Universidad Nacional de Tucumán



TESIS DOCTORAL

Modelo XFEM de un problema hidro-mecánico acoplado en un medio poroso fracturado

Autor: Ing. Javier B. Lucero Director: Dra. Ing. Mariela Luege

Director Beca CONICET: Dra. Ing. Bibiana Luccioni

Jurado de Tesis: Dr. Ing. Axel Eduardo Larreteguy (UADE) Dr. Ing. Luis Guarracino (UNLP) Dr. Ing. Gustavo Ariel Pérez (UNT)

Tesis presentada para acceder al grado de Doctor en Ingeniería en el

Instituto de Estructuras Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

a Ciro Baltazar Lucero.

Resumen

La modelación del transporte de fluidos en materiales porosos fisurados es objeto de estudio en muchas aplicaciones industriales, tales como, la fractura hidráulica en la ingeniería del petróleo, el análisis de permeabilidad en la estimación de daños, ingeniería ambiental, etc. El aumento del nivel de daño modifica las propiedades hidro-mecánicas del medio, por lo cual resulta de gran interés el estudio de procesos de fisuración y su influencia en el flujo de fluido a través del mismo. El estudio experimental del flujo ofrece información acerca de la permeabilidad efectiva del medio, de los poros conectados y la interconexión entre las fisuras del material. Si el medio tiene discontinuidades discretas, el flujo presenta grandes variaciones resultando anisótropo. La predicción completa del comportamiento de la deformación del material sólido y de la interacción con el flujo, se consigue mediante la solución completa del sistema acoplado poromecánico, cuyas variables de estado son el campo de desplazamiento y el de presión. Teniendo en cuenta estas problemáticas, reviste gran importancia disponer un modelo robusto y estable, capaz de reproducir la interacción entre el flujo de fluidos y la matriz porosa.

En esta tesis se desarrolla un modelo hidromecánico acoplado que permite la simulación de la deformación y el flujo de fluido en un medio poroso saturado discontinuo, considerando la teoría de Biot-Coussy para resolver el acoplamiento del campo de desplazamientos y de presión. La evaluación del flujo dentro de una discontinuidad, la interacción con la matriz porosa y el acoplamiento con el campo mecánico, ha sido modelada teniendo en cuenta la teoría propuesta por Vernerey. En la macroescala, el modelo considera a la matriz porosa como un medio homogéneo en donde es válida la ley de Darcy. Las discontinuidades son tratadas como interfaces, las cuales intercambian el flujo de fluido a través de una componente continua y otra discontinua, que, a su vez, pueden dividirse en una componente normal y otra tangencial. En la microescala, la interfaz se considera como un medio poroso en donde el flujo de fluido es descripto a través de la ley de Darcy-Brinkman. Las ecuaciones gobernantes resultan a partir de considerar el balance de masa en ambos dominios. Las discontinuidades son tratadas con XFEM, en donde la interpolación de la variable de desplazamiento es modelada como una discontinuidad fuerte (campo normal a la fisura discontinuo), mientras que la interpolación de la variable de presión es considerada como una discontinuidad débil (campo continuo en la fisura, pero con gradiente normal discontinuo). La discretización temporal se resuelve mediante el método de Euler hacia atrás y las ecuaciones no lineales discretas resultantes, se resuelven aplicando el método de Newton-Raphson. El modelo completo fue implementado en un programa de elementos finitos propio, y se presentaron resultados numéricos de ensayos de medios fisurados, los cuales son correlacionados con ensayos experimentales y/o con otros modelos numéricos. El modelo propuesto se ajusta adecuadamente a resultados experimentales y a modelos analíticos de problemas mecánicos, hidráulicos e hidromecánicos acoplados, como ser determinación de la propagación de fisura debido a acciones mecánicas e hidráulicas, estudio de la permeabilidad de morteros y hormigones reforzados con fibras (HRF) fisurados, flujos en medios porosos discontinuos, entre otros.

Abstract

The computational modeling of fluid transportation inside fractured porous media is studied for many industrial applications such as a hydraulic fracture in petroleum engineering, the permeability analysis in damage estimation, environmental engineering, etc. The increase of the damage level modifies the hydro-mechanics properties of the media, so the study of the fracture processes and its influence over fluid flow is very interesting. The experimental study of the flow brings information about the effective permeability of the media, the connected pores and the interconnection between the cracks of the material. If the media presents discrete discontinuities, the flow presents great variations and it is anisotropic. The full prediction of the behavior of the solid material deformation and its interaction with the fluid flow is obtained through the full solution of the coupled system. Taking this into consideration, it is very important to have a robust and stable model for reproducing the interaction between the fluid flow and the porous matrix.

In this thesis, the fluid flow inside a discontinuous saturated porous media and the media deformation is modeled using a coupled hydro-mechanical model, assuming Biot-Coussy theory to solve the coupling between the displacement field and the pressure field. The flow inside the discontinuity, its interaction with the porous matrix and its coupling with the mechanical field, are modeled assuming Vernerey theory. At the macroscale, the model considers the porous matrix as a homogeneous media where the Darcy Law is valid. The discontinuities are treated as interfaces that exchange the fluid flow by means of two components, a continuous and a discontinuous one, that can also be separated into a normal and a tangential component. At the microscale, the interface is considered as a porous media where the fluid flow is described using the Darcy-Brinkman law. The governing equations are obtained from the mass balance between both domains. The discontinuities are analyzed using XFEM, where the interpolation of the displacement variable is modeled as a strong discontinuity (discontinuous normal field) and the interpolation of the pressure variable is considered a weak discontinuity (continuous field with a discontinuous normal gradient). The time-discrete scheme is obtained by applying the backward Euler

method. The resulting discrete nonlinear equations are solved by applying the Newton-Raphson's method. All the model is implemented using a custom made finite elements software. Also, numerical results of essays of fractured porous media are presented and correlated with experimental essays and with other numerical models.

The proposed model fits well to experimental results and to analytical models of mechanical, hydraulic and coupled hydro-mechanical problems, such as the determination of the crack propagation due to mechanical and hydraulic actions, the study of the permeability of mortars and cracked fiber reinforced concretes, and the flow in discontinuous porous media, among others.

Agradecimientos

A mi directora de tesis y Codirectora de beca CONICET, Mariela Luege por su infinita paciencia y por todo el tiempo dedicado para que este trabajo salga adelante.

A mi director de Beca CONICET Bibiana Luccioni por haber confiado en mí y haberme proporcionado todo lo necesario para que pueda trabajar de la mejor manera.

A mi? jurado de tesis, Dr. Luis Garracino, Dr. Axel Larreteguy y Dr. Gustavo Pérez por sus aportes con las correcciones y valoraciones, mejorando indudablemente este trabajo.

A mi familia: Carla, Benja, Joaco y Ciro que siempre estuvieron conmigo, acompañándome y apoyándome en cada paso humano, académico y laboral, en los momentos más felices y más tristes de mi vida, siempre ahí.

A mi papá, mi mamá y mis hermanos, Mauri y Germán, que me recordaron que había quienes seguían mis pasos.

A mi amigo y compañero de toda la vida, Ramiro, que desde los 12 años me acompaña en cada locura que tengo.

A mis amigos y compañeros del Instituto, Gabriel, Andrés, Rodrigo, Gonzalo, José, Esteban, Daniela, Alejandra, Nicolás, Martín, Exequiel, Javier y Pablo que me acompañaron en todo el camino.

Al Director del Instituto de Estructuras, Sergio Gutierrez, al ex-director Enrique Galindez y miembros de la Comisión Académica: Bibiana Luccioni, Domingo Sfer y Gustavo Pérez, por haberme recibido de la mejor manera y crear un buen clima de trabajo.

A todo el personal docente y no docente del Instituto por el trato cordial y respetuoso de todos los días.

Al CONICET y al SCAIT (CIUNT) por financiar mi carrera, de otra forma esta tesis no habría sido posible.

Índice general

De	edica	toria	I		
Re	esum	en	II		
A	bstra	\mathbf{ct}	IV		
A	grade	ecimientos	VI		
Ín	dice	de Figuras	XII		
Ín	dice	de Tablas xv	III		
1.	Intr	oducción	1		
	1.1.	Introducción e importancia del tema	1		
	1.2.	Objetivos de la tesis	2		
	1.3.	Enfoque del tratamiento del problema	4		
	1.4.	Contenido de la tesis	4		
2.	Ecuaciones que gobiernan un medio poroso saturado discontinuo. Estado				
	\mathbf{del}	Arte.	7		
	2.1.	Introducción	7		
	2.2.	Ecuaciones gobernantes de un medio poroso saturado	8		
		2.2.1. Problema modelo y notación	9		
		2.2.2. Marco termodinámico y ecuaciones constitutivas	10		
	2.3.	Ecuaciones de balance de un medio multifásico	11		
	2.4.	Ecuaciones de balance para medios porosos saturados: Forma fuerte	13		
	2.5.	Condiciones de borde	16		
	2.6.	Ecuaciones que gobiernan el problema de medios porosos fisurados: Forma			
		Débil	19		
	2.7.	Flujo a través de la discontinuidad	21		
		2.7.1. Modelo de R. de Borst (2004) \ldots	21		
		2.7.2. Modelo de R. de Borst (2009).a \ldots	22		
		2.7.3. Modelo de R. de Borst (2009). b \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	24		
		2.7.4. Modelo de G. Meshcke	25		
		2.7.5. Modelo de Witherspoon - Ley cúbica	26		

		2.7.6.	Modelo de A.R. Khoei	27
	2.8.	Soluci	n numérica para el problema hidromecánico acoplado	28
		2.8.1.	Discretización espacial del problema acoplado.	28
		2.8.2.	Discretización temporal del problema acoplado.	31
		2.8.3.	Matrices resultantes y vectores de carga	31
	2.9.	Soluci	n semianalítica para el problema de flujos en medios porosos fisurados	32
		2.9.1.	Solución analítica general del problema	33
			2.9.1.1. Presión prescripta dentro de la fisura	34
			2.9.1.2. Flujo de Poiseuille prescripto dentro de la discontinuidad .	35
		2.9.2.	Solución numérica de las ecuaciones singulares integrales	36
			2.9.2.1. Presión prescripta dentro de la fisura	36
			2.9.2.2. Flujo de Poiseuille dentro de la fisura	38
3.	Mo	delo pi	opuesto	43
	3.1.	Introd	.cción	43
	3.2.	Conce	tos previos	44
		3.2.1.	Flujo de fluido intersticial y fuerzas motrices	45
			3.2.1.1. Fuerzas motrices medias ζ_s	46
			3.2.1.2. Fuerzas motrices relativas ζ_m	47
			3.2.1.3. Disipación de energía	47
		-	3.2.1.4. Velocidad del fluido microscópico en la interface	48
	3.3.	Ecuac	mes gobernantes para medios porosos saturados: Forma fuerte	49
		3.3.1.	Balance de masa para la fase solida del medio poroso	49
			Matriz porosa	49
				50
			3.3.1.1. Balance de masa para la fase fluida del medio poroso	51
				51
			2212 Palance de mars pars el medio peresso en términos de	91
			a.s.1.2. Datance de masa para el medio porosos en terminos de donsidad	52
			3.3.1.3 Balance de masa para el medio porosos en términos de	02
			porosidad	53
		3.3.2.	Interpretación física de las ecuaciones de masa	54
		3.3.3.	Balance de momentum en medios porosos	55
	3.4.	Relaci	nes constitutivas	55
		3.4.1.	Flujo Darcy-Brinkman para la interface	56
			3.4.1.1. Flujo Darcy-Brinkman microscópico	57
			3.4.1.2. Permeabilidad macroscópica y su relación con las propie-	
			dades de la interface microscópica	63
			3.4.1.3. Permeabilidad normal	63
			3.4.1.4. Permeabilidad tangencial	63
	3.5.	Condi	ones de bordes del problema	64
	3.6.	Consid	eraciones y forma débil del problema	65

		3.6.1.	Consideraciones para la determinación de la forma débil	65
		3.6.2.	Forma débil del balance de momentum masa en la matriz porosa Ω	66
		3.6.3.	Forma débil del balance de masa en la discontinuidad Γ	68
	3.7.	Tratar	niento de discontinuidades en medios porosos	69
		3.7.1.	Modelado de discontinuidades débiles	70
		3.7.2.	Modelado de discontinuidades fuertes	73
		3.7.3.	Elección del tipo de discontinuidad para la simulación del flujo	75
	3.8.	Propag	gación de fisuras	76
		3.8.1.	Sistema de ecuaciones resultantes: Matrices y vectores	76
4.	Ejer	nplos :	numéricos	78
	4.1.	Introd	ucción	78
	4.2.	Proble	mas mecánicos	78
		4.2.1.	XFEM 1D: Tracción uniaxial en un medio con discontinuidad ci-	
			nemática	79
		4.2.2.	XFEM 2D: Chapa con fisura lateral bajo tensión uniaxial	84
		4.2.3.	XFEM 2D: Viga a flexión con entalla central	87
		4.2.4.	Propagación de fractura debido a una solicitación mecánica	90
	4.3.	Proble	mas hidráulicos	93
		4.3.1.	XFEM 1D: Flujo en un medio uniaxial con discontinuidad material	97
		4.3.2.	Ensayo de permeabilidad	101
			4.3.2.1. Test de permeabilidad en probetas de mortero fisuradas .	102
			4.3.2.2. Test de permeabilidad en probetas fisuradas de HRFA y	
			HRFS	104
		4.3.3.	Presión prescripta en una discontinuidad	109
		4.3.4.	Flujo de Poiseuille dentro de una fisura	113
	4.4.	Proble	mas hidro-mecánicos acoplados	120
		4.4.1.	Medio poroso saturado con discontinuidad discreta sometido a un	101
		4 4 0	gradiente de presion	121
		4.4.2.	Propagación de fractura debido a una solicitación hidraulica	127
5.	Con	clusio	nes	132
	5.1.	Conclu	nsiones	132
		5.1.1.	Principales conclusiones	133
		5.1.2.	Sugerencias para trabajos futuros	136
		5.1.3.	Indicadores académicos	137
Bi	ibliografía 139			

A. Relaciones	constitutivas para medios porosos saturados	146
A.0.1.	Ecuaciones constitutivas para medios porosos en grandes deforma-	
	ciones	. 146
	Desacoplado de la parte hidrostática de la desviadora	. 148

Propiedades tangentes de la termoporoelasticidad	. 149
Termoporoelasticidad lineal isotrópica	. 150
Flujo a través de la matriz	. 151
Fuerzas cohesivas	. 151

Índice de Figuras

1.1.	Enfoque del tratamiento del problema.	5
2.1.	Volumen Ω de un medio poroso saturado con una discontinuidad discreta Gamma _d con caras definidas como Γ_d^+ y Γ_d^-	9
2.2.	Condiciones de bordes de un medio poroso saturado.	20
2.3.	Composición del dominio Ω^+ y Ω^- separados por la discontinuidad $\Gamma_d.~$	21
2.4.	Definición de coordenadas, vector normal $\boldsymbol{n}_{\Gamma_d}$, vector tangencial $\boldsymbol{t}_{\Gamma_d}$ y ancho 2h de la discontinuidad Γ_d	22
2.5.	Fisura en una placa de dimensiones infinita. Notaciones	33
2.6.	Fisura en una placa de dimensiones infinitas: (A) sujeta a una presión constante p_0 en Γ_d , y (B) sujeta a un flujo constante q_{∞} en el infinito	33
2.7.	Puntos de integración x_i , $i = 1,, N + 1$ y puntos de colocación $x_{0j}, j = 1,, N$ a lo largo de la fisura para $N = 3.$	39
3.1.	Ejes locales (ξ_n, ξ_s, ξ_t) en la microescala. Densidad de masa del constitu- yente α en la interface. (Vernerey, 2011)	44
3.2.	Esquemas de flujos normales y tangenciales en la interfaz. (Vernerey, 2012)	48
3.3.	Subvolumen $B \subset \Omega$, de ancho l_i usado para derivar el balance de masa de los componentes fluidos y sólidos de la matriz.	49
3.4.	Modelo microscópico de la interface	57

3.5.	Distribución esquemática del flujo normal a través de la interface y tan- gencial en la interface.	58
3.6.	Efecto del espesor de la interface para un flujo transveral con $\gamma = 10$ y $\beta = 1$.	62
3.7.	Efecto de la permeabilidad de la interface para un flujo transversal con $\overline{h} = 1$ y $\beta = 1$	62
3.8.	Dominio Ω en presencia de una discontinuidad Γ_d	65
3.9.	Descomposición del flujo normal en Γ_d	65
3.10	. Condiciones de Bordes del campo hidraúlico y transferencia entre Ω y $\Gamma.~~.$	67
3.11	Distribución de presiones, gradiente y flujos considerados para una (a) dis- continuidad débil (b) discontinuidad fuerte.	75
4.1.	Geometría del medio en estudio con discontinuidad cinemática	79
4.2.	 (a) Discretización del problema 1. (b) Función Heaviside. (c) Funciones de forma del elemento con discontinuidad utilizando enriquecimiento estándar, (d) Funciones de forma del elemento con discontinuidad utilizando enriquecimiento modificado. 	80
4.3.	Desplazamientos regulares, enriquecidos y totales usando enriquecimiento $N_{a2}(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x})N_{a1}(\boldsymbol{x}), \text{ donde } [1.2\text{ex}] u_1 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i, u_2 = \sum_{j \in J} N_{a2}^j a_2^j,$ $u_1 + u_2 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i + \sum_{j \in J} N_{a2}^j a_2^j.$	84
4.4.	Desplazamientos regulares, enriquecidos y totales usando enriquecimien- to $\mathbf{N}_{a2}^*(\mathbf{x}) = (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)) \mathbf{N}_{a1}(\mathbf{x})$, donde [1.2ex] $u_1 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i$, $u_2 = \sum_{j \in J} \mathbf{N}_{a2}^{*j} a_2^j$, $u_1 + u_2 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i + \sum_{j \in J} \mathbf{N}_{a2}^{*j} a_2^j$	85
4.5.	Geometría del problema de fisura lateral bajo tensión uniaxial (a) y defor- mada del modelo resuelto con XFEM (b).	86
4.6.	Mapa de tensiones: σ_x , σ_y y $\tau_x y$	86
4.7.	$R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función al dominio de integración $r.$	88
4.8.	$R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función del número N de elementos utilizados en la discretización.	89

4.9.	(a) Geometría de una viga entallada simplemente apoyada bajo carga pun-	
	tual. (b) Deformada del modelo resuelto con XFEM	89
4.10.	Mapa de tensiones: σ_x , σ_y y $\tau_x y$	90
4.11.	$R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función al dominio de integración	91
4.12.	$R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función del número N de elementos utilizados en la discretización	92
4.13.	Geometría del ejemplo analizado para el estudio de la propagación de la fisura debido a una solicitación mecánica	93
4.14.	Respuesta global del problema en estudio:: $\lambda \sigma$ vs flecha w_h	94
4.15.	Deformación del medio en el rango (1)-(2). \ldots \ldots \ldots \ldots	94
4.16.	Deformación del medio en el rango (2)-(3). \ldots \ldots \ldots \ldots	95
4.17.	Deformación del medio en el rango (3)-(4).	95
4.18.	Deformación del medio en el rango (4)-(5). \ldots \ldots \ldots \ldots	96
4.19.	Deformación del medio en el momento del colapso (5)	96
4.20.	Geometría y condiciones de borde del medio en estudio con discontinuidad material.	97
4.21.	Discretización del medio con discontinuidad material.	98
4.22.	Distribución de presiones regulares, enriquecidas y totales para una dis- cretización de 3 elementos, usando $N_{p2}^{*j}(\boldsymbol{x}) = N_{p1}^{j}(Z(\boldsymbol{x}) - Z(\boldsymbol{x}_{j}))$, donde $[1.2ex] p_{1} = \sum_{i \in I} N_{p1}^{i} p_{1}^{i}, p_{2} = \sum_{j \in J} N_{p2}^{*j} a_{2}^{j}, p_{1} + p_{2} = \sum_{i \in I} N_{p1}^{i} p_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{p2}^{*j} p_{2}^{j}.$	98
4.23.	Presiones totales para discretizaciones de 3, 9 y 19 elementos	99
4.24.	Distribución de presiones resueltas analíticamente y con enriquecimiento modificado.	100
4.25.	Esquema del ensayo experimental de permeabilidad en probetas de mortero fisuradas.	102

4.26. Geometría del modelo y condiciones de contorno del problema 1	102
4.27. Permeabilidad global evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales . 1	105
4.28. Permeabilidad global evaluada mediante XFEM	105
4.29. Geometría de la probeta para el estudio de permeabilidad para hormigones HRFA y HRFS	106
4.30. Ensayo de tracción por compresión diametral - Vista frontal	107
4.31. Ensayo de tracción por compresión diametral - Vista lateral	107
4.32. Permeabilidad global de una probeta fisurada de HRF de acero y sinteticas, evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales	108
4.33. Permeabilidad global de una probeta fisurada de HRF de acero y sinteticas, evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales	108
4.34. Permeabilidad global de una probeta fisurada de HRF de acero y sinteticas, evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales	111
4.35. Presión prescripta en una discontinuidad: Geometría del problema y con- diciones de borde	113
4.36. Presión prescripta en una discontinuidad: Distribuión de presiones resuelto mediante XFEM	114
4.37. Presión prescripta en una discontinuidad: Distribuión de presiones resuelto mediante el método semianalítico	114
4.38. Presión prescripta en una discontinuidad: Gradiente y a lo largo de un eje $y = 3. \ldots $	115
4.39. Presión prescripta en una discontinuidad: Gradiente x a lo largo de un eje y = 2,7.	115
4.40. Error relativo de la presión y de los gradientes de presión para diferentes discretizaciones de elementos finitos	116
4.41. Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Geometría del problema y condi- ciones de bordes	117

4.42. Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de presiones resuelto mediante XFEM
4.43. Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de presiones resuelto mediante el método semianalítico
4.44. Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de presiones - XFEM vs método semianalítico
4.45. Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de gradiente de pre- siones y - XFEM vs método semianalítico
4.46. Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de gradiente de pre- siones x - XFEM vs método semianalítico
4.47. (a)Geometría del problema. Campo de presiones $p(x, y)$ resultante para un gradiente uniforme de presones paralelo a la fisura para (b) $\lambda = 0.01$, (c) $\lambda = 0.1$ y (d)W $\lambda = 1.$
4.48. Presión a lo largo de la fisura para diferentes valores de λ
4.49. Gradiente de presión en la dirección x para diferentes valores de λ 123
4.50. Gradiente de presión en la dirección y para diferentes valores de λ 124
4.51. Apertura de fisura debido a la circulación de fluido para (a) $\lambda = 1$, (b) $\lambda = 0,1$ y (c) $\lambda = 0,01$
4.52. Solución mediante XFEM para $\lambda = 1$: Error relativo de la presión y de los gradientes de presión para diferentes número de elementos finitos 125
4.53. Solución mediante XFEM para $\lambda = 1$: Apertura de fisura para diferente número de elementos finitos
4.54. Geometría y condiciones de bordes del problema considerado
4.55. Respuesta global del especimen: Inyección del fluido λQ vs apertura de fisura w_h
4.56. Presión a lo largo de un eje paralelo a la fisura para diferente posiciones del crack-tip

4.57. M	Iedio poroso deformado producido por la inyección de un fluido cuando el	
cr	rack-tip se encuentra en $a = 400$	130
4.58. P	Posición de los puntos de Gauss cuando el crack-tip se encuentra en el	
bo	orde de un elemento finito enriquecido.	131
4.59. P	Posición de los puntos de Gauss cuando el crack-tip se encuentra en el	
m	nedio de un elemento finito enriquecido	131
A.1. Z	ona cohesiva: Fuerzas generadas en el crack-tip	152

Índice de Tablas

2.1.	Valores de constantes ψ, i, b y G para cada variable termodinámica	12
2.2.	Forma fuerte de las ecuaciones gobernantes	19
4.1.	Factor de intensidad de tensiones relativo K_I^{ex}/K_I^{num} según el número de elementos usados en la discretización y el radio r del dominio de integración	87
4.2.	Factor de intensidad de tensiones relativo $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ según el número de elementos usados en la discretización y el radio r del dominiode integración	90
4.3.	Permeabilidades globales experimentales k_{exp} , desviación estándar s_k permeabilidades numéricas k_{num} .	104
4.4.	Apertura de fisura wh , permeabilidades globales experimentales k_{exp} , desviación estándar s_k permeabilidades numéricas k_{num}	110
4.5.	Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz 1	113
4.6.	Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz 1	126
5.1.	Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz.	135
5.2.	Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz 1	136

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción e importancia del tema

La modelación del transporte de fluidos en materiales porosos fisurados, es objeto de estudio en muchas aplicaciones industriales, tales como el *fracking* (fractura hidráulica) en la ingeniería del petróleo, la recarga de acuíferos, el estudio de flujo y transporte en pilas de lixiviación, el análisis de la permeabilidad para la estimación de daños, en donde el crecimiento del nivel del mismo modifica las propiedades hidromecánicas del medio, por lo cual resulta de gran interés el estudio de procesos de fisuración y su influencia en el flujo de fluido a través del mismo. Por otra parte, en los últimos tiempos, aumentó mucho el interés en los problemas ambientales tales como la contaminación de estratos de suelos, los cuales necesitan un estudio combinado de todas las áreas antes mencionadas, que permitan abordar el problema en forma integral.

El medio poroso es un sistema multifásico formado por una estructura o matriz porosa, una fase líquida y otra gaseosa, las cuales presentan diferentes propiedades hidromecánicas e interaccionan entre sí. La predicción del comportamiento de la deformación del material sólido y de la interacción con un flujo de fluido, se consigue mediante la solución completa del sistema acoplado. En el caso de que los poros de la matriz se encuentren completamente lleno de fluidos, el problema se conoce como medios porosos saturados, caso contrario, de coexistir todas las fases, se lo conoce como medios porosos parcialmente saturados o no saturados.

En la actualidad, el estudio analítico del problema es tratado la ley de Darcy, considerando al medio como un material homogéneo. Pero en muchos casos no se ajustan a la realidad, en donde se suelen presentar en los cuerpos discontinuidades fuertes o materiales y/o discontinuidades débiles o cinemáticas, como por ejemplo en rocas u hormigones fracturados, fracking, diferentes formaciones geológicas vinculadas con interfaces entre sí, etc., las cuales influyen fuertemente en el comportamiento del flujo que circula a través del medio, lo que termina modificando las propiedades hidráulicas del mismo. Los ensayos experimentales permiten conocer información sobre la permeabilidad efectiva del medio, de los poros conectados y la interconexión entre las micro y macro grietas del material en estudio, pero son bastante limitados en cuanto a los datos ofrecidos y por sobre todo, en cuanto al nivel de predicción de los fenómenos que pueden llegar a intervenir. Como ejemplo, se menciona el caso de los pozos de oil-gas, en donde en búsqueda de aumentar el rendimiento del estrato que contiene el fluido de interés, se realizan tareas de *fracking*, la cual consiste en romper la estructura del suelo por intermedio de altas presiones de fluido, generando diversas grietas, con lo que aumenta notablemente su permeabilidad. Al no contar con un modelo confiable de predicción de fracturas en medios porosos, se producen fisuras no controladas, las cuales terminan en muchas ocasiones conectando el estrato de interés con acuíferos naturales y por consiguiente, produciendo la contaminación del agua del mismo. Teniendo en cuenta estas problemáticas, reviste gran importancia disponer un modelo numérico robusto y estable, capaz de reproducir la interacción entre el estado actual del medio y el transporte a través del mismo.

1.2. Objetivos de la tesis

El objetivo general de la tesis es la formulación de un modelo para la simulación de la deformación y flujo de agua en un medio poroso saturado en proceso de deterioro progresivo asumiendo las siguientes teorías:

- Considerar la teoría de Biot-Coussy (Coussy, 2010) para el acoplamiento hidromecánico. La deformación del hormigón está influenciada por el fluido que ocupa los poros y resulta de tipo no lineal debido a la progresiva apertura y clausura de poros y fisuras.
- Extender la teoría propuesta por Vernerey (Vernerey, 2011), (Vernerey, 2012) para la formulación del flujo dentro de la discontinuidad.
- Aplicar el método de elementos finitos extendidos (XFEM) (Moes *et al.*, 1999) para la simulación de discontinuidades fuertes, débiles y agujeros.

 Desarrollo e implementación de una herramienta numérica basada en la técnica XFEM para la simulación del mismo problema pero con campos discontinuos.

Los objetivos particulares de la tesis son los siguientes:

- Estudio del fenómeno físico a modelar: deformación y flujo de agua en un medio poroso saturado en proceso de deterioro progresivo y resultados analíticos y experimentales disponibles en la bibliografía.
- Análisis de distintas técnicas de discretización espacial y temporal existentes para modelar estos tipos de fenómenos.
- Desarrollo e implementación de una herramienta numérica basada en el método de elementos finitos para el tratamiento del problema hidro-poro-elástico acoplado.
- Estudio e implementación numérica de diferentes modelos de flujos a través de la fisura y su acoplamiento con el campo mecánico.
- Extensión de la herramienta numérica basada en XFEM para que sea capaz de reproducir la dependencia de la historia de carga observada experimentalmente en procesos hidromecánicos en medios porosos con fisuras discretas y para que sea capaz de reproducir fenómenos irreversibles observados experimentalmente en el proceso de deterioro progresivo de la matriz.
- Estudio de los fenómenos que intervienen en la evolución de la permeabilidad de un medio poroso con fisuras discretas.
- Calibración y validación con resultados analíticos y experimentales.
- Generación de un código de programación capaz de implementar diferentes teorías de flujos dentro de las fisuras.
- Ampliación de la capacidad de los modelos existentes para reproducir diferentes tipos de flujos, cuyas componentes no se limitan a un flujo continuo y/o uniforme dentro de la fisura.
- Análisis de las ventajas y desventajas del uso de XFEM para la simulación de discontinuidades en el problema en estudio.

1.3. Enfoque del tratamiento del problema

En el marco de los problemas poromecánicos discontinuos saturados, el tratamiento para la evaluación del flujo dentro de una discontinuidad, la interacción con la matriz porosa y el acoplamiento con el campo mecánico, ha sido modelado en función a la teoría propuesta por Vernerey (Vernerey (2011) y Vernerey (2012)), siguiendo los lineamientos propuestos por Khoei (Khoei & Haghighat (2011), ?, Mohammadnejad & Khoei (2013a)). En la macroescala, el modelo propuesto considera a la matriz porosa Ω como un medio homogéneo en donde es válida la ley de Darcy. Las discontinuidades fuertes son tratadas como interfaces, las cuales de denotan como Γ , las cuales intercambian el flujo de fluido a través de una componente continua y otra discontinua, que a su vez, pueden dividirse en una componente normal y otra tangencial. En la microescala, la interfaz se considera como un medio poroso de espesor 2h, donde h es el semiespesor de la discontinuidad, Y el flujo de fluido es descripto a través de la ley de Darcy-Brinkman (Durlofsky & Brady (1987), Vernerey (2012)). En cuanto al campo mecánico, se considera una ley cohesiva lineal y como criterio para la propagación de fisuras, se adopta el criterio del factor de intensidades de tensiones crítico. Las ecuaciones gobernantes resultan a partir de considerar el balance de masa tanto el la matrix porosa Ω como en la interface Γ . Las discontinuidades son tratadas con la técnica XFEM, en donde la interpolación de la variable de estado de desplazamiento u es modelada como una discontinuidad fuerte (campo normal discontinuo), mientras que la interpolación de la variable de presión p es considerada como una discontinuidad débil (campo continuo pero con gradiente normal discontinuo). El modelo poromecánico fue probado en problemas mecánicos, en problemas hidraúlicos y finalmente, en problemas poromecánicos acoplados. En la Figura 1.1 se muestra un resumen de los tipos de fujos en la macro y en la micro escala del medio poroso Ω con la interface Γ .

1.4. Contenido de la tesis

En correspondencia con los objetivos planteados, en esta tesis se desarrolla un modelo hidro-mecánico acoplado para la simulación de la deformación y flujo de fluido en un medio poroso saturado, en proceso de deterioro progresivo. Todos los códigos usados para la implementación del modelo propuesto son códigos propios y fueron hechos en MatLab. La tesis se desarrolla en cinco capítulos, el presente capítulo de introducción y los restantes cuatro capítulos cuyo contenido se esboza a continuación. En el capítulo



FIGURA 1.1: Enfoque del tratamiento del problema.

2 se analiza en una primera etapa, el comportamiento general del medio poroso y las ecuaciones de balance generales que se aplican. Posteriormente, se analiza puntualmente los modelos existentes para la evaluación del flujo a través de las discontinuidades. En el capítulo 3 se presenta el modelo propuesto. Se realiza primero una descripción detallada de su formulación, calibración, ventajas y limitaciones. En el capítulo 4 se analizan los resultados obtenidos a través de la utilización del modelo propuesto en diferentes ensayos,

y su correlación con modelos numéricos de otros autores y con ensayos experimentales. En capítulo 5 se presentan las publicaciones realizadas, las conclusiones de este trabajo y algunas sugerencias para futuras investigaciones. La tesis se completa con un apéndice en el cual se plantea las relaciones constitutivas para medios porosos saturados.

Capítulo 2

Ecuaciones que gobiernan un medio poroso saturado discontinuo. Estado del Arte.

2.1. Introducción

En la literatura, el tema de transporte de fluidos en medios porosos fisurados o en proceso de fisuración ha sido tratado de diferentes maneras: Boone & Ingraffea (1990) presentaron un procedimiento numérico para la simulación de la propagación de fisuras por causas hidráulicas en materiales poroelásticos, combinando el MEF con el método de diferencias finitas; Schrefler (1995) y Secchi et al. (2007) modelaron el crecimiento de fisuras cohesivas en medios porosos totalmente saturados usando el MEF con mallas adaptativas; Segura & Carol (2008) propusieron una formulación hidromecánica para materiales totalmente saturados con discontinuidades preexistentes basadas en el MEF con elementos de interfaz de espesor cero. Con el objeto de simular la presencia de una discontinuidad o fisura en el medio continuo, se han desarrollado métodos mas apropiados como son el Embedded Finite Element Method (EFEM) (Armero & Linder, 2009) y el eXtended Finite Element Method (XFEM) (Moes et al., 1999). EFEM modela la falla de sólidos discretamente a través de la disipación local a lo largo de las discontinuidades. XFEM considera una cinemática enriquecida, en donde las variables de estado son interpoladas a través de funciones regulares y funciones de enriquecimiento en términos de funciones del tipo *level* set (Li et al., 2012), (Yvonnet et al., 2008), (Moës et al., 2002), (Stephansson et al., 1996),

8

las cuales permiten describir un campo a través de un elemento más general. Este método permite el modelado de la geometría de la discontinuidad de forma independiente de la malla, y evita por completo la necesidad de regenerar la malla a medida que la fisura crece. La aplicación de XFEM al caso de medios porosos puede encontrarse en de Borst et al. (2004), de Borst et al. (2009), Lucero et al. (2012), Lucero et al. (2013a), Mohammadnejad & Khoei (2013b), Lamb et al. (2013), Fumagalli & Scotti (2013), Lucero et al. (2013b), Fumagalli & Scotti (2014), Shao et al. (2014), Lucero et al. (2014), Salimzadeh & Khalili (2015), Schwenck (2015), Flemisch et al. (2016), Mohammadnejad & Andrade (2016), Del Pra et al. (2017), Wang et al. (2017), Yang et al. (2019), en los cuales se centra principalmente en el modelado del flujo de fluido a través de las discontinuidades y el intercambio con la matriz porosa, el cual es realizado mediante una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes en la fisura, mientras que en Khoei & Haghighat (2011), Mohammadnejad & Khoei (2013a) se enfocan en problemas de implementación de la aplicación del método y lo extienden al modelado de fractura hidraúlica usando un modelo de fractura cohesivo. La literatura sobre las aplicaciones de XFEM a la fractura hidraúlica, es decir, la producción de fractura por la invección de fluido en un material frágil elástico lineal, es bastante abundante Lucero et al. (2015), Desroches (1994), Hunsweck et al. (2013), Lecampion (2009), Gordeliy & Peirce (2013), Adachi et al. (2007). Estos trabajos se enfocan principalmente en como elegir consistentemente las funciones de forma de enriquecimiento. También se menciona el trabajo Chessa & Belytschko (2003) en el cual se aplica XFEM a la captura de efectos de una interface interior arbitraria en el problema de flujo inmiscible de dos fases.

2.2. Ecuaciones gobernantes de un medio poroso saturado

El medio poroso saturado se modela como un sistema de dos fases: una fase sólida deformable y una fase fluida que ocupa el espacio vacío. Las ecuaciones gobernantes se obtienen a través del balance de ecuaciones de momentum, de masa y las ecuaciones constitutivas de cada fase. En esta sección se obtienen las ecuaciones gobernantes de la poroelasticidad (Biot, 1941), (Coussy, 2004), (Coussy, 2010) y se modela el intercambio de flujo de fluido a través de la fractura. Esto se lleva a cabo formulando el flujo dentro de la discontinuidad en la microescala y se vincula con las ecuaciones gobernantes a nivel macro. La metodología puede verse en de Borst *et al.* (2006), Rethore *et al.* (2007a), de Borst *et al.* (2009) y Chandesris & Jamet (2009).

2.2.1. Problema modelo y notación

Se considera que el dominio $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ocupado por un medio poroso contiene algunas fracturas en su interior, denotadas como $\Gamma_d \in \Omega$, donde Γ_d tiene una topología de dimensión menor que N. Por ejemplo si N = 3, Γ_d será una superficie o una línea. En este trabajo, consideramos N = 2, y Γ_d representa líneas contenidas en Ω (ver Figura 2.1). El conjunto de fracturas se denota con Γ_d . Cada componente de Γ_d se describe en términos de una función suave $\mathbf{z} = z(x^*)$ que representa la ecuación paramétrica de la curva como una función de coordenadas curvilíneas x^* a lo largo de la fractura.



