

**FORMULACION DE UN MODELO CONSTITUTIVO
PARA MATERIALES ORTOTROPOS**

por

BIBIANA MARIA LUCCIONI
Ingeniero Civil
Magister en Ingeniería Estructural

Tesis presentada como requerimiento parcial
para acceder al grado académico de
"DOCTOR EN INGENIERIA"
de la
Universidad Nacional de Tucumán

Laboratorio de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
San Miguel de Tucumán
Octubre de 1993

A Luis y mis hijas

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer especialmente:

Al Dr. Rodolfo Danesi por su invaluable apoyo y aliento tanto en el plano académico como personal.

Al Dr. Sergio Oller por su valiosa orientación. A pesar de la distancia, brindó todos los medios a su disposición y durante su permanencia en Tucumán participó activamente en la realización de esta Tesis. Además de su capacidad, su paciencia, dedicación y generosidad hicieron posible esta empresa.

Al Ing. Juan C. Reimundín quien desde mis comienzos en la investigación siguió de cerca mis pasos y me orientó.

A todo los profesores del Magister y Doctorado en Ingeniería, en especial, al Ing. Arturo Bignoli que se interesó por mis progresos y me alentó continuamente durante mi carrera.

A todo el personal docente y compañeros de estudios del Laboratorio de Estructuras que compartieron estos años de trabajo, en especial a Daniel Ambrosini con quien continuamente discutimos dudas e inquietudes que surgieron en la realización de este trabajo y a Juan Carlos Ramallo con quien realizamos algunos ejemplos de aplicación.

Al personal de apoyo del Laboratorio de Estructuras, en particular a los Ingenieros Claudio Concha y César Córdoba que colaboraron en la presentación de esta Tesis.

RESUMEN

En esta Tesis se presenta un modelo constitutivo para simular el comportamiento de materiales estructurales bajo cargas cuasiestáticas. El modelo está desarrollado para materiales friccionales no homogéneos y ortótropos, con degradación de rigidez, que sufren deformaciones permanentes, con endurecimiento o ablandamiento y es aplicable a un amplio rango de materiales desde los más simples como el acero hasta los más complejos como el hormigón, morteros, roca, suelos, ladrillos y mampostería.

El modelo constitutivo está basado en la teoría de plasticidad y en la teoría de daño isótropo de Kachanov, en pequeñas deformaciones y permite simular el comportamiento de materiales estructurales simples o compuestos mediante la utilización de la teoría de mezclas. El tratamiento propuesto para materiales anisótropos surge de una generalización de las teorías clásicas de plasticidad y daño isótropo al caso de materiales anisótropos y ortótropos. Este enfoque supone que existe un espacio real anisótropo y otro espacio ficticio isótropo donde se resuelve el problema ficticio mapeado.

El modelo que se presenta contempla gran parte de los aspectos más importantes que caracterizan el comportamiento inelástico de los geomateriales, tales como la respuesta diferenciada para cada proceso de tensión-deformación multiaxial, la combinación de fenómenos de fisuración con aplastamiento a través de un tratamiento unificado, el control de la dilatancia mediante una superficie de potencial plástico adecuada y el acoplamiento entre los fenómenos de degradación de rigidez y deformaciones permanentes.

ABSTRACT

A constitutive model for structural materials under quasistatic loads is presented. The model is developed for non homogeneous, orthotropic, frictional materials, that suffer stiffness degradation and permanent deformations with strain hardening or strain softening and it is suitable for a great range of materials from the most simple ones, like steel, to the more complex ones, like concrete, mortar, rock, soils, bricks and masonry.

The constitutive model is based on the theory of plasticity and on the theory of isotropic damage of Kachanov and can simulate the behaviour of simple or composite anisotropic structural materials. The model proposed for anisotropic materials is a generalization of plasticity and damage theories to the case of anisotropic and orthotropic materials. This approach assumes the existence of a real anisotropic space and other fictitious isotropic space where a mapped fictitious problem is solved. A generalized mixing theory is applied to the numerical simulation of multiphase composite materials.

The model presented takes into account a great part of the most important features that characterize the inelastic behaviour of geomaterials like differenced responses to each multiaxial stress-strain process, the combination of cracking and crushing through a unified approach, the dilatancy control through an adequate potencial surface and the coupling of damage and plastic deformations.

NOTACION

α :	Conjunto de variables internas plásticas o constantes adimensional que determina la forma de la superficie de fluencia o parámetro de la regla del trapecio generalizada
α^m :	Variable interna plástica genérica
$\bar{\alpha}^m$:	Variable interna plástica genérica en el espacio isótropo ficticio
α_{ij} :	Contantes intervinientes en la ec.(3.9) que se determinan en base a las resistencias a tracción en las direcciones correspondientes.
α_R :	Parámetro de ajuste de la tensión principal
χ :	Factor de proporcionalidad entre cohesión y tensión
β :	Grupo de variables internas no plásticas o constante adimensional que determina la forma de la superficie de fluencia
β :	Escalar positivo característico de un cada material
β_{ij} :	Tensor que define la dirección del movimiento
$\beta_{kl}^{(i)}$:	Variables de daño
β_s :	Tensión de fluencia de la armadura no tesa
β_p :	Tensión de fluencia de la armadura tesa
δ :	Factor de estabilización incluido para suprimir modos de presión espúreos.
δ_{ij} :	Delta de Kronecker
δ_s :	Vector de desplazamientos generalizados , medido en coordenadas locales de la lámina y sobre la superficie de referencia
δu_i :	Desplazamientos virtuales
δW_{ext} :	Trabajo realizado por las fuerzas externas sobre estos desplazamientos virtuales
$\delta \epsilon_{ij}$:	Deformaciones virtuales asociadas con el desplazamiento virtual infinitesimal
$\delta^i \Pi$:	I-ésima variación de la energía potencial.

$\delta\omega_{ij}$:	Rotaciones virtuales asociadas con el desplazamiento virtual infinitesimal
$[\delta]$:	Matriz definida en ec.(4.8)
$[\delta^*]$:	Matriz definida en ec.(4.8)
Δl :	Longitud del incremento de carga en el espacio N+1 dimensional.
$\epsilon^{(0)}$:	Autovalores del tensor de deformaciones ϵ_{ij}
ϵ^e :	Deformación elástica en un ensayo uniaxial
ϵ_{ij} :	Tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy
ϵ_{ij}^e :	Tensor de deformaciones elásticas
$\bar{\epsilon}_{ij}^e$:	Tensor de deformaciones elásticas ficticio
ϵ_{oij}^e :	Tensor de deformaciones elásticas en el espacio isótropo ficticio no dañado.
ϵ_{ij}^f :	Deformación debida a las microfisuras
ϵ^i :	Deformación en la dirección principal i
ϵ_{ij}^i :	Tensor de deformaciones inelásticas
ϵ_{ij}^o :	Deformación que ocurriría en ausencia de microfisuras
ϵ^p :	Deformación plástica en un ensayo uniaxial
ϵ_l^p :	Deformación plástica principal mayor
ϵ_T^p :	Deformación plástica uniaxial de tracción
ϵ_C^p :	Deformaciones plásticas uniaxiales de tracción y compresión respectivamente.
ϵ_{ij}^p :	Tensor de deformaciones plásticas
$\bar{\epsilon}_{kl}^p$:	Tensor de deformaciones plásticas ficticias definido en el espacio isótropo ficticio.
ϵ_{iu} :	Deformación uniaxial equivalente
ϵ_j :	Deformación principal en la dirección j
ϵ_{oct} :	Deformación octaédrica de cambio de volumen
ϵ_V :	Deformación volumétrica
$\left(\epsilon_{ij} \right)_c$:	Deformación correspondiente a la "c-ésima" componente
ϕ :	Angulo de fricción interna entre las partículas del sólido
ϕ_{cv} :	Angulo de rozamiento interno a volumen constante
Φ :	Función de daño
Φ_{mmrs} :	Tensor de cuarto orden ligado a la fricción interna del material.
γ :	Constante adimensional que determina la forma de la superficie de

	fluencia
γ_{oct} :	Deformación octaédrica de cambio de forma
η :	Entropía específica o entropía por unidad de masa
η_{ij} :	variable interna de endurecimiento plástico cinemático
ψ :	Dilatancia
Ψ :	Energía potencial libre
Ψ_c :	Energía libre de la componente c
Ψ^e :	Energía libre correspondiente al proceso elástico
Ψ^o :	Energía potencial libre del material no dañado
Ψ^p :	Energía libre correspondiente al proceso plástico
κ :	Variable de endurecimiento plástico isotrópico
κ^d :	Límite de daño
κ^d :	Variable de daño por degradación
κ_{pic}^d :	Valor de la variable de daño por degradación de rigidez correspondiente al pico de tensiones en un ensayo de compresión uniaxial
κ^p :	Variable de daño plástico
κ_{pic}^p :	Valor de la variable de daño plástico correspondiente al pico de tensiones en un ensayo de compresión uniaxial
K :	Función de endurecimiento plástico
K_o :	Función de endurecimiento
λ :	Constante de Lamé
$\dot{\lambda}$:	Parámetro de consistencia plástica
μ :	Constante de Lamé
$\dot{\mu}$:	Factor de consistencia de daño
$\dot{\mu}_d$:	Factor de consistencia de degradación
μ_m :	Factor de carga correspondiente a la etapa m de carga
ν :	Módulo de Poisson
ν_j :	Variabes termodinámicas de subestado
$\nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}, \nu_{xz}$ y ν_{zx} :	Módulos de Poisson
π :	Plano desviador que pasa por el origen
Π :	Energía potencial en la configuración inicial
θ :	Medida de la temperatura o ángulo de similaridad de Lode u

	orientación de los ejes locales de anisotropía
ρ :	Distancia al eje hidrostático
ρ_d :	Porosidad
ρ_i :	Fuerzas de superficie
$\vec{\rho}_1$:	Vector de tensión
σ_c :	Tensión crítica para la extensión del daño
σ_{Cb} :	Resistencia a compresión equibiaxial para el límite de discontinuidad inicial.
σ_{co} :	Tensión media de rotura a compresión del hormigón, calculada sobre 15 ensayos de probetas cilíndricas
σ_{II} :	Tensión normal
σ_{Ii} :	Tensión normal
σ_C^p :	Resistencia a la compresión
σ_T^p :	Resistencia a la tracción del material
σ_T^{max} :	Máxima resistencia a tracción uniaxial
σ_i :	Tensión principal en las dirección i
σ_{ij} :	Tensor de tensiones de Cauchy
σ_{ij}^e :	Tensor de tensiones predictor
σ_{ij}^f :	Tensor de tensiones de fractura
σ_{ij}^o :	Tensor de tensiones efectivas
σ_{ij}^p :	Tensor de tensiones plásticas
$\sigma_{o_{ij}}$:	Tensión equivalente en el espacio no dañado
σ_{oct} :	Tensión normal octaédrica
$\bar{\sigma}$:	Tensión equivalente
$\bar{\sigma}_i$:	Tensión principal en el espacio isótropo ficticio
$\bar{\sigma}_{ij}$:	Tensor de tensiones en el espacio ficticio isótropo
$\left(\bar{\sigma}_{ij}\right)_c$:	Tensor de tensiones correspondiente a la "c-ésima" componente
τ :	Tiempo
τ_i :	Tensiones termodinámicas
τ_i^{max} :	Máxima tensión de corte puro
τ_{oct} :	Tensión de corte octaédrica
τ_{oct}^{max} :	Máxima tensión de corte octaédrica
ω_{ij} :	Tensor de rotación
Ω :	Complemento de la función energía de deformación

Ω_{km}	Tensor de spin
ξ	Tiempo intrínseco o posición del plano octaédrico
$\bar{\xi}_a$	Ubicación de los puntos de integración en el método de B-bar
Ξ	Disipación local por unidad de masa o producción interna de entropía por unidad de masa
Ξ	Disipación mecánica
Ξ^d	Disipación mecánica debida a la degradación de rigidez
Ξ^p	Disipación mecánica debida al proceso plástico
Ξ^{β}	Disipación mecánica no plástica
ϑ	Angulo que hace la banda con el eje de referencia global
ϑ_{ϵ}	Angulo que hay entre la deformación específica principal mayor y lado positivo del eje material x_1
ϑ_i	Rotaciones medidas en la superficie de referencia
ϑ_i^{\downarrow}	Términos de alto orden de las rotaciones obtenidos también sobre la superficie de referencia mediante un desarrollo en serie de Taylor
ζ	Medida del tiempo
a	Constante que depende del material
a_d	Tamaño del grano
a_{ij}	Transformación ortogonal
a_{ijkl}	Tensor que contiene constantes del material
A	Parámetro de endurecimiento plástico
A_{ijkl}	Tensor de cuarto orden, denominado tensor de transformación de espacios o de mapeo de tensiones, que contiene toda la información sobre la anisotropía del material y define una transformación entre dos espacios
A^e	Area del elemento finito donde se localiza la zona dañada
A^e_{ijkl}	Tensor material de cuarto orden denominado tensor de transformación de espacios de deformación o de mapeo de deformaciones.
A^p	Area de fractura o discontinuidad
A^s_{ijkl}	Tensor material de cuarto orden que se denomina tensor de transformación de espacios de tensión
A	Símbolo que indica ensamblaje
b	Constante que depende del material o parámetro de escala de la

	carga
b_i :	Fuerzas de volumen
B_{km}^{-1} :	Tensor de deformaciones de Cauchy
B^e :	Matriz que relaciona deformaciones con desplazamientos nodales del elemento
B_a^{dil} :	Parte volumétrica de la matriz B_a
\bar{B}_a^{dil} :	Parte volumétrica de la matriz \bar{B}_a
B_a^{dev} :	Parte desviadora de la matriz B_a
c :	Cohesión o constante que depende del material
c_C :	Evolución de la cohesión durante un ensayo experimental uniaxial de compresión simple
c_{mn} :	Término debido a la cohesión
c_d :	Tamaño de la microfisura
c_T :	Evolución de la cohesión durante un ensayo experimental uniaxial de tracción simple
C_{km} :	Tensor de deformaciones de Green
C_{ijkl}^e :	Tensor simétrico de rango 4
C_{rskl}^0 :	Tensor de rigidez inicial del material virgen
C_{ijkl}^s :	Tensor de rigidez secante afectado por la evolución de las variables internas no plásticas
C_{ijkl}^p :	Tensor de rigidez plástica.
C_{ijkl}^t :	Tensor de rigidez Tangente
C_{ijkl}^{ep} :	Tensor de rigidez elastoplástico tangente
\bar{C}_{ijkl}^{o*} :	Tensor de rigidez elástica secante en el espacio isótropo ficticio no dañado.
\bar{C}_{ijrs}^s :	Tensor constitutivo elástico secante para el sólido isótropo ficticio
\bar{C}_{ijrs}^{s*} :	Tensor constitutivo elástico secante para el sólido isótropo ficticio (modelo condensado)
$\bar{C}_{ijkl}^{t, ep}$:	Tensor elastoplástico tangente en el espacio ficticio isótropo
\hat{C}_{ijkl} :	Tensor de rigidez tangente consistente
C^t :	Matriz de rigidez tangente
C_{ep}^t :	Forma matricial del tensor elastoplástico tangente.

d :	Variable de daño o constante que depende del material
$d_i^{(\alpha)}$:	Autovectores de ϵ_{ij}
dl_f^{eq} :	Desplazamiento irrecuperable como :
dl_f^0 :	Dimensión inicial del punto en la dirección ϑ_e
D_{km} :	Tensor velocidad de deformación
D_{ijkl}^{act} :	Tensor de daño activo anisótropo de cuarto orden
e_{ij} :	Tensor desviador de deformación
$e_{i_{local}}$:	Vector unitario correspondiente a la i -ésima componente del sistema de referencia local.
E :	Módulo de elasticidad longitudinal
E_b :	Módulo elástico secante del hormigón correspondiente al 40% de la tensión media de rotura.
E^0 :	Módulo de elasticidad inicial no dañado
E_{p1} :	Módulo elástico inicial de la armadura tesa
E_{p2} :	Módulo elástico final de la armadura tesa
E_{s1} :	Módulo elástico inicial de la armadura no tesa
E_{s2} :	Módulo elástico final de la armadura no tesa
E_x, E_y, E_z :	Módulos de elasticidad en la tres direcciones principales de ortotropía
E_1, E_2, E_3 :	Módulos de Young tangentes en las direcciones 1, 2 y 3 respectivamente
f_c :	Umbral de degradación en compresión uniaxial
f_i :	Fuerza por unidad de volumen
$f_{ijrs}(\beta)$:	Función tensorial de transformación de un espacio real a uno no degradado equivalente
f_{ij} :	Tensor de resistencia a fluencia correspondiente al sólido real
f_{ji}^d :	Tensor de tensiones umbrales de daño correspondientes al sólido real
\bar{f}_{ik} :	Tensor de resistencia a fluencia correspondiente al sólido ficticio
\bar{f}_{ik}^d :	Tensor de tensiones umbrales de daño correspondiente al sólido ficticio
f_{mm} :	Término dependiente de la tensión normal
f_{s_i} :	Fuerzas de superficie

f :	Umbral de degradación en tracción uniaxial
f_{V_i} :	Fuerzas de volumen
F :	Parámetro característico del material y de su anisotropía
F_{ijkl} :	Tensor de flexibilidad
F_{ijkl}^e :	Tensor de flexibilidad adicional debida a la microfisuras activas
F_{ijkl}^o :	Tensor de flexibilidad no fisurada
F_{km} :	Gradiente de deformacion
$f(\sigma)$:	Función de fluencia
\bar{F} :	Función de fluencia del material anisótropo real
\bar{F} :	Función isótropa de las componentes del tensor de tensiones en el espacio ficticio isótropo
\mathcal{F} :	Entropía total
$\dot{\mathcal{F}}_{in}$:	Entropía introducida
\mathbb{F} :	Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de volumen y fuerzas de superficie externas
\mathbb{F}^e :	Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de volumen y fuerzas de superficie externas del elemento
g :	Entalpía libre o función de Gibbs
g_c :	Energía específica disipada en el proceso de compresión uniaxial
g_c^d :	Energía específica disipada por daño en procesos de compresión uniaxial
g_C^{p*} :	Energía específica a tracción ponderada de acuerdo al estado tensional
g_f :	Valor de la energía específica de fractura
g_f^d :	Energía específicas disipada por daño en procesos de tracción uniaxial
g^p :	Energía específica inelástica
g^{po} :	Energía específica inelástica
g^{pl} :	Energía específica consumida durante el proceso de localización
g_T^{p*} :	Energía específica a compresión ponderada de acuerdo al estado tensional
G :	Módulo elástico transversal

G_c :	Densidad de energía por unidad de área disipada en el proceso de compresión uniaxial
G^c :	Energía de aplastamiento para un proceso de compresión simple
G^f :	Energía de fractura por unidad de área
G_0 :	Valor inicial del módulo desviador
G^{pl} :	Energía por unidad de área dañada
G_s :	Módulo Secante Desviador
G_{12}, G_{23}, G_{31} :	Módulos de corte en planos paralelos a los planos coordenados 1-2, 2-3 y 3-1, respectivamente
G :	Función de potencial plástico
\bar{G} :	Función de potencial en el espacio isótropo ficticio
\hat{G} :	Función de daño
$\bar{\hat{G}}$:	Función de daño en el espacio isótropo ficticio
h :	Entalpía o contenido de calor
h_i :	Función vectorial de endurecimiento
h_{ij}^m, \bar{h}_{ij}^m :	Funciones tensoriales a ser determinadas según las aplicaciones del modelo plástico isótropo.
$h_{K_{ij}}$:	tensor de segundo orden
H :	Parámetros característicos del material y de su anisotropía
H_c :	Función de estado escalar
H_i :	Módulo plástico.
$H_{\epsilon_{ij}^p}$:	Función de estado tensorial que depende de la función de potencial plástico
H_K :	Función de estado escalar que depende del tensor $h_{K_{ij}}(\sigma_{mn}, k^p, c)$ y del flujo.
$H^{(i)}$:	Función de potencial correspondiente a la variable de daño i
I^d :	Número ideal de iteraciones
I_{m-1} :	Número de iteraciones del incremento $m-1$
I_1 :	Primer invariante del tensor de tensiones
I_2 :	Segundo invariante del tensor de tensiones
I_3 :	Tercer invariante del tensor de tensiones
I_1 :	Primer invariante del tensor de deformaciones
I_2 :	Segundo invariante del tensor de deformaciones

I_3	Tercer invariante del tensor de deformaciones
J_1	Primer invariante del tensor desviador de tensiones
J_2	Segundo invariante del tensor desviador de tensiones
J_3	Tercer invariante del tensor desviador de tensiones
J_1	Primer invariante del tensor desviador de deformaciones
J_2	Segundo invariante del tensor desviador de deformaciones
J_3	Tercer invariante del tensor desviador de deformaciones
J^0	Matriz jacobiana del sistema.
k_c	Participación de la fracción de volumen del "c-ésimo" componente dentro del volumen total.
K	Módulo de dilatación volