

**INSTITUTO DE ESTRUCTURAS
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN**

**IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS Y EVALUACIÓN DEL
DAÑO ESTRUCTURAL.**

por

Marta Graciela AMANI

Ingeniera Civil

Tesis presentada como requerimiento parcial para acceder al Grado Académico de Doctor en Ingeniería Estructural.

Directores:

Dr. Jorge Daniel RIERA

Dr. Rodolfo DANESI

A M D G

A mi padre...

AGRADECIMIENTOS

Agradezco especialmente al Profesor Jorge D. Riera por la formación que de él recibí, por su paciencia y por el apoyo que brindó a mi familia en estos cinco años.

A Bibiana Luccioni por su invaluable ayuda durante mi doctorado.

Al Programa de Pos-graduación en Ingeniería Civil de la Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS), Brasil por haberme permitido desarrollar parte de mi doctorado en esa universidad.

Al Profesor Marcelo M. Rocha por la colaboración en la realización de los trabajos experimentales.

A los señores Paulo y Flávio de la UFRGS por la ayuda en la construcción de los modelos ensayados.

Al CONICET por su ayuda financiera que hizo posible la realización de mi tesis de doctorado.

A la señora María Rosa de Riera por el apoyo personal que recibí durante mi estadía en Porto Alegre.

A mi esposo y mi hija para quiénes no tengo palabras para agradecer el amor que diariamente recibo.

ÍNDICE

Dedicatoria.....	ii
Agradecimientos.....	iv
Índice.....	v
Lista de símbolos.....	x
Lista de gráficos.....	xiv
Lista de tablas.....	xviii
Resumen.....	xix
Abstract.....	xx
 <i>CAPÍTULO 1: Introducción.</i>	
1.1 Introducción.....	1
1.2 Identificación de sistemas.....	2
1.3 Definición del problema.....	2
1.3.1 Identificación de sistemas en ingeniería civil.....	2
1.3.2 Identificación de daño estructural.....	3
1.4 Objetivos.....	3
1.5 Contenido de la tesis.....	4
 <i>CAPÍTULO 2: Revisión Bibliográfica.</i>	
2.1 Introducción.....	6
2.2 Identificación de sistemas. Estado del arte.....	7
2.2.1 Excitación en estructuras civiles.....	7
2.2.2 Métodos en el dominio de la frecuencia.....	8
2.2.3 Métodos en el dominio del tiempo.....	9
2.3 Identificación del daño estructural. Estado del arte.....	12

2.3.1 Cambio en la frecuencia.....	12
2.3.2 Cambio en las formas modales.....	13
2.3.3 Cambio en las curvaturas de las formas modales.....	13
2.3.4 Métodos basados en la determinación de la flexibilidad dinámica....	13
2.3.5 Métodos de actualización de las matrices del sistema.....	14
2.3.6 Métodos basados en redes neurales	14
2.3.7 Evaluación general de los métodos existentes.....	15

CAPÍTULO 3: Sistema lineales.

3.1 Introducción.....	16
3.2 Sistemas lineales en tiempo continuo.....	17
3.2.1 Ecuación de estado.....	17
3.2.2 Ecuación de observación.....	19
3.2.3 Transformación de similaridad.....	20
3.3 Sistemas bajo acciones estocásticas en tiempos discretos.....	21
3.3.1 Excitación tipo ruido colorido.....	23
3.3.2 Observabilidad y controlabilidad de los sistemas bajo acciones estocásticas.....	24
3.3.3 Presencia de ruido en las mediciones.....	25
3.3.4 Propiedades de los sistemas bajo acciones estocásticas en espacio de estado.....	26
3.4 Conclusiones.....	27

CAPÍTULO 4: Métodos para la identificación de sistemas bajo acciones estocásticas.

4.1 Introducción.....	28
4.2 Sistemas lineales con modos normales.....	29
4.2.1 Obtención de los parámetros modales en sistemas lineales con modos reales.....	30

4.2.2 Ejemplo. Sistema estructural plano simulado.....	31
4.2.2.1 Procedimiento paso a paso para la estimación de los parámetros	33
4.3 Sistemas lineales con modos complejos.....	37
4.3.1 Ejemplo. Sistema estructural plano simulado.....	38
4.4 Método estocástico de subespacios basado en las covarianzas.....	42
4.4.1 Identificación de los modos estructurales.....	45
4.4.2 Ejemplo. Sistema estructural plano simulado.....	46
4.5 Obtención de las matrices de rigidez y amortiguamiento no proporcional	50
4.5.1 ejemplo.....	52
4.6 Conclusiones.....	53

CAPÍTULO 5: Identificación de sistemas en modelo de laboratorio.

5.1 Introducción.....	55
5.2 Ensayo preliminar (Estático).....	56
5.3 Equipamiento para ensayos dinámicos.....	57
5.4 Pórtico en aluminio (modelo A).....	58
5.4.1 Descripción del modelo.....	58
5.4.2 Ensayo dinámico.....	60
5.4.3 Identificación del sistema.....	60
5.4.3.1 Método de identificación basado en las covarianzas.....	61
5.4.3.2 Método de los modos complejos.....	65
5.5 Pórtico de aluminio (modelo B).....	70
5.5.1 Descripción del modelo.....	70
5.5.2 Ensayo dinámico.....	72
5.5.3 Identificación del sistema.....	72

5.5.3.1 Método de identificación basado en las covarianzas.....	72
5.5.3.2 Método de los modos complejos.....	76
5.6 Viga de hormigón armado.....	81
5.6.1 Ensayo dinámico.....	81
5.6.2 Identificación del sistema.....	82
5.6.2.1 Identificación de sistemas basado en las covarianzas.....	82
5.6.2.2 Método de los modos complejos.....	83
5.7 Conclusiones generales.....	87

CAPÍTULO 6: Identificación de daño estructural.

6.1 Introducción.....	89
6.2 Clasificación de los métodos para la identificación del daño estructural....	90
6.3 Localización del daño.....	90
6.4 Cuantificación del daño.....	92
6.4.1 Amortiguamiento proporcional.....	92
6.4.2 Amortiguamiento no proporcional.....	94
6.5 Ejemplos.....	95
6.5.1 Ejemplo 1: Pórtico plano con amortiguamiento proporcional.....	95
6.5.2 Ejemplo 2: Pórtico plano con amortiguamiento no proporcional.....	98
6.5.3 Ejemplo 3: Viga de hormigón armado. Experimental.....	100
6.5.4 Ejemplo 4: Pórtico de aluminio. Experimental.....	103
6.6 Conclusiones.....	108

CAPÍTULO 7: Evolución en los Parámetros Modales frente al Daño Estructural.

7.1 Introducción.....	110
7.2 Análisis experimental.....	111

7.2.1 Resultados experimentales.....	111
7.3 Análisis numérico.....	118
7.4 Comparación de los resultados numérico-experimentales.....	119
7.5 Conclusiones.....	122
<i>CAPÍTULO 8: Conclusiones Finales e Investigaciones Futuras.</i>	
8.1 Introducción.....	123
8.2 Identificación de sistemas estructurales.....	124
8.3 Evaluación del daño estructural.....	126
8.4 Investigaciones futuras.....	127
<i>APÉNDICE A: Ortogonalidad de modos complejos.</i>	
A.1 Propiedades de ortogonalidad.....	129
A.1.1 Prueba de ortogonalidad con respecto a las matrices A y B.....	129
A.1.2 Prueba de ortogonalidad con respecto a la matriz de masa.....	130
<i>APÉNDICE B: Densidad espectral de potencia y función de transferencia.</i>	
B.1 Estimación de la densidad espectral de potencia.....	132
B.2 Función de transferencia de un oscilador lineal de un grado de libertad...	133
<i>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</i>	135

Lista de Símbolos

Reglas generales:

- Las matrices se representan con letras mayúsculas y en negrita.
- La transpuesta de una matriz se representa con superíndice τ
- Complejo conjugado se representa con trazo horizontal sobre el símbolo de matriz, ej. $\bar{\mathbf{B}}$
- Matriz Hermitiana (compleja conjugada transpuesta) se representa con superíndice \mathbf{H}
- Vectores se representan con letra minúscula, itálica y flecha superior, ej. $\vec{f}(t)$

Matrices:

- A:** Matriz de estado en tiempo discreto.
- A_c:** Matriz de estado en tiempo continuo.
- B:** Matriz de entrada en tiempo discreto (espacio de estado).
- B_c:** Matriz de entrada en tiempo continuo (espacio de estado).
- C:** Matriz de amortiguamiento.
- C_a, C_v, C_d:** Matrices de localización de las respuestas para aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente.
- C₀:** Matriz de las respuestas en tiempo discreto.
- C_c:** Matriz de las respuestas en tiempo continuo.
- D:** Matriz de transmisión directa en tiempo discreto.
- D_c:** Matriz de transmisión directa en tiempo continuo.
- G:** Matriz de covarianzas "*next state output*".
- K:** Matriz de rigidez.
- L:** Matriz de selección de referencias.
- M:** Matriz de masa.
- M_d:** Matriz de masa modal.
- O:** Matriz de observabilidad.
- Q:** Matriz de controlabilidad.

- \mathbf{R}_i : Matriz de covarianza de la respuesta para un retraso i de tiempo.
- \mathbf{R}_i^{ref} : Matriz de covarianza de las respuestas de referencia para un retraso i de tiempo.
- \mathbf{S} : Matriz diagonal de valores singulares.
- \mathbf{T}, \mathbf{Z} : Matriz de similaridad.
- \mathbf{T}^{ref} : Matriz Toeplitz de covarianzas de respuestas de referencia.
- \mathbf{U}, \mathbf{V} : Matrices ortonormales.
- \mathbf{V} : Matriz modal de las respuestas ($\mathbf{V} = \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}$)
- \mathbf{Z}_{di} : Matriz $\mathbf{Z}_{d_i} = \left(\lambda_{d_i}^2 \Delta \mathbf{M}_{d_i} + \lambda_{d_i} \Delta \mathbf{C}_{d_i} + \Delta \mathbf{K}_{d_i} \right)$
- $\Delta \mathbf{M}, \Delta \mathbf{K}, \Delta \mathbf{C}$: Matriz error en las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento respectivamente.
- Δ : Matriz de covarianzas de la excitación.
- Φ : Matriz de formas modales.
- Γ : Matriz diagonal $\Gamma = diag(2 \xi_r \omega_r)$.
- Λ : Matriz diagonal de autovalores.
- Σ : Matriz de covarianzas de estado.
- Ω : Matriz diagonal $\Omega^2 = diag(\omega_r^2)$.
- Ψ : Matriz de formas modales del sistema ampliado.

Vectores:

- \vec{d}_i : Vector de daño del i -ésimo modo.
- $\vec{f}(t)$: Vector de excitación.
- $\vec{\ddot{q}}(t), \vec{\dot{q}}(t), \vec{q}(t)$: Vectores de aceleraciones, velocidades, y desplazamientos respectivamente.
- $\vec{u}(t)$: Vector de excitación.
- \vec{v}_k : Vector de ruido introducido por los sensores.
- \vec{w}_k : Vector de ruido debido a perturbaciones y errores del modelo.

$\bar{x}(t)$: Vector de estado

$\bar{x}_m(t)$: Vector de estado modal.

$\bar{y}(t)$: Vector de respuestas medidas.

$\bar{z}(t_k)$: Vector de ruido colorido.

$\bar{z}_{d_i}^j$: la j -ésima fila de la matriz \mathbf{Z}_{d_i} .

α : Vector de daño.

$\bar{\phi}$: Vector de formas modales.

$\eta_r(t)$: Respuesta modal r .

$\bar{\psi}$: Vector de formas modales del sistema ampliado.

Escalares:

f : Frecuencia en Hz.

M_r : Masa modal.

$\delta(n)$: Delta de Kronecker.

λ_i : Autovalor en tiempo continuo.

μ_i : Autovalor en tiempo discreto.

ω : Frecuencia angular [rad/seg].

ξ : Relación de amortiguamiento.

Operadores:

E : Valor esperado.

$p_{inv}(\)$: pseudoinversa.

Abreviaturas:

ARMA: Modelo autoregresivo de media móvil "*AutoRegressive Moving Average*".

ARMAV: Modelo de vector autoregresivo de media móvil "*AutoRegressive Moving Average Vector*".

CMIF: Función índice de modo complejo "*Complex Mode Indication Function*".

DFT: Transformada discreta de Fourier "*Discret Fourier Transform*".

ERA: Método de representación de sistemas "*Eigensystem Realization*".

FFT: Transformada rápida de Fourier "*Fast Fourier Transform*".

FRF: Función de respuesta en frecuencia "*Frecuency Response Function*".

IV: Método de variable instrumental "*Instrumental variable*".

LS: Mínimos cuadrados "*Least square*".

MAC: Criterio de evaluación modal "*Modal Assurance Criterion*".

PP: Método de detección de pico "*Peak-Picking*".

PTD: Método de polireferencia "*Polyreference Time Domain*".

QR: Factorización QR.

SSI_Cov: Método de subespacios basado en las covarianzas "*Covariance-driven Stochastic Subspace Identification Method*".

SSI_DATA: Método de subespacios basado en los datos "*Data-driven Stochastic Subspace*".

SVD: Descomposición en valores singulares "*Singular Value Decomposition*".

Lista de Gráficos

Fig.4.1 Pórtico plano.....	31
Fig. 4.2.a Sismos usados como excitación y espectros de amplitudes de Fourier de las respuestas correspondientes al 1° piso del pórtico.....	32
Fig.4.3 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_1(t)$ y curva de ajuste.....	34
Fig.4.4 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_2(t)$ y curva de ajuste.....	34
Fig.4.5 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_3(t)$ y curva de ajuste.....	35
Fig.4.6 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_4(t)$ y curva de ajuste.....	35
Fig.4.7 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_5(t)$ y curva de ajuste.....	36
Fig.4.8 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_6(t)$ y curva de ajuste.....	36
Fig.4.9 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_1(t)$ y curva de ajuste.....	39
Fig.4.10 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_2(t)$ y curva de ajuste.....	39
Fig.4.11 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_3(t)$ y curva de ajuste.....	40
Fig.4.12 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_4(t)$ y curva de ajuste.....	40
Fig.4.13 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_5(t)$ y curva de ajuste.....	41
Fig.4.14 Estimador de la dep de la respuesta modal $\eta_6(t)$ y curva de ajuste.....	41
Fig.4.15 Diagrama de estabilidad de frecuencias.....	47
Fig.4.16 Primer modo de vibración	48
Fig.4.17 Segundo modo de vibración.....	48
Fig.4.18 Tercer modo de vibración.....	48
Fig.4.19 Cuarto modo de vibración.....	49
Fig.4.20 Quinto modo de vibración.....	49
Fig.4.21 Sexto modo de vibración.....	49
Fig.5.1 Modelo ensayado con carga estática.....	56
Fig.5.2 Curva Fuerza-desplazamiento. Ensayo estático.....	56
Fig.5.3 Equipamiento usado.....	58
Fig.5.4 Modelo ensayado A.....	58
Fig.5.5 Detalle de fijación del modelo en mesa vibratoria.....	59
Fig.5.6 Modelo ensayado en mesa vibratoria.....	60
Fig.5.7 Respuesta medida en el techo en términos de aceleraciones y espectro de amplitudes de Fourier de la misma.....	61
Fig.5.8 Diagrama de estabilización.....	62

Fig.5.9 Formas modales	
a) Primer modo.....	63
b) Segundo modo.....	63
c) Tercer modo.....	63
d) Cuarto modo.....	64
e) Quinto modo.....	64
f) Sexto modo.....	64
Fig. 5.10 Formas modales obtenidas numéricamente usadas en el método de los modos complejos.....	66
Fig.5.11 Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal	
a) $\eta_1(t)$	67
b) $\eta_2(t)$	67
c) $\eta_3(t)$	68
d) $\eta_4(t)$	68
e) $\eta_5(t)$	69
f) $\eta_6(t)$	69
Fig.5.12 Vista del modelo B.....	71
Fig.5.13 Respuesta del 6to piso en términos de aceleraciones y Espectro de amplitudes de Fourier de la misma.....	71
Fig.5.14 Diagrama de estabilización.....	73
Fig.5.15 Formas modales	
a) Primer modo.....	74
b) Segundo modo.....	74
c) Tercer modo.....	74
d) Cuarto modo.....	75
e) Quinto modo.....	75
f) Sexto modo.....	75
Fig. 5.16 Formas modales obtenidas numéricamente usadas en el método de los modos complejos.....	77
Fig.5.17 Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal	
a) $\eta_1(t)$	77
b) $\eta_2(t)$	78
c) $\eta_3(t)$	78

d) $\eta_4(t)$	79
e) $\eta_5(t)$	79
f) $\eta_6(t)$	80
Fig. 5.18 Esquema de la viga de H°A°.....	82
Fig. 5.19 Diagrama de estabilidad de frecuencias para viga de H°A°.....	82
Fig. 5.20 Grados de libertad considerados correspondientes a los desplazamientos verticales en los puntos marcados.....	83
Fig. 5.21 Formas modales del modelo numérico de la viga de H°A°.....	84
Fig.5.22 Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal	
a) $\eta_1(t)$	84
b) $\eta_2(t)$	85
c) $\eta_3(t)$	85
d) $\eta_4(t)$	86
Fig.6.1a Localización del daño para el primer escenario.....	85
Fig.6.1b Localización del daño para el segundo escenario.....	85
Fig. 6.2 Matriz de rigidez genérica para el pórtico estudiado.....	85
Fig.6.3.a Variación en la matriz de rigidez (primer caso de daño).....	86
Fig.6.3.b Variación en la matriz de rigidez (segundo caso de daño).....	86
Fig. 6.4 Matrices del sistema no dañado.....	87
Fig.6.5.a Variación relativa en la matriz de rigidez del pórtico (primer caso de daño)..	88
Fig.6.5.b Variación relativa en la matriz de rigidez del pórtico (segundo caso de daño)	88
Fig.6.6 Esquema de ubicación de cargas estáticas en viga de H° A°.....	90
Fig.6.7.a Variación relativa en la matriz de rigidez de la viga de H° A°.....	91
Fig.6.7.b Variación relativa en la matriz de amortiguamiento de la viga de H° A°	91
Fig.6.8.a Variación realtiva en la matriz de rigidez ($\sigma_a = 2.1\text{m/s}^2$)	93
Fig. 6.8.b Variación relativa en la matriz de amortiguamiento ($\sigma_a = 2.1\text{m/s}^2$).....	94
Fig.6.9.a Variación relativa en la matriz de rigidez ($\sigma_a = 44 \text{ m/s}^2$)	95
Fig.6.9.b Variación relativa en la matriz de amortiguamiento ($\sigma_a = 44 \text{ m/s}^2$)	95
Fig.6.10 Distribución de rótula plásticas modelo (análisis numérico).....	97
Fig.7.1 Registro de aceleraciones usado en el ensayo.....	111
Fig.7.2 Evolución de la frecuencia con el incremento de la aceleración	
a) f_1	112
b) f_2	112

c) f_3	113
d) f_4	113
e) f_5	114
f) f_6	114

Fig.7.3 Evolución del amortiguamiento con el incremento de la aceleración

a) ξ_1	115
b) ξ_2	115
c) ξ_3	116
d) ξ_4	116
e) ξ_5	117
f) ξ_6	117

Fig.7.4 Relación constitutiva del aluminio y curvas fuerza-desplazamiento..... 118

Fig.7.5 Registro de aceleraciones usados en análisis numérico $\sigma_a = 32 \text{ m/s}^2$ 119

Fig.7.6 Evolución de la frecuencia con el aumento de la excitación (numérica y experimental)

a) f_1	119
b) f_2	119
c) f_3	120
d) f_4	120
e) f_5	120
f) f_6	120

Fig.7.7 Evolución del amortiguamiento con el aumento de la excitación (numérica y experimental)

a) ξ_1	120
b) ξ_2	120
c) ξ_3	121
d) ξ_4	121
e) ξ_5	121
f) ξ_6	121

Lista de Tablas

Tabla 4.1 Parámetros modales estimados y obtenidos analíticamente.....	33
Tabla 4.2 Parámetros del pórtico estimados y obtenidos analíticamente con amortiguamiento no proporcional.....	38
Tabla 4.3 Parámetros estimados con el método SSI-Cov.....	47
Tabla 5.1 Características geométricas y mecánicas del modelo A.....	59
Tabla 5.2 Valores de frecuencias y amortiguamientos experimentales (SSI-Cov).....	62
Tabla 5.3 Parámetros identificados por SSI-Cov y modos complejos.....	70
Tabla 5.4 Características geométricas y mecánicas del modelo B.....	71
Tabla 5.5 Valores de frecuencias y ξ experimentales (SSI-Cov).....	73
Tabla 5.6 Comparación de parámetros estimados.....	80
Tabla 5.7 Propiedades mecánicas de la viga de hormigón armado.....	81
Tabla 5.8 Frecuencias y amortiguamientos estimados (SSI-Cov).....	82
Tabla 5.9 Comparación de parámetros estimados por método PP y M Complejos y SSI-Cov.....	86
Tabla 5.10 Diferencia entre parámetros estimados por el método de los modos complejos y el método SSI-Cov.....	87
Tabla 6.1 Frecuencias identificadas.....	90
Tabla 7.1 Valores medios y dispersión de frecuencias y amortiguamientos.....	122

RESUMEN

Identificación de Sistemas y Evaluación del daño Estructural

por

Marta Graciela AMANI

Identificación de sistemas es el proceso por el cual se construye un modelo matemático capaz de describir el comportamiento de un sistema dinámico a partir de datos obtenidos experimentalmente. En el campo de la ingeniería civil, la identificación de sistemas es una metodología aplicable con varios fines. Por ejemplo los parámetros del sistema identificados pueden usarse para detectar daño estructural, verificar los parámetros de diseño de estructuras nuevas, en el diseño de dispositivos de control estructural, etc.

En esta tesis se propone un método para la estimación de los parámetros modales de estructuras con amortiguamiento viscoso arbitrario a partir solamente de la medición de la respuesta a una excitación. Generalmente se usa excitación ambiental ya que se presenta como única alternativa para realizar ensayos dinámicos en grandes estructuras civiles o cuando se realiza un sistema de monitoreo continuo. El método propuesto se verifica a través de simulaciones numéricas y ensayos de laboratorio. Se propone también un método que resuelve el denominado problema inverso para estructuras con amortiguamiento viscoso no proporcional, es decir, a partir de la estimación de los parámetros modales de la estructura, el método permite determinar las matrices de rigidez y amortiguamiento del sistema.

En referencia a la evaluación del daño estructural se propone un método que permite cuantificar y localizar el daño estructural a través del estudio de las variaciones en las matrices de rigidez y amortiguamiento del sistema. El método propuesto se verifica por medio de ejemplos numéricos y de laboratorio. A través de un estudio sobre la evolución de los parámetros modales con el daño fue posible proponer un procedimiento para analizar el estado de servicio en estructuras.

ABSTRACT

System Identification and Structural Damage Assessment

by

Marta Graciela AMANI

System identification is the process that allows to build a mathematical model able to describe the dynamic system behaviour based on measured data. In civil engineer field, system identification has many applications. For examples, the system parameters identified can be used to detect structural damage, to verify the design parameters of new structures, to design structural control devices, etc.

In this thesis, a system identification method for structures with non proportional viscous damping from output only data is proposed. Generally, ambient excitation sources are used because this is the unique alternative to carry out dynamic testing in big civil structures or in continuous monitoring systems. Numerical simulations and laboratories testing verify the proposed approach. An approach to solve the named *inverse problem*, that is, to determine the stiffness and damping system matrices from the structure modal parameters estimated, is proposed too.

The second issue is structural damage detection, a method to evaluate and locate damage by the stiffness and damping system matrices modification is proposed. Numerical examples and laboratories testing verify the proposed method. From a study about the modal parameter evolution with the damage it was possible to propose a methodology for health monitoring system.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Una forma conveniente de describir un sistema dinámico es a través de modelos matemáticos. Estos modelos pueden representarse en tiempo continuo a través de sistemas de ecuaciones diferenciales deducidas a partir de leyes de la física o en tiempo discreto como sistemas de ecuaciones de diferencias obtenidas mediante algún método de identificación de sistemas.

1.2 Identificación de sistemas

Se puede definir *Identificación de sistemas* como el proceso por el cuál se construye íntegramente un modelo matemático capaz de describir el comportamiento de un sistema dinámico a partir de datos obtenidos experimentalmente.

Básicamente, los modelos matemáticos se pueden clasificar como paramétricos y no paramétricos. Generalmente los modelos no paramétricos se describen a través de curvas, tablas o relaciones funcionales, entre los cuales se pueden mencionar: función de respuesta en frecuencia, respuesta a un impulso, análisis espectral y modal. Los modelos paramétricos se caracterizan por la construcción del modelo matemático a través de un conjunto de parámetros estimados, los cuales se relacionan directamente con los parámetros modales del sistema.

Desde el punto de vista de la excitación del sistema, los modelos matemáticos se pueden clasificar en determinísticos cuando la excitación es conocida (medida) y, en estocásticos cuando no lo es.

1.3 Definición del problema

1.3.1 Identificación de sistemas en ingeniería civil

El monitoreo de estructuras bajo excitaciones ambientales es un campo de la ingeniería que tuvo un importante crecimiento en la última década debido al avance tecnológico en los sistemas de medición. La idea básica consiste en evaluar el estado en el cual una estructura se encuentra, sin interrumpir su normal funcionamiento, a partir de la medición de sus características dinámicas y así programar su mantenimiento y definir su vida útil.

Generalmente, al realizar un monitoreo continuo de una estructura o cuando la misma es de grandes dimensiones como en el caso de grandes obras civiles (puentes, edificios de gran altura, diques, estructuras fuera de costa (*off shore*), etc), la excitación no se realiza con medios mecánicos sino a través de ruido ambiental como por ejemplo, cargas de viento, tráfico automovilístico o movimientos sísmicos. En estos casos, para estimar sus características dinámicas a través de los parámetros modales, se usan los métodos de identificación denominados *estocásticos*, en los cuales sólo se necesita conocer la respuesta.

Alguna de las aplicaciones de esta metodología son:

- a) Determinación de la respuesta de la estructura para diferentes tipos de excitaciones posibles durante su vida útil.
- b) Diseño de dispositivos de control estructural, para lo cual se requiere el conocimiento de los parámetros dinámicos del sistema.
- c) Verificación de los parámetros de diseño en estructuras nuevas.
- d) Detección de daño estructural para evaluar el servicio y estado límite último. A continuación se detalla este tópico debido al papel fundamental que los métodos de identificación de sistemas tienen en este sentido.

1.3.2 Identificación de daño estructural

Los métodos de identificación de daño más comúnmente usados son los métodos de ultrasonido, acústicos, de campo magnético, etc. Todos estos métodos detectan el daño localmente por lo que requieren el conocimiento previo y acceso a la parte de la estructura supuestamente dañada. La necesidad de métodos cuantitativos de identificación de daño global aplicables a estructuras complejas hizo que se comenzara a investigar y desarrollar nuevas tecnologías. La idea básica de la metodología actual, es medir la respuesta de la estructura durante su vida útil y usar estas mediciones para evaluar su estado. Los algoritmos usados para este fin se basan en que el daño estructural provoca cambios en las propiedades físicas de la estructura (rigidez y amortiguamiento) y éstas, en los parámetros modales (frecuencias, formas modales y amortiguamiento modal) los cuáles se identifican a partir de las mediciones de la respuesta. Diferentes métodos para detectar el daño se han desarrollado hasta el momento, los más comunes se basan en el cambio en las frecuencias naturales, formas modales y/o en sus curvaturas. Otros, analizan el cambio en la flexibilidad o rigidez dinámica, y recientemente una nueva tendencia para detectar daño es usar redes neurales y algoritmos genéticos.

Si se consideran los grandes beneficios asociados a los bajos costos que se logran a través de la aplicación de métodos de identificación de sistemas en ingeniería civil, se puede decir que continuar con el desarrollo de estos métodos es de fundamental importancia.

1.4 Objetivos

La realización de este trabajo tiene como objetivos:

- Desarrollar un método simple que, partiendo del conocimiento exclusivo de la respuesta estructural, permita determinar los parámetros modales de una estructura para luego obtener las matrices de rigidez y amortiguamiento viscoso equivalente del sistema, resolviendo así el denominado problema inverso.
- Desarrollar un método para localizar y cuantificar el daño estructural, en sistemas con amortiguamiento viscoso arbitrario, a partir del monitoreo periódico de la respuesta estructural.
- Proponer un procedimiento para analizar el estado de servicio en estructuras mediante el estudio de la evolución del daño.

1.5 Contenido de la tesis

Esta tesis está subdividida en 7 capítulos. En el presente capítulo se define el problema de identificación de sistemas en estructuras civiles, se plantean los objetivos de la tesis y se presenta la organización del trabajo.

En el capítulo 2 se presenta una breve reseña de los métodos de identificación existentes, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. Se realiza también, una revisión de los diferentes métodos para evaluación del daño estructural.

En el capítulo 3 se explica brevemente la teoría básica de sistemas lineales continuos y discretos relacionando modelos en espacio de estado con modelos modales. Se discuten los modelos de identificación de sistemas bajo acciones estocásticas y se describen sus propiedades.

El capítulo 4 se refiere específicamente a métodos de identificación de sistemas bajo acciones estocásticas, es decir, que con el conocimiento exclusivo de la respuesta de la estructura se estiman los parámetros modales. Debido a su alto desempeño, se presenta el método conocido como SSI-Cov [Peeters, 2000] y se propone un método usado en la identificación de los parámetros modales de sistemas con amortiguamiento arbitrario. También se propone un método para obtener las matrices de rigidez y amortiguamiento del sistema. Para ilustrar el uso de los métodos se identifican las propiedades de un pórtico plano simulado numéricamente, y se obtienen las matrices de rigidez y amortiguamiento del mismo.

En el capítulo 5 se explora la aplicabilidad de los métodos descritos en el capítulo 4 a modelos de laboratorio. Se estudian dos estructuras de seis pisos en escala reducida construidas en aluminio. Los modelos son sometidos a una excitación en la base a través de una mesa

vibratoria, en el primer caso la excitación es de tipo senoidal y en el segundo un ruido blanco gaussiano para estudiar la influencia del tipo de excitación en la obtención de los parámetros modales. Se estudia también una viga de hormigón armado [Palazzo, 2001].

En el capítulo 6 se estudia el daño estructural. Se presenta un método para la localización y cuantificación del daño estructural para sistemas con amortiguamiento proporcional [Zimmerman, et al., 1994] y se propone un nuevo método con el mismo objetivo aplicable a estructuras con amortiguamiento arbitrario. Se presentan 2 ejemplos de estructuras simuladas a los cuáles se aplican los métodos expuestos y dos ejemplos de estructuras de laboratorio a las cuáles se las somete a niveles incrementales de carga para evaluar la evolución de los parámetros modales con relación al daño estructural creciente.

En el capítulo 7 se realiza un estudio de la evolución de frecuencias y amortiguamientos con el aumento de la excitación, para ello se realiza un análisis numérico-experimental del modelo de aluminio descrito en el capítulo 5, sometido a diferentes niveles de intensidad de aceleración.

En el capítulo 8 se presentan las conclusiones finales del trabajo y se mencionan algunas sugerencias para investigaciones futuras posibles.

En el apéndice A se presentan las propiedades de ortogonalidad de los modos complejos.

En el apéndice B se explica la forma en que se calculó la densidad espectral de potencia y cómo se realiza el ajuste de curvas en el método propuesto de los modos complejos presentado en el capítulo 4.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introducción

En el presente contexto, se define como identificación de sistemas al proceso en el cuál se construye un modelo matemático de un sistema dinámico a partir de las mediciones de la respuesta del mismo a una excitación. La identificación de sistemas comenzó como una área de identificación en ingeniería eléctrica, desarrollando modelos de identificación en tiempo real [Ljung, 1999].

Luego, bajo el nombre de análisis experimental modal, comenzó a desarrollarse en ingeniería mecánica para el análisis de estructuras sometidas a vibraciones. El modelo modal identificado en este caso consiste en frecuencias, relaciones de amortiguamiento, formas modales y factores de participación modal. El primer libro sobre dicho tema fue escrito por Ewins [Ewins, 1984].

Durante los años 60 y 70 creció la necesidad de conocer las propiedades modales de grandes estructuras civiles. Comenzaron a realizarse mediciones en edificios de gran altura, puentes colgantes y estructuras fuera de costa (*offshore*) que luego fueron usadas en identificación de sistemas [Hart y Yao, 1977]. Durante este período creció el interés por los modelos paramétricos en el dominio del tiempo, motivados por trabajos de Gersch [Gersch, 1970], [Gersch et al., 1973], [Gersch, 1974] y Pandit [Pandit y Jacobson, 1988]. En estructuras civiles y fuera de costa, resultaron especialmente atractivos los modelos multivariados en el

dominio del tiempo como se puede ver en trabajos publicados por Pi y Mickleborough, [1989] y Prevosto [Prevosto et al., 1991].

2.2 Identificación de sistemas. Estado del arte

Durante las últimas tres décadas se desarrollaron numerosos métodos para la identificación de los parámetros modales que, de acuerdo con el dominio en el que se desarrollan, pueden clasificarse como métodos en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo.

El análisis modal es, quizás, la forma más versátil de validar un modelo [Ewins, 1995]. Con el desarrollo de técnicas de procesamiento de señales digitales, y en particular la Transformada Rápida de Fourier (FFT), comenzaron a usarse los métodos de análisis modal en el dominio de la frecuencia para caracterizar las propiedades modales de una estructura.

2.2.1 Excitación en estructuras civiles

Usualmente no es viable excitar grandes estructuras civiles utilizando medios artificiales. Comúnmente, en estos casos, la excitación es ambiental, es decir, tráfico, viento, etc. Esta excitación es de naturaleza estocástica, por lo tanto no puede representarse a través de una función determinística dependiente del tiempo debiendo ser caracterizada por ciertos parámetros estadísticos como la media y la función de covarianza. En diferentes trabajos [Abe, et al., 1999], [Brownjohn, J., 2003] se ha demostrado que la excitación ambiental es una forma confiable, rápida y barata de realizar ensayos dinámicos en grandes estructuras civiles, tales como puentes, edificios de gran altura y estructuras fuera de costa.

Los ensayos dinámicos con excitaciones ambientales tienen algunas ventajas con respecto a otros, tales como excitación periódica o impulsiva. La excitación ambiental, a diferencia de la excitación periódica, es de banda ancha por lo que, teóricamente, excitaría todos los modos relevantes de la estructura. Por otro lado, el uso de este tipo de excitación no perturba el normal funcionamiento de la misma, no requiere el uso de excitadores mecánicos como en el caso de algunos tipos de excitación impulsiva, y el costo para excitar la estructura es nulo a diferencia de lo que ocurre cuando se usan explosiones como excitación. Sin embargo, la desventaja es que sus características no pueden ser controladas directamente.

En el caso en que la excitación ambiental es viento natural, varios estudios realizados mostraron que las fluctuaciones pueden describirse a través de un proceso estocástico gaussiano ergódico [Vickery, y Basu, 1983].

2.2.2 Métodos en el dominio de la frecuencia

La identificación o extracción de parámetros modales a partir de excitaciones y respuestas medidas es un proceso complejo. Con el objeto de determinar los parámetros modales, las funciones de respuesta en frecuencia (FRFs) en el dominio de la frecuencia o su transformada en el dominio del tiempo, la respuesta impulso, deben estimarse a partir de la medición de las excitaciones y respuestas disponibles. En general, el método preferido en laboratorio es estimar las FRFs usando registros largos de la excitación. Esto permite que los registros sean divididos en numerosos registros independientes, para los cuáles se determina la densidad espectral partir de la transformada discreta de Fourier que luego son promediadas. [Ewins, 1995].

Un inconveniente que presentan los métodos en el dominio de la frecuencia es que la transformada de Fourier engendra el fenómeno denominado "pérdida" (*leakage*), en donde la no-periodicidad de la señal conduce a la corrupción de las magnitudes de la densidad espectral. En el dominio de la frecuencia el efecto de "leakage" es un aparente aumento del amortiguamiento del modo correspondiente. Por otro lado, en el caso de modos cuyas frecuencias son próximas, resulta imposible separarlas si una de las frecuencias de resonancia tiene amplitud pequeña respecto de la otra. En este caso la frecuencia de resonancia con menor energía puede ser enmascarada por la frecuencia de resonancia de mayor energía. Para compensar este problema se usan antes de aplicar la FFT los métodos denominados de "ventana" (*windowing*) para asegurar periodicidad en los datos amortiguando las discontinuidades al final del registro. Sin embargo, el uso de "ventanas" tiene un efecto nocivo en la estimación de los parámetros, en especial del amortiguamiento. Otro inconveniente que se presenta es el denominado efecto de "aliasing". Esto ocurre cuando la velocidad de adquisición de los datos no es suficiente. En el momento de pasar del dominio del tiempo a la frecuencia y luego volver al dominio del tiempo este efecto se acumula. Para atenuar este efecto se usan generalmente filtros antes de determinar la transformada de Fourier, pero ello también va en detrimento de la determinación de los parámetros modales [Andersen, 1997].

Dentro de los métodos estocásticos en el dominio de la frecuencia el método más usado en ingeniería civil, debido a su simplicidad, es el denominado *Peak-Picking* (PP) [Ewins, 1995]. En este método los registros medidos en el tiempo se convierten en espectros a través de la transformada discreta de Fourier (DFT). Las frecuencias se determinan en correspondencia con el pico de los espectros. Este método supone que el amortiguamiento es bajo y que los modos están bien separados. Una violación de esta suposición conduciría a resultados erróneos.

Un método más avanzado consiste en obtener los autovalores de la matriz de espectros; este método basado en la diagonalización de la matriz de densidad espectral fue usado en el comienzo de los años 80 para obtener los modos de vibración de estructuras sometidas a excitaciones ambientales. Luego el método fue aplicado a funciones de respuestas en frecuencia (FRF) y se transformó en el método denominado *Complex Mode Indication Function* (CMIF) [Shih C. Y. et al., 1988]. Con este método es posible resolver el problema de multiplicidad de modos, ya que en este caso el máximo número de polos múltiples a ser detectados no puede exceder la menor dimensión de la matriz de densidad espectral.

2.2.3 Métodos en el dominio del tiempo

Los problemas encontrados en los métodos en el dominio de la frecuencia (límite en el grado de amortiguamiento, frecuencias naturales próximas, etc.) hicieron que se desarrollaran métodos en el dominio del tiempo, como alternativa para obtener los parámetros modales de las estructuras. El uso directo de la respuesta en el dominio del tiempo sin necesidad de transformarla al dominio de la frecuencia, transforma en innecesaria la suposición acerca de la interferencia de modos debido a valores de amortiguamiento altos o frecuencias naturales próximas. Estos métodos ofrecen, además, una forma más simple de determinar el número de grados de libertad de la estructura a ser analizada y generalmente identifican un número mayor de frecuencias naturales que los métodos en el dominio de la frecuencia.

El primer método en el dominio del tiempo que causó impacto en la comunidad científica fue el método de Ibrahim [Ibrahim S., 1977], desarrollado para extraer los parámetros modales a partir de la información de la respuesta compleja exponencial amortiguada (*damped complex exponential response*). Se mide la respuesta en vibraciones libres en varios puntos de la estructura. Se crea una matriz de recurrencia a partir de los datos en vibraciones libres, los autovalores de esta matriz son funciones exponenciales de los polos del sistema y a partir de los autovectores de la matriz de recurrencia se obtienen las formas modales. El método de Ibrahim genera una ecuación característica polinómica matricial. Para convertir la respuesta aleatoria debida a una excitación aleatoria estacionaria no medida o desconocida en vibraciones libres, se usa la técnica del Decremento Aleatorio (Random Decrement) introducida anteriormente por Cole [Cole H., 1968].

Otro procedimiento que usa la respuesta compleja exponencial amortiguada es el método de Polireferencia (PTD) [Vold y Rocklin, 1982]. Como contraposición al método de Ibrahim, el PTD utiliza toda la respuesta compleja exponencial amortiguada simultáneamente en la

estimación de las frecuencias modales simultáneamente. Este método es el primer algoritmo que puede usarse en el caso de raíces cercanas o repetidas.

El algoritmo de representación de sistemas (*Eigensystem Realization*) (ERA) es básicamente una extensión del método de Ho-Kalman (*Ho-Kalman system realization algorithm*) [Juang y Pappa, 1985]. Con este método se pueden identificar, de manera similar al método PTD, raíces repetidas. Además, este algoritmo incluye un extensivo uso de indicadores de precisión para evaluar los efectos de ruido, no linealidades e información acerca del rango, a través de la técnica de descomposición en valores singulares. El método ERA, formulado en el espacio de estado, introduce los conceptos de observabilidad y controlabilidad, formulando una matriz en bloque similar a la matriz Hankel¹ con los parámetros de Markov de la estructura analizada. A partir de la descomposición en valores singulares de esta matriz se determinan las matrices del sistema en el espacio de estado. A través del uso de los indicadores de precisión se intenta disminuir el problema de identificación de parámetros modales no físicos. Una limitación de este método es la cantidad de memoria computacional requerida para resolver el problema cuando el número de sensores es grande.

Algunos métodos de análisis modal incluyen modelos matemáticos de excitación-respuesta como ser los modelos autoregresivos de media móvil (ARMA). En esta técnica se supone que la respuesta es causada por una excitación tipo ruido blanco; se computan los mejores modelos estadísticos en términos de sus polos (a partir de la parte autoregresiva) y ceros (a partir de la parte de media móvil). [Andersen P., 1997].

Los modelos de vector autoregresivo de media móvil (ARMAV) se han usado en el análisis de problemas de máquinas vibratorias bajo condiciones de operación [Basseville et al., 1993]. Sin embargo, debido a la complejidad de los modelos ARMAV, se comenzaron a usar modelos en espacio de estado [Kirkegaard y Andersen, 1997], [Lardies, 1998], donde la complejidad se reduce a la manipulación de algunas matrices, y los parámetros del modelo se identifican directamente a partir de los datos medidos.

En la última década se propusieron varios métodos para identificación de sistemas directamente a partir de la respuesta en el dominio del tiempo o determinando las covarianzas de las mismas. Una característica importante de los métodos que usan las covarianzas entre las respuestas medidas es que la matriz de covarianzas puede ser factorizada en las matrices del sistema. El método de variable instrumental (IV) es un derivado del método de Polireferencia en el dominio del tiempo (PTD) [Ljung L., 1999], sólo que reemplaza la respuesta impulso por las

covarianzas entre las respuestas. A pesar de que el algoritmo del método IV se formula a través de las covarianzas, no usa las propiedades de factorización; empleando un modelo ARMA para representar el sistema. La ventaja con respecto al método clásico de predicción del error es que el método IV identifica sólo los parámetros AR, evitando así la no linealidad provocada por los parámetros MA.

A diferencia del método IV, que usa las propiedades de factorización de la matriz de covarianzas entre la respuesta en una segunda etapa del proceso de identificación, los métodos basados en subespacio usan fundamentalmente estas propiedades. Los primeros algoritmos de subespacio fueron presentados por Van Overschee [Van Overschee y De Moor, 1993]. El método de subespacios basado en las covarianzas (SSI-Cov) [Peeters B., 2000] es un algoritmo que usa la matriz de covarianzas de las respuestas y un número limitado de respuestas tomadas como referencias. Esto corresponde al análisis modal clásico, donde las matrices de respuesta impulso son rectangulares, teniendo como filas el número de respuestas y como columnas el número de excitaciones medidas. En el caso del método SSI-Cov las respuestas impulso se reemplazan por las covarianzas entre las respuestas y la excitación por las respuestas de referencia. Las covarianzas se agrupan en una matriz Toeplitz². Aplicando los conceptos de controlabilidad, observabilidad y la técnica de descomposición en valores singulares a la matriz Toeplitz, se puede identificar la matriz del sistema y así computar los parámetros modales de la estructura.

Existen métodos estocásticos que identifican los modelos directamente a partir de las respuestas medidas, que son los llamados métodos de subespacio basados en los datos. Los métodos de subespacios identifican modelos en espacio de estado a partir de las respuestas medidas (en algunos casos también a partir de la excitación medida), aplicando técnicas de factorización como QR, descomposición en valores singulares (SVD) y mínimos cuadrados (LS). El método de identificación estocástica de subespacio basado en los datos (SSI-DATA), a diferencia del SSI-Cov, evita el cálculo de las covarianzas entre las respuestas medidas y lo reemplaza por la proyección del espacio fila de las respuestas futuras en el espacio fila de las respuestas pasadas. De hecho, las covarianzas y las proyecciones están estrechamente relacionadas, ambas tienen como objetivo cancelar el ruido. Entre estos métodos existen algunas diferencias, en el método de las covarianzas la matriz Toeplitz de covarianzas puede calcularse de un modo rápido a través de la transformada rápida de Fourier (FFT), mientras que en el caso del método basado en los datos se realiza la factorización a través del método QR, el cuál es

¹ Una matriz Hankel es una matriz cuya antidiagonal es constante.

relativamente lento. El método basado en los datos presenta ventajas cuando se emplean el análisis espectral o las respuestas modales como técnicas de post-procesamiento.

2.3 Identificación del daño estructural. Estado del arte

Durante las últimas décadas se desarrollaron diferentes métodos para la identificación del daño estructural. Estos métodos pueden clasificarse de acuerdo con la técnica empleada para la identificación o conforme a los datos medidos usados. A continuación, se presenta una breve descripción de estos métodos.

2.3.1 Cambio en la frecuencia

Entre los métodos más usados y desarrollados para la identificación del daño se pueden mencionar los que se basan en los cambios de las frecuencias. Sin embargo, se debe resaltar que los cambios en la frecuencia tienen limitaciones prácticas. La baja sensibilidad al daño de estos cambios de frecuencia requiere mediciones muy precisas o grandes niveles de daño. A su vez, como las frecuencias son propiedades globales de la estructura, cambios en las mismas sólo pueden indicar la existencia de daño pero no información espacial, es decir no pueden localizar el cambio estructural. Como excepción se podría mencionar los modos altos que están asociados a respuestas locales, sin embargo, en estos casos existen limitaciones prácticas para excitar e identificar esos modos. Los métodos que se basan en cambios en las frecuencias se pueden dividir en dos grupos: los métodos que resuelven el problema en forma directa y los que resuelven el problema inverso. [Gudmundson, 1982], [Ismail, et al., 1990]

En los primeros (*forward problem*) se calcula el cambio en las frecuencias a partir de un tipo de daño conocido. Generalmente se modela el daño matemáticamente y se predicen las frecuencias correspondientes; luego se comparan las frecuencias medidas con las predichas para determinar el daño. Estos métodos generalmente se incluyen en el nivel 1 determinado por Rytter [Doebbling, et al., 1996]. Dentro de este grupo el trabajo de Cawley y Adams, [1979], presentaba una formulación para detectar el daño en materiales compuestos, los posibles puntos de daño se detectaban a partir de los cambios en las frecuencias de un par de modos, en este trabajo no se contemplaba la posibilidad de la existencia de múltiples locales de daño.

En el problema inverso se calculan los parámetros indicadores de daño, como ser longitud de la fisura o localización de la misma, a partir de los cambios en las frecuencias. Estos métodos se incluyen en los niveles 2 y 3 dado por Rytter. Adams, et al., [1978] presentaron un

² Matriz Toeplits es una matriz cuya diagonal es constante.

método en el cuál el daño en una estructura podía ser identificado a partir de los cambios en las frecuencias de resonancia asociados con dos modos, también remarcaban que los cambios de temperatura durante las mediciones podían ser fuente de error en la determinación de los cambios de frecuencia usados para localizar el daño. Otros trabajos publicados pueden encontrarse en Stubbs, et al. [1990], Hern y Testa [1991], Narkis [1994], etc.

2.3.2 Cambio en las formas modales

Estos métodos usan la información contenida en las formas modales para localizar el daño estructural. Según la clasificación dada por Rytter están incluidos en el nivel dos. En el trabajo presentado por Yuen, [1985], los cambios en las formas modales eran simuladas a través de la reducción en la rigidez de cada elemento estructural y luego los cambios predichos eran comparados con los medidos para detectar el daño, también se hablaba sobre la necesidad de un proceso de ortonormalización para poder analizar los modos altos. Rizos, et al., [1990], desarrolló un modelo analítico de una viga con una fisura; localizaba y cuantificaba el daño resolviendo un sistema de ecuaciones para las frecuencias y formas modales en función de la localización y extensión de la fisura, para determinar los parámetros de la fisura (longitud y posición) la viga era excitada a una frecuencia natural y se medían las amplitudes en sólo dos puntos. Kim y Bartkowicz., [1993], investigaron el uso del índice MAC y sus variaciones PMAC y COMAC para localizar el daño estructural.

2.3.3 Cambio en las curvaturas de las formas modales

Otra alternativa para obtener información espacial acerca de los cambios estructurales es usando la curvatura de las formas modales. La posibilidad de medir la deformación directamente u obtenerla a partir de aceleraciones o desplazamientos fue discutida por muchos investigadores, entre ellos se pueden mencionar a Pandey, et al. [1991] en este trabajo se mostraba, a través de un modelo en elemento finitos de una viga, que los cambios absolutos en la curvatura de la forma modal podían ser un buen indicador de daño; los valores de las curvaturas se calculaban a partir de los desplazamientos usando diferencia central para dos modos.

2.3.4 Métodos basados en la determinación de la flexibilidad dinámica

Otra clase de métodos para identificación de daño usa la flexibilidad dinámica para estimar cambios en el comportamiento de la estructura. La matriz de flexibilidad relaciona la fuerza aplicada con el desplazamiento resultante de la estructura.

Típicamente, el daño se detecta, comparando las matrices de flexibilidad obtenidas con los modos dañados y no dañados de la estructura. Debido a la relación inversa que tiene con el cuadrado de la frecuencia, la matriz de flexibilidad es más sensible a cambios en los modos más bajos de la estructura. Pandey y Biswas., [1994] presentaron un método para localizar y cuantificar el daño basado en los cambios en la flexibilidad de la estructura, a través de ejemplos numéricos y experimentales mostraron que se podía estimar la extensión del daño y localizarlo sólo para los dos primeros modos de vibración .

2.3.5 Métodos de actualización de las matrices del sistema

Estos métodos se basan en la modificación de las matrices del sistema tales como la rigidez y amortiguamiento para reproducir lo mejor posible la respuesta dinámica o estática a partir de los datos medidos. Básicamente resuelven un problema de optimización partiendo de las ecuaciones de movimiento y de los datos medidos. La comparación de las matrices actualizadas con las originales provee un indicador de daño y puede usarse para localizar y cuantificar el mismo. Por lo general los métodos usan un conjunto de ecuaciones comunes y se diferencian en algunos algoritmos de optimización. Kim y Bartkowicz, [1993] desarrollaron un método que comparaba el orden del modelo analítico no dañado con las formas modales dañadas en la actualización de las matrices, también consideraban un nivel realista de ruido en las frecuencias y formas modales para la simulación numérica; tanto para la simulación numérica como para los estudios experimentales mostraron que el número de sensores es el parámetro crítico para la detección del daño seguido del número de modos medidos.

Zimmerman y Kouk [1994] presentaron el método denominado *Minimum Rank Perturbation* que permitía localizar el daño en estructuras con amortiguamiento viscoso proporcional a partir del error en la fuerza modal considerando un vector de daño con este vector era posible determinar la perturbación en la matriz de rigidez del sistema. La matriz perturbación resultante tenía el mismo rango que el número de modos usados para determinar el error en la fuerza modal. En este trabajo se demostró que el método preservaba los modos de cuerpo rígido. Otros métodos pueden encontrarse en [Baruch M., 1978], [Berman y Nagy, 1993], [Zimmerman y Simmermacher, 1995].

2.3.6 Métodos basados en redes neurales

En la última década ha aumentado el interés en las redes neurales para estimar y predecir la extensión y localización del daño en estructuras complejas a través de aproximaciones para las funciones de complejidad arbitraria. Las redes neurales trabajan con sistemas en capas, las

salidas en una capa, luego de ajustadas, son la entrada de la capa siguiente. El algoritmo de propagación hacia atrás es una forma de ajustar los pesos y tendencias minimizando el error entre las salidas medidas y las predichas. Este tipo de algoritmo fue usado por Wu, et al. [1992] para identificar el daño en una estructura tipo pórtico de tres pisos sometida a la acción de sismos. El daño fue modelado reduciendo la rigidez de los miembros entre un 50 % y un 75%. Se presentaron dos planteos de trabajo en red, el primero consiguió identificar daño en el tercer piso solamente con poca precisión, en el segundo caso se consiguió predecir daño en el primer y tercer piso, en este último caso el método se basaba en el completo conocimiento de los registros de aceleraciones medidos en dos de los tres grados de libertad considerados. Otros trabajos realizados aplicando redes neurales pueden encontrarse en [Elkordy, et al., 1993], [Tsou y Shen, 1994], etc.

2.3.7 Evaluación general de los métodos existentes

Una característica importante a ser marcada, es la necesidad que presentan algunos métodos, de tener *a priori* un modelo analítico para detectar el daño. Muchos algoritmos presumen al acceso a un modelo detallado en elementos finitos de la estructura, algunas veces la falta de esta información hace que el método propuesto sea impracticable, un paso importante sería minimizar esta dependencia.

Otro punto importante a ser considerado es el número y la posición de los sensores empleados en la medición. Muchos métodos propuestos parecen ser viables en los ejemplos presentados no se comportan de igual manera cuando se cuenta con un número reducido de sensores, estos métodos deberían considerar también que en realidad no siempre se conoce *a priori* la localización del daño para poder ubicar los sensores.

Un punto de controversia entre los investigadores es el nivel de sensibilidad de los parámetros modales frente al daño. Esto es muy importante, en especial al desarrollar técnicas para monitorear estructuras, ya que los usuarios de las técnicas propuestas están interesados en métodos que les permitan identificar el daño cuando aún puede ser reparado y no en el estado último.

CAPÍTULO 3

SISTEMAS LINEALES

3.1 Introducción

La mayor parte de los sistemas dinámicos considerados en la literatura son sistemas lineales independientes del tiempo. Son idealizaciones, en muchos casos suficientes, para obtener aproximaciones satisfactorias de sistemas reales.

Se dice que un sistema es lineal si la respuesta a una combinación lineal de excitaciones es la misma combinación lineal de las respuestas a las excitaciones individuales. Un sistema lineal independiente del tiempo puede representarse a través de su respuesta impulsiva, la correspondiente función de transferencia o un modelo en espacio de estado.

3.2 Sistemas lineales en tiempo continuo

Las estructuras pueden ser representadas como sistemas de parámetros distribuidos caracterizados por la masa, el amortiguamiento y la rigidez a través de ecuaciones diferenciales parciales en las cuáles las variables espaciales juntamente con el tiempo son variables independientes. Sin embargo, la identificación de los parámetros de tales sistemas, en general, no es fácil; por lo que, en la mayoría de los casos, se prefiere una formulación en coordenadas discretas. Debido a su simplicidad, los modelos lineales de parámetros concentrados no variables en el tiempo son los más usados para la identificación estructural. Modelos más complejos, tales como los modelos lineales de parámetros continuos y los modelos no lineales, se usan sólo cuando los modelos de parámetros concentrados no pueden representar adecuadamente el comportamiento estructural.

Como las estructuras son sistemas continuos con masa distribuida, los modelos deberían tener, en principio, un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, usualmente es suficiente el empleo de un modelo reducido que sea capaz de describir el comportamiento de los modos de vibración de interés en término de los parámetros modales. Estos modelos se denominan de parámetros concentrados.

El comportamiento dinámico de un sistema mecánico discreto de n grados de libertad, con amortiguamiento viscoso, puede ser descrito por medio de la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\vec{q}}(t) + \mathbf{K} \vec{q}(t) = \vec{f}(t) \quad (3.1)$$

en la cuál \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, $\vec{q}(t)$ es el vector de desplazamientos, $\dot{\vec{q}}(t)$ es el vector de velocidades y $\ddot{\vec{q}}(t)$ es el vector de aceleraciones. El vector $\vec{f}(t)$ es la fuerza de excitación.

3.2.1 Ecuación de estado

El sistema definido por la ecuación diferencial de segundo orden (3.1) también puede ser descrito por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, usando un vector auxiliar denominado vector de estado. Así, la ecuación (3.1) se puede escribir:

$$\mathbf{A} \dot{\vec{x}}(t) + \mathbf{B} \vec{x}(t) = \vec{u}(t) \quad (3.2)$$

con

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{q}(t) \\ \dot{\bar{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

en la cual $\bar{\mathbf{x}}(t)$ es el vector de estado, \mathbf{A} la matriz de estado, \mathbf{B} la matriz de entrada y $\bar{u}(t)$ el vector de excitación. Para el caso de amortiguamiento viscoso arbitrario, las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} son de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

En vibraciones libres, el sistema representado por la ecuación (3.3) se escribe:

$$\mathbf{A} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) + \mathbf{B} \bar{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad (3.5)$$

cuya solución es de la forma:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\psi} e^{\lambda t} \quad (3.6)$$

en la cual $\bar{\psi}$ es un vector complejo y λ es una constante compleja. La ecuación (3.6) será solución de la ec. (3.5) si y solamente si $\bar{\psi}$ es una solución del problema de autovalores dado por:

$$(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \bar{\psi} = 0 \quad (3.7)$$

Los $2n$ autovalores y los correspondientes auto-vectores pueden ser reales o complejos. Si todos los autovalores están representados por pares complejos conjugados, entonces el sistema es sub-amortiguado. A partir de las ecuaciones (3.2) y (3.3) se puede ver que la forma de los autovectores será:

$$\bar{\Psi}_j = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_j \\ \lambda_j \bar{\Phi}_j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.8)$$

en la cuál $\bar{\psi}$ es el vector de formas modales del sistema ampliado, $\bar{\phi}$ es el vector de formas modales del sistema de segundo orden. Substituyendo \mathbf{A} y \mathbf{B} y la ecuación (3.8) en la (3.7) se tiene:

$$(\mathbf{M} \lambda_j^2 + \mathbf{C} \lambda_j + \mathbf{K}) \bar{\phi} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.9)$$

Este es el problema de autovalores para el sistema de segundo orden, siendo $\bar{\phi}$ un vector solución no trivial comúnmente llamado forma modal. La matriz modal compleja formada por todos los auto-vectores $\bar{\psi}_j$ ensamblados tiene las siguientes propiedades de ortogonalidad:

$$\Psi^T \mathbf{A} \Psi = \mathbf{M}_d, \quad \Psi^T \mathbf{B} \Psi = -\lambda \mathbf{M}_d, \quad \text{con } \lambda = \text{diag}\{\lambda_j\} \text{ y } \mathbf{M}_d = \text{diag}\{m_j\} \quad (3.10)$$

en la cuál m_j es la masa modal correspondiente al modo j .

El sistema dado por la ecuación (3.4) supone que las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son simétricas, por lo tanto las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} también lo son; debido a esto ambas matrices pueden ser diagonalizadas¹. Para el caso general se prefiere representar al sistema en espacio de estado en forma canónica, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \mathbf{F} \vec{x}(t) + \mathbf{E} \vec{f}(t) \\ \mathbf{F} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

en la cuál \mathbf{E} y \mathbf{F} son las matrices de entrada y del sistema expresado en forma canónica respectivamente.

Según la ecuación (3.10) se puede escribir:

$$\mathbf{A} = \Psi^{-T} \mathbf{M}_d \Psi^{-1}, \quad \mathbf{B} = -\Psi^{-T} \lambda \mathbf{M}_d \Psi^{-1} \quad (3.12)$$

con estas expresiones se puede ver que Ψ y su inversa diagonalizan a \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{F} &= \Psi \mathbf{M}_d^{-1} \Psi^T \Psi^{-T} \lambda \mathbf{M}_d \Psi^{-1} \\ \mathbf{F} &= \Psi \mathbf{M}_d^{-1} \lambda \mathbf{M}_d \Psi^{-1} \\ \mathbf{F} &= \Psi \lambda \Psi^{-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.2 Ecuación de observación

Un sistema lineal independiente del tiempo se define a través de la denominada ecuación de estado que modela el comportamiento dinámico del sistema (ver apartado 3.2.1) y por una segunda ecuación llamada ecuación de observación, ésta tiene en cuenta la ubicación de los

transductores de medición, que en la práctica totalizan usualmente un número substancialmente menor que los n grados de libertad del sistema. Si se supone que los registros corresponden a l ubicaciones de dichos transductores, los cuales pueden medir aceleraciones, velocidades y/o desplazamientos, la ecuación de observación se escribe como:

$$\vec{y}(t) = \mathbf{C}_a \vec{\ddot{q}}(t) + \mathbf{C}_v \vec{\dot{q}}(t) + \mathbf{C}_d \vec{q}(t) \quad (3.14)$$

en la cual $\vec{y}(t)$ es el vector que contiene las respuestas, \mathbf{C}_a , \mathbf{C}_v , \mathbf{C}_d son las matrices de localización de las respuestas, de dimensión $l \times n$ para la aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente. Estas matrices están formadas por un gran número de ceros (0) y unos (1) localizados en correspondencia con las coordenadas observadas, y forman las siguientes matrices:

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.15)$$

Así, la ecuación (3.14) puede escribirse como:

$$\vec{y}(t) = \mathbf{C}_0 \vec{x}(t) + \mathbf{D} \vec{u}(t) \quad (3.16)$$

en la cual \mathbf{C}_0 es la matriz $l \times n$ de las respuestas y \mathbf{D} es la matriz $l \times m$ de transmisión directa. De esta forma, un modelo determinístico en espacio de estado, en tiempo continuo, puede ser representado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \mathbf{F} \vec{x}(t) + \mathbf{E} \vec{f}(t) \\ \vec{y}(t) &= \mathbf{C}_0 \vec{x}(t) + \mathbf{D} \vec{u}(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2.3 Transformación de similaridad

Dos matrices \mathbf{G} y \mathbf{H} cuadradas de orden n son similares si existe una matriz \mathbf{T} no singular tal que: $\mathbf{H} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{T}$ (Huseyin, 1978).

Debido a la transformación de similaridad existe un número infinito de matrices \mathbf{F} , \mathbf{E} , \mathbf{C} y \mathbf{D} que describen un mismo sistema. Por ejemplo, se puede definir un nuevo vector de estado tal que:

$$\vec{x}(t) = \mathbf{T} \vec{z}(t) \quad (3.18)$$

¹ Cuando las coordenadas representan desplazamientos físicos de masas concentradas en los nodos del sistema, las

donde \mathbf{T} es una matriz cuadrada, compleja y no singular denominada matriz de similaridad, $\bar{\mathbf{x}}(t)$ es el vector de estado y $\bar{\mathbf{z}}(t)$ vector de estado similar. Sustituyendo en las ecuaciones (3.17) se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{\dot{\mathbf{z}}}(t) &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \bar{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{T} \bar{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}}(t)\end{aligned}\tag{3.19}$$

Es importante remarcar que las matrices transformadas describen la misma relación entre la excitación y la respuesta que las matrices originales, pero el nuevo vector de estado $\bar{\mathbf{z}}(t)$ no tiene el significado físico de desplazamientos y velocidades de $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Una transformación de similaridad especial es la transformación modal de estado $\bar{\mathbf{x}}_m(t)$:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Psi} \bar{\mathbf{x}}_m(t)\tag{3.20}$$

Sustituyendo la ecuación (3.20) en (3.19) e insertando la descomposición modal de \mathbf{A} se obtiene el modelo modal en espacio de estado:

$$\begin{aligned}\bar{\dot{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{x}}_m(t) + \mathbf{L} \bar{\mathbf{u}}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{V} \bar{\mathbf{x}}_m(t) + \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}}(t)\end{aligned}\tag{3.21}$$

en las cuáles:

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{C} \mathbf{\Psi}\tag{3.22}$$

siendo \mathbf{L}^T la matriz modal de entrada en tiempo discreto, \mathbf{V} es la matriz modal de salidas en tiempo discreto y $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz diagonal de autovalores.

3.3 Sistemas bajo acciones estocásticas en tiempos discretos

En espacio de estado, un sistema lineal invariable con el tiempo, en tiempos discretos, se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1}) &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}(t_k) \\ \bar{\mathbf{y}}(t_k) &= \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}}(t_k)\end{aligned}\tag{3.23}$$

matrices resultan necesariamente simétricas. En el caso de coordenadas arbitrarias, las matrices pueden ser no simétricas, pero la conclusión precedente vale siempre que sean matrices positivas definidas.

en la cuál $\bar{x}(t_k)$, $\bar{y}(t)$ y $\bar{u}(t_k)$ son los vectores de estado, de respuestas y de entrada en tiempo discreto respectivamente.

En la mayoría de los casos que se presentan en ingeniería, no es posible determinar la excitación y con lo único que se cuenta es con mediciones de la *respuesta* de la estructura. En estos casos se supone que la excitación $\bar{u}(t_k)$ es un ruido blanco gaussiano estacionario con media cero, es decir que:

$$E \left[\bar{u} \left(t_k \right) \right] = 0 \quad (3.24)$$

$$E \left[\bar{u} \left(t_k \right) \bar{u}^T \left(t_{k+n} \right) \right] = \Delta \delta (n)$$

en la cual E indica valor esperado, $\delta (n)$ es el delta de Kronecker y Δ la matriz de covarianzas. Por este motivo este tipo de sistemas se denominan estocásticos. Las matrices **A**, **B**, **C** y **D** en tiempo discreto están relacionadas con las de tiempo continuo como [Juang et. al, 1985]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\mathbf{A}_c \Delta t} , & \mathbf{B} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau} \delta \tau \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_0 &= \mathbf{C}_c , & \mathbf{D} &= \mathbf{D}_c \end{aligned} \quad (3.25)$$

el subíndice c indica que las matrices corresponden al sistema en tiempo continuo.

La descomposición en autovalores de la matriz **A** en tiempos discretos se puede obtener a partir de la descomposición en autovalores de la matriz en tiempo continuo \mathbf{A}_c .

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = e^{\Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Delta t} = \Psi e^{\Lambda_c \Delta t} \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} = \Psi \text{diag} [\mu_i] \Psi^{-1} \quad (3.26)$$

Los auto-vectores en tiempo continuo y discreto son iguales, mientras que los autovalores en tiempos discretos μ_i están relacionados a los de tiempo continuo por medio de [Juang et. al, 1985]:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (3.27)$$

en la cuál μ_i y λ_i representan los autovalores en tiempo discreto y continuo respectivamente.

3.3.1 Excitación tipo ruido colorido

Un sistema lineal invariable con el tiempo excitado por un ruido colorido² puede representarse en espacio de estado como:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(t_{k+1}) &= \mathbf{A}_1 \bar{x}_1(t_k) + \mathbf{B}_1 \bar{z}(t_k) \\ \bar{y}(t_k) &= \mathbf{C}_1 \bar{x}_1(t_k) + \mathbf{D}_1 \bar{z}(t_k)\end{aligned}\quad (3.28)$$

en la cuál \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 y \mathbf{D}_1 son las matrices de estado, de entrada, de salidas y de transmisión directa del sistema principal respectivamente. Se supone que el ruido colorido $\bar{z}(t_k)$ se puede obtener como un ruido blanco $\bar{u}(t)$ filtrado a través de un sistema auxiliar invariable con el tiempo de la forma:

$$\begin{aligned}\bar{x}_2(t_{k+1}) &= \mathbf{A}_2 \bar{x}_2(t_k) + \mathbf{B}_2 \bar{u}(t_k) \\ \bar{z}(t_k) &= \mathbf{C}_2 \bar{x}_2(t_k) + \mathbf{D}_2 \bar{u}(t_k)\end{aligned}\quad (3.29)$$

en la cuál \mathbf{A}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C}_2 y \mathbf{D}_2 son las matrices de estado, de entrada, de salidas y de transmisión directa del sistema auxiliar respectivamente, $\bar{u}(t_k)$ es el vector de entradas y $\bar{x}_2(t_k)$ es el vector de estado auxiliar.

Los sistemas en espacio de estado representados por las ecuaciones (3.28) y (3.29) están acoplados y pueden representarse por un sistema en espacio de estado simple formulando el siguiente vector de estado ampliado:

$$\bar{\mathbf{x}}(t_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_k) \\ \bar{x}_2(t_k) \end{bmatrix}\quad (3.30)$$

reemplazando las ecuaciones (3.29) y (3.30) en la (3.28) se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(t_{k+1}) &= \mathbf{A}_1 \bar{x}_1(t_k) + \mathbf{B}_1 (\mathbf{C}_2 \bar{x}_2(t_k) + \mathbf{D}_2 \bar{u}(t_k)) \\ \bar{x}_2(t_{k+1}) &= \mathbf{A}_2 \bar{x}_2(t_k) + \mathbf{B}_2 \bar{u}(t_k) \\ \bar{y}(t_k) &= \mathbf{C}_1 \bar{x}_1(t_k) + \mathbf{D}_1 (\mathbf{C}_2 \bar{x}_2(t_k) + \mathbf{D}_2 \bar{u}(t_k))\end{aligned}\quad (3.31)$$

² Se utiliza el término para caracterizar procesos con densidad espectral variable con la frecuencia.

En la ecuación (3.31) se puede ver que el ruido colorido fue eliminado y se obtiene un sistema en espacio de estado excitado con ruido blanco y donde las matrices del sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2], \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \quad (3.32)$$

Así se demuestra que, si se somete un sistema lineal invariable con el tiempo a una excitación aleatoria tipo ruido colorido, la cual puede suponerse generada por un ruido blanco filtrado por un sistema auxiliar lineal invariable con el tiempo, se puede representar al mismo como un sistema en espacio de estado sometido a una excitación tipo ruido blanco. Por lo tanto las ecuaciones (3.23) son capaces de describir el comportamiento de tales sistemas.

3.3.2 Observabilidad y Controlabilidad de los sistemas bajo acciones estocásticas

Un sistema lineal en tiempos discretos puede representarse en espacio de estado de diferentes formas. Debido a esta falta de unicidad se debe tener cuidado con la dimensión del espacio de estado. Si la dimensión es demasiado pequeña habrá seguramente pérdida de información, comparado con el sistema que se está modelando. Por otro lado, si la dimensión del espacio de estado es demasiado grande, la representación en espacio de estado tendrá información redundante. Por lo tanto, la dimensión de la representación en espacio de estado debe ser la menor dimensión para la cuál todos los modos del sistema puedan observarse en la respuesta. Se dice que una representación es mínima cuando es observable y controlable.

El sistema en espacio de estado representado por las ecuaciones (3.23) de orden $m=2n$ es controlable y observable si y solamente si las matrices

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{CA}^{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{B}] \quad (3.33)$$

tienen rango m [Inman., 1989], [Rugh, 1996], [Antsaklis *et al*, 1997]. Si una realización es observable es posible observar todos los modos dinámicos en la respuesta, y si es controlable significa que todos los modos dinámicos del sistema pueden ser excitados por una excitación estocástica siempre que la matriz de controlabilidad \mathbf{Q} sea no singular, es decir que tenga rango m .

Una de las propiedades importantes del sistema en espacio de estado mínimo es que una realización puede ser transformada en otra por una transformación de similaridad.

Considerando el sistema en espacio de estado dado por la ecuación (3.23), se define la siguiente transformación lineal del vector de estado:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{Z} \mathbf{x}(t_k) \quad (3.34)$$

donde \mathbf{Z} es una matriz de transformación no singular de orden m . Así, el sistema en espacio de estado puede escribirse en términos del nuevo vector de estado

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1}) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}(t_k) + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}}(t_k) \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t_k) = \tilde{\mathbf{C}}_0 \tilde{\mathbf{x}}(t_k) + \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{u}}(t_k)$$

donde las nuevas matrices del sistema son

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z} \mathbf{A} \mathbf{Z}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Z} \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{Z}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (3.36)$$

3.3.3 Presencia de ruido en las mediciones

El ruido está siempre presente en cualquier medición y contribuye a la respuesta del sistema, por lo tanto debe ser tenido en cuenta en el modelo estocástico. El ruido puede deberse a diferentes causas, las más comunes son los errores del modelo y el ruido generado por los sensores. Así, el nuevo modelo estocástico en espacio de estado en tiempos discretos será de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{w}}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{v}}_k \end{aligned} \quad (3.37)$$

La excitación $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ desaparece de la ecuación (3.23) y es implícitamente modelada a través del ruido representado por $\tilde{\mathbf{w}}_k$ (ruido debido a perturbaciones y errores del modelo) y $\tilde{\mathbf{v}}_k$ (ruido introducido por los sensores). Se supone que ambos vectores son ruido blanco con media cero y matrices de covarianzas:

$$\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_p \\ \tilde{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_q^T & \tilde{\mathbf{v}}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \delta_{pq} \quad (3.38)$$

en la cuál E es el valor esperado, δ_{pq} es el delta Kronecker, p, q son dos instantes de tiempo arbitrarios, y $\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R}$ son matrices de covarianzas que describen el ruido.

3.3.4 Propiedades de los sistemas bajo acciones estocásticas en espacio de estado

Se presentan a continuación algunas propiedades de los sistemas estocásticos. Además de las suposiciones acerca del ruido definidas en la ecuación (3.38), se considera que el proceso estocástico es estacionario con media cero:

$$E [x_k x_k^T] = \Sigma , \quad E [x_k] = 0 \quad (3.39)$$

en la cual la matriz de covarianzas Σ es independiente del tiempo k . Como w_k y v_k tienen media cero y son independientes del estado actual se tiene:

$$E [x_k w_k^T] = \mathbf{0} , \quad E [x_k v_k^T] = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

La matriz de covarianzas de respuestas para un determinado retraso i de tiempo, considerando ergodicidad, es:

$$\mathbf{R}_i = E [y_{k+i} y_k^T] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i} y_k^T \quad (3.41)$$

Se define como matriz de covarianzas "siguiente estado-salida" (*next state-output*) a:

$$\mathbf{G} = E [x_{k+1} y_k^T] \quad (3.42)$$

Admitiendo estacionalidad, las propiedades de w y v , y las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

$$\Sigma = \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{C} \Sigma \mathbf{C}^T + \mathbf{R} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \Sigma \mathbf{C}^T + \mathbf{S} \quad (3.45)$$

y para $i = 1, 2, \dots$:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{R}_{-i} = \mathbf{G}^T (\mathbf{A}^{i-1})^T \mathbf{C}^T \quad (3.47)$$

A partir de la ec.(3.41), las covarianzas reducidas entre todas las salidas y las elegidas como referencias se definen como las primeras r columnas de la matriz completa de covarianzas:

$$\mathbf{R}_i^{ref} = \mathbf{E} [y_{k+i} (y_k^{ref})^T] = \mathbf{R}_i \mathbf{L}^T \quad (3.48)$$

donde $\mathbf{L} = (\mathbf{I}_r \ 0)$ es la matriz de selección de referencias e \mathbf{I}_r es la matriz identidad de orden r

Para $i = 1, 2, \dots$:

$$\mathbf{R}_i^{ref} = \mathbf{R}_i \mathbf{L}^T = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G}^{ref} \quad (3.49)$$

$$(\mathbf{R}_{-i}^{ref})^T = \mathbf{L} \mathbf{R}_{-i} = (\mathbf{G}^{ref})^T (\mathbf{A}^{i-1})^T \mathbf{C}^T \quad (3.50)$$

Estas últimas propiedades son muy importantes, ya que las covarianzas de las respuestas pueden considerarse como la respuesta impulsiva del sistema determinístico lineal. [Akaike, 1974].

3.4 Conclusiones

En este capítulo se presentaron resumidamente las características de sistemas lineales en tiempo continuo y discreto y sus representaciones en espacio de estado.

Para poder representar sistemas sometidos a excitaciones ambientales, donde, en general, no es posible conocer la excitación, se supone que la misma es un ruido blanco gaussiano. Se demostró también que si se somete un sistema lineal independiente del tiempo a un ruido colorido, el cuál se supone generado por un ruido blanco filtrado, la representación dada por las ecs. (3.23) se puede utilizar para describir su comportamiento.

Finalmente, se presentaron algunas propiedades de los sistemas lineales bajo acciones estocásticas. Gracias a que la factorización de las matrices de covarianzas de las respuestas en matrices en espacio de estado es similar a la factorización de la respuesta impulsiva (propiedad ampliamente usada en métodos de identificación de sistemas en los cuáles la excitación es conocida), es posible encontrar una equivalencia entre los métodos de identificación de sistemas bajo acciones estocásticas basados en las covarianzas y los métodos de identificación basados en la respuesta impulsiva.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS PARA LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS BAJO ACCIONES ESTOCÁSTICAS

4.1 Introducción

En muchos casos prácticos de ingeniería civil no es posible *medir* la excitación, por lo que métodos de identificación basados en observación de la respuesta únicamente son de fundamental importancia. En la literatura técnica han sido propuestos procedimientos de este tipo para identificar sistemas excitados por acciones desconocidas, en los cuales se supone que sólo se puede medir la respuesta de la estructura. Este es el caso que se presenta, por ejemplo, en estructuras de grandes dimensiones sometidas a la acción del viento, tráfico o ruido ambiental. Para fines de análisis, se admite usualmente que la excitación es una realización de un proceso estocástico estacionario de tipo ruido blanco. En el caso donde la excitación ambiental se genera por fuerzas de presión de la parte fluctuante del viento, numerosos ensayos mostraron que dichas fluctuaciones se pueden describir mediante procesos estocásticos estacionarios gaussianos teniendo en cuenta condiciones de corta duración. [Vickery et al., 1983].

En este capítulo se presenta el método de identificación de sistemas denominado método de subespacios basado en las covarianzas (SSI-Cov) [Peeters et. al, 1999], [Peeters B., 2000]. Es un algoritmo que usa las matrices de covarianzas de las respuestas y un número limitado de respuestas tomadas como referencias, agrupadas en una matriz Toeplitz, a partir de la cual se puede identificar la matriz del sistema y así computar los parámetros modales de la estructura.

Se proponen además dos nuevos métodos para identificar las características dinámicas de estructuras sometidas a vibraciones ambientales a partir de la medición de la respuesta del sistema. El primer método se basa en la teoría de los modos normales, y permite la determinación de las frecuencias y amortiguamientos a partir de las funciones de densidad espectral de potencia de las respuestas modales observadas. El segundo método es una ampliación del primero aplicable en el caso de amortiguamiento arbitrario. Se propone también un método para la obtención de las matrices de amortiguamiento y rigidez de sistemas con amortiguamiento no proporcional, es decir que resuelve el denominado problema inverso.

4.2 Sistemas lineales con modos normales

En el análisis dinámico de sistemas lineales resulta útil representar la deformada de una estructura a través de las formas modales. Estas formas modales constituyen, para un sistema de n grados de libertad, conjuntos de n parámetros, que pueden servir como coordenadas generalizadas para expresar cualquier configuración deformada, teniendo como ventaja las propiedades de ortogonalidad.

Introduciendo coordenadas modales en la ec (3.1) y premultiplicando ambos miembros por la transpuesta de la matriz modal, se puede escribir:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\eta} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \eta = \Phi^T \vec{f}(t) \quad (4.1)$$

en la cuál, Φ es la matriz de formas modales y η es la matriz de respuesta modal.

La expresión (4.1) constituye un sistema de n ecuaciones que pueden ser desacopladas siempre que \mathbf{C} y \mathbf{K} conmuten con relación a \mathbf{M} , es decir, si $\mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$, [Fawzy I., 1977]. En este caso las formas modales del sistema amortiguado serán las mismas que las del sistema no amortiguado y, al cumplir con la condición clásica de ortogonalidad, resulta la ecuación (4.1) expresable como n ecuaciones de primer orden desacopladas de la forma:

$$M_r \ddot{\eta}_r + C_r \dot{\eta}_r + K_r \eta_r = f_r(t) \quad (4.2)$$

en la cual η_r es la respuesta modal r ,

$$M_r = \phi_r^T \mathbf{M} \phi_r \text{ es la masa modal,} \quad C_r = \phi_r^T \mathbf{C} \phi_r \text{ es el amortiguamiento modal}$$

$$K_r = \phi_r^T \mathbf{K} \phi_r \text{ es la rigidez modal.}$$

4.2.1 Obtención de los parámetros modales en sistemas lineales con modos reales

A partir de lo expuesto anteriormente, la respuesta del sistema se puede escribir como:

$$\bar{q}(t) = \bar{\phi}_1 \eta_1(t) + \bar{\phi}_2 \eta_2(t) + \dots + \bar{\phi}_n \eta_n(t) \quad (4.3)$$

en la cual $\bar{\phi}_i$ representa la forma modal i y $\eta_i(t)$ la respuesta modal i .

Considerando que la respuesta $\bar{q}(t)$ es conocida y pre-multiplicando ambos miembros de la ecuación (4.3) por $\bar{\phi}_r^T \mathbf{M}$ se tiene:

$$\bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{q}(t) = \bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_1 \eta_1(t) + \dots + \bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r \eta_r(t) + \dots \quad (4.4)$$

Debido a la condición de ortogonalidad con respecto a la matriz de masa, todos los términos de la serie, exceptuando el r -ésimo, desaparecen, resultando así:

$$\bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{q}(t) = M_r \eta_r(t) \quad (4.5)$$

$$\eta_r(t) = \frac{\bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{q}(t)}{M_r}; \quad (r=1\dots n) \quad (4.6)$$

Como se observa en la ecuación (4.2), η_r puede ser considerada como la respuesta de un sistema de un grado de libertad, por lo tanto al determinar la densidad espectral de potencia¹ de cada función $\eta_r(t)$ aparecerá un único pico correspondiente a la frecuencia del modo en cuestión. La frecuencia y el amortiguamiento para cada modo de vibración se determinan ajustando por mínimos cuadrados, la función de respuesta en frecuencia (FRF) de un oscilador lineal de un grado de libertad (la cuál es función de la frecuencia y relación de amortiguamiento) a la función observada (ver anexo B).

Como muestra la ecuación (4.6) para determinar $\eta_r(t)$, se necesita conocer la matriz modal, lo cual implica la adopción previa de un modelo numérico discreto o la obtención de dicha matriz experimentalmente [Inman D., 1994].

¹ Densidad espectral de potencia calculada como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la respuesta modal.

4.2.2 Ejemplo

Sistema estructural plano (sin ruido de medición). Se analiza el pórtico plano de acero de seis pisos y seis vanos esquematizado en la figura 4.1. Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento del sistema son conocidas (en lo sucesivo estas matrices serán llamadas matrices reales del sistema). La masa de cada piso es de 255 tn. Las vigas y columnas están constituidas por perfiles I de alas anchas con las siguientes dimensiones: **Columnas** WF14x193 (1° y 2° piso), WF14x132 (3° y 4° piso), WF14x99 (5° y 6° piso), **Vigas**: WF30x116 (1° y 2° piso), WF27x102 (3° y 4° piso), WF24x68 (5° y 6° piso). Debido a que las deformaciones principales de la estructura son del tipo cortante, se consideran para el modelo analítico seis grados de libertad correspondientes a los seis desplazamientos horizontales de cada piso. Se admitió amortiguamiento viscoso proporcional (a las matrices de masa y rigidez) de 5% para los dos primeros modos de vibración.

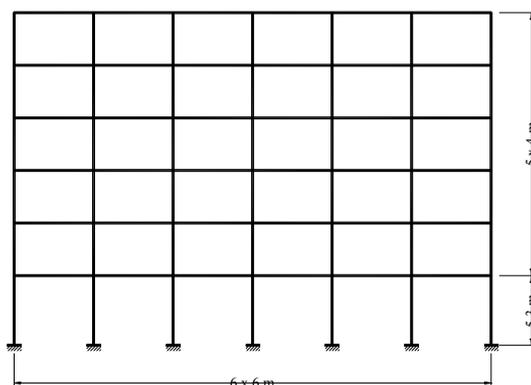
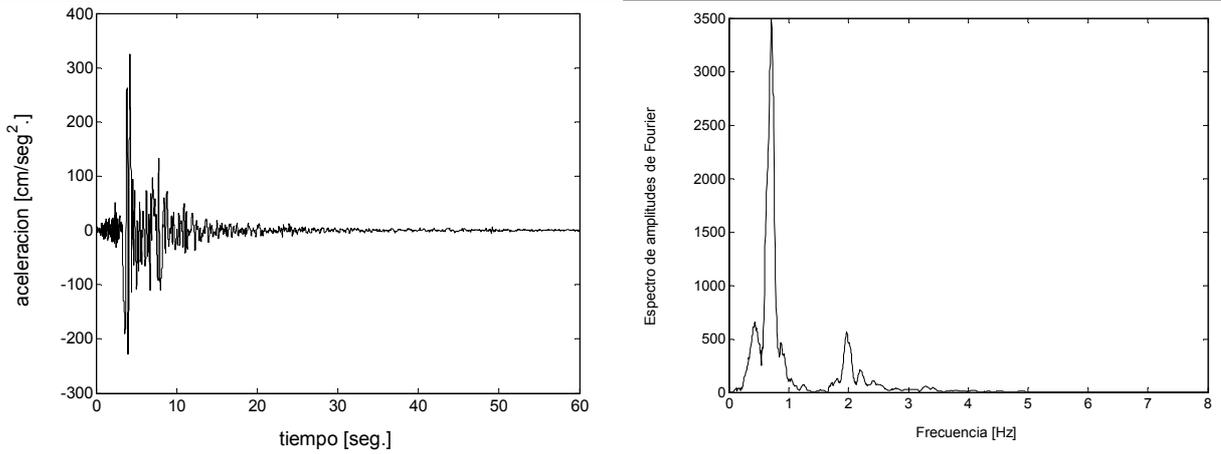
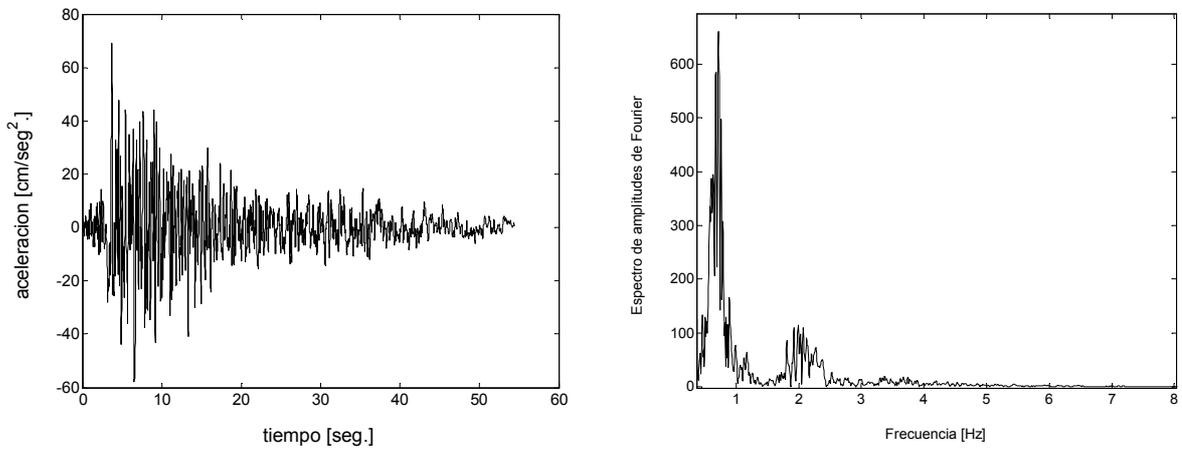


Figura 4.1 Pórtico plano.

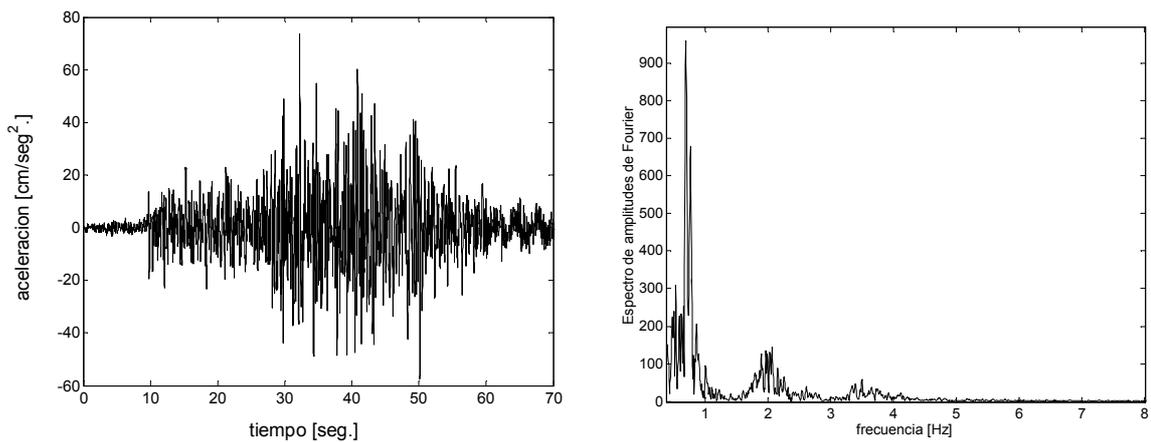
Posteriormente, mediante integración numérica se determinó la respuesta (en términos de desplazamientos de piso) de la estructura sometida a las siguientes excitaciones: Caucete, (1977), Northridge, (1994) y Taft, (1952). La figura 4.2 muestra los registros de los sismos antes mencionados juntamente con la densidad espectral de potencia de la respuesta correspondiente al primer piso de la estructura, cabe aclarar que sólo se muestra la densidad espectral de potencia del primer piso debido a que las correspondientes a los otros pisos son similares para todos los sismos considerados.



a) Northridge



b) Taft



c) Cauçete

Figura 4.2 Sismos usados como excitación y espectro de amplitudes de Fourier de las respuestas correspondientes al primer piso del pórtico respectivamente.

4.2.2.1 Procedimiento paso a paso para la estimación de los parámetros modales

Paso 1: con las respuestas en término de desplazamientos de piso para los tres sismos considerados se aplicó el método de los modos normales y se obtuvieron las respuestas modales para los tres sismos analizados, es decir, tres respuestas modales por cada modo de vibración a través de la ecuación 4.6.

Paso 2: se calcula la densidad espectral de potencia de cada respuesta modal y se obtiene el valor esperado (promedio de 3) de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal para los seis modos de vibración (ver apéndice B).

Paso 3: determinado el estimador de la densidad espectral de potencia de las respuestas modales se ajusta por mínimos cuadrados la función en respuesta de frecuencia de un oscilador lineal de un grado de libertad a la función observada (estimador de la densidad espectral de potencia de las respuestas modales). (ver apéndice B).

La tabla 4.1 muestra los valores de los parámetros estimados mediante el método de los modos normales y aquéllos obtenidos analíticamente resolviendo el problema de autovalores del sistema, y el amortiguamiento modal de cada modo de vibración y se determina el error relativo en la estimación de los parámetros respecto de los determinados analíticamente.

	Analítico		Método de los modos normales			
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	error [%]	ξ [%]	error [%]
Modo 1	0.72	5	0.72	0	5	0
Modo 2	1.99	5	1.98	0.5	5	0
Modo3	3.42	7	3.42	0	7	0
Modo 4	4.99	9.7	4.97	0.4	9.4	3.1
Modo 5	6.55	12	6.50	0.76	12.3	2.5
Modo 6	8.2	15	8.18	0.24	14.7	2

Tabla 4.1 Parámetros estimados juntamente con los obtenidos analíticamente.

Se puede ver que el error en la estimación de las frecuencias es bastante bajo no superando en ninguno de los modos el 1%. En la estimación del amortiguamiento este error aumenta pero siempre se mantiene en valores bajos considerados excelentes para fines de ingeniería. En la tabla 4.1 también se puede observar que el error en la estimación de los parámetros aumenta con el orden del modo, esto podría deberse al tipo de excitación usada en el ejemplo, con ella los modos más altos son menos excitados.

En las figuras 4.3 a 4.8 se muestra el estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta para cada modo de vibración y la función de respuesta en frecuencia del oscilador lineal de un grado de libertad que mostró mejor ajuste.

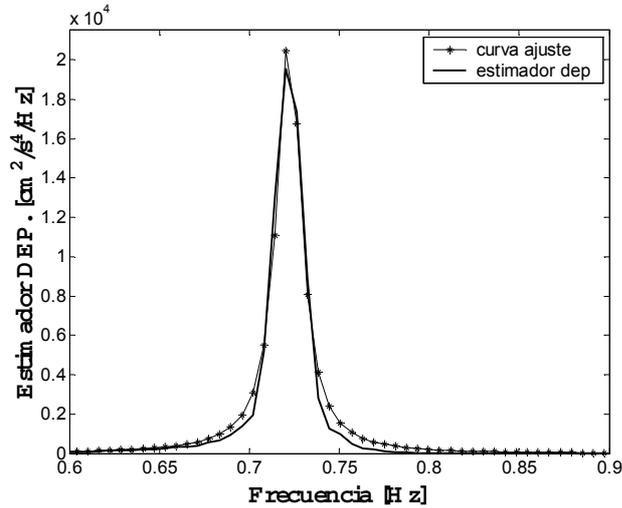


Figura 4.3. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_1(t)$ y curva de ajuste.

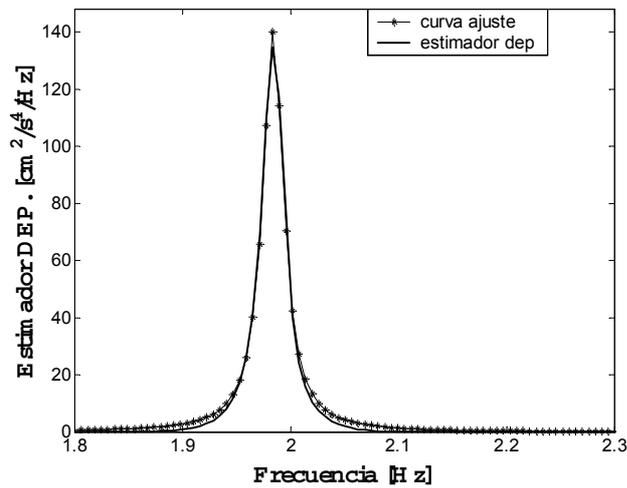


Figura 4.4. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_2(t)$ y curva de ajuste.

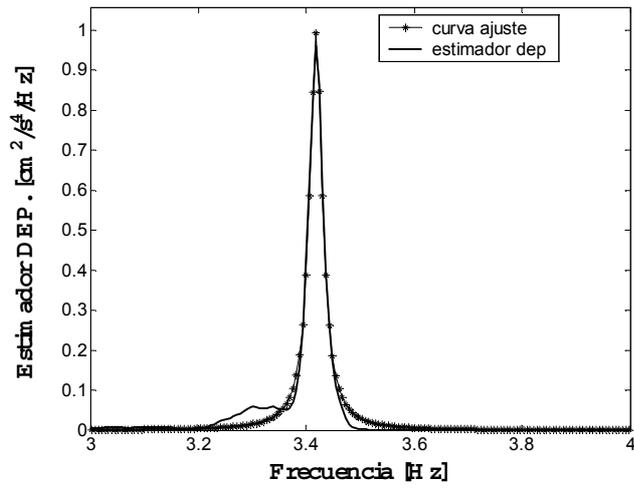


Figura 4.5. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_3(t)$ y curva de ajuste.

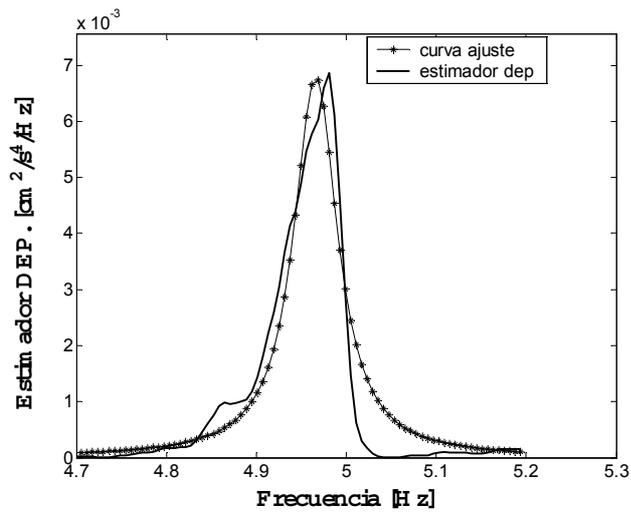


Figura 4.6. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_4(t)$ y curva de ajuste.

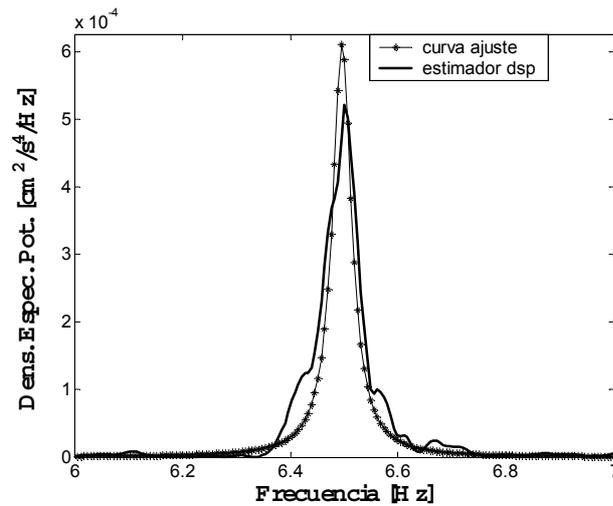


Figura 4.7. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_5(t)$ y curva de ajuste.

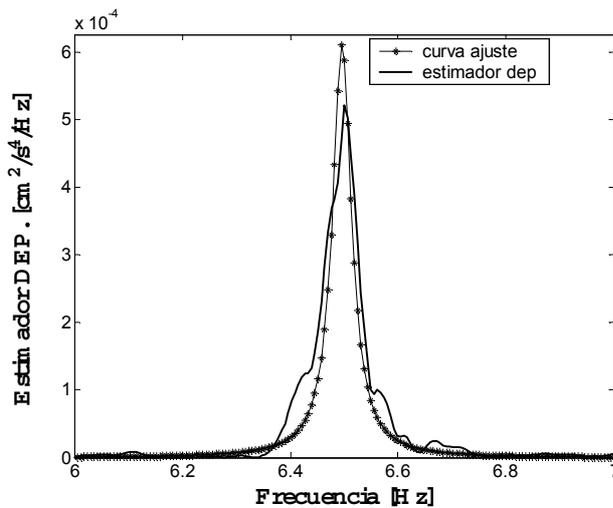


Figura 4.8. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_6(t)$ y curva de ajuste.

En las figuras 4.3 a 4.8 se puede ver el muy buen ajuste de curva alcanzado para todos los modos de vibración estimados. También se puede observar el grado de filtrado que se logra con el método propuesto ya que si se observa en la figura 4.2 en las densidades espectrales de las respuestas aparece un único pico correspondiente a la frecuencia del primer modo de vibración, al aplicarse el método propuesto, las respuesta modales pueden desacoplarse haciendo posible la identificación de los parámetros modales de los modos débilmente excitados.

4.3 Sistemas lineales con modos complejos

Para el caso de un sistema con amortiguamiento viscoso arbitrario, los autovectores y autovalores ocurren en pares complejos conjugados, esto se debe a que los coeficientes de las matrices del sistema son reales, por lo tanto cualquier valor característico debe ser real o presentarse en pares de valores complejos conjugados [Ewins, 1995]. Para este tipo de sistemas se propone el siguiente método para la estimación de los parámetros modales.

Considérese la respuesta de un sistema lineal con amortiguamiento viscoso no proporcional a cualquier excitación externa, ésta, según lo expresado en el párrafo anterior, se podrá expresar como:

$$\bar{q}(t) = \bar{\phi}_1 \eta_1(t) + \bar{\bar{\phi}}_1 \bar{\eta}_1(t) + \bar{\phi}_2 \eta_2(t) + \bar{\bar{\phi}}_2 \bar{\eta}_2(t) + \dots + \bar{\phi}_n \eta_n(t) + \bar{\bar{\phi}}_n \bar{\eta}_n(t) \quad (4.7)$$

en la cuál $\bar{\phi}_1$ representa la formas modal compleja conjugada y $\bar{\eta}_1(t)$ la respuesta modal i compleja conjugada.

Pre-multiplicando ambos miembros de la ecuación (4.7) por $\bar{\phi}_r^T \mathbf{M}$ se tiene:

$$\bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{q}(t) = \bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_1 \eta_1(t) + \bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\bar{\phi}}_1 \bar{\eta}_1(t) + \dots + \bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r \eta_r(t) + \bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\bar{\phi}}_r \bar{\eta}_r(t) + \dots \quad (4.8)$$

Debido a la condición de ortogonalidad con respecto a la matriz de masa, todos los términos de la serie, excepto el r -ésimo, desaparecen (ver demostración en anexo A), de este modo:

$$\bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{q}(t) = \bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r \eta_r(t) \quad (4.9)$$

De igual modo, si se pre-multiplica ambos miembros de la ecuación (4.7) por $\bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M}$ se tiene:

$$\bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M} \bar{q}(t) = \bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_1 \eta_1(t) + \bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M} \bar{\bar{\phi}}_1 \bar{\eta}_1(t) + \dots + \bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r \eta_r(t) + \bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M} \bar{\bar{\phi}}_r \bar{\eta}_r(t) + \dots \quad (4.10)$$

y por lo tanto, debido a la condición de ortogonalidad resulta:

$$\bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M} \bar{q}(t) = \bar{\bar{\phi}}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r \bar{\eta}_r(t) \quad (4.11)$$

Sumando las ecuaciones (4.11) y (4.9) y considerando a los modos normalizados de tal manera que $\bar{\phi}_r^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r = 1$, se tiene:

$$Re(\bar{\phi}_r^T) \mathbf{M} \bar{q}(t) = Re(\eta_r(t)) \quad (4.12)$$

en la cuál $Re()$ significa parte real.

Determinada la respuesta modal para cada modo de vibración considerado, para estimar las frecuencias y amortiguamientos se procede del mismo modo que lo explicado en el método de los modos normales, es decir, se ajusta por mínimos cuadrados la función de respuesta en frecuencia de un oscilador lineal de un grado de libertad a la curva observada. (ver apéndice B).

4.3.1 Ejemplo.

Sistema estructural plano (sin ruido de medición). Se analiza el mismo pórtico del ejemplo anterior considerando amortiguamiento viscoso no proporcional.

La tabla 4.2 muestra los valores de los parámetros modales estimados por el método propuesto de los modos complejos juntamente con el error relativo respecto a los parámetros de la estructura obtenidos analíticamente resolviendo el problema de autovalores.

	Analítico		Método de los modos complejos			
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	error [%]	ξ [%]	error [%]
Modo 1	0.72	2	0.72	0	2.0	0
Modo 2	1.99	5	1.98	0.5	4.97	0.6
Modo3	3.42	7.3	3.42	0	7.25	0.7
Modo 4	4.99	8.4	4.98	0.24	8.3	1.19
Modo 5	6.55	8.9	6.50	0.76	8.75	1.68
Modo 6	8.2	9.2	8.17	0.36	9.34	1.5

Tabla 4.2 Parámetros modales estimados y obtenidos analíticamente.

En esta tabla se puede observar que el error relativo en la estimación de los parámetros es bajo tanto para las frecuencias como para el amortiguamiento mostrando que los estimadores son aptos para su uso en ingeniería.

En las figuras 4.9 a 4.14 se muestra el estimador (obtenido como la media de tres) de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal calculada mediante la ecuación (4.12) y la función de respuesta en frecuencia del oscilador lineal de un grado de libertad que mostró mejor ajuste.

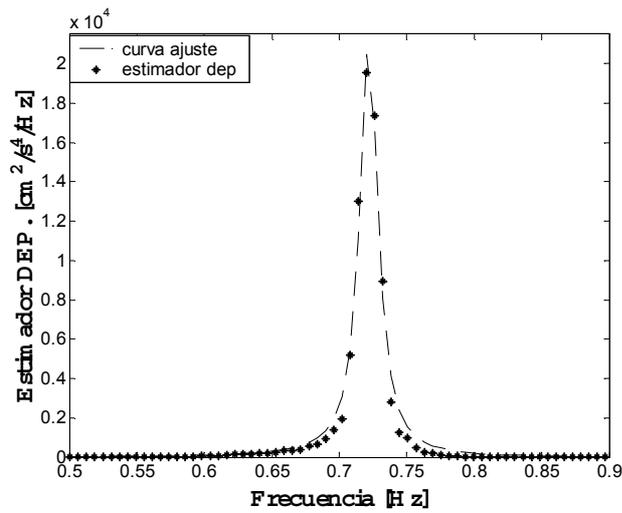


Figura 4.9. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_1(t)$ y curva FRF de un oscilador lineal de 1 grado de libertad que la ajusta

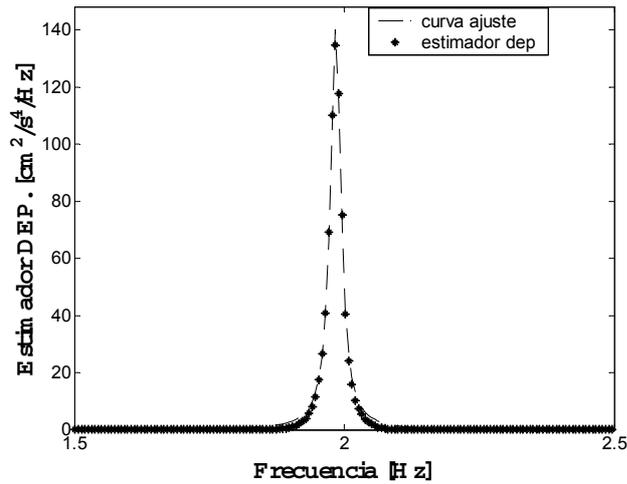


Figura 4.10. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_2(t)$ y curva FRF de un oscilador lineal de 1 grado de libertad que la ajusta

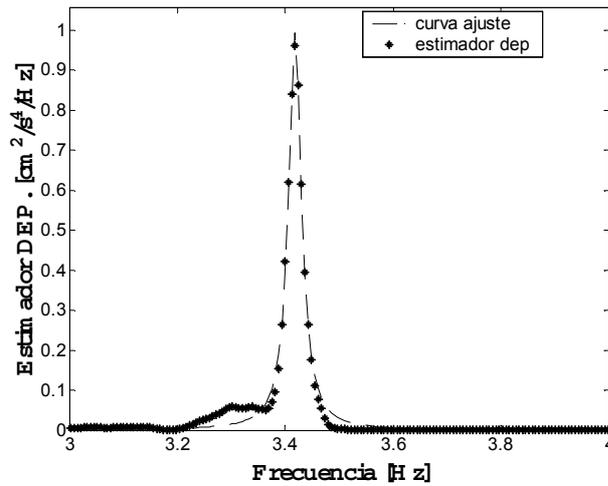


Figura 4.11. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_3(t)$ y curva FRF de un oscilador lineal de 1 grado de libertad que la ajusta

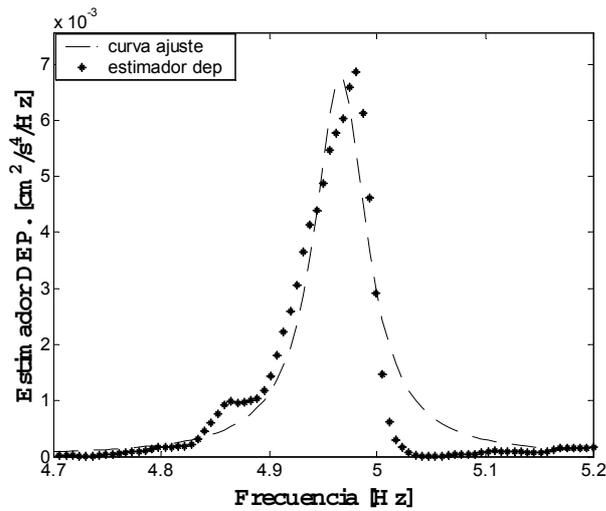


Figura 4.12. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_4(t)$ y curva FRF de un oscilador lineal de 1 grado de libertad que la ajusta

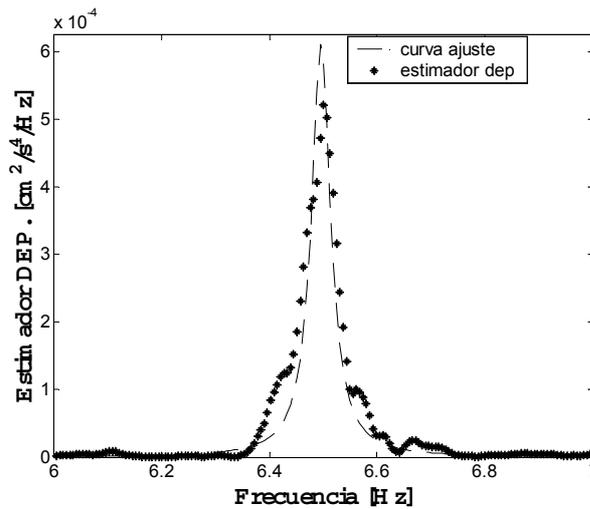


Figura 4.13. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_5(t)$ y curva FRF de un oscilador lineal de 1 grado de libertad que la ajusta

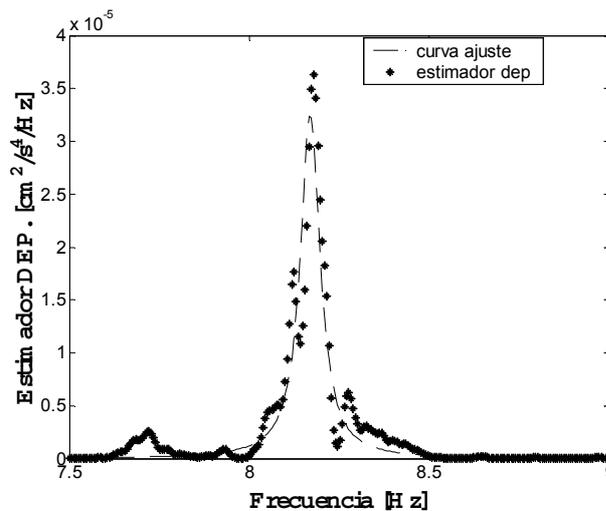


Figura 4.14. Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_6(t)$ y curva FRF de un oscilador lineal de 1 grado de libertad que la ajusta

Si se observan las ordenadas en las figuras 4.9 a 4.14 se puede ver la gran diferencia en el orden, variando de 10^4 para el primer modo a 10^5 para el sexto modo, esto está indicando el nivel de filtrado que alcanza el método, ya que si no fuera posible desacoplar las respuestas modales, seguramente en los casos en que sólo los modos más bajos son excitados, no podrían

estimarse los parámetros correspondientes a dichos modos a través de un análisis de los espectros de respuestas.

De los resultados obtenidos se puede ver que el método propuesto estima con bastante precisión la frecuencia y el amortiguamiento en estructuras simuladas numéricamente, es decir sin presencia de ruido de medición.

4.4 Método Estocástico de Subespacios basado en las Covarianzas (Covariance-driven stochastic subspace identification method).

En el método SSI_Cov (Covariance-driven stochastic subspace identification) [Akaike, 1974], se determina la matriz de covarianzas entre las respuestas, la cuál puede luego factorizarse en las matrices del sistema. Una versión modificada de este método [Peeters et. al, 1999], [Peeters, 2000] consiste en trabajar con un número r limitado de respuestas consideradas de referencia. Consideremos el modelo estocástico en espacio de estado representado por la ecuación (3.23).

$$\bar{x}(t_{k+1}) = \mathbf{A} \bar{x}(t_k) + \mathbf{B} \bar{u}(t_k)$$

$$\bar{y}(t_k) = \mathbf{C} \bar{x}(t_k) + \mathbf{D} \bar{u}(t_k)$$

Las covarianzas de referencias dadas por la ecuación: $\mathbf{R}_i^{ref} = \mathbf{E} [y_{k+i} (y_k^{ref})^T] = \mathbf{R}_i \mathbf{L}^T$ se reúnen en una matriz de bloques Toeplitz¹ de dimensión $(lxi) \times (rxi)$:

$$\mathbf{T}^{ref}_{l/i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^{ref} & \mathbf{R}_{i-1}^{ref} & \dots & \mathbf{R}_1^{ref} \\ \mathbf{R}_{i+1}^{ref} & \mathbf{R}_i^{ref} & \dots & \mathbf{R}_2^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{2i-1}^{ref} & \mathbf{R}_{2i-2}^{ref} & \dots & \mathbf{R}_i^{ref} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

en la cual l es el número total de respuestas, r es el número de respuestas consideradas como de referencia e i el retraso de tiempo (*lag*).

Aplicando las propiedades de factorización dadas por las ecuaciones (3.49)

$$\mathbf{R}_i^{ref} = \mathbf{R}_i \mathbf{L}^T = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G}^{ref}$$

¹ Matriz Toeplitz es una matriz cuya diagonal es la repetición del mismo elemento.

se puede expresar a la matriz Toeplitz como:

$$T^{ref}_{l/i} = \begin{bmatrix} CA^{i-1}G^{ref} & CA^{i-2}G^{ref} & \dots & CA G^{ref} & CG^{ref} \\ CA^i G^{ref} & CA^{i-1}G^{ref} & \dots & CA^2 G^{ref} & CAG^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{2i-2}G^{ref} & CA^{2i-3}G^{ref} & \dots & CA^i G^{ref} & CA^{i-1}G^{ref} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$T^{ref}_{l/i} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{i-1}G^{ref} & \dots & AG^{ref} & G^{ref} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Haciendo uso de las definiciones de matrices de observabilidad y controlabilidad se puede descomponer a la matriz T^{ref} como:

$$T^{ref}_{l/i} = O_i Q^{ref}_i \quad (4.16)$$

en la cual la matriz O_i de observabilidad es:

$$O_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}_{li \times n} \quad (4.17)$$

y la matriz Q^{ref}_i de controlabilidad es:

$$Q^{ref}_i = \begin{bmatrix} A^{i-1}G^{ref} & \dots & AG^{ref} & G^{ref} \end{bmatrix}_{n \times ri} \quad (4.18)$$

en la cual n es el orden del sistema.

Si el orden n del sistema es desconocido, y el número de columnas de T^{ref} es un límite superior para el orden del modelo, es decir, $(rxi) \geq n$ y el sistema es observable y controlable, el rango de la matriz T^{ref} es igual a n . Una forma general de reducir el espacio columna es aplicar la teoría de descomposición en valores singulares (SVD). Si se aplica esta descomposición a la matriz Toeplitz se pueden obtener las matrices de controlabilidad y observabilidad:

$$\mathbf{T}^{ref}_{1/i} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = [\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_l \mathbf{V}_1^T \quad (4.19)$$

en la cual \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices ortonormales de dimensiones $(lxi) \times (lxi)$ y $(rxix) \times (rxix)$ respectivamente, y \mathbf{S} es una matriz diagonal de dimensión $(lxi) \times (rxix)$ que contiene los valores singulares en orden decreciente. Si la matriz \mathbf{T}^{ref} tiene rango n entonces los primeros n valores singulares serán no nulos, así el subíndice l de la última igualdad indica que los valores singulares nulos y los correspondientes vectores singulares fueron omitidos.

Desdoblando esta última igualdad se pueden obtener las matrices \mathbf{Q}^{ref}_i y \mathbf{O}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_i &= \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_l^{1/2} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Q}^{ref}_i &= \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S}_l^{1/2} \mathbf{V}_1^T \end{aligned} \quad (4.20)$$

en las cuales \mathbf{Z} es una matriz de similaridad y puede considerarse igual a la matriz identidad. Obtenidas ya las matrices \mathbf{Q}^{ref}_i y \mathbf{O}_i aplicando las ecuaciones (4.17) y (4.18) se pueden obtener \mathbf{C} como las primeras l filas de \mathbf{O}_i y \mathbf{G}^{ref} como las últimas r columnas de \mathbf{Q}^{ref}_i . De igual modo, la matriz \mathbf{A} se puede obtener a partir de la matriz de observabilidad, usando notación de Matlab [Matlab v. 5.3, 1999] como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_i(1:l(i-1),:)^+ \mathbf{O}_i(l+1:li,:) \quad (4.21)$$

en la cual $(.)^+$ significa matriz pseudo inversa de \mathbf{O}_i por ser una matriz rectangular.

Conocidas las matrices \mathbf{A} y \mathbf{C} , las frecuencias naturales del sistema original se pueden calcular como la raíz cuadrada de los elementos de la matriz diagonal de autovalores $\mathbf{\Lambda}_d$ obtenida a partir de la descomposición de la matriz de estado \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{\Psi}^{-1} \quad (4.22)$$

en la cual $\mathbf{\Psi}$ es la matriz de autovectores de \mathbf{A} .

Por otra parte, de relación entre los autovectores $\mathbf{\Psi}$ de la matriz \mathbf{A} y la matriz de formas modales del sistema original $\mathbf{\Phi}$, está dada por [Peeters B., 2000]:

$$\Phi = C\Psi \quad (4.23)$$

4.4.1 Identificación de los modos estructurales

Todos los parámetros hasta aquí determinados se deben considerar como estimadores ya que el número de mediciones es finito y por lo tanto la matriz de covarianzas en realidad es estimada. Otro punto a ser considerado es que en la teoría el orden del sistema se determina a través de los valores singulares no nulos de la matriz Toeplitz. En la práctica esta matriz es afectada por ruido, lo cuál hace que los valores singulares sean todos diferentes de cero. El ruido puede producirse por:

- Ruido introducido por el equipo de medición.
- Número finito de datos.
- Imprecisión del modelo, debido a que el sistema real del cual se obtuvieron los datos no puede ser modelado exactamente como un modelo estocástico en espacio de estado.
- Error computacional.

Existen diferentes criterios para distinguir entre los modos físicos y los no físicos. Si los amortiguamientos son bajos y los autovalores obtenidos se presentan en pares complejos conjugados es muy probable que los modos identificados tengan significado físico, ya que las estructuras civiles son, en general subamortiguadas.

El denominado diagrama de estabilización es una herramienta muy útil para obtener un buen modelo para los fines del análisis modal. En este diagrama se comparan los autovalores (polos) estimados para un cierto orden de modelo con los autovalores de un modelo de un orden inferior. Si el error relativo entre frecuencia, relación de amortiguamiento y forma modal correspondientes a un mismo modo no supera un límite preestablecido, se considera que el autovalor correspondiente (polo) es estable y, por lo tanto, corresponde a un modo del sistema identificado. Es decir,

$$\frac{f^{(i)} - f^{(i+1)}}{f^{(i)}} \times 100 < p\%$$
$$\frac{\xi^{(i)} - \xi^{(i+1)}}{\xi^{(i)}} \times 100 < q\% \quad (4.24)$$
$$(1 - \text{MAC}(i, i+1)) \times 100 < s\%$$

en la cual el índice MAC (Modal Assurance Criterion) [Allemang et al., 1982] varía entre 0 y 1 y se calcula como:

$$\text{MAC}(i, j) = \frac{|\Phi_{i,1}^H \Phi_{j,2}|}{\sqrt{|\Phi_{i,1}^H \Phi_{i,1}|} \sqrt{|\Phi_{j,2}^H \Phi_{j,2}|}} \quad (4.25)$$

cuando este índice es próximo a 1 significa que hay una gran correlación entre las dos formas modales y probablemente correspondan al mismo modo de vibración.

4.4.2 Ejemplo

Sistema estructural plano (simulado). A efectos de evaluar la precisión del método descrito en 4.4 (SSI_Cov), se estudia el mismo pórtico de la figura 4.1 analizado previamente con el método de los modos normales. De la misma manera que en el caso anterior, la respuesta (desplazamientos de piso) de la estructura sometida a las mismas excitaciones se obtuvo por integración numérica. La figura 4.15 muestra el diagrama de estabilización de frecuencias. Para la construcción de este diagrama se procedió de la siguiente forma: de todas las frecuencias estimadas se eliminaron aquellas que tenían asociadas relaciones de amortiguamiento superiores al 16% (máxima relación de amortiguamiento en la estructura simulada). De las frecuencias que cumplen con esta condición se consideraron estables aquellas que cumplieron con que el error en la frecuencia fue inferior al 1%, el error en el amortiguamiento fue inferior al 2% y que la correlación entre las formas modales era inferior al 1% (ver ecuaciones 4.24). Las frecuencias correspondientes a los modos estables están representadas con [o], mientras que todas las frecuencias identificadas se representan con [.]

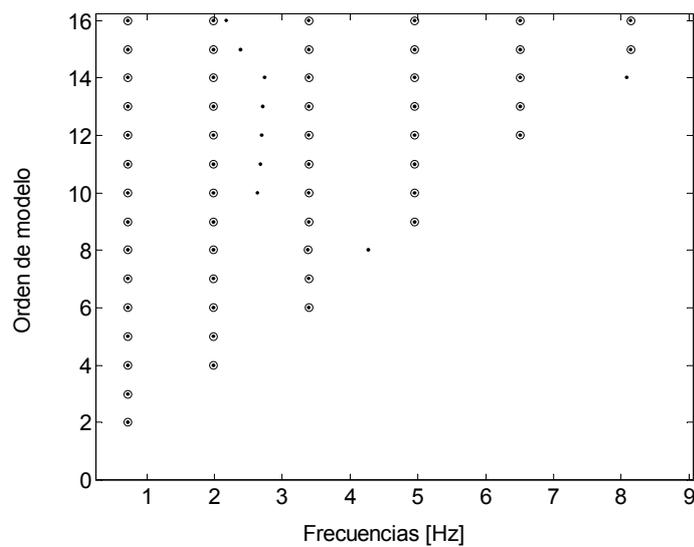


Figura 4.15. Diagrama de estabilidad de frecuencia.

Frecuencias estables representadas con [o] y todas las frecuencias identificadas con [.]

En la tabla 4.3 se presentan los parámetros identificados por el método juntamente con los errores relativos respecto de los valores calculados analíticamente resolviendo el problema de autovalores del sistema.

	Analítico		SSI_Cov			
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	error [%]	ξ [%]	error [%]
modo 1	0.72	5	0.72	0	5	0
modo 2	1.99	5	1.98	0.5	5	0
modo3	3.42	7	3.40	0.58	7.1	1.43
modo 4	4.99	9.7	4.97	0.4	9.5	2.06
modo 5	6.55	12	6.51	0.61	12	0
modo 6	8.2	15	8.14	0.73	15.2	1.33

Tabla 4.3. Parámetros identificados por el método SSI-Cov.

En la tabla 4.3 se puede ver que el error en la estimación de las frecuencias a través del método SSI-Cov es bajo al igual que en los estimados por el método propuesto de los modos normales, lo mismo ocurre con la estimación del amortiguamiento.

En las figuras 4.16 a 4.21 se muestran las formas modales identificadas juntamente con las obtenidas analíticamente. En ellas se puede observar la buena precisión en la estimación de las formas modales alcanzada con la aplicación del método.

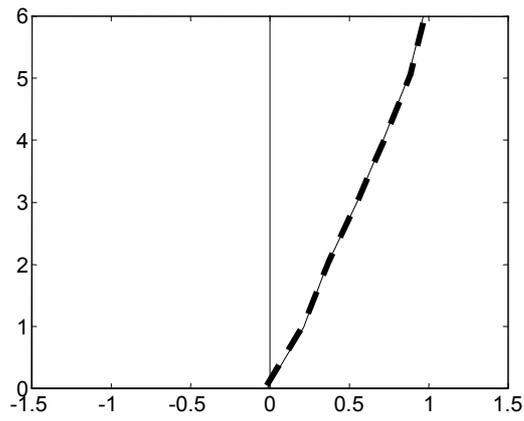


Figura 4.16. Primer modo [- - - numérico — ssi_cov]

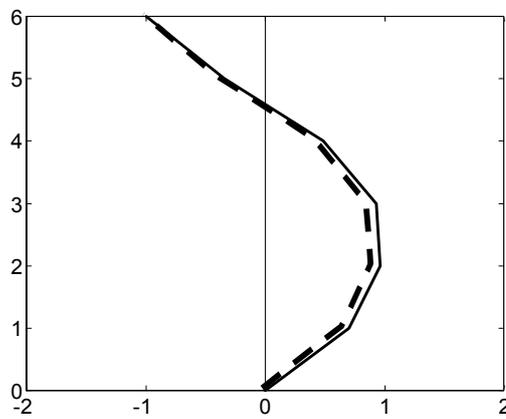


Figura 4.17. Segundo modo [- - - numérico — ssi_cov]

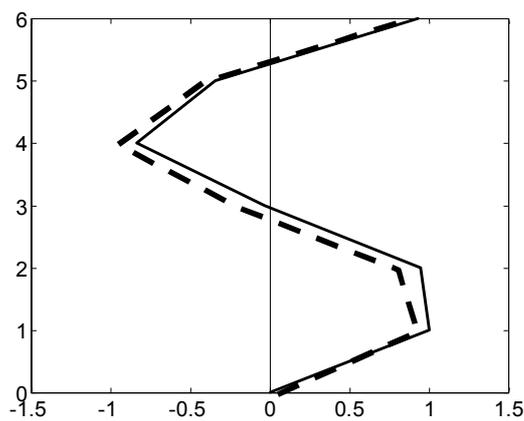


Figura 4.18. Tercer modo [- - - numérico — ssi_cov]

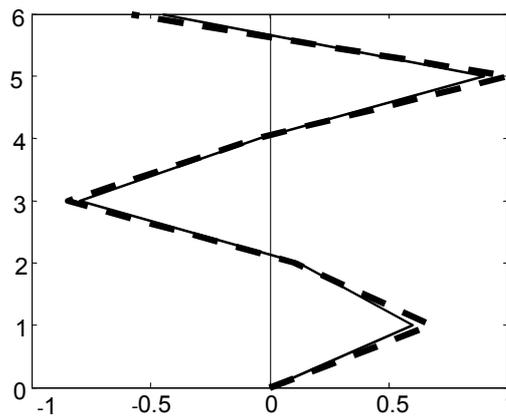


Figura 4.19. Cuarto modo [--- numérico — ssi_cov]

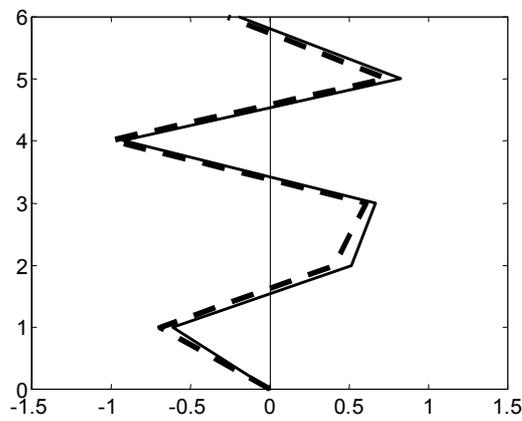


Figura 4.20. Quinto modo [--- numérico — ssi_cov]

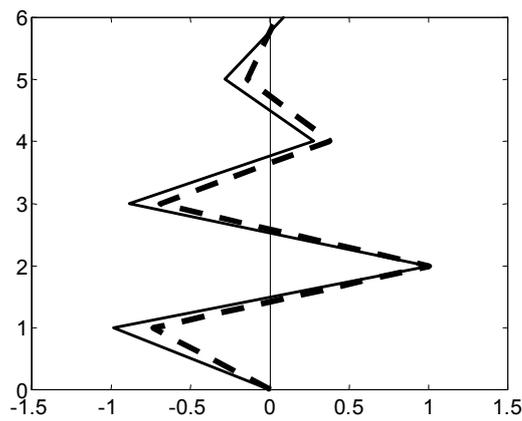


Figura 4.21. Sexto modo [--- numérico — ssi_cov]

4.5 Obtención de las matrices de rigidez y amortiguamiento no proporcional

Se presenta a continuación el método propuesto para la obtención de las matrices de las matrices de rigidez y amortiguamiento para sistemas con amortiguamiento no proporcional a partir del conocimiento de los parámetros modales.

Dado un sistema amortiguado como el representado por la ec. (3.1), el problema de autovalores para un modo r , puede escribirse como:

$$(\lambda_r^2 \mathbf{M} + \lambda_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\phi}_r = \bar{0} \quad (4.26)$$

en la cuál λ_r es el autovalor correspondiente al modo r y $\bar{\phi}_r$ es el vector de formas modales.

Si se premultiplica la ec. (4.26) por $\bar{\phi}_q^T$ se tiene:

$$\bar{\phi}_q^T (\lambda_r^2 \mathbf{M} + \lambda_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\phi}_r = \bar{0} \quad (4.27)$$

Se puede escribir una expresión similar a la ec. (4.26) para un modo q de la forma:

$$(\lambda_q^2 \mathbf{M} + \lambda_q \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\phi}_q = \bar{0} \quad (4.28)$$

Teniendo en cuenta la simetría de las matrices del sistema la ec. (4.28) puede transponerse:

$$\bar{\phi}_q^T (\lambda_q^2 \mathbf{M} + \lambda_q \mathbf{C} + \mathbf{K}) = \bar{0}^T \quad (4.29)$$

Ahora si se postmultiplica esta última expresión por $\bar{\phi}_r$ y se la resta de la ec. (4.27) se obtiene:

$$(\lambda_r^2 - \lambda_q^2) \bar{\phi}_q^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r + (\lambda_r - \lambda_q) \bar{\phi}_q^T \mathbf{C} \bar{\phi}_r = 0 \quad (4.30)$$

como λ_r y λ_q son diferentes se puede escribir la primera condición de ortogonalidad:

$$(\lambda_r + \lambda_q) \bar{\phi}_q^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r + \bar{\phi}_q^T \mathbf{C} \bar{\phi}_r = 0 \quad (4.31)$$

la segunda condición de ortogonalidad se puede obtener premultiplicando la ec.(4.27) por λ_q y a la ec.(4.29) por λ_r y restando una respecto de la otra como:

$$\lambda_r \lambda_q \bar{\phi}_q^T \mathbf{M} \bar{\phi}_r - \bar{\phi}_q^T \mathbf{K} \bar{\phi}_r = 0 \quad (4.32)$$

Cuando los modos r y q son pares complejos conjugados se cumple que:

$$\lambda_q = \omega_r \left(-\xi_r - i \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \quad y \quad \bar{\phi}_q = \bar{\phi}_r \quad (4.33)$$

Insertando la ec.(4.33) en la ec.(4.31) se tiene:

$$-2 \xi_r \omega_r \bar{\phi}_r^H \mathbf{M} \bar{\phi}_r + \bar{\phi}_r^H \mathbf{C} \bar{\phi}_r = 0 \quad (4.34)$$

en la cuál, el superíndice "H" significa complejo conjugado transpuesto, así de la ec.(4.34) se puede obtener:

$$2 \xi_r \omega_r = \frac{\bar{\phi}_r^H \mathbf{C} \bar{\phi}_r}{\bar{\phi}_r^H \mathbf{M} \bar{\phi}_r} = \frac{c_r}{m_r} \quad (4.35)$$

como Φ es de orden $n \times 2n$ entonces \mathbf{C} se obtiene como:

$$\mathbf{C} = \text{pinv}(\Phi^H) \mathbf{C}_r \text{pinv}(\Phi) \quad (4.36)$$

$$\text{con } \mathbf{C}_r = \text{diag} (2 \xi_r \omega_r m_r)$$

Para el caso particular de amortiguamiento proporcional Φ es una matriz real de orden n por lo tanto se puede escribir:

$$\mathbf{C} = \Phi^{-T} \mathbf{C}_r \Phi^{-1} \quad (4.37)$$

$$\text{con } \mathbf{C}_r = \text{diag} (2 \xi_r \omega_r m_r)$$

De igual modo, insertando las ec.(4.33) en la ec.(4.32) se tiene:

$$\omega_r^2 = \frac{\bar{\phi}_r^H \mathbf{K} \bar{\phi}_r}{\bar{\phi}_r^H \mathbf{M} \bar{\phi}_r} = \frac{k_r}{m_r} \quad (4.38)$$

así, la matriz \mathbf{K} se obtiene como:

$$\mathbf{K} = \text{pinv}(\Phi^H) \mathbf{K}_r \text{pinv}(\Phi) \quad (4.39)$$

$$\text{con } \mathbf{K}_r = \text{diag} (\omega_r^2 m_r)$$

Para el caso particular de amortiguamiento proporcional se puede escribir:

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^{-T} \mathbf{K}_r \mathbf{\Phi}^{-1} \quad (4.40)$$

$$\text{con } \mathbf{K}_r = \text{diag}(\omega_r^2 m_r)$$

4.5.1 Ejemplo

Se presentan las matrices de rigidez y amortiguamiento estimadas y reales del pórtico del ejemplo 4.2.2

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 3.2470 & -2.3521 & 0.3104 & -0.0308 & 0.0023 & 0.0019 \\ -2.3521 & 3.6817 & -1.7892 & 0.2631 & 0.0243 & 0.0025 \\ 0.3104 & -1.7892 & 2.9117 & -1.6148 & 0.2221 & -0.0202 \\ -0.0308 & 0.2631 & -1.6148 & 2.4712 & -1.2714 & 0.1805 \\ 0.0023 & 0.0243 & 0.2221 & -1.2714 & 2.0616 & -0.9902 \\ 0.0019 & 0.0025 & -0.0202 & 0.1805 & -0.9902 & 0.8250 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

$$\mathbf{K}_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 3.2472 & -2.3517 & 0.3101 & -0.0319 & 0.0030 & 0.0017 \\ -2.3517 & 3.6832 & -1.7908 & 0.2648 & 0.0256 & 0.0027 \\ 0.3101 & -1.7908 & 2.9141 & -1.6171 & 0.2243 & -0.0210 \\ -0.0319 & 0.2648 & -1.6171 & 2.4730 & -1.2725 & 0.1812 \\ 0.0030 & 0.0256 & 0.2243 & -1.2725 & 2.0604 & -0.9893 \\ 0.0017 & 0.0027 & -0.0210 & 0.1812 & -0.9893 & 0.8241 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1.9920 & -1.3802 & 0.1825 & 0.0180 & 0.0014 & 0.0012 \\ -1.3802 & 2.2478 & -1.0520 & 0.1506 & -0.016 & 0.0016 \\ 0.1825 & -1.0520 & 1.7960 & -0.9560 & 0.1320 & -0.0120 \\ 0.0180 & 0.1506 & -0.9560 & 1.5378 & -0.7490 & 0.1065 \\ 0.0014 & -0.016 & 0.1320 & -0.7490 & 1.2950 & -0.5822 \\ 0.0012 & 0.0016 & -0.0120 & 0.1065 & -0.5822 & 0.5680 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Ns/m}$$

$$\mathbf{C}_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1.9924 & -1.3815 & 0.1822 & 0.0187 & 0.0018 & 0.0010 \\ -1.3815 & 2.2485 & -1.0522 & 0.1556 & -0.015 & 0.0016 \\ 0.1822 & -1.0522 & 1.7967 & -0.9500 & 0.1318 & -0.0124 \\ 0.0187 & 0.1556 & -0.9500 & 1.5376 & -0.7475 & 0.1064 \\ 0.0018 & -0.015 & 0.1318 & -0.7475 & 1.2952 & -0.5812 \\ 0.0010 & 0.0016 & -0.0124 & 0.1064 & -0.5812 & 0.5689 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Ns/m}$$

Se puede observar que el error en la estimación de las matrices de rigidez y amortiguamiento es despreciable para el ejemplo presentado en el cuál no existe ruido de medición.

4.6 Conclusiones

En este capítulo se presentaron tres métodos para identificar las características dinámicas de estructuras sometidas a vibraciones ambientales a partir del conocimiento exclusivo de la respuesta del sistema, a saber, Método de los modos normales, Método de los modos complejos (propuestos en este trabajo) y Método basado en las covarianzas (SSI-Cov) [Peeters et. al, 1999], [Peeters, 2000]. Se presentó también un método propuesto para la determinación de las matrices de sistemas con amortiguamiento no proporcional

De los ejemplos analizados por los tres métodos presentados se puede inferir que:

- El error relativo en la estimación de las frecuencias naturales crece con el orden del modo. Para un sistema con seis grados de libertad, el mismo fue siempre inferior al 1%. Esto podría deberse al tipo de excitación usada donde los modos más altos son débilmente excitados.
- En la determinación del amortiguamiento, el error relativo no superó 3% incluso en los modos más altos.
- La precisión lograda en la estimación de las frecuencias y amortiguamientos se considera excelente para fines de ingeniería, debido al bajo error relativo. Cabe aclarar que el estudio se realizó sobre un modelo ideal en el que no se consideró la presencia de ruido de medición.
- En el caso de los métodos de los modos complejos y normales la desventaja se presenta en la necesidad del conocimiento previo de las formas modales. Sin embargo, en el caso de estructuras donde el número de grados de libertad considerados es pequeño, la obtención de las formas modales puede llevarse a cabo experimentalmente o a partir de un modelo numérico.

- El método basado en las covarianzas (SSI-Cov) permite, a partir del conocimiento exclusivo de la respuesta estructural, determinar frecuencias, formas modales y relaciones de amortiguamiento. Como desventaja, se debe mencionar el mayor tiempo computacional requerido, el cual aumenta con el aumento de los grados de libertad considerados como de referencia y la aparición de mayor número de autovalores espurios con el aumento del orden del modelo, que en algunos casos se tornan difíciles de filtrar.
- Como se puede observar en la figura 4.2 la estimación de las frecuencias naturales de los modos más altos a partir del espectro de respuesta es difícil, mientras que con los métodos presentados en este capítulo pueden determinarse sin dificultad.
- Con el método propuesto para obtener las matrices del sistema a partir de la medición de la respuesta (problema inverso) se obtuvieron resultados precisos, debe notarse que el ejemplo presentado corresponde a un ejemplo numérico sin errores de medición.

CAPÍTULO 5

IDENTIFICACIÓN DE SISTEMA EN MODELO DE LABORATORIO

5.1 Introducción

En el capítulo anterior, se aplicaron los métodos de identificación a un ejemplo simulado numéricamente lo cual sirvió para comparar los métodos expuestos. En una segunda etapa, se estudian tres estructuras en laboratorio. En los dos primeros ejemplos se analizan dos estructuras de seis pisos en escala 1:5 construidas en aluminio. Los modelos son sometidos a una excitación en la base a través de una mesa vibratoria. Para estudiar el efecto del tipo de excitación, en el primer caso la excitación es de tipo senoidal y en el segundo es un ruido blanco gaussiano, estos ensayos fueron realizados, como parte de esta tesis doctoral, en la Universidade Federal de Rio Grande do Sul (Brasil). La tercer estructura es una viga de hormigón armado simplemente apoyada de sección rectangular de 5.6 m de largo [Palazzo, 2001].

Como primer paso se describen los ensayos realizados como parte de esta tesis y luego se aplican los métodos de identificación presentados en el capítulo 4 a las tres estructuras mencionadas en el párrafo anterior y se establecen conclusiones sobre la viabilidad de dichos métodos de identificación.

5.2 Ensayo preliminar (Estático)

Para la realización de los ensayos estáticos preliminares se construyeron tres modelos de dos pisos tipo pórtico tridimensional (figura 5.1) con piso rígido construido con placas de acrílico de 5 mm de espesor y 0.10 m de longitud de vano. Las columnas, empotradas, fueron construidas en aluminio de 0.6 mm de espesor y ancho igual a 1, 1.5 y 2,5 cm. En los ensayos estáticos se aplicó una carga lateral en el primer piso de los tres modelos estudiados a fin de determinar el módulo de elasticidad del aluminio y el desplazamiento de fluencia de las columnas. La figura 5.2 muestra la curva fuerza-desplazamiento del punto de aplicación de la carga para un ancho de columna $b=1.0$ cm.

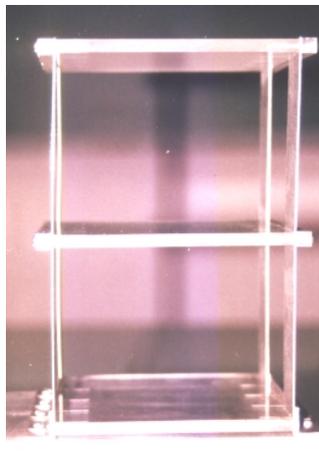


Figura 5.1 Modelo ensayado con carga estática

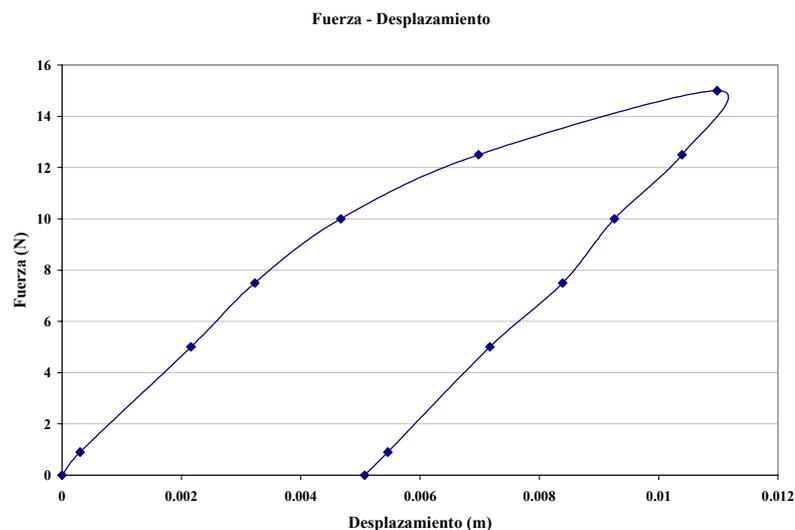


Figura 5.2 Curva Fuerza-desplazamiento para ancho de columna $b = 1$ cm.

De la curva fuerza-desplazamiento se puede observar que el comportamiento del aluminio es casi bilineal, no existe gran pérdida de rigidez post-fluencia y en la descarga el módulo es igual que en la carga.

De las curvas fuerza-desplazamiento se obtuvo:

Desplazamiento de fluencia = 6.0×10^{-3} m.

Fuerza de fluencia = 12 N

Rigidez de elemento biempotrado $k = 2000$ N/m. (coeficiente $k(1,1)$ de la matriz de rigidez)

Con estos valores se obtuvo el módulo de elasticidad como:

$$E = (k/2 \times L^3)/(12 \times I) = 6.7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

en la cual L es la luz del vano, k es el coeficiente de la matriz de rigidez para elemento biempotrado, e I es el momento de inercia.

5.3 Equipamiento para ensayos dinámicos

En los ensayos de los pórticos de aluminio se usó, para generación de la señal, adquisición de datos y análisis de señales, el siguiente equipamiento (figura 5.3):

- Mesa vibratoria Bruel & Kjaer tipo 1050 con rango de frecuencia de 1 Hz a 10 kHz y resolución de frecuencia de 1.19 mHz.
- Acelerómetros Bruel & Kjaer: tipo 4371 con peso de 11gr y sensibilidad de 8 mV/g, tipo 4383 con peso de 17 gr y sensibilidad de 26 mV/g, tipo 4381 con peso de 43 gr y sensibilidad de 80 mV/g, y rango de frecuencia de 0.1-12600 Hz
- Amplificador de señal, Bruel & Kjaer tipo 2712 con 6 canales con filtro pasa baja.
- Placa de adquisición de datos Computerboards con 16 canales (PCM – DAS16), 12 bits de resolución, tiempo de conversión A/D 25 μ s, voltage máximo absoluto de entrada ± 15 V.
- Programa para procesamiento de datos HP VEE 5.0 HEWLETT PACKARD (1998).



Figura 5.3 Equipamiento usado

5.4 Pórtico en aluminio (modelo A)

5.4.1 Descripción del modelo

Se construyó una estructura tipo pórtico de aluminio de seis pisos y un vano con seis columnas por piso, como lo muestra la figura 5.4. Los pisos se construyeron con placas de acrílico cuadradas de 10 mm x 10 mm y 5 mm de espesor.



Figura 5.4 Modelo ensayado A

Para fijar el modelo en la mesa vibratoria se coló la base de acrílico del modelo a la placa de acrílico de la mesa vibratoria con cemento de contacto para acrílico (ver figura 5.5). Para asegurar el comportamiento de estructura tipo *shear building* se fijaron las columnas con barras de aluminio de sección cuadrada de 5 mm de lado atornilladas a las placas de acrílico. (figura 5.5).

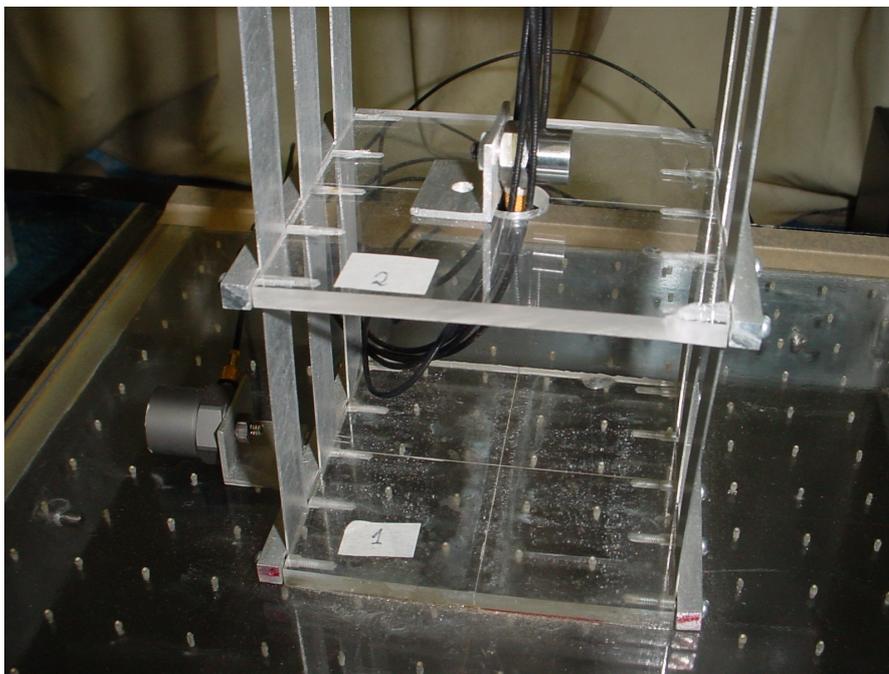


Figura 5.5 Detalle de fijación del modelo en mesa vibratoria.

En la tabla 5.1 se indican las características geométricas y mecánicas del modelo ensayado.

Altura total		0.50 m
Altura de piso		0.083 m
Longitud de vano		0.10 m
Sección transversal de columna	Piso 1 y 2	6e-4 m x 1.8e-2 m
	Piso 3 y 4	6e-4 m x 1.2e-2 m
	Piso 5 y 6	6e-4 m x 0.6e-2 m
Masa total (incluido los acelerómetros)		0.682 kg
Densidad		2698 kg/m ³
Módulo de elasticidad		6.7e+10 N/m ²

Tabla 5.1 Características geométricas y mecánicas del modelo A.

5.4.2 Ensayo dinámico

Se realizaron ensayos dinámicos colocando el modelo sobre una mesa vibratoria y midiendo su respuesta en la dirección horizontal a través de acelerómetros fijados en cada piso. La excitación aplicada en la base de la estructura fue del tipo senoidal; para ello se realizó un barrido entre 3 y 31 Hz ya que, de acuerdo con el análisis numérico de la estructura, entre estos valores se encontrarían las frecuencias de los 4 primeros modos de vibración. La frecuencia de adquisición fue de 256 pts/s y la duración de los registros de 128 s. La amplitud de aceleración fue de 0.2 m/s^2 . Con ese nivel de aceleración, definido a través de un análisis numérico, la estructura permanece en estado elástico eliminando así la posibilidad de existencia de daño en la misma. La figura 5.6 muestra el modelo instrumentado.



Figura 5.6. Modelo ensayado en mesa vibratoria

5.4.3 Identificación del sistema

Para identificar los parámetros modales del modelo se sometió a la estructura a cinco registros de aceleración en la base tipo barrido senoidal según las características explicadas en 5.4.2. La figura 5.7 muestra la respuesta medida en el techo del modelo y su espectro de amplitudes de Fourier. Como la excitación fue del tipo barrido de frecuencia, en el gráfico de la respuesta se puede observar el aumento de la intensidad de aceleración (representada por los picos) cuando la frecuencia de la excitación se iguala a cada una de las frecuencias correspondientes a los modos de vibración de la estructura (la estructura entra en resonancia). El espectro de amplitudes de Fourier muestra claramente las cuatro primeras frecuencias del

sistema, la quinta frecuencia se puede observar a través de un pico de baja amplitud y la frecuencia correspondiente al sexto modo de vibración no puede observarse, esto se debe a que, como ya se dijo anteriormente, el barrido de frecuencia se realizó entre 3 y 31 Hz (frecuencias correspondientes a los cuatro primeros modos de vibración de la estructura).

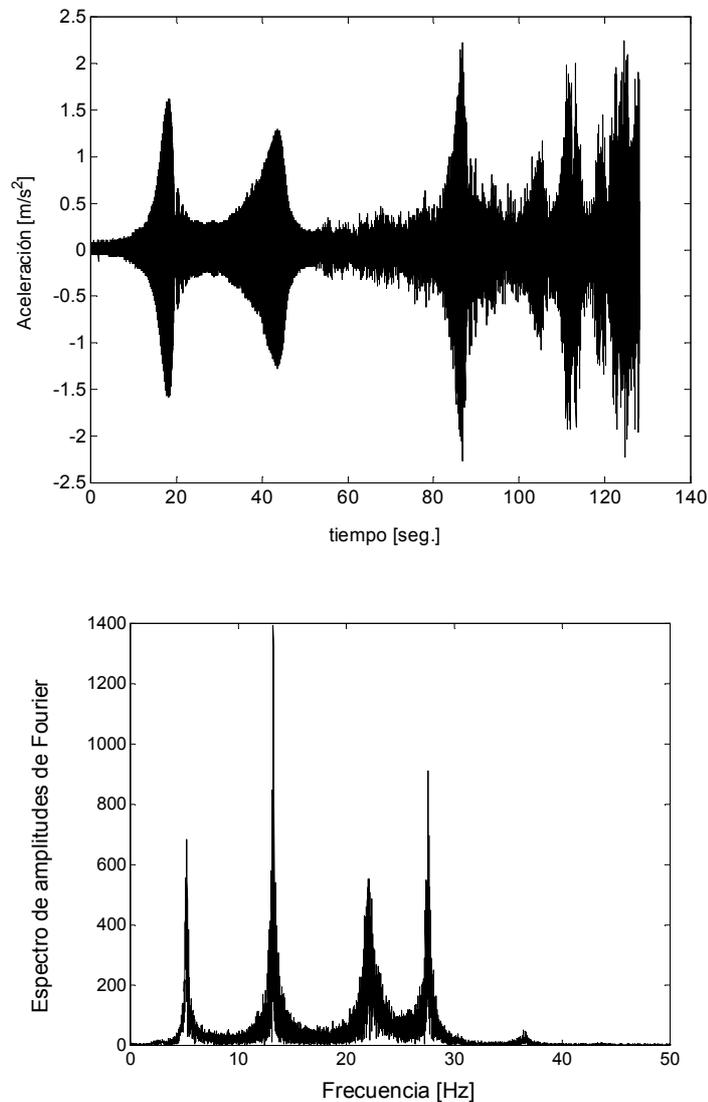


Figura 5.7 Respuesta medida en el techo en términos de aceleraciones y espectro de amplitudes de Fourier de la misma.

Con las respuestas medidas en cada piso se aplicaron el método de los modos complejos y el SSI-Cov explicados en el capítulo 4. .

5.4.3.1 Método de identificación basado en las covarianzas (SSI-COV)

A pesar que en este caso se viola la hipótesis de este método en el que la excitación debe ser un ruido blanco, se identificaron los parámetros modales del prototipo a fin de verificar su

precisión. Para el análisis se consideraron a los 6 sensores como de referencia, el retraso máximo (lag) i adoptado fue 54 y el orden máximo del modelo fue 16. Para eliminar los modos espurios que resultan del método, se construyó el diagrama de estabilización de frecuencias mostrado en la figura 5.8, (Ver capítulo 4). En la primera etapa de construcción de este diagrama se consideraron como modos estables sólo aquellos cuyos amortiguamientos no superaron el 10%, luego se compararon los modos estimados con el modelo de orden máximo con los de un orden inmediato inferior y así sucesivamente; se consideraron estables sólo aquellos modos en los cuales el error relativo entre frecuencias, formas modales y amortiguamientos no superan el 1%, 1% y 5 % respectivamente.

En la figura 5.8 las frecuencias correspondientes a los modos estables se representan con [o], mientras que todas las frecuencias identificadas con [·]. En la tabla 5.2 se resumen las frecuencias y amortiguamientos identificados.

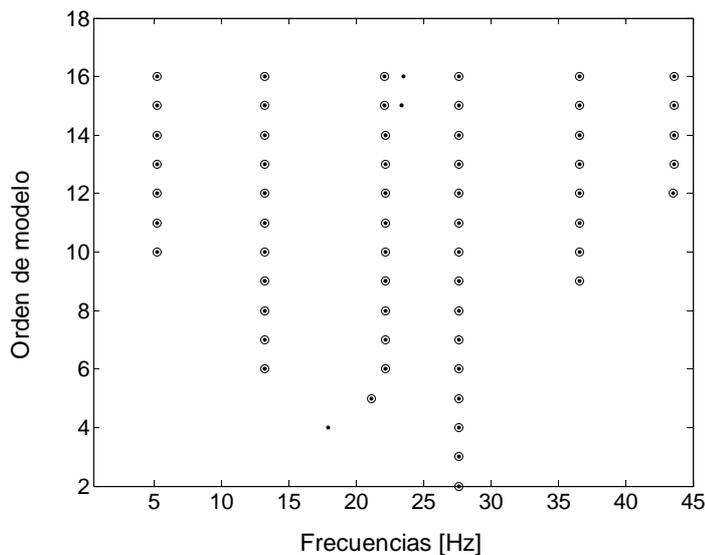


Figura 5.8 Diagrama de estabilización. [o] representa las frecuencias estables y [·] todos las frecuencias identificadas.

Modo	1	2	3	4	5	6
f [Hz]	5.23	13.26	22.05	27.62	36.6	43.6
ξ (%)	1.24	0.84	1.57	0.45	0.72	0.7

Tabla 5.2. Valores de frecuencias y amortiguamientos estimados.

Las figuras 5.9 muestran las formas modales estimadas a través del método.

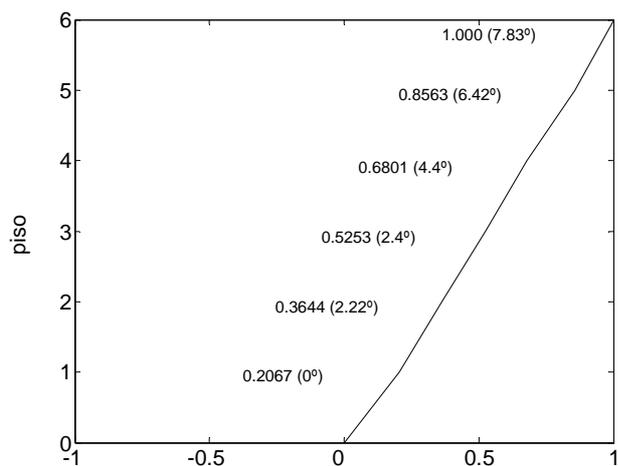


Figura 5.9.a. Primer modo de vibración.

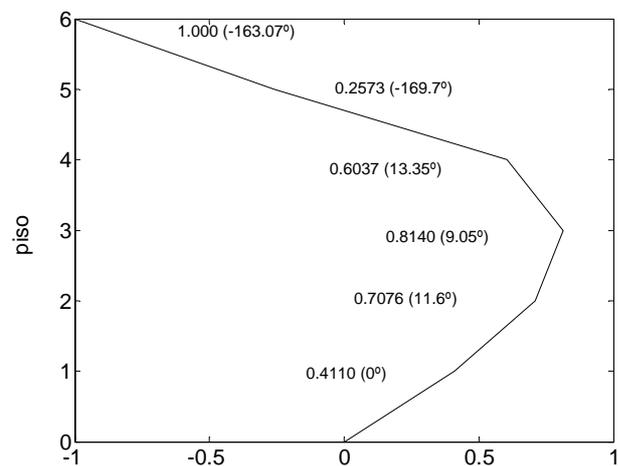


Figura 5.9.b. Segundo modo de vibración.

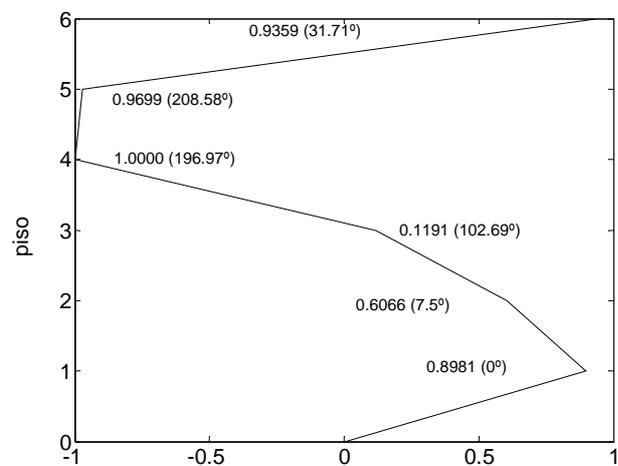


Figura 5.9.c. Tercer modo de vibración.

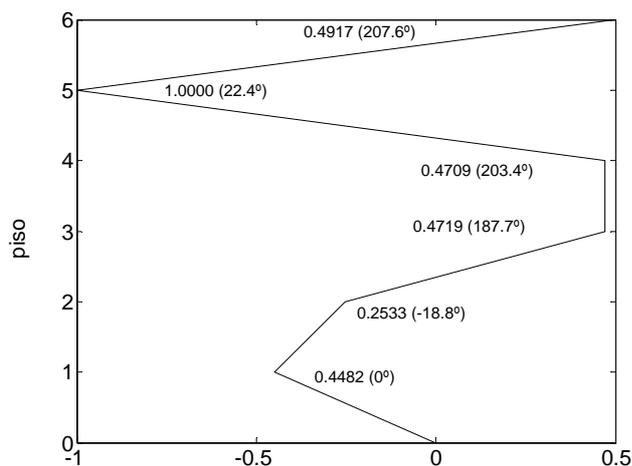


Figura 5.9.d. Cuarto modo de vibración.

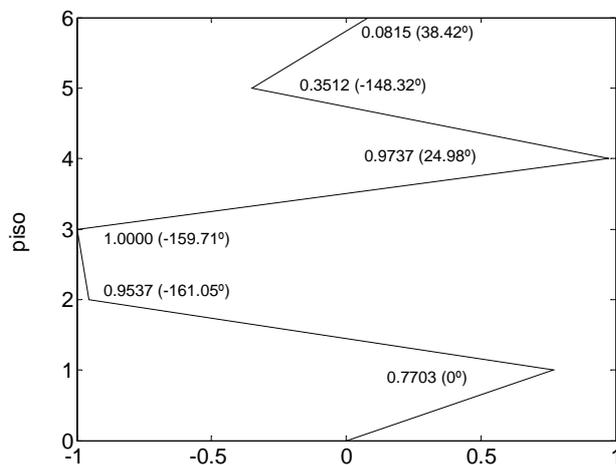


Figura 5.9.e. Quinto modo de vibración

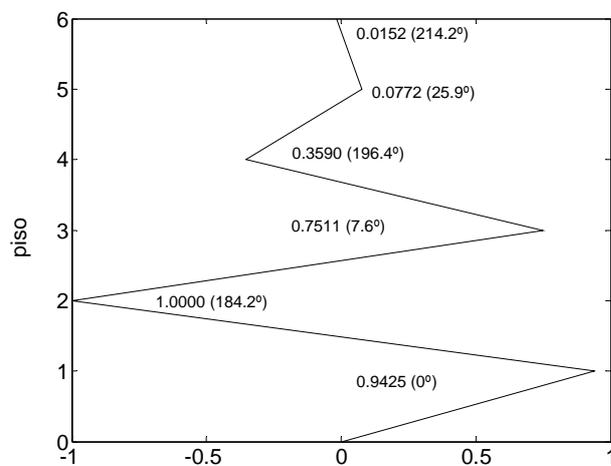
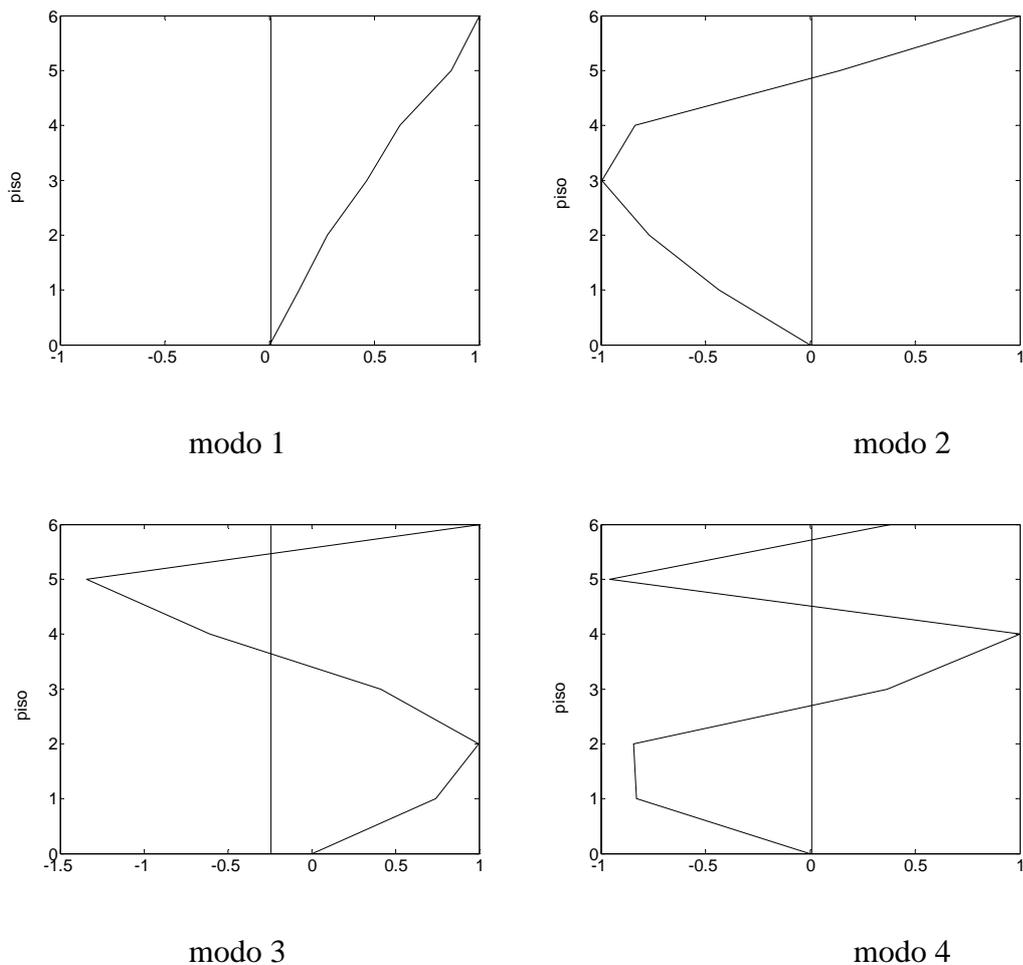


Figura 5.9.f. Sexto modo de vibración

Como se puede observar las formas modales identificadas son complejas, es decir que la amplitud de cada coordenada está definida por su magnitud y ángulo de fase, el hecho que los ángulos de fase sean diferentes de 0° ó 180° está indicando la presencia de amortiguamiento no proporcional.

5.4.3.2 Método de los modos complejos

Como primer paso se construyó un modelo numérico en el programa MATLAB v 5.3 (1999), se modelaron las columnas con elementos de viga 3D, se consideraron las masas concentradas en cada piso y seis grados de libertad correspondientes a los seis desplazamientos horizontales de piso. Las formas modales obtenidas (usadas para la aplicación del método de los modos complejos) se muestran en la figura 5.10.



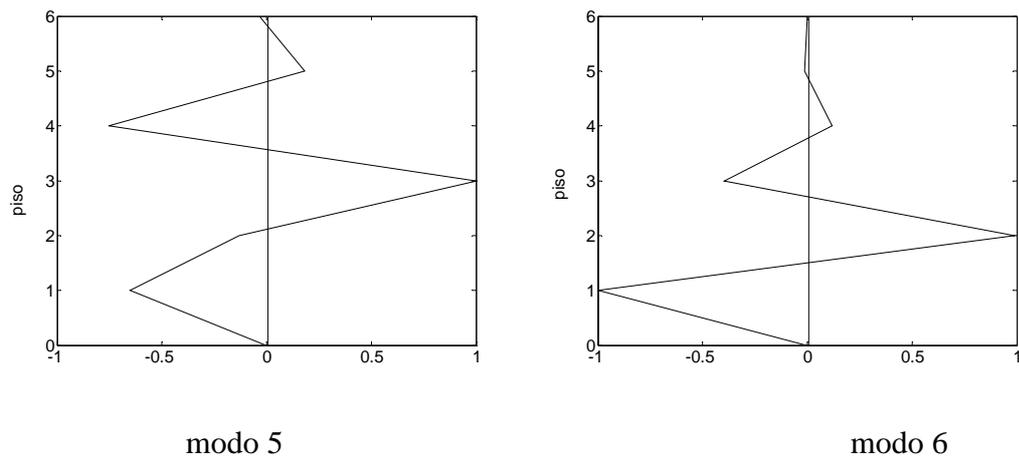


Figura 5.10 Formas modales obtenidas numéricamente usadas en el método de los modos complejos.

A partir de las respuestas medidas (aceleración en la dirección horizontal en cada piso) en el ensayo en mesa vibratoria para los cinco registros de aceleración en la base, se estimaron frecuencias y amortiguamientos de la siguiente forma:

Paso 1: se calcularon, aplicando el método de los modos complejos, las respuestas para cada modo de vibración (ecuación 4.12).

Paso 2: se determinó la densidad espectral de potencia para cada respuesta modal y luego se obtuvo el estimador de la densidad espectral de potencia (promedio de 5) para cada modo de vibración.

Paso 3: se ajustaron por mínimos cuadrados la función de respuesta en frecuencia de un oscilador lineal de un grado de libertad (ver apéndice B) a las curvas obtenidas en el paso 2.

Las figuras 5.11.a - f muestran el estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal y la función de respuesta en frecuencia de un oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

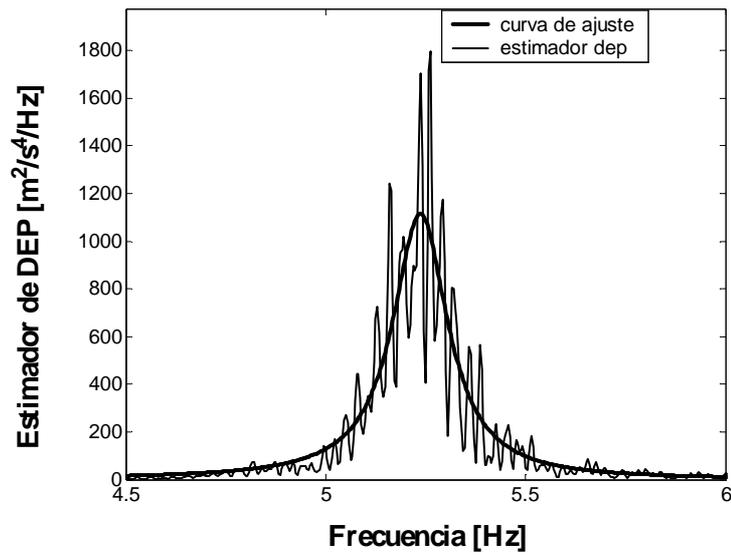


Figura 5.11.a Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_1(t)$ y FRF del oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta

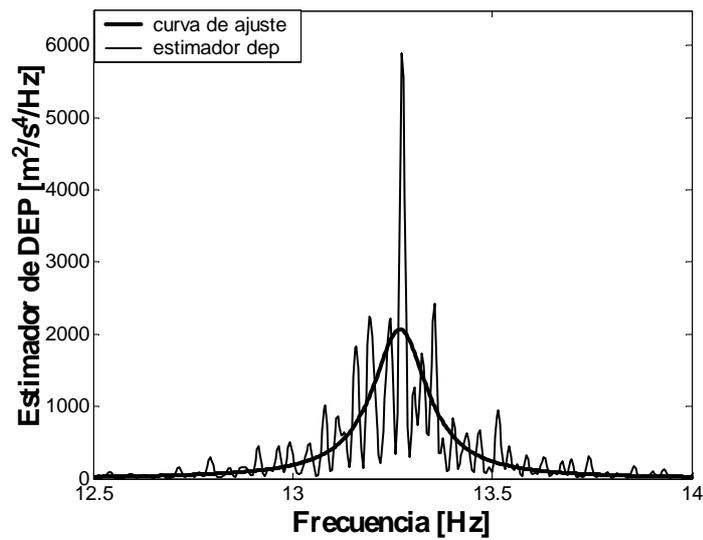


Figura 5.11.b Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_2(t)$ y FRF del oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

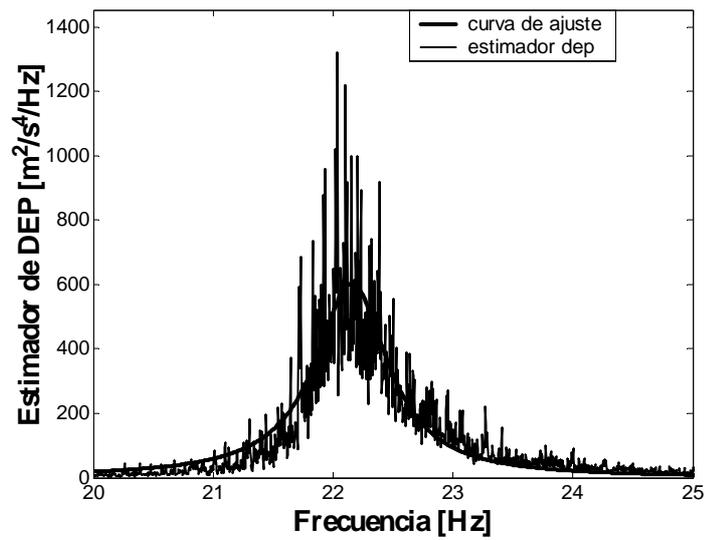


Figura 5.11.c Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_3(t)$ y FRF del oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

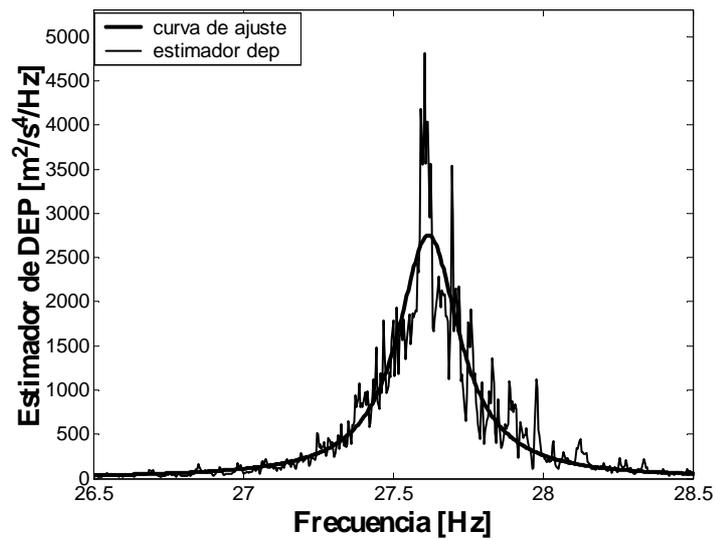


Figura 5.11.d Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_4(t)$ y FRF del oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

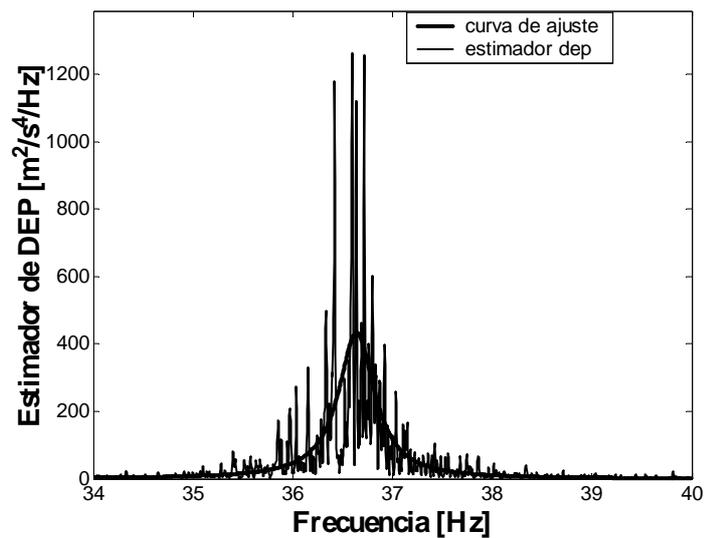


Figura 5.11.e Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_5(t)$ y FRF del oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

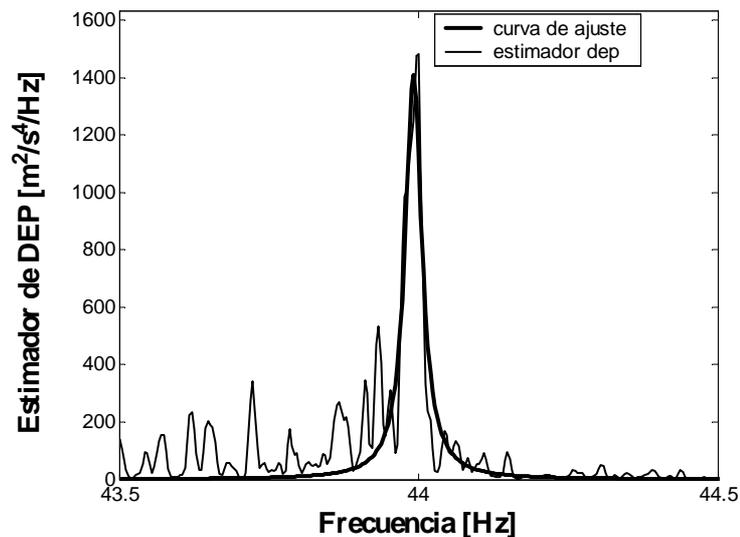


Figura 5.11.f Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_6(t)$ y FRF del oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

En las figuras 5.11 se puede observar, a diferencia de lo que sucedía en los ejemplos numéricos del capítulo 4, las curvas de densidad espectral de potencia presentan pequeños picos alrededor de los picos principales, la presencia de estos picos disminuiría con el aumento del número de registros medidos, es decir se obtendría un mejor estimador de la densidad espectral

de potencia ya que al promediar un mayor número de curvas de densidad espectral de respuesta modal esos picos tenderían a anularse.

En la tabla 5.3 se muestran las frecuencias y amortiguamientos estimados mediante los métodos de los modos complejos y SSI-Cov y se calcula la diferencia.

	Método de los modos complejos		SSI-Cov		Diferencia [%]	
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	ξ [%]	f	ξ
Modo 1	5.24	1.19	5.23	1.24	0.20	4.20
Modo 2	13.27	0.83	13.26	0.84	0.075	1.20
Modo 3	22.16	1.63	22.05	1.57	0.50	3.68
Modo 4	27.62	0.45	27.62	0.45	0	0
Modo 5	36.64	0.7	36.6	0.72	0.10	2.85
Modo 6	43.91	0.60	43.6	0.71	0.70	18

Tabla 5.3 Parámetros identificados por ambos métodos.

De la comparación de las frecuencias estimadas por los métodos de los Modos Complejos y SSI-Cov se puede ver que la diferencia existente entre ambos métodos es muy baja por lo que se puede decir que ambos métodos son equivalentes. En lo que respecta al amortiguamiento, existe gran dispersión en la estimación del mismo a través de los dos métodos evidenciando diferencia, entre los valores estimados, mayores.

5.5 Pórtico en aluminio (modelo B)

5.5.1 Descripción del modelo

Se construyó un nuevo prototipo de una estructura tridimensional tipo pórtico de seis pisos y un vano (figura 5.12) con cuatro columnas por piso, empotrado en la base. La fijación de los elementos se realizó de modo tal que las deformaciones principales de la estructura sean del tipo cortante (comportamiento tipo *shear building*) de la misma forma que en modelo A

descrito anteriormente. Las características geométricas de las cuatro columnas de aluminio se describen en la tabla 5.4.

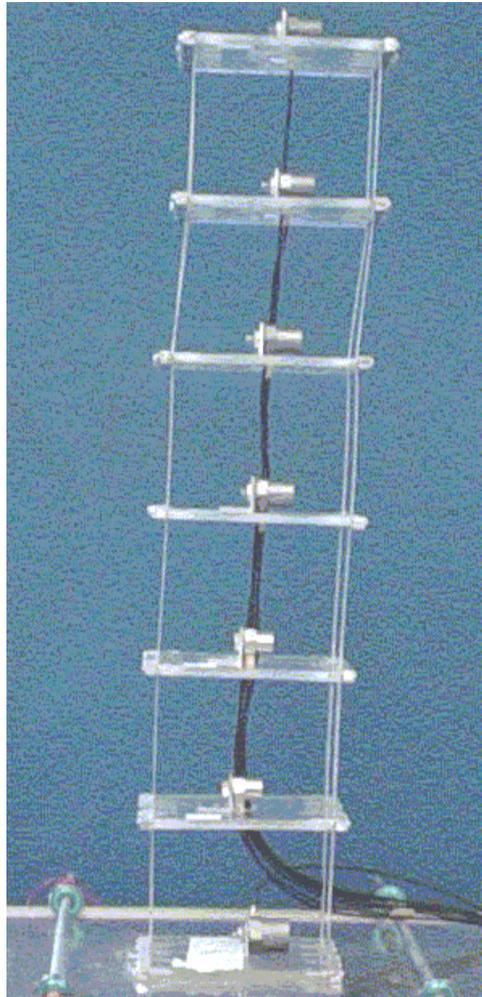


Figura 5.12 Vista del modelo B

Altura total		0.50 m
Altura de piso		0.083 m
Longitud de vano		0.10 m
Sección transversal de las columnas	Piso 1 y 2	$6 \times 10^{-4} \text{ m} \times 1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$
	Piso 3 y 4	$6 \times 10^{-4} \text{ m} \times 1.2 \times 10^{-2} \text{ m}$
	Piso 5 y 6	$6 \times 10^{-4} \text{ m} \times 0.6 \times 10^{-2} \text{ m}$
Masa total (incluido los acelerómetros)		0.665 kg
Densidad		2698 kg/m^3
Módulo de elasticidad		$6.7 \text{ e}+10 \text{ N/m}^2$

Tabla 5.4. Características geométricas y mecánicas del modelo B.

5.5.2. Ensayo dinámico

En este caso, se somete a la estructura a un conjunto de cinco registros de aceleraciones en la base tipo ruido blanco gaussiano simulado con desvío estándar de 2.0 m/s^2 ; la frecuencia de adquisición fue de 1024 pto/s y la duración de los registros fue de 16 s. En cada caso la respuesta se mide en dirección horizontal a través de acelerómetros fijados en cada piso. La figura 5.13 muestra la respuesta en término de aceleraciones a uno de los cinco registros de aceleración en la base, medida en el sexto piso y su espectro de amplitudes de Fourier, a través del espectro se pueden ver los seis picos correspondientes a las frecuencias de los seis primeros modos de vibración.

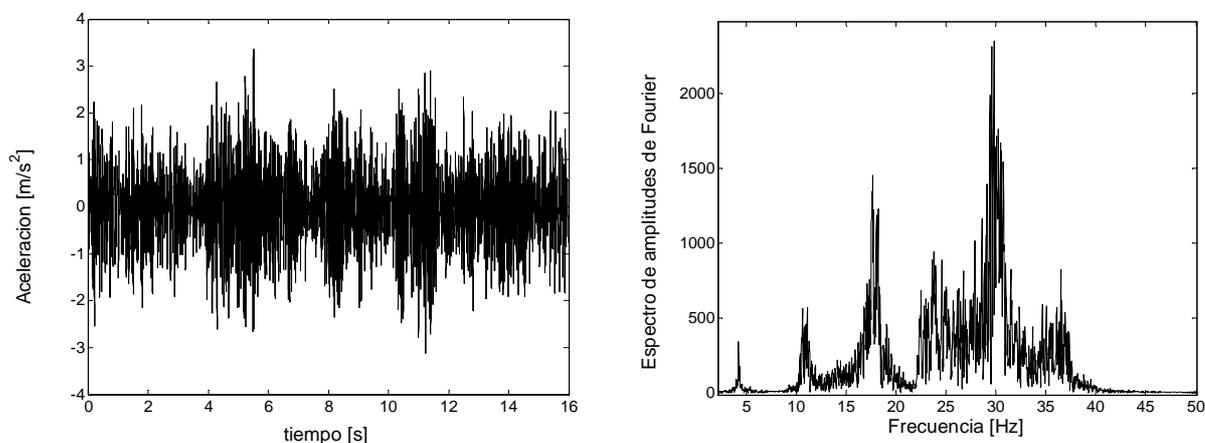


Figura 5.13. Respuesta del sexto piso en términos de aceleraciones y Espectro de amplitudes de Fourier de la misma.

5.5.3 Identificación del sistema

De la misma manera que en el ejemplo anterior, a fin de identificar los parámetros modales del modelo con la respuesta medida en cada piso, se aplicaron el método SSI-Cov y el método de los modos complejos explicados en el capítulo 4.

5.5.3.1 Método de identificación basado en las covarianzas (SSI-Cov)

Para el análisis se consideran a los 6 sensores como de referencia, el retraso máximo (lag) i adoptado es 100 y el orden máximo del modelo es 22. Los procedimientos llevados a cabo para la eliminación de los modos espurios son similares a los realizados en el ejemplo anterior. En la figura 5.14 se muestra el diagrama de estabilización de frecuencias. Las frecuencias correspondientes a los modos estables están representadas con [o], mientras que todas las

frecuencias identificadas se representan con [•]. La tabla 5.5 muestra los valores promedios de frecuencias y amortiguamientos identificados.

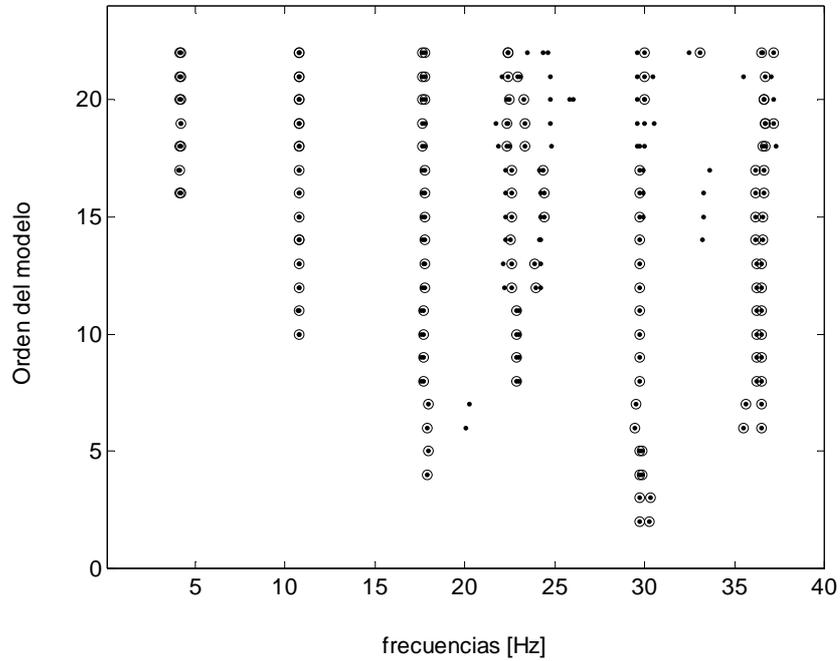


Figura 5.14. Diagrama de estabilización [o] representa los polos estables y [•] todos los polos identificados.

Modo	1	2	3	4	5	6
Frecuencia [Hz]	4.18	10.77	17.69	22.43	29.78	36.67
ξ (%)	2	1.7	1.5	1.8	1.9	1.8

Tabla 5.5. Valores de frecuencia y amortiguamiento experimentales.

Las figuras 5.15 muestran las formas modales identificadas. Las formas modales son complejas, por lo que quedan representadas por su amplitud y por el ángulo de fase. En la figura 5.14 están representadas las formas modales en un instante de tiempo fijo ya que, al ser complejas, van variando instante a instante debido a que en cada coordenada correspondiente a cada grado de libertad los ángulos de fase son diferentes, esto es lo que diferencia las formas modales complejas de las reales donde los ángulos de fase son todos 0° ó 180° .

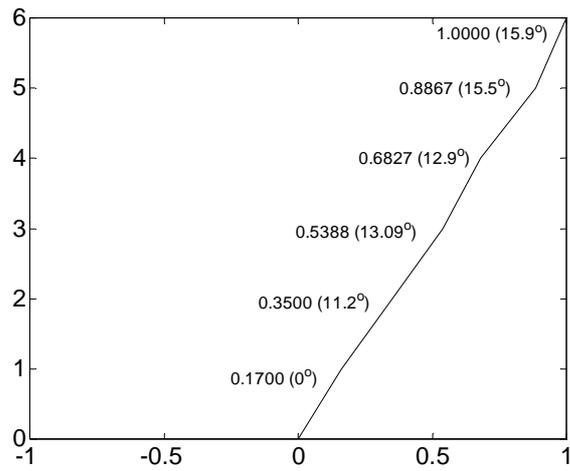


Figura 5.15.a. Primer modo de vibración.

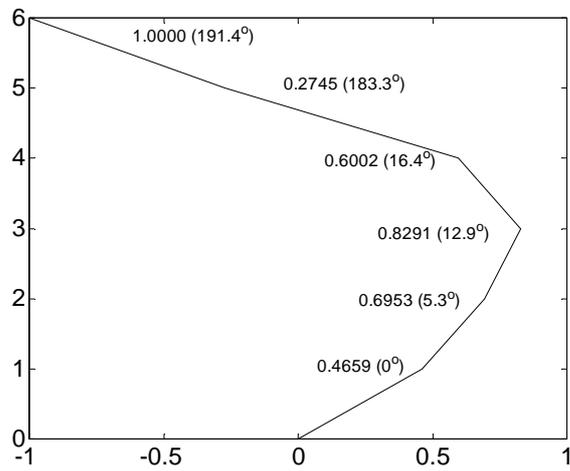


Figura 5.15.b. Segundo modo de vibración.

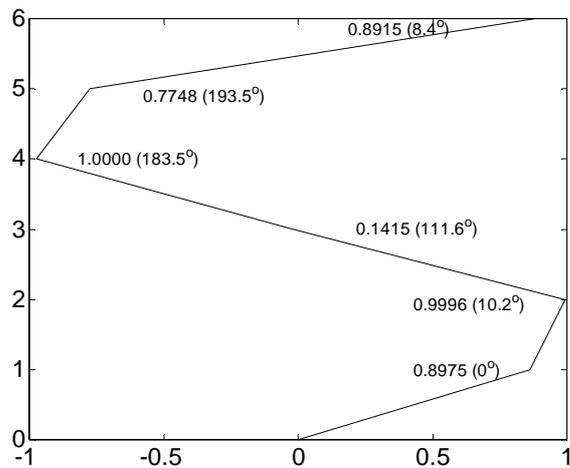


Figura 5.15.c. Tercer modo de vibración.

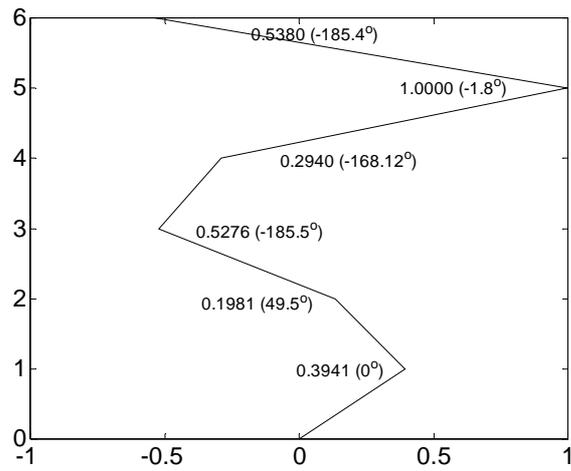


Figura 5.15.d. Cuarto modo de vibración.

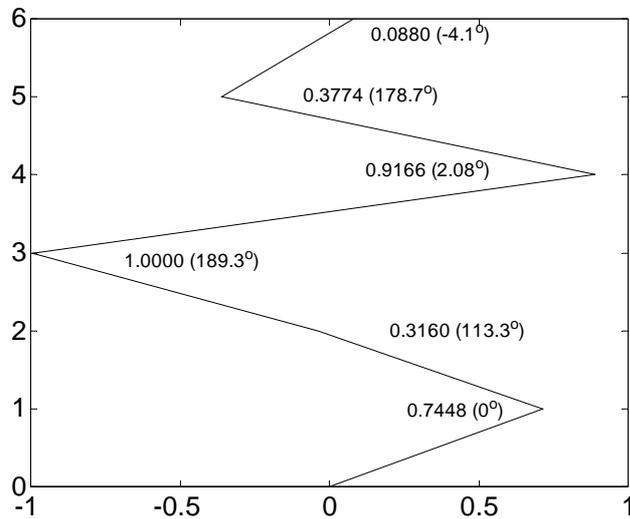


Figura 5.15.e. Quinto modo de vibración

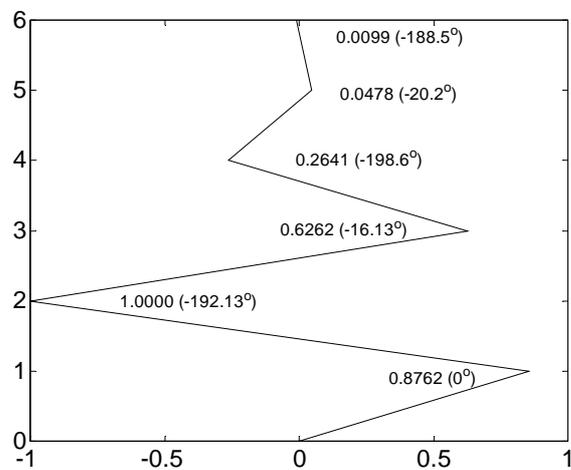
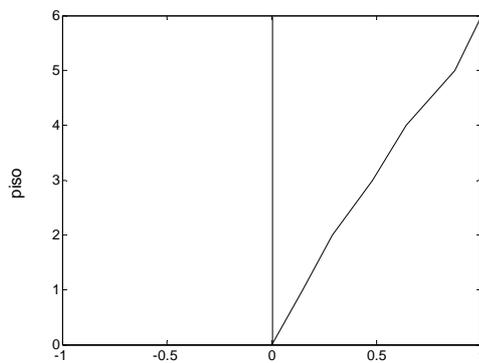


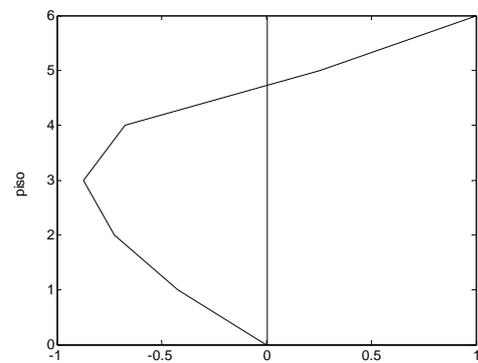
Figura 5.15.f. Sexto modo de vibración

5.5.3.2. Método de los modos complejos

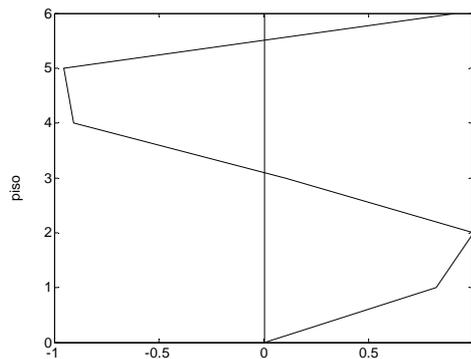
Se construyó un modelo numérico en el programa MATLAB v 5.3 (1999), se consideraron las masas concentradas en cada piso y seis grados de libertad correspondientes a los seis desplazamientos horizontales de piso. El módulo de elasticidad del aluminio se determinó según lo explicado en el apartado 5.2 (ensayo estático). A partir de este modelo numérico se obtuvieron las formas modales que se usaron en el método de los modos complejos. En la figura 5.16 se muestran las formas modales del modelo numérico.



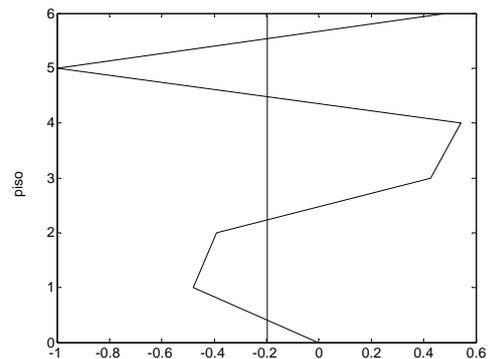
modo 1



modo 2



modo 3



modo 4

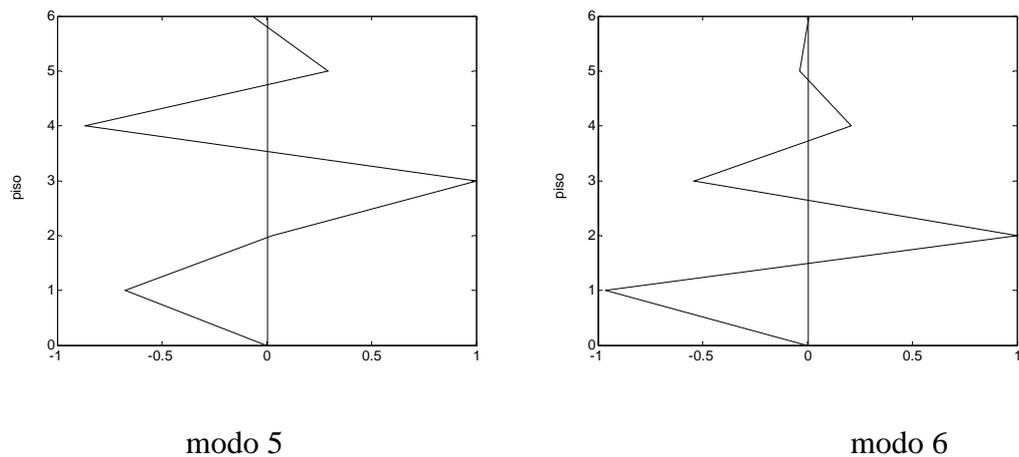


Figura 5.16 formas modales del modelo numérico usadas en el Método de los Modos Complejos.

Medidas las respuestas (aceleración en dirección horizontal) en cada uno de los pisos del modelo, para los cinco registros de aceleración en la base tipo ruido blanco gaussiano, se estimaron las frecuencias y amortiguamientos de la misma forma que en el apartado 5.4.3.2.

Las figuras 5.17.a - f muestran el estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal y la función de respuesta en frecuencia de un oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

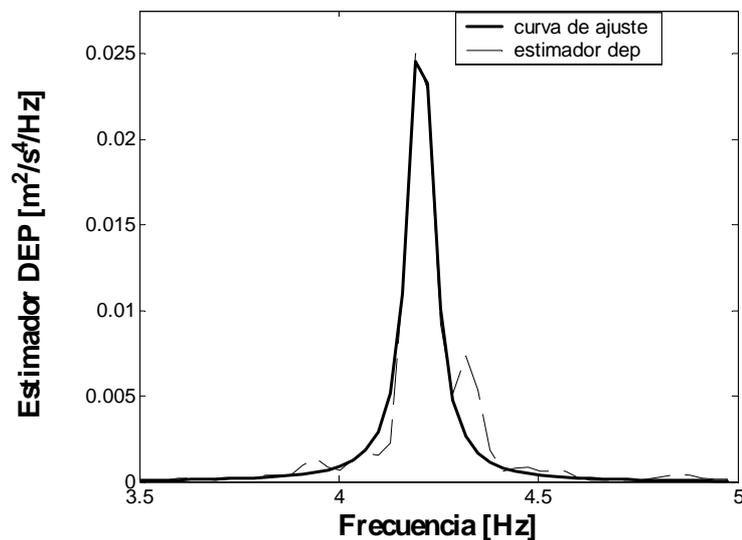


Figura 5.17.a Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_1(t)$ y FRF de un oscilador lineal de un gdl que la ajusta.

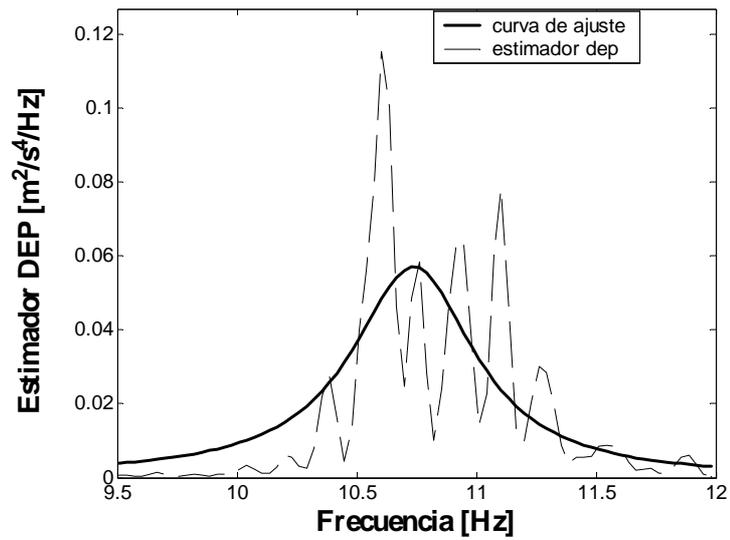


Figura 5.17.b Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_2(t)$ y FRF de un oscilador de un gdl que la ajusta.

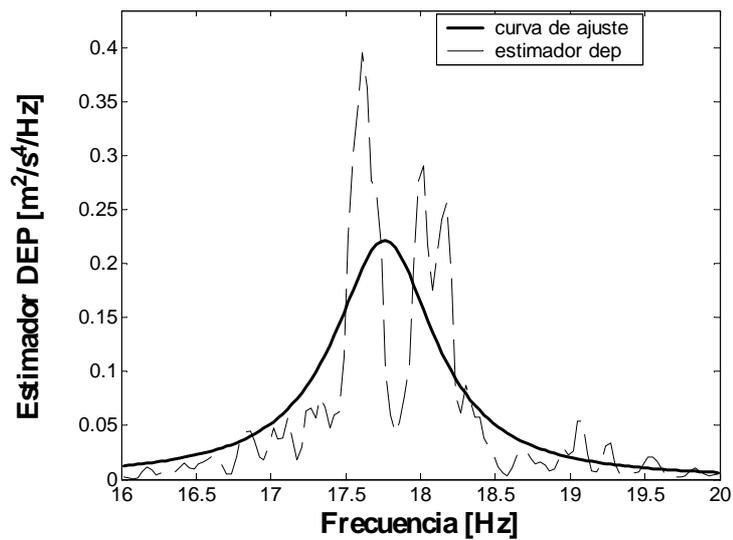


Figura 5.17.c Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_3(t)$ y FRF de un oscilador lineal de un gdl que la ajusta.

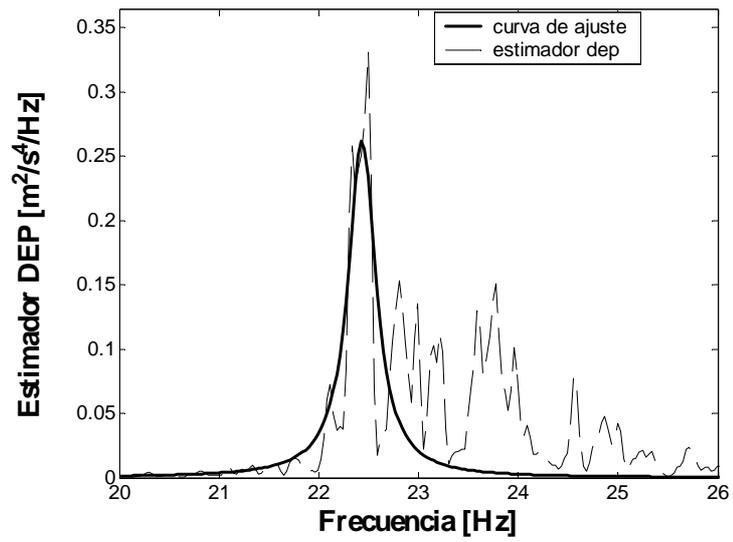


Figura 5.17.d Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_4(t)$ y FRF de un oscilador de un gdl que la ajusta.

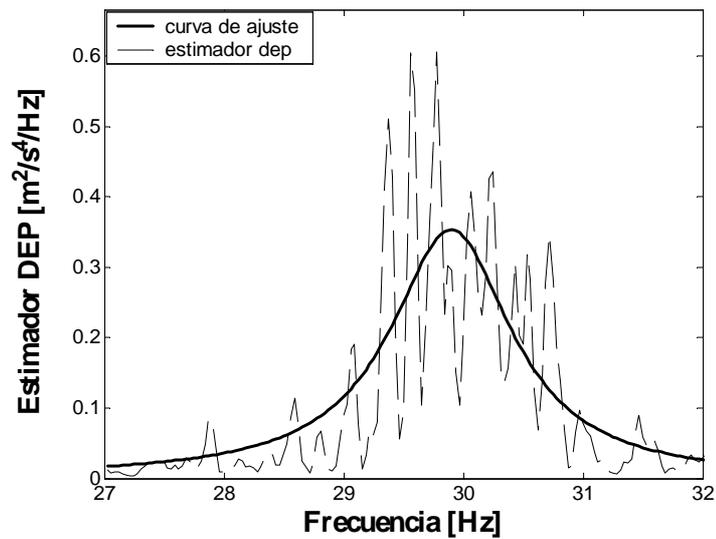


Figura 5.17.e Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_5(t)$ y FRF de un oscilador lineal de un gdl que la ajusta.

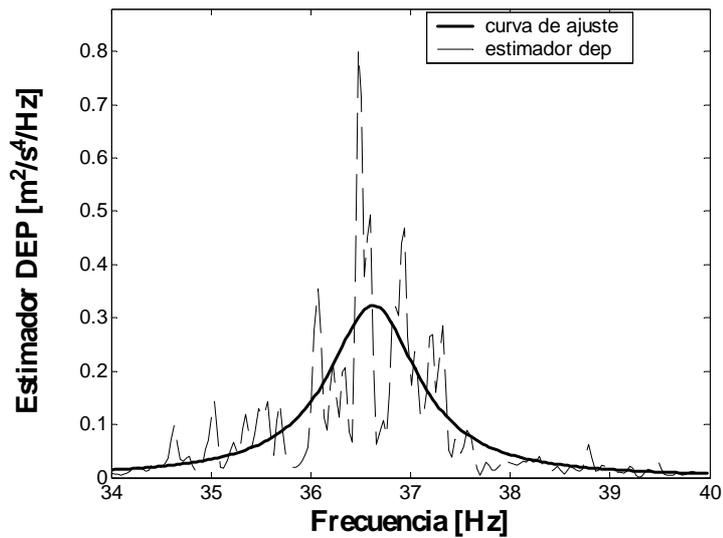


Figura 5.17.f Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_6(t)$ y FRF de un oscilador de un gdl que la ajusta.

En las figuras 5.17 se puede ver que aparecen varios picos cercanos a la frecuencia en consideración, con el aumento del número de registros medidos estos picos podrían suavizarse obteniéndose así un mejor estimador de la densidad espectral de potencia de las respuestas modales. También a partir del análisis de las figuras se puede observar una limitación del método que sería la imposibilidad de identificar modos cercanos ya que los mismos podrían confundirse con un único modo.

Los parámetros modales identificados mediante los métodos de los modos complejos y SSI-Cov se resumen en la tabla 5.6.

	Método de los modos complejos		SSI_Cov		Diferencia [%]	
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	ξ [%]	f	ξ
Modo 1	4.21	1.86	4.18	2.1	0.71	12.9
Modo 2	10.75	2.0	10.77	1.7	0.18	15
Modo 3	17.77	1.81	17.69	1.5	0.45	17
Modo 4	22.43	1.75	22.43	1.8	0	2.86
Modo 5	29.91	2.07	29.78	1.9	0.43	8.21
Modo 6	36.63	1.5	36.67	1.8	0.11	20

Tabla 5.6 Comparación de parámetros identificados mediante el Método de los Modos Complejos y SSI-Cov.

Nuevamente, los resultados muestran, en general, que la diferencia entre las frecuencias estimadas por ambos métodos es baja. Sin embargo, se observa que, para el tipo de excitación considerada en este caso, aumenta la imprecisión en la estimación del amortiguamiento.

5.6 Viga de hormigón armado

Se estudia una viga simplemente apoyada de hormigón armado (H17, ADN 420) de 5.60 m de longitud y sección transversal rectangular (0.10 x 0.20)m [Palazzo, 2001]. La figura 5.18 muestra un esquema de la viga de H^oA^o. En la tabla 5.7 se muestran las características mecánicas de la viga.

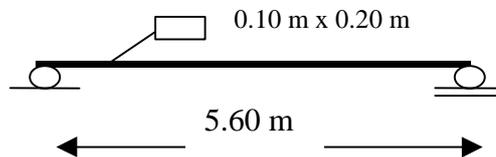


Figura 5.18 Esquema de la viga de H^oA^o

Armadura longitudinal	Superior: 3 ϕ 16 mm
	Inferior: 3 ϕ 16 mm
Armadura de corte	Estribos ϕ 4.2 mm c/10 cm
Densidad	2634.665 kg/m ³
Módulo de Elasticidad	2.48 x 10 ⁷ kN/m ²
Momento de inercia	3.031 x 10 ³ cm ⁴

Tabla 5.7 Propiedades mecánicas de la viga de hormigón armado.

5.6.1 Ensayo dinámico

La señal usada para la excitación de la viga es del tipo pulso, provocada por el golpe de un martillo aplicada manualmente. Se midieron las respuestas en término de aceleraciones en cuatro puntos de la viga. Más detalles sobre los ensayos ver [Palazzo,2001].

5.6.2 Identificación del sistema

La identificación de los parámetros modales se realiza a través de los mismos métodos que en los ejemplos anteriores.

5.6.2.1 Identificación de sistemas basado en las covarianzas (SSI-Cov)

Para el análisis se consideran a los 4 sensores como de referencia, el retraso (lag) i adoptado es 100 y el orden máximo del modelo es 15. Los criterios para la construcción del diagrama de estabilización de frecuencias son los mismos que los empleados en los ejemplos precedentes. La figura 5.19. muestra este diagrama en el cuál las frecuencias correspondientes a los modos estables están representadas con [o], mientras que todas las frecuencias identificadas se representan con [·].

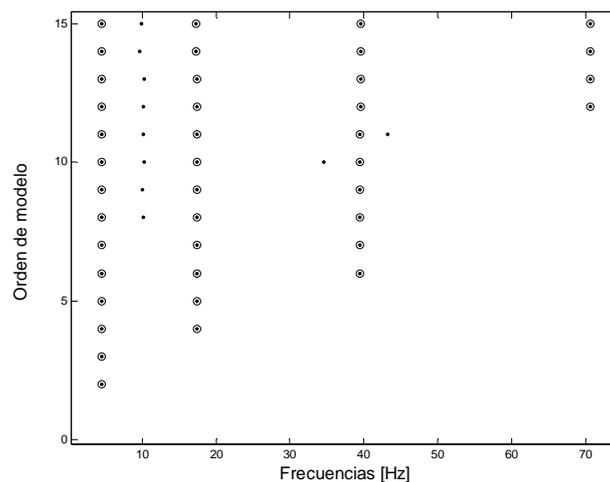


Figura 5.19 Diagrama de estabilidad de frecuencias para viga de H^oA^o, con [o] se representan las frecuencias correspondientes a los modos estables y con [·] se representan todas las frecuencias identificadas.

La tabla 5.8 muestra los valores de frecuencias y amortiguamientos estimados.

Modo	1	2	3	4
f (Hz)	4.52	17.29	39.56	70.98
ξ (%)	3.62	2.94	1.77	3.44

Tabla 5.8 Frecuencias y amortiguamientos estimados.

5.6.2.2 Método de los modos complejos

Se construyó un modelo numérico con el programa Matlab [Matlab v. 5.3, 1999], se consideraron elementos de viga lineales 3D, masas concentradas en coincidencia con los cuatro puntos de medición de la respuesta (figura 5.20). Las propiedades mecánicas usadas son las que se muestran en la tabla 5.7.

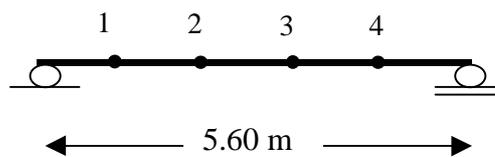
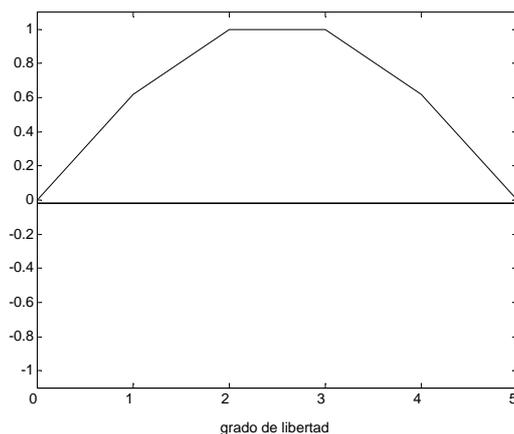
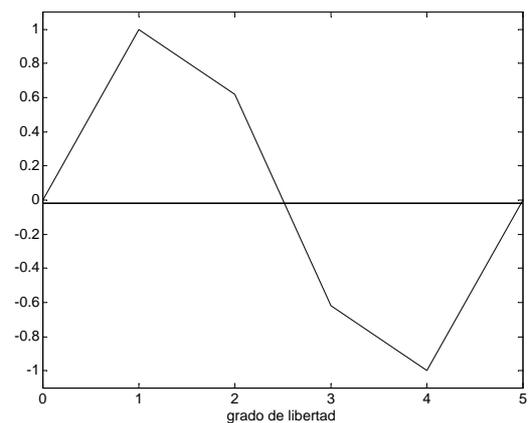


Figura 5.20 Grados de libertad considerados correspondiente a los desplazamientos verticales en los puntos marcados.

Las formas modales obtenidas a partir del modelo numérico se usaron en el Método de los Modos Complejos para estimar las frecuencias y amortiguamientos (figura 5.21).



modo 1



modo 2

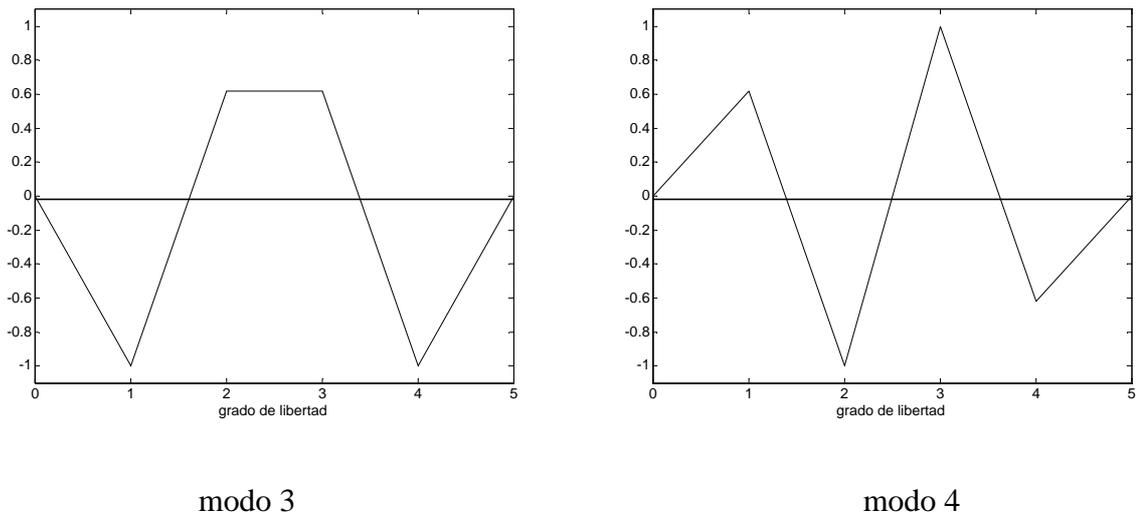


Figura 5.21 Formas modales del modelo numérico de viga de H°A°.

Las figuras 5.22 a – d muestran el estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal y la función de respuesta en frecuencia del oscilador lineal de un grado de libertad que la ajusta.

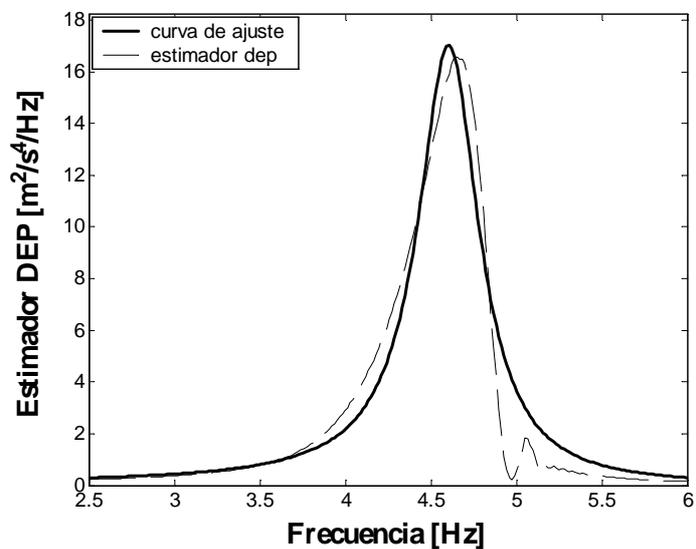


Figura 5.22.a Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_1(t)$ y FRF del oscilador lineal de un gdl que la ajusta.

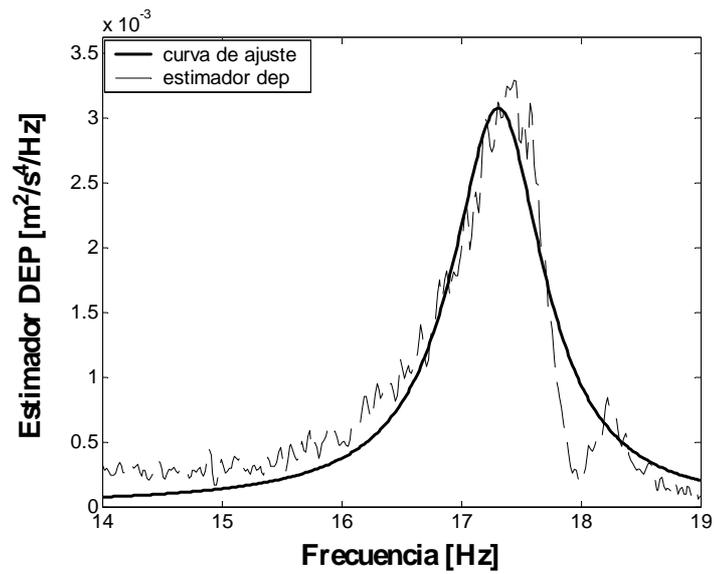


Figura 5.22.b Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_2(t)$ y FRF del oscilador lineal de un gdl que la ajusta.

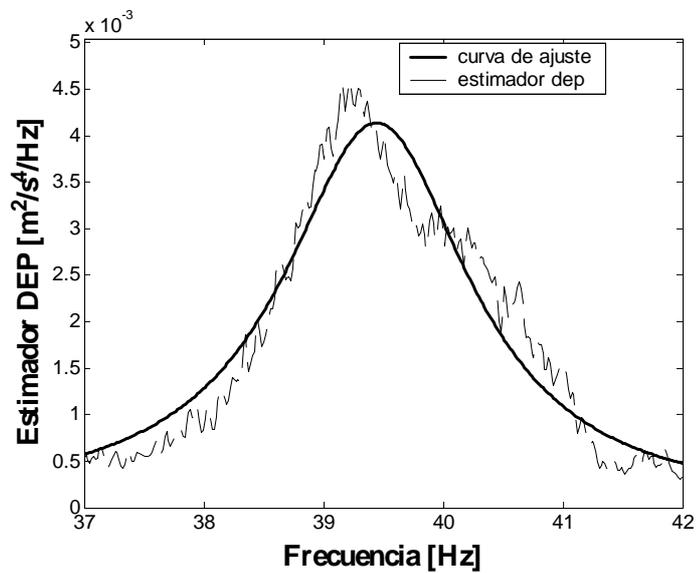


Figura 5.22.c Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_3(t)$ y FRF del oscilador lineal de un gdl que la ajusta.

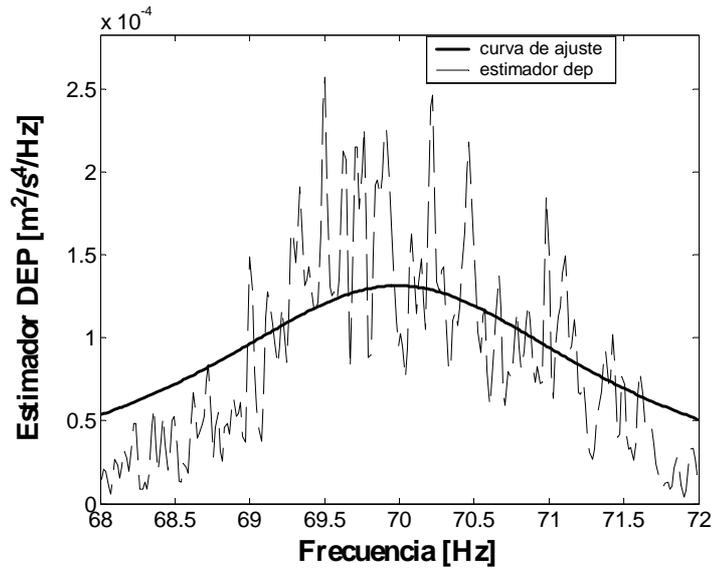


Figura 5.22.d Estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal $\eta_4(t)$ y FRF del oscilador lineal de un gdl que la ajusta.

Los parámetros modales estimados mediante los métodos de los Modos Complejos, SSI-Cov y las frecuencias y amortiguamientos estimados con los métodos Peak-picking y Half Power Bandwidth [Palazzo, 2001] se resumen en la tabla 5.9.

	[Palazzo, 2001]		Método de los modos complejos		SSI_Cov		Coef. de Variación [%]	
	PP ⁽¹⁾	HPB ⁽²⁾						
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	ξ [%]	f	ξ
Modo 1	4.55	3.34	4.54	3.67	4.52	3.62	0.34	5.02
Modo 2	17.16	1.98	17.31	2.70	17.29	2.94	0.47	19.67
Modo3	38.52	0.83	39.47	1.95	39.56	1.77	1.47	39.66
Modo 4	69.77	--	70.0	3.3	70.98	3.44	0.91	---

Tabla 5.9 Comparación entre los parámetros modales identificados por los tres métodos.

(1) Peak-Picking, (2) Half Power Bandwidth.

En la tabla 5.9 se puede observar que el coeficiente de variación para la frecuencia es bajo por lo que se puede decir que la frecuencia se puede estimar con muy buena precisión. El coeficiente de variación para el amortiguamiento es elevado excepto para el primer modo de

vibración para el cual alcanza un 5%, para el cuarto modo no se calculó debido a que no se pudo estimar el amortiguamiento por el método Half Power Bandwidth. En la tabla 5.10 se calcula la diferencia entre los parámetros estimados por el método propuesto en esta tesis, es decir Método de los Modos Complejos (MC) y el método SSI-Cov. En ella se puede ver que prácticamente los dos métodos pueden considerarse como equivalentes, siendo el método propuesto de más fácil aplicación.

	Diferencia entre parámetros estimados por MC y SSI-Cov	
	f [%]	ξ [%]
Modo 1	0.44	1.36
Modo 2	0.11	8.9
Modo 3	0.23	9.2
Modo 4	1.4	4.2

Tabla 5.10 Diferencia entre parámetros estimados por el método de los Modos Complejos (MC) y el método SSI-Cov.

5.7 Conclusiones generales

De los análisis experimentales se puede concluir que es posible estimar las frecuencias naturales con alta precisión (en los casos estudiados la diferencia fue menor al 1%), sin embargo la estimación del amortiguamiento es incierta, (la diferencia máxima en algunos casos alcanzó el 40%).

En el caso del método de los modos complejos la desventaja se presenta en la necesidad del conocimiento previo de las formas modales. Sin embargo, este método resulta ser una alternativa simple ya que la obtención de las formas modales puede llevarse a cabo experimentalmente en el caso de estructuras donde el número de grados de libertad considerados es pequeño o en cualquier otro caso a partir de un modelo numérico.

De los ejemplos estudiados se puede concluir que para la estimación de las frecuencias y amortiguamientos, los métodos SSI-Cov y el método propuesto de los Modos Complejos son equivalentes. La ventaja en la aplicación del método de los Modos Complejos es que es un

método fácil incluso en el postprocesamiento, mientras que en el método SSI-Cov la determinación de los modos espurios, en algunos casos, se torna engorrosa.

CAPÍTULO 6

IDENTIFICACIÓN DE DAÑO ESTRUCTURAL

6.1 Introducción

La idea de monitoreo estructural surgió debido a la necesidad de complementar los métodos subjetivos de inspección visual con herramientas no destructivas basadas en mediciones físicas y análisis computacional. Estas técnicas de monitoreo estructural pueden clasificarse en globales o locales. Los métodos locales se concentran en una parte de la estructura y se basan en radiografías, campos magnéticos, acústicos, etc. Los métodos globales parten de la medición de vibraciones y se basan en el hecho de que cambios en la rigidez local afectan en forma global a las características dinámicas de una estructura. La ventaja principal de estos métodos es que mediciones en algunos puntos de la estructura son suficientes para conocer las condiciones de toda la estructura y que el lugar donde se realiza la medición puede ser diferente del lugar dañado. Estos métodos de monitoreo pueden ser intermitentes o continuos.

En este capítulo se propone un método para la localización y cuantificación del daño en estructuras con amortiguamiento viscoso no proporcional. Se presenta también el método denominado Perturbación de Rango Mínimo para localizar y cuantificar el daño aplicable a estructuras con amortiguamiento viscoso proporcional. La aplicabilidad del método propuesto se muestra a través de ejemplos numéricos y experimentales, uno de estos ejemplos experimentales fue desarrollado exclusivamente para este trabajo de tesis.

6.2 Clasificación de los métodos para identificación de daño estructural

Ritter [Ritter, 1993] clasifica los métodos para identificar el daño estructural en cuatro niveles, a saber:

- Nivel 1- Detección: a través de estos métodos sólo es posible saber si la estructura está dañada o no.
- Nivel 2- Localización: es posible además conocer la posición geométrica del daño.
- Nivel 3- Cuantificación: además de los niveles 1 y 2 estos métodos cuantifican la severidad del daño.
- Nivel 4- Predicción: permiten, además de los niveles anteriores, predecir la vida útil remanente de la estructura.

Generalmente, los métodos desarrollados hasta el momento se encuadran en los dos primeros niveles. En algunos casos cuando los métodos basados en medición de vibraciones se combinan con modelos estructurales, permiten cuantificar el daño existente.

Basados en la teoría clásica de dinámica estructural, algunos métodos de identificación de daño parten del concepto de que, al ser los parámetros modales (frecuencias, formas modales y amortiguamiento modal) funciones de las propiedades físicas de la estructura (masa, rigidez y amortiguamiento), cualquier cambio en estas propiedades causará modificaciones en los parámetros modales de la misma.

Otros métodos de identificación del daño se basan en la modificación de las matrices de masa, rigidez, y/o amortiguamiento del sistema de modo tal de reproducir lo mejor posible la respuesta dinámica medida. La comparación entre las matrices actualizadas y las matrices originales (sin daño) provee un indicador de daño, que puede ser usado para localizar y cuantificar la extensión del mismo.

6.3 Localización del daño

Algunos métodos, que forman parte de los denominados *métodos de actualización óptima de matrices*, involucran la minimización del rango de las matrices error o perturbación. Uno de ellos es el denominado Perturbación de Rango Mínimo (*MRPT: Minimum Rank Perturbation Theory*) [Zimmerman, et al., 1994]. Este algoritmo para localizar el daño es esencialmente el

criterio del error en la fuerza modal y define el vector de daño para el i -ésimo modo de un sistema amortiguado de n grados de libertad como:

$$\vec{d}_i \equiv \mathbf{Z}_{d_i} \vec{\phi}_{d_i} = (\lambda_{d_i}^2 \Delta \mathbf{M}_d + \lambda_{d_i} \Delta \mathbf{C}_d + \Delta \mathbf{K}_d) \vec{\phi}_{d_i} \quad (6.1)$$

en la cual las variaciones $\Delta \mathbf{M}$, $\Delta \mathbf{K}$, $\Delta \mathbf{C} \in R^{n \times n}$ son matrices simétricas y reales e indican la presencia de daño en el sistema. $\vec{\phi}_{d_i}$ y λ_{d_i} son el i -ésimo autovector e i -ésimo autovalor de la estructura dañada.

En el caso en el que el ruido en la medición sea despreciable, el j -ésimo elemento del vector \vec{d}_i será cero cuando la j -ésima fila de las matrices $\Delta \mathbf{M}$, $\Delta \mathbf{K}$, $\Delta \mathbf{C}$ sean cero, es decir que el j -ésimo grado de libertad no está afectado directamente por el daño. En la práctica, esto raramente ocurre debido a la presencia de ruidos de medición, por ello la ec. (6.1) se puede escribir como

$$d_i^j \equiv \bar{z}_{d_i}^j \vec{\phi}_{d_i} = \|\bar{z}_{d_i}^j\| \|\vec{\phi}_{d_i}\| \cos(\theta_i^j) \quad (6.2)$$

en la cual, d_i^j es la j -ésima componente del i -ésimo vector de daño, $\bar{z}_{d_i}^j$ es la j -ésima fila de la matriz \mathbf{Z}_{d_i} y θ_i^j es el ángulo entre los vectores $\bar{z}_{d_i}^j$ y $\vec{\phi}_{d_i}$. En el caso en que las mediciones no tengan ruido, un d_i^j nulo corresponderá a un θ_i^j igual a 90 grados, de igual modo, un d_i^j no nulo (grado de libertad con daño) corresponderá a un ángulo θ_i^j diferente de 90 grados. Cualquier error en las mediciones originará una componente no nula en el vector de daño. A continuación se admite que, frente a la presencia de daño en la estructura, la componente del vector de daño correspondiente al grado de libertad dañado sea substancialmente mayor que las correspondientes a los demás elementos. Sin embargo, una componente mayor en el vector \vec{d}_i podría deberse a que la norma del vector fila $\bar{z}_{d_i}^j$ sea grande respecto a las otras filas de la matriz \mathbf{Z}_{d_i} . En estos casos, por lo tanto, es conveniente usar la desviación del ángulo θ_i^j respecto de 90 grados para localizar el daño.

Cuando el número de modos medidos p es mayor que uno, se puede definir el vector de daño de dos formas diferentes como:

$$\vec{d} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{|\vec{d}_i|}{\|\vec{\phi}_{d_i}\|} \quad 0 \leq d_i^j \leq 1 \quad (6.3a)$$

$$\alpha = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p |\bar{\alpha}_i| \quad (6.3b)$$

con $\alpha_i^j = \theta_i^j - 90^\circ$. Cuando los valores de $\|z^j_d\|$ tienen diferentes órdenes de magnitud para cada modo medido es preferible usar la ec.(6.3b).

6.4 Cuantificación del daño

Como ya se mencionó en el capítulo 2, sección 2.3 existen varios métodos para cuantificar el daño en una estructura. Entre ellos, se presentan aquí dos métodos basados en la determinación del error en las matrices del sistema. En primer lugar, se analiza el caso de amortiguamiento proporcional aplicando el método denominado Perturbación de rango mínimo y posteriormente se considera amortiguamiento no proporcional a través de un método desarrollado en esta tesis.

Estos métodos se eligieron porque, si bien para evaluar el daño se pueden usar la variación en las frecuencias y formas modales, en algunos casos no son lo suficientemente sensibles al daño estructural. Además, como ya se mencionó en el capítulo 2, generalmente la variación en las frecuencias podría usarse sólo como indicador global de la existencia de daño estructural.

6.4.1. Amortiguamiento proporcional

Se presenta el método denominado Perturbación de Rango Mínimo (*Minimum Rank Perturbation*) propuesto para estructuras con amortiguamiento proporcional [Zimmerman et al., 1994].

A partir de un modelo numérico del sistema lineal amortiguado no dañado, donde se admite conocer las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} , la ecuación de movimiento en vibraciones libres se puede expresar como:

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\bar{q}}(t) + \mathbf{K} \bar{q}(t) = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

Medida la respuesta estructural, a través de algún método de identificación se pueden obtener p autovalores y autovectores del sistema, con ello el problema de autovalores puede escribirse como:

$$\mathbf{M} \Phi \Lambda^2 + \mathbf{C} \Phi \Lambda + \mathbf{K} \Phi = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

en la cuál, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} son las matrices definidas anteriormente, Φ es la matriz que contiene los p autovectores y Λ es una matriz diagonal que contiene los p autovalores del sistema no dañado.

De igual modo, el problema de autovalores para el sistema dañado, considerando despreciable el daño en la matriz de masa, será:

$$\mathbf{M} \Phi_d \Lambda_d^2 + (\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}) \Phi_d \Lambda_d + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) \Phi_d = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

en la cual $\Delta\mathbf{K}$ y $\Delta\mathbf{C}$ son variaciones en las matrices \mathbf{K} y \mathbf{C} , que indican la presencia de daño; el subíndice d indica que los parámetros corresponden al sistema dañado. La ec. (6.6) puede escribirse como:

$$\mathbf{M} \Phi_d \Lambda_d^2 + \mathbf{C} \Phi_d \Lambda_d + \mathbf{K} \Phi_d = -(\Delta\mathbf{C} \Phi_d \Lambda_d + \Delta\mathbf{K} \Phi_d) \equiv \mathbf{B} \quad (6.7)$$

Como $\Delta\mathbf{C}$, $\Delta\mathbf{K}$ son matrices reales y simétricas, Φ_d es una matriz real y Λ_d es la matriz de autovalores complejos, el complejo conjugado de la ec.(6.7) se escribe:

$$\bar{\mathbf{B}} = \Delta\mathbf{C} \Phi_d \bar{\Lambda}_d + \Delta\mathbf{K} \Phi_d \quad .. \quad (6.8)$$

restando la ec.(6.8) a la ec.(6.7):

$$\Delta\mathbf{C} \Phi_d (\Lambda_d - \bar{\Lambda}_d) = (\mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}}) \quad (6.9)$$

entonces

$$\Delta\mathbf{C} = (\mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}}) \mathbf{H}_d (\mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}})^T \quad (6.10)$$

con

$$\mathbf{H}_d = \left[(\mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}})^T \Phi_d (\Lambda_d - \bar{\Lambda}_d) \right]^{-1} \quad (6.11)$$

o alternativamente a partir de la ecuación (6.9) y usando el concepto de pseudoinversa debido a que la matriz $\left[\Phi_d (\Lambda_d - \bar{\Lambda}_d) \right]$ no es cuadrada, se escribe:

$$\Delta\mathbf{C} = pinv \left[\Phi_d (\Lambda_d - \bar{\Lambda}_d) \right] (\mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}}) \quad (6.12)$$

en la cual, $pinv()$ representa la pseudoinversa que cumple con:

$$\mathbf{X} = pinv(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}$$

$\mathbf{A} \mathbf{X}$ y $\mathbf{X} \mathbf{A}$ son hermitianas

De igual modo, postmultiplicando la ec.(6.7) por $\bar{\Lambda}_d$ y a la ec(6.8) por Λ_d y restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\Delta \mathbf{K} = (\mathbf{B} \bar{\Lambda}_d - \bar{\mathbf{B}} \Lambda_d) \mathbf{H}_k (\mathbf{B} \bar{\Lambda}_d - \bar{\mathbf{B}} \Lambda_d)^T \quad (6.13)$$

con

$$\mathbf{H}_k = \left[(\mathbf{B} \bar{\Lambda}_d - \bar{\mathbf{B}} \Lambda_d)^T \Phi_d (\Lambda_d - \bar{\Lambda}_d) \right]^{-1} \quad (6.14)$$

otra alternativa sería:

$$\Delta \mathbf{K} = pinv \left(\Phi_d (\bar{\Lambda}_d - \Lambda_d) \right) (\mathbf{B} \bar{\Lambda}_d - \bar{\mathbf{B}} \Lambda_d) \quad (6.15)$$

en la cual , $\Delta \mathbf{K}$ representa el cambio debido al daño en la matriz de rigidez.

6.4.2 Amortiguamiento no proporcional

En estructuras con amortiguamiento no proporcional el método anterior no se puede usar debido a que la matriz Φ_d es compleja, por lo tanto como parte de esta tesis, se propone un método alternativo.

Para el caso de sistemas con amortiguamiento no proporcional, considerando la estructura dañada, se puede escribir la ec.(4.34) en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \Gamma \Phi_d^H \mathbf{M} \Phi_d + \Phi_d^H (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}) \Phi_d &= \mathbf{0} \\ \text{con } \Gamma &= diag \left(2 \xi_{r_d} \omega_{r_d} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

en la cual la matriz de amortiguamiento de la estructura dañada se representa como $(\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C})$, así:

$$\Gamma \Phi_d^H \mathbf{M} \Phi_d + \Phi_d^H \mathbf{C} \Phi_d = -\Phi_d^H \Delta \mathbf{C} \Phi_d \equiv \mathbf{B}_C \quad (6.17)$$

por lo tanto la variación $\Delta \mathbf{C}$ para el amortiguamiento será:

$$\Delta \mathbf{C} = -pinv(\Phi_d^H) \mathbf{B}_C pinv(\Phi_d) \quad (6.18)$$

De la misma manera la ecuación (4.32) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \Phi_d^H \mathbf{M} \Phi_d + \Phi_d^H (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \Phi_d &= \mathbf{0} \\ \text{con } \Omega^2 &= \text{diag}(\omega_r^2) \end{aligned} \quad (6.19)$$

así:

$$\Omega^2 \Phi_d^H \mathbf{M} \Phi_d + \Phi_d^H \mathbf{K} \Phi_d = -\Phi_d^H \Delta \mathbf{K} \Phi_d \equiv \mathbf{B}_K \quad (6.20)$$

por lo tanto la variación $\Delta \mathbf{K}$ será:

$$\Delta \mathbf{K} = -\text{pinv}(\Phi_d^H) \mathbf{B}_K \text{pinv}(\Phi_d) \quad (6.21)$$

6.5 Ejemplos

6.5.1 Ejemplo 1: Pórtico plano con amortiguamiento proporcional (simulación numérica)

Se estudia un pórtico plano de seis pisos similar al prototipo de aluminio (modelo B) descrito en el capítulo 5 admitiendo amortiguamiento proporcional a las matrices de masa y rigidez y considerando como grados de libertad sólo los desplazamientos horizontales. Se analizan dos escenarios de daño. En el primero, se introduce el daño a través de una disminución en la rigidez del primer piso de la estructura de un 20%. En el segundo caso la disminución de la rigidez es en el sexto piso e igual a un 50%. La respuesta de las estructuras dañadas y no dañadas sometidas al sismo de Northridge (1994) se obtiene por integración numérica. Aplicando el método SSI-Cov descrito en el capítulo 4 se obtienen los parámetros modales en cada caso. A diferencia de lo propuesto por [Zimmerman et al., 1994] donde se admite el conocimiento de \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} para obtener las matrices del sistema no dañado se aplica el método propuesto en el capítulo 4 (ítem 4.5 ecuaciones (4.37) y (4.40)).

Las figuras 6.1 a y b muestran el vector de daño determinado según la ec. (6.3) para los dos casos de daño.

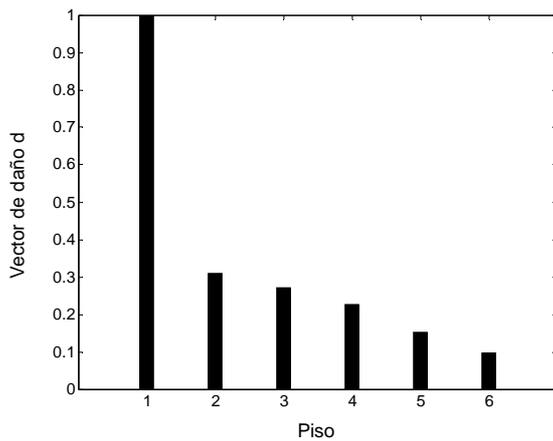


Figura 6.1 a Localización del daño para primer escenario.

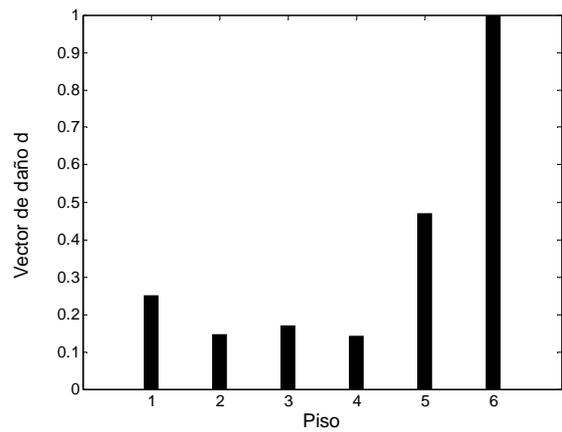


Figura 6.1 b Localización del daño para segundo escenario

En las figuras 6.1 a y b se puede ver que el daño se concentra en el primer piso y en el sexto piso según el escenario de daño considerado.

A través de las ecuaciones (6.12) y (6.15) se determinan los valores de ΔC y ΔK para cada escenario de daño.

Para la estructura considerada en este ejemplo la matriz de rigidez tiene la forma mostrada en la figura 6.2.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 \end{bmatrix}$$

Figura 6.2 Matriz de rigidez genérica para el pórtico estudiado

Si se representa en un plano horizontal las filas y columnas correspondientes a las matrices de rigidez (figura 6.2) y en el eje vertical el error relativo $\Delta K/K$, se puede construir un gráfico como muestran las figuras 6.3a y 6.3b.

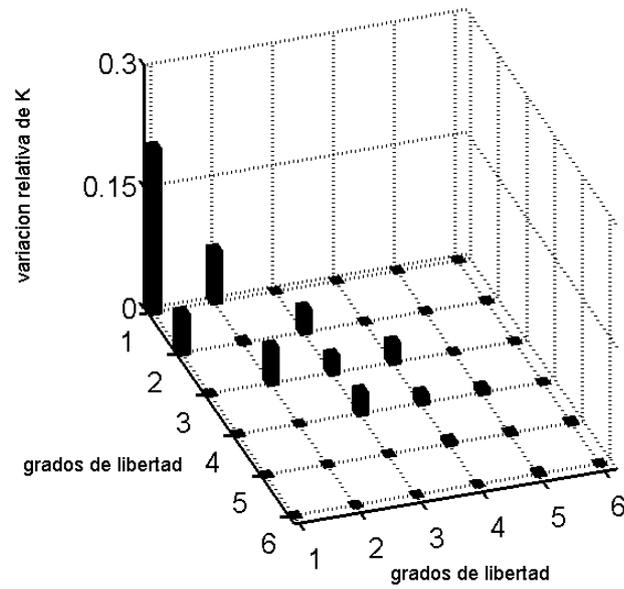


Figura 6.3.a. Variación relativa en la matriz de rigidez (primer caso de daño).

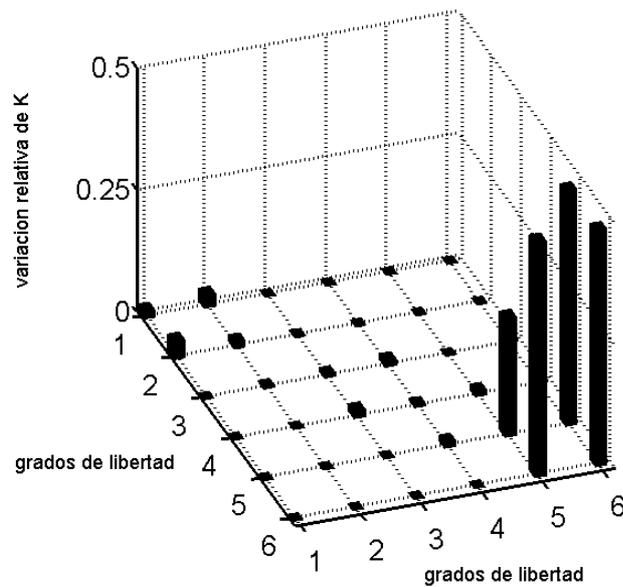


Figura 6.3.b. Variación relativa en la matriz de rigidez (segundo caso de daño).

En las figuras 6.3 se observa que con el método propuesto se puede localizar y cuantificar la reducción de la rigidez. Para el primer escenario de daño se determina una disminución de 20.4% en la rigidez del primer piso y del 49.6% para el segundo escenario en la rigidez del sexto piso mostrando una excelente precisión en la cuantificación del daño. En la posición (5,5) de la figura 6.3.b aparece daño debido a que el elemento $k(5,5)$ de la matriz de rigidez está formado por la suma de las rigideces del 5^{to} y 6^{to} piso (figura 6.2), por lo tanto la variación en ese

elemento se debe al cambio en k_6 la rigidez del piso seis. Cabe aclarar que debido a errores numéricos surgen valores despreciables en elementos de la matriz donde no existe daño.

Una apariencia similar a las figuras 6.3.a y 6.3.b se obtiene en la matriz de amortiguamiento debido a que fue admitido un amortiguamiento proporcional a la matriz de rigidez en ambos escenarios.

En la figura 6.4 se muestran las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento del sistema no dañado estas dos últimas matrices se obtuvieron a partir del método propuesto en el ítem 4.5 del capítulo 4.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.1196 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1102 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1040 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.5926 & -1.7562 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.7562 & 3.0703 & -1.2417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2417 & 2.4518 & -1.2287 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2287 & 1.8569 & -0.6179 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6179 & 1.2171 & -0.6005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6006 & 0.6005 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.7682 & -0.4145 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4145 & 0.6864 & -0.2781 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2781 & 0.5183 & -0.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2509 & 0.3778 & -0.1263 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1263 & 0.2454 & -0.1199 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1199 & 0.1199 \end{bmatrix} \text{Ns/m}$$

Figura 6.4 Matrices del sistema no dañado

6.5.2 Ejemplo 2: Pórtico plano con amortiguamiento no proporcional (simulación numérica)

Se estudia el mismo ejemplo 1 con los mismos escenarios de daño pero admitiendo un amortiguamiento no proporcional. La no proporcionalidad en cada escenario de daño surge al

admitir que el daño afecta sólo a la rigidez, manteniendo sin cambios el amortiguamiento. De la misma manera que en el ejemplo anterior se determina la respuesta del sistema y los parámetros modales. Se determinan las matrices de rigidez de la estructura no dañada a partir de la ecuación (4.39) del capítulo 4 y mediante la ecuación (6.21) la matriz $\Delta\mathbf{K}$.

En las figuras 6.5.a y 6.5.b se muestra el error relativo en la matriz de rigidez, $\Delta\mathbf{K}/\mathbf{K}$, para los dos casos.

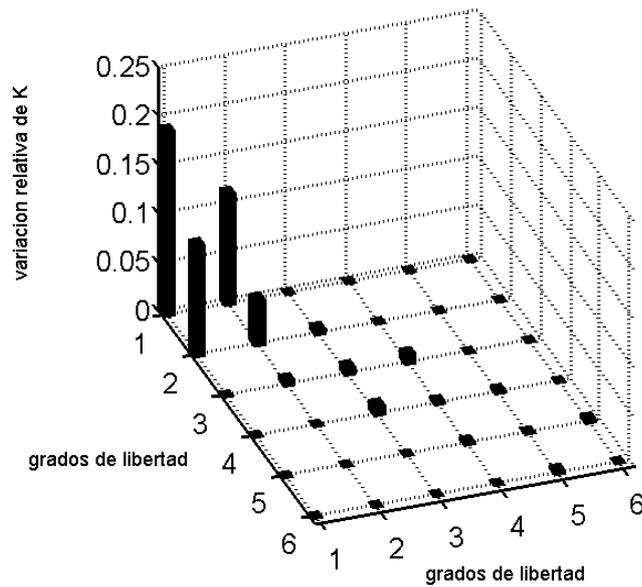


Figura 6.5.a. Variación relativa en la matriz de rigidez para el primer escenario de daño.

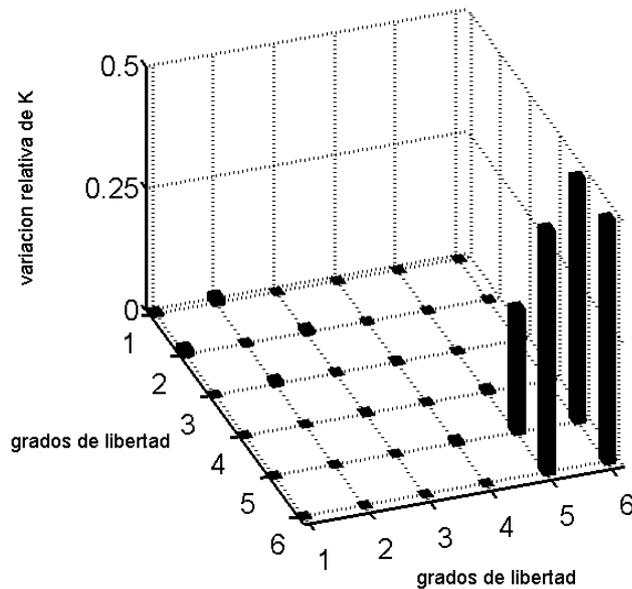


Figura 6.5.b. Variación relativa en la matriz de rigidez para el segundo escenario de daño.

En el primer caso la reducción de la rigidez identificada por el método propuesto en el primer piso es del 20.1% y del 49.95% en el sexto piso para el segundo caso.

Se muestran a continuación la matriz de rigidez sin daño \mathbf{K}_0 juntamente con las matrices errores relativos $\Delta\mathbf{K}_1/\mathbf{K}_0$ y $\Delta\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_0$ para el primer y segundo escenario de daño respectivamente.

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 3.5926 & -1.7562 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.7562 & 3.0703 & -1.2417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2417 & 2.4518 & -1.2287 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2287 & 1.8569 & -0.6179 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6179 & 1.2171 & -0.6005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6006 & 0.6005 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$\Delta\mathbf{K}_1 / \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 0.201 & 0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0003 & 0.0283 & 0.0064 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0064 & 0.0067 & 0.0109 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0109 & 0.0206 & 0.027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.027 & 0.0007 & 0.0041 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0041 & 0.0041 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{K}_2 / \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.00393 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0039 & 0.0335 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0.0183 & 0.0272 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0272 & 0.0250 & 0.007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.007 & 0.2433 & 0.4995 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4995 & 0.4995 \end{bmatrix}$$

6.5.3 Ejemplo 3: Viga de hormigón armado. Experimental

Se estudia una viga de hormigón armado simplemente apoyada de 5.60m, el daño en la misma fue provocado en diferentes pasos de carga estática aplicadas por dos gatos hidráulicos como lo muestra la figura 6.6, detalles sobre los ensayos se encuentran en [Palazzo G. L., 2001].

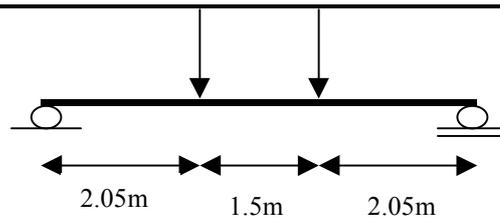


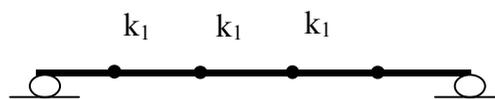
Figura 6.6 Esquema de ubicación de cargas estáticas en viga de H°A°.

Se midió la respuesta en vibraciones libres en término de aceleraciones en cuatro puntos distribuidos uniformemente a lo largo de la viga. Los parámetros modales (frecuencias, amortiguamientos y formas modales) se identificaron a través del método SSI-Cov (Capítulo 4). Las frecuencias estimadas para los estados no dañada y dañada se muestran en la tabla 6.1.

$f_{\text{no dañada}}$ [Hz]	$f_{\text{dañada}}$ [Hz]
4.52	4.19
17.29	15.51
39.56	34.88
70.98	60.49

Tabla 6.1. Frecuencias identificadas.

Como se supone conocida la matriz de masa, se determinaron las matrices de rigidez y amortiguamiento para la viga sin daño a través de las ecuaciones (4.36) y (4.39). La forma de la matriz de rigidez, según el esquema, será:



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 2k_1 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 & 2k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

Con los parámetros modales estimados de la viga dañada se determina la variación en la matriz de rigidez $\Delta\mathbf{K}$ y en la de amortiguamiento $\Delta\mathbf{C}$ ocasionada por la presencia de daño mediante las ecuaciones (6.18) y (6.21). Las figuras 6.7.a y 6.7.b muestran las variaciones relativas, $\Delta\mathbf{K}_r = \Delta\mathbf{K}/\mathbf{K}$ y $\Delta\mathbf{C}_r = \Delta\mathbf{C}/\mathbf{C}$.

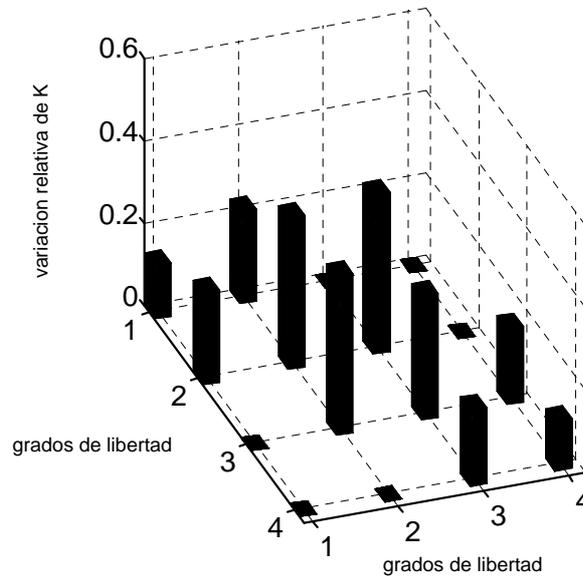


Figura 6.7.a. Variación relativa en la matriz de rigidez de la viga de H^0A^0 .

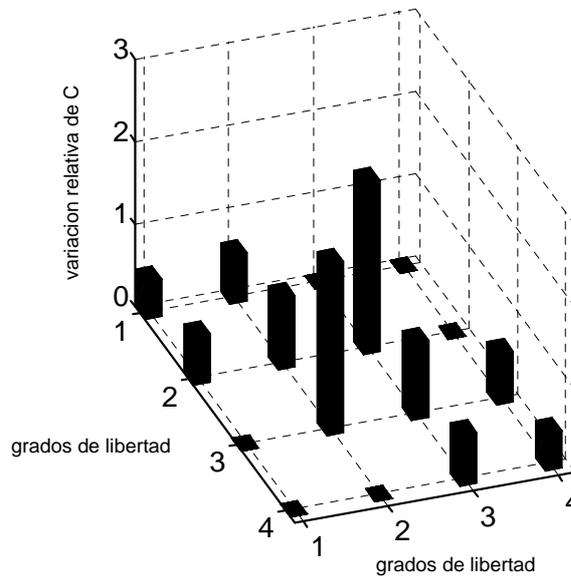


Figura 6.7.b Variación relativa en la matriz de amortiguamiento de la viga de H^0A^0 .

Se puede ver en la figura 6.7.a5 y 6.7.b que el daño se concentra principalmente en el tramo central de la viga representado por los mayores valores en los elementos centrales de las

matrices $\Delta \mathbf{K}_r$ y $\Delta \mathbf{C}_r$ conforme se describe en el trabajo de Palazzo [Palazzo G.L., 2001]. Además se puede observar la existencia de daño menor en los tramos adyacentes al central donde fueron ubicados los gatos. Cabe destacar que la variación en el amortiguamiento fue mucho mayor que en la rigidez mostrando que es un indicador de localización más sensible que la rigidez. Sin embargo, existen dos problemas que limitan su uso en la cuantificación del daño:

- a) es difícil estimar el amortiguamiento con precisión y, b) no existe hasta el momento una relación bien definida entre el amortiguamiento y daño.

Se muestran a continuación las matrices de rigidez y amortiguamiento del sistema sin daño juntamente con las matrices $\Delta \mathbf{K}$ y $\Delta \mathbf{C}$ relativas.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.969 & -3.969 & 0 & 0 \\ -3.969 & 5.9897 & -2.0110 & 0 \\ 0 & -2.0110 & 5.9812 & -3.9702 \\ 0 & 0 & -3.9702 & 3.9699 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$$

$$\Delta \mathbf{K} / \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.1291 & 0.1291 & 0 & 0 \\ 0.1291 & 0.2153 & 0.3847 & 0 \\ 0 & 0.3847 & 0.1992 & 0.1048 \\ 0 & 0 & 0.1048 & 0.1078 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 186.4809 & -183.4659 & 0 & 0 \\ -183.4649 & 368.8011 & -69.9752 & 0 \\ 0 & -69.9752 & 368.8011 & -183.4659 \\ 0 & 0 & -183.4659 & 186.4809 \end{bmatrix} \text{Ns/m}$$

$$\Delta \mathbf{C} / \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.4514 & 0.5827 & 0 & 0 \\ 0.5827 & 0.8645 & 2.0781 & 0 \\ 0 & 2.0781 & 0.9251 & 0.6070 \\ 0 & 0 & 0.6070 & 0.4485 \end{bmatrix}$$

6.5.4 Ejemplo 4: Pórtico de aluminio. Experimental.

Se estudia el modelo B de aluminio descrito en el capítulo 5. A fin de evaluar el aumento del daño estructural se excitó al modelo en la base, con 9 registros de aceleraciones simulados (tipo ruido blanco gaussiano) con valores de desvío estándar igual a $\sigma_a = 1.8; 2.1; 6.1$;

12; 20; 32; 38; 44; y 48 m/s². Con la respuesta medida en dirección horizontal en cada piso se identificaron los parámetros modales mediante el método SSI-Cov y de los modos complejos. En el capítulo 7 se muestran frecuencias y amortiguamientos para los 9 niveles de aceleraciones.

Después de estimados los parámetros, se obtienen las matrices de rigidez (ecuación 4.39) y amortiguamiento (ecuación 4.36) del sistema para el primer nivel de aceleración ($\sigma_a = 1.8 \text{ m/s}^2$) en el cuál la estructura presenta pequeños niveles de deformación, se considera que éstas son las matrices correspondientes al sistema no dañado. Al igual que en el ejemplo anterior se determina la variación en las matrices de rigidez y amortiguamiento para los diferentes niveles de daño a través de las ecuaciones (6.18) y (6.21).

Como en el modelo de aluminio no es posible detectar a simple vista el daño en sus elementos estructurales ya que, el mismo se manifiesta como una plastificación en pie y cabeza de columna, se construyó un modelo en elementos finitos, con el programa ANSYS 5.4 (1997), a fin de evaluar su comportamiento en los diferentes niveles de excitación. Para la construcción del modelo se adoptó un elemento de viga elasto-plástico con tres grados de libertad por nodo (más detalles sobre el modelo numérico ver en capítulo 7).

La figura 6.8.a y 6.8.b muestran la variación relativa en la matriz de rigidez y amortiguamiento de la estructura para el segundo nivel de aceleración ($\sigma_a = 2.1 \text{ m/s}^2$).

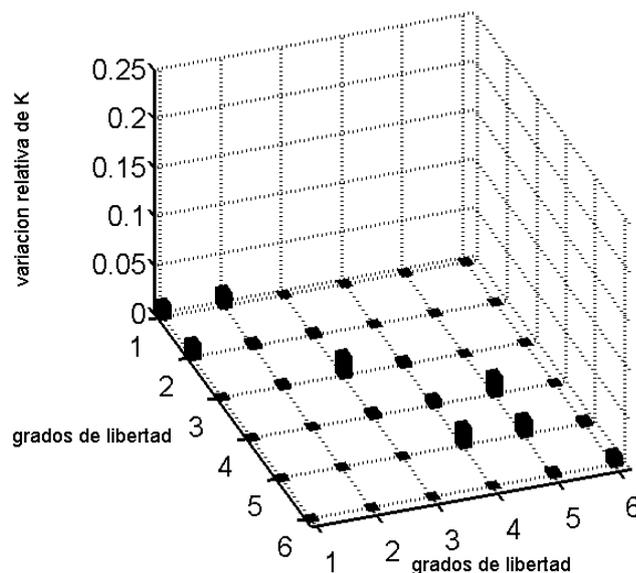


Figura 6.8.a. Variación relativa en la matriz de rigidez ($\sigma_a = 2.1 \text{ m/s}^2$).

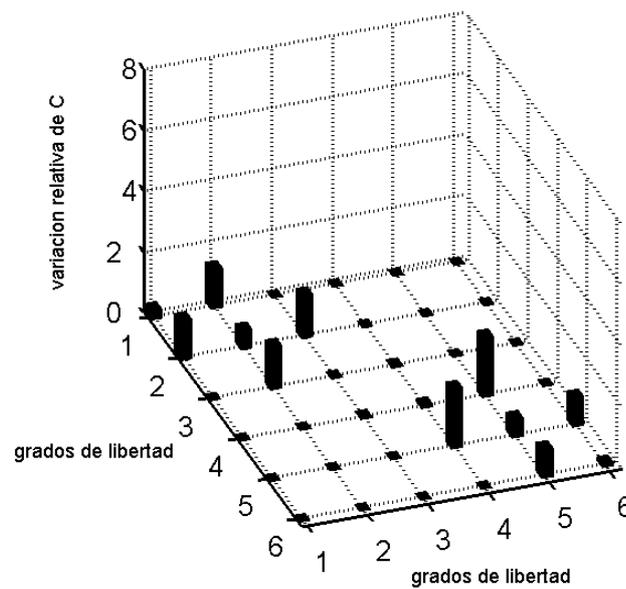


Figura 6.8.b. Variación relativa en la matriz de amortiguamiento ($\sigma_a = 2.1\text{m/s}^2$).

En las figuras 6.8.a y 6.8.b se observa una pequeña variación en los elementos de las matrices de rigidez y amortiguamiento correspondientes a las columnas localizadas entre los pisos 1º-2º, 2º-3º, 4º-5º y 5º-6º, sin embargo, el modelo de elementos finitos no se manifestó plastificación. La variación acusada por el método podría deberse a un cambio en las formas modales ocasionado por la concentración de la deformación elástica en los pisos antes mencionados, como se verificó en el modelo de elementos finitos.

La figura 6.9.a y 6.9.b muestra la variación en las mismas matrices para el último nivel de aceleración ($\sigma_a = 48\text{m/s}^2$).

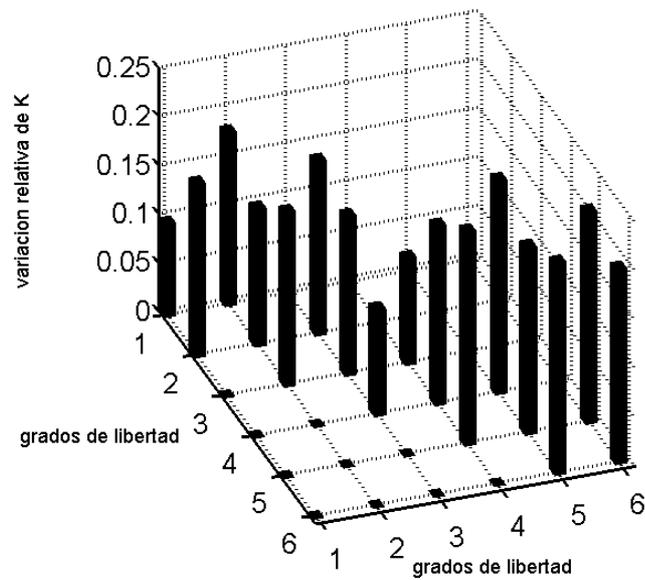


Figura 6.9a. Variación relativa en la matriz de rigidez ($\sigma_a = 48m/s^2$).

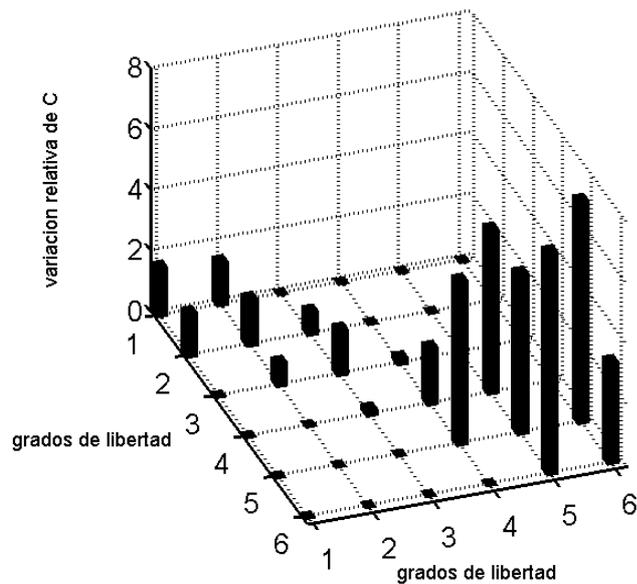


Figura 6.9.b. Variación relativa en la matriz de amortiguamiento ($\sigma_a = 48m/s^2$).

Se muestran a continuación las matrices de rigidez K_0 y amortiguamiento C_0 del sistema no dañado obtenidas a través de las ecuaciones (4.36) y (4.39) y las matrices error $\Delta K/K_0$ y $\Delta C/C_0$ para el último nivel de aceleración estudiado ($\sigma_a = 48m/s^2$).

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 3.8093 & -1.9204 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.92044 & 3.4233 & -1.5029 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5029 & 2.8339 & -1.3310 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3310 & 2.0690 & -0.7380 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7380 & 1.4377 & -0.6997 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6997 & 0.6951 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$\Delta\mathbf{K} / \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 0.0956 & 0.1083 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1083 & 0.1414 & 0.1092 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1092 & 0.1640 & 0.1096 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1096 & 0.1843 & 0.2197 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2197 & 0.1927 & 0.2178 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2178 & 0.2100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 0.6148 & -0.3551 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3551 & 0.4648 & -0.1097 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1097 & 0.4760 & -0.3663 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3663 & 0.4265 & -0.0602 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0602 & 0.2356 & -0.1754 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1754 & 0.1753 \end{bmatrix} \text{Ns/m}$$

$$\Delta\mathbf{C} / \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 1.5955 & 0.8809 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8809 & 1.5804 & 0.4853 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4853 & 1.6895 & 0.0681 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0681 & 1.9609 & 3.6320 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.6320 & 4.6588 & 4.3386 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.3386 & 4.3347 \end{bmatrix}$$

En este último caso analizado (figuras 6.9.a y 6.9.b) se observa mayor nivel de daño en las columnas entre el 4º y 5º piso y entre el 5º y 6º, en menor proporción entre el 1º y 2º piso y entre 2º y 3º, confirmando la distribución de rótulas plásticas obtenidas en el modelo numérico. En la figura 6.10 se representa la distribución de rótulas plásticas, se muestra también el valor de ductilidad de desplazamiento de piso.

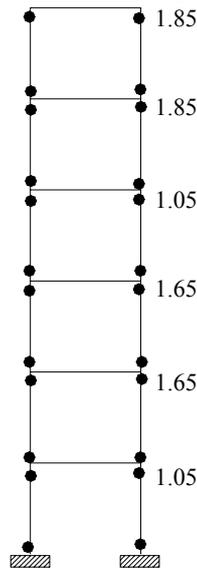


Figura 6.10 Distribución de rótulas plásticas (análisis numérico) y ductilidad de desplazamiento de piso.

6.6 Conclusiones

En este capítulo se propone un nuevo algoritmo para localizar y cuantificar el daño en estructuras con amortiguamiento viscoso arbitrario supliendo la limitación del método denominado Perturbación de rango mínimo (Minimum Rank Perturbation) aplicable a estructuras con amortiguamiento viscoso proporcional.

Cuando se trata de estructuras con amortiguamiento proporcional es posible localizar y cuantificar el daño en términos de la matriz de rigidez mediante las ecuaciones (6.3) y (6.12) con lo cuál se obtiene una estimación precisa de la ubicación y pérdida de rigidez de la estructura.

En el caso de estructuras con amortiguamiento arbitrario, como ocurre en la mayoría de los casos reales, los autovalores y autovectores son complejos, por lo tanto no es posible utilizar el procedimiento descrito en el apartado 6.4.1 sino que la cuantificación y localización del daño puede determinarse a través de método propuesto mediante las ecuaciones (6.18) y (6.21). La ventaja de este método radica en que una vez estimados los parámetros modales (ver Capítulo 4) a partir de la medición periódica de la respuesta de la estructura sometida a excitación ambiental, es posible localizar y cuantificar la presencia de daño estructural. Con el monitoreo periódico de la misma y un criterio de servicio adoptado sería posible estimar su estado actual. Cabe mencionar que la alta precisión obtenida en la cuantificación y localización del daño en

estructuras de laboratorio con amortiguamiento arbitrario, debería ser verificada en estructuras reales.

CAPÍTULO 7

EVOLUCIÓN EN LOS PARÁMETROS MODALES FRENTE AL DAÑO ESTRUCTURAL

7.1 Introducción

En este capítulo se estudia la evolución de los parámetros modales (frecuencias naturales y relación de amortiguamiento) con el daño debido al aumento de la intensidad de la excitación. Con este fin se analiza, numérica y experimentalmente, el modelo B de aluminio descrito en el capítulo 5. Se propone un procedimiento para lograr una visión general del estado de servicio de una estructura a partir de un modelo numérico.

7.2 Análisis experimental

Para el estudio experimental se realizaron ensayos dinámicos similares a los descritos en el capítulo 5. El modelo B fue excitado en la base con aceleraciones simuladas tipo ruido blanco gaussiano con valores de desvío estándar igual a $\sigma_a = 1.8; 2.1; 6.1; 12; 20; 32; 38; 44; \text{ y } 48 \text{ m/s}^2$. El muestreo se realizó según los siguientes parámetros:

Frecuencia de adquisición: 1024 ptos/seg.

Duración de los registros: 16 seg.

Número de puntos: 16384 ptos.

En la figura 7.1 se puede ver una de las muestras para una intensidad de $\sigma_a = 32 \text{ m/s}^2$.

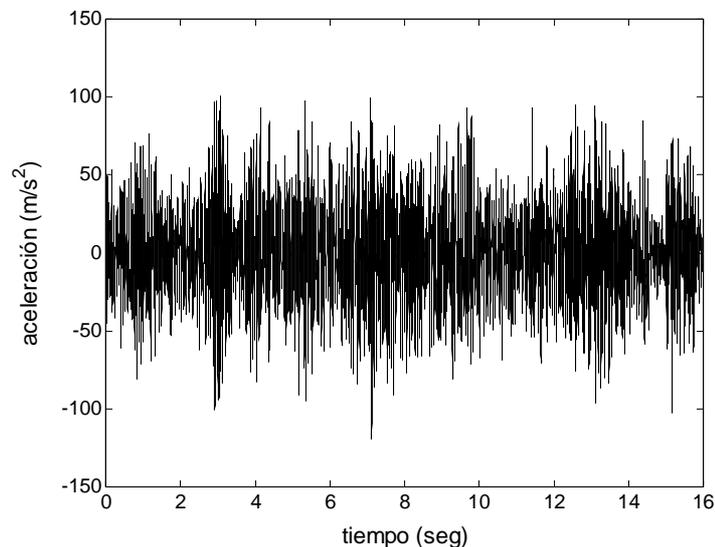
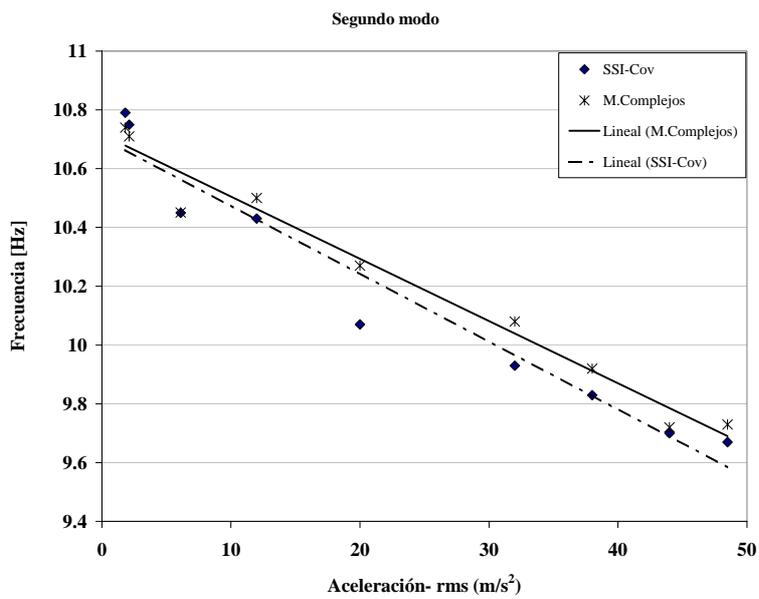
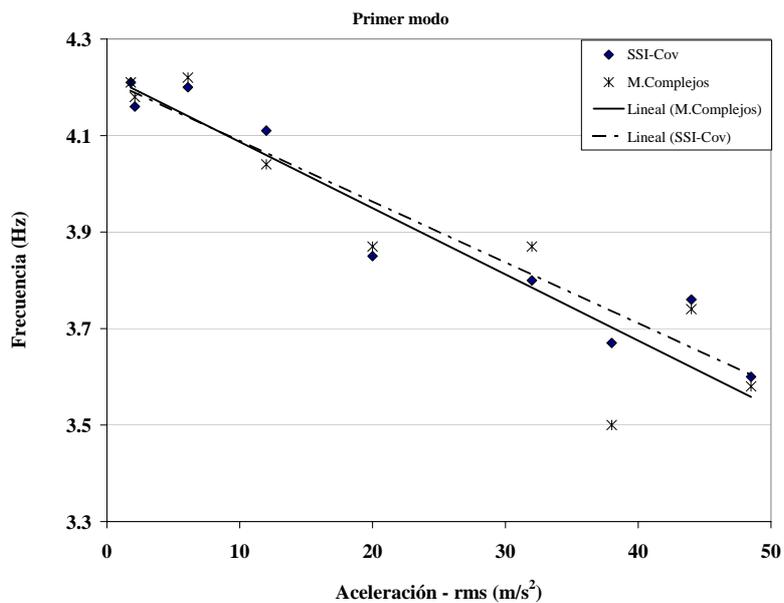


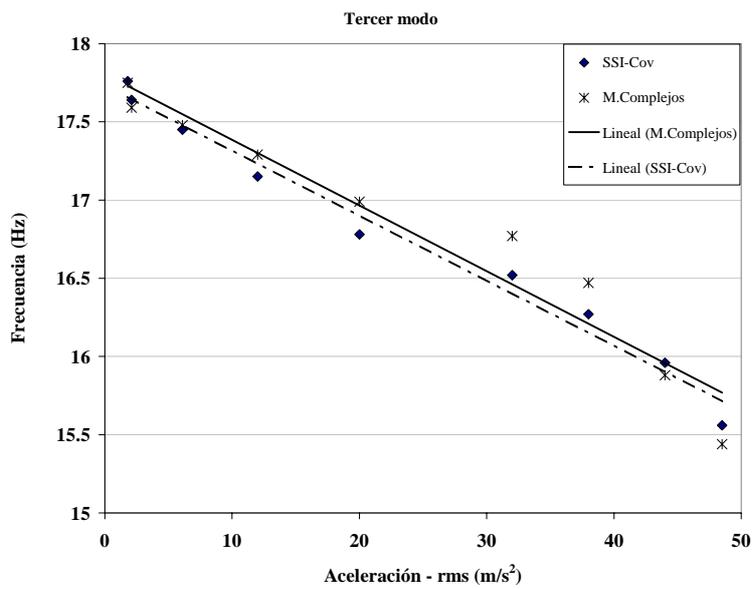
Figura 7.1 Registro de aceleraciones usado en el ensayo ($\sigma_a = 32 \text{ m/s}^2$).

Para la estimación de las frecuencias y relaciones de amortiguamiento se excitó a la estructura con cinco registros por cada nivel de aceleración, a partir de las respuestas en término de aceleraciones de piso medidas se estimaron los parámetros modales a través de los métodos de los modos complejos y SSI-Cov.

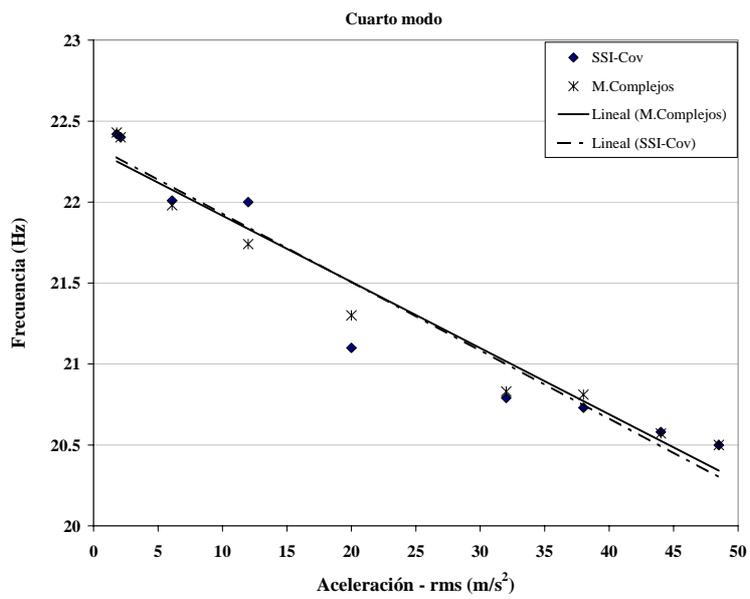
7.2.1 Resultados experimentales

Las frecuencias promedio estimadas por ambos métodos en función del valor cuadrático medio de la aceleración (rms) se muestran en las figuras 7.2 a – f, en estas figuras también están representadas las líneas de tendencias.

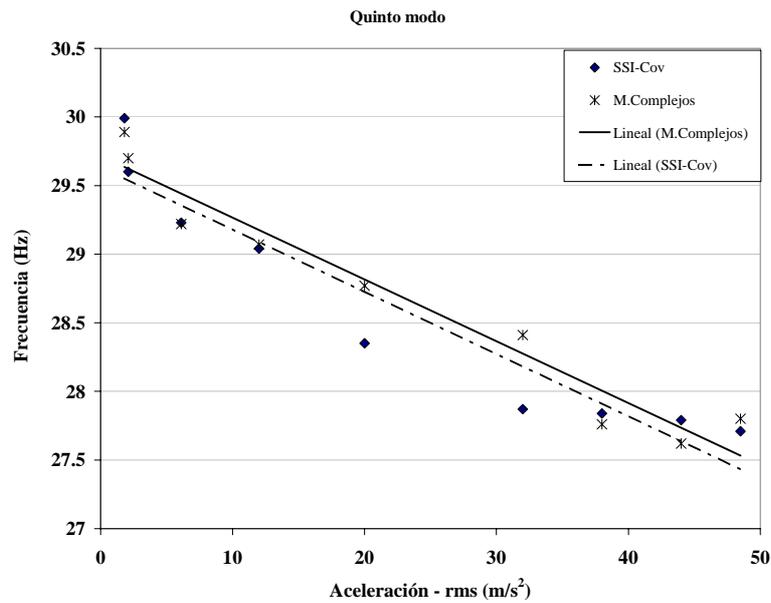




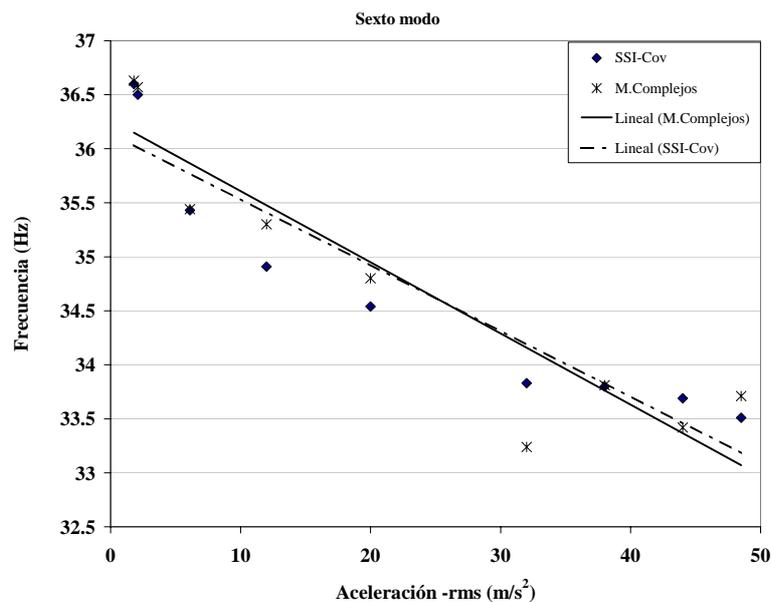
c)



d)



e)



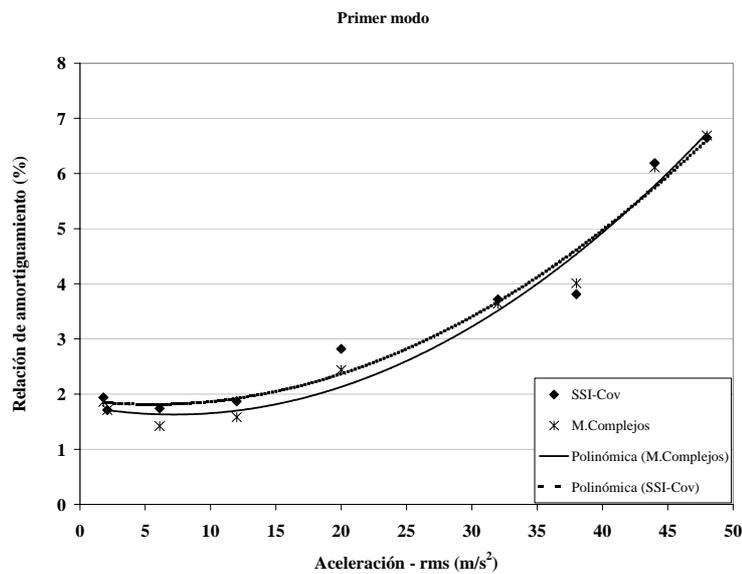
f)

Figura 7.2 Evolución de la frecuencia con el incremento de la aceleración para a) 1^{er} modo, b) 2^{do} modo, c) 3^{er} modo, d) 4^{to} modo, e) 5^{to} modo, f) 6^{to} modo.

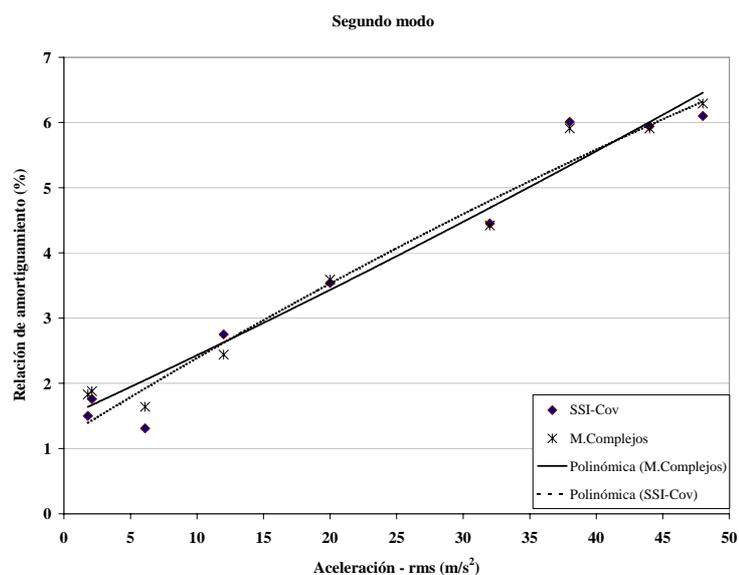
Se puede observar que en todos los casos se produce disminución de la frecuencia con el incremento de la amplitud de la excitación (incremento de daño) y que esta variación es aproximadamente lineal, en los gráficos, esto se ve representado por las líneas de tendencias. La máxima disminución de frecuencia entre estructura sana ($\sigma_a = 1.8 \text{ m/s}^2$) y el último nivel de

aceleración ($\sigma_a = 48.5 \text{ m/s}^2$) se produjo para el primer modo, del orden de 15%, mientras que en el resto de los modos fue de aproximadamente del 10%. En el capítulo 5 se vio que los errores en la estimación de la frecuencia fueron inferiores al 1%, lo que permite afirmar que el cambio en las frecuencias se puede usar como indicador de daño, sin embargo, su sensibilidad es baja.

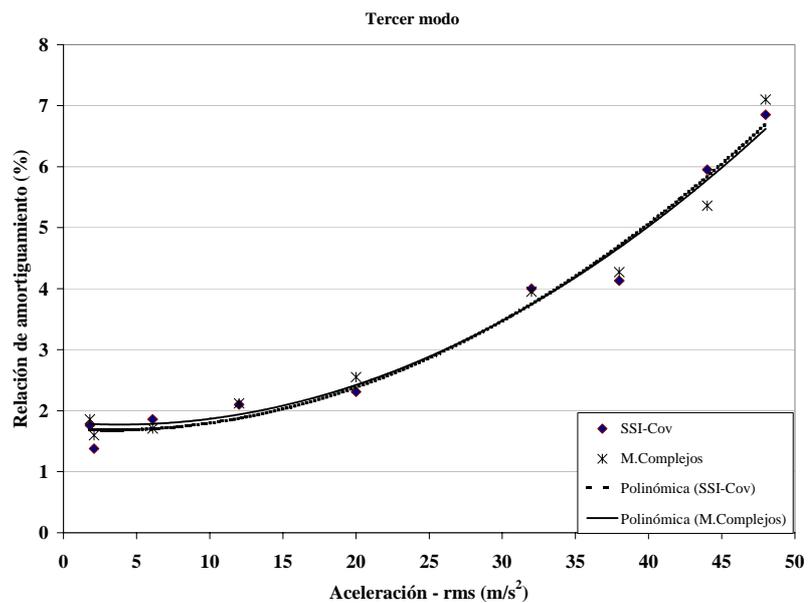
Las figuras 7.3 a – f muestran la evolución del amortiguamiento promedio en función del incremento de los niveles de la aceleración en la base (representado por su valor cuadrático medio –rms).



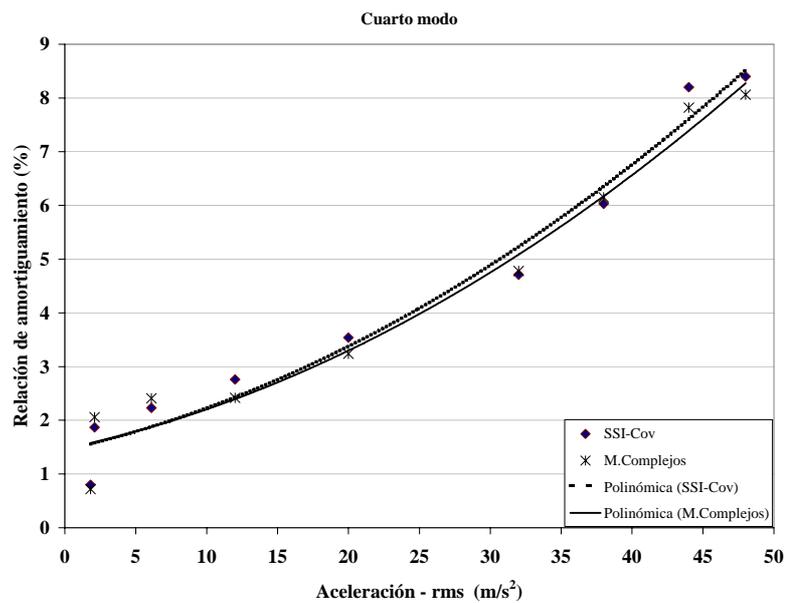
a)



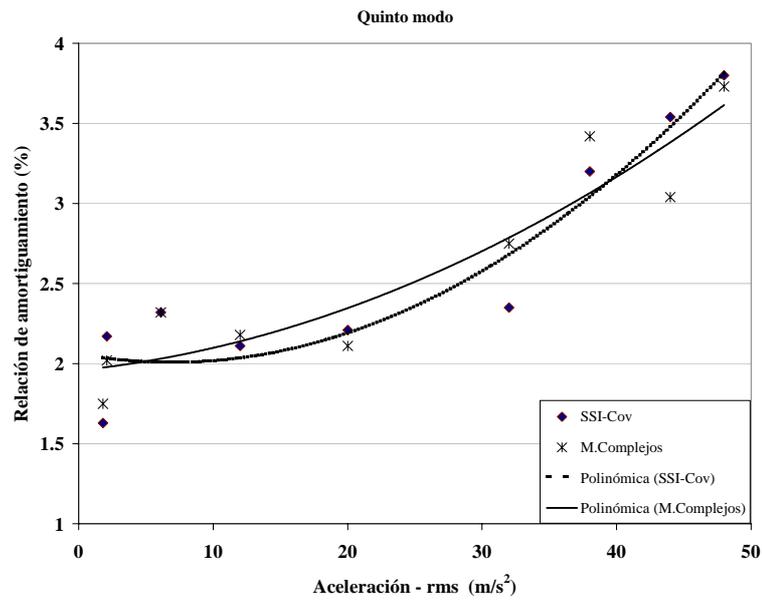
b)



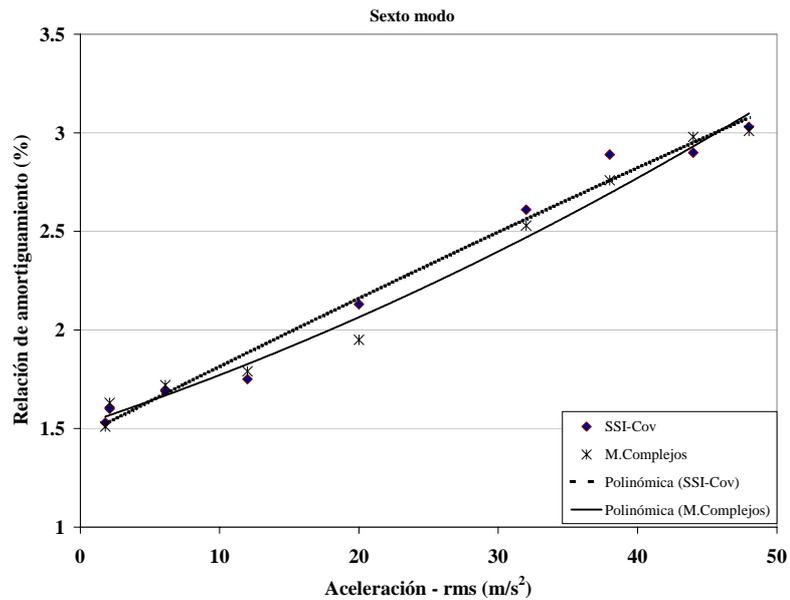
c)



d)



e)



f)

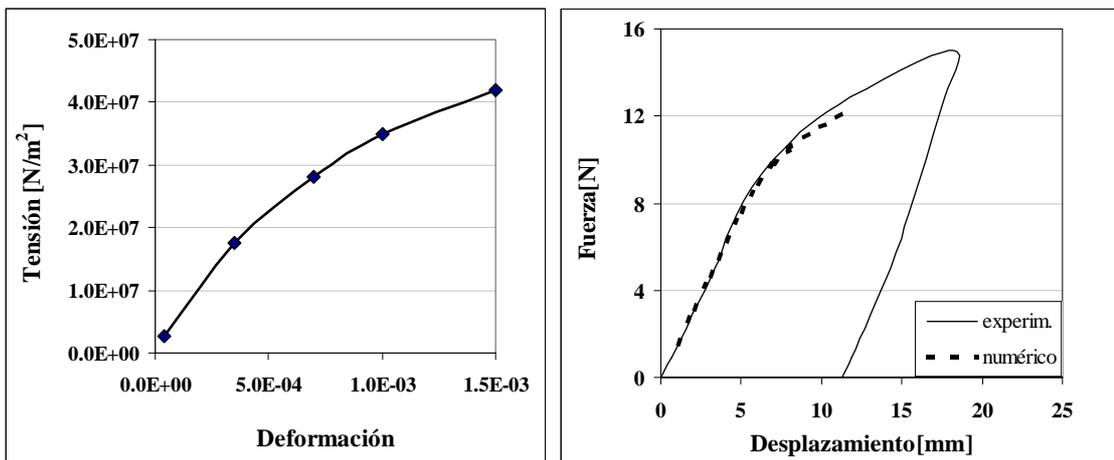
Figura 7.3 Evolución de la relación de amortiguamiento con el incremento de la aceleración para a) 1^{er} modo, b) 2^{do} modo, c) 3^{er} modo, d) 4^{to} modo, e) 5^{to} modo, f) 6^{to} modo.

En el caso en consideración puede observarse, que entre el primer y el último nivel de aceleración el amortiguamiento aumenta con el daño en forma aproximadamente parabólica (representado por las líneas de tendencia en los gráficos), entre 2 a 4 veces su valor inicial. Se

podría decir que el amortiguamiento es un indicador de daño más sensible que la frecuencia, sin embargo su estimación es poco precisa.

7.3 Análisis numérico

El análisis numérico se realizó un modelo en elementos finitos, con el programa ANSYS 5.4 (1997) adoptando un elemento de viga elasto-plástico con tres grados de libertad por nodo. Como primer paso se simuló numéricamente el ensayo estático descrito en el capítulo 5, sección 5.2 y se obtuvo la relación fuerza-desplazamiento. Para poder aproximar la curva fuerza-desplazamiento obtenida numéricamente con la experimental se adoptó una relación constitutiva tensión-deformación como la mostrada en la figura 7.4.a. En la figura 7.4.b se muestran las relaciones fuerza-desplazamiento horizontal del punto de aplicación de la carga, obtenidas numérica y experimentalmente a través del ensayo estático.



a) Relación constitutiva del material
(numérica)

b) Relación fuerza-desplazamiento
(experimental y numérica)

Figura 7.4 Relación constitutiva del aluminio usada en la simulación numérica y curvas fuerza-desplazamiento obtenidas por simulación numérica y ensayo experimental.

Debido al costo computacional se simuló el comportamiento del modelo sólo con cinco niveles de aceleración en la base $\sigma_a = 1.8; 6.1; 32; 44; \text{ y } 48 \text{ m/s}^2$.

Los registros de aceleraciones usados para excitar el modelo numérico se obtuvieron interpolando los registros obtenidos experimentalmente de modo tal que la duración del registro se mantuviera igual que en el ensayo experimental sin perjudicar los parámetros de muestreo, es decir,

Frecuencia de adquisición: 256 pto/s/seg.

Duración de los registros: 16 seg.

Número de puntos: 4094 pto/s.

En la figura 7.5 se muestra uno de los registros usados en el análisis numérico correspondiente a un desvío estándar $\sigma_a = 32 \text{ m/s}^2$.

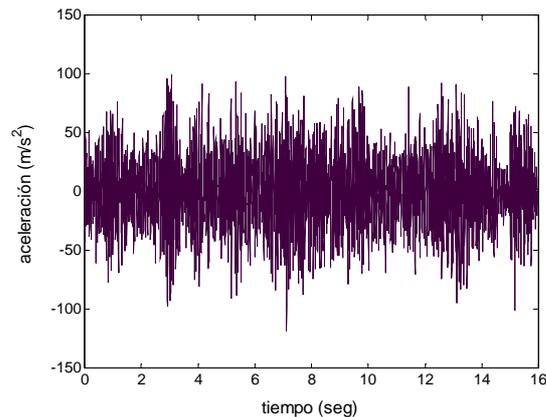
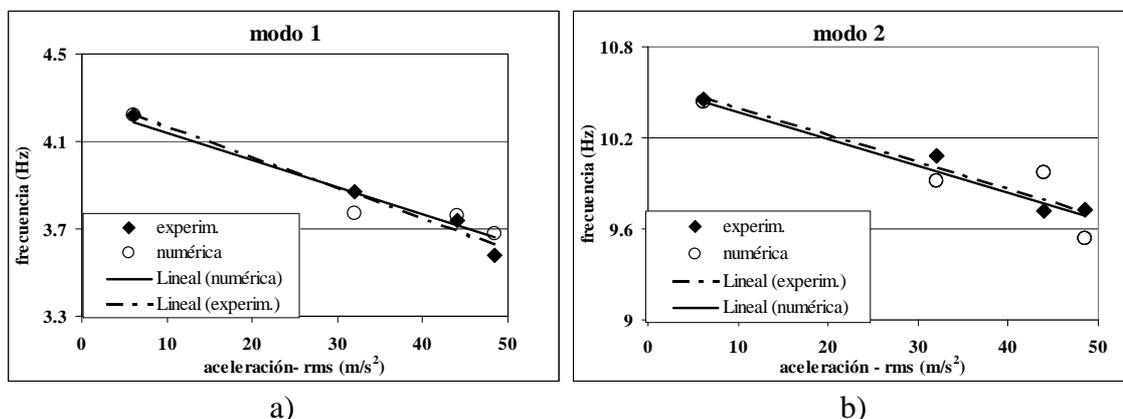


Figura 7.5 Registro de aceleraciones usado en el análisis numérico $\sigma_a = 32 \text{ m/s}^2$.

Los parámetros modales se estimaron mediante el método SSI-Cov y se comparan con los determinados a través de las mediciones experimentales en el apartado siguiente.

7.4 Comparación de los resultados numérico - experimentales

En este ítem se evalúa la precisión de la simulación numérica comparando los resultados numéricos con los obtenidos experimentalmente. Las figuras 7.6 a – f y 7.7 a - f muestran la evolución de la frecuencia y del amortiguamiento con el incremento del nivel de aceleración, respectivamente.



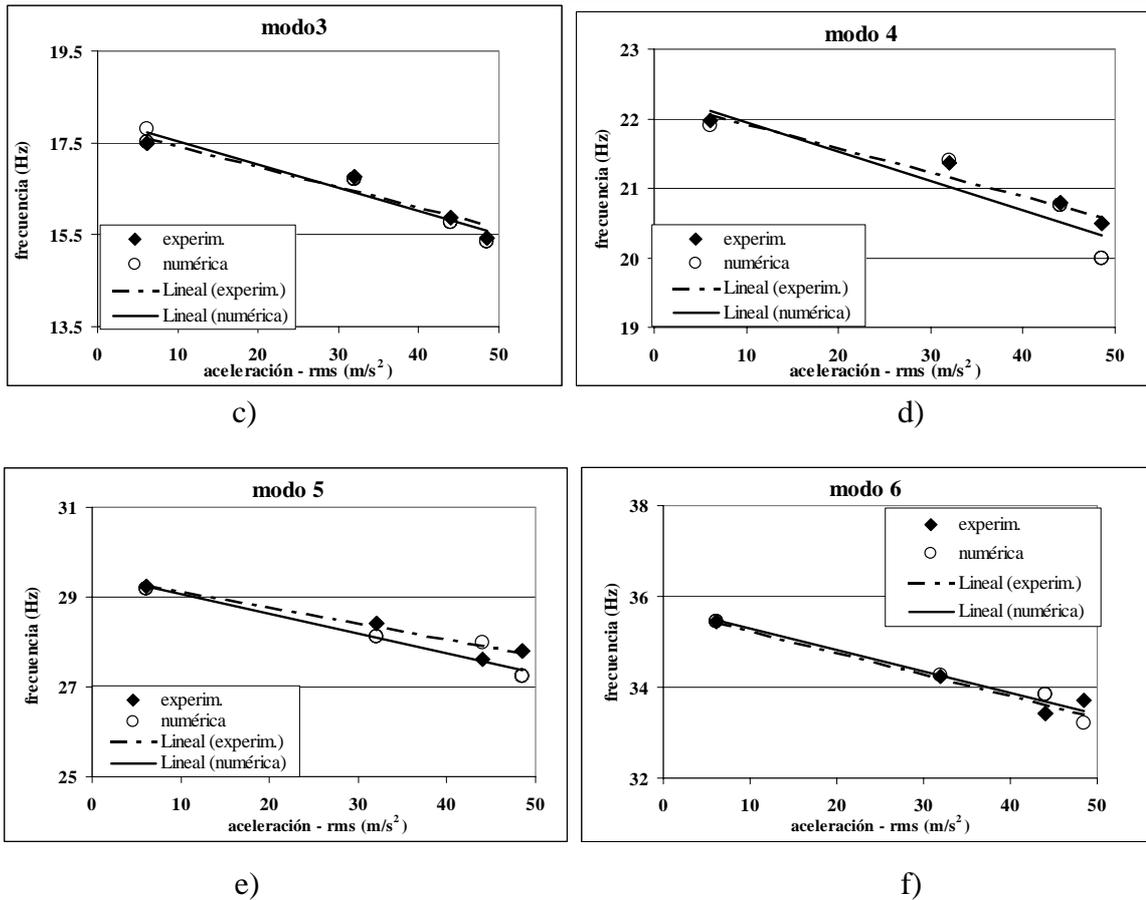
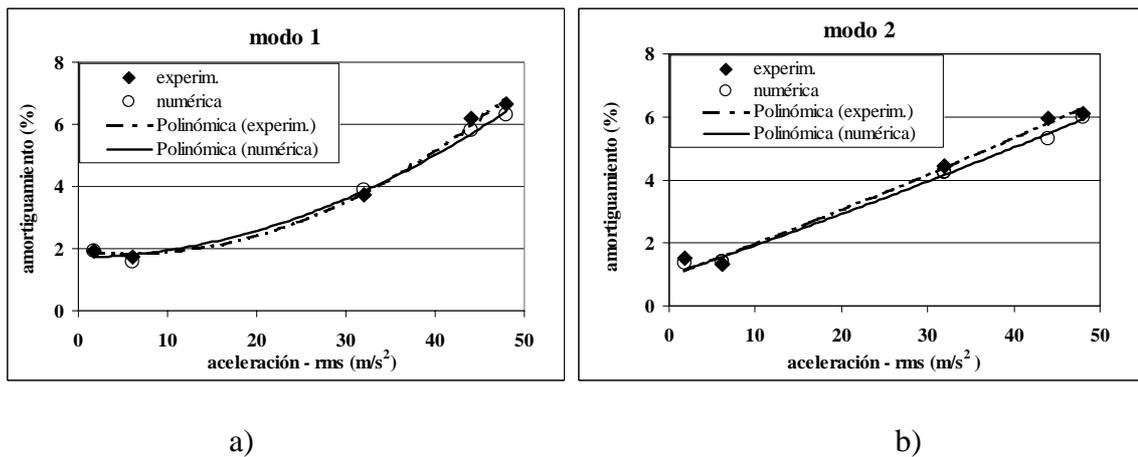
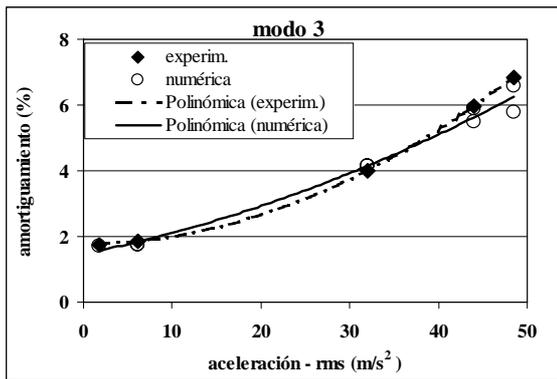
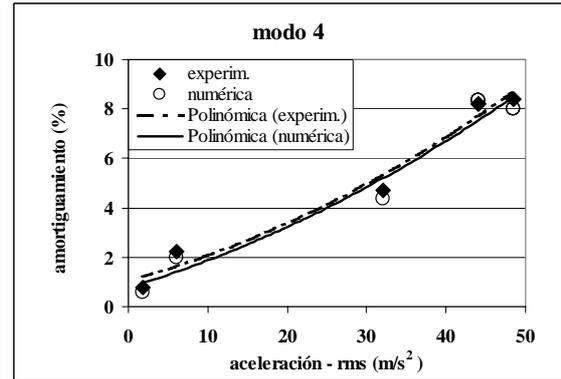


Figura 7.7. Evolución numérico-experimental de la frecuencia para a) 1^{er} modo, b) 2^{do} modo, c) 3^{er} modo, d) 4^{to} modo, e) 5^{to} modo, f) 6^{to} modo.

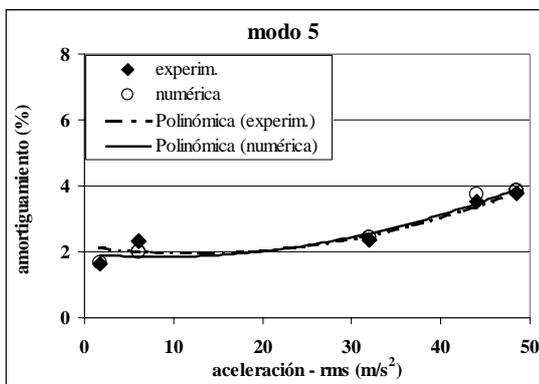




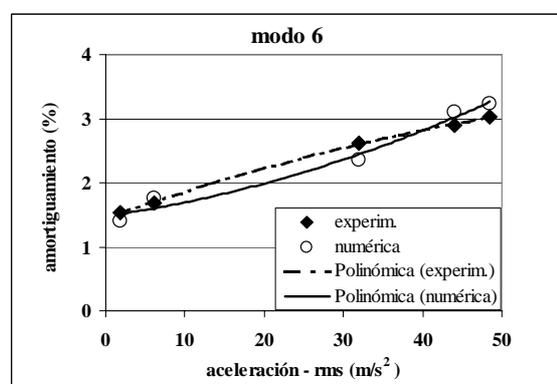
c)



d)



e)



f)

Figura 7.8. Evolución numérico-experimental del amortiguamiento para a) 1^{er} modo, b) 2^{do} modo, c) 3^{er} modo, d) 4^{to} modo, e) 5^{to} modo, f) 6^{to} modo.

En general, se puede observar una buena correlación entre los parámetros modales medios obtenidos numérica y experimentalmente. En la tabla 7.1 se muestran los valores medios, desvío estándar y coeficiente de variación de frecuencias y amortiguamientos para una excitación con desvío estándar $\sigma_a = 6.1 \text{ m/s}^2$.

M o d o	Experimental						Numérico					
	Frecuencia [Hz]			Amortiguamiento [%]			Frecuencia [Hz]			Amortiguamiento [%]		
	μ	σ	CV [%]	μ	σ	CV [%]	μ	σ	CV [%]	μ	σ	CV [%]
1	4.22	0.01	0.24	1.74	0.38	22	4.22	0.01	0.24	1.56	0.23	14.7
2	10.45	0.03	0.3	1.31	0.51	38	10.44	0.01	0.096	1.4	0.3	21.4
3	17.48	0.09	0.5	1.86	0.07	4	17.51	0	0	1.76	0.1	5.68
4	21.98	0.02	0.09	2.23	0.36	16	21.91	0.02	0.09	2	0.07	3.5
5	29.24	0.02	0.07	2.32	0.81	35	29.2	0.015	0.05	2	0.65	32.5
6	35.44	0.04	0.11	1.69	0.1	6	35.45	0.022	0.06	1.75	0.18	10.3

Tabla 7.1. Valores medios y dispersión de frecuencias y amortiguamientos para $\sigma_a = 6.1 \text{ m/s}^2$.

A partir de la excelente correlación entre frecuencias y amortiguamientos teóricos y experimentales se propone el siguiente procedimiento para analizar el estado de servicio estructural.

- Determinar, a partir de un modelo numérico ajustado mediante datos obtenidos experimentalmente, la evolución de los parámetros modales con el aumento de los niveles de excitación hasta alcanzar la falla de la estructura.
- En este marco asociar niveles de reducción de frecuencias y aumento (en general) de amortiguamiento a diferentes grados de daño (sin daño, daño medio, etc. hasta daño total) los cuáles servirán de referencia en el proceso de análisis una vez definido un criterio de servicio.

7.5 Conclusiones

A partir de la excelente correlación de la evolución de las frecuencias y amortiguamientos obtenida en el análisis numérico-experimental presentado se puede decir que: una forma viable de lograr una visión general del estado de servicio de una estructura durante su vida útil, sería a partir de un modelo numérico preciso (ajustado con parámetros experimentales) mediante el cuál se pueda relacionar niveles de excitación con daño estructural.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES FINALES E INVESTIGACIONES FUTURAS

8.1 Introducción

En esta tesis se analizó el problema de identificación de sistemas estructurales usando modelos bajo acciones estocásticas y la evaluación del daño estructural en ingeniería civil.

Los aportes más importantes de esta tesis se pueden resumir en:

- i) Propuesta de un método para la estimación de los parámetros modales de estructuras con amortiguamiento viscoso arbitrario a partir del conocimiento exclusivo de la respuesta estructural.
- ii) Propuesta de un método para obtener las matrices de rigidez y amortiguamiento del sistema a partir del conocimiento de los parámetros modales para el caso de estructuras con amortiguamiento viscoso arbitrario.
- iii) Propuesta de un método para localizar y cuantificar el daño en estructuras con amortiguamiento viscoso arbitrario a partir de mediciones periódicas de la respuesta estructural.

8.2 Identificación de sistemas estructurales

Se abordó el problema de identificación de sistemas estructurales a través de dos métodos. Uno de los métodos, propuesto en este trabajo, es el Método de los Modos Complejos mediante el cual es posible estimar los parámetros modales de una estructura con amortiguamiento viscoso arbitrario haciendo uso de las funciones de densidad espectral de potencia de la respuesta modal. Valiéndose de la propiedad de ortogonalidad entre modos se alcanza un nivel de filtrado de la respuesta que permite detectar las frecuencias naturales y amortiguamientos inclusive para modos más altos débilmente excitados (caso de excitación sísmica). El segundo método denominado Método de Subespacios basado en las Covarianzas (SSI-Cov) [Peeters B., 2000], fue implementado en código matlab y se basa en la construcción de matrices de covarianza a partir de registros de la respuesta medida permitiendo identificar en forma compacta frecuencias naturales, amortiguamientos y formas modales.

La primera evaluación del desempeño del método propuesto se llevó a cabo a través de un ejemplo numérico, luego como segundo paso se construyó y ensayó un pórtico de aluminio en escala reducida en mesa vibratoria (ensayo realizado para esta tesis en la Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Brasil) y se identificó también una viga de hormigón armado con datos experimentales cedidos por [Palazzo, 2001]. Por medio de estos ejemplos se comprobó que, en lo que respecta a:

i) Frecuencias:

- El error relativo en la estimación de las frecuencias fue en todos los casos muy bajo.
- En el ejemplo numérico (capítulo 4) el error en la identificación de las frecuencias naturales crece con el orden del modelo, esto podría deberse a que el tipo de excitación usada (sísmica) sólo excita los modos más bajos. Pero de cualquier manera el error siempre fue inferior al 1%.
- Los resultados obtenidos a partir de los ensayos de laboratorio muestran que las diferencias, en la estimación de las frecuencias, entre el método propuesto (Modos complejos) y el método SSI-Cov [Peeters et. al, 1999], [Peeters, 2000] son muy bajas, por lo tanto se podría decir que ambos métodos son equivalentes.

ii) Amortiguamiento:

- El error relativo en la estimación del amortiguamiento, en el ejemplo numérico del capítulo 4 fue bajo, no superando el 3% incluso en los modos más altos.
- En las estructuras ensayadas en laboratorio la imprecisión en la determinación del amortiguamiento es mayor, notándose un aumento en el caso de excitación tipo ruido blanco.

De la comparación entre los métodos de los Modos Complejos (propuesto en esta tesis) y SSI-Cov [Peeters et. al, 1999], [Peeters, 2000] se puede concluir que:

- Con ambos métodos es posible obtener una alta precisión en la estimación de las frecuencias naturales para fines de ingeniería. La ventaja en la aplicación del método propuesto es que es un método fácil, incluso en el postprocesamiento; mientras que en el método SSI-Cov en algunos casos la eliminación de los modos espurios se torna engorrosa requiriendo un tiempo mayor en la estimación de los parámetros modales.
- El aumento en el error en la estimación del amortiguamiento se manifiesta tanto en el método propuesto como en el método SSI-Cov.
- El método SSI-Cov permite obtener, juntamente con las frecuencias y amortiguamientos, las formas modales. Mientras que en el método propuesto las formas modales se suponen conocidas. Esta aparente desventaja no es tal si se considera que las formas modales pueden obtenerse en forma experimental o a través de un modelo numérico.
- El método propuesto de los modos complejos presentaría problemas en la estimación de modos cercanos debido a que en el proceso de filtrados estos modos podrían confundirse con un único modo. En el caso del método SSI-Cov esto no fue comprobado debido a que los ejemplos analizados no presentaron esta característica.

Finalmente, se propuso un procedimiento para obtener las matrices de rigidez y amortiguamiento de sistemas con amortiguamiento viscoso arbitrario a partir del conocimiento de los parámetros modales de la estructura (solución del problema inverso). En el capítulo 6 se muestran los buenos resultados obtenidos en la estimación de las matrices del sistema para los casos analizados.

8.3 Evaluación del daño estructural

Se abordó el problema de daño estructural a través del estudio de la evolución de los parámetros estructurales. Para esto, se propuso un método que localiza y cuantifica el daño estructural en sistemas con amortiguamiento viscoso arbitrario, basado en la ecuación de autovalores del sistema dañado. Para el caso de estructuras con amortiguamiento viscoso proporcional se implementó el método denominado Perturbación de Rango Mínimo [Zimmerman et al., 1994].

La aplicabilidad del método propuesto y del implementado en esta tesis se mostró a través de ejemplos numéricos y de laboratorio. Dentro de los ejemplos de laboratorio, el ensayo del pórtico de aluminio en mesa vibratoria, forma parte del trabajo de investigación desarrollado en esta tesis, mientras que los resultados del ensayo de la viga de hormigón armado fueron gentileza de [Palazzo, 2001].

De los ejemplos estudiados se puede concluir que:

- El método propuesto permite localizar y cuantificar en forma precisa el daño estructural a través del análisis de la variación en la matriz de rigidez.
- La localización y cuantificación del daño estructural a través de la variación en la matriz de amortiguamiento parece ser mayor que la variación en la matriz de rigidez, mostrando que el amortiguamiento sería un indicador más sensible del daño. Sin embargo, no se recomienda que ésta sea usada como único indicador de daño debido a la gran dispersión en la estimación del amortiguamiento.
- Con el método propuesto es posible determinar la variación de la rigidez y del amortiguamiento a lo largo de la vida útil de la estructura a partir de mediciones periódicas de la respuesta estructural generada por excitaciones ambientales.

Con el propósito de definir un mapa de la evolución del daño estructural con el aumento de la intensidad de la excitación se analizó el cambio en las frecuencias naturales y amortiguamientos en un modelo experimental (pórtico de aluminio, capítulo 7). A partir de la simulación numérica de dicho comportamiento fue posible cuantificar el daño y definir una relación con la evolución de frecuencias naturales. Este estudio posibilitó proponer un procedimiento que permita monitorear, durante su vida útil, el estado actual de estructuras en servicio. Es importante destacar que en el momento de definir la relación entre evolución de la

frecuencia natural con el daño, puede usarse el método de cuantificación y localización de daño propuesto en el capítulo 6.

8.4 Investigaciones futuras

Se plantean las siguientes propuestas como investigaciones futuras.

- Aplicar los métodos propuestos tanto de identificación de sistemas como de identificación de daño en estructuras reales.
- Estudiar la evolución de los parámetros modales con el aumento del daño en diferentes estructuras y materiales para poder establecer relaciones consistentes entre variación de la frecuencia y amortiguamiento con el daño estructural.
- Debido a que el número de grados de libertad de la estructura es generalmente mayor que los medidos se hace necesario profundizar en técnicas de condensación de grados de libertad de modo de representar lo mejor posible el sistema analizado.
- Definir criterios de servicio para diferentes tipos de estructuras para poder aplicarlos a un sistema de monitoreo continuo.

APÉNDICE A

ORTOGONALIDAD DE MODOS COMPLEJOS

A.1 Propiedades de Ortogonalidad

Se sabe que cada componente de cualquier autovector de un sistema no amortiguado o con amortiguamiento proporcional se distingue de otra componente por su amplitud únicamente ya que sus ángulos de fase son iguales o se diferencian en 180° . Por lo tanto en un sistema de n grados de libertad, es necesario un conjunto de n ecuaciones para obtener las n amplitudes para un modo dado. Para un sistema con amortiguamiento no proporcional, cada componente de un autovector se distingue no sólo por su amplitud sino también por el ángulo de fase, por eso se necesita un conjunto de $2n$ ecuaciones para determinar las n componentes en cada modo.

A.1.1 Prueba de ortogonalidad con respecto a las matrices **A** y **B**

En el capítulo 3 se vió que los autovectores del sistema representado por la ec. (3.2) tienen la forma:

$$\vec{\Psi}_j = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_j \\ \lambda_j \vec{\Phi}_j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (\text{A.1})$$

y que se cumplen las siguientes propiedades de ortogonalidad:

$$\Psi^T \mathbf{A} \Psi = \mathbf{M}_d, \quad \Psi^T \mathbf{B} \Psi = -\lambda \mathbf{M}_d, \quad \text{con } \lambda = \text{diag}\{\lambda_j\} \text{ y } \mathbf{M}_d = \text{diag}\{m_j\} \quad (\text{A.2})$$

Consideremos dos modos diferentes s y r , que satisfacen la ec. (3.7). Si a la ecuación para el r -ésimo modo la premultiplicamos por $\vec{\Psi}_s^T$ se tiene:

$$\lambda_r \vec{\Psi}_s^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_r = -\vec{\Psi}_s^T \mathbf{B} \vec{\Psi}_r \quad (\text{A.3})$$

Como **A** y **B** son matrices simétricas, si se transpone la ec.(A.3) se tiene:

$$\lambda_r \vec{\Psi}_r^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_s = -\vec{\Psi}_r^T \mathbf{B} \vec{\Psi}_s \quad (\text{A.4})$$

Si ahora, a la ecuación para el modo s la premultiplicamos por $\vec{\Psi}_r^T$ se tiene:

$$\lambda_s \vec{\Psi}_r^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_s = -\vec{\Psi}_r^T \mathbf{B} \vec{\Psi}_s \quad (\text{A.5})$$

Si a la ec.(A.4) se le resta la ec.(A.5) se tiene:

$$(\lambda_r - \lambda_s) \bar{\psi}_r^T \mathbf{A} \bar{\psi}_s = 0 \quad (\text{A.6})$$

si λ_r y λ_s son diferentes entonces la siguiente propiedad de ortogonalidad relaciona a los dos autovectores:

$$\bar{\psi}_r^T \mathbf{A} \bar{\psi}_s = 0 \quad (\text{A.7})$$

de igual modo se verifica que:

$$\bar{\psi}_r^T \mathbf{B} \bar{\psi}_s = 0 \quad (\text{A.8})$$

Para el caso modos subamortiguados estas propiedades se verifican también para el caso de dos autovectores complejos conjugados ya que se cumple que λ_r es diferente de λ_r^* , a saber:

$$\lambda_r = \alpha_r - i\beta_r \quad \text{y} \quad \lambda_r^* = \alpha_r + i\beta_r \quad (\text{A.9})$$

entonces

$$\lambda_r - \lambda_r^* = (\alpha_r - i\beta_r) - (\alpha_r + i\beta_r) = -2i\beta_r \neq 0 \quad (\text{A.10})$$

A.1.2 Prueba de ortogonalidad con respecto a la matriz de masa M

La ec.(A.3) se puede escribir como sigue:

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi} & \bar{\bar{\phi}} \\ \lambda \bar{\phi} & \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi} & \bar{\bar{\phi}} \\ \lambda \bar{\phi} & \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}^T \mathbf{K} \bar{\phi} - \lambda \bar{\phi}^T \mathbf{M} \lambda \bar{\phi} & \bar{\phi}^T \mathbf{K} \bar{\bar{\phi}} - \lambda \bar{\phi}^T \mathbf{M} \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}} \\ \bar{\bar{\phi}}^T \mathbf{K} \bar{\phi} - \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}}^T \mathbf{M} \lambda \bar{\phi} & \bar{\bar{\phi}}^T \mathbf{K} \bar{\bar{\phi}} - \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}}^T \mathbf{M} \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}} \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{M}_d \quad (\text{A.11})$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^T \mathbf{K} \bar{\phi} - \lambda \bar{\phi}^T \mathbf{M} \lambda \bar{\phi} &= [diag] \\ \bar{\bar{\phi}}^T \mathbf{K} \bar{\bar{\phi}} - \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}}^T \mathbf{M} \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}} &= [diag] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda \bar{\phi}^T \mathbf{M} \lambda \bar{\phi} &= [diag] \\ \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}}^T \mathbf{M} \bar{\lambda} \bar{\bar{\phi}} &= [diag] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

APÉNDICE B

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

B.1 Estimación de la densidad espectral de potencia

Si $\{x(t)\}$ es un proceso aleatorio estacionario, se define a la densidad espectral de potencia, a través del teorema de Wiener-Khintchine, como:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{B.1})$$

en la cual R_{xx} es la función de autocorrelación del proceso $\{x(t)\}$ representado por el registro $x(t)$ ya que se trata de un proceso estacionario, y f es la frecuencia en [Hz].

Otra forma alternativa como:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[|X_k(f, T)|^2 \right] \quad \text{cuando } T \rightarrow \text{infinito} \quad (\text{B.2})$$

en la cual f es la frecuencia en [Hz]

T es el tiempo total del registro

$E[.]$ significa valor esperado

$K = 1, 2, 3, \dots, n$ es el número de registros del proceso aleatorio

$X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) e^{-j2\pi ft} dt$ es la transformada finita de Fourier de $x_k(t)$.

Para valores de frecuencia discreta $f_i = i/T \quad i = 1, 2, 3, \dots, N/2$ la densidad espectral de potencia se calcula como:

$$S_i(f_i) = \frac{1}{Ndt} |X(f_i, T)|^2 \quad (\text{B.3})$$

con

$$X(f_i, T) = dt \sum_{n=1}^N x_n \exp \left[-j \frac{2\pi i n}{N} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N/2 \quad (\text{B.4})$$

en las cuales N es el número de puntos del registro

dt es el intervalo de tiempo entre dos puntos consecutivos del registro.

En esta tesis se determinó la densidad espectral de potencia a través de una subrutina en Matlab [Matlab v. 5.3, 1999] donde se calculó la transformada discreta de Fourier de la función de autocorrelación de las respuestas medidas según la ecuación (B.4)

Cuando el número de registros del proceso aleatorio es limitado se determina un estimador de la densidad espectral de potencia, es decir el valor esperado (promedio de n registros) de la densidad espectral de potencia.

B.2 Función de transferencia de un oscilador lineal de un grado de libertad

Cuando un proceso aleatorio $x(t)$ pasa a través de un sistema lineal independiente del tiempo cuya respuesta impulso es $h(t)$, la densidad espectral de potencia de la respuesta $y(t)$ será:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (\text{B.5})$$

en la cual $H(\omega)$ es la transformada de Fourier de $h(t)$ denominada función de transferencia o función de respuesta en frecuencia (FRF) del sistema lineal.

Para un oscilador lineal de un grado de libertad esta función $H(\omega)$ tiene la forma:

$$H(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + i c \omega} \quad (\text{B.6})$$

en la cual k es la rigidez del oscilador

c es el coeficiente de amortiguamiento

m es la masa del oscilador

El módulo de la función de transferencia se calcula como:

$$|H(\omega)|^2 = \left(\frac{1}{((k - \omega^2 m) + i c \omega)^2} \right)^{0.5} \quad (\text{B.7})$$

de otra forma se puede expresar como:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1/m}{\left((\omega_n^4 - 2\omega_n^2 \omega^2 + \omega^4 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2) \right)^{0.5}} \quad (\text{B.8})$$

en la cual ω_n es la frecuencia natural del modo n

$\xi = c / (2 \omega_n m)$ es la relación de amortiguamiento.

Cuando en el capítulo 4 se habla del ajuste de curvas a través de la función de respuesta en frecuencia se refiere a lo siguiente:

Por medio de una subrutina en Matlab [Matlab v. 5.3, 1999] se ajusta por mínimos cuadrados la expresión dada por la ecuación (B.8) a la curva del estimador de la densidad espectral de potencia de la respuesta modal. La subrutina es un proceso iterativo a partir de un par de valores dados de (ω_n, ξ) , se itera hasta encontrar la FRF, que por mínimos cuadrados, ajusta mejor a la curva observada. En lenguaje Matlab se expresa como:

$$X = \text{LSQCURVEFIT}(\text{FUN}, X0, XDATA, YDATA)$$

para la cual:

$$\text{FUN} = \text{FRF}$$

$$X0 = \text{par}(\omega_n, \xi) \text{ para comenzar la iteración}$$

$XDATA$ = vector de frecuencias obtenidas del cálculo de la densidad espectral de potencia (dato)

$$YDATA = \text{densidad espectral de potencia (dato)}.$$

Se comienza la iteración con $X0$ para encontrar los valores de X que mejor ajustan la función no lineal dada por FUN a los datos dados en $(XDATA, YDATA)$.

Referencias Bibliográficas

Abe, M., Fujino, Y., Kajimura, T., Yanagihara, M. y Sato, M., 1999. *"Monitoring of a Long Span Suspension Bridge by Ambient Vibration Measurement"*. Structural Health Monitoring 2000, pp. 400-407.

Adams R. D., Cawley P., Pye C. J. y Stone B. J., 1978. *"A Vibration Technique for non-destructively Assessing the Integrity of Structures"*. Journal of Mechanical Engineering Science, 20, pp. 93–100.

Akaike, H., 1974. *"Stochastic theory of minimal realization"*. IEEE Transactions on Automatic Control, 19, pp. 667-674.

Allemang R. J. y Brown D. L., 1982. *"A correlation coefficient for modal vector analysis"*. Proceedings of the 1st. Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, USA.

Andersen P., 1997. *"Identification of Civil Engineering Structures using vector ARMA models"*, PhD. Thesis, Aalborg University. Denmark.

Andersen P. y Kikergaard P. H., 1998. *"Statistical damage detection in civil engineering structures using ARMAV models"*. Aalborg University, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg, Denmark.

ANSYS 5.4, 1997.© SAS IP, Inc.

Antsaklis, P. J. and Michel Anthony N.,1997. *"Linear Systems"*. McGraw-Hill. NY, USA.

Baruch, M., 1978. *"Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests"*. AIAA Journal, 16 (11), pp. 1208–1210.

Basseville, M., Benveniste, A., Gach-Devauchelle, B., Goursat, M, Bonnecase, D., Dorey, P., Prevosto, M. y Olagnon, M., 1993. *"In situ damage monitoring in vibration mechanics: diagnostics and predictive maintenance"*. Mechanical Systems and Signal Processing. 7(5), pp. 401-423.

Berman A. y Nagy E. J., 1993. *"Improvement of Large Analytical Model Using Test Data"*. AIAA Journal, 21 (8) pp. 1168-1173.

Brownjohn, J. M. W., 2003. *"Ambient vibration studies for system identification of tall buildings"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 32, pp. 71-95.

Cawley P. y Adams R.D., 1979. *"The locations of Defects in Structure from Measurements of Natural Frequencies"*. Journal of Strain Analysis, 14 (2), pp. 49-57.

Cole H. A., 1968. *"On the line analysis of random vibrations"*. AIAA Paper No. 68-288.

Chen J. C. y Garba J.A., 1988. *"On-Orbit Damage Assessment for Large Space Structures"*. AIAA Journal, 26 (9), pp. 1119–1126.

Doebbling S., Farrar C., Prime M. y Shevitz D., 1996. *"Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in their Vibration Characteristics. A Literature Review"*. Internal Report. Los Alamos National Laboratory, University of California

Elkordy M., Chang K., y Lee G., 1993. *"Neural Network trained by Analytically Simulated Damage States"*. ASCE journal of Computing in Civil Engineering, 7 (2) pp. 130-145.

Ewins D. J., 1995. *"Modal testing: Theory and Practice"*. John Wiley & Sons inc.

Fawzy, I., 1977. *"A Theorem on the Free Vibration of Damped Systems"*. ASME, Journal of Applied Mechanics. Vol. 44, pp. 132-134.

Gersch, W., 1970. *"Estimation of Autoregressive Parameters of a Mixed Autoregressive Moving-Average Time Series"*. IEEE Transactions on Automatic Control, pp. 583-588.

Gersch, W., Nielsen, N. N. y Akaike, H., 1973. *"Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameters from Random Vibration Data"*. Journal of Sound and Vibration, vol. 31, (3), pp. 295-308.

Gersch, W., 1974. *"On the Achievable Accuracy of Structural System Parameters"*. Journal of Sound and Vibration, vol. 34, (1), pp. 63-79.

Gudmundson P., 1982. *"Eigenfrequency Changes of structures Due to Cracks, Notches, or other geometrical Changes"*. Journal of mechanics and Physics of Solids, 30 (5), pp. 339-353.

Hart, G. C. y Yao, J. T. P., 1977. *"System Identification in Structural Dynamics"*. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASME, vol. 103, EM6, pp. 1089-1104.

Hearn, G. y Testa R.B., 1991. *"Modal Analysis for Damage Detection in Structures"*. Journal of Structural Engineering, 117 (10), pp. 3042–3063.

Hewlett – Packard, 1998. HP VEE Advanced Programming Techniques.

Huseyin, K., 1978. *"Vibration and Stability of Multiple Parameter System"*. Academic Press.

Ibrahim S. R., 1977. "*Random decrement technique for modal identification of structures*". Journal of Spacecraft and Rockets, 14(11), pp. 696-700.

Inman, Daniel J., 1989. "*Vibration with control measurement and stability*". Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs. NJ, USA.

Inman, Daniel J., 1994. "*Engineering Vibration*". Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs. NJ, USA.

Ismail F., Ibrahim A. y Martin H. R., 1990. "*Identification of Fatigue Cracks from Vibration Testing*". Journal of Sound and Vibration, 140, pp. 305-317.

Juang J. N. y Pappa R. S., 1985. "*An eigensystem realisation algorithm for modal parameter identification and model reduction*". AIAA Journal of Guidance, 8 (5) pp. 620-627.

Kim H. M. y Bartkowicz T. J., 1993. "*Damage Detection and Health Monitoring of Large Space Structures*". Journal of Sound and Vibration, 27 (6), pp. 12-17.

Kirkegaard, P. H. y Andersen, P., 1997. "*State space identification of civil engineering structures from output measurements*". Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, USA, pp. 889-895.

Lardies, J., 1998. "*State-space identification of vibrating systems from multi-output measurements*". Mechanical systems and Signal Processing. Vol. 12 (4), pp. 543-558.

Ljung L., 1999. "*System Identification : Theory for the User*". Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.

Matlab v. 5.3, 1999. The language of technical computing. © The MathWorks, Inc.

Narkis Y., 1994. "*Identification of Crack Location in Vibrating Simply Supported Beams*". Journal of Sound and Vibration, 172 (4), pp. 549-558.

Palazzo, G. L., 2001. "*Identificación del Daño Estructural a través del Cambio en las Propiedades Dinámicas*". Tesis de Magister, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Pandey A.K., Biswas M. y Samman M.M., 1991. "*Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes*". Journal of Sound and Vibration, 145 (2), pp. 321-332.

Pandey A.K., y Biswas M., 1994. "*Damage Detection in Structures Using Changes in Flexibility*". Journal of Sound and Vibration, 169 (1), pp. 3-17.

Pandit, S. M. y Jacobson, E. N., 1988. *"Data dependent Systems Approach to Modal Analysis, part 2: Application to Structural Modification of a Disc-Brake Rotor"*. Journal of Sound and Vibration, vol. 122, (3), pp. 423-432.

Peeters B. y De Roeck G., 1999. *"Reference-based stochastic subspace identification for output only modal analysis"*. Mechanical systems and Signal Processing, 13 (6), pp. 855-878.

Peeters B., 2000. *"System Identification and Damage Detection in Civil Engineering"*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

Pi, Y. L. y Mickleborough, N. C., 1989. *"Modal Identification of Vibrating Structures using ARMA Models"*. ASCE, Journal of Engineering Mechanics, vol. 115, (10), pp. 2232-2250.

Prevosto, M., Olagnon, M., Benveniste, A., Basseville, M. y Le Vey, G., 1991. *"State Space formulation: A solution to modal parameter estimation"*. Journal of Sound and Vibration, vol. 148, (2), pp. 329-342.

Rizos, P.F., N. Aspragathos, and A.D. Dimarogonas, 1990, *"Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes"*. Journal of Sound and Vibration, **138**(3), pp. 381–388.

Rugh Wilson J., 1996. *"Linear System Theory"*. Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.

Salawu, O.S. y Williams C., 1995. *"Bridge Assessment Using Forced-Vibration Testing"*. Journal of Structural Engineering, 121 (2), pp. 161–173.

Shih C. Y., Tsuei Y. G., Allemang R. J. y Brown D. L., 1988. *"Complex mode indication function and its application to spatial domain parameter estimation"*. Mechanical System and Signal Processing, 2(4), pp. 367-377.

Tsou P., y Shen M., 1994. *"Structural Damage Detection and Identification Using Neural Networks"*. AIAA Journal, 32 (1), pp. 176-183.

Stubbs N., Broome T.H. y Osegueda R., 1990. *"Non-destructive Construction Error Detection in Large Space Structures"*. AIAA Journal, 28 (1), pp. 146–152.

Van Overschee P. y De Moor B., 1993. *"Subspace algorithm for the stochastic identification problem"*. Automatica, 29(3), pp. 649-660.

Vickery, B. J. y Basu R. I., 1983. *"Across-Wind Vibrations of Structures of Circular Cross-Sections"*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 12, No 1, Part 1.

Vold, H, y Rocklin, T., 1982. *"The Numerical Implementation of a Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Mini Computers"*. Proceeding of the 1st International Modal Analysis Conference. Orlando, Florida, USA, pp. 542-548.

Wu X, Ghaboussi J, y Garrett J., 1992. *"Usu of Neural Networks in Detection of Structural damage"*. Computers and Structures, 42 (4) pp. 649-659.

Yuen M. M. F., 1985. *"A Numerical Study of the Eigenparameters of a Damaged Cantilever"*. Journal of Sound and Vibration, 103, pp. 301-310.

Zimmerman D. C. y Kouk M., 1994. *"Structural Damage Detection Using a Minimum Rank Update Theory"*. Journal of Vibration and Acoustics, 116, pp. 222-230.

Zimmerman D. C. y Simmermacher, 1995. *"Model Correlation Using Multiple Static Load and Vibration Tests"*. AIAA Journal, 33 (11), pp. 2182-2188.