FIGURA 2.1: Volumen Ω de un medio poroso saturado con una discontinuidad discreta $Gamma_d$ con caras definidas como Γ_d^+ y Γ_d^- .

En este desarrollo se consideran fracturas sin intersección. Cada fractura tiene una orientación definida por la normal \mathbf{n}_{Γ_d} a la curva en $\mathbf{z} \in \Gamma_d$. La elección de \mathbf{n}_{Γ_d} junto con el vector unitario tangencial \mathbf{t}_{Γ_d} determina una cara positiva de Γ_d que denotamos Γ_d^+ y una cara negativa de Γ_d que denotamos Γ_d^- . La definición de estos dos lados de Γ_d en relación a \mathbf{n}_{Γ_d} adquiere relevancia cuando es necesario aplicar el teorema de divergencia. En la defincion de condiciones de bordes de Γ_d , será necesario considerar Γ_d dotado con una estructura, es decir, Γ_d será visto como el límite de una cavidad Ω_c que en este caso se considera que tiene L >> 2h, donde h es el semiancho de la fractura y L es la longitud de fractura característica. La asunción de L >> 2h permite considerar solamente un flujo promedio dentro de la discontinuidad. En la Sección 2.7 se muestran diferentes formulaciones para la determinación del flujo.

2.2.2. Marco termodinámico y ecuaciones constitutivas

A partir de la segunda ley de la termodinámica, aplicando el balance de la entropía, puede expresarse la desigualdad de Clausius - Duhem referida a los medios porosos continuos de la siguiente forma (Coussy, 2010):

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_f + \Phi_{th} \ge 0 \tag{2.1}$$

en donde Φ es la disipación total de la energía; Φ_s es la disipación de la estructura sólida; Φ_f es la disipación del fluido; Φ_{th} es la disipación térmica, la cual se considera nula, dado que en esta tesis se trabaja con procesos isotérmicos únicamente. Si se denota con σ al tensor de tensiones totales, \boldsymbol{u} el vector de desplazamientos de la fase sólida, $\boldsymbol{\varepsilon}$ al tensor de deformaciones dado por $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T)/2$, donde ∇ es el operador gradiente tal que para $\boldsymbol{u} \in R^N$, $(\nabla \boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{u}_{i,j} \text{ con } i, j = 1, ..., N)$ es la componente de la derivada parcial \boldsymbol{u}_i del campo \boldsymbol{u} con respecto a la coordenada x_j , donde el superíndice T denota el operador transpuesto. Bajo la consideración de pequeñas deformaciones, la disipación total está dada por:

$$\Phi = \Phi_s = \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \phi \frac{dp}{dt} - \frac{dG_s}{dt}$$
(2.2)

donde ϕ es la porosidad Langrangiana, G_s es la energía libre de Gibb y p es la presión de poros. El término $\phi dp/dt$ considera la disipación asociada con la presión de poros actuando sobre las paredes de la matriz porosa. La porosidad Langrangiana ϕ se relaciona con la porosidad espacial n por la relación $\phi d\Omega_0 = nd\Omega$, donde $d\Omega_0$ es el volumen diferencial de la matriz porosa en el instante inicial (sin deformarse), $d\Omega$ es el volumen diferencial de la matriz porosa del medio deformado, en donde para pequeñas deformaciones, se reduce a $\phi = J_n \approx (1 + \epsilon)n$, donde J_n es el determinante Jacobiano del tensor de deformaciones, es decir $J_n = det \varepsilon$ donde det es el operador determinante.

Para obtener las ecuaciones de la poroelasticidad isotrópica lineal, considerando tr el operador traza y $\mathbf{1}$ el tensor identidad de segundo orden, consideramos la forma cuadrática

de la energía libre de Gibbs G_s como el primer invariante ($\epsilon = \text{tr}\varepsilon$) y el segundo invariante (e : e) de deformaciones, con $e = \varepsilon - 1/3\epsilon \mathbf{1}$:

$$G_s(\varepsilon, \boldsymbol{e}, p) = \frac{1}{2}K\varepsilon^2 - bp\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{p^2}{N} + G\boldsymbol{e}:\boldsymbol{e}$$
(2.3)

donde K es módulo de deformación volumétrica de la matriz, G es el módulo de corte (ambos para condiciones drenadas), $b = 1 - K/K_s \leq 1$ es el coeficiente de Biot, con K_s como el módulo volumétrico de la parte sólida, $1/N = (b - \phi_0)/K_s$ es el módulo de Biot y ϕ_0 es la porosidad inicial (Coussy, 2010).

Reemplazando la ecuación 2.3 en la ecuación 2.2, las ecuaciones de la poroelasticidad quedan definidas por la condición $\Phi_s = 0$ para cualquier proceso admisible, por lo que se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{e} + (K\boldsymbol{\epsilon} - b\boldsymbol{p})\,\mathbf{1} \tag{2.4}$$

$$\phi = b\epsilon - \frac{p}{N} \tag{2.5}$$

La disipación asociada al movimiento de fluido con respecto a la matriz sólida se calcula:

$$\Phi_f = -\nabla p \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) \tag{2.6}$$

donde $v_s = du/dt$ es la velocidad de la parte sólida y v_f es la velocidad del fluido dentro del vacío de la matriz porosa. Si consideramos la ley de Darcy para la fase fluida, la ecuación constitutiva será:

$$n\left(\boldsymbol{v}_{f}-\boldsymbol{v}_{s}\right)=-k_{f}\nabla p \tag{2.7}$$

donde k_f es la permeablidad de la matriz y $\nabla p = \partial p / \partial x$. La ecuación 2.7 asegura que la disipación del fluido no es negativa.

2.3. Ecuaciones de balance de un medio multifásico

Mediante la teoría de mezclas, un medio multifásico puede ser descripto como la superposición de todas las fases $\pi = 1, 2, ..., k$, cuyos puntos ocupan simultáneamente la posición x en el tiempo t. El movimiento de cada fase puede ser descripto independientemente, considerando la formulación clásica de la mecánica del continuo (Schrefler (1995)). Las ecuaciones que gobiernan el problema pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \rho_{\pi} \psi}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_{\pi} \psi \boldsymbol{v}_{\pi} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{i} - \rho \boldsymbol{b} = \rho \boldsymbol{G}$$
(2.8)

donde \boldsymbol{v}_{π} es el valor local del campo velocidad de la fase π dentro de un punto fijo en el espacio, \boldsymbol{i} es el vector de flujo asociado con ψ , \boldsymbol{b} es el suministro externo de ψ y \boldsymbol{G} es la producción neta de ψ y ψ es la variable termodinámica en estudio.

En la interface entre dos constituyentes π , α se mantiene la condición de salto:

$$\left[\rho\psi\left(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}_{\pi}\right)+\boldsymbol{i}\right]|_{\pi}\cdot\boldsymbol{n}^{\pi\alpha}+\left[\rho\psi\left(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}_{\pi}\right)+\boldsymbol{i}\right]|_{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}^{\alpha\pi}=0$$
(2.9)

donde \boldsymbol{w} es la velocidad de la interface, $\boldsymbol{n}^{\alpha\pi}$ es el vector normal unitario dirigido hacia fuera de la fase π y dentro de la fase α , con:

$$\boldsymbol{n}^{\pi\alpha} = -\boldsymbol{n}^{\alpha\pi} \tag{2.10}$$

 \mathbf{S}

 ϕ

donde $|_{\pi}$ indica que el término precedente debe ser evaluado con respecto a la fase π .

En el problema termo-poro-elástico general, las variables termodinámicas ψ para las distintas ecuaciones de balance toman los valores i, b y G que se muestran en la Tabla 2.1.

Variable	ψ	i	b	G
Masa	1	0	0	0
Momentum	$oldsymbol{v}_{\pi}$	$oldsymbol{t}_m$	g	0
Energía	E+0.5 $\boldsymbol{v}_{\pi} \cdot \boldsymbol{v}_{\pi}$	$oldsymbol{t}_moldsymbol{v}_\pi-oldsymbol{q}$	$oldsymbol{g}\cdotoldsymbol{v}_{\pi}+h$	0

Φ

λ

TABLA 2.1: Valores de constantes ψ, \pmb{i}, \pmb{b} y \pmb{G} para cada variable termodinámica

donde en la Tabla, E es la energía específica intrínseca, λ es la entropía específica, t_m es el tensor de tensiones microscópico, q es el vector de flujo calórico, Φ es el flujo de entropía, g es el momento externo suministrado relacionado por los efectos gravitatorios, h es la fuente de calor intrínseca, S es una fuente de entropía intrínseca, y ϕ denota el incremento de entropía.

A partir de esa Tabla, la conservación de la masa resulta,

Entropía

$$\frac{\partial \rho_{\pi}}{\partial t} \operatorname{div}\left(\rho_{\pi} \boldsymbol{v}_{\pi}\right) = 0 \tag{2.11}$$

La conservación del momentum resulta,

$$\frac{\partial \rho_{\pi} \boldsymbol{v}_{\pi}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_{\pi} \boldsymbol{v}_{\pi} \boldsymbol{v}_{\pi} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{t}_{m} - \rho_{\pi} g = 0$$
(2.12)

La conservación de energía resulta,

$$\frac{\partial \left[\rho_{\pi} \left(E+0.5 \boldsymbol{v}_{\pi} \cdot \boldsymbol{v}_{\pi}\right)\right]}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho_{\pi} \left(E+0.5 \boldsymbol{v}_{\pi} \cdot \boldsymbol{v}_{\pi}\right) \boldsymbol{v}_{\pi}\right] - \operatorname{div}\left(\boldsymbol{t}_{m} \operatorname{div}-\boldsymbol{q}\right) = 0 \qquad (2.13)$$

La conservación de entropía resulta,

$$\frac{\partial \rho_{\pi} \lambda}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_{\pi} \lambda \boldsymbol{v}_{\pi} \right) - \operatorname{div} \Phi - \rho \boldsymbol{S} = \rho_{\pi} \phi \qquad (2.14)$$

A continuación, se obtienen las ecuaciones en forma fuerte que gobiernan el problema de medios porosos saturados considerando al medio elástico isótropo lineal.

2.4. Ecuaciones de balance para medios porosos saturados: Forma fuerte

Basándose en los lineamientos propuestos por de Borst *et al.* (2004), de Borst *et al.* (2009), Coussy (2010), Ingraffea & de Borst (2017), Liu *et al.* (2015) y de Borst (2017) para el estudio de medios porosos saturados, se deben tener en cuenta el calor de conducción, difusión de vapor, calor de convección, flujo de fluidos debido a gradientes de presión o efectos capilares y transferencia de calor latente debido a cambios de fase del agua dentro de los poros. Las ecuaciones de balance macroscópicas son obtenidas de forma sistemática aplicando principios de promedios del balance de ecuaciones visto anteriormente.

Se considerará el problema bifásico en pequeñas deformaciones. Si se denota π al constituyente en estudio, en el cual $\pi = s, f$ para la fase sólida y fluida respectivamente, $\sigma_{\pi} = t_m$ es el campo de tensiones, v_{ϕ} es la velocidad absoluta, se puede escribir la ecuación de conservación de movimiento de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\pi} + \widehat{\boldsymbol{p}_{\pi}} + \rho_{\pi} \boldsymbol{g} = \frac{\partial \left(\rho_{\pi} \boldsymbol{v}_{\pi}\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_{\pi} \boldsymbol{v}_{\pi} \times \boldsymbol{v}_{\pi}\right) \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.15)$$

donde,

- $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\pi}$ es el gradiente del campo de tensiones,
- $\widehat{p_{\pi}}$ es la fuente de momento del constituyente π desde los otros constituyentes. La resultante de los constituyentes deber ser nula, por lo que se puede escribir:

$$\sum_{\pi=n,f} \widehat{p_{\pi}} = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma$$
(2.16)

- ρg es la fuerza gravitatoria,
- $\frac{\partial (\rho_{\pi} \boldsymbol{v}_{\pi})}{\partial t}$ es la fuerza producido por las aceleraciones de los constituyendos.

Si se desprecia,

- Términos convectivos al considerar que la densidad no depende de la posición,
- Efectos de las fuerzas gravitatorias,
- Efectos de la aceleración al considerar el problema cuasiestático.

la ecuación de equilibrio se reduce a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\pi} + \widehat{\boldsymbol{p}_{\pi}} = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.17)$$

Si se aplica la teoría de mezclas, el campo de tensones queda definido en un medio poroso bifásico por $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_f$, la ecuación anterior resulta para cada constituyente como,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \widehat{\boldsymbol{p}}_s = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \widehat{\boldsymbol{p}}_f = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.19)$$

Sumando ambas expresiones, el balance de momentum resulta finalmente,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \tag{2.20}$$

De forma similar, la ecuación de conservación de la masa para cada constituyente π , resulta

$$\frac{\partial \rho_{\pi}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_{\pi}\boldsymbol{v}_{\pi}\right) = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.21)$$

Si se desprecia los términos convectivos, la densidad de la fase π puede salir del gradiente, obteniendo:

$$\frac{\partial \rho_{\pi}}{\partial t} + \rho_{\pi} \operatorname{div} \left(\boldsymbol{v}_{\pi} \right) = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.22)$$

Consideramos la relación volumétrica de cada constituyendo n_{π} de forma tal que,

$$\sum_{\pi=n,f} n_{\pi} = 1 \qquad n_f + n_s = 1 \tag{2.23}$$

Reemplazando la ecuación 2.22 para cada fase y dividiendo en ρ_f , se obtiene

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_f = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma$$
(2.24)

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \tag{2.25}$$

Multiplicando ambas expresiones por n_f y n_s respectivamente, y sumando ambas expresiones, se llega a:

$$n_f \nabla \cdot \boldsymbol{v}_f + n_s \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + \frac{n_f}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{n_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.26)$$

Como $n_s = (1 - n_f)$, se obtiene

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + n_f \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) + \frac{n_f}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{n_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.27)$$

Por otro lado, de la ecuación 2.25 se puede despejar,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_s = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \tag{2.28}$$

Si se llama K_{π} al módulo volumétrico de la fase π y K_t el módulo volumétrico del medio poroso en el cual, por teoría de mezclas, se verifica que $K_t = n_s K_s + n_p K_p$. Si se desprecia

la resistencia mecánica de la parte porosa, se verifica que $n_s = K_t/K_s$. Entonces se puede escribir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_s = -\frac{K_s}{K_t} \frac{n_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$
(2.29)

Usando el coeficiente de Biot, $\alpha = 1 - K_t/K_s$, podemos reescribir como:

$$(\alpha - 1) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s = \frac{n_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$
(2.30)

Asumiendo una relación fenomenológica para la fase fluida, considerando una proporcionalidad entre los cambios de densidad de la fase fluida y la presión de poros, escrita como sigue:

$$\frac{1}{Q}dp = \frac{n_f}{\rho_f}d\rho_f$$
(2.31)

Con la compresibilidad general o módulo de Biot:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\alpha - n_f}{K_s} + \frac{n_f}{K_f} \tag{2.32}$$

Reemplazando estos conceptos en la ecuación 2.27, se obtiene:

$$\alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + n_f \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad en \ \Omega \setminus \Gamma \qquad (2.33)$$

2.5. Condiciones de borde

Las ecuaciones de balance 2.21 y 2.33 en conjunto con las relaciones constitutivas 2.4, 2.5 y 2.7 forman un sistema cerrado de ecuaciones cuyas incógnitas son $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_f, p$ y $\boldsymbol{v}_s = d\boldsymbol{u}/dt$, con lo que el problema quedará definido con las condiciones iniciales y de borde. Las condiciones iniciales, no requieren ninguna consideración en especial en cuanto al problema estándar de medios porosos saturados continuos, mientras que para las condiciones de borde se deben tener en cuenta algunos requirimientos. Dada la naturaleza del problema,

se necesitará considerar dos conjuntos diferentes de condiciones, uno correspondiente al flujo y otro al campo de deformación. Para cada uno de ellas, pueden haber condiciones de borde Dirichlet y/o Neumann. Ya que las soluciones se buscan dentro del dominio $\Omega \setminus \Gamma_d$, la frontera $\partial(\Omega \setminus \Gamma_d)$ vendrá determinada por la unión del contorno Γ_d con Ω y por el conjunto de discontinuidades Γ_d (ver Figura 2.2). El contorno $\partial(\Omega \setminus \Gamma_d)$ se particiona en $\partial(\Omega \setminus \Gamma_d) = \Gamma_q \cup \Gamma_p$ para las condiciones de borde de flujo y en $\partial(\Omega \setminus \Gamma_d) = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ para las condiciones de borde de deformación. En esta tesis, se considera las siguientes condiciones:

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \qquad en \ \Gamma_u \tag{2.34}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\bar{t}} \qquad en \ \Gamma_t \tag{2.35}$$

donde n es el vector normal a Γ , \overline{t} es la fuerza externa prescripta y \overline{u} es el desplazamiento prescripto sobre el contorno. Mientras que las condiciones de borde de flujo serán:

$$p = \overline{p} \qquad en \ \Gamma_p \tag{2.36}$$

$$n\left(\boldsymbol{v}_{f}-\boldsymbol{v}_{s}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\overline{v}\qquad en\ \Gamma_{q}$$

$$(2.37)$$

donde \overline{v} es la velocidad de salida/entrada del flujo prescripta y \overline{p} es la presión prescripta en el contorno. Una partición similar a las condiciones de borde puede darse en principio también para las discontinuidades Γ_d . Sin embargo, en Γ_d se considerará solo condiciones de borde del tipo Neumann para deformación y para el flujo. La definición de estas condiciones es esencialmente debido a que ellas determinan el acomplamiento entre el flujo, el medio poroso alrededor de la discontinuidad y el flujo dentro de la misma. Para las condiciones de borde del tipo Neumann para el campo de deformaciones, se considera que las fuerzas sobre cada cara de Γ_d son iguales y son impuestas por la presión de fluido dentro de la discontinuidad Γ , tal que

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = p\boldsymbol{n}_{\Gamma} \qquad en \ \Gamma_d \tag{2.38}$$

donde $\boldsymbol{n}_{\Gamma_d}$ es el vector normal a Γ_d . Como se observa en la condición de borde, la presión es continua a través de discontinuidad Γ_d . Por otro lado, es natural asumir que la velocidad de campo de la fase sólida y de la fase fluida sean discontinuo a lo largo de fisura Γ_d . Introduciendo la notación $[\![\boldsymbol{w}]\!] := \boldsymbol{w} \mid_{\Gamma_d^+} - \boldsymbol{w}_f \mid_{\Gamma_d^-}$ para denotar el salto del campo \boldsymbol{w} a lo largo de Γ_d , la condición de borde se escribirá como;

$$n_f \llbracket \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s \rrbracket \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d} = q \qquad en \ \Gamma_d \tag{2.39}$$
donde q representa el flujo de fluido a través de la discontinuidad Γ_d . En las aplicaciones, puede considerarse el caso de que el flujo es prescripto, o bien el caso donde el flujo dependa del fluido que circule por la discontinuidad. Un ejemplo de este último caso se da, si se asume un flujo laminar que fluye a través de dos placas paralelas (representando las caras de la fisura). Esta condición, de ahora en adelante, se refiere como flujo de Poiseuille dentro de la discontinuidad, y se escribe como:

$$q = -k_d \nabla p \cdot \boldsymbol{t}_{\Gamma_d} \qquad en \ \Gamma_d \tag{2.40}$$

donde t_{Γ_d} es el vector tangente a Γ_d y k_d es la conductividad hidraúlica, dada en Witherspoon et al. (1980) como:

$$k_d = \frac{(2h)^3}{12 \ f\mu} \tag{2.41}$$

donde 2h es el espesor de la fisura, μ es la viscocidad del fluido y f es un coeficiente que depende de la rugosidad de las caras de la fisura y tiene en cuenta las desviaciones de las condiciones ideales del flujo laminar modelada con la ley cúbica. El valor de fdepende del material del medio poroso y es obtenido de forma experimental siguiendo el procedimiento de laboratorio descripto en Witherspoon et al. (1980), página 1018. El caso de discontinuidades del tipo hueco, puede ser descripto a través de la expresión 2.41, considerando $k_d \to \infty$, resultando una presión constante a lo largo de la fractura. Combinando las expresiones 2.39 y 2.40, se obtiene la condición de borde sobre Γ_d :

$$n_f \llbracket \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s \rrbracket \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d} = -k_d \nabla p \cdot \boldsymbol{t}_{\Gamma} \qquad en \ \Gamma_d$$
(2.42)

De acuerdo a esta condición, se asume que el flujo que entra en la cavidad se difunde tangencialmente dentro de ella. Como consecuencia de esto, el flujo de fluido normal a la fisura es discontinuo, y por lo tanto el gradiente de presión ∇p también lo es. A través de Γ_d , la presión de poros p es continua pero no diferenciable en Γ_d .

Es posible también considerar otros modelos mas detallados para la descripción del flujo de fluido a lo largo de la discontinuidad. Se presentan algunos modelos en la sección 2.7. En la Tabla 2.2, se presentan la forma fuerte del conjunto de ecuaciones que gobiernan el problema junto con las condiciones de bordes detalladas.

$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$	$en \Omega \setminus \Gamma$
$\alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + n_f \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$	$en \Omega \setminus \Gamma$
$\boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{e} + (K\epsilon - bp)\boldsymbol{1}$	
$\phi = b\epsilon - \frac{p}{N}$	
$n\left(oldsymbol{v}_{f}-oldsymbol{v}_{s} ight)=-k_{f} abla p$	
$oldsymbol{u}=\overline{oldsymbol{u}}$	$en \ \Gamma_u$
$\sigma n = ar{t}$	$en \ \Gamma_t$
$p = \overline{p}$	$en \ \Gamma_p$
$n\left(oldsymbol{v}_{f}-oldsymbol{v}_{s} ight)\cdotoldsymbol{n}=\overline{v}$	$en \ \Gamma_q$
$oldsymbol{\sigma}oldsymbol{n}=poldsymbol{n}_{\Gamma}$	$en \ \Gamma_d$
$n_f \llbracket oldsymbol{v}_f - oldsymbol{v}_s rbrace \cdot oldsymbol{n}_{\Gamma_d} = -k_d abla p \cdot oldsymbol{t}_{\Gamma}$	$en \ \Gamma_d$
$oldsymbol{u}(t=0)=oldsymbol{u}_0$	$en \Omega \setminus \Gamma$
$p(t=0) = p_0$	$en \Omega \setminus \Gamma$

TABLA 2.2: Forma fuerte de las ecuaciones gobernantes

2.6. Ecuaciones que gobiernan el problema de medios porosos fisurados: Forma Débil

Para obtener la forma débil del balance de ecuaciones, se debe multiplicar el balance de momento y el de masa por una función de prueba cinemáticamente admisible para el desplazamiento del esqueleto η , y para la presión ζ . Integrando sobre el dominio Ω y usando el teorema de divergencia, se obtiene:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_d} \llbracket \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d} \, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\partial(\Omega \setminus \Gamma_d)} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{t}_p \, \mathrm{d}\Gamma$$
(2.43)

$$-\int_{\Omega} \alpha \zeta \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{s} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} k_{f} \nabla \zeta \cdot \nabla p \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \zeta \frac{1}{Q} \dot{p} \, \mathrm{d}\Omega + + \int_{\Gamma_{d}} \boldsymbol{n}_{\Gamma_{d}} \cdot \left[\zeta n_{f} \left(\boldsymbol{v}_{f} - \boldsymbol{v}_{s} \right) \right] \, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\partial(\Omega \setminus \Gamma_{d})} \zeta \boldsymbol{n}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{q}_{p} \, \mathrm{d}\Gamma$$

$$(2.44)$$



FIGURA 2.2: Condiciones de bordes de un medio poroso saturado.

El acoplamiento del momento deriva a partir de las tensiones a través de las caras de las discontinuidades y la presión aplicada por el fluido en las discontinuidades. Suponiendo la continuidad de las tensiones desde la cavidad hacia el volumen, se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d} = \boldsymbol{t}_d - p \boldsymbol{n}_{\Gamma_d} \tag{2.45}$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \zeta) \cdot \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_d} \llbracket \zeta \rrbracket \cdot (\boldsymbol{t}_d - p\boldsymbol{n}_{\Gamma_d}) \, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\partial(\Omega \setminus \Gamma_d)} \zeta \cdot \boldsymbol{t}_p \, \mathrm{d}\Gamma$$
(2.46)

En la discontinuidad, hay un valor único de tensión, por lo que debe haber un valor de la presión p en ambas caras de la discontinuidad, y deben permanecer constante para la función de prueba de la presión κ . El término de acoplamiento de la transferencia de masa para el agua puede reescribirse como:

$$-\int_{\Omega} \alpha \zeta \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{s} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} k_{f} \nabla \zeta \cdot \nabla p \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \zeta \frac{1}{Q} \dot{p} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{d}} \zeta \boldsymbol{n}_{\Gamma_{d}} \cdot n_{f} [\![\boldsymbol{v}_{f} - \boldsymbol{v}_{s}]\!] \, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\partial(\Omega \setminus \Gamma_{d})} \zeta \boldsymbol{n}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{q}_{p} \, \mathrm{d}\Gamma$$

$$(2.47)$$

donde $q_d = n_f [\![v_f - v_s]\!]$ representa el flujo de fluido a través de las caras de la discontinuidad.

20

2.7. Flujo a través de la discontinuidad

A continuación, se describen diferentes modelos propuestos en la literatura para la simulación del flujo dentro de la fisura y el acoplamiento con el campo de desplazamiento respectivo.

2.7.1. Modelo de R. de Borst (2004)



FIGURA 2.3: Composición del dominio Ω^+ y Ω^- separados por la discontinuidad Γ_d .

Si el medio presenta una discontinuidad discreta del campo de desplazamiento, de Borst et al. (2004), asume que el campo de presiones se hace discontinuo en la fisura. La resolución es mediante el uso de la herramienta XFEM. Considera funciones de enriquecimiento del tipo Heaviside y adopta para el flujo dentro de la discontinuidad, una relación similar a la ley de Darcy, en donde el flujo a través de la interface es descripto como:

$$\boldsymbol{n}_{\Gamma_d} \cdot \boldsymbol{q}_d = -k_d \left(p^+ - p^- \right) = -k_d \tilde{p}|_{x \in \Gamma_d}$$
(2.48)

donde k_d es la permeabilidad de la discontinuidad, p^+ y p^- es la presión del fluido medida en las caras de las discontinuidad en Ω^+ y Ω^- respectivamente y $\tilde{p} = (p^+ - p^-)$ es el salto de presión. Si la discontinuidad fuese impermeable $k_d = 0$, por lo que $\mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{q}_d = 0$.

Otra posible forma de definir el flujo a través de la discontinuidad, es a través de la consideración de una fuente lineal en el contorno Γ_d , tal que

$$\boldsymbol{n}_{\Gamma_d} \cdot \boldsymbol{q}_d = q_d |_{x \in \Gamma_d} \tag{2.49}$$

2.7.2. Modelo de R. de Borst (2009).a

En el paper de Borst *et al.* (2009)), el autor asume que el campo de presiones es continuo en la discontinuidad pero el gradiente en la dirección normal es discontinuo en la fisura. De forma similar, la resolución es a través de la herramienta XFEM. Considera como función de enriquecimiento para el campo de presión a la función distancia, la cual es continua en todo el dominio, con gradiente discontinuo. Para la evaluación del flujo dentro de la discontinuidad, considera el balance d masa en la discontinuidad. Al asumir un flujo Newtoniano, el balance de masa resulta,

$$\dot{\rho_f} + \rho_f \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.50}$$

Si suponemos pequeños cambios en las concentraciones, entonces los términos convectivos pueden ser despreciados. Se supone que el primer término puede ser despreciado porque el problema es monofásico en la cavidad y las velocidades son por lo tanto mucho mayores que las del medio poroso. Considerando un problema en dos dimensiones, el balance de masa dentro de la cavidad queda,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{2.51}$$

con $v = v \cdot t_{\Gamma_d}$ y $w = v \cdot n_{\Gamma_d}$ (ver Figura 2.4), las componentes tangencial y normal de la velocidad del fluido en la discontinuidad.



FIGURA 2.4: Definición de coordenadas, vector normal $\boldsymbol{n}_{\Gamma_d}$, vector tangencial $\boldsymbol{t}_{\Gamma_d}$ y ancho 2h de la discontinuidad Γ_d .

El salto de la velocidad de fluido normal a ambas caras de la fisura se calcula como:

$$\llbracket w_f \rrbracket = -\int_{-h}^{h} \frac{\partial v}{\partial x} \,\mathrm{d}y \tag{2.52}$$

El perfil de velocidad del flujo del fluido dentro de la discontinuidad debe ser conocido. Asumiendo un fluido Newtoniano, considerando la proporcionalidad entre la fuerza de corte y el gradiente de velocidad, considerando el flujo estacionario, la fuerza ejercida por la diferencia de presión en un ∂x debe igualar la fuerza de corte entre las láminas del fluido, e integrando entre y = -h y y = +h, y como condición de borde esencial $v = v_f$ en ambas caras de la fisura, el perfil resulta:

$$v(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(y^2 - h^2 \right) + v_f \tag{2.53}$$

La velocidad en las caras v_f deriva a partir de la velocidad del fluido relativa en el medio poroso, por lo que vale que,

$$n_f \left(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s \right) = -k_f \nabla p \tag{2.54}$$

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_s - n_f^{-1} k_f \nabla p \tag{2.55}$$

La proyección sobre la dirección de la discontinuidad será el producto escalar entre v_f y el vector t_{Γ_d}

$$v_f = \left(\boldsymbol{v}_s - n_f^{-1} k_f \nabla p\right) \cdot \boldsymbol{t}_{\Gamma_d}$$
(2.56)

Sustituyendo en la ecuación 2.51 y trabajando con la integral, se obtiene

$$\llbracket w_f \rrbracket = \frac{2}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3 \right) - 2h \frac{\partial v_f}{\partial x}$$
(2.57)

Esta ecuación nos da la cantidad de flujo atraído en el flujo transversal. Puede ser incluido en la forma débil del balance de masa del macroflujo para asegurar el acoplamiento entre el microflujo y el macroflujo. La diferencia en la velocidad normal de ambas caras de la fisura es $[w_s] = 2\partial h/\partial t$ por lo que el término de acoplamiento se convierte en:

$$\boldsymbol{n}_{\Gamma_d} \cdot \boldsymbol{q}_d = n_f \llbracket w_f - w_s \rrbracket$$

$$\boldsymbol{n}_{\Gamma_d} \cdot \boldsymbol{q}_d = \left(\frac{2h^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - 2h \frac{2v_f}{\partial x} - 2\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$
(2.58)

2.7.3.Modelo de R. de Borst (2009).b

Otra posibilidad que propone de Borst et al. (2009) para definir el flujo dentro de la discontinuidad, es asumir que las cavidades están parcialmente llenas de material sólido. El balance de masa para el fluido dentro de la cavidad será:

$$\alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + n_f \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$
(2.59)

donde α es el coeficiente de Biot. Como la apertura de la fisura es despreciable respecto a la longitud de la misma, en el balance de masa podemos tomar valores promedios para la sección. Integrando el primer término de la ecuación 2.59:

$$\int_{-h}^{h} \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{s} = \int_{-h} h \alpha \left(\frac{\partial v_{s}}{\partial x} + \frac{\partial w_{s}}{\partial y} \right) \, \mathrm{d}y = \int_{-h}^{h} \alpha \frac{\partial v_{s}}{\partial x} \, \mathrm{d}y - \alpha \llbracket w_{s} \rrbracket$$
(2.60)

donde v_s y w_s son las componentes tangencial y normal de la velocidad tangencial de la fisura. α puede asumirse constante en la sección transversal. Si consideramos una variación lineal de v_s con respecto a y, la integral puede resolverse como

$$\int_{-h}^{h} \alpha \frac{\partial v_s}{\partial x} \, \mathrm{d}y = \alpha \langle \frac{\partial v_s}{\partial x} \rangle y|_{-h}^{h} = 2\alpha h \langle \frac{\partial v_s}{\partial x} \rangle \tag{2.61}$$

donde $\langle \cdot \rangle$ implica el valor medio.

Integrando el segundo término de la ecuación 2.59,

$$\int_{-h}^{h} n_f \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) \, \mathrm{d}y = n_f \llbracket w_f - w_s \rrbracket + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{h} n_f \left(v_f - v_s \right) \, \mathrm{d}y \right) - \left[n_f \left(v_f(h) - v_s(h) \right) \frac{\partial h}{\partial x} - n_f \left(v_f(-h) - v_s(-h) \right) \frac{\partial (-h)}{\partial x} \right]$$
(2.62)

Introduciendo la ley de Darcy

$$n_f \left(v_f - v_s \right) = -k_d \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.63}$$

donde k_d es la permeabilidad, la cual depende principalmente de la apertura de la fisura, es decir $k_d = k_d(h)$. Introduciendo en la integral previa, y considerando que en las caras de la fisura, la permeabilidad es igual que la de la matriz, cumpliéndose que $\partial p(h)/\partial x =$ $\partial p(-h)/\partial x$, se obtiene

$$\int_{-h}^{h} n_f \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) \, \mathrm{d}y = n_f [\![\boldsymbol{w}_f - \boldsymbol{w}_s]\!] - 2h \frac{\partial k_d(h)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - 2k_d h \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$
(2.64)

Integrando el tercer término de la ecuación 2.59 y despreciando la variación de la presión respecto al tamaño de la cavidad,

$$\int_{-h}^{h} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \, \mathrm{d}y = \frac{2h}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.65}$$

El término $n_f \llbracket w_f - w_s \rrbracket$ se identifica como el término de acoplamiento $\boldsymbol{n}_{\Gamma_d} \cdot \boldsymbol{q}_d$ de la forma débil del balance de masa y recordando que $\llbracket w_s \rrbracket = 2\partial h/\partial t$, el término vale:

$$n_f \llbracket w_f - w_s \rrbracket = -\frac{2h}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + 2\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + 2\alpha h \langle \frac{\partial v_s}{\partial x} \rangle + 2h \frac{\partial k_d(h)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + 2k_d h \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$
(2.66)

2.7.4. Modelo de G. Meshcke

Los investigadores Becker & Meschke (2007) y Meschke *et al.* (2011) consideraron una relación similar a la ley de Darcy para la evaluación del flujo de fluido a través de la discontinuidad, en donde el flujo es proporcional al gradiente de presión tangencial a las caras de las fisuras y se escribe como

$$q_l^t = k_c^t \nabla^t p_c = \frac{w_c^2}{12\mu_l} \nabla^t p_c \tag{2.67}$$

donde k_c^t es la permeabilidad de la fisura y es función de la altura hidraúlica w_h , la cual vale

$$w_h = \frac{w_c^2}{R^{2,5}} \tag{2.68}$$

donde w_c es la apertura de la fisura y R es la rugosidad del material (Barton *et al.*, 1985). Por ejemplo, R = 15 para el hormigón (Meschke *et al.*, 2011).

2.7.5.Modelo de Witherspoon - Ley cúbica

Para la descripción del flujo dentro de una fisura, Witherspoon et al. (1980) consideró un flujo laminar que circula por dos placas planas paralelas, las cuales representan la discontinuidad. Partiendo de la ley cúbica, la cual de forma simplificada puede escribirse como $Q/\nabla h = C(2h)^3$, donde Q es el flujo, ∇h es la diferencia de altura hidraúlica, C es una constante que depende de la geometría y las propiedades del flujo y 2h es la apertura de fisura, considera la variación del flujo en ensayos experimentale al ajustarse la ley cúbica. De forma similar a la propuesta de Becker & Meschke (2007) y Meschke et al. (2011), el flujo resulta proporcial al gradiente de presión tangencial y se calcula como:

$$q_l^t = k_d \,\nabla p \cdot \boldsymbol{t}_{\Gamma_d} \tag{2.69}$$

donde \mathbf{t}_{Γ_d} es el vector tangente a la discontinuidad Γ_d y k_d es la conductividad hidraúlica, la cual se calcula como:

$$k_d = \frac{(2h)^2}{12f\,\mu} \tag{2.70}$$

donde 2h es el ancho de la discontinuidad, μ es la viscosidad del fluido y f es un coeficiente que depende de la rugosidad de la superficie de la fisura y tiene en cuenta la variación de la permeabilidad comparada al caso ideal de un flujo laminar cuando circula por planos paralelos modelado por la ley cúbica. Los valores de f depende del material del medio poroso y se obtiene mediante ensayos experimentales (el procedimiento del ensayo se encuentra en Witherspoon et al. (1980), página 1018). Según el autor del trabajo, los valores f oscilan en f = 1 y f = 1,65. Esta hipótesis, se lo conoce también como flujo de Poiseuille dentro de una fisura.

2.7.6. Modelo de A.R. Khoei

Para la integración del flujo dentro de la fisura, Khoei & Haghighat (2011), Mohammadnejad & Khoei (2013b), Mohammadnejad & Khoei (2013a), Khoei *et al.* (2014), Rethore *et al.* (2007b) recurren a plantear el balance de masa en el dominio Ω^* complementario al dominio Ω . Suponiendo que en Ω^* el coeficiente de Biot vale $\alpha = 1$ y $n_f = 1$, es decir que dentro de la fisura, el fluido ocupa todo el volumen, el balance de masa en Ω^* resulta:

$$\int_{\Omega^*} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s \delta p \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega^*} \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) \delta p \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega^*} \delta p \, \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$
(2.71)

Aplicando nuevamente el teorema de divergencia e introduciendo la Ley de Darcy (2.7) se obtiene

$$\int_{\partial(\Omega\setminus\Gamma_d)} \llbracket \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s \rrbracket \cdot \boldsymbol{n}^{\Gamma} \delta p \, \mathrm{d}a = -\int_{\Omega^*} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s \delta p \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega^*} \nabla \left(k_d \, p\right) \cdot \nabla \delta p \, \mathrm{d}v - \int_{\Omega^*} \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}v \,.$$
(2.72)

Considerando que la apertura de la fisura es mucho menor que la longitud de la misma y suponiendo que la componente tangencial de la velocidad v_{sx^*} varía linealmente con la dirección y^* , la primera integral sobre Ω^* de (2.71) se calcula

$$\int_{\Omega^*} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s \delta p \, \mathrm{d}v = \int_{\Gamma_d} \int_{-h}^{h} \left(\frac{\partial v_{sx^*}}{\partial x^*} + \frac{\partial v_{sy^*}}{\partial y^*} \right) \delta p \, \mathrm{d}y^* \mathrm{d}a$$

$$= \int_{\Gamma_d} \left(2h \left\langle \frac{\partial v_{sx^*}}{\partial x^*} \right\rangle + \left[v_{sy^*} \right] \right) \delta p \, \mathrm{d}a$$
(2.73)

donde el símbolo $\langle \cdot \rangle$ representa el valor medio de la función. De forma similar, la derivada tangencial de la presión no varía con la dirección y^* y la derivada normal desaparece ya que la presión es considerada constante en la altura de la fisura, por lo cual la segunda integral de (2.71) se escribe

$$\int_{\Omega^*} \nabla (k_d p) \cdot \nabla \delta p \, \mathrm{d}v = \int_{\Gamma_d} \int_{-h}^{h} k_d \nabla p \cdot \nabla \delta p \, \mathrm{d}y^* \mathrm{d}a = \int_{\Gamma_d} 2h k_d \frac{\partial p}{\partial x^*} \frac{\partial \delta p}{\partial x^*} \mathrm{d}a \qquad (2.74)$$

De forma similar, la tercera integral se resuelve como

$$\int_{\Gamma_d} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}v = \int_{\Gamma_d} 2h \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}a \tag{2.75}$$

y el flujo dentro de la fisura se escribe como

$$\int_{\Gamma_d} \llbracket \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s \rrbracket \cdot \boldsymbol{n}^{\Gamma} \delta p \, \mathrm{d}a = -\int_{\Gamma_d} 2h \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{v}_{sx^*}}{\partial x^*} \right\rangle \delta p \, \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_d} \llbracket \boldsymbol{v}_{sy^*} \rrbracket \delta p \, \mathrm{d}a \\
+ \int_{\Gamma_d} 2h k_d \frac{\partial p}{\partial x^*} \frac{\partial \delta p}{\partial x^*} \, \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_d} 2h \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}a$$
(2.76)

2.8. Solución numérica para el problema hidromecánico acoplado.

En esta sección, se describe el conjunto de ecuaciones discretas de la forma débil. Las mismas, son obtenidas aplicando el método XFEM para la discretización de las variables de estado discontinuas y/o con gradientes discontinuos, y el método de Euler para la discretización temporal. Las funciones de enriquecimiento son representadas por la función Heaviside para el campo de desplazamiento, con la función distancia para el campo de presión y con funciones asintóticas para las aproximaciones cerca de la cabeza de la fisura. Se menciona que si las funciones de enriquecimiento se centran a lo largo de la discontinuidad, la función Heaviside presenta un salto unitario en la misma, mientras que la función distancia se caracteriza por ser continua en todo el dominio, mientras que el gradiente normal a la fisura es disconinuo. Las funciones asintóticas surgen de la base de la solución exacta dada en la teoría de la mecánica de fractura elástica lineal (Oller, 2001).

2.8.1. Discretización espacial del problema acoplado.

Para la discretización espacial, el dominio Ω se divide en elementos finitos en donde los campos de desplazamiento y presión son interpolados. Para considerar la presencia de discontinuidades en los elementos, siguiendo la propuesta de Moes *et al.* (1999) y Pommier *et al.* (2013), se enriquece la aproximación standard de elementos finitos empleando la propiedad de la partición de la unidad de las funciones de forma. Usando el método de Galerkin, se aproximan por lo tanto los campos de desplazamiento \boldsymbol{u} , de presión p y las respectivas funciones de prueba de desplazamiento y presión, $\delta \boldsymbol{u}$ y δp como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{u1}^{i}(\mathbf{x}) \, \mathbf{u}_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{u2}^{j}(\mathbf{x}) \, \mathbf{u}_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{u3}^{k}(\mathbf{x}) \, \mathbf{u}_{3}^{k} \\
p(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{p1}^{i}(\mathbf{x}) \, p_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{p2}^{j}(\mathbf{x}) \, p_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{p3}^{k}(\mathbf{x}) \, p_{3}^{k} \\
\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{u1}^{i}(\mathbf{x}) \, \delta \mathbf{u}_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{u2}^{j}(\mathbf{x}) \, \delta \mathbf{u}_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{u3}^{k}(\mathbf{x}) \, \delta \mathbf{u}_{3}^{k} \\
\delta p(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{p1}^{i}(\mathbf{x}) \, \delta p_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{p2}^{j}(\mathbf{x}) \, \delta p_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{p3}^{k}(\mathbf{x}) \, \delta p_{3}^{k}
\end{aligned}$$
(2.77)

donde I, J, K denotan el conjunto de nodos estándard, nodos enriquecidos por la función Heaviside y nodos enriquecidos por funciones asintóticas alrededor de la cabeza de la fisura respectivamente, $(\boldsymbol{u}_1^i, p_1^i)$ con $i \in I$ denotan los valores nodales de desplazamiento y presión correspondientes a la interpolación estándard de dichos campos, mientras que $(\boldsymbol{u}_2^j, p_2^j)$ y $(\boldsymbol{u}_3^k, p_3^k)$ con $j \in J, k \in K$, representan los valores nodales de desplazamiento y presión enriquecidos. Las funciones de forma estándard y enriquecidas para los campos de desplazamientos y presión se denominan N_{u1}^i , N_{u2}^j , N_{u3}^k , N_{p1}^i , N_{p2}^j y N_{p3}^k respectivamente.

En el presente trabajo se utilizan las funciones de forma enriquecidas propuestas en Moes et al. (1999) y de Borst et al. (2009), las cuales se escriben a continuación

$$N_{u2}^{j}(\boldsymbol{x}) = N_{u1}^{j}H(\boldsymbol{x}) \qquad N_{u3}^{k}(\boldsymbol{x}) = N_{u1}^{k}F(\boldsymbol{x}) N_{p2}^{j}(\boldsymbol{x}) = N_{p1}^{j}Z(\boldsymbol{x}) \qquad N_{p3}^{k}(\boldsymbol{x}) = N_{p1}^{k}G(\boldsymbol{x})$$
(2.78)

donde $H \neq Z$ son las funciones de Heaviside y de distancia, centradas en la discontinuidad, $F \neq G$ son funciones asintóticas en el entorno de la cabeza de la fisura, definidas como las bases de las soluciones analiticas para los campos de desplazamiento y presión,

$$H = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^+ \\ -1 & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^- \end{cases}; \ Z = \begin{cases} d & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^+ \\ -d & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^- . \end{cases}$$
(2.79)

$$\{F(r,\theta)\}_{l=1}^{4} = \{\sqrt{r}\cos\theta/2, \sqrt{r}\sin\theta/2, \sqrt{r}\sin\theta/2\sin\theta, \sqrt{r}\cos\theta/2\sin\theta\}$$

$$G(r,\theta) = \sqrt{r}\sin\theta/2$$

$$(2.80)$$

con r la distancia hasta la cabeza de la fisura, d la función distancia (menor longitud desde el punto \boldsymbol{x} a la fisura) y θ el ángulo con la dirección de la fisura. En Mohammadnejad & Khoei (2013b) y Khoei & Vahab (2014) se propone una variante para el enriquecimiento anterior, el cual lo denominaremos con *, como sigue

29

$$N_{u2}^{*j}(x) = N_{u1}^{j} (H(x) - H(x_{j})) \qquad N_{u3}^{*k}(x) = N_{u1}^{k} (F(x) - F(x_{k})) N_{p2}^{*j}(x) = N_{p1}^{j} (Z(x) - Z(x_{j})) \qquad N_{p3}^{*k}(x) = N_{p1}^{k} (G(x) - G(x_{k}))$$
(2.81)

donde \boldsymbol{x}_j es la coordenada del nodo j. La ventaja de esta variante a diferencia de la anterior es que las variables nodales de desplazamiento y presión globales equivalen a las variables nodales standard, y ello debido a que $N_{u1}^j(H(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x}_j)) = N_{p1}^j(Z(\boldsymbol{x}) - Z(\boldsymbol{x}_j)) = 0$. Para el campo de desplazamiento, se deben integrar únicamente los elementos que contienen la fisura. Para el campo de presión, se deben integrar además los elementos adyacentes a estos elementos.

En Cordero & Diez (2008) se propone introducir una función arista para el enriquecimiento, debido a que dicha función se anula en todos los elementos que no contienen la fisura y, en los elementos que sí la contienen, resulta nula en los nodos. Las funciones de forma enriquecidas se identifican con [‡], y escriben como sigue

$$\boldsymbol{N}_{u2}^{\dagger j}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{u1}^{j} \left(\sum_{r \in J} (\boldsymbol{N}_{a1}^{r} H(\boldsymbol{x}_{r})) - H(\boldsymbol{x}) \right) \qquad \boldsymbol{N}_{u3}^{\dagger k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{u1}^{k} \left(\sum_{r \in J} (\boldsymbol{N}_{a1}^{r} F(\boldsymbol{x}_{r})) - F(\boldsymbol{x}) \right) \\
\boldsymbol{N}_{p2}^{\dagger j}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{p1}^{j} \left(\sum_{r \in J} (\boldsymbol{N}_{a1}^{r} Z(\boldsymbol{x}_{r})) - Z(\boldsymbol{x}) \right) \qquad \boldsymbol{N}_{p3}^{\dagger k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{p1}^{k} \left(\sum_{r \in J} (\boldsymbol{N}_{a1}^{r} G(\boldsymbol{x}_{r})) - G(\boldsymbol{x}) \right) \\$$
(2.82)

La forma discretizada de las ecuaciones que gobiernan el problema, ecuación de equilibrio $(3.98)_1$ y de continuidad $(3.98)_2$ en forma débil resulta como sigue

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{B}_{a(i)}^{T} : \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} - \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{B}}_{a(i)}^{T} (\boldsymbol{t}^{\Gamma} - p\boldsymbol{n}^{\Gamma}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_{\partial_{N}\Omega} \boldsymbol{B}_{a(i)}^{T} \cdot \boldsymbol{t}^{N} \, \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$$
(2.83)

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{N}_{p(i)}^{T} \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{s} \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_{p(i)}^{T} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{K_{f}} \, \mathrm{d}v - \int_{\Omega} \boldsymbol{B}_{p(i)}^{T} \cdot \boldsymbol{q}^{m} \, \mathrm{d}v + \int_{\Gamma_{d}} \boldsymbol{N}_{p(i)}^{T} \boldsymbol{v}_{r} \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_{q}} \boldsymbol{N}_{p(i)}^{T} \boldsymbol{v}_{r} \, \mathrm{d}a = 0$$

$$(2.84)$$

con i = 1, 2, 3 y N y $B = \nabla N$ denotan las funciones de formas y sus gradientes respectivamente. Las ecuaciones discretas 2.83 y 2.84 pueden representarse matricialmente por:

$$C\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{2.85}$$

donde $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, p_1, p_2, p_3]$ es el vector de incógnitas nodales, mientras que las matrices $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}$ y \boldsymbol{f} se describen en la sección 2.8.3.

Discretización temporal del problema acoplado. 2.8.2.

La discretización temporal de las ecuaciones 3.134 se realiza utilizando el método de Euler implícito, tal que:

$$F_{n+1} = C_{n+1} \frac{\Delta x}{\Delta t} + K_{n+1} x_{n+1} + f_{n+1} = 0$$
 (2.86)

donde $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n$ y $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, siendo \boldsymbol{x}_{n+1} y \boldsymbol{x}_n los vectores incógnitas en los tiempos t_{n+1} y t_n respectivamente. Las matrices C y K vinculan las incógnitas nodales de desplazamiento y de presión, por lo que el sistema resultante está completamente acoplado. En la sección 2.8.3 se detallan las elementos de las matrices resultantes.

2.8.3. Matrices resultantes y vectores de carga

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \widehat{C_{a1p1}} & \widehat{C_{a1p2}} & \widehat{C_{a1p3}} \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{C_{a2p1}} & \widehat{C_{a2p2}} & \widehat{C_{a2p3}} \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{C_{a3p1}} & \widehat{C_{a3p2}} & \widehat{C_{a3p3}} \\ \hline \boldsymbol{C_{p1a1}} & \boldsymbol{C_{p1a2}} & \boldsymbol{C_{p1a3}} & \boldsymbol{C_{p1p1}} + \widehat{C_{p1p1}} & \boldsymbol{C_{p1p2}} + \widehat{C_{p1p3}} + \widehat{C_{p1p3}} \\ \hline \boldsymbol{C_{p2a1}} & \boldsymbol{C_{p2a2}} & \boldsymbol{C_{p2a3}} & \boldsymbol{C_{p2p1}} + \widehat{C_{p2p1}} & \boldsymbol{C_{p2p2}} + \widehat{C_{p2p2}} & \boldsymbol{C_{p2p3}} + \widehat{C_{p2p3}} \\ \hline \boldsymbol{C_{p3a1}} & \boldsymbol{C_{p3a2}} & \boldsymbol{C_{p3a3}} & \boldsymbol{C_{p3p1}} + \widehat{C_{p3p1}} & \boldsymbol{C_{p3p2}} + \widehat{C_{p3p2}} & \boldsymbol{C_{p3p3}} + \widehat{C_{p3p3}} \end{bmatrix}$$
(2.87)

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{a1a1} & \boldsymbol{K}_{a1a2} & \boldsymbol{K}_{a1a3} & \boldsymbol{K}_{a1p1} & \boldsymbol{K}_{a1p2} & \boldsymbol{K}_{a1p3} \\ \boldsymbol{K}_{a2a1} & \boldsymbol{K}_{a2a2} & \boldsymbol{K}_{a2a3} & \boldsymbol{K}_{a2p1} & \boldsymbol{K}_{a2p2} & \boldsymbol{K}_{a2p3} \\ \boldsymbol{K}_{a3a1} & \boldsymbol{K}_{a3a2} & \boldsymbol{K}_{a3a3} & \boldsymbol{K}_{a3p1} & \boldsymbol{K}_{a3p2} & \boldsymbol{K}_{a3p3} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{p1p1} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p1p1}} & \boldsymbol{K}_{p1p2} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p1p3}} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p1p3}} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{p2p1} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p2p1}} & \boldsymbol{K}_{p2p2} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p2p2}} & \boldsymbol{K}_{p2p3} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p2p3}} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{p3p1} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p3p1}} & \boldsymbol{K}_{p3p2} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p3p2}} & \boldsymbol{K}_{p3p3} + \widehat{\boldsymbol{K}_{p3p3}} \end{bmatrix}$$
(2.88)

_

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{a1} \\ \boldsymbol{f}_{a2} \\ \boldsymbol{f}_{a3} \\ \boldsymbol{f}_{p1} \\ \boldsymbol{f}_{p2} \\ \boldsymbol{f}_{p3} \end{bmatrix}$$
(2.89)

donde:

$$C_{p(i)a(j)} = -\int_{\Omega} \alpha N_{p(i)}^{T} \boldsymbol{m}^{T} \boldsymbol{B}_{a(j)} \, \mathrm{d}V$$

$$C_{p(i)p(j)} = \int_{\Omega} K_{f}^{-1} N_{p(i)}^{T} N_{p(j)} \, \mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_{a(i)a(j)} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}_{a(i)}^{T} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_{a(j)} \, \mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_{a(i)p(j)} = -\int_{\Omega} \alpha \boldsymbol{B}_{a(i)}^{T} \boldsymbol{m} N_{p(j)} \, \mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_{p(i)p(j)} = -\int_{\Omega} k_{f} \boldsymbol{B}_{p(i)}^{T} \boldsymbol{B}_{p(j)} \, \mathrm{d}V$$

$$\widehat{\boldsymbol{C}_{a(i)p(j)}} = -\int_{\Gamma} N_{p(i)}^{T} 2h \, \boldsymbol{t}_{\Gamma} \cdot \langle \boldsymbol{B}_{a(j)} \rangle \, \mathrm{d}s - \int_{\Gamma} N_{p(i)}^{T} [\boldsymbol{B}_{a(j)}] \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma} \, \mathrm{d}s$$

$$\widehat{\boldsymbol{C}_{p(i)p(j)}} = -\int_{\Gamma} (\boldsymbol{B}_{p(i)}^{T} \cdot \boldsymbol{t}_{\Gamma}^{T}) \, 2h \, k_{d} \, (\boldsymbol{t}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{B}_{p(j)}) \, \mathrm{d}s$$

$$\widehat{\boldsymbol{K}_{p(i)p(j)}} = -\int_{\Gamma} (\boldsymbol{B}_{p(i)}^{T} \cdot \boldsymbol{t}_{\Gamma}^{T}) \, 2h \, k_{d} \, (\boldsymbol{t}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{B}_{p(j)}) \, \mathrm{d}s$$

$$f_{a(i)} = \int_{\partial_{i}\Omega} N_{a(i)}^{T} \bar{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}s$$

$$f_{p(i)} = \int_{\partial\Omega} N_{p(i)}^{T} \bar{\boldsymbol{q}} \, \mathrm{d}s$$

con $i, j = 1, 2, 3; \boldsymbol{m}^T = [1; 1; 0]; \boldsymbol{n}_{\Gamma}, \boldsymbol{t}_{\Gamma}$ vector normal y tangente a la fisura respectivamente.

Solución semianalítica para el problema de flujos 2.9. en medios porosos fisurados

A continuación, se presenta una solución para el flujo en 2D en régimen estacionario en medios porosos fisurados usando el método potencial complejo (Muskhelishvili, 1977),

(Liolios & Exadaktylos, 2006), (Pouya & Ghabezloo, 2010) para diferentes condiciones de borde de Γ_d . La aplicación de este método en conjunto con las condiciones de borde en Γ_d , transforma la ecuación del Laplaciano orignal en una ecuación integral singular de primer orden que luego se resuelve numéricamente usando un método de colocación y cuadratura numérica (Erdogan *et al.*, 1973).

El desarrollo de esta sección fue realizado durante esta tesis también y los resultados se volcaron en Luege *et al.* (2016), en el cual el autor de la tesis es co-autor del paper.



FIGURA 2.5: Fisura en una placa de dimensiones infinita. Notaciones.



FIGURA 2.6: Fisura en una placa de dimensiones infinitas: (A) sujeta a una presión constante p_0 en Γ_d , y (B) sujeta a un flujo constante q_{∞} en el infinito.

2.9.1. Solución analítica general del problema

Se considera un medio poroso saturado isotrópico infinito cuyo dominio denotamos como Ω , que contiene una discontinuidad lineal Γ_d modelada como un segmento. Se asume que

por Ω circula un flujo en estado estacionario q_{∞} con una inclinación β con respecto a la dirección de la fisura Γ_d (ver Figura 2.5). Bajo este supuesto, las ecuaciones de la poroelasticidad se desacoplan de la ecuación Laplaciana para la presión de poro:

$$\nabla \cdot \nabla p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad para \ (x, y) \in \Omega \setminus \Gamma_d$$
(2.91)

y en las ecuaciones de la elasticidad lineal para las tensiones efectivas. La solución general de 2.91 puede ser expresada en términos de la función potencial Goursat-Muskhelishvili (Muskhelishvili, 1977). Empleando la notación para la variable compleja $\hat{x} = x + iy$, donde $(x, y) \in \Omega$ y asumiendo:

$$p(\hat{x}) = 2\operatorname{Re}(\Phi(\hat{x})) \tag{2.92}$$

donde $\Phi(\hat{x})$ es de la forma:

$$\Phi\left(\widehat{x}\right) = \frac{q_{\infty}}{2}\widehat{x}e^{-i\beta} + \overline{\Phi}(\widehat{x})$$
(2.93)

donde $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(\widehat{x})$ es una función analítica en $\Omega \setminus \Gamma_d$ y singular en Γ_d . Se puede demostrar que 2.92 es solución de 2.91 en $\Omega \setminus \Gamma_d$.

La elección específica de $\overline{\Phi}$ depende de las condiciones de bordes a cumplir en Γ_d . Consideramos el caso donde se prescribe la presión a lo largo de la fisura Γ_d (ver Figura 2.6.A), y un flujo de Poiseuille prescripto a lo largo de Γ_d (ver Figura 2.6.B).

2.9.1.1. Presión prescripta dentro de la fisura

Para este caso, se considera la siguiente representación para la función potencial (Muskhelishvili, 1977), (Liolios & Exadaktylos, 2006):

$$\Phi\left(\widehat{x}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_d} \frac{\phi(t)}{t - \widehat{x}} dt$$
(2.94)

con $\phi(t)$ una función de densidad desconocida integrable y continua en Γ_d la cual debe cumplir la condición $p(\hat{x}(t)) = p_0(t)$ para $t \in \Gamma_d$, donde $p_0(t)$ es la variación prescripta de la presión a lo largo de la discontinuidad Γ_d . El potencial $\overline{\Phi}$ es una integral de Cauchy a lo largo de Γ_d , la cual es analitica en $\Omega \setminus \Gamma_d$ y se aproxima a cero para valores grandes de $|t - \hat{x}|$. Combinando las expresiones 2.94, 2.93 y 2.92, obtenemos:

$$p(\widehat{x}) = q_{\infty} \operatorname{Re}(\widehat{x}e^{-i\beta}) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_d} \frac{\phi(t)}{|t - t_0|} dt \qquad \widehat{x} \in \Omega \setminus \Gamma_d, \qquad t \in \Gamma_d$$
(2.95)

por lo que la especificación correcta de $\phi(t)$ se obtiene resolviendo la siguiente ecuación integral singular:

$$q_{\infty} \operatorname{Re}(t_0 e^{-i\beta}) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_d} \frac{\phi(t)}{|t - t_0|} dt = p_0(t_0) \qquad t_0 \in \Gamma_d$$
(2.96)

Flujo de Poiseuille prescripto dentro de la discontinuidad 2.9.1.2.

Para este caso, la función potencial queda representada por (Muskhelishvili, 1977), (Liolios & Exadaktylos, 2006):

$$\Phi\left(\widehat{x}\right) = \int_{\Gamma_d} \phi(t) \ln(\widehat{x} - t) \, dt \tag{2.97}$$

donde $\phi(t)$ es una función de densidad desconocida integrable y continua en Γ_d , la cual se encuentra haciendo cumplir las condiciones de borde Neumann en Γ_d expresando la condición del flujo de Poiseuille dentro de la fisura (ecuación 2.40). Con el fin de hacer cumplir 2.40, resulta más conveniente expresar el potencial complejo Φ de 2.93 en términos del flujo q dentro de la fisura. Para hacerlo, se expresa primero $\phi(t)$ como sigue:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{\partial p}{\partial x^*} \tag{2.98}$$

Si se combina las expresiones 2.98 y 2.97 y se reemplaza primero en 2.93 y luego en 2.92, se obtiene la siguiente representación de la presión del flujo:

$$p(\widehat{x}) = q_{\infty} \operatorname{Re}(\widehat{x}e^{-i\beta}) + \frac{1}{\pi k_f} \int_{\Gamma_d} \frac{\partial q}{\partial x^*} \ln|t - t_0| dt \qquad \widehat{x} \in \Omega \setminus \Gamma_d, \qquad t \in \Gamma_d$$
(2.99)

La expresión del flujo de Poiseuille 2.40 puede reescribirse como:

$$\frac{\partial p}{\partial x^*} = -\frac{q(t)}{k_d} \qquad \text{para } t \in \Gamma_d \tag{2.100}$$

de modo tal que integrando sobre Γ_d , se obtiene

$$p(t_0) - p(0) = -\int_0^{t_0} \frac{q(t)}{k_d} dt$$
 para $t_0 \in \Gamma_d$ (2.101)

Reemplazando 2.99 en 2.101, nos lleva al problema de encontrar q(t) para $t \in \Gamma_d$ tal que es solución de la siguiente ecuación integral:

$$q_{\infty} \operatorname{Re}(t_0 e^{-i\beta}) + \frac{1}{\pi k_f} \int_{\Gamma_d} \frac{\partial q(t)}{\partial x^*} \ln|t - t_0| dt = -\int_0^{t_0} \frac{q(t)}{k_d} dt \qquad t_0 \in \Gamma_d$$
(2.102)

donde se asumió que p(0) = 0.

2.9.2. Solución numérica de las ecuaciones singulares integrales

Para la solución numérica de las ecuaciones integrales singulares 2.96 y 2.102, se usan los métodos propuestos en Erdogan *et al.* (1973) donde, sin embargo, se debe elegir una cuadratura apropiada dependiendo el tipo de singularidad en los puntos extremos *a* y *b*. En estos puntos, la función ϕ puede ser limitada o tener una singularidad integrable y depende del problema en estudio. Cuando la función desconocida es el potencial de presión de poros, como es lo usual, ϕ es delimitada entre los puntos *a* y *b*. Para este caso, Erdogan *et al.* (1973) propone la fórmula de cuadratura Gauss-Chebyshev donde los puntos de integración $t_j \in \Gamma_d, j = 1, ..., N$, son los ceros del polinomio de Chebyshev de primer tipo de grado *N*, mientras que los puntos de colocación $t_{0i} \in \Gamma_d, i = 1, ..., N + 1$, donde la presión de poros *p* debe ser evaluada y son los ceros del polinomio de Chebyshev de segundo tipo de grado N + 1. Denotando $w(x^*)$ como la solución fundamental de la ecuación integral singular y $g(x^*)$ una función limitada, continua entre [a, b], puede escribirse a $\phi(x^*)$ como:

$$\phi(x^*) = w(x^*)g(x^*), \qquad a < x^* < b \tag{2.103}$$

En las siguientes subsecciones, se desarrollan métodos numericos para la determinación de $g(x^*)$ para condiciones de bordes Dirichlet y Neumann. Los valores de la función ϕ son determinados en puntos específicos como la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

2.9.2.1. Presión prescripta dentro de la fisura

En este caso, $q_{\infty} = 0$ y la distribución de presión dentro de la fisura $p_0(t_0)$ es conocida para todo $t_0 \in \Gamma_d$. Así, la ecuación 2.96 se convierte en:

$$p_0(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_d} \frac{\phi(t)}{|t - t_0|} dt$$
(2.104)

Para evaluar la presión de poros p en $\hat{x} \in \Omega$, necesitamos computar primero, la densidad ϕ desconocida en Γ_d de forma tal que 2.104 se verifique a lo largo de la fisura. Siguiendo Liolios & Exadaktylos (2006), Erdogan *et al.* (1973), la ecuación integral singular 2.104 se resuelve usando el método de colocación y la cuadratura de Gauss. Es decir, se hace

cumplir 2.104 en un conjunto discreto de puntos de colocación $t_j \in \Gamma_d$, con j = 1, ..., N. De esta manera, se obtiene un conjunto de N + 1 ecuaciones lineares (una ecuación por cada punto de colocación), las cuales son:

$$p_0(t_{0i}) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \frac{w_j g_j}{|t_j - t_{j0}|} \qquad i = 1, \dots, N+1$$
(2.105)

donde

$$w_j = w(t_j) = \frac{\pi}{N+1} \sin^2\left(\frac{j\pi}{N+1}\right)$$
 (2.106)

Cada ecuación de 2.105 depende de N incógnitas $g_j = g(t_j)$ dadas por los valores de gen los puntos de integración j, con j = 1, ..., N. Como resultado, 2.105 aparece como un sistema sobredeterminado de N + 1 ecuaciones con N incógnitas. Siguiendo Liolios & Exadaktylos (2006), Erdogan *et al.* (1973), se sugiere trabajar con N ecuaciones, descartando la ecuación N/2 + 1. La función fundamental w_j ha sido elegida de tal forma que la función de peso correspondiente y t_j corresponden a los ceros de los polinomios ortogonales relacionados al cuadratura gaussiana particular. Para el caso de las singularidades integrables en los puntos a y b, los polinomios ortogonales se reducen a los polinomios de primer tipo de Chebyshev, por lo que la colocación y los puntos de integración en el rango [a, b] que representan la fisura Γ_d , puede ser escrita como:

$$t_{j} = \frac{b-a}{2}\zeta_{j} + \frac{b+a}{2} \qquad j = 1, ..., N$$

$$t_{0i} = \frac{b-a}{2}\eta_{i} + \frac{b+a}{2} \qquad i = 1, ..., N+1$$
(2.107)

donde ζ_j son las raíces del polinomio de segundo tipo de orden N de Chebyshev, mientras η_i son las raíces del polinomio de primer tipo de orden N + 1 en el intervalo [-1, 1]. Los puntos ζ_j y η_i son dados como:

$$\zeta_{j} = \cos\left(\frac{j\pi}{N+1}\right) \qquad j = 1, ..., N$$

$$\eta_{i} = \cos\left(\frac{\pi(2i-1)}{2(N+1)}\right) \qquad i = 1, ..., N+1$$

(2.108)

Una vez que g_i , j = 1, ..., N son calculados, la presión y el gradiente de presion en el dominio entero Ω puede ser calculado en cualquier punto $\hat{x} \in \Omega \setminus \Gamma_d$ como:

$$p(\widehat{x}) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j g_j}{|t_j - \widehat{x}|}$$

$$\nabla_{\widehat{x}} p(\widehat{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p(\widehat{x})}{\partial x} - i \frac{\partial p(\widehat{x})}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} w_j g_j \frac{\cos\alpha(t_j \widehat{x})}{|t - \widehat{x}|^2} - i \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} w_j g_j \frac{\sin\alpha(t_j \widehat{x}_i)}{|t_j - \widehat{x}_i|^2}$$

$$(2.109)$$

donde α es el ángulo formado por el vector $t_i \hat{x}$ y el eje $O \hat{x}$. El algoritmo completo del esquema de integración numérica de la solución semianalítica se muestra en el Algoritmo 1.

2.9.2.2. Flujo de Poiseuille dentro de la fisura

En este caso, se considera un segmento de fisura recto Γ_d en un medio poroso saturado infinito, el cual esta sujeto a un gradiente de presión uniforme (A, 0), paralelo a la fisura Γ_d . El campo de presión en el infinito se escribe como

$$p_{\infty}(\widehat{x}) = 2\operatorname{Re}(q_{\infty}\widehat{x}e^{-i\beta}/2) = Ax \qquad (2.110)$$

donde $x = \operatorname{Re}(\widehat{x})$ es la parte real de \widehat{x} . Se considera Γ_d paramatrizado por la coordenada curvilínea $x^* \in [-1, 1]$. Integrando por partes la integral sobre la fisura Γ_d la expresión 2.102, 2.103 y la condición q(1) = q(-1), se obtiene:

$$p(\hat{x}) = Ax + \frac{k_d}{2\pi k_f} \int_{-1}^{1} \frac{\partial p}{\partial x^*} \frac{\hat{x} - x^*}{|\hat{x} - x^*|^2} \cdot t_{\Gamma_d}(x^*) dx^* s$$
(2.111)

donde t_{Γ_d} es el vector unitario tangente a Γ_d en $x^* \in \Gamma_d$. Si se considera un sistema de coordenadas cartesianas con el origen en el medio de la discontinuidad Γ_d y con el eje x a lo largo de la fisura, por simetría de las condiciones de bordes, se puede inferir que $p(-x,y) = -p(x,y), \partial p(-x,y)/\partial x^* = -\partial p(x,y)/\partial x^*$ y p(0,0) = 0. Llamando $x_0 \in$ [-1, 1], la presión puede ser expresada como:

$$p(x_0, 0) = \int_0^{x_0} \frac{\partial p}{\partial x^*} dx^*$$
(2.112)



FIGURA 2.7: Puntos de integración x_i , i = 1, ..., N + 1 y puntos de colocación $x_{0j}, j = 1, ..., N$ a lo largo de la fisura para N = 3.

Combinando las expresiones 2.111 y 2.112, y tomando en cuenta la simetría de la distribución de la presión de poros a lo largo de la fisura, el problema ahora se resume a encontrar la función $\partial p/\partial x^*$ definida en [0, 1] tal que para cualquier valor de $x_0 \in [0, 1]$ se verifique que:

$$\int_{0}^{x_{0}} \frac{\partial p}{\partial x^{*}} dx^{*} - \frac{k_{d}}{\pi k_{f}} \int_{0}^{1} \left(\frac{\partial p(x^{*})}{\partial x^{*}} - \frac{\partial p(x_{0})}{\partial x^{*}} \right) \frac{x_{0}}{x^{*}2 - x_{0}^{2}} dx^{*} - \frac{k_{d}}{2\pi k_{f}} \frac{\partial p(x_{0})}{\partial x^{*}} \ln \frac{1 - x_{0}}{1 + x_{0}}$$

$$= Ax_{0}$$

$$(2.113)$$

Para resolver la ecuación 2.113, también se aplica el método de las soluciones fundamentales (Muskhelishvili, 1977), considerando una solución de la forma $\partial p/\partial x^* = w(x^*)g(x^*)$, con $g(x^*)$ una función contínua limitada en [-1, 1] y $w(x^*)$ la solución fundamental de la ecuación integral singular (Muskhelishvili, 1977). Reemplazando $\partial p/\partial x^* = w(x^*)g(x^*)$ en la ecuación 2.113, el problema consiste en encontrar para cualquier $x_0 \in [0, 1]$, el valor de $g(x_0)$ sea tal que verifique que:

$$\int_{0}^{x_{0}} w(x^{*})g(x^{*})dx^{*} - \frac{k_{d}x_{0}}{\pi k_{f}} \int_{0}^{1} \frac{w(x^{*})g(x^{*}) - w(x_{0})g(x_{0})}{x^{*}2 - x_{0}^{2}} dx^{*} - \frac{k_{d}}{2\pi k_{f}}w(x_{0})g(x_{0})\ln\frac{1 - x_{0}}{1 + x_{0}}$$

$$= Ax_{0}$$
(2.114)

donde las singularidades en los puntos extremos fueron removidas. La ecuación integral singular 2.114 se resuelve manteniendo los puntos de colocación $x_{0i} \in \Gamma_d, i = 1, ..., N + 1$ y resolviendo la integral mediante la cuadratura de Gauss-Chebyshev. Denotando $x_j, j =$

1, ..., N los puntos de integración sobre Γ_d (ver Figura 2.7), queda por resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{i} w_j g_j - \frac{x_{0i} k_d}{\pi k_f} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{w_j g_j - w_i g_{0i}}{x_j^2 - x_{0i}^2} \right) - \frac{k_d}{2\pi k_f} w_i g_{0i} \ln \frac{1 - x_{oi}}{1 + x_{oi}} = A x_{oi} \qquad parai = 1, \dots, N+1$$
(2.115)

donde $g_j = g(x_j), j = 1, ..., N, w_i = x_{0i} - x_{(i-1)}$. Si llamamos

$$B_{ij} = w_j - \frac{k_d}{\pi k_f} T_{ij} \qquad \text{si } j < i \tag{2.116}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}w_j - \frac{k_d}{\pi k_f} \sum_{k=1}^N T_{ik} - \frac{k_d}{2\pi k_f} g_{0i} \ln \frac{1 - x_{oi}}{1 + x_{oi}} \quad \text{si } j = i$$
(2.117)

$$B_{ij} = -\frac{k_d}{\pi k_f} T_{ij} \qquad \text{si } j > i \tag{2.118}$$

con $T_{ij} = w_j x_{0i} / x_j^2 - x_{0i}^2$ cuando $i \neq j$, y $T_{ii} = 0$ cuando i = j, la ecuación 2.114 puede reescribirse como:

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij}g_j - Ax_{0i} = 0 \qquad \text{para } i = 1, ..., N + 1$$
(2.119)

La solución de 2.119 permite la evaluación de la presión en cualquier punto $\hat{x} \in \Omega$ usando 2.113, cuya expresión discreta esta dada por:

$$p(\hat{x}) = A \operatorname{Re}(\hat{x}) + \frac{k_d}{2\pi k_f} \sum_{j=1}^N w_j g_j \left(\frac{x_j - \hat{x}}{|x_j - \hat{x}|^2} - \frac{x_j + \hat{x}}{|x_j + \hat{x}|^2} \right) \cdot t_{\Gamma_d}(x_j)$$
(2.120)

donde $x_j \in \Gamma_d$ para j = 1, ..., N son los puntos de integración de la cuadratura de Gauss-Chebyshev. El esquema de integración numérica de la solución semianalítica, se muestra en el Algoritmo 2.



Algoritmo 1: Integración numérica para la solución semianalítica del problema con la presión prescipta en la discontinuidad Γ_d

Algoritmo 2: Integración numérica para la solución semianalítica del problema considerando un flujo de Poiseuille en la discontinuidad Γ_d

Capítulo 3

Modelo propuesto

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta el modelo propuesto. En una primera etapa, se desarrolla una sección con los conceptos previos (notación, operadores y definiciones varias) (Vernerey, 2011) necesarios para el entendimiento de la formulación de las ecuaciones gobernantes en forma fuerte, las cuales definen el problema general de medios porosos saturados discontiuos (basadas en los trabajos de Vernerey (2012) y Khoei & Haghighat (2011)). Con las ecuaciones obtenidas, se plantean las consideraciones propias adoptadas, se resuelve en forma débil las ecuaciones de balance de masa y de momentum, el flujo a través de la interface y el vínculo con la matriz. Las discontinuidades geométricas y materiales, son resueltas empleando XFEM. Se resuelve la aproximación de una variable de estado genérica a través de una interpolación enriquecida de elementos para discontinuidades débiles y fuertes, con el fin de obtener la posibilidad de introducir diferentes teorías de flujos o diferentes consideraciones especiales, otorgándole un potencial mayor de uso al modelo obtenido, trascendiendo a los problemas clásicos de ingeniería estructural o de suelos (como ser el área de la ingeniería de procesos (microfluídica), de la ingenería de tejidos, de la medicina, etc.). Cabe aclarar que todo lo descripto en este párrafo, son aportes propios de esta tesis.

3.2. Conceptos previos

Como objeto de estudio, se considera un medio poroso homogéneo Ω delimitado por un contorno $\delta\Omega$ en cuyo interior se encuentra una interfaz Γ la cual se caracteriza por tener una dimensión mucho mas reducida que las otras dos. En general, el análisis de esta interfaz puede plantearse en dos escalas: una microescala en donde la interfaz es un volumen de espesor 2h y un sistema de coordenadas (ξ_n, ξ_s, ξ_t) (ver Figura 3.1) y una macroescala en la interfaz es una superficie de espesor nulo y cuya orientación esta definida por el vector normal \boldsymbol{n} . Las variables definidas en la microescala son relacionadas en la macroescala a través del cumplimiento débil siguiente:



FIGURA 3.1: Ejes locales (ξ_n, ξ_s, ξ_t) en la microescala. Densidad de masa del constituyente α en la interface. (Vernerey, 2011)

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \langle \tilde{\boldsymbol{a}} \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \tilde{\boldsymbol{a}} \, \mathrm{d}V \tag{3.1}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = \langle \langle \tilde{\boldsymbol{a}} \rangle \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{a}}}{\partial \xi_n} \, \mathrm{d}V \tag{3.2}$$

donde $\langle \tilde{a} \rangle$ es el valor medio en la macroescala la variable \tilde{a} definida en la microescala, y $\langle \langle \tilde{a} \rangle \rangle$ representa la variación lineal de \tilde{a} a lo largo del espesor. Resulta evidente que si la variable microscópica es constante en el espesor, $\langle \tilde{a} \rangle = \tilde{a}$ y $\langle \langle \tilde{a} \rangle \rangle = 0$.

Por otro lado, en la matriz porosa, la densidad de masa fluida por unidad de volumen de la mezcla es $\rho^f = \phi \rho_t^f$, donde ρ_t^f es la densidad real del fluido, mientras que para la densidad de masa sólida por unidad de volumen de la mezcla es $\rho^s = (1 - \phi)\rho_t^s$, donde ρ_t^s es la densidad real del sólido que compone la mezcla. En el caso de la interfaz, si se considera las expresiones 3.1 y 3.2, surgen dos densidades macroscópicas $\overline{\rho}^{\alpha}$ y $\overline{\rho}^{\alpha}$, con $\alpha = s, f$, que representan la densidad media y primera variación de la interfaz en la macroescala

respectivamente, y se calculan como:

$$\overline{\rho}^{\alpha} = 2h \left\langle \tilde{\rho}^{\alpha} \right\rangle \quad y \quad \overline{\overline{\rho}}^{\alpha} = \left(2h\right)^2 \left\langle \left\langle \tilde{\rho}^{\alpha} \right\rangle \right\rangle \tag{3.3}$$

donde $\tilde{\rho}^f = \tilde{\phi} \tilde{\rho}^f_t$ y $\tilde{\rho}^s = (1 - \tilde{\phi}) \tilde{\rho}^s_t$. En ambas ecuaciones aparece el espesor de la interfaz 2h para trabajar en la macroescala con densidad de masa por unidad de área. Para ambas fases, la densidad micoscópica $\tilde{\rho}^{\alpha}_t$ puede aproximarse como:

$$\tilde{\rho}^{\alpha}(\xi_n,\xi_t,\xi_s) = \langle \tilde{\rho}^{\alpha} \rangle \left(\xi_t,\xi_s\right) + \langle \langle \tilde{\rho}^{\alpha} \rangle \rangle \left(\xi_t,\xi_s\right) \xi_n \tag{3.4}$$

en la cual, si introducimos las expresiones 3.3, se obtiene

$$\tilde{\rho}^{\alpha} = \frac{1}{h}\overline{\rho}^{\alpha} + \frac{1}{h^2}\overline{\overline{\rho}}^{\alpha}\xi_n \tag{3.5}$$

Pero si se considera que la porosidad $\langle \phi \rangle$ es constante en el espesor (por lo que $\langle \langle \phi \rangle \rangle = 0$), la densidad $\tilde{\rho}^{\alpha}$ se aproxima como

$$\tilde{\rho}^{\alpha} = \frac{1}{h} \overline{\rho}^{\alpha} \tag{3.6}$$

Otra aproximación importante, es la estimación del cambio volumétrico en la interfaz. En la microescala, el cambio de volumen puede ser escrito como la traza del vector de desplazamiento $\tilde{e}^v(\xi_n) = tr\varepsilon$. De forma similar a lo visto anteriormente, se puede aproximar como

$$\tilde{e}^{v}(\xi_{n},\xi_{t},\xi_{s}) = e_{s}^{v}(\xi_{t},\xi_{s}) + e_{m}^{v}(\xi_{t},\xi_{s})\frac{\xi_{n}}{2h}$$
(3.7)

Si consideramos pequeñas deformaciones, la componente e^v_m puede despreciarse, resultando

$$\tilde{e}^{v}(\xi_n, \xi_t, \xi_s) = e_s^{v}(\xi_t, \xi_s) \tag{3.8}$$

3.2.1. Flujo de fluido intersticial y fuerzas motrices

El campo mecánico de un medio poroso es influenciado por el movimiento de fluido dentro del espacio poroso de la matriz y de las interfaces. Las bases para la descripción del flujo radica en que el movimiento de fluido es posible gracias a la existencia de fuerzas motrices termodinámicas de diversos origenes, las cuales pueden ser expresadas a través de una función potencial ψ . Este potencial describe la energía libre por unidad de volumen de fluido en términos de la energía mecánica, eléctrica y térmica. Bajo este contexto, la fuerza motriz ζ en la matriz es escrita en términos del gradiente del potencial termodinámico

como:

$$\boldsymbol{\zeta} = -\nabla\psi \tag{3.9}$$

donde el signo negativo se debe a que el flujo disminuye en la dirección del potencial. El flujo puede describirse en términos de dos modos de fuerzas motrices, (i) las responsables del flujo en Γ , llamadas *fuerzas motrices medias* ζ_s , y (ii) las responsables de los saltos del flujo en Γ , denominadas *fuerzas motrices relativas* ζ_m .

3.2.1.1. Fuerzas motrices medias ζ_s

. Esta fuerza termodinámica es responsable del movimiento de fluido dentro de la interfaz y es representada por el promedio de la fuerza motora evaluada en ambas caras de la interface,

$$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{s}} = -\{\nabla\psi\} = -\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\psi^{+} + \nabla\psi^{-}\right)\right]$$
(3.10)

donde $\{\cdot\}$ representa el valor medio de la función. A su vez, ζ_s , puede descomponerse en una componente normal y otra tangencial como:

$$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{s}}^{\parallel} + \boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{s}}^{\perp} \boldsymbol{n} \tag{3.11}$$

donde ζ_s^{\parallel} es la componente tangencial del vector de la fuerza motriz y ζ_s^{\perp} es un escalar que describe la fuerza responsable del flujo a través de la interfaz Γ . La componente tangencial ζ_s^{\parallel} es relacionada con la fuerza motriz ψ como la proyección sobre Γ :,

$$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{s}}^{\parallel} = -\boldsymbol{P}^{\parallel} \cdot \langle \nabla \psi \rangle \tag{3.12}$$

donde la operación $\langle \cdot \rangle$ define el valor promedio a través de la interfaz. La componente normal ζ_s^{\perp} es relacionada a la parte discontinua del potencial termodinámico ψ a través de Γ ,

$$\zeta_s^\perp = -\frac{[\psi]}{2h} \tag{3.13}$$

donde la operación $[\cdot]$ define el salto de la función a través de la interfaz.

3.2.1.2. Fuerzas motrices relativas ζ_m

. La presencia de una interfaz puede inducir una discontinuidad en la fuerza termodinámica en la macroescala, la cual puede producir una fuerte variación del flujo de fluido a través de la interface. Para caracterizar este fenómeno, se considera una fuerza motora de fluido relativa en la interfaz, a través un salto del potencial Ψ calculado como

$$\boldsymbol{\zeta_m} = -\left[\nabla\psi\right] \tag{3.14}$$

De igual forma, el vector $\pmb{\zeta_m}$ puede ser descompuesto en una dirección normal y tangencial como

$$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{m}}^{\parallel} + \boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{m}}^{\perp} \boldsymbol{n} \tag{3.15}$$

donde ζ_m^{\parallel} y ζ_m^{\perp} son las componentes tangencial y normal de la fuerza motriz, las cuales resultan,

$$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{m}}^{\parallel} = -\boldsymbol{P}^{\parallel} \cdot [\nabla \psi]$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{m}}^{\perp} = -[\nabla \psi] \cdot \boldsymbol{n}$$
(3.16)

En general se podrá describir cualquier flujo de fluido en la interfaz en términos de las tres fuerzas motrices termodinámicas siguientes: $-[\psi], \zeta_s^{\parallel} \ge \zeta_m$.

3.2.1.3. Disipación de energía

El flujo de un fluido intersticial a través de una matriz porosa es asociado con la disipación de energía debido a la viscosidad del fluido y la fuerza de fricción fluido-sólido. Es posible escribir la disipación total de energía en el dominio Ω en términos de los potenciales de disipación φ para la matriz porosa, y φ^i para la interface. La disipación total D derivado del flujo intersticial se calcula como,

$$D = \int_{\Omega} \phi \varphi \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} \overline{\phi} \varphi^i \, \mathrm{d}V \tag{3.17}$$

donde ϕ es la porosidad de la matriz, $\overline{\phi}$ es la porosidad macroscopica de la interfaz calculada como $\overline{\phi} = \left\langle \tilde{\phi} \right\rangle$.

Las relaciones constitutivas para el flujo de fluido en un medio poroso estarán dadas por

la expresión de la disipación en términos de las fuerzas motrices,

$$\phi = \varphi\left(\boldsymbol{\zeta}\right) \quad , \quad \varphi^{i} = \varphi^{i}\left(\left[\psi\right], \boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{s}}^{\parallel}, \boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{m}}\right) \tag{3.18}$$

Las velocidades del fluido relativa a la posición del sólido puede ser obtenidas como:

$$\boldsymbol{q} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \qquad \boldsymbol{q}_{s}^{\perp} = -\frac{\partial \varphi^{i}}{\partial \left[\psi\right]}, \qquad \boldsymbol{q}_{s}^{\parallel} = \frac{\partial \varphi^{i}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\parallel}}, \qquad \boldsymbol{q}_{m} = \frac{\partial \varphi^{i}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_{m}}$$
(3.19)

donde \boldsymbol{q} es la velocidad relativa del fluido en la matriz, q_s^{\perp} es la velocidad relativa normal a través de la interfaz, $\boldsymbol{q}_s^{\parallel}$ es la velocidad tangente en la interfaz, \boldsymbol{q}_m es la velocidad diferencial entre las dos caras de la interfaz, la cual puede dividirse en una componente paralela $\boldsymbol{q}_m^{\parallel}$ y otra componente normal \boldsymbol{q}_m^{\perp} .



FIGURA 3.2: Esquemas de flujos normales y tangenciales en la interfaz. (Vernerey, 2012)

En la Figura 3.2, se representan esquemáticamente las componentes de los flujos normales y tangenciales.

3.2.1.4. Velocidad del fluido microscópico en la interface

Con el fin de relacionar las descripciones microscópicas y macroscópicas, consideramos la velocidad $\tilde{q}(\xi_n, \xi_s, \xi_t)$ relativo al movimiento del cuerpo en la interface. Para pequeños espesores h, es posible aproximar linealmente como:

$$\tilde{q}(\xi_n,\xi_s,\xi_t) = \langle \tilde{q} \rangle \left(\xi_t,\xi_s\right) + \left\langle \langle \tilde{q} \rangle \right\rangle \left(\xi_t,\xi_s\right)\xi_n + o(\xi_n^2) \tag{3.20}$$

donde $\langle \tilde{q} \rangle$ es la velocidad media a través de la interfaz, mientras que $\langle \langle \tilde{q} \rangle \rangle$ es una medida de la variación media de q a lo largo de la dirección normal n. Los valores medios de

flujos pueden relacionarse con los flujos macroscópicos como:

$$\langle \tilde{\boldsymbol{q}} \rangle = \boldsymbol{q}_s^{\parallel} + q_s^{\perp} \boldsymbol{n}$$
 (3.21)

$$\langle \langle \tilde{\boldsymbol{q}} \rangle \rangle = \frac{\boldsymbol{q}_m}{2h}$$
 (3.22)

con lo que podemos escribir las relaciones micro-macro como:

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(\xi_n,\xi_s,\xi_t) = \left(\boldsymbol{q}_s^{\parallel} + q_s^{\perp}\boldsymbol{n}\right)(\xi_t,\xi_s) + \boldsymbol{q}_m(\xi_t,\xi_s)\frac{\xi_n}{h} + o(\xi_n^2)$$
(3.23)

3.3. Ecuaciones gobernantes para medios porosos saturados: Forma fuerte

3.3.1. Balance de masa para la fase sólida del medio poroso

El balance de masa para la fase sólida es analizado en la matriz porosa y en la interface por separado:

Matriz porosa : Considerando un dominio B contenido en Ω como se observa en la Figura 3.3, la conservación de masa en términos de la derivada material temporal como



FIGURA 3.3: Subvolumen $B \subset \Omega$, de ancho l_i usado para derivar el balance de masa de los componentes fluidos y sólidos de la matriz.

$$\frac{D}{Dt} \int_{B} \rho^{s} \, \mathrm{d}V = \int_{B} \left(\frac{D\rho^{s}}{Dt} + \rho^{s} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right) \, \mathrm{d}V = 0 \tag{3.24}$$

donde ρ^s es la densidad de la fase sólida en el medio poroso y \boldsymbol{v} es la velocidad de la fase sólida. Esta expresión también resulta válida en el resto del dominio Ω de la siguiente forma:

$$\frac{D\rho^s}{Dt} + \rho^s \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.25}$$

Interface En una primera etapa, se analiza la interface en la microescala, en un punto con coordenadas locales (ξ_n, ξ_s, ξ_t) , donde ξ_n es la coordenada local normal a la interface, ξ_s es la coordenada local transversal a la interface y ξ_t es la coordenada local tangencial a la interface. El balance de masa para la fase sólida siguiendo la ecuación 3.25 resulta:

$$\Phi(\xi_n, \xi_s, \xi_t) = \frac{D\tilde{\rho^s}}{Dt} + \tilde{\rho^s} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} = 0$$
(3.26)

donde $\tilde{\rho}^s$ es la densidad del sólido en la microescala y \tilde{v} es la velocidad de la partícula sólida en la microescala. La condición anterior se puede satisfacer débilmente en la macroescala, verificando que para cualquier valor *i* se cumpla que

$$\int_{-h/2}^{h/2} \Phi(\xi_n, \xi_s, \xi_t) \xi_n^i \, \mathrm{d}\xi_n = 0 \tag{3.27}$$

donde h es el semiespesor de la interface. Cada ecuación de momento i corresponde a diferentes niveles de aproximación. Cuando i = 0 corresponde al valor medio de la expresión analizada. Pero si las aproximaciones de la función requieren un orden mayor, es necesario recurrir a otro nivel de aproximación. La ecuación resultante cuando i = 1 considera una variación lineal en el espesor de la función analizada en la microescala. Se puede escribir entonces que

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{D\tilde{\rho^s}}{Dt} + \tilde{\rho^s} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} \right) \, \mathrm{d}\xi_n = 0 \tag{3.28}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{D\tilde{\rho^s}}{Dt} + \tilde{\rho^s} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} \right) \xi_n \, \mathrm{d}\xi_n = 0 \tag{3.29}$$

Si consideramos que la porosidad $\overline{\phi}$ es constante en el espesor de la interface, y que la deformación volumérica puede ser escrita como $\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} = \dot{\tilde{e}}_s^v$, el balance de masa queda definido únicamente con la expresión 3.28, el cual, con la aproximación 3.6, el balance de masa para la fase sólida en la interface queda expresado como

$$\frac{D\overline{\rho}^s}{Dt} + \overline{\rho}^s \dot{\tilde{e}}_s^v = 0 \tag{3.30}$$

3.3.1.1. Balance de masa para la fase fluida del medio poroso

De forma similar, se analiza el balance de masa fluida en la matriz y luego en la interface.

Matriz porosa Siguiendo la metodología anterior, se analiza un subdominio B con frontera δB contenido en Ω . La conservación de masa expresada en términos de la derivada material temporal resulta

$$\frac{D}{Dt} \int_{B} \rho^{f} \, \mathrm{d}V = \int_{B} \left(\frac{D\rho^{f}}{Dt} + \rho^{f} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right) \, \mathrm{d}V + \int_{\delta B} \rho^{f} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{3.31}$$

donde \boldsymbol{n} es el vector normal unitario del contorno δB . Aplicando el teorema de divergencia en el último término, puede generalizarse el balance de masa fluida en Ω como

$$\frac{D\rho^f}{Dt} + \rho^f \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot \left(\rho^f \boldsymbol{q}\right)$$
(3.32)

Interface Para el análisis del balance de masa fluida en la interface, se aplica la misma metodología en la microescala, resultando

$$\Phi(\xi_n, \xi_s, \xi_t) = \frac{D\tilde{\rho}^f}{Dt} + \tilde{\rho}^f \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} + \nabla \cdot \left(\tilde{\rho}^f \tilde{\boldsymbol{q}}\right)$$
(3.33)

En este caso, para el acoplamiento micro-macro es necesario recurrir a las verificaciones dadas en 3.27 para i = 0, 1

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{D\tilde{\rho}^f}{Dt} + \tilde{\rho}^f \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} + \nabla \cdot \left(\tilde{\rho}^f \tilde{\boldsymbol{q}} \right) \right) \,\mathrm{d}\xi_n = 0 \tag{3.34}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{D\tilde{\rho}^f}{Dt} + \tilde{\rho}^f \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} + \nabla \cdot \left(\tilde{\rho}^f \tilde{\boldsymbol{q}} \right) \right) \xi_n \, \mathrm{d}\xi_n = 0 \tag{3.35}$$

El término $\nabla \cdot (\tilde{\rho}^f \tilde{q})$ puede descomponerse en una dirección normal y otra tangencial a la interface, resultando

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\rho}^{f} \tilde{\boldsymbol{q}}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_{n}} \left(\tilde{\rho}^{f} \tilde{\boldsymbol{q}}^{\perp}\right) + \operatorname{div}^{\parallel} \left(\tilde{\rho}^{f} \tilde{\boldsymbol{q}}^{\parallel}\right)$$
(3.36)

donde \tilde{q}^{\perp} y \tilde{q}^{\parallel} son las proyecciones tangencial y normal de la velocidad macroscópica respectivamente. Además,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\tilde{\rho}^f \tilde{q}^\perp \right) \, \mathrm{d}\xi_n = \left[\rho^f \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \right] \tag{3.37}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\tilde{\rho}^f \tilde{q}^\perp \right) \xi_n \, \mathrm{d}\xi_n = h \{ \rho^f \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \} \overline{\rho}^f q_s^\perp$$
(3.38)

Reemplazando en las ecuaciones 3.34 y 3.35, la conservación de masa macroscópica de la fase fluida queda

$$\frac{D\overline{\rho}^{f}}{Dt} + \overline{\rho}^{f} \dot{e}_{s}^{v} + \operatorname{div}^{\parallel} \left(\overline{\rho}^{f} \boldsymbol{q}_{s}^{\parallel} \right) + \left[\rho^{f} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \right] = 0$$
(3.39)

$$\operatorname{div}^{\parallel}\left(\overline{\rho}^{f}\boldsymbol{q}_{m}^{\parallel}\right) + \frac{1}{I}\left(\left\{\rho^{f}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\right\} - \frac{\overline{\rho}^{f}}{h}q_{s}^{\perp}\right) = 0$$
(3.40)

donde la cantidad I es el momento de inercia, el cual se calcula como

$$I = \frac{1}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \xi_n^2 \,\mathrm{d}\xi_n = \frac{1}{12} \tag{3.41}$$

La ecuación 3.39 describe como la densidad del fluido de la interface cambia por la deformación volumétrica del sólido, la velocidad tangencial $\boldsymbol{q}_s^{\parallel}$ y el flujo proveniente de la matriz $\left[\rho^f \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\right]$ o viceversa. La segunda expresión (3.40), relaciona el flujo normal medio que circula a través de la interface y los flujos $\boldsymbol{q}_m^{\parallel}$ y \boldsymbol{q}_s^{\perp} .

3.3.1.2. Balance de masa para el medio porosos en términos de densidad

En general, es conveniente trabajar las leyes de conservación aplicadas en el medio poroso directamente. Si se considera que $\rho = \rho^s + \rho^f$ y $\overline{\rho} = \overline{\rho}^s + \overline{\rho}^f$, las ecuaciones de balance

para el medio poroso resultan

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \operatorname{div} \left(\rho^{f} \boldsymbol{q}\right) = 0$$

$$\frac{D\overline{\rho}}{Dt} + \overline{\rho} \dot{e}_{s}^{v} + \operatorname{div}^{\parallel} \left(\overline{\rho}^{f} \boldsymbol{q}_{s}^{\parallel}\right) + \left[\rho^{f} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\right] = 0 \qquad (3.42)$$

$$\operatorname{div}^{\parallel} \left(\overline{\rho}^{f} \boldsymbol{q}_{m}^{\parallel}\right) + \frac{1}{I} \left(\left\{\rho^{f} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\right\} - \frac{\overline{\rho}^{f}}{h} q_{s}^{\perp}\right) = 0$$

Para que el problema quede completamente definido, se adicionan las condiciones de borde, en donde el contorno $\delta\Omega$ se compone en $\delta\Omega = \delta\Omega^q \cap \delta\Omega^{\mu}$. La velocidad de fluido y el potencial termodinámico (la presión en este caso) quedan prescriptas como

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{q} \quad \text{sobre} \quad \delta \Omega^{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \overline{\boldsymbol{\mu}} \quad \text{sobre} \quad \delta \Omega^{\boldsymbol{\mu}}$$

$$(3.43)$$

3.3.1.3. Balance de masa para el medio porosos en términos de porosidad

Considerando las siguientes relaciones: $\rho\phi = \rho_f$, $\rho(1-\phi) = \rho_s$, $\overline{\rho}^f = h \rho_t^f \overline{\phi} \text{ y } \overline{\rho}^s = h \rho_t^s (1-\overline{\phi})$, y teniendo en cuenta que el cambio de densidad de masa del material sólido es relacionado con el cambio de volumen por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{K_s}{K_t} \frac{(1-\phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt}$$
(3.44)

donde K_s es el módulo volumétrico del material sólido y K_t es el módulo volumétrico del medio poroso. Introduciendo el coeficiente de Biot $\alpha = 1 - K_t/K_s$ (Secchi *et al.*, 2007), la ecuación 3.44 puede ser reescrita como

$$(\alpha - 1)\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt}$$
(3.45)

Para la fase fluida, se asume una relación fenomenológica (Ref.: Schrefler) entre los cambios incrementales de la densidad de masa fluida y la presión del fluido,

$$\frac{1}{Q}dp = \frac{\phi}{\rho_f}d\rho_f \tag{3.46}$$

donde Q es el módulo de Biot y vale $1/Q = (\alpha - \phi)/K_s + \phi/K_f$, donde K_f es el módulo volumétrico del fluido.
Con estas relaciones, podemos reescribir el balance de masa para el medio poroso Ω como

$$\frac{\phi}{\rho_f} \frac{D\rho_f}{Dt} + \frac{(1-\phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\phi \boldsymbol{q}) = 0$$
(3.47)

Finalmente, el balance de masa para el medio poroso resulta

$$\alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + \operatorname{div}(\phi \boldsymbol{q}) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$
(3.48)

Trabajando de forma similar con las ecuaciones de balance para la interface 3.42.b y 3.42.c resultan

$$\frac{1}{\overline{Q}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s + \operatorname{div}^{\parallel}\left(\overline{\phi}\boldsymbol{q}_s^{\parallel}\right) + \frac{1}{h}\left[\phi^f \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\right] = 0$$
(3.49)

$$\operatorname{div}^{\parallel}\left(\overline{\phi}\boldsymbol{q}_{m}^{\parallel}\right) + \frac{1}{Ih}\left(\left\{\phi^{f}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\right\} - \overline{\phi}q_{s}^{\perp}\right) = 0$$

$$(3.50)$$

Cabe destacar que si se trabaja con fluidos cuasi-incompresibles, el módulo de Biot Q es muy grande y el término se vuelve despreciable. Bajo esta condición, la evolución de la porosidad puede calcularse con

$$\frac{D\phi}{Dt} = (1 - \phi)\nabla \cdot \boldsymbol{v}
\frac{D\overline{\phi}}{Dt} = (1 - \overline{\phi})\dot{e}_s^{\boldsymbol{v}}$$
(3.51)

3.3.2. Interpretación física de las ecuaciones de masa

La ecuación 3.48 muestra como la deformación de la matriz sólida varía con el flujo de fluido que circula a través de los poros y debido a la compresibilidad del fluido. Cabe destacar que si se trata de un flujo incompresible o cuasi-incompresible, éste último término pierde importancia respecto a los otros términos.

La ecuación ?? muestra el acoplamiento de la deformación de la fracción sólida con el flujo que circula en la discontinuidad q_s , el flujo que entra o sale de la matriz a través del término $\left[\phi^f \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\right]$ y la componente de flujo que circula dentro de la discontinuidad. La tercera ecuación 3.50 muestra la diferencia del flujo promedio que circula a través de la

discontinuidad a través del término $\{\phi^f \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\}$ y el flujo normal dentro de la discontinuidad q_s^{\perp} , el cual puede derivar en un flujo tangencial relativo en la interface q_m^{\parallel} .

3.3.3. Balance de momentum en medios porosos

Para la conservación de momentum tanto en la matriz como en la interface, se asumen pequeñas deformaciones, procesos isotérmico, se desprecian los efectos gravitatorios, convectivos y aceleraciones, y no se consideran fuerzas cohesivas en la zona del crack-tip (cabeza o extremo de fisura). Bajo estas consideraciones, el balance de momentum se escribe como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{3.52}$$

donde σ es el tensor de tensiones de Cauchy. La descripción del problema se complementa adicionando las condiciones de borde en términos de fuerzas y desplazamientos en donde el contorno Γ se compone en $\Gamma = \Gamma_t \cap \Gamma_u$, tal que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_p \quad \text{sobre} \quad \Gamma_t$$

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_u$$
(3.53)

3.4. Relaciones constitutivas

En una primera etapa se analizará una formulación general para la descripción del flujo de fluido en función a las fuerzas motrices, y posteriormente se analizarán casos especiales. Para la matriz, se considera una función cuadrática para la energía de disipación:

$$\varphi = \varphi^0 + \boldsymbol{q}^0 \cdot \boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\zeta}$$
(3.54)

donde φ^0 representa la disipación de otros procesos no incluidos en el análisis, q^0 es la velocidad inicial por unidad de volumen en el medio y κ representa la relación entre la permeabilidad del sólido y la viscosidad del fluido.

Sobre la interface, la disipación por unidad de área se escribe como,

$$\varphi_{i} = \varphi_{i}^{0} - q_{s}^{\perp 0} [\psi] + \boldsymbol{q}_{s}^{\parallel 0} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\parallel} + \boldsymbol{q}_{m}^{0} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{m} + \frac{1}{2} \kappa_{s}^{\perp} [\psi]^{2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\parallel} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{s} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\parallel} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}_{m} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{m} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{m} - [\psi] \boldsymbol{\kappa}_{ds} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\parallel} - [\psi] \boldsymbol{\kappa}_{dm} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{m} + \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\parallel} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{sm} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{m}$$

$$(3.55)$$

donde φ_i es la disipación por algún flujo independiente, $q_s^{\perp 0}$, q_s^0 y q_m^0 son las velocidades iniciales en la interface, κ_d (escalar) y κ_s (tensor de segundo orden) son las permeabilidades macroscópicas de la interface en la dirección normal y tangente respectivamente, y κ_m es la permeabilidad del flujo diferencial en la interface. Por último, las matrices κ_{ds} , κ_{dm} y κ_{sm} describen las interacciones entre los diferentes modos de flujos. Estas interacciones ocurren en general cuando se presenta cuando hay anisotropía o inhomogeneidad. Derivando la disipación φ en ζ , y φ^i en $[\psi]$, ζ_s^{\parallel} y ζ_m , se obtienen los flujos,

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^0 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\zeta} \tag{3.56}$$

$$q_s^{\perp} = q_s^{\perp 0} - \kappa_s^{\perp} \left[\psi\right] + \boldsymbol{\kappa}_{ds} \cdot \boldsymbol{\zeta}_s^{\perp} + \boldsymbol{\kappa}_{dm} \cdot \boldsymbol{\zeta}_m \tag{3.57}$$

$$\boldsymbol{q}_{s}^{\parallel} = \boldsymbol{q}_{s}^{\parallel 0} - \boldsymbol{\kappa}_{ds} \left[\psi \right] + \boldsymbol{\kappa}_{s} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\perp} + \boldsymbol{\kappa}_{sm} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{m}$$
(3.58)

$$\boldsymbol{q}_{m} = \boldsymbol{q}_{m}^{0} - \boldsymbol{\kappa}_{dm} \left[\boldsymbol{\psi} \right] + \boldsymbol{\kappa}_{sm} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{s}^{\perp} + \boldsymbol{\kappa}_{m} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{m}$$
(3.59)

donde la primera ecuación 3.56 es la ley de Darcy para flujos de fluidos en medios porosos.

3.4.1. Flujo Darcy-Brinkman para la interface

Tradicionalmente, se emplea la ley de Darcy para la modelación del flujo de fluido a través de un material poroso. Sin embargo, cuando hay interfaces presentes, en la zona de contacto entre la matriz porosa y la interface pueden desarrollarse fuertes gradientes de velocidad (capa límite). La ecuación de Darcy-Brinkman (Durlofsky & Brady (1987), Vernerey (2012)) es capaz de capturar bien este fenómeno,

$$\boldsymbol{q} = \frac{\kappa^B}{\mu} \left(-\nabla p + \mu_e^B \nabla^2 \boldsymbol{q} \right) \tag{3.60}$$

donde μ_e^B es la viscosidad efectiva Brinkman, y κ^B es la permeabilidad isotrópica del medio. El primer término dentro del paréntesis puede interpretarse como la fuerza motriz derivada del gradiente de presión, y el segundo término representa la resistencia a la fuerza debido a la viscosidad del fluido. El flujo en la interface estará compuesto según lo analizado en secciones previas de cuatro tipo de flujos:

$$q_s^{\perp} = -\frac{\kappa_s^{\perp}}{\mu} \frac{[p]}{2h} \tag{3.61}$$

$$q_s^{\parallel} = -\frac{\kappa_s^{\parallel}}{\mu} \{\nabla p\}^{\parallel} \tag{3.62}$$

$$q_m^{\perp} = -\frac{\kappa_m^{\perp}}{\mu} \left[\nabla p \right]^{\perp} \tag{3.63}$$

$$q_m^{\parallel} = -\frac{\kappa_m^{\parallel}}{\mu} \left[\nabla p\right]^{\parallel} \tag{3.64}$$

El análisis se centrará en calcular las permeabilidades en función de las propiedades de la matriz y la interface.

3.4.1.1. Flujo Darcy-Brinkman microscópico

Microscópicamente, la interface es representada como un medio poroso delimitada por bordes ubicados en las coordenadas $\xi_n = -h$ y $\xi_n = h$ (en el sistema de coordenadas $\{\xi_t, \xi_n\}$ como se muestra en la Figura 3.4. La interface está rodeada por un medio poroso infinito de diferentes propiedades. La velocidad microscópica \tilde{q} es localmente derivada a partir de la ecuación de Darcy-Brinkman en términos del gradiente de presión ∇p como:

$$\mu_e \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{q}} - \frac{\mu}{\kappa} \tilde{\boldsymbol{q}} - \nabla p = 0 \tag{3.65}$$

donde κ es la permeabilidad, y μ_e es la viscosidad efectiva Brinkman, las cuales son diferentes en la interface que en la matriz. En todo el modelo se considerará que la viscosidad Brinkman es igual a la viscosidad dinámica del fluido.



FIGURA 3.4: Modelo microscópico de la interface.

El gradiente de presión en la interface puede escribirse como una serie de Taylor centrada en la interface ($\xi_n = 0$) en términos del gradiente de presión macroscópico { ∇p } y el salto en el gradiente de presión macroscópico $[\nabla p]$:

$$\nabla p\left(\xi_{n}\right) = \left\{\nabla p\right\} - \frac{\left[\nabla p\right]}{2} \qquad \text{para} \quad \xi_{n} \in \left]-\infty, -h\left[\nabla p\right] \\ \nabla p\left(\xi_{n}\right) = \left\{\nabla p\right\} + \frac{\left[\nabla p\right]}{2h}\xi_{n} + o\left(\xi_{n}^{2}\right) \qquad \text{para} \quad \xi_{n} \in \left[-h, h\right] \\ \nabla p\left(\xi_{n}\right) = \left\{\nabla p\right\} + \frac{\left[\nabla p\right]}{2} \qquad \text{para} \quad \xi_{n} \in \left]h, \infty\right[$$
(3.66)

Con las ecuaciones 3.65 y 3.66, podemos obtener el flujo microscópico $\tilde{q}.$

Para simplificar el análisis, se desacoplan los problemas normal y tangencial, proyectando la ley de Darcy-Brinkman sobre las direcciones tangencial y normal. Además, se considera que la velocidad del fluido microscópica \tilde{q} varía linealmente en la dirección tangencial cerca de la interface:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{q}}}{\partial \xi_t^2} = 0 \tag{3.67}$$

Flujo normal microscópico Considerando al fluido como incompresible, $\partial^2 \tilde{q}_n / \partial \xi_n^2 = 0$. La proyección de la ecuación 3.65 sobre la dirección normal \boldsymbol{n} resulta:

$$-\frac{\mu}{\kappa^{I}}\tilde{q}_{n} - \frac{\partial p}{\partial\xi_{n}} = 0 \quad \text{para} \quad \xi_{n} \in [-h, h]$$
(3.68)

Teniendo en cuenta la ecuación 3.10 y 3.13, la proyección del gradiente de presión aproximado (3.66) sobre la dirección normal queda como:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\xi_n) = \frac{[p]}{2h} + \frac{[\nabla p]^\perp}{2h} \xi_n + o(\xi_n^2) \quad \text{para} \quad \xi_n \in [-h, h]$$
(3.69)



FIGURA 3.5: Distribución esquemática del flujo normal a través de la interface y tangencial en la interface.

Vinculando las dos ultimas expresiones 3.69 en 3.68, se obtiene la expresión para la velocidad normal en la interface $\tilde{q_n}$:

$$\tilde{q}_n = -\frac{\kappa^I}{2\mu h} \left([p] + [\nabla p] + [\nabla p]^{\perp} \xi_n \right)$$
(3.70)

Esta expresión muestra que la velocidad normal surge de un salto en la presión a través de la interface y varia linealmente cuando existe un gradiente de presión perpendicular $[\nabla p]^{\perp}$. Otra observación importante es que se verifica que bajo la condición de incompresibilidad: $div\tilde{q} = \partial \tilde{q}_n/\partial \xi_n + \partial \tilde{q}_t/\partial \xi_t = 0$. Nótese también que un flujo normal general un flujo tangencial \tilde{q}_t tal que $\partial \tilde{q}_t/\partial \xi_t = -\kappa^I/2\mu h [\nabla P]^{\perp}$.

Flujo tangencial microscópico La componente tangencial de la velocidad del flujo microscópico \tilde{q}_t puede ser obtenida por la proyección de la ley de Darcy-Brinkman sobre la dirección tangencial \boldsymbol{t} como:

$$\mu \frac{\partial^2 \tilde{q}_t}{\partial \xi_n^2} - \frac{\mu}{\kappa} \tilde{q}_t - \frac{\partial p}{\partial \xi_t} = 0$$
(3.71)

El gradiente de presión $\partial p/\partial \xi_t$ puede ser obtenido mediante la ecuación 3.66, reemplazando $\{\nabla p\}$ por $\{\nabla p\}^{\parallel}$ y $[\nabla p]$ por $[\nabla p] \parallel$. Se puede asumir también que la velocidad tangencial converge a un valor constante lejos de la interface, por lo que: $\partial \tilde{q}_t/\partial \bar{\xi}_n(-\infty) = 0$ y $\partial \tilde{q}_t/\partial \bar{\xi}_n(\infty) = 0$.

Para la resolución del problema, la solución \tilde{q}_t se descompone en una solución simétrica \tilde{v} , y una solución antisimétrica \tilde{w} , tal que $\tilde{q}_t = \tilde{v} + \tilde{w}$. También es conveniente de trabajar con la ecuación adimensional, por lo que se introducen velocidades y longitudes características:

$$v^* = \frac{\kappa^I \{\nabla p\}^{\parallel}}{\mu} \qquad w^* = \frac{\kappa^I [\nabla p]^{\parallel}}{2\mu} \qquad l^* = \sqrt{\kappa^I}$$
(3.72)

tal que las soluciones pueden ser escritas en términos de variables adimensionales definidas por:

$$\overline{v} = \frac{\widetilde{v}}{v^*} \qquad \overline{w} = \frac{\widetilde{w}}{w^*} \qquad \overline{\xi}_n = \frac{\xi_n}{l^*} \tag{3.73}$$

Por simplicidad, se considera la solución sobre $[0, \infty)$ ya que el resto puede calcularse por simetría.

Entonces, bajo las hipótesis mencionadas, se trabaja sobre la ecuación 3.71:

$$\mu^{I} \frac{\partial^{2} \left(\tilde{v} + \tilde{w}\right)}{\partial \xi_{n}^{2}} - \frac{\mu}{\kappa^{I}} \left(\tilde{v} + \tilde{w}\right) - \{\nabla p\}^{\parallel} - \frac{\left[\nabla p\right]^{\parallel}}{2h} \xi_{n} = 0 \quad \text{para} \quad \xi_{n} \in [0, h] \quad (3.74)$$

$$\mu^{B} \frac{\partial^{2} \left(\tilde{v} + \tilde{w}\right)}{\partial \xi_{n}^{2}} - \frac{\mu}{\kappa^{B}} \left(\tilde{v} + \tilde{w}\right) - \{\nabla p\}^{\parallel} - \frac{[\nabla p]^{\parallel}}{2} = 0 \quad \text{para} \quad \xi_{n} \in [h, \infty[\qquad (3.75)$$

donde el superíndice \cdot^{I} y \cdot^{B} se refieren a las propiedades de la interface y de la matriz respectivamente. Para expresar la función en términos de \overline{v} , \overline{w} y $\overline{\xi}_{n}$, calculamos las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{\xi}_n} = \frac{\partial}{\partial \left(\xi_n/l^*\right)} \left(\frac{\tilde{v}}{v^*}\right) = \frac{l^*}{v^*} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi_n} \tag{3.76}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{\xi}_n^2} = \frac{\partial}{\partial \overline{\xi}_n} \left(\frac{\partial \overline{v}}{\overline{\xi}_n} \right) = \frac{\partial}{\partial \left(\xi_n / l^* \right)} \left(\frac{l^*}{v^*} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi_n} \right) = \frac{(l^*)^2}{v^*} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} \tag{3.77}$$

donde las derivadas también valen para la función $\overline{w}.$

Entonces, separando el problema en la parte simétrica y antisimétrica, de la ecuación 3.74 obtenemos para la interface:

$$\begin{split} \mu \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} &- \frac{\mu}{\kappa^I} \tilde{v} - \{\nabla p\}^{\parallel} = 0 \quad \mu \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi_n^2} - \frac{\mu}{\kappa^I} \tilde{w} - \frac{[\nabla p]^{\parallel}}{2h} \xi_n = 0 \qquad \xi_n \in [0,h] \\ \kappa^I \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} - \tilde{v} - \frac{\kappa^I}{\mu} \{\nabla p\}^{\parallel} = 0 \quad \kappa^I \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi_n^2} - \tilde{w} - \frac{\kappa^I}{\mu} \frac{[\nabla p]^{\parallel}}{2h} \xi_n = 0 \qquad \xi_n \in [0,h] \\ (l^*)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} - \tilde{v} - v^* = 0 \qquad (l^*)^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi_n^2} - \tilde{w} - w^* \frac{\xi_n}{h} = 0 \qquad \xi_n \in [0,h] \\ \frac{(l^*)^2}{v^*} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} - \frac{\tilde{v}}{v^*} - \frac{v^*}{v^*} = 0 \qquad \frac{(l^*)^2}{w^*} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi_n^2} - \frac{\tilde{w}}{w^*} - \frac{w^*}{w^*} \frac{\xi_n}{h} = 0 \qquad \xi_n \in [0,h] \\ \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{\xi}_n^2} - \overline{v} - 1 = 0 \qquad \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{\xi}_n^2} - \overline{w} - \frac{\overline{\xi}_n}{\overline{h}} = 0 \qquad \overline{\xi}_n \in [0,\overline{h}] \end{split}$$

donde $\overline{h} = h/l^*$, por lo que se verifica que $\xi_n/h = \overline{\xi}_n/\overline{h}$. Mientras que para la matriz, las ecuaciones que gobiernan el problema se obtienen como:

$$\begin{split} \mu \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} &- \frac{\mu}{\kappa^B} \tilde{v} - \{\nabla p\}^{\parallel} = 0 \qquad \mu \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi_n^2} - \frac{\mu}{\kappa^B} \tilde{w} - \frac{[\nabla p]^{\parallel}}{2} = 0 \qquad \xi_n \in [h, \infty[\\ \kappa^I \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} - \frac{\kappa^I}{\kappa^B} \tilde{v} - \frac{\kappa^I}{\mu} \{\nabla p\}^{\parallel} = 0 \qquad \dots \qquad \xi_n \in [h, \infty[\\ (l^*)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} - \frac{\kappa^I}{\kappa^B} \tilde{v} - v^* = 0 \qquad \dots \qquad \xi_n \in [h, \infty[\\ \frac{(l^*)^2}{v^*} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi_n^2} - \gamma \frac{\tilde{v}}{v^*} - \frac{v^*}{v^*} = 0 \qquad \dots \qquad \xi_n \in [h, \infty[\\ \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{\xi}_n^2} - \gamma \overline{v} - 1 = 0 \qquad \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{\xi}_n^2} - \gamma \overline{w} - 1 = 0 \qquad \overline{\xi}_n \in [\overline{h}, \infty[\end{split}$$

donde $\gamma = \kappa^I / \kappa^B$. Debido a la simetría de \overline{v} y la antisimetría de \overline{w} , las condiciones de bordes pueden reescribirse como:

$$\frac{\overline{v}}{\overline{\xi}_n}(0) = 0, \qquad \frac{\overline{v}}{\overline{\xi}_n}(\infty) = 0, \qquad \overline{w}(0) = 0, \qquad \frac{\overline{w}}{\overline{\xi}_n}(\infty) = 0 \tag{3.80}$$

Además, tanto la velocidad tangencial como el gradiente de velocidad es continuo en el contorno $\xi_n = h$, por lo que podemos escribir:

$$\lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{+}}\overline{v}\left(\overline{\xi}_{n}\right) = \lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{-}}\overline{v}\left(\overline{\xi}_{n}\right) , \quad \lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{+}}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{\xi}_{n}} = \lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{-}}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{\xi}_{n}}$$

$$\lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{+}}\overline{w}\left(\overline{\xi}_{n}\right) = \lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{-}}\overline{w}\left(\overline{\xi}_{n}\right) , \quad \lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{+}}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{\xi}_{n}} = \lim_{\overline{\xi}_{n}\to\overline{h}^{-}}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{\xi}_{n}}$$
(3.81)

El flujo total tangencial \tilde{q}_t puede escribirse como una combinación de los flujos adimensionales $\bar{v} \neq \bar{w}$:

$$\tilde{q}_t = \frac{\kappa^I}{\mu} \left(\overline{v} \{ \nabla p \}^{\parallel} + \overline{w} \frac{[\nabla p]^{\parallel}}{2} \right)$$
(3.82)

Se observa que el flujo tangencial depende principalmente de tres parámetros \overline{h} , β y γ . Es importante observar que el espesor de la interface es definido en relación a la longitudescala $\sqrt{\kappa^{I}}$. De esto se desprende que, dado un valor de espesor h, éste puede ser chico para un fluido altamente viscoso o grande para un fluido poco viscoso.



FIGURA 3.6: Efecto del espesor de la interface para un flujo transveral con $\gamma=10$ y $\beta=1.$



FIGURA 3.7: Efecto de la permeabilidad de la interface para un flujo transversal con $\overline{h}=1$ y $\beta=1.$

3.4.1.2. Permeabilidad macroscópica y su relación con las propiedades de la interface microscópica

Para calcular las permeabilidades κ_s^{\perp} , κ_m^{\perp} , κ_s^{\parallel} y κ_m^{\parallel} en términos de las propiedades \overline{h} , β y γ , se relaciona el flujo de la microescala con el flujo de la macroescala:

$$\boldsymbol{q}_{s} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \tilde{\boldsymbol{q}}(\xi_{n}) \,\mathrm{d}\xi_{n} \qquad \boldsymbol{q}_{m} = \frac{1}{\left(2h\right)^{2}} \int_{-h}^{h} \tilde{\boldsymbol{q}}(\xi_{n})\xi_{n} \,\mathrm{d}\xi_{n} \qquad (3.83)$$

3.4.1.3. Permeabilidad normal

La permeabilidad macroscópica normal es obtenida a partir de la proyección de 3.83 sobre la dirección normal:

$$q_s^{\perp} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \tilde{q}_n \, \mathrm{d}\xi_n = -\frac{\kappa^I[p]}{2\mu h}$$
(3.84)

$$q_m^{\perp} = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \tilde{q}_n \xi_n \, \mathrm{d}\xi_n = -\frac{\kappa^I I[\nabla p]^{\perp}}{\mu}$$
(3.85)

donde se empleó la ecuación 3.70. Comparando las expresiones obtenidas con el conjunto de ecuaciones 3.61 y 3.63, se llega a que:

$$\overline{\kappa}_s^{\perp} = 1 \qquad \overline{\kappa}_m^{\perp} = I \tag{3.86}$$

donde I es el momento de Inercia. Las permeabilidades obtenidas son normalizadas respecto a κ^{I} , es decir que $\overline{\kappa}_{s}^{\perp} = \kappa_{s}^{\perp}/\kappa^{I}$ y $\overline{\kappa}_{m}^{\perp} = \kappa_{m}^{\perp}/\kappa^{I}$. A partir de estos resultados obtenidos, se llega que la permeabilidad de la interface normal depende enteramente de la permeabilidad microscópica κ^{I} y es independiente del espesor de la interface h.

3.4.1.4. Permeabilidad tangencial

De forma similar, las permeabilidades del flujo tangencial son obtenidas como la proyección de la ecuación 3.83 sobre la dirección tangencial:

$$q_s^{\parallel} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \tilde{q}_t \, \mathrm{d}\xi_n = \frac{\kappa^I \{\nabla p\}}{2\mu \overline{h}} \int_{-\overline{h}}^{\overline{h}} \overline{v} \, \mathrm{d}\overline{\xi}_n \tag{3.87}$$

$$q_m^{\parallel} = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \tilde{q}_t \xi_n \, \mathrm{d}\xi_n = -\frac{\kappa^I [\nabla p]^{\parallel}}{8\overline{h}^2 \mu} \int_{-\overline{h}}^{\overline{h}} \overline{w} \overline{\xi}_n \, \mathrm{d}\overline{\xi}_n \tag{3.88}$$

donde se empleó la ecuación 3.60. Comparando las expresiones obtenidas con el conjunto de ecuaciones 3.62 y 3.64, se llega a que:

$$\overline{\kappa}_{s}^{\parallel} = -\frac{1}{2\overline{h}} \int_{-\overline{h}}^{\overline{h}} \overline{v} \, \mathrm{d}\overline{\xi}_{n} \qquad \overline{\kappa}_{m}^{\parallel} = -\frac{1}{8\overline{h}^{2}} \int_{-\overline{h}}^{\overline{h}} \overline{w}\overline{\xi}_{n} \, \mathrm{d}\overline{\xi}_{n} \tag{3.89}$$

3.5. Condiciones de bordes del problema

La descripción del problema se complementa adicionando las condiciones de borde de tipo Dirichlet (para desplazamients y presiones) y de tipo Neumman (para fuerzas y flujos de fluido). Las condiciones para la fase solida se escriben en términos de fuerzas y desplazamientos

$$\boldsymbol{n}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{t}_p \text{ en } \Gamma_t \qquad \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_p \text{ en } \Gamma_u$$

$$(3.90)$$

donde $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$, $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$, \boldsymbol{n}_{Γ} es la normal exterior al contorno (Figura 3.8). Las condiciones de borde para la fase de fluido se escriben en terminos de flujos y presiones

$$n_f (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma} = \boldsymbol{q}_p \text{ en } \Gamma_q \qquad p = p_p \text{ en } \Gamma_p$$

$$(3.91)$$

donde $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$ y $\Gamma_p \cap \Gamma_q = \emptyset$, y las condiciones iniciales en el tiempo t = 0, con $\pi = s, f$.

$$u_{\pi}(x,0) = u_{\pi}^{0}$$
 $p(x,0) = p^{0}$ (3.92)

Como se muestra en la Figura 3.8. Con el fin de expresar el balance de momentum de forma completa, se plantea la posibilidad de que puedan haber fuerzas cohesivas en el crack-tip de la discontinuidad Γ_d , tal que:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d^+} = \boldsymbol{t}^+ \text{ en } \Gamma_d^+ \qquad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d^-} = \boldsymbol{t}^- \text{ en } \Gamma_d^-$$
(3.93)

donde t^+ y t^- son las fuerzas cohesivas actuando sobre las caras opuestas de la fisura Γ_d^+ y Γ_d^- , respectivamente. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{n}_{\Gamma^+} = -\boldsymbol{n}_{\Gamma^-}$, se puede escribir

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}^{+} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}^{-} = \boldsymbol{t}^{+} = \boldsymbol{t}^{-} = \boldsymbol{t}_{c} - p \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_{d}} \text{ en } \Gamma_{d}$$
(3.94)



FIGURA 3.8: Dominio Ω en presencia de una discontinuidad Γ_d .

3.6. Consideraciones y forma débil del problema

3.6.1. Consideraciones para la determinación de la forma débil

- El intercambio de fluido entre la matriz porosa Ω y la discontinuidad Γ es normal.
- El intercambio de fluido se desarrolla sobre las caras de la discontinuidad. No hay intercambio por el crack-tip.
- Si llamamos v = φq, el flujo normal resultante que atraviesa la discontinuidad puede descomponerse como una componente simétrica más una componente antimétrica, tal que que: n_Γ = n_Γ⁺ = -n_Γ⁻, v₁ = v₁⁺ = -v₁⁺, v₂ = v₂⁺ = v₂⁺, v = v₁ + v₂, v⁺ = v₁⁺ + v₂⁺, v⁻ = v₁⁻ + v₂⁻, v₁ = 1/2 (v⁺ + v⁻), v₂ = v⁺ v⁻.



FIGURA 3.9: Descomposición del flujo normal en Γ_d .

Entonces el flujo promedio a través de la discontinuidad $\{\phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\}$ puede calcularse como:

$$\{\phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\} = \frac{\boldsymbol{v}^{+} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{+} + \boldsymbol{v}^{-} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{-}}{2}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{v}_{1}^{+} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{+} + \boldsymbol{v}_{2}^{+} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{+}) + (\boldsymbol{v}_{1}^{-} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{-} + \boldsymbol{v}_{2}^{-} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{-})}{2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{v}_{1} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma} + \boldsymbol{v}_{2} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma} + (-\boldsymbol{v}_{1}) \cdot (-\boldsymbol{n}_{\Gamma}) + \boldsymbol{v}_{2} \cdot (-\boldsymbol{n}_{\Gamma})}{2}$$

$$\{\phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\} = \boldsymbol{v}_{1} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}$$

$$(3.95)$$

mientras que el salto del flujo a través de la discontinuidad $[\phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}]$ se calcula como:

$$\begin{bmatrix} \phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^+ - \boldsymbol{v}^- \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^-$$

$$= \left(\boldsymbol{v}_1^+ \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^+ + \boldsymbol{v}_2^+ \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^+ \right) - \left(\boldsymbol{v}_1^- \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^- + \boldsymbol{v}_2^- \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^- \right)$$

$$= \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma} + \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma} - (-\boldsymbol{v}_1) \cdot (-\boldsymbol{n}_{\Gamma}) - \boldsymbol{v}_2 \cdot (-\boldsymbol{n}_{\Gamma})$$

$$\begin{bmatrix} \phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \end{bmatrix} = 2 \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}$$

$$(3.96)$$

3.6.2. Forma débil del balance de momentum masa en la matriz porosa Ω

Para la obtención de la forma débil de las ecuaciones de balance, se multiplican el balance de momentum (3.52) y el balance de masa (3.48) por funciones de prueba cinemáticamente admisibles con el campo de desplazamientos, $\delta \boldsymbol{u}$, y con el campo de presiones, δp , como sigue

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}v = 0$$

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s \delta p \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{q}) \delta p \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}v = 0$$
(3.97)

Aplicando el teorema de divergencia, y las condiciones de borde (3.90),(3.91) y (3.93), las ecuaciones $(3.97)_1$ y $(3.97)_2$ pueden reescribirse como sigue



FIGURA 3.10: Condiciones de Bordes del campo hidraúlico y transferencia entre Ω y Γ .

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t}_p \cdot \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_{\Gamma_d} (\boldsymbol{t}_c - p \boldsymbol{n}_{\Gamma_d}) \llbracket \delta \boldsymbol{u} \rrbracket \, \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$$
(3.98)

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{s} \delta p \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}v - \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \boldsymbol{v}_{r} \, \mathrm{d}v + \int_{\Gamma_{q}} \boldsymbol{v}_{r} \cdot \boldsymbol{n}_{q} \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_{d}^{+}} \boldsymbol{v}^{+} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{+} \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_{d}^{-}} \boldsymbol{v}^{-} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^{-} \delta p \, \mathrm{d}a = 0$$

$$(3.99)$$

donde $[\![\delta u]\!] = (\delta u^- - \delta u^+)$ es el salto del campo desplazamientos en las caras opuestas de la fisura, y $v_r = \phi q = n_f (v_f - v_s)$ la velocidad relativa entre el fluido y matriz sólida. Los últimos términos de la ecuación (3.99) corresponden a la transferencia de fluido entre la matriz porosa Ω y la discontinuidad Γ , a través de las caras Γ_d^- y Γ_d^+ .

$$\int_{\Gamma_d^+} \boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^+ \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_d^-} \boldsymbol{v}^- \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^- \delta p \, \mathrm{d}a = \int_{\Gamma_d^+ \cup \Gamma_d^-} \left(\boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d}^+ - \boldsymbol{v}^- \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_d}^- \right) \delta p \, \mathrm{d}a \qquad (3.100)$$

en donde, introduciendo la expresión 3.96, se obtiene

$$\int_{\Gamma_d^+} \boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^+ \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_d^-} \boldsymbol{v}^- \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma}^- \delta p \, \mathrm{d}a = \int_{\Gamma} \left[\phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \right] \delta p \, \mathrm{d}a \qquad (3.101)$$

3.6.3. Forma débil del balance de masa en la discontinuidad Γ

Para la integración del flujo dentro de la discontinuidad, se recurre a aplicar el balance de masa dentro del dominio Γ . Empleando el balance de masa 3.49, la forma débil se obtiene a partir de multiplicar por una función de prueba admisible con el campo de presiones δp e integrando en el dominio Γ multiplicado por el espesor h:

$$\int_{\Gamma} \frac{h}{\overline{Q}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma} h \, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma} h \, \mathrm{div}^{\parallel} \left(\overline{\phi} \boldsymbol{q}_s^{\parallel} \right) \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma} \left[\phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \right] \delta p \, \mathrm{d}a = 0 \quad (3.102)$$

Si consideramos que la apertura de la fisura es mucho menor que la longitud de la misma y suponiendo que la componente tangencial de la velocidad sólida v_{st^*} varía linealmente con la dirección n^* , la segunda integral de la ecuación 3.102 se calcula como

$$\int_{\Gamma} h \,\nabla \cdot \boldsymbol{v}_s \delta p \,\mathrm{d}a = \int_{\Gamma} h \left(\frac{\partial v_{st^*}}{\partial t^*} + \frac{\partial v_{sn^*}}{\partial n^*} \right) \delta p \,\mathrm{d}a$$

$$= \int_{\Gamma} \left(h \left\{ \frac{\partial v_{st^*}}{\partial t^*} \right\} + [v_{sn^*}] \right) \delta p \,\mathrm{d}a$$
(3.103)

Empleando la relación constitutiva 3.62, la tercera integral puede calcularse como:

$$\int_{\Gamma} h \operatorname{div}^{\parallel} \left(\overline{\phi} \boldsymbol{q}_{s}^{\parallel} \right) \delta p \operatorname{d} a = -\int_{\Gamma} h \left(k_{s}^{\parallel} p_{,i} \right)_{,i} \delta p \operatorname{d} a \qquad \text{con} \quad i = t, s \qquad (3.104)$$

donde $k_s^{\parallel} = \kappa_s^{\parallel}/\mu$. Para la resolución de esta integral, recurrimos a considerar el volumen Ω^* equivalente al dominio superficial Γ por el espesor h.

$$\int_{\Omega^*} \operatorname{div}^{\parallel} \left(\overline{\phi} \boldsymbol{q}_s^{\parallel} \right) \delta p \, \mathrm{d}a = -\int_{\Omega^*} h \, \left(k_s^{\parallel} \, p_{,i} \right)_{,i} \delta p \, \mathrm{d}a \qquad \operatorname{con} \, i = t, s \tag{3.105}$$

Aplicando la fórmula de Green, obtenemos:

$$-\int_{\Omega^*} \left(k_s^{\parallel} p_{,i}\right)_{,i} \delta p \,\mathrm{d}a = \int_{\Omega^*} k_s^{\parallel} p_{,i} \,\delta p_{,i} \,\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_d^+ \cup \Gamma_d^-} \delta p \left(k_s^{\parallel} p_{,i}\right) \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma} \qquad \mathrm{con} \ i = t, s \quad (3.106)$$

En $\Gamma_d^+ \cup \Gamma_d^-$, el flujo tangencial por el vector normal al contorno de Ω^* es nulo, por lo que podemos escribir entonces:

$$-\int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left(k_s^{\parallel} \, p_{,i}\right)_{,i} \, \delta p \, \mathrm{d}n \, \mathrm{d}a = \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} k_s^{\parallel} p_{,i} \, \delta p_{,i} \, \mathrm{d}n \, \mathrm{d}a \qquad \mathrm{con} \ i = t, s \tag{3.107}$$

$$-\int_{\Gamma} h \left(k_s^{\parallel} p_{,i}\right)_{,i} \delta p \,\mathrm{d}a = \int_{\Gamma} h \,k_s^{\parallel} p_{,i} \,\delta p_{,i} \,\mathrm{d}a \qquad \mathrm{con} \ i = t,s \tag{3.108}$$

donde reemplazando en 3.104, se obtiene la tercera integral. Despejando el término que describe el intercambio de fluido entre la matriz porosa y la discontinuidad, de la ecuación 3.102 obtenemos:

$$\int_{\Gamma} \left[\phi \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \right] \delta p \, \mathrm{d}a = -\int_{\Gamma} \frac{h}{\overline{Q}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}a - \int_{\Gamma} h \left\{ \frac{\partial v_{st^*}}{\partial t^*} \right\} \delta p \, \mathrm{d}a - \int_{\Gamma} \left[v_{sn^*} \right] \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma} h \, k_s^{\parallel} p_{,i} \, \delta p_{,i} \, \mathrm{d}a$$
(3.109)

3.7. Tratamiento de discontinuidades en medios porosos

Para la discretización espacial, el dominio Ω se divide en elementos finitos en donde los campos de desplazamiento y presión son interpolados. Para considerar la presencia de discontinuidades en los elementos, siguiendo la propuesta de Moes *et al.* (1999) se enriquece la aproximación standard de elementos finitos empleando la propiedad de la partición de la unidad de las funciones de forma. Usando el método de Galerkin, se aproximan por lo tanto los campos de desplazamiento \boldsymbol{u} , de presión p y las respectivas funciones de prueba de desplazamiento y presión, $\delta \boldsymbol{u}$ y δp como sigue

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i \in I} N_{a1}^{i}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{a}_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{a2}^{j}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{a}_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{a3}^{k}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{a}_{3}^{k} \\ p(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i \in I} N_{p1}^{i}(\boldsymbol{x}) \, p_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{p2}^{j}(\boldsymbol{x}) \, p_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{p3}^{k}(\boldsymbol{x}) \, p_{3}^{k} \\ \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i \in I} N_{a1}^{i}(\boldsymbol{x}) \, \delta \boldsymbol{a}_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{a2}^{j}(\boldsymbol{x}) \, \delta \boldsymbol{a}_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{a3}^{k}(\boldsymbol{x}) \, \delta \boldsymbol{a}_{3}^{k} \\ \delta p(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i \in I} N_{p1}^{i}(\boldsymbol{x}) \, \delta p_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{p2}^{j}(\boldsymbol{x}) \, \delta p_{2}^{j} + \sum_{k \in K} N_{p3}^{k}(\boldsymbol{x}) \, \delta p_{3}^{k} \end{aligned}$$
(3.110)

donde I, J, K denotan el conjunto de nodos estándard, nodos enriquecidos por la función Heaviside y nodos enriquecidos por funciones asintóticas alrededor de la cabeza de la fisura respectivamente, $(\boldsymbol{a}_1^i, p_1^i)$ con $i \in I$ denotan los valores nodales de desplazamiento y presión correspondientes a la interpolación estándard de dichos campos, mientras que $(\boldsymbol{a}_2^j, p_2^j)$ y $(\boldsymbol{a}_3^k, p_3^k)$ con $j \in J$, $k \in K$, representan los valores nodales de desplazamiento y presión enriquecidos. Las funciones de forma estándard y enriquecidas para los campos de desplazamientos y presión se denominan $N_{u1}^i, N_{u2}^j, N_{u3}^k, N_{p1}^i, N_{p2}^j$ y N_{p3}^k respectivamente.

Tanto para el campo de desplazamientos como para el campo de presión, las funciones de enriquecimiento a utilizar dependerán del tipo de discontinuidad que se requiera simular. Físicamente, si el campo en estudio en discontinuo, las funciones de enriquecimiento a utilizar serán discontinuas tales que la combinación lineal de funciones de formas regulares y enriquecidas generen un campo discontinuo. A este tipo de discontinuidades se las denominan *discontinuidades fuertes*. En cambio si el campo en estudio es continuo pero el gradiente del campo es discontinuo, las funciones de enriquecimiento elegidas deberán ser de las mismas características. Estas discontinuidades son denominadas *discontinuidades débiles*.

3.7.1. Modelado de discontinuidades débiles

La condición para que una discontinuidad sea débil, es que el campo en estudio sea continuo y el gradiente normal discontinuo. En el campo mecánico, esta situación se observa en la unión de dos materiales diferentes, mientras que en el campo hidraúlico se observa en fisuras de muy pequeño espesor. Para este tipo de discontinuidad, se adoptan tanto para N_2 como para N_3 las siguientes funciones

$$\boldsymbol{N}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_1(\boldsymbol{x}) \left[Z(\boldsymbol{x}) - Z(\boldsymbol{x}_n) \right]$$
(3.111)

donde Z es la función distancia centrada en la discontinuidad y se calcula como

$$Z(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} d & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^+ \\ -d & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^- . \end{cases}$$
(3.112)

donde \boldsymbol{x} es la coordenada del punto en estudio, $Z(\boldsymbol{x})$ es la distancia entre el punto \boldsymbol{x} y la discontinuidad, $Z(\boldsymbol{x}_n)$ es un vector que contiene las distancias geométricas d entre las coordenadas de los nodos (\boldsymbol{x}_n) y la discontinuidad. Si x^* es el eje local normal a la discontinuidad e y^* es el eje local tangencial a la discontonuidad (Figura 3.10), la derivada parcial de la función distancia Z en la dirección normal $\partial Z/\partial x^*$ es la función Heaviside. En x^+ la derivada parcial vale $\partial Z/\partial x^* = -1$, mientras que en x^- la derivada parcial resulta $\partial Z/\partial x^* = 1$. En cambio, la derivada parcial tangencial a la discontinuidad $\partial z/\partial y^* = 0$ para x^+ como x^- . Cabe destacar que ningún gradiente esta definido dentro de la discontinuidad.

Las derivadas parciales de las funciones de enriquecimiento resultan

$$\frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial x^*} = \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \left[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}_n) \right] + \mathbf{N}_1 \frac{\partial Z}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial y^*} = \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial y^*} \left[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}_n) \right]$$
(3.113)

Usando XFEM, un campo genérico a queda aproximado como

$$a = \mathbf{N}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{N}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{N}_3 \mathbf{a}_3 \tag{3.114}$$

La evaluación de los diferentes flujos en estudios dependen en general del salto y el valor medio del gradiente normal perpendicular y tangencial. El valor medio de una función aserá $\{a\} = 1/2 (a^+ + a^-)$, y el salto de la función será $[a] = (a^+ - a^-)$. El salto de la función resulta

$$\llbracket a \rrbracket = \left[\mathbf{N}_1^+ \mathbf{a}_1 + \mathbf{N}_1^+ \left(Z^+ - Z_n \right) \mathbf{a}_2 \right] - \left[\mathbf{N}_1^- \mathbf{a}_1 + \mathbf{N}_1^- \left(Z^- - Z_n \right) \mathbf{a}_2 \right]$$
(3.115)

donde se simplifica la notación y se usa $Z_n = Z(\boldsymbol{x}_n)$ y Z^+ y Z^- es la función distancia evaluada en cada cara de la discontinuidad, por lo que $Z^+ = Z^- = 0$. Además N_1 es continuo en todo el dominio, $N_1^+ = N_1^-$, por lo que $(N_1^+\boldsymbol{a}_1 - N_1^-\boldsymbol{a}_1) = 0$ y $(-N_1^+Z_n + N_1^-Z_n) = 0$. Reemplazando en la expresión anterior, el salto del campo en la discontinuidad resulta

$$[\![a]\!] = 0 \tag{3.116}$$

Considerando que $(\partial N_1 / \partial x^*)^+ = (\partial N_1 / \partial x^*)^-$, los gradientes normales y tangenciales resultan

$$\llbracket \nabla a \rrbracket^{\perp} = \llbracket \frac{\partial a}{\partial x^*} \rrbracket = \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \mathbf{a}_1 + \left[\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} (Z^+ - Z_n) + \mathbf{N}_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial x^*} \right)^+ \right] \mathbf{a}_2 - \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \mathbf{a}_1 - \left[\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} (Z^- - Z_n) + \mathbf{N}_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial x^*} \right)^- \right] \mathbf{a}_2$$
(3.117)
$$\llbracket \nabla a \rrbracket^{\perp} = \llbracket \frac{\partial a}{\partial x^*} \rrbracket = 2\mathbf{N}_1 \mathbf{a}_2$$

ya que la derivada parcial normal de la función distancia es la función Heaviside y $Z^+ = Z^- = 0$. Teniendo en cuenta que la derivada parcial tangencial de la función distancia evaluada en cada cara de la discontinuidad es nula, el salto del gradiente tangencial resulta:

$$\llbracket \nabla a \rrbracket^{\parallel} = \llbracket \frac{\partial a}{\partial y^{*}} \rrbracket = \frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} \mathbf{a}_{1} + \left[\frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} (Z^{+} - Z_{n}) + \mathbf{N}_{1} \left(\frac{\partial Z}{\partial y^{*}} \right)^{+} \right] \mathbf{a}_{2} - \frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} \mathbf{a}_{1} - \left[\frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} (Z^{-} - Z_{n}) + \mathbf{N}_{1} \left(\frac{\partial Z}{\partial y^{*}} \right)^{-} \right] \mathbf{a}_{2}$$
(3.118)
$$\llbracket \nabla a \rrbracket^{\parallel} = \llbracket \frac{\partial a}{\partial y^{*}} \rrbracket = 0$$

El valor medio del gradiente normal y perpendicular es

$$\{\nabla a\}^{\perp} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial x^*} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \mathbf{a}_1 + \left[\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \left(Z^+ - Z_n \right) + \mathbf{N}_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial x^*} \right)^+ \right] \mathbf{a}_2 + \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \mathbf{a}_1 + \left[\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \left(Z^- - Z_n \right) + \mathbf{N}_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial x^*} \right)^- \right] \mathbf{a}_2 \right\}$$
(3.119)
$$\{\nabla a\}^{\perp} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial x^*} \right\} = \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} \mathbf{a}_1 - \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x^*} Z_n \mathbf{a}_2$$

$$\{\nabla a\}^{\parallel} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial y^{*}} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} \mathbf{a}_{1} + \left[\frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} (Z^{+} - Z_{n}) + \mathbf{N}_{1} \left(\frac{\partial Z}{\partial y^{*}} \right)^{+} \right] \mathbf{a}_{2} \\ + \frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} \mathbf{a}_{1} + \left[\frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} (Z^{-} - Z_{n}) + \mathbf{N}_{1} \left(\frac{\partial Z}{\partial y^{*}} \right)^{-} \right] \mathbf{a}_{2} \right\}$$
(3.120)
$$\{\nabla a\}^{\parallel} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial y^{*}} \right\} = \frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} \mathbf{a}_{1} - \frac{\partial \mathbf{N}_{1}}{\partial y^{*}} Z_{n} \mathbf{a}_{2}$$

3.7.2. Modelado de discontinuidades fuertes

La condición para que una discontinuidad sea fuerte, es que el campo en estudio sea discontinuo, como es el caso de desplazamientos en fisuras discretas o cuando la presión de fluido es discontinua a lo largo de fisura. Para este tipo de discontinuidad, se adopta para N_2 la siguiente función de enriquecimiento

$$\boldsymbol{N}_{2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{1}(\boldsymbol{x}) \left[H(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x}_{n}) \right]$$
(3.121)

donde H es la función Heaviside centrada en la discontinuidad y se calcula como

$$H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^+ \\ -1 & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega^- . \end{cases}$$
(3.122)

En tanto para N_3 la función de enriquecimiento dependerá del orden del campo a interpolar. Si el campo es un vector, se empleará la ecuación 3.124 (ej.:desplazamiento), y si el campo es escalar, se empleará la ecuación 3.125.

$$\boldsymbol{N}_{3}^{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{1}(\boldsymbol{x}) \left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{n}) \right] \qquad \boldsymbol{N}_{3}^{e}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{1}(\boldsymbol{x}) \left[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_{n}) \right]$$
(3.123)

donde F y G son funciones asintóticas en el entorno de la cabeza de la fisura y valen

$$\{F(r,\theta)\}_{l=1}^{4} = \{\sqrt{r}\cos\theta/2, \sqrt{r}\sin\theta/2, \sqrt{r}\sin\theta/2\sin\theta, \sqrt{r}\cos\theta/2\sin\theta\}$$
(3.124)

$$G(r,\theta) = \sqrt{r}\cos\theta/2 \tag{3.125}$$

con r la distancia hasta la cabeza de la fisura y θ el ángulo con la dirección de la fisura. Se puede verificar que la función $\sqrt{r} \sin \theta/2$ es discontinua en $(+\pi, -\pi)$, el salto es $[\sqrt{r} \sin \theta/2] = 2\sqrt{r}$ y el valor medio es $\{\sqrt{r} \sin \theta/2\} = 0$. El resto de las funciones asintóticas son continuas en la interface, por lo que el salto es nulo y el valor medio no nulo. Para trabajar en forma general, en la formulación se considera al campo interpolado como una magnitud vectorial. Considerando el campo genérico vectorial \boldsymbol{a} y que $\boldsymbol{N}_1 \boldsymbol{a}_1$ es continua en todo el dominio y que $\boldsymbol{N}_1^+ = \boldsymbol{N}_1^- = \boldsymbol{N}_1$, el salto de la función es

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 (H^+ - H_n) \, \boldsymbol{a}_2 + N_1 (F^+ - F_n) \, \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1 (H^- - H_n) \, \boldsymbol{a}_2 + N_1 (F^- - F_n) \, \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$$
(3.126)
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \end{bmatrix} = 2N_1 \boldsymbol{a}_2 + N_1 (F^+ - F^-) \, \boldsymbol{a}_3$$

Es importante aclarar que las funciones vectoriales \mathbf{F} , $\partial \mathbf{F}/\partial x^*$ y $\partial \mathbf{F}/\partial y^*$ contienen funciones continuas y discontinuas. El valor medio de las funciones discontinuas es nulo en la discontinuidad, mientras que el salto es no nulo. De forma contraria, el valor medio de las funciones continuas en todo el dominio es no nulo y el salto nulo. Por esta razón, $\llbracket \mathbf{F} \rrbracket \neq \mathbf{0}, \ \llbracket \partial \mathbf{F}/\partial x^* \rrbracket \neq \mathbf{0}, \ \llbracket \partial \mathbf{F}/\partial y^* \rrbracket \neq \mathbf{0}, \ \llbracket \partial \mathbf{F}/\partial y^* \rrbracket \neq \mathbf{0}, \ \{\mathbf{F}\} \neq \mathbf{0}, \ \{\partial \mathbf{F}/\partial x^*\} \neq \mathbf{0} \ y \ \{\partial \mathbf{F}/\partial y^*\} \neq \mathbf{0}.$ El salto del gradiente perpendicular $\llbracket \nabla \mathbf{a} \rrbracket^{\perp}$ será

$$\begin{bmatrix} \nabla \boldsymbol{a} \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^{*}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}} (H^{+} - H_{n}) \boldsymbol{a}_{2} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}} (\boldsymbol{F}^{+} - \boldsymbol{F}_{n}) + \boldsymbol{N}_{1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x^{*}} \right)^{+} \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_{3}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}} (H^{-} - H_{n}) \boldsymbol{a}_{2} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}} (\boldsymbol{F}^{-} - \boldsymbol{F}_{n}) + \boldsymbol{N}_{1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x^{*}} \right)^{-} \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_{3}$$
$$\begin{bmatrix} \nabla \boldsymbol{a} \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^{*}} \end{bmatrix} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}} \boldsymbol{a}_{2} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}} (\boldsymbol{F}^{+} - \boldsymbol{F}^{-}) + \boldsymbol{N}_{1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^{+}}{\partial x^{*}} - \frac{\partial \boldsymbol{F}^{-}}{\partial x^{*}} \right) \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_{3}$$
(3.127)

mientras que el salto del gradiente tangencial $[\![\nabla \pmb{a}]\!]^{\parallel}$ será

$$\llbracket \nabla \boldsymbol{a} \rrbracket^{\parallel} = \llbracket \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y^*} \rrbracket = 2 \frac{\partial \boldsymbol{N}_1}{\partial y^*} \boldsymbol{a}_2 + \left[\frac{\partial \boldsymbol{N}_1}{\partial y^*} \left(\boldsymbol{F}^+ - \boldsymbol{F}^- \right) + \boldsymbol{N}_1 \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^+}{\partial y^*} - \frac{\partial \boldsymbol{F}^-}{\partial y^*} \right) \right] \boldsymbol{a}_3 \quad (3.128)$$

y el valor medio del gradiente normal $\{\nabla \boldsymbol{a}\}^{\perp}$ y tangencial $\{\nabla \boldsymbol{a}\}^{\parallel}$ serán

$$\{\nabla \boldsymbol{a}\}^{\perp} = \left\{\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^{*}}\right\} = \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}}\boldsymbol{a}_{1} - \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial x^{*}}H_{n}\boldsymbol{a}_{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{*}}\boldsymbol{N}_{1}(\boldsymbol{F}^{+} - \boldsymbol{F}_{n}) + \frac{\partial}{\partial x^{*}}\boldsymbol{N}_{1}(\boldsymbol{F}^{-} - \boldsymbol{F}_{n})\right)\boldsymbol{a}_{3}$$

$$(3.129)$$

$$\{\nabla \boldsymbol{a}\}^{\parallel} = \left\{\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y^{*}}\right\} = \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial y^{*}} \boldsymbol{a}_{1} - \frac{\partial \boldsymbol{N}_{1}}{\partial y^{*}} H_{n} \boldsymbol{a}_{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y^{*}} \boldsymbol{N}_{1} (\boldsymbol{F}^{+} - \boldsymbol{F}_{n}) + \frac{\partial}{\partial y^{*}} \boldsymbol{N}_{1} (\boldsymbol{F}^{-} - \boldsymbol{F}_{n})\right) \boldsymbol{a}_{3}$$

$$(3.130)$$

3.7.3. Elección del tipo de discontinuidad para la simulación del flujo

La formulación planteada considera 4 tipos de flujos posibles: q_s^{\parallel} , q_s^{\perp} , q_m^{\parallel} y q_m^{\perp} , los cuales dependen de $\{\nabla p\}^{\parallel}$, $\{\nabla p\}^{\perp}$, $[\![\nabla p]\!]^{\parallel}$ y $[\![\nabla p]\!]^{\perp}$ respectivamente. El tipo de discontinuidad a adoptar (débil o fuerte) a considerar en cada interface, dependerá de los tipos de flujos que se elijan simular. En los trabajos mencionados anteriormente (de Borst *et al.* (2009), Mohammadnejad & Khoei (2013b), Lamb *et al.* (2013), Yang *et al.* (2019) entre otros) consideran que la presión en cada cara es igual (ver Figura 3.11.a). Bajo esta consideración, los flujos q_m^{\parallel} y q_m^{\perp} se anulan, pero no necesariamente es así, ya que si las presiones en ambas caras de la discontinuidad no son iguales (ver Figura 3.11.b), el campo de presiones presenta un salto en la discontinuidad y se generan 3 tipos de flujo: q_s^{\parallel} , q_s^{\perp} y q_m^{\perp} .



FIGURA 3.11: Distribución de presiones, gradiente y flujos considerados para una (a) discontinuidad débil (b) discontinuidad fuerte.

Se observa que en el caso de las discontinuidades débiles, el flujo tipo spin normal q_m^{\perp} no es posible simularlo ya que $[\![\nabla p]\!]^{\perp} = 0$. En cambio, en la discontinuidades fuertes $[\![\nabla p]\!]^{\perp} \neq 0$.

3.8. Propagación de fisuras

La precisión y la fiabilidad del análisis de un cuerpo fisurado depende principalmente de la determinación de la trayectoria de la grieta. En este trabajo, el criterio utilizado es que la fisura se propaga cuando el modo I del factor de intensidad de tensiones (K_I) alcanza el factor de intensidad de tensiones crítico (K_{IC}) , obtenido de la mecánica de fractura lineal clásica por $K_{IC} = \sqrt{2E}$, donde E es el módulo de elasticidad.

Para el análisis, se considera que las acciones impuestas Q dependen linealmente de un parámetro escalar (factor de carga) λ tal que $Q = \lambda Q_0$. El factor de carga se encuentra de manera que K_I alcance K_{IC} (Sukumar *et al.*, 2000), (Oller, 2001), (Fries *et al.*, 2014). Para determinar la dirección de propagación, se adopta como criterio la dirección normal a la máxima tensión circunferencial, la cual queda definida por:

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right)$$
(3.131)

donde K_I , K_{II} corresponden al modo I y modo II del factor de intensidad de tensiones respectivamente.

3.8.1. Sistema de ecuaciones resultantes: Matrices y vectores

La ecuación 3.98 corresponde al balance de momentum general del problema. En las hipótesis consideradas, no se consideran las fuerzas cohesivas en el crack-tip, por lo que el balance de momentum resulta finalmente:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t}_p \cdot \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$$
(3.132)

Si se vinculan las ecuaciones 3.99, 3.101 y 3.109, se obtiene el balance de masa final del sistema:

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{s} \delta p \, \mathrm{d}v + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}v - \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \boldsymbol{v}_{r} \, \mathrm{d}v + \\ + \int_{\Gamma_{q}} \boldsymbol{v}_{r} \cdot \boldsymbol{n}_{q} \delta p \, \mathrm{d}a - \int_{\Gamma} \frac{h}{\overline{Q}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} \delta p \, \mathrm{d}a - \int_{\Gamma} h \left\{ \frac{\partial v_{st^{*}}}{\partial t^{*}} \right\} \delta p \, \mathrm{d}a - \\ - \int_{\Gamma} [v_{sn^{*}}] \delta p \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma} h \, k_{s}^{\parallel} p_{,i} \, \delta p_{,i} \, \mathrm{d}a = 0$$

$$(3.133)$$

con i = t, s. Las ecuaciones 3.132 y 3.133, en conjunto con todas las expresiones de las secciones 3.7.1 y 3.7.2, en donde se detallan para discontinuidades débiles y fuertes, el cálculo de las aproximaciones con XFEM del valor medio y del salto del campo incógnita, la derivada perpendicular y la derivada tangencial, definen completamente el problema, el cual puede resumirse en un sistema matricial siguiente:

$$C\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{3.134}$$

donde $\mathbf{x}^T = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, p_1, p_2, p_3]$ es el vector de incógnitas nodales. Se mientras que las matrices C, K y f son matrices que contienen funciones de formas y derivadas de funciones de formas estándares y enriquecidas. La discretización temporal se resuelve de la misma forma que la expresada en la ecuación 2.86.

Capítulo 4

Ejemplos numéricos

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan tres series de ejemplos: mecánicos, hidráulicos e hidromecánicos acoplados sin y con propagación de fisura. El objetivo es analizar y verificar la formulación propuesta en la resolución de una amplia variedad de aplicaciones. El código fue implementado en MatLab y se uso en todos los casos una notebook ASUS Serie N56, procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz, memoria RAM 16 GB 2400MHz, placa de video GeForce GT 640, almacenamiento SSD 512 GB.

4.2. Problemas mecánicos

En esta sección se consideran medios sometidos unicamente a solicitaciones mecánicas, sin fluido en su interior. Con tal propósito, se utiliza el modelo propuesto considerando el coeficiente de Biot nulo ($\alpha = 0$), desacoplando el problema hidraúlico del problema mecánico. Inicialmente se considera un problema unidimensional con una discontinuidad predeterminada, se continúa con la resolución de problemas bidimensionales de una chapa entallada a tracción y finalmente se estudia el problema de propagación de una fisura.

4.2.1. XFEM 1D: Tracción uniaxial en un medio con discontinuidad cinemática

En este primer ejemplo, se considera una barra de longitud 4L que presenta una discontinuidad geométrica en $x_d = 3L/2$ como se muestra en la Figura 4.1. El comportamiento mecánico del medio es elástico lineal con Módulo de Young *E*. Como condiciones de borde, se considera nulo el desplazamiento en el extremo izquierdo x = 0, y un desplazamiento impuesto \overline{u} en el extremo derecho x = 4L.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}=0) = 0$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}=4L) = \overline{u}$$

$$(4.1)$$

La discretización adoptada se muestra en la Figura 4.2(*a*), la cual está formada por dos elementos lineales Ω_1 y Ω_3 de longitud *L* y un elemento cuadrático Ω_2 de longitud 2*L*. El elemento Ω_2 es un elemento que contiene la discontinuidad, por lo que nodos 2 y 4 tienen grados de libertad enriquecidos y ello afectará no solo el elemento Ω_2 , sino también los elementos vecinos Ω_1 y Ω_2 como veremos a continuación.

La función Heaviside, como se observa en la Figura 4.2(b) toma valor H = 1 o H = -1, según esté del lado izquierdo o derecho de la discontinuidad. La función de forma $N_{a_j}^i$ se refiere a la función de forma correspondiente al nodo *i*, asociada al grado de libertad a_j . En las Figuras 4.2(c) se muestran las funciones de formas standard y enriquecidas del elemento Ω_2 cuando las funciones enriquecidas son (2.78) y (2.81), respectivamente.



FIGURA 4.1: Geometría del medio en estudio con discontinuidad cinemática..

Dada la presencia de una discontinuidad cinemática, el campo de desplazamiento se aproxima siguiendo la ecuación 3.110 como sigue

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} N_{a1}^{i}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{a}_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{a2}^{j}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{a}_{2}^{j}$$
(4.2)



FIGURA 4.2: (a) Discretización del problema 1. (b) Función Heaviside. (c) Funciones de forma del elemento con discontinuidad utilizando enriquecimiento estándar, (d) Funciones de forma del elemento con discontinuidad utilizando enriquecimiento modificado.

donde N_{a1}^i son las funciones de formas estandard del nodo i, N_{a2}^j son las funciones de formas enriquecidas del nodo j, donde se ha considerado primeramente

$$N_{a2}^j(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x})N_{a1}^j(\boldsymbol{x}) \tag{4.3}$$

Nótese que para un problema poromecánico, estas funciones corresponden a la interpolación del campo de presión.

La matriz de rigidez de cada elemento, puede particionarse en

$$\boldsymbol{K}_{a(i)a(j)} = \int_0^L \boldsymbol{B}_{a(j)}^T \boldsymbol{D} \, \boldsymbol{B}_{a(i)} \, \mathrm{d}x \qquad i, j = 1, 2$$
(4.4)

Elemento Ω_1 : Es un elemento lineal, en donde en todo el dominio la función Heaviside vale H = 1. Los grados de libertad estándar del elemento son: $a_1^1 ext{ y } a_1^2$, mientras que a_2^2 es el grado de libertad enriquecido. Notar que aunque este elemento no tenga ningunda discontinuidad en su interior, presenta el nodo 2 enriquecido, por lo que las funciones de forma serán:

$$\boldsymbol{N}_{a1}(x) = \begin{bmatrix} 1 - x/L & x/L \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_{a1}(x) = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_{a2}(x) = H(x) \begin{bmatrix} x/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/L \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_{a2}(x) = \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix}$$
(4.5)

Las particiones de la matriz de rigidez del elemento Ω_1 toman la forma

$$\boldsymbol{K}_{a1a1} = EA \int_{0}^{L} \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}_{a1a2} = EA \int_{0}^{L} \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}_{a2a2} = EA \int_{0}^{L} \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$
$$(4.6)$$

Sabiendo que $\mathbf{K}_{a1a2} = \mathbf{K}_{a2a1}^T$, la matriz de rigidez del elemento será:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega_1} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
(4.7)

Elemento Ω_2 : Este elemento contiene una discontinuidad. Los grados de libertad asociados al elemento son $a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_2^2 \ge a_2^4$. El campo de desplazamiento resulta a partir de la interpolación cuadrática de los *gdl* regulares $a_1^2, a_1^3 \ge a_1^4$, y de la interpolación lineal de los grados de libertad (*gdl*) enriquecidos a_2^2 . En este caso, la función de enriquecimiento Heaviside toma valores distintos antes y después de la fisura. Para la resolución, puede separarse el dominio del elemento como sigue:

$$\boldsymbol{K}_{a(i)a(j)} = \int_{0}^{2L} \boldsymbol{B}_{a(j)}^{T} \, \boldsymbol{D} \, \boldsymbol{B}_{a(i)} \, \mathrm{d}x = \int_{0}^{L/2} \boldsymbol{B}_{a(j)}^{T} \, \boldsymbol{D} \, \boldsymbol{B}_{a(i)} \, \mathrm{d}x + \int_{L/2}^{2L} \boldsymbol{B}_{a(j)}^{T} \, \boldsymbol{D} \, \boldsymbol{B}_{a(i)} \, \mathrm{d}x \quad (4.8)$$

donde en el dominio del primer integrando Ω_2^+ , la función Heaviside vale H = 1, y en el dominio Ω_2^- vale H = -1. Entonces, los términos de la matriz de rigidez pueden calcularse como:

$$\mathbf{K}_{a(i)a(j)} = \mathbf{K}_{a(i)a(j)}^{+} + \mathbf{K}_{a(i)a(j)}^{-}$$
(4.9)

A partir de la fórmula de interpolación de Lagrange, las funciones de forma son:

$$\mathbf{N}_{a1}(x) = \left[\begin{array}{ccc} (L-x)(2L-x) \\ 2L^{2} \end{array} \begin{array}{c} \frac{x(2L-x)}{L^{2}} & \frac{x(x-L)}{2L^{2}} \end{array} \right] \quad \text{en } \Omega_{2} \\
\mathbf{B}_{a1}(x) = \left[\begin{array}{ccc} (x-2L) \\ 2L^{2} \end{array} + \frac{x-L}{2L^{2}} & \frac{(2L-x)}{L^{2}} - \frac{x}{L^{2}} & \frac{(x-L)}{2L^{2}} + \frac{x}{2L^{2}} \end{array} \right] \quad \text{en } \Omega_{2} \\
\mathbf{N}_{a2}(x) = H(x) \left[\begin{array}{ccc} 1 - \frac{x}{2L} & \frac{x}{2L} \end{array} \right] \quad \text{en } \Omega_{2} \\
\mathbf{N}_{a2}^{+}(x) = \left[\begin{array}{ccc} 1 - \frac{x}{2L} & \frac{x}{2L} \end{array} \right] \quad \text{en } \Omega_{2}^{+}; \quad \mathbf{B}_{a2}^{+}(x) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} \end{array} \right] \quad \text{en } \Omega_{2}^{+} \\
\mathbf{N}_{a2}^{-}(x) = -\left[\begin{array}{ccc} 1 - \frac{x}{2L} & \frac{x}{2L} \end{array} \right] \quad \text{en } \Omega_{2}^{-}; \quad \mathbf{B}_{a2}^{-}(x) = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2L} & -\frac{1}{2L} \end{array} \right] \quad \text{en } \Omega_{2}^{-} \\
\end{array}$$

Las particiones de la matriz de rigidez del elemento puede calcularse como,

$$\boldsymbol{K}_{a1a1} = EA \int_{0}^{2L} \boldsymbol{B}_{a1}^{T} \boldsymbol{B}_{a1} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 7/6 & -4/3 & 1/6 \\ -4/3 & 8/3 & -4/3 \\ 1/6 & -4/3 & 7/6 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}_{a1a2} = EA \begin{bmatrix} \int_{0}^{L/2} (\boldsymbol{B}_{a2}^{+})^{T} \boldsymbol{B}_{a1} dx + \int_{L/2}^{2L} (\boldsymbol{B}_{a2}^{-})^{T} \boldsymbol{B}_{a1} dx \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/8 & -3/4 & 5/8 \\ -1/8 & 3/4 & -5/8 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}_{a2a2} = EA \begin{bmatrix} \int_{0}^{L/2} (\boldsymbol{B}_{a2}^{+})^{T} \boldsymbol{B}_{a2}^{+} dx + \int_{L/2}^{2L} (\boldsymbol{B}_{a2}^{-})^{T} \boldsymbol{B}_{a2}^{-} dx \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$
(4.11)

La matriz de rigidez del elemento Ω_2 es

$$\boldsymbol{K}_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} 7/6 & -4/3 & -1/6 & 1/8 & -1/8 \\ 8/3 & -4/3 & -3/4 & 3/4 \\ & 7/6 & 5/8 & -5/8 \\ & & 1/2 & -1/2 \\ & & & 1/2 \end{bmatrix}^{sim}$$
(4.12)

Elemento Ω_3 : Es un elemento lineal. En todo el dominio, la función Heaviside vale H = -1. Los grados de libertad estándar del elemento son: a_1^4 y a_1^5 , mientras que a_2^4 es el grado de libertad enriquecido. Análogamente al elemento Ω_1 , el elemento no tiene discontinuidad, pero comparte el grado de libertad enriquecido a_2^4 , por lo que las funciones de formas enriquecidas serán en este caso:

$$\boldsymbol{N}_{a2}(x) = H(x) \left[1 - x/L \right] = \left[x/L - 1 \right] \quad \boldsymbol{B}_{a2}(x) = \left[1/L \right]$$
(4.13)

por lo que matriz de rigidez $K_{\Omega_3} = K_{\Omega_1}$. Realizando el ensamblaje de la matriz y teniendo en cuenta las condiciones de bordes planteadas, los desplazamientos regulares y enriquecidos son:

$$a_1^2 = \overline{u}/2 \quad a_1^3 = \overline{u}/2 \quad a_1^4 = \overline{u}/2 \quad a_2^2 = -\overline{u}/2 \quad a_2^4 = -\overline{u}/2$$
 (4.14)

Los desplazamientos nodales finales se calculan según la ecuación 4.2, resultando

$$u_{1} = a_{1}^{1} \qquad \rightarrow u_{1} = 0$$

$$u_{2} = a_{1}^{2} + N_{a2}^{2}(x_{2}) a_{2}^{2} \qquad \rightarrow u_{2} = 0$$

$$u_{3} = a_{1}^{3} + N_{a2}^{2}(x_{3}) a_{2}^{2} + N_{a2}^{4}(x_{3}) a_{2}^{2} \qquad \rightarrow u_{3} = \overline{u}$$

$$u_{4} = a_{1^{4}} + N_{a2}^{4}(x_{4}) a_{2}^{2} \qquad \rightarrow u_{4} = \overline{u}$$

$$u_{5} = a_{1}^{5} \qquad \rightarrow u_{5} = \overline{u}$$
(4.15)

A través de las funciones de forma y desplazamientos nodales regulares a_1 y enriquecidos a_2 , se aproxima el desplazamiento del medio y se representan la composición en la Figura 4.3. Con este enriquecimiento, se observa que el desplazamiento nodal u_i no corresponde al desplazamiento regular del nodo i: a_i^1 . A continuación, se utiliza el enriquecimiento propuesto en (2.81), con el objeto de mejorar la respuesta obtenida:

$$\boldsymbol{N}_{a2}^{*}(\boldsymbol{x}) = (H(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x}_{i})) \boldsymbol{N}_{a1}(\boldsymbol{x})$$
(4.16)

donde $H(\boldsymbol{x}_i)$ son los valores de la función Heaviside en los nodos, el desplazamiento nodal $u_i = a_i^1$, ya que $N_{a2}(\boldsymbol{x}_i) = 0$ para todos los nodos.

Siguiendo la misma metodología que en el caso anterior, para el elemento Ω_1 y Ω_3 , se cumple que $\mathbf{K}_{a1a2} = \mathbf{K}_{a2a1} = \mathbf{K}_{a2a2} = 0$ ya que en todo el dominio del elemento, $H(x) = H(x_i)$, por lo que $N_{a2} = 0$ para todo x.

Para el elemento Ω_2 , las funciones de forma enriquecidas se representadas en la Figura 4.2(d). y valen

$$\boldsymbol{N}_{a2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 0 & x/L \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{2}^{+} \qquad \boldsymbol{B}_{a2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{2}^{+}$$

$$\boldsymbol{N}_{a2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} -2 + x/L & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{2}^{-} \qquad \boldsymbol{B}_{a2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{2}^{-}$$
(4.17)

Resolviendo el sistema de forma análoga, los desplazamiento nodales regulares y enriquecidos son:

$$a_1^2 = 0 \quad a_{1,3} = \overline{u}/2 \quad a_1^4 = \overline{u} \quad a_2^2 = -\overline{u}/2 \quad a_2^2 = -\overline{u}/2$$

$$(4.18)$$

Los desplazamientos nodales finales corresponden al desplazamiento regular del nodo i

$$u_{1} = a_{1}^{1} \qquad \rightarrow u_{1} = 0$$

$$u_{2} = a_{1}^{2} + \mathbf{N}_{a2}^{*2}(x_{2}) a_{2}^{2} \qquad \rightarrow u_{2} = 0$$

$$u_{3} = a_{1}^{3} + \mathbf{N}_{a2}^{*2}(x_{3}) a_{2}^{2} + \mathbf{N}_{a2}^{*4}(x_{3}) a_{2}^{2} \qquad \rightarrow u_{3} = \overline{u} \qquad (4.19)$$

$$u_{4} = a_{1}^{4} + \mathbf{N}_{a2}^{*4}(x_{4}) a_{2}^{2} \qquad \rightarrow u_{4} = \overline{u}$$

$$u_{5} = a_{1}^{5} \qquad \rightarrow u_{5} = \overline{u}$$

En la Figura 4.4, se grafican las composiciones de los desplazamientos regulares y enriquecidos.



FIGURA 4.3: Desplazamientos regulares, enriquecidos y totales usando enriquecimiento $N_{a2}(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x})N_{a1}(\boldsymbol{x}), \text{ donde}$ $u_1 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i, \quad u_2 = \sum_{j \in J} N_{a2}^j a_2^j, \quad u_1 + u_2 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i + \sum_{j \in J} N_{a2}^j a_2^j.$

4.2.2. XFEM 2D: Chapa con fisura lateral bajo tensión uniaxial

El problema planteado corresponde a un ejemplo de estado plano de tensiones (EPT). Se considera una chapa de ancho b = 1m y altura L = 2m con una fisura lateral $\sigma = 1,0MPa$, (Figura 4.5), con módulo de Young E = 30MPa y coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$. Dada



FIGURA 4.4: Desplazamientos regulares, enriquecidos y totales usando enriquecimiento $N_{a2}^{*}(\boldsymbol{x}) = (H(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x}_{i})) N_{a1}(\boldsymbol{x}), \text{ donde}$

$$u_1 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i, \quad u_2 = \sum_{j \in J} N_{a2}^{*j} a_2^j, \quad u_1 + u_2 = \sum_{i \in I} N_{a1}^i a_1^i + \sum_{j \in J} N_{a2}^{*j} a_2^j.$$

la presencia de la discontinuidad cinemática que representa una fisura lateral, el campo de desplazamiento se aproxima con las ecuaciones 3.121, 3.122, 3.123 y 3.124.

Para el modelo numérico, se emplearon 3 mallas de elementos finitos 2D: 10x20, 20x40 y 40x80, resultando 200, 800 y 3200 elementos Lagrangianos de 9 nodos respectivamente. Como parámetro de referencia se considera el factor de concentración de tensiones K_I . La solución exacta para este problema es (Moes *et al.*, 1999), (Fries *et al.*, 2014), (Sukumar *et al.*, 2000), (Oller, 2001).:

$$K_{I}^{ex} = F\left(\frac{a}{b}\right)\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1,12 - 0,231\frac{a}{b} + 10,55\left(\frac{a}{b}\right)^{2} - 21,72\left(\frac{a}{b}\right)^{3} + 30,39\left(\frac{a}{b}\right)^{4}$$
(4.20)

Se tomaron varios dominios de integración en la cabeza de la fisura para evaluar el factor de concentración de tensiones K_I , del cual la solución exacta para este problema es $K_I^{ex} = 3,452 \ (F = 2,826), K_{II}^{ex} = 0.$

En la Figura 4.5 se representa la geometría del problema y la discretización empleada. En la Figura 4.6 se grafican el estado tensional de la chapa σ_x, σ_y y τ_{xy} . En el Tabla 4.1 se detallan los valores de factor de concentración de tensiones determinados numéricamente, K_I^{num} , relativos a la solución exacta K_I^{ex} , según el número de elementos utilizados en la



FIGURA 4.5: Geometría del problema de fisura lateral bajo tensión uniaxial (a) y deformada del modelo resuelto con XFEM (b).



FIGURA 4.6: Mapa de tensiones: σ_x , σ_y y $\tau_x y$

discretización y el radio relativo r (Kabiri & Vernerey, 2013), (Vahab *et al.*, 2018) utilizado para definir el dominio de integración.

En la Figura 4.7 se representa la variación de $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función del radio relativo r utilizado para definir el dominio de integración. En la Figura 4.8 se representa $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función del número de elementos utilizados en la discretización y para distintos valores de r.

Sin dudas, la gran ventaja del método XFEM para la resolución de discontinuidades discretas, es la independencia del mallado respecto a la misma. El modelo propuesto

	$R_k = K_I^{ex} / K_I^{num}$						
N	r = 1	r = 1,5	r=2	r = 2,5	r = 3	r = 4	r = 5
200	1.0619	1.0394	1.0394	1.0393	1.3092	1.0392	1.0392
800	1.0368	1.0198	1.0196	1.0196	1.0196	1.0196	1.0196
3200	1.0195	1.0095	1.0096	1.0102	1.0099	1.0099	1.0099

TABLA 4.1: Factor de intensidad de tensiones relativo K_I^{ex}/K_I^{num} según el número de elementos usados en la discretización y el radio r del dominio de integración

apunta a resolver problemas de propagación de fisuras (sin readaptar la malla de elementos finitos), por lo que la fractura y por ende, la posición del crack-tip va evolucionando a lo largo de todo el problema. Por esa razón, se consideran mallas uniformes de elementos. El objetivo de este ejemplo, es analizar la convergencia de la solución obtenida con XFEM respecto a la solución analítica. En la Figura 4.7 se observa que K_I^{num} se estabiliza a partir r = 2 y converge al valor exacto que corresponde a $R_k = 1$ cuando el número de elementos aumenta (Figura 4.8).

Considerando que para la determinación de K_I^{num} se evalúa la integral J (Moes *et al.*, 1999) en todos los puntos de Gauss ubicados a una distancia respecto al crack-tip menor o igual a r, mientras menor sea este dominio de integración, menos pasos de cálculo se requirirá. En virtud a los resultados obtenidos, se considera un radio r = 2 como un valor óptimo para el análisis de K_I^{num} , principalmente teniendo en cuenta que en un problema de propagación de fisuras, este parámetro se deberá calcular en cada iteración y en cada posición del crack-tip a medida que avance el proceso de fisuración. Respecto al número de elementos, si bien es cierto que las mallas adoptadas son gruesas, los elementos que más influyen en la evaluación de la solución del problema es en la zona del crack-tip (a una distancia menor o igual a r = 2). Como el mismo va desplazándose en un problema de propagación, si se busca densificar el mallado (no uniforme), se lo deberá hacer en todo el dominio del problema en donde pueda llegar a pasar la fisura con la desventaja de aumentar el costo computacional, sin mejorar de manera significativa.

4.2.3. XFEM 2D: Viga a flexión con entalla central

Se considera ahora una viga como se muestra en la Figura 4.9, de espesor B = 1cm, altura b = 15cm, luz entre apoyos 60cm, con módulo de Young E = 9MPa, coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$, sometida a una carga puntual P = 2KN. Para el modelo numérico, con el mismo razonamiento que en el problema anterior, se emplearon 3 mallas de elementos finitos: 24x6, 48x12 y 96x24, resultando 144, 576 y 2304 elementos Lagrangianos de 9



FIGURA 4.7: $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función al dominio de integración r.

nodos respectivamente.

La solución exacta para este problema es (Oller, 2001):

$$K_I^{ex} = \frac{F}{B\sqrt{b}} f_1\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{a}{b} = 0.5 \text{ de tabla } f_1\left(\frac{a}{b}\right) = 10.96$$

$$(4.21)$$

Bajo estas condiciones, la solución exacta es $K_I^{ex} = 5,479$. Se realizó el mismo análisis precedente. En la Figura 4.9 se representa la geometría del problema en estudio y la discretización de elementos empleada. En la Figura 4.10 se grafican el estado tensional de la chapa σ_x , σ_y y τ_{xy} . Los valores de K_I obtenidos numéricamente y relativos a la solución exacta K_I^{ex} se muestran en la Tabla 4.2.

En la Figura 4.11 y Figura 4.12 se muestran las variaciones del $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función del radio relativo r utilizado para definir el dominio de integración, y en el número de elementos utilizados en la discretización. Se observa en este caso, la estabilidad del K_I^{num} calculado a partir de un dominio relativo de r = 2 (repitiéndose los resultados del problema



FIGURA 4.8: $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función del número N de elementos utilizados en la discretización.



FIGURA 4.9: (a) Geometría de una viga entallada simplemente apoyada bajo carga puntual. (b) Deformada del modelo resuelto con XFEM.

anterior). Para la discretización con menor número de elementos, se observa inestabilidad en el cálculo del K_I^{num} utilizando dominios (r) del orden de la dimensión del elemento.


FIGURA 4.10: Mapa de tensiones: σ_x , σ_y y $\tau_x y$

TABLA 4.2: Factor de intensidad de tensiones relativo $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ según el número de elementos usados en la discretización y el radio r del dominiode integración

	$R_k = K_I^{ex} / K_I^{num}$						
N	r = 1	r = 1,5	r=2	r = 2,5	r = 3	r=4	r = 5
144	1.074	1.076	1.075	1.076	1.076	-	-
576	1.036	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039
2304	-	1.082	1.043	1.037	1.030	1.026	1.025

4.2.4. Propagación de fractura debido a una solicitación mecánica

Habiendo analizando el uso de XFEM en problemas de medios continuos con una fisura en una posición determinada, se procede a estudiar el funcionamiento del modelo en problemas de propagación de fisuras. El mayor inconveniente es la falta de resultados análiticos y/o experimentales disponibles en la bibliografía, pero aún asi es factible estudiar el comportamiento del modelo y del medio en si, en un proceso de fractura progresiva. Con tal fin, se propone para el análisis un medio elástico lineal con módulo de Young E = 30MPay coeficiente de Poisson $\mu = 0.2$ de dimensiones $L_x = 2000$ y $L_y = 2000$ con un hueco circular de diámetro D = 1000 y con el centro desplazado $C_x = 150$ del centro de gravedad del medio homogéneo (Figure 4.13). Si bien los parámetros adoptados son genéricos, se los detalla con el fin de que en un futuro, puedan ser usado para ser contrarestados



FIGURA 4.11: $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función al dominio de integración.

con otros métodos. Como condiciones de borde, se restringe el desplazamiento de la cara inferior y se impone una carga mecánica de magnitud $\lambda\sigma$ sobre la cara superior. El modelo numérico esta formado por 908 elementos finitos uniformes con funciones de formas bicuadráticas para el campo de desplazamientos. En la Figura 4.13 se representa la geometría del problema en estudio. Si bien no se modela ninguna fisura preexistente, como el criterio de inicio y/o propagación de fisura es que el factor de intensidad de tensiones K_I^{num} alcance al factor de intensidad de tensiones crítico K_{IC} , se analizan inicialmente el K_I^{num} en el punto A y en el punto B, considerándose crack-tip, ya que la fisura se originaría en A o en B. Una vez alcanzado el inicio de la propagación en uno de estos dos lugares, se modela una fisura de longitud $a_f = 1$ (distancia seteada por el usuario) a un ángulo θ , el cual se calcula con la ecuación 3.131, convirtiéndose el extremo de este segmento a en el nuevo crack-tip. A continuación, se vuelve a realizar el análisis y se evalúan en ambos crack-tip el K_I^{num} .

La respuesta global de la estructura es mostrada en la Figura 4.14, donde se grafica la tensión aplicada versus la flecha w_h (medida como el alargamiento vertical del hueco). En esta figura, se distinguen diferentes etapas. En el tramo (1) - (2) (Figura 4.14), la carga aumenta produciendo concentraciones de tensiones en el vertice izquierdo y derecho del



FIGURA 4.12: $R_k = K_I^{ex}/K_I^{num}$ en función del número N de elementos utilizados en la discretización.

hueco. En la Figura 4.15 se representan la posición de los puntos de Gauss de todos los elementos. Debido a que el círculo no se encuentra centrado, en el punto B se producen mayores tensiones. El punto (2) corresponde al instante en que en el punto B se alcanza la condición de rotura ($K_1 = K_{IC}$). A partir de ahí, comienza a propagarse una fisura hacia el contorno exterior (Figura 4.16), resultando el tramo (2) – (3) hasta cortarse ese tramo derecho. A partir de ahi, vuelve a tomar carga el conjunto -segmento (3) – (4) (Figura 4.17), concentrándose las tensiones en el punto A, hasta alcanzar un segundo valor máximo en (4), en el cual se vuelve a cumplir la condición de rotura ($K_1 = K_{IC}$). Entonces, la fisura izquierda comienza de nuevo a abrirse -segmento (4) – (5)- hasta que finalmente se propaga (Figura 4.18). En este punto, el medio no tiene capacidad de tomar más carga por lo que termina alcanzado el colapso Figura 4.19.

Con la computadora empleada y el lenguaje de programación usado, el tiempo empleado para la simulación fue de 2 horas. Si bien la principal ventaja del uso de XFEM es que el mallado es fijo en todo el proceso, las matrices C y K dependen de los grados de libertad gdl de cada elemento. A medida que la fisura avanza, el crack-tip va tomando nuevos elementos, por lo que el orden de las matrices va variando constantemente, haciendo notoriamente más lenta la simulación. Otro análisis importante, es que en los elementos enriquecidos, no hay un número de puntos de integración mínimo ni exacto para la obtención de la solución. A medida que mayor es el número de puntos de Gauss en estos elementos, mayor es la precisión de la aproximación. Para los elementos finitos estándares cuadráticos se adoptaron 9 puntos de integración, mientras que para los elementos enriquecidos se tomaron como mínimo 36 puntos, y en general 100 puntos de Gauss. Valores menores a los dados, producen inestabilidad en la solución global - la curva de la Figura 4.14 presenta saltos constantes. Por último, la longitud que se extiende la fisura $a_f = 0, 1$ paso a paso, surge también porque valores grandes de *a* produce inestabilidad en la solución, llegando incluso a no poder tomar el punto (3) en el cual se corta el tramo derecho del medio.



FIGURA 4.13: Geometría del ejemplo analizado para el estudio de la propagación de la fisura debido a una solicitación mecánica..

4.3. Problemas hidráulicos

En esta sección se considera únicamente el problema de transporte de fluidos en medios porosos, en el cual no se considera el campo mecánico como variable. A igual que en el caso anterior, se utiliza el modelo propuesto considerando el coeficiente de Biot nulo ($\alpha = 0$), desacoplando el problema mecánico del problema hidráulico. Inicialmente se considera un



FIGURA 4.14: Respuesta global del problema en estudio:: $\lambda \sigma$ vs flecha w_h .



FIGURA 4.15: Deformación del medio en el rango (1)-(2).



FIGURA 4.16: Deformación del medio en el rango (2)-(3).



FIGURA 4.17: Deformación del medio en el rango (3)-(4).



FIGURA 4.18: Deformación del medio en el rango (4)-(5).



FIGURA 4.19: Deformación del medio en el momento del colapso (5).

problema unidimensional con una discontinuidad material predeterminada, continuando con simulaciones de probetas (de hormigón simple y de hormigón reforzado con fibras) para la evaluación de la permeabilidad y su correlación con ensayos experimentales. Se finaliza con un problema de flujo en un medio poroso bidimensional, el cual se compara con la solución semianálitica presentada en la Sección 2.9.

4.3.1. XFEM 1D: Flujo en un medio uniaxial con discontinuidad material

En este ejemplo, se considera un medio uniaxial de longitud 3L en presencia de una discontinuidad material ubicada en la mitad de la barra, como se muestra en la Figura 4.20. El medio se caracteriza por las permeabilidades k_1 y k_2 desde la fisura hacia la izquierda, y hacia la derecha respectivamente. Como condiciones de borde, se prescribe nula la presión en el extremo derecho y se inyecta un flujo sobre el borde izquierdo ($x = 0, q_1 = \overline{q}$):

$$q_1(x=0) = \overline{q}$$

$$p(x=3L) = 0$$
(4.22)



FIGURA 4.20: Geometría y condiciones de borde del medio en estudio con discontinuidad material.

Con el objeto de obtener la distribución de presiones en el dominio que presenta una discontinuidad en su interior y cuya discretización es independiente de la posición de dicha discontinuidad, se considera en una primera instancia tres elementos lineales Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 , los cuales se muestran en la Figura 4.21.



FIGURA 4.21: Discretización del medio con discontinuidad material.



FIGURA 4.22: Distribución de presiones regulares, enriquecidas y totales para una discretización de 3 elementos, usando $N_{p2}^{*j}(\boldsymbol{x}) = N_{p1}^{j}(Z(\boldsymbol{x}) - Z(\boldsymbol{x}_{j}))$, donde

$$p_1 = \sum_{i \in I} N_{p_1}^i p_1^i, \quad p_2 = \sum_{j \in J} N_{p_2}^{*j} a_2^j, \quad p_1 + p_2 = \sum_{i \in I} N_{p_1}^i p_1^i + \sum_{j \in J} N_{p_2}^{*j} p_2^j.$$

Dada la presencia de la discontinuidad material, el campo de presiones se aproxima como sigue

$$p(x) = \sum_{i \in I} N_{a1}^{i}(x) p_{1}^{i} + \sum_{j \in J} N_{a2}^{j}(x) p_{2}^{j}$$
(4.23)

donde N_{a1}^i son las funciones de formas estandard del nodo i, N_{a2}^j son las funciones de formas enriquecidas del nodo j.

Las funciones de forma regulares son las mismas que las desarrolladas en el ejemplo anterior. Las funciones de enriquecimiento empleadas para discontinuidades materiales



FIGURA 4.23: Presiones totales para discretizaciones de 3, 9 y 19 elementos.

inicialmente son

$$N_{p2}^{*j}(x) = N_{p1}^{j} \left(Z(x) - Z(x_{j}) \right)$$
(4.24)

donde $Z(\boldsymbol{x})$ es la distancia entre la fisura y la coordenada \boldsymbol{x} , $Z(\boldsymbol{x}_i)$ es la distancia entre la fisura y los nodos del elemento en estudio y N_{p1} son las funciones de forma regulares lineales. A continuación, se analiza cada elemento.

Elemento Ω_1 : El elemento es lineal. Los grados de libertad asociados al elemento son $p_1^1, p_1^2 \ge p_2^2$. El campo de presión resulta a partir de la interpolación lineal de los gdl regulares $p_1^1 \ge p_1^2$, y de la interpolación lineal de los gdl enriquecidos p_2^2 . De forma similar al caso del problema mecánico, si bien la discontinuidad material no se encuentra en este elemento, comparte el grado de libertad enriquecido p_2^2 , por lo que se tiene que tener en cuenta en la formulación del elemento.

La función distancia entre la fisura y cualquier punto x pertenciente al dominio Ω_1 , se puede calcular como Z = 3L/2 - x. El término queda $(Z(x) - Z(x_i)) = [-x; L - x]$. Se puede escribir entonces,

$$\boldsymbol{N}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} -x + x^{2}/L \\ -(-x + x^{2}/L) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 2x/L - 1 \\ -(2x/L - 1) \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{1}$$
(4.25)

Elemento Ω_2 : El elemento es lineal, cuyos grados de libertad regulares son p_1^2 y p_1^3 , y los grados de libertad enriquecidos son p_2^2 y p_2^3 . La función distancia entre la fisura y



FIGURA 4.24: Distribución de presiones resueltas analíticamente y con enriquecimiento modificado.

cualquier punto x ubicado desde la fisura hacia la izquierda (Ω_2^+) , se puede calcular como Z = L/2 - x y el término como $(Z(x) - Z(x_i)) = [-x; -x]$, mientras que para un punto ubicado hacia la derecha (Ω_2^-) , Z = x - L/2 y $(Z(x) - Z(x_i)) = [x - L; x - L]$ (recordar que siempre la función distancia $Z \ge 0$). Las funciones de forma y gradientes se escriben como:

$$\boldsymbol{N}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} -x - x^{2}/L \\ -x^{2}/L \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 2x/L - 1 \\ -(2x/L - 1) \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{2}^{+}$$

$$\boldsymbol{N}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 2x - L - x^{2}/L \\ x^{2}/L - x \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 2 - 2x/L \\ -1 + 2x/L \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{2}^{-}$$

$$(4.26)$$

Elemento Ω_3 : El elemento es lineal, cuyos grados de libertad regulares son p_1^3 y p_1^4 , y el grado de libertad enriquecido es p_2^3 , ya que comparte ese nodo con el elemento Ω_2 . De forma similar a Ω_1 , la distancia se define como Z = x + L/2, y el término de enriquecimiento queda como $(Z(x) - Z(x_i)) = [x; x - L]$, y las funciones de forma como

$$\boldsymbol{N}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} x - x^{2}/L \\ -(x - x^{2}/L) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_{p2}^{*}(x) = \begin{bmatrix} 1 - 2x/L \\ -(1 - 2x/L) \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_{3}$$
(4.27)

Las matrices de los elementos Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 quedan como:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega_{1}} = \begin{bmatrix} k_{1}/L & -k_{1}/L & 0 \\ -k_{1}/L & k_{1}/L & 0 \\ 0 & 0 & k_{1}L/3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{K}_{\Omega_{3}} = \begin{bmatrix} k_{1}/L & -k_{1}/L & 0 \\ -k_{1}/L & k_{1}/L & 0 \\ 0 & 0 & k_{1}L/3 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}_{\Omega_{2}} = k_{1} \begin{bmatrix} 1/2L & -1/2L & 1/4 & 1/4 \\ -1/2L & 1/2L & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & L/6 & L/12 \\ 1/4 & -1/4 & L/12 & L/6 \end{bmatrix} + k_{2} \begin{bmatrix} 1/2L & -1/2L & -1/4 & -1/4 \\ -1/2L & 1/2L & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & L/6 & L/12 \\ -1/4 & 1/4 & L/12 & L/6 \end{bmatrix}$$
(4.28)

Ensamblando la matriz de rigidez global y realizando un proceso similar al ejercicio 4.2.1, se determinan la distribución de presiones. En la Figura 4.22, se representa la parte regular p_1 , enriquecida p_2 y global $p_1 + p_2$ de la presión a lo largo del medio. La distribución real es bilineal. Se observa una perturbación del campo global en los elementos adyacentes al que contiene la fisura. En la Figura 4.23 se muestran las distribuciones de presión globales para mayores discretizaciones (3, 9 y 19 elementos). Se observa la convergencia con el aumento de la discretización.

A posterior, se calcula el mismo ejemplo con el enriquecimiento modificado propuesto por Cordero (2.82),

$$\boldsymbol{N}_{p2}^{\ddagger j}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{p1}^{j} \left(\sum_{r \in J} (\boldsymbol{N}_{a1}^{r} Z(\boldsymbol{x}_{r})) - Z(\boldsymbol{x}) \right)$$
(4.29)

La comparación de resultados obtenidos utilizando 4.24 y 4.29 se muestra en la Figura 4.24, donde se observa una respuesta mas regular y uniforme en el segundo caso propuesto.

4.3.2. Ensayo de permeabilidad

Las propiedades de transporte de un medio poroso usadas para la caracterización de la estructura interna son: la absorción de agua, absorción capilar, penetración de agua y el coeficiente de permeabilidad. La presencia de fisuras tienen un fuerte impacto en estas propiedades. A continuación se presentan resultados de correlaciones entre el modelo numérico propuesto con ensayos experimentales de permeabilidad de probetas de mortero con discontinuidades inducidas y probetas de hormigón reforzado con fibras de acero (HRFA) y de hormigón reforzados con fibras sintéticas (HRFS) fisuradas mediante ensayos de tracción indirecta, los cuales fueron diseñados por el tesista y la directora de tesis, y fueron ejecutados en el Laboratorio de Entrenamiento Multidisciplinario para la Investigación Tecnológica, La Plata, Argentina (LEMIT).



4.3.2.1. Test de permeabilidad en probetas de mortero fisuradas

FIGURA 4.25: Esquema del ensayo experimental de permeabilidad en probetas de mortero fisuradas.



FIGURA 4.26: Geometría del modelo y condiciones de contorno del problema.

En este ejemplo, se estudia el ajuste de la permeabilidad global de una matriz porosa en presencia de una discontinuidad central uniforme como se muestra en las Figuras 4.25 y 4.26 evaluada mediante el modelo numérico basado en XFEM desarrollado en secciones previas.

Para el estudio, se diseñaron 4 probetas cilindrícas de mortero cementicio de dimensiones

 $l_x = 10cm$, $l_y = 5cm$, preparados como se muestra en la Figura 4.25, las cuales presentan una discontinuidad en toda la altura l_y . Se realizaron distintos anchos de fisuras: b = 1, 2, 3y 4cm respectivamente. La materialización de la discontinuidad fue llevada a cabo colocando una placa de rayos X, la cual tiene un espesor de $w_h = 0.02cm$ y altura $l_y = 5cm$ en el momento del colado de hormigón. Para asegurar el flujo axial, las probetas fueron impermeabilizadas con pintura a prueba de agua en toda su superficie, a excepción de un sector central superior (para permitir el ingreso del agua) y un sector central inferior (para permitir la salida del agua).

El test de permeabilidad consiste en aplicar presión a través de una columna de agua sobre la cara superior. Una vez alcanzado el régimen estacionario, el coeficiente de permeabilidad es obtenido a través de mediciones regulares del flujo saliente. La descripción del procedimiento experimental más detallada, puede ser extraída de Torrijos *et al.* (2012). Para la simulación numérica del ensayo, se simplificó el medio a un problema de dos dimensiones. Como la fisura atraviesa todo el cuerpo, el ingreso y egreso de agua es en forma directa a la matriz y a la fisura. Como la permeabilidad de la discontinuidad es muy superior respecto a la del hormigón, la circulación de agua a través de ésta es mucho mayor. En un principio, se iba a modelar la geometría 2D de la Figura 4.26 de espesor by se iban a corregir los resultados considerando la diferencia de flujo circulante a través de la superficie de hormigón no contemplada en el modelo 2D (mediante la ley de Darcy). Pero la incidencia de esta corrección fue practicamente nula debido a la diferencia entre

los ordenes de permeabilidad del hormigón con respecto a la de la fisura.

El modelo numérico está formado por 456 elementos finitos mixtos 2D con funciones de forma bilineales para el campo de presión y bicuadráticas para el campo de desplazamiento. La integración de los elementos es resuelta a través de la Cuadratura de Gauss, tomando entre 36 y 100 puntos de integración en los elementos enriquecidos con el objetivo de reproducir la discontinuidad de los campos de desplazamiento y el gradiente normal del campo de presión. La permeabilidad del medio es considerada uniforme e isótropa de $k_m = 1e - 10cm/s$, coeficiente de Biot $\alpha = 1$ y módulo de compresibilidad Q = 1e18GPacon el fin de simular la cuasi-incompresibilidad del fluido. Para el cálculo de la permeabilidad de la discontinuidad, se consideran los casos límites del factor de fricción f = 1,00 y f = 1,65 propuestos por Witherspoon *et al.* (1980) (ver sección 2.7.5), viscosidad dinamica del agua $\mu = 1,10^{-7}Ns/cm^2$ y una temperatura $T = 30^{\circ}C$. Los valores de los parámetros, fueron tomados de los trabajos de de Borst *et al.* (2009) y Meschke *et al.* (2011). Como condiciones de borde Dirichlet, se considera la presión prescripta en la cara superior de p = 2040 cmc.a. y nula en la cara inferior. Se impide el flujo en las caras laterales. Las condiciones de borde para el campo de desplazamiento restringen los movimientos de cuerpo rígido.

$$p(y = 5cm) = 2040cmc.a.$$

$$p(y = 0cm) = 0$$

$$q(x = 0cm) = 0$$

$$q(x = 10cm) = 0$$

$$(4.30)$$

La obtención de la permeabilidad global del modelo numérico es exactamente igual al ensayo experimental: una vez alcanzado el estado estacionario, se mide el volumen de fluido V en un determinado tiempo Δt y con el gradiente de presión ∇p como dato (en los ensayos experimentales a través de la altura de agua, mientras que en la simulación numérica a través de las condiciones de borde), se calcula la permeabilidad global como:

$$k_{num} = \frac{V}{\Delta t \,\nabla p} \tag{4.31}$$

Los resultados experimentales y numericos obtenidos se muestran en la Tabla 4.3 y en las Figuras 4.27 y 4.34. Si bien se observa un buen ajuste entre los resultados numéricos y los valores experimentales, se observa dispersión en la permeabilidad obtenida en laboratorio, lo cual se asocia a la dificultad de materializar de forma precisa el espesor de la discontinuidad a través de la radiografía.

TABLA 4.3: Permeabilidades globales experimentales k_{exp} , desviación estándar s_k permeabilidades numéricas k_{num} .

	Res. Experimentales		Res.Num.: $f = 1,00$	Res.Num.: $f = 1,65$
b[cm]	$k_{exp}[cm/s]$	$s_k[cm/s]$	$k_{num}[cm/s]$	$k_{num}[cm/s]$
1.0	6.47e-4	7.96e-5	1.17e-3	7.12e-4
2.0	2.79e-3	2.14e-4	2.34e-3	1.42e-3
3.0	2.73e-3	1.26e-4	3.52e-3	2.13e-3
4.0	4.78e-3	2.55e-4	4.69e-3	2.84e-3

4.3.2.2. Test de permeabilidad en probetas fisuradas de HRFA y HRFS

En este ejemplo, se estudia el ajuste de la permeabilidad global de probetas de HRFA y HRFS fisuradas a través de ensayos de tracción por compresión diametral.



FIGURA 4.27: Permeabilidad global evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales



FIGURA 4.28: Permeabilidad global evaluada mediante XFEM.



FIGURA 4.29: Geometría de la probeta para el estudio de permeabilidad para hormigones HRFA y HRFS.

Se elaboraron tres hormigones de razón agua/cemento a/c = 0, 49, con cemento portland normal (*CPN30*), arena silícea natural y piedra partida granítica de 19 mm de tamaño máximo. A las probetas de HRFA se les incorporó $40kg/m^3$ de fibras de acero de tipo *hookedend* (longitud: 50 mm, esbeltez = 50), y a las probetas de HRFS se les incorporó $4kg/m^3$ de fibras sintéticas (longitud: 50 mm). Con estos hormigones se moldearon probetas cilíndricas de 150mm x 300mm para la caracterización mecánica y vigas de 50mm x 150mm x 900mm para evaluar las propiedades de transporte en el hormigón fisurado. Las vigas de 50mm x 150mm x 900mm se cortaron en rodajas de 50mm x 150mm x 150mm (ver Figura 4.29. Estas probetas fueron fisuradas a tracción por compresión diametral (Figuras 4.30 y 4.31) con anchos de fisuras variables entre 0,05mm y 0,5mm. Este ensayo fue realizado en una máquina Instron con control de deformación por lazo cerrado, el control de velocidad del ensayo se realizó a través de un clip ubicado en el centro de la cara de la probeta en contacto con el molde. A su vez el ensayo finaliza cuando la apertura de fisura medida mediante este clip alcanza el valor buscado. También se colocó un clip en la cara de moldeo para tener un registro del ancho de fisura en esa cara.

Finalizado el ensayo, con una lupa con una precisión de 0,05 mm se midió el ancho residual de fisura en cinco puntos a lo largo de ambas cara de la probeta. También, a través de un procesador de imágenes se midió la tortuosidad de las fisuras sobre la superficie de moldeo (Figura 4.32). La fisura sobre la superficie no es una línea recta sino que presenta un desarrollo tortuoso, se definió como factor de tortuosidad a la relación entre el largo "real" de la fisura sobre la superficie (L1) y el largo de una recta que empieza y termina en los mismos lugares que la fisura (L2) (Figura 4.33). La descripción del procedimiento experimental mas detallada, puede ser extraída de Torrijos *et al.* (2012).

El modelo numérico de dimensiones $l_x = 15cm$, $l_y = 15cm$ y $l_z = 5cm$ está formado por 110 elementos finitos mixtos 2D con funciones de forma bilineales para la aproximación



FIGURA 4.30: Ensayo de tracción por compresión diametral - Vista frontal.



FIGURA 4.31: Ensayo de tracción por compresión diametral - Vista lateral.



FIGURA 4.32: Permeabilidad global de una probeta fisurada de HRF de acero y sinteticas, evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales



FIGURA 4.33: Permeabilidad global de una probeta fisurada de HRF de acero y sinteticas, evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales

del campo de presión y bicuadráticas para el campo de desplazamientos. Se considera para la simulación, el problema como bidimensional de espesor l_z . La permeabilidad del medio es considerada uniforme e isótropa de $k_m = 1e - 10cm/s$, coeficiente de Biot $\alpha = 1$ y módulo de compresibilidad Q = 1e18GPa con el fin de simular la cuasi-incompresibilidad del fluido. Para el calculo de la permeabilidad de la discontinuidad, se consideran los casos límites del factor de fricción f = 1,00 y f = 1,65, viscosidad dinamica del agua $\mu =$ $1,10^{-7}Ns/cm^2$ y una temperatura $T = 30^{\circ}C$. Obsérvese que los parámetros adoptados respecto a la sección 4.3.2.1 son iguales ya que las fibras no modifican las propiedades hidraúlicas del hormigón, tanto en el caso con fibras de acero como con fibras sintéticas. Como condiciones de borde Dirichlet, se considera la presión prescripta en la cara superior de p = 2040cmc.a. y nula en la cara inferior. Se impide el flujo en las caras laterales.

Los resultados experimentales y numéricos obtenidos se muestran en la Tabla 4.4 y en la Figura 4.34. Los resultados experimentales obtenidos para una fisura de ancho wh =0.000*cm* correspoden a probetas fisuradas ensayadas mecánicamente pero siguiendo el método para cuantificar el ancho de fisura, no se alcanzó a cuantificar una apertura de fisura. Esto no implica que la probeta no este fisura, ya que la permeabilidad medida es bastante mayor a la permeabilidad natural del hormigón. A diferencia del caso anterior (sección 4.3.2.1, la dispersión entre los resultados experimentales y los numéricos aumenta. Esto se debe sin dudas a que, en el caso del mortero simple, la discontinuidad se materializa durante el moldeo de la probeta (a través del uso de una radiografía) manteniéndose en forma integra de la matriz porosa, mientras que en este caso, las fisuras son provocadas por cargas mecánicas, la cual termina produciendo no solo una fisura discreta, sino microfisuras distribuidas (aleatoriamente en las distintas probetas). En cambio, en el modelo numérico solo se considera una fisura discreta y la matriz porosa intacta. Si bien podría considerarse en el modelo una variación de la permeabilidad de la matriz, la mayor dispersión es en los resultados experimentales. Aún asi, una aplicación para este modelo es cuantificar el nivel de daño o de fisuración de un medio, por lo que esta dispersión puede dar indicios en cuanto a ese nivel.

4.3.3. Presión prescripta en una discontinuidad

En los siguientes dos ejemplos, se considera un medio poroso saturado con una discontinuidad cinemática, en donde se asume el flujo en estado estacionario, sometido a una presión prescripta en un contorno determinado. El problema es resuelto a través de XFEM y se comparan los resultados con el método semianalítico (Luege *et al.*, 2016). El objetivo

	Res. Experimentales			Res.Num.: $f = 1,00$	Res.Num.: $f = 1,65$	
Tipo	wh[cm]	$k_{exp}[cm/s]$	$s_k[cm/s]$	$k_{num}[cm/s]$	$k_{num}[cm/s]$	
HRFA	0.000	2.90e-8	3.80e-8	1.00e-10	1.00e-10	
HRFA	0.000	2.50e-6	1.91e-7	1.00e-10	1.00e-10	
HRFS	0.004	1.80e-6	4.32e-7	1.84e-5	2.78e-5	
HRFA	0.004	2.47e-6	5.27e-7	1.84e-5	2.78e-5	
HRFA	0.005	4.35e-6	1.46e-7	3.59e-5	5.44e-5	
HRFS	0.006	1.57e-6	2.77e-7	6.21e-5	9.40e-5	
HRFS	0.008	8.02e-6	3.85e-6	1.47e-4	2.23e-4	
HRFA	0.008	1.02e-5	4.95e-6	1.47e-4	2.23e-4	
HRFA	0.008	1.41e-5	7.54e-6	1.47e-4	2.23e-4	
HRFS	0.009	3.80e-5	7.99e-6	2.10e-4	3.17e-4	
HRFS	0.014	2.05e-5	2.78e-6	7.89e-4	1.19e-3	
HRFS	0.016	1.80e-3	1.29e-4	1.18e-3	1.78e-3	
HRFA	0.023	1.51e-2	6.10e-4	3.50e-3	5.29e-3	
HRFS	0.026	3.11e-2	1.41e-2	5.05e-3	7.65e-3	
HRFA	0.030	4.15e-3	3.87e-4	7.76e-3	1.17e-2	
HRFS	0.036	2.73e-2	3.52e-3	1.34e-2	2.03e-2	
HRFS	0.046	2.57e-2	3.71e-3	2.80e-2	4.23e-2	
HRFA	0.063	6.79e-2	6.79e-3	7.19e-2	1.09e-1	

TABLA 4.4: Apertura de fisura wh, permeabilidades globales experimentales k_{exp} , desviación estándar s_k permeabilidades numéricas k_{num}

es verificar la calidad de la solución obtenida por XFEM. La geometría y las condiciones de borde del problema de este ejemplo, se muestran en la Figura 4.35. El dominio Ω es un medio poroso saturado cuadrado de dimensiones $L_x = 6m$ y $L_y = 6m$, con una permeabilidad uniforme isotrópica de $k_m = 1$, coeficiente de Biot $\alpha = 1$ y módulo de compresibilidad Q = 1e18GPa, con una fisura de longitud a = 2m ubicada en el centro del dominio. El comportamiento mecanico del sólido es elástico lineal cuyo módulo de Young es E = 30MPa y módulo de Poisson es $\nu = 0,2$. Como condiciones de borde Dirchlet, se considera la presión prescrita nula en todo el contorno y presión en la fisura $\overline{p} = 1MPa$. En cuanto al campo de desplazamientos, para evitar el movimiento de cuerpo rígido, se restringe el desplazamiento vertical de la cara inferior, y horizontal de la cara lateral izquierda.



FIGURA 4.34: Permeabilidad global de una probeta fisurada de HRF de acero y sinteticas, evaluada mediante XFEM y ensayos experimentales

$$p(y = 6) = 0$$

$$p(y = 0) = 0$$

$$p(x = 0) = 0$$

$$p(x = 6) = 0$$

$$p(x \in [2, 4]) = \overline{p}$$

(4.32)

El modelo basado en XFEM está formado por 480 elementos mixtos con funciones de forma bicuadráticas para el campo de desplazamiento y bilineales para el campo de presión. La integración de los elementos es resuelta a través de la Cuadratura de Gauss, tomando entre 36 y 100 puntos de integración con el objetivo de reproducir el campo discontinuo de desplazamiento.

En la Figura 4.36 se representan la distribución de presiones en el dominio Ω obtenida con

XFEM, y en la Figura 4.37 la distribución obtenida utilizando el método semianalítico (Sección 2.9). Los resultados entre el método semianalítico y XFEM son comparados en las Figuras 4.38 y 4.39, donde se muestran los gradientes de presión $\partial p/\partial y$ a lo largo de un eje paralelo a la fisura ubicado en y = 3 y los gradientes de presión $\partial p/\partial x$ a lo largo de un eje perpendicular a la fisura, ubicado en y = 2,7.

Al imponer como condición de borde la presión prescripta \overline{p} en la discontinuidad en el modelo basado en XFEM, la presión resulta constante a lo largo de toda la fisura por lo que el gradiente de presión tangencial a la fisura es nulo en toda la discontinuidad, como se muestra en la Figura 4.38. Además, debido a que la apertura de fisura es muy chica, la presión es continua en todo el dominio, por lo que la presión de la matriz porosa en la zona de contacto con la discontinuidad sigue siendo la presión prescripta \overline{p} . De acuerdo a la formulación del modelo, la distribución de presiones en la matriz depende exclusivamente de la permeabilidad del medio y es independiente de las características de la discontuidad, por lo que si la fisura sería de longitud infinita, sería válido considerar que el gradiente de presión $\partial p/\partial x$ en toda la matriz resulta lineal, cuva pendiente es la permeabilidad del medio poroso. En este caso, en la Figura 4.39 se observa que el gradiente de presión $\partial p/\partial x$ en el eje y = 2.7 aumenta en las zonas de los crack-tip debido a la perturbación producida por el gradiente en la otra dirección $\partial p/\partial y$. En el caso del método semianalítico, se observa mayores gradientes de presión en las dos direcciones en la zona cercana a la fisura, pero menores valores de gradientes al alejarse de la misma. Esto puede deberse a que los resultados obtenidos mediante XFEM son independientes de las características de la fisura, mientras que en el método semianalítico si dependen, y que la presión prescripta \overline{p} en este caso se impone a través de *fuentes* de presión a lo largo de la discontinuidad, resultando que el gradiente de presión $\partial p/\partial y$ no sea constante a lo largo de la fisura (Figura 4.38).

Con el fin de analizar la convergencia de los resultados obtenidos mediante XFEM, se consideraron diferentes mallas: 10x12, 20x24, 30x36, 40x48 y 50x60 elementos. En la Figura 4.40 se representa los errores relativos para cada discretización considerada. Los errores relativos se calculan como:

$$e_{p} = \frac{||p - p_{ref}||_{L^{2}(\Omega)}}{||p_{ref}||_{L^{2}(\Omega)}}$$

$$e_{p,x} = \frac{||\partial p/\partial x - \partial p_{ref}/\partial x||_{L^{2}(\Omega)}}{||\partial p_{ref}/\partial x||_{L^{2}(\Omega)}}$$

$$e_{p,y} = \frac{||\partial p/\partial y - \partial p_{ref}/\partial y||_{L^{2}(\Omega)}}{||\partial p_{ref}/\partial y||_{L^{2}(\Omega)}}$$
(4.33)

donde el símbolo $||p||_{L^2(\Omega)}$ denota la norma L^2 del campo p, tal que $||p||_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |p|^2 dx}$. El campo p_{ref} es la aproximación de la solución obtenida con la malla del mayor número de elementos (50x60 elementos). Según los resultados calculados, se observa que la diferencia entre una malla gruesa y una densa (diferen 25 veces la cantidad de elementos) no supera el 3% de error. Por otro lado, en la Tabla 4.5 se muestran los tiempos de ejecución requeridos para cada discretización. Si bien son tiempos muy bajos de procesamiento, son ejemplos muy chicos y por sobre todo estáticos. En procesos de fractura progesiva, influye enormemente.

TABLA 4.5: Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz.

$N_x \ge N_y$	Número de elementos	Tiempo $[s]$
12 x 10	120	10
$24\ge 20$	480	26
$36\ge 30$	1080	34
$48 \ge 40$	1920	52
$60 \ge 50$	3000	60



FIGURA 4.35: Presión prescripta en una discontinuidad: Geometría del problema y condiciones de borde

4.3.4. Flujo de Poiseuille dentro de una fisura

En este ejemplo, se considera una matriz sólida permeable de dimensiones $L_x = 6m$ y $L_y = 4m$, con idénticas propiedades poromecánicas del problema anterior. En este caso,



FIGURA 4.36: Presión prescripta en una discontinuidad: Distribuión de presiones resuelto mediante XFEM



FIGURA 4.37: Presión prescripta en una discontinuidad: Distribuión de presiones resuelto mediante el método semianalítico.



FIGURA 4.38: Presión prescripta en una discontinuidad: Gradiente y a lo largo de un eje y = 3.



FIGURA 4.39: Presión prescripta en una discontinuidad: Gradiente x a lo largo de un eje y = 2,7.



FIGURA 4.40: Error relativo de la presión y de los gradientes de presión para diferentes discretizaciones de elementos finitos.

la fisura de longitud a = 1m se ubica paralela al eje y en contacto con la cara inferior del cuerpo, como se muestra en la Figura 4.41. Se impone un gradiente de presiones unitario, resultando una presión $\bar{p} = 4 MPa$ en la cara superior y nula en la cara inferior. En las caras laterales queda impedido el flujo $\bar{q} = 0$. En cuanto al campo de desplazamientos, para evitar el movimiento de cuerpo rígido, se restringe el desplazamiento vertical de la cara inferior, y horizontal de la cara lateral izquierda.

$$p(y = 4) = 4 MPa$$

$$p(y = 0) = 0$$

$$q(x = 0) = 0$$

$$q(x = 6) = 0$$

$$(4.34)$$

El modelo basado en XFEM está formado por elementos 380 elementos mixtos con funciones de formas bicuadráticas para el campo de desplazamiento y bilineales para el campo de presión. Se emplearon 36 puntos de integración para los elementos enriquecidos. Para la verificación de los resultados, se consideró la solución obtenida mediante el método semianalítico 2.9.

Para el análisis de los resultados, se introduce el siguiente parámetro adimensional:

$$\lambda = \frac{k_d}{2\pi k_f L} \tag{4.35}$$

donde k_d es la permeabilidad de la discontinuidad, k_f es la permeabilidad del medio y L es la longitud de la fisura. Los valores altos de λ indican que la permeabilidad de la fisura es más grande que del medio poroso, por lo que el fluido tiende a dirigirse a la discontinuidad y circular a través de ella. Por el contrario, valores menores de λ implican que la discontinuidad representa una barrera para el flujo a través de la misma, y el flujo tiende a esquivarla.



FIGURA 4.41: Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Geometría del problema y condiciones de bordes

Las distribuciones de presión en Ω obtenidas con XFEM y el método semianalítico, considerando $\lambda = 1$ se muestran en la Figura 4.42 y Figura 4.43 respectivamente. Se observa que la solución semianalítica presenta gradientes más elevados cerca de la fisura que la obtenidos mediante XFEM. La distribución de presión a lo largo de un eje paralelo a la fisura (x = 3m) obtenida por ambos métodos se muestra en la Figura 4.43 para diferentes valores diferentes de λ . Se observa que en el caso de $\lambda = 1$, es decir para una alta permeabilidad de la discontinuidad, tanto la solución semianalítica como la basada en XFEM dan un valor constante de presión en la fisura (que en el ejemplo es igual a cero) de manera consistente con el valor prescrito por la condición de borde. Para una baja permeabilidad de la fisura, que corresponden a valores bajos de λ , la presión no se ve afectada por la presencia de la grieta. En la figura 4.45 se presenta el gradiente de presiones normales $\partial p/\partial y$ sobre un eje paralelo a la fisura ubicado en x = 3m. En la figura 4.46 se presenta el gradiente de presiones tangenciales $\partial p/\partial x$ sobre un eje coincidente a la fisura en x = 2,7m. Se puede observar una idea de cómo el flujo se ve influenciado por la presencia de la discontinuidad bajo las condiciones de borde planteadas. Dado que el gradiente $\partial p/\partial y$ está



FIGURA 4.42: Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de presiones resuelto mediante XFEM.



FIGURA 4.43: Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de presiones resuelto mediante el método semianalítico.



FIGURA 4.44: Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de presiones - XFEM vs método semianalítico



FIGURA 4.45: Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de gradiente de presiones y - XFEM vs método semianalítico



FIGURA 4.46: Flujo de Poiseuille dentro de una fisura: Distribución de gradiente de presiones x - XFEM vs método semianalítico

relacionado con el flujo tangencial de la fisura, en el caso de que sea altamente permeable, el flujo tangencial es casi cero en la discontinuidad y el fluido fluye casi por completo en la dirección normal hacia la fisura, mientras que, para una permeabilidad baja, el flujo es paralelo a la misma. Tales comportamientos son reproducidos tanto por la solución XFEM como por la solución semianalítica. Sin embargo, en el diagrama que se muestra en la Figura 4.45, se observa que el flujo normal computado con el método semianalítico tiene un máximo en L/2 frente a la solución XFEM que tiene su máximo en la punta de la grieta.

4.4. Problemas hidro-mecánicos acoplados

Con el fin de analizar el comportamiento del modelo propuesto en problemas hidro-mecánicos acoplados, se simulan medios solicitados a una acción hidraúlica y se estudia el comportamiento mecánico producto de la misma. Al no disponer de ensayos de experimentales ni otros modelos numéricos, la valoración de los mismos es del tipo conceptual unicamente. Se consideran dos problemas: un medio poroso saturado con una discontinuidad cinemática sometido a un gradiente de presión y una propagación de fractura debido a una solicitación hidráulica.

4.4.1. Medio poroso saturado con discontinuidad discreta sometido a un gradiente de presión

A continuación, se busca estudiar los efectos del flujo de fluido a través de la discontinuidad sobre la apertura de la misma, para diferentes valores de λ (Ecuación 4.35). Para ello, se considera un cuerpo poroso permeable de dimensiones $L_x = 6m$ y $L_y = 6m$. Las propiedades poromecánicas son idénticas al ejemplo 4.3.3. La fisura de longitud a = 2mse ubica en el centro del medio, paralela al eje y como se muestra en la figura 4.47.*a*. Como condiciones de borde, se prescribe la presión en la cara superior $\overline{p} = 6 MPa$, se anula la presión en la cara inferior $\overline{p} = 0$, y anula el flujo de fluido en las caras laterales del medio $\overline{q} = 0$. Si bien no hay datos experimentales o numéricos para validar al modelo propuesto, se analiza la convergencia del mismo con la densificación de la malla. Con tal fin, se considera cuatros discretizaciones diferentes (duplicando la cantidad de elementos en las dos direcciones): 9x12 (108 elementos), 19x24 (456 elementos), 39x48 (1872 elementos) y 79x96 (7584 elementos). En todos los casos son elementos finitos mixtos uniformes con funciones de formas bicuadráticas para el campo de desplazamiento y bilineales para el campo de presión y se emplearon 36 puntos de integración para los elementos enriquecidos. En todos los casos, se procura que la fisura considerada, corten los elementos.

$$p(y = 6) = 6 MPa$$

$$p(y = 0) = 0 MPa$$

$$q(x = 0) = 0 MPa$$

$$q(x = 6) = 0 MPa$$

$$(4.36)$$

En la Figura 4.47.b, 4.47.c y 4.47.d, se muestra la distribución de presiones para diferentes valores de permeabilidades de la discontinuidad: $k_d = 0,0628, 0,628, 6,28, \delta \lambda = 0,01, 0,1, 1$. En la figura 4.48, se presentan las presiones calculadas sobre un eje central que coincide con la fisura. En la figura 4.49 se muestra el gradiente de presiones normales a la fisura sobre un eje paralelo a la fisura ubicado en x = 3m. En la figura 4.50 se presenta el gradiente tangencial de presiones sobre el mismo eje (x = 3m). Debido al acoplamiento



FIGURA 4.47: (a)Geometría del problema. Campo de presiones p(x, y) resultante para un gradiente uniforme de presones paralelo a la fisura para (b) $\lambda = 0,01$, (c) $\lambda = 0,1$ y (d)W $\lambda = 1$.



FIGURA 4.48: Presión a lo largo de la fisura para diferentes valores de λ .



FIGURA 4.49: Gradiente de presión en la dirección x para diferentes valores de λ .



FIGURA 4.50: Gradiente de presión en la dirección y para diferentes valores de λ .



FIGURA 4.51: Apertura de fisura debido a la circulación de fluido para (a) $\lambda = 1$, (b) $\lambda = 0,1$ y (c) $\lambda = 0,01$.

entre el campo de presiones y el de desplazamientos, se produce una apertura adicional de fisura cuando circula el fluido. En las Figuras 4.51.a, 4.51.b y 4.51.c se representan la posiciones de los puntos de Gauss cercanos a la fisura para $\lambda = 0.01, 0.1, 1$.

De acuerdo a los resultados, se observa que para valores bajos de λ , la distribución de presiones no se ve afectada por la presencia de la fisura. Sin embargo, para valores altos de permeabilidad, el flujo cambia notablemente. En el inicio de la fisura, el flujo va desde la matriz porosa hacia la fisura de forma normal. En el sector final de la fisura, el flujo vuelve de la fisura hacia la matriz porosa en forma normal.



FIGURA 4.52: Solución mediante XFEM para $\lambda = 1$: Error relativo de la presión y de los gradientes de presión para diferentes número de elementos finitos.



FIGURA 4.53: Solución mediante XFEM para $\lambda = 1$: Apertura de fisura para diferente número de elementos finitos.
Para analizar la dependencia de los resultados con la discretización de la malla de elementos finitos, se grafica en la Figura 4.52 el error relativo de la distribución de presiones y los gradientes respectivos (calculados según la ecuación 4.33) para el caso en donde $\lambda = 1$, tomándo como referencia los resultados obtenidos para las discretizaciones mencionadas previamente. En la Figura 4.53 se grafican la apertura de fisura para diferentes discretizaciones. A diferencia del ejemplo 4.3.3 en donde el error entre las distintas discretizaciones no superaba el 3%, en este caso (problema hidromecánico acoplado) se observan errores mucho mayores para discretizaciones gruesas para el gradiente de presión normal a la fisura (superando el 12%), mientras que para para el campo de presión y para el gradiente tangencial a la fisura, el error es imperceptible. Pero el gradiente normal es el que regula el intercambio de flujo entre la matriz porosa y la fisura y por ende, el que más influye en la apertura de fisura wh. Este error se traslada de forma análoga en la evaluación de wh, estabilizándose a partir de la malla de 39x48 elementos, el cual queda reflejado en la Figura 4.53. En la Tabla 4.6, se muestra la discretización considerada, el número de elementos, el tiempo de ejecución, el valor de la apertura de fisura (COD: crack opening displacement) y el error relativo respecto al COD calculado con la malla más densa. Se observan errores muy grandes con discretizaciones gruesas. Esto es muy importante ya que a mayor COD, mayor factor de intensidad de tensiones, por lo que el error se arrastraría en un mismo porcentaje a la respuesta global en un problema de fisuras progresivas, resultando errores muy groseros. También se observa una variación muy grande en los tiempos requeridos para la simulación en función a la discretización. Teniendo en cuenta que en un problema de propagación, esta simulación se repite muchas veces, resultaría de suma ayuda buscar el equilibrio entre el error esperable y el tiempo empleado para la simulación completa.

TABLA 4.6: Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz.

$N_x \ge N_y$	Número de elementos	Tiempo $[s]$	$COD \ [mm]$	Error relativo [%]
9 x 12	108	7	0.40	100%
$19\ge 24$	456	17	0.28	40%
$39\ge 48$	1872	93	0.21	5%
$79\ge96$	7584	1042	0.20	-

4.4.2. Propagación de fractura debido a una solicitación hidraúlica

Teniendo como base los ejemplos resueltos previamente, considerando todas las conclusiones de cada ejemplo, se procede a simular un ejercicio final de fractura hidráulica. Un medio poroso se caracteriza por tener una permeabilidad natural propia del material que la constituye. En el caso de hacer circular un fluido (ya sea para extraer o para incorporar líquido o gas) a través de esta matriz, el rendimiento será en función a la permeabilidad de la matriz y variará en función de algunas fisuras preexistentes que pueden tener el macizo. Como vimos en los ejemplos 4.3.2.1 y 4.3.2.2, la permeabilidad global de un medio depende fuertemente de las discontinuidades discretas que contiene. La fractura hidraúlica (o *fracking*) es la rotura del suelo debido a la inyección de fluido a una alta presión a través de una perforación, la cual produce concentración de tensiones hasta un punto tal que se alcanza la falla del material, dando inicio al proceso de propagación.

Con el fin de estudiar las ventajas y desventajas del uso del modelo propuesto en problemas de *fracking*, se considera un medio poroelástico lineal de iguales características al ejercicio 4.2.4. El medio es de un material poroso saturado con una permeabilidad $k_m = 1$, coeficiente de Biot $\alpha = 1$, módulo de compresibilidad $K_f = 1E18GPa$ y dimensiones $L_x = 2000m$ y $L_y = 2000m$, con una perforación de diámetro $\phi = 650m$ cuyo centro se ubica en coordenadas $C_x = 1000m, C_y = 525m$ (ver Figura 4.54). Como condiciones de borde, se prescribe nula la presión en todo el contorno $\bar{p} = 0$ y se restringe el desplazamiento para evitar el movimiento de cuerpo rígido. Se inyecta fluido λQ por una fisura preexistente de longitud a = 400.

El modelo numérico propuesto está formado por 420 elementos finitos mixtos con funciones de forma bicuadráticas para el campo de desplazamiento y bilineales para el campo de presión. De acuerdo a lo observado en ejercicio 4.2.4, se adoptan 100 puntos de Gauss para los elementos que contienen nodos enriquecidos por las funciones de forma asintóticas y 36 puntos de Gauss para los elementos que contienen nodos enriquecidos por funciones de forma Heaviside o función distancia (el número de puntos de integración es grande debido a que no hay un número mínimo en el cual la cuadratura resulte exacta). El medio es discretizado con una malla regular y tanto el hueco como la la fisura son consideradas con XFEM. En el caso del hueco, se emplea la función Heaviside para anular la incidencia del mismo, siendo H = 0 todos los puntos interiores a la circunferencia y H = 1 los puntos exteriores. Se adopta, a igual que en el ejercicio 4.2.4, un incremento de longitud de fisura de $a_f = 1$.

128

La respuesta global de la estructura se muestra en la figura 4.55, donde se grafica el flujo λQ versus la apertura de fisura. Se distinguen 2 etapas: el tramo (1) - (2) en el cual el aumento de invección de fluido produce un incremento en la presión, por el cual debido al acoplamiento con el campo de desplazamiento, se producen deformaciones y tensiones, las cuales se concentran en el extremo de la cabeza de la fisura. Al aumentar la inyección de fluido, el factor de intensidad de tensiones aumenta hasta llegar al valor crítico $K_I \to K_{IC}$ en (2). A partir de este punto, se comienza a propagar la fisura hacia el hueco. En la Figura 4.56 se muestra la distribución de presiones a lo largo de un eje coincidente con la fisura inicial preexistente en diferentes posiciones de la cabeza de la fisura. En la Figura 4.57 se muestra el medio deformado en el instante en que comienza la propagación de la fisura. Cuando la fisura se empieza a propagar, el crack-tip se va trasladando de elemento a elemento orientándose hacia el hueco. En las Figuras 4.58 y 4.59, se muestran las posiciones de los puntos de Gauss en dos momentos característicos: cuando el crack-tip coincide con el borde de un elemento finito enriquecido y cuando se ubica en el medio de un elemento. En términos globales, se observa que los resultados obtenidos son consistentes con el problema físico pero no existen ensayos experimentales que los validen. Con la computadora empleada y el lenguaje de programación usado, el tiempo empleado para la simulación fue de 7 horas. Se repiten las observaciones realizadas en el ejercicio 4.2.4: Menos de 36 puntos de Gauss para los elementos enriquecidos y/o valores mayores de incremento de fisuras a_f (seteados por el usuario) producen inestabilidades en la solución (la curva de la Figura 4.55 presenta saltos constantes.



FIGURA 4.54: Geometría y condiciones de bordes del problema considerado.



FIGURA 4.55: Respuesta global del especimen: Inyección del fluido λQ v
s apertura de fisura w_h .



FIGURA 4.56: Presión a lo largo de un eje paralelo a la fisura para diferente posiciones del crack-tip.



FIGURA 4.57: Medio poroso deformado producido por la inyección de un fluido cuando el crack-tip se encuentra en a = 400.



FIGURA 4.58: Posición de los puntos de Gauss cuando el crack-tip se encuentra en el borde de un elemento finito enriquecido.



FIGURA 4.59: Posición de los puntos de Gauss cuando el crack-tip se encuentra en el medio de un elemento finito enriquecido.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado un modelo para la simulación del problema hidromecánico de medios porosos saturados fisurados acoplados. El tratamiento para la evaluación del flujo dentro de una discontinuidad, la interacción con la matriz porosa y el acoplamiento con el campo mecánico, ha sido modelado en función a la teoría propuesta por Vernerey (Vernerey, 2011), (Vernerey, 2012) y asumiendo los lineamientos propuestos por Khoei (Khoei & Haghighat, 2011), (Mohammadnejad & Khoei, 2013b), (Mohammadnejad & Khoei, 2013a), (Khoei et al., 2014), (Rethore et al., 2007b)). En la macroescala, el modelo considera a la matriz porosa Ω como un medio homogéneo en donde es válida la ley de Darcy. Las discontinuidades fuertes son tratadas como interfaces Γ , las cuales intercambian el flujo de fluido a través de una componente continua y otra discontinua, que a su vez, pueden dividirse en una componente normal y otra tangencial. En la microescala, la interfaz se considera como un medio poroso de espesor 2h, en donde el flujo de fluido es descripto a través de la ley de Darcy-Brinkman. En cuanto al campo mecánico, como criterio para la propagación de fisuras, se adopta el criterio del factor de intensidades de tensiones crítico. Las discontinuidades son tratadas con el método de elementos finitos extendidos (XFEM), en donde la interpolación de la variable de estado de desplazamiento u es modelada como una discontinuidad fuerte (campo normal a la fisura discontinuo), mientras que la interpolación de la variable de presión p es considerada como una discontinuidad débil (campo continuo en todo el dominio, pero con gradiente normal a la fisura discontinuo). A continuación, se resumen las principales conclusiones de este trabajo.

5.1.1. Principales conclusiones

- La herramienta XFEM para la simulación de discontinuidades de las variables de estado que definen el problema hidromecánico, en términos generales, resulta satisfactorio. Entre las principales ventajas del uso de esta herramienta, se puede nombrar
 - * Las discontinuidades quedan descriptas discretamente.
 - * Posibilidad de reproducción de múltiples discontinuidades en el medio, interfaces de diferentes propiedades, huecos, etc.
 - * El mallado es independiente a las discontinuidades, pudiendo ser los elementos de mayor tamaño que un mallado adaptativo.
 - * Facilidad en la reproducción de las fisuras sin necesidad de modificar el mallado del medio en estudio.
 - * Una vez definida la parte continua del campo, la parte discontinua, los gradientes normal y tangencial a la discontinuidad, los saltos y los valores medios, resulta sencilla la implementación de diferentes modelos de flujos que circulan dentro de la fisura y los intercambios con la matriz porosa. zx c
 - * No es necesaria la formulación de elementos del tipo *blending* (elementos especiales de transición que contienen nodos enriquecidos y nodos sin enriquecer, por lo que no se cumple la propiedad de la partición de la unidad), ya que se siguió la metodología propuesta por Fries (2007), en el cual se emplea una función de peso la cual, es 1 en los elementos cortados por la fisura, 0 en los elementos que no tengan nodos enriquecidos y un valor intermedio en los elementos de transición.
- Como desventajas del uso de XFEM, se observó
 - * En el problema de propagación de fisuras, para evitar cambiar la matriz de rigidez global, se debe considerar el conjunto de elementos finitos enriquecidos por donde podría llegar a pasar la fisura a lo largo del proceso. Como opción, podría calcularse en cada paso de carga los elementos intervinientes e ir actualizándose a medida que trascurra la simulación, con lo que la matriz de rigidez se irá agrandando a lo largo del proceso.
 - * El enriquecimiento de elementos finitos, si bien no es general en todo el medio, requiere ampliar de forma significativa la matriz de rigidez del problema, por

lo que el costo computacional en la simulación de procesos de propagación de fisuras es demasiado alto.

- * El tiempo de cálculo crece notablemente con el aumento de discontinuidades discretas, ya que, por cada fisura, se requiere ampliar el número de grados de libertad. Más aún si estas discontinuidades se cruzan entre si.
- Con respecto a la formulación e implementación del modelo hidro-mecánico acoplado, se menciona:
 - * Se implementó correctamente el modelo completo en MatLab, modificándose la formulación clásica de un programa de elementos finitos (también de un código propio).
 - * La extensión de la teoría propuesta por Vernerey aplicada en medios porosos saturados fisurados, permite la eliminación de la hipótesis de que el ancho de la fisura 2h tiene que ser mucho menor que la longitud de la misma L, ya que el flujo resultante está formado por dos componentes continuas normal y tangencial, y por dos componentes discontinuas normal y tangencial. La condición de que el $2h \ll L$ produce que la componente discontinua tangencial sea despreciable.
 - * Para la interpolación del campo de presión en la zona cercana a la cabeza de fisura, se propuso la función $G(x) = \sqrt{r/\sin\theta/2}$ (Ecuación 3.124.b), la cual es continua en todo el dominio y el gradiente normal a la fisura discontinuo. Los resultados fueron satisfactorios. La interpolación del campo de desplazamiento en la zona cercana a la cabeza de fisura, se empleó las funciones clásicas para el enriquecimiento del crack-tip (Ecuación 3.124.a.)
 - * El modelo propuesto fue probado correctamente en problemas mecánicos, hidraúlicos y finalmente, en problemas poromecánicos acoplados. Se estudió la respuesta de XFEM en medios con discontinuidades fuertes y discontinuidades débiles. Se resolvieron problemas típicos de la mecánica de fractura elástica lineal y fueron correlaciones mediante soluciones analíticas disponibles en la bibliografía. Se reprodujeron satisfactoriamente la permeabilidad de probetas fisuradas de mortero, hormigón reforzados con fibras de acero y sintéticas, las cuales se validaron con ensayos experimentales. En cuanto a los problemas acoplados, se analizó un ejemplo en el cual un flujo circula sobre un medio con una fisura discreta, para distintas relaciones de permeabilidades entre la matriz y la fisura.

- * Mediante los ejemplos resueltos se observó que, para una permeabilidad de la fisura del orden de la permeabilidad del medio poroso, el fluido que circula por la matriz no modifica su recorrido. A medida que aumenta la permeabilidad de la discontinuidad, el fluido se dirige más rápidamente hacia la cabeza de la fisura y circula a lo largo de ella. Se estudió la variación del campo de desplazamientos para diferentes relaciones de permeabilidad.
- * Se simularon dos problemas de propagación de fisuras. En el primero, se simuló una propagación de fisuras debido a una carga mecánica en un medio homogéneo con un agujero donde dos fisuras se propagaron. En el segundo ejemplo, se simuló una propagación de fisuras debido a la inyección de un fluido a través de una grieta preexistente. Los resultados no pudieron ser correlacionados ya que no hay resultados disponibles, por lo que el estudio se limitó al sentido conceptual del problema y del comportamiento del modelo.
- Con respecto a los tiempos de procesamiento de las simulaciones, el código fue implementado en MatLab y se uso en todos los casos una notebook ASUS Serie N56, procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz, memoria RAM 16 GB 2400MHz, placa de video GeForce GT 640, almacenamiento SSD 512 GB. Los tiempo empleados se resumen a continuación:
 - * Problemas hidro-mecánicos no acoplados sin propagación de fisuras: Corresponden a los ejercicios 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.4.1. En todos los casos, el tiempo requerido para el cálculo oscila entre 3 segundos y alcanza los 60 segundos como máximo, dependiendo el mallado. Como ejemplo, se muestran los resultados para el problema 4.3.3 en la Tabla 5.1 y para el problema4.4.1 en la Tabla 5.2.

$N_x \ge N_y$	Número de elementos	Tiempo $[s]$
$12 \ge 10$	120	10
$24\ge 20$	480	26
$36\ge 30$	1080	34
$48 \ge 40$	1920	52
$60\ge50$	3000	60

TABLA 5.1: Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz.

* Problemas hidro-mecánicos no acoplados con propagación de fisuras: Es el caso del ejercicio *Propagación de fractura debido a una solicitación mecánica* (4.2.4).

$N_x \ge N_y$	Número de elementos	Tiempo $[s]$
9 x 12	108	7
$19\ge 24$	456	17
$39 \ge 48$	1872	93
$79 \ge 96$	7584	1042

TABLA 5.2: Tiempo de ejecución con un procesador Intel Core i7-4510U-2.00GHz.

Se resolvió con un mallado formado por 908 elementos finitos y el tiempo requerido para la simulación completa fueron 2 horas.

 Problemas hidro-mecánicos acoplados con propagación de fisuras: Es el caso del ejercicio Propagación de fractura debido a una solicitación hidraúlica (4.4.2). Empleando una malla más gruesa que en el ejercicio 4.2.4 formada por 420 elementos finitos, el tiempo requerido fue 7 horas.

5.1.2. Sugerencias para trabajos futuros

A partir de la elaboración de la tesis y teniendo en cuenta la importancia del tema, se podría seguir trabajando en las siguientes líneas:

- Una de las principales limitaciones del modelo propuesto, es el alto costo computacional que requiere la simulación de múltiples fisuras. La implementación de un modelo constitutivo de daño para la matriz porosa, permitiría en ciertos problemas, reducir la cantidad de fisuras discretas modeladas y usar el modelo de daño para las fisuras de menor envergadura.
- El modelo está planteado para medios porosos saturados. En una siguiente etapa, se puede extender a medios porosos parcialmente saturados.
- La mayor dificultad en todo el proceso de la formulación del modelo, es la escasez de resultados experimentales para correlacionar los resultados numéricos. Resultaría de gran utilidad la ejecución de ensayos experimentales de forma de ajustar mejor el modelo.
- Las discontinuidades en el modelo fueron aproximadas mediante XFEM. Otro método muy usado es el método de elementos finitos embebido (EFEM). La formulación propuesta puede adaptarse a EFEM sin mayores inconvenientes. Resultaría útil la comparación entre los dos modelos.

- La implementación fue realizada en MatLab. Para una mejor valoración del costo real del proceso de cálculo, se debería implementar en un lenguaje más eficiente como Fortran.
- Extensión del modelo a otras ramas de la ingeniería como ser la microfluídica.
- Implementar el modelo propuesto en algún software comercial.

5.1.3. Indicadores académicos

Para finalizar este capítulo, se enumera en una lista la producción científica generada por el autor durante el desarollo del período doctoral:

Revistas internacionales

- M. Luege, J.B. Lucero, M.C. Torrijos y A. Orlando. Coupled mechanical and fluid flow analysis in fractured saturated porous media using the extended finite element method. *Elseiver. Applied Mathematical Modelling.*; 40; 7-8; 4480-4504. Abril 2016
- J.B. Lucero, M. Luege, A. Orlando y M.C. Torrijos. XFEM modelling of hydraulic fracturing. Proceedings of the 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics. PANACM 2015, CIMNE Barcelona. Abril 2015

Congresos nacionales e internacionales

- J.B. Lucero, M. Luege y C. Torrijos. Análisis hidromecánico de un medio poroso discontinuo utilizando XFEM. Mecánica Computacional Vol XXXIII. Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones - ENIEF 2014. Setiembre de 2014.
- J.B. Lucero, M. Luege y B. Luccioni. Modelo hidro-mecánico discontinuo discontinuo empleando XFEM. Mecánica Computacional Vol. XXXII. Congreso sobre Métodos numéricos y sus Aplicaciones - ENIEF 2013. Noviembre de 2013.
- J.B. Lucero, M. Luege y B. Luccioni. A Fully Coupled Hygromechanical Damage Model for Concrete. Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics - GAMM 2013. Marzo de 2013.

 J.B. Lucero, B. Luccioni, M. Luege. Análisis higro-mecánico de un hormigón fisurado. *Mecánica Computacional Vol XXXI - MECOM 2012*. Noviembre de 2012.

Bibliografía

- ADACHI, J., SIEBRITS, E., PEIRCE, A. & DESROCHES, J. (2007). Computer simulation of hydraulic fractures. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.
- ARMERO, F. & LINDER, C. (2009). Numerical simulation of dynamic fracture using finite elements. *International Journal of Fracture Mechanics* 160, 119–141.
- BARTON, N., BANDIS, S. & BAKHTAR, K. (1985). Strength, deformation and conductivity coupling of rock joints. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences - Geomechanics Abstracts. 22(3), 121–140.
- BECKER, S. & MESCHKE, G. (2007). Hydro-mechanical modeling of cracked concrete in the framework of the xfem. - -(-), -.
- BIOT, M. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. Journal Of Applied Physics 12, 155–164.
- BOONE, T. & INGRAFFEA, A. (1990). A numerical procedure for simulation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media. *International Journal* of Fracture Mechanics 14, 27–47.
- CHANDESRIS, M. & JAMET, D. (2009). Jump conditions and surface-exces quantities at aa fluid/porous interface: A multi-scale approach. *Transport in Porous Media* **78**(1), 419–438.
- CHESSA, J. & BELYTSCHKO, T. (2003). An extended finite element method for twophase fluids. *Journal of Applied Mechanics*.
- CORDERO, F. & DIEZ, P. (2008). Xfem+: Una modificación de xfem para mejorar la precisión de los flujos locales en problemas de difusión con conductividades muy distintas. Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería. UPC. 26, 121–133.

- COUSSY, O. (2004). Poromechanics., vol. I. Wiley.
- COUSSY, O. (2010). Mechanics and physics of porous solids, vol. I. Wiley.
- DE BORST, R. (2017). Fluid flow in fractured and fracturing porous media: A unified view. *Mechanics Research Communications*.
- DE BORST, R., REMMERS, R. & NEEDLEMAN, J. (2004). Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical* and Analitical Methods in Geomechanics. 28, 583–607.
- DE BORST, R., RETHORE, J. & ABELLAN, A. (2006). A numerical approach for arbitrary cracks in a fluid-saturated medium. Archive of Applied Mechanics **75**(1), 595–606.
- DE BORST, R., RETHORE, J. & ABELLAN, M. (2009). A precis of two-scale approaches for fracture in porous media. *Lecture Notes on Composite Materials Solid Mechanics* and its Applications I, 149–171.
- DEL PRA, M., FUMAGALLI, A. & SCOTTI, A. (2017). Well posedness of fully coupled fracture/bulk darcy flow with xfem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*.
- DESROCHES, J. (1994). The crack tip region in hydraulic fracturing. *Proceedings Royal* Society of London, A.
- DURLOFSKY, L. & BRADY, J. (1987). Analysis of the brinkman equation as a model for flow in porous media. *Physics of Fluids* **30**(1), 3329–3340.
- ERDOGAN, F., GUPTA, G. D. & COOK, T. S. (1973). Numerical solution of singular integral equations. In: *Methods of analysis and solutions of crack problems*.
- FLEMISCH, B., FUMAGALLI, A. & SCOTTI, A. (2016). A review of the xfem-based approximation of flow in fractured porous media. In: *SEMA SIMAI Springer Series*.
- FRIES, T. (2007). A corrected xfem approximation without problems in blending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering 75(1), 503–532.
- FRIES, T.-P., SCHÄTZER, M. & WEBER, N. (2014). Xfem-simulation of hydraulic fracturing in 3d with emphasis on stress intensity factors. Tech. rep.
- FUMAGALLI, A. & SCOTTI, A. (2013). A numerical method for two-phase flow in fractured porous media with non-matching grids. *Advances in Water Resources*.

- FUMAGALLI, A. & SCOTTI, A. (2014). An efficient xfem approximation of darcy flows in arbitrarily fractured porous media. Oil & Gas Science and Technology – Revue d'IFP Energies nouvelles.
- GORDELIY, E. & PEIRCE, A. (2013). Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the xfem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- HUNSWECK, M. J., SHEN, Y. & LEW, A. J. (2013). A finite element approach to the simulation of hydraulic fractures with lag. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.
- INGRAFFEA, A. R. & DE BORST, R. (2017). Computational fracture mechanics. In: Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, pp. 1-26. URL http://doi.wiley.com/10.1002/9781119176817. ecm2032.
- KABIRI, M. & VERNEREY, F. J. (2013). An xfem based multiscale approach to fracture of heterogeneous media. International Journal for Multiscale Computational Engineering.
- KHOEI, A. & HAGHIGHAT, E. (2011). Extended finite element modeling of deformable porous media with arbitrary interfaces. Applied Mathematical Modelling 35(11), 5426– 5441.
- KHOEI, A., VAHAB, M., HAGHIGHAT, E. & MOALLEMI, S. (2014). A mesh-independent finite element formulation for modeling crack growth in saturated porous media based on an enriched-fem technique. *International Journal of Fracture* **188**(1), 79–108.
- KHOEI, A. R. & VAHAB, M. (2014). A numerical contact algorithm in saturated porous media with the extended finite element method. *Computational Mechanics*.
- LAMB, A. R., GORMAN, G. J. & ELSWORTH, D. (2013). A fracture mapping and extended finite element scheme for coupled deformation and fluid flow in fractured porous media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.
- LECAMPION, B. (2009). An extended finite element method for hydraulic fracture problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*.
- LI, L., WANG, M. Y. & WEI, P. (2012). Xfem schemes for level set based structural optimization. *Frontiers of Mechanical Engineering*.

- LIOLIOS, P. A. & EXADAKTYLOS, G. E. (2006). A solution of steady-state fluid flow in multiply fractured isotropic porous media. *International Journal of Solids and Structures*.
- LIU, F., ZHAO, L. Q., LIU, P. L., LUO, Z. F., LI, N. Y. & WANG, P. S. (2015). An extended finite element model for fluid flow in fractured porous media. *Mathematical Problems in Engineering*.
- LUCERO, J., LUCCIONI, B. & LUEGE, M. (2012). Análisis higro-mecánico de un hormigón fisurado. Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones - MECOM 2012. XXXI.
- LUCERO, J., LUEGE, M. & LUCCIONI, B. (2013a). A fully coupled hygromechanical damage model for concrete. Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics GAMM 2013.
- LUCERO, J., LUEGE, M., ORLANDO, A. & TORRIJOS, C. (2015). Xfem modelling of hydraulic fracturing. Proceedings on the 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics - España, Barcelona. 1(1).
- LUCERO, J., LUEGE, M. & TORRIJOS, C. (2013b). Modelo hidro-mecánico discontinuo discontinuo empleando xfem. Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones -ENIEF 2013. XXXIII.
- LUCERO, J., LUEGE, M. & TORRIJOS, C. (2014). Análisis hidromecánico de un medio poroso discontinuo utilizando xfem. Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones - ENIEF 2014. XXXIII.
- LUEGE, M., LUCERO, J., TORRIJOS, C. & ORLANDO, A. (2016). Coupled mechanical and fluid flow analysis in fractured saturated porous media using the xfem. *Applied Mathematical Modelling* **40**(1), 4480–4504.
- MESCHKE, G., LEONHART, D., TIMOTHY, J. J. & ZHOU, M. (2011). Computational mechanics of multiphase materials-modeling strategies at different scales. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 18(1-2), 73–89.
- MOËS, N. & BELYTSCHKO, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*.

- MOES, N., DOLBOW, J. & BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **46**, 131–150.
- MOËS, N., GRAVOUIL, A. & BELYTSCHKO, T. (2002). Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets-part i: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- MOHAMMADNEJAD, T. & ANDRADE, J. (2016). Numerical modeling of hydraulic fracture propagation, closure and reopening using xfem with application to in-situ stress estimation. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 40(15), 2033-2060. URL http://doi.wiley.com/10.1002/nag.2512.
- MOHAMMADNEJAD, T. & KHOEI, A. (2013a). Hydro-mechanical modeling of cohesive crack propagation in multiphase porous media using the extended finite element method. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 37(10), 1247–1279.
- MOHAMMADNEJAD, T. & KHOEI, A. R. (2013b). An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous media with the cohesive crack model. *Finite Elements in Analysis and Design*.
- MUSKHELISHVILI, N. I. (1977). Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer Netherlands. URL http://link.springer.com/10. 1007/978-94-017-3034-1.
- OLLER, S. (2001). Fractura mecánica : un enfoque global. In: Extended Finite Element Method for Crack Propagation. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- POMMIER, S., GRAVOUIL, A., COMBESCURE, A. & MOËS, N. (2013). Extended finite element method x-fem. In: *Extended Finite Element Method for Crack Propagation*. Hoboken, NJ USA: John Wiley & Sons, Inc., pp. 69–108. URL http://doi.wiley. com/10.1002/9781118622650.ch3.
- POUYA, A. & GHABEZLOO, S. (2010). Flow around a crack in a porous matrix and related problems. *Transport in Porous Media*.
- RETHORE, J., DE BORST, R., & ABELLAN, A. (2007a). A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media. International Journal for Numerical Methods in Engineering 71(1), 780–800.

- RETHORE, J., DE BORST, R. & ABELLAN, M.-A. (2007b). A discrete model for the dynamic propagation of shear bands in a fluid-saturated medium. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* **31**(2), 347–370.
- SALIMZADEH, S. & KHALILI, N. (2015). Fully coupled xfem model for flow and deformation in fractured porous media with explicit fracture flow. *International Journal of Geomechanics*.
- SCHREFLER, B. (1995). F.e. in environmental engineering: Coupled thermo-hydromechanical processes in porous media including pollutant transport. Archives of Computational Methods in Engineering 2 3, 1–54.
- SCHWENCK, N. (2015). Tesis doctoral: An xfem-based model for fluid flow in fractured porous media .
- SECCHI, S., SIMONI, L. & SCHREFLER, B. (2007). Mesh adaptation and transfer schemes for discrete fracture propagation in porous materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.* 31, 331–345.
- SEGURA, J. & CAROL, I. (2008). Coupled hm analysis using zero-thickness interface elements with double nodes. part i: Theoretical model. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 32, 2083–2101.
- SHAO, Q., BOUHALA, L., YOUNES, A., NÚÑEZ, P., MAKRADI, A. & BELOUETTAR, S. (2014). An xfem model for cracked porous media: Effects of fluid flow and heat transfer. *International Journal of Fracture*.
- STEPHANSSON, O., JING, L. & TSANG, C.-F. (1996). Coupled thermo-hydro-mechanical processes of fractured media : mathematical and experimental studies : recent developments of Decovalex project for radioactive waste repositories. Elsevier.
- SUKUMAR, N., MOËS, N., MORAN, B. & BELYTSCHKO, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- TORRIJOS, M., GIACCIO, G. & ZERBINO, R. (2012). Transport properties in cracked fibre reinforced concrete. International Symposium on Fibre Reinforced Concrete 1, 0–1.

- VAHAB, M., AKHONDZADEH, S., KHOEI, A. R. & KHALILI, N. (2018). An x-fem investigation of hydro-fracture evolution in naturally-layered domains. *Engineering Fracture Mechanics*.
- VERNEREY, F. J. (2011). A theoretical treatment on the mechanics of interfaces in deformable porous media. International Journal of Solids and Structures 48(22), 3129– 3141.
- VERNEREY, F. J. (2012). The effective permeability of cracks and interfaces in porous media. *Transport in porous media* 93(3), 815–829.
- WANG, T., LIU, Z. L., ZENG, Q. L., GAO, Y. & ZHUANG, Z. (2017). Xfem modeling of hydraulic fracture in porous rocks with natural fractures. *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*.
- WITHERSPOON, P., WANG, J., IWAI, K. & GALE, J. (1980). Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. *Water Resources Research*. **16**(1), 1016–1024.
- YANG, D., ZHOU, Y., XIA, X., GU, S., XIONG, Q. & CHEN, W. (2019). Extended finite element modeling nonlinear hydro-mechanical process in saturated porous media containing crossing fractures. *Computers and Geotechnics*.
- YVONNET, J., QUANG, H. L. & HE, Q. C. (2008). An xfem/level set approach to modelling surface/interface effects and to computing the size-dependent effective properties of nanocomposites. *Computational Mechanics*.

Apéndice A

Relaciones constitutivas para medios porosos saturados

A.0.1. Ecuaciones constitutivas para medios porosos en grandes deformaciones

A partir de la segunda ley de la termodinámica, aplicando el balance de la entropía, puede expresarse la desigualdad de Clausius - Duhem referida a los medios porosos continuos de la siguiente forma (Coussy, 2010):

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_f + \Phi_{th} \ge 0 \tag{A.1}$$

en donde Φ es la disipación total de la energía; Φ_s es la disipación de la estructura porosa; Φ_f es la disipación por el gradiente del fluido; Φ_{th} es la disipación térmica.

Bajo la hipótesis de considerar nulo el gradiente térmico y el de filtración, la disipación total se puede escribir como:

$$\Phi = \Phi_s = \Pi_{ij} \dot{\Delta}_{ij} + p \dot{\phi} - S_s \dot{T} - \dot{\Psi}_s \tag{A.2}$$

donde Π_{ij} representa el tensor de tensiones de Piola-Kirchoff; Δ_{ij} el tensor de deformaciones de Green; p es la presión de poros; ϕ es la porosidad; S_s es la entropía de la estructura sólida, T es la temperatura y Ψ_s es la energía libre de Helmholtz.

La energía libre Ψ_s admite como argumentos naturales a Δ_{ij} , Φ , T, los cuales aparecen en forma explícita en la expresión de disipación Φ_s .

$$\Psi_s = \Psi_s \left(\Delta_{ij}, \phi, T, X_J \right) \tag{A.3}$$

Las variables Δ_{ij} , ϕ , T forman un subconjunto de variables de estado externas. El subconjunto X_J corresponden a las variables de estado internas. Como hipótesis simplificativa, se considera que la variación de X_J es nula, podemos escribir:

$$\frac{d\Psi_s}{dt} = \frac{\partial\Psi_s}{\partial\Delta_{ij}}\dot{\Delta_{ij}} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial T}\dot{T}$$
(A.4)

La desigualdad de Clausius - Duhem quedará:

$$\Phi_s = \Pi_{ij}\dot{\Delta}_{ij} + p\dot{\phi} - S_s\dot{T} - \dot{\Psi}_s - \left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial\Delta_{ij}}\frac{d\Delta_{ij}}{dt} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial\phi}\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right) \ge 0$$
(A.5)

$$\Phi_s = \left(\Pi_{ij} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \Delta_{ij}}\right) \dot{\Delta_{ij}} + \left(p - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi}\right) \dot{\phi} - \left(S_s + \frac{dT}{dt}\right) \partial \dot{\Psi}_s \ge 0 \tag{A.6}$$

Asumiendo variaciones independientes, se obtienen las ecuaciones de estado:

$$\Pi_{ij} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \Delta_{ij}} \qquad p = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \qquad S_s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial T} \tag{A.7}$$

Las ecuaciones de estado pueden escribirse también en función de la energía de **compac**tación G_s la cual se calcula como:

$$G_s = \Psi_s - p\Phi \tag{A.8}$$

y representa la energía libre efectiva de la matriz sólida.

La variación de G_s se calcula como:

$$\dot{G}_s = \dot{\Psi}_s + p\dot{\Phi} + \dot{p}\Phi \tag{A.9}$$

Reemplazando en la desigualdad de Clausius - Duhem, se obtienen las ecuaciones de estado:

$$\Pi_{ij} = \frac{\partial G_s}{\partial \Delta_{ij}} \qquad \phi = -\frac{\partial G_s}{\partial p} \qquad S_s = -\frac{\partial G_s}{\partial T} \tag{A.10}$$

Si consideramos la hipótesis de pequeñas deformaciones, el tensor de Piola-Kirchoff se convierte en el tensor de tensiones de Cauchy y el tensor de deformaciones de **Almansi** en el tensor de deformaciones de Cauchy:

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \phi\dot{p} - S_s\dot{T} - \dot{G}_s \ge 0 \tag{A.11}$$

Las ecuaciones de estado serán:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial G_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad \phi = -\frac{\partial G_s}{\partial p} \qquad S_s = -\frac{\partial G_s}{\partial T} \tag{A.12}$$

Desacoplado de la parte hidrostática de la desviadora Si consideramos σ , S_{ij} como las componentes hidrostáticas y desviadora del tensor de tensiones, y de igual forma, tomamos ϵ , e_{ij} como las componentes volumétricas y desviadora del tensor de deformaciones, tal que:

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \qquad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} \tag{A.13}$$

$$\epsilon = \varepsilon_{ii} \qquad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon \delta_{ij}$$
 (A.14)

reescribimos la desigualdad como:

$$\sigma \dot{\epsilon} + S_{ij} \dot{e}_{ij} - \phi \dot{p} - S_s \dot{T} - \dot{G}_s \ge 0 \tag{A.15}$$

obteniendo las siguientes ecuaciones de estado:

$$\sigma = \frac{\partial G_s}{\partial \epsilon} \qquad S_{ij} = \frac{\partial G_s}{\partial e_{ij}} \qquad \phi = -\frac{\partial G_s}{\partial p} \qquad S_s = -\frac{\partial G_s}{\partial T} \tag{A.16}$$

Propiedades tangentes de la termoporoelasticidad Para el caso elástico, la disipación de energia es igual a 0. Derivando las ecuaciones de estado, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{\sigma_{ij}} = \frac{\partial G_s(\varepsilon_{ij}, p, T)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon_{kl}} + \frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p} \dot{p} + \frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{T}$$
(A.17)

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial G_s(\varepsilon_{ij}, p, T)}{\partial p} = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon_{kl}} - \frac{\partial^2 G_s}{\partial p^2} \dot{p} - \frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial T} \dot{T}$$
(A.18)

$$\dot{S}_{s} = -\frac{\partial G_{s}(\varepsilon_{ij}, p, T)}{\partial T} = -\frac{\partial^{2} G_{s}}{\partial T \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon_{kl}} - \frac{\partial^{2} G_{s}}{\partial T \partial p} \dot{p} - \frac{\partial^{2} G_{s}}{\partial T \partial T} \dot{T}$$
(A.19)

Con las relaciones de simetría de Maxwell (Anexo), se pueden obtener las ecuaciones constitutivas para pequeñas deformaciones elásticas de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma_{ij}} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon_{kl}} - b_{ij}\dot{p} - C_{ijkl}\alpha_{kl}\dot{T}$$
(A.20)

$$\dot{\phi} = b_{ij}\dot{\varepsilon_{ij}} + \frac{\dot{p}}{N} - 3\alpha_{\phi}\dot{T} \tag{A.21}$$

$$\dot{S}_s = C_{ijkl} \alpha_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha_\phi \dot{p} + C \frac{\dot{T}}{T}$$
(A.22)

, donde C_{ijkl} , b_{ij} , $C_{ijkl}\alpha_{kl}$, 1/N, $3\alpha_{\phi}$, C, se denominan propiedades tangentes termoporoelasticas y son funciones de las variables de estado ε_{ij} , $p \ge T$, representando cada propiedad lo siguiente:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

es la componente ijkl del tensor de rigidez tangente del esqueleto de módulos elásticos.

$$C = -T \frac{\partial^2 G_s}{\partial T^2}$$

es la capacidad calórica volumétrica tangente del esqueleto cuando la deformación ε_{ij} y la presión se mantienen constante ($\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{p} = 0$).

$$b_{ij} = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p}$$

es la componente ij del tensor tangente de Biot. Relaciona linealmente el cambio de porosidad con la varación de la deformación cuando $\dot{p} = \dot{T} = 0$. Debido a la simetría de Maxwell, también relaciona linealmente el incremento de la tensión con el incremento de la presión cuando $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{T} = 0$.

$$\frac{1}{N} = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial p^2}$$

es la inversa del módulo tangente de Biot que vincula la variación de la presión con la variación de la porosidad en un proceso en el cual $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{T} = 0$.

$$3\alpha_{\phi} = \frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial T}$$

es el coeficiente de dilatación térmica volumétrica relacionada con la porosidad. Con la simetría de Maxwell, también representa la presión del calor latente tangente del esqueleto, que es el calor por unidad de presión que el esqueleto puede intercambiar con el exterior en un proceso en el cual $\varepsilon_{ij} = \dot{T} = 0$.

 α_{kl} es la componente kl del tensor de coeficientes de dilatación térmica tangente del esqueleto.

Termoporoelasticidad lineal isotrópica La termoporoelasticidad lineal consiste en que las propiedades tangentes sean constantes en las ecuaciones constitutivas. Debido a la hipótesis de isotropía, las funciones de energía pueden expresarse solamente de los invariantes escalares de los tensores involucrados. La termoporoelasticidad lineal consiste en elegir expresiones cuadráticas con respecto a los invariantes de la función de energía. La energía será:

$$G_{s} = \sigma_{0}\epsilon + S_{ij}^{0}e_{ij} - \phi_{0}p - S_{s}^{0}T + \frac{1}{2}K\epsilon^{2} - b(p - p_{0})\epsilon - 3\alpha K(T - T_{0})\epsilon + + 3\alpha_{\phi}(p - p_{0})(T - T_{0}) - \frac{(p - p_{0})^{2}}{N} - \frac{1}{2}\frac{C}{T_{0}}(T - T_{0})^{2} + \mu e_{ij}e_{ji}$$
(A.23)

Las ecuaciones isotrópicas lineal de estado quedarán:

$$\sigma - \sigma_0 = K\epsilon - b(p - p_0) - 3\alpha K(T - T_0)$$

$$S_{ij} - S_{ij}^0 = 2\mu e_{ij}$$

$$\phi - \phi_0 = b\epsilon + \frac{p - p_0}{N} - 3\alpha_{\phi}(T - T_0)$$

$$S_s - S_s^0 = 3\alpha K\epsilon - 3\alpha_{\phi}(p - p_0) + \frac{C}{T_0}(T - T_0)$$
(A.24)

donde K es el módulo de deformación volumétrica del esqueleto y μ es el módulo de corte, cuando 3α es el coeficiente de dilatación volumétrica térmica del esqueleto.

Las dos primeras ecuaciones del set planteado previamente, pueden condensarse en:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\epsilon\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - b(p - p_0)\delta_{ij} - 3\alpha K(T - T_0)\delta_{ij}$$
(A.25)

en donde $\lambda = K - 2/3\mu$ y μ son las constantes de Lamé.

Flujo a través de la matriz Para la descripción del flujo a través del medio poroso, en general se adopta la ley de Darcy,

$$n_f \left(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s \right) = -k_f \nabla p \tag{A.26}$$

donde k_f es la permeabilidad del medio poroso, n_f es la fracción de volumen fluido respecto al volumen total, ∇p es el gradiente de presión.

Fuerzas cohesivas En el caso de que el dominio presente discontinuidades discretas, en la zona cercana al crack-tip se generan tensiones en las caras de la fisura, por lo que deben definirse leyes que simulen este efecto. La variación entre las tensiones cohesivas sobre la superficie Γ_{coh} depende del problema en estudio (Moës & Belytschko, 2002),



FIGURA A.1: Zona cohesiva: Fuerzas generadas en el crack-tip .

(de Borst *et al.*, 2009), (Kabiri & Vernerey, 2013), (Vahab *et al.*, 2018). Estas leyes, en general pueden escribirse como,

$$\boldsymbol{t}_c = \boldsymbol{K} \boldsymbol{U} \tag{A.27}$$

donde \boldsymbol{K} es la matriz de rigidez del material.