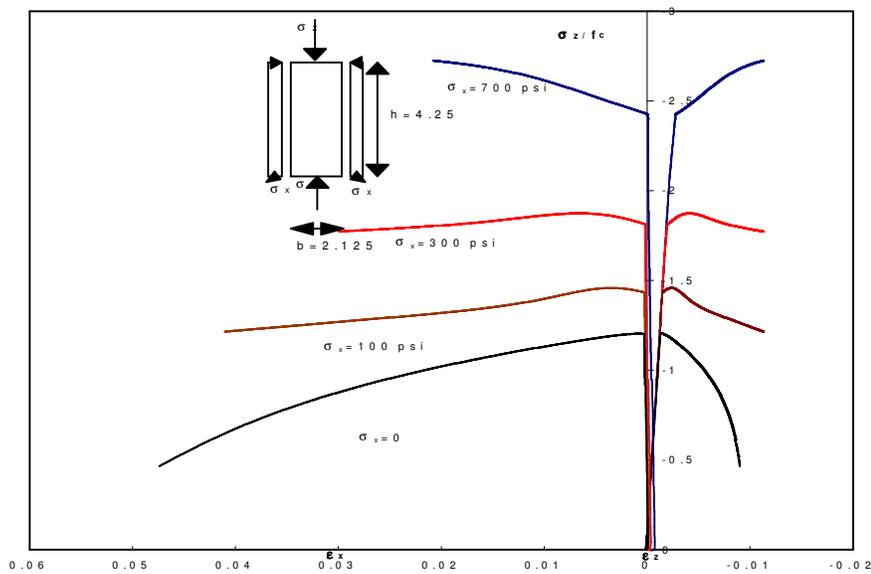


Figura 7.10.- Ensayo de Compresión Triaxial para el Modelo Micropolar de Leon.

Como se ve, el modelo micropolar mapea las variaciones del comportamiento del hormigón frente a las diferentes tensiones de confinamiento de los ensayos, mostrando un comportamiento de ablandamiento para valor de $\sigma_x < 500\text{psi}$ y de endurecimiento por encima de este.

CAPITULO 8

8.- Conclusiones

El presente trabajo tiene por objeto analizar el desempeño de formulaciones materiales con especial énfasis en el estudio de los materiales de tipo cohesivos - friccionales como el hormigón.

La implementación de la teoría micropolar de los hermanos Cosserat en formulaciones planteadas para continuos clásicos pretende analizar la capacidad regularizadora de los primeros.

Se considera en particular el Modelo Extendido de Leon que describe el comportamiento de falla de los hormigones, avanzando en el estudio de la mecánica de fractura para abarcar la forma de fractura que resulta como consecuencia de los grados de libertad adicionales que incorporan la teoría micropolar.

En el capítulo 2 y 3 se revisan las ecuaciones básicas de la estática, la cinemática, las características de los tensores de tensiones y deformaciones y los conceptos de la elasticidad lineal. En este punto se analiza un problema de valores de borde de flexión simple elástica lineal que conducen a resultados que muestran que los continuos de Cosserat predicen menores deflexiones cuanto mayor es el valor de uno de sus parámetros, la longitud característica, recuperándose los valores del continuo clásica cuando esta toma el valor cero.

En el capítulo 4 se describen las ecuaciones de la elastoplasticidad, la teoría de fluencia y del flujo plástico y se estudia el criterio de fluencia de Von Mises, con las particularidades que presenta formulación micropolar, encontrándose que, como en el caso clásico, se conserva la igualdad del parámetro de endurecimiento con el multiplicador plástico.

El modelo elegido para estudiar el comportamiento elastoplástico del hormigón, el Modelo Extendido de Leon, se describe en el capítulo 5, señalando sus características en los continuos de Boltzmann. En particular se analiza la formulación de ablandamiento basada en el concepto de energía de fractura, señalándose los dos modos de falla que conducen a las expresiones de la decohesión que varía en forma exponencial con el valor de apertura de las fisuras que se producen en cada caso.

Posteriormente, a los efectos de considerar la influencia que tiene la adición de los microgiros de Cosserat, se formula un nuevo modo de fractura rotacional, para el que se evalúa la decohesión con variación que se asume exponencial como en los modos I y II .

Luego de esto se describen las técnicas utilizadas en la implementación computacional, dirigidas a la minimización de los errores numéricos. Se incorpora a este fin, un operador material elastoplástico tangente con el cual se pretende conservar la tasa cuadrática de convergencia lograda con el método de iteración de Newton Raphson.

El estudio de la falla localizada que se describe en el capítulo 6 abarca las dos condiciones de localización que deben ser satisfechas en los continuos micropolares. La primera condición se implementa con el criterio de fluencia del Modelo Extendido de Leon para el caso de deformaciones planas, evaluándose la estructura de los gradientes de fluencia y de potencial, y luego la conformación del tensor elastoplástico. La valoración numérica del tensor acústico se realiza considerando diferentes valores de longitud característica y del módulo de corte de Cosserat G_c , en condición de flujo asociado y no asociado, y en estado de tensiones no simétricas y simetrizadas.

Se concluye que en la condición de flujo asociado no se verifica la singularidad del tensor Q_i , en ninguna inclinación de superficie mientras que en flujo no asociado el determinante del tensor de localización se anula en superficies cuyas normales forman ángulos de 32 y 138 grados con la dirección de la tensión principal de compresión, lo que equivale a decir que la fractura se produce en modo mixto de falla. Idénticos valores de inclinación se obtienen en el caso de los continuos clásicos.

El Modelo Extendido de Leon en estos últimos determina gradientes de fluencia y de potencial simétricos mientras que en el caso de los continuos micropolares esta condición se pierde debido a la contribución del tercer invariante desviatorio de tensiones en la función de fluencia. Debido a ello, la segunda condición de localización no permite arribar a simplificaciones en su evaluación analítica que son posibles en los continuos clásicos y esto deriva en la necesidad de su valoración numérica.

El capítulo 7 estudia problemas de valores de borde. En primer lugar se trata un espécimen bajo cargas de compresión uniaxial, ensayado con mallas de elementos finitos regulares e irregulares con perturbaciones en la orientación de los elementos. De los valores que se obtienen se concluye que para mayores longitudes características los continuos micropolares predicen comportamientos de carga - desplazamiento, luego de alcanzada la resistencia límite, que son independientes del tamaño de malla seleccionada, mientras que valores menores del parámetro conducen a similares deficiencias a las detectadas en los continuos de Bolzmann. Sin embargo se ve que una distribución irregular de los elementos con orientaciones que no coinciden con las de la banda de corte, llevan a predicciones de mayor ductilidad que las halladas en mallas regulares.

Se puede deducir de esta implementación que cuando se consideran valores adecuados de la longitud de Cosserat, las ecuaciones diferenciales de equilibrio conservan su elipticidad, suprimiendo la localización, obteniéndose entonces, modos continuos de falla.

La segunda parte aborda el análisis de las respuestas del Modelo Micropolar de Leon y las compara con las del continuo clásico.

Se obtiene para el ensayo de tracción una predicción de menor ductilidad mientras que en el de compresión uniaxial esta aumenta, para un valor de longitud característica igual al de la altura de la pieza.

El ensayo de compresión con diferentes niveles de confinamiento arrojan resultados que mapean la sensibilidad del hormigón a aumento de la presión σ_x , mostrando una respuesta de ablandamiento para valores inferiores a 500 psi, y de endurecimiento para valores mayores.

La condición de no asociatividad implementada muestra, al igual que en continuos clásicos, una reducción considerable de la ductilidad de la respuesta que controla el cambio de volumen inelástico del material.

Se estudian las condiciones de localización en una formulación sofisticada para materiales cohesivos - friccionales como es el Modelo Extendido de Leon, en un primer paso para la comprensión de las propiedades de regularización de los continuos micropolares. La forma de falla en este caso no queda restringida al modo I como en modelos en los que solo participan las componentes simétricas del tensor de tensiones en el desarrollo de la plasticidad.

Si bien se demuestra que los continuos de Cosserat proveen una regularización de los resultados que se obtienen en los continuos clásicos, disminuyendo la dependencia con las mallas de elementos finitos que se seleccionan y limitando la localización a algunos escenarios de carga, se hace necesario avanzar en la implementación de la segunda condición de localización para entender de manera mas general las propiedades regularizantes de la teoría micropolar.

REFERENCIAS:

- [1] ARGYRIS J., MLEJNEK H. (1988).- *Die Methode der Finiten Elemente*. Tomos I, II. Friedr. Vieweg & Shon, Braunschweig / Wiesbaden.
- [2] BATHE K. J. (1986).- *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*. Prentice Hall Inc. New Jersey.
- [3] CAROSIO A. (1997).- *Estudio Teórico Computacional del Comportamiento Tiempo Dependiente de Materiales*. Mag. Thesis of the University of Tucumán.
- [4] COSSERAT, E.y F.(1909).- *Théorie des Corps Déformable*..París
- [5] CHEN W., HAN D. (1988).- *Plasticity for Structural Engineers*. Springer - Verlag. New York - Berlin - Heidelberg.
- [6] DE BORST, R. (1990) *Simulation of Localization using Cosserat Theory*. SCI - C Conf. Proceeding, Eds N. Bicanic & H. Mang, Pineridge Press, Vol II, Pag. 931-944.
- [7] DE BORST R. (1991).- *Simulation of Strain Localization : A Reappraisal of the Cosserat Continuum*. Engr. Comp. 8. Pag. 317-332.
- [8] DE BORST R., MUEHLHAUS H.B (1991).- *Continuum Models for Discontinuous Media*. RILEM Proc. Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics. London. Pag. 601-618.
- [9] DE BORST R. (1993).- *A Generalisation of J2- Flow Theory for Polar Continua*. Comp. Meth. Appl. Engr 103. Pag. 347-362
- [10] DESAI C., SIRIWARDANE J. (1984).- *Constitutive Laws for Engineering Materials*. Prentice Hall.

- [11] DIETSCHKE A., STEINMANN P., WILLAM K. (1991).- *Micropolar Elasto - Plasticity and its Role in Localization Analysis*. III International Symposium on Plasticity and its Current Applications, Eds. J Boehler & A. Khan, Grenoble, Francia. Vol.9. Pag. 813-831.
- [12] DIETSCHKE A., WILLAM K.- *Linear Elastic Cosserat Continua in Finite Elements Model*.
- [13] DIETSCHKE A., WILLAM K. (1995).- *Boundary Effects in Elastoplastic Cosserat Continua*. I.J. Solids Struct. 32.
- [14] DIETSCHKE A.- (1993) *Lokale Effekte in Linear - Elastischen und Elasto - Plastischen Cosserat Kontinua*. PhD Thesis. University of Karlsruhe. Alemania
- [15] DUVAUT G., LIONS J.L. (1972).- *Les Inequations en Mécanique et en Physique*. Dunod. Paris.
- [16] ERINGEN A.C. (1968).- *Theory of Micropolar Elasticity, in Fracture and Advanced Treatise*, Academic Press.
- [17] ETSE G. (1992).- *Theoretische und Numerische Untersuchung zum Diffusen und Lokalisierten Versagen in Beton*. PhD Thesis. University of Karlsruhe. Alemania.
- [18] ETSE G. , WILLAM K. (1993).- *Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavoir of Plain Concrete*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120. Pag. 1983-2009.
- [19] ETSE G., NIETO M. (1996).- *Soluciones de Diferencias Finitas y de Rayleigh - Ritz de Flexión Lineal de Sólidos*. Congreso de Mecánica Computacional . Tucumán. Argentina. Pag. 383-392.

- [20] ETSE G., CAROSIO A., WILLAM K. (1997).- *Limit Point and Localization Analysis of Elastoviscoplastic Material Models*. Submitted to Int.J. on Mechanic of Cohesive - Frictional Materials.
- [21] ETSE G., NIETO M. (1997).- *Teorías Locales y No Locales en Falla Localizada de Sólidos Cohesivos Friccionales*. Congreso de Mecánica Computacional. Bariloche. Argentina. Pag. 775-785.
- [22] GUNTHER W. (1958).- *Zur Statik und Kinematik des Cosserat'schen Kontinums*, Abh. Braunschweig. Wiss.Ges. Pag. 195-213.
- [23] HADAMARD J. (1901) *Sur la Propagation des Ondes*. Bull. Soc. Math. Francia. Pag. 50-60.
- [24] HILL R. (1950).- *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, London.
- [25] HILL R. (1962).- *Acceleration Waves in Solids*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 10. Pag. 1-16.
- [26] HUGHES T. (1987).- *The Finite Element Method*. Prentice Hall International. London.
- [27] IORDACHE M. M. (1996).- *Failure Analysis of Classical and Micropolar Elastoplastic Materials*. PhD Thesis. University of Colorado. Bolder. Pag. 104-167.
- [28] IORDACHE M.M., WILLAM K., CAROL I. (1995).- *Failure Modes of Degradation Process in Cosserat Continua*. Computational Plasticity - Fundamentals and Applications. Pineridge Press. Swansea. Pag. 611-622.
- [28] JEREMIC B. (1994).- *Implicit Integration Rules in Plasticity: Theory and Implementation*. Thesis of the University of Colorado. Pag. 16-82.

- [30] LEON A. (1935).- *Über die Scherfestigkeit des Betons*. Beton und Eisen 34. Pag. 130-135.
- [31] LUBLINER J. (1990).- *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Co. New York
- [32] MALVERN L. (1969).- *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall. New Jersey.
- [33] MINDLIN R.D. (1963).- *Influence of Couple- Stress on Stress Concentration*. Exp. Mech.3. Pag.1-7.
- [34] MUEHLHAUS H.B.(1989).- *Application of Cosserat- Theory in Numerical Solutions of Limit Load Problems*, Ing.-Archiv. 59 . Pag. 124-137.
- [35] OGDEN R. (1984).- *Non Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood Limited. Chirchester
- [36] OTTOSEN N., RUNESSON K. (1991).- *Acceleration Waves in Elastoplasticity*. I.J. Solids Structures 28. Pag. 135-159.
- [37] OWEN D., HINTON E. (1980).- *Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice*. Pineridge Press. Swansea.
- [38] PERZYNA P. (1966).- *Fundamentals Problems in Viscoplasticity. Advances in Applied Mechanics*. Academic Press. New York. Pag. 244-368.
- [39] PONTHOT J. (1995).- *Radial Return Extensions for Viscoplasticity and Lubricated Friction*. Transactions of the 13th SMIRT Int. Conf. Porto Alegre. Brasil. Pag. 711-722.
- [40] PRAMONO E. (1988).- *Numerical Simulation of Distributed and Localized Failure in Concrete*. PhD Thesis, University of Colorado. Bolder.

- [41] RUNESON K., STURE S., WILLAM K. (1988).- *Integration in Computational Plasticity*. Computers & Structures. Vol. 30. Pag. 119-130.
- [42] SCHAEFER H. (1967).- Das Cosserat-Continuum, ZAMM 47. Pag. 34-498.
- [43] STANKOWSKI T. (1990).- *Numerical Simulation of Progressive Failure in Particle Composites*. PhD Thesis. University of Colorado.
- [44] STEINMAN,P.,WILLAM K. (1991).- *Localization within the Framework of Micropolar Elasto - Plasticity*. 60th Anniv. Volume Prof. Lippmann. Eds Springer Verlag. Berlin. Pag. 296-313.
- [45] STEINMAN,P.,WILLAM K. (1994).- *Finite Element Analysis of Spatial Discontinuities due to Elastoplastic Bifurcation*. ASCE J. Engr. Mech. 120.Pag. 2428-2442.
- [46] STEINMAN,P.,WILLAM K. (1994).- *Localization in Micropolar Continua*, Report CU/SR-94/7 (1994)
- [47] TOUPIN R.A. (1964).- *Theories of Elasticity with Couple-stress*, Arch. Rat. Mech. Analysis 17.
- [48] TRUESDELL C., NOLL W. (1992).- *Non Linear Field Theories of Mechanics*. De. Springer - Verlag. Pag. 246-260.
- [49] WILLAM K., WARNKE E. (1975).- *Constitutive Models for the Triaxial Behavior of Concrete*. Int. Assoc. Bridge Struc. Engr. Proc. Vol. 19. Bergamo. Italia.
- [50] WILLAM K., ETSE G. (1990).- *Failure Assessment of the Extended Leon Model for Plain Concrete*. SCI - C Conf.Proceed., Eds N.Bicanic & H.Mang. Pineridge Press. Vol. II. Pag. 851-870.
- [51] WILLAM K., BICANIC N., PRAMONO E., STURE S. (1986).- *Composite Fracture Model for Strain Softening Computations of Concrete*. Fracture

Mechanics of Concrete- Fundamentals and Applications. De Wittmann. Vol I.
Pag. 221-235.

- [52] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R. (1994).- *El método de los Elementos Finitos*. Ed.
Mc Graw Hill. España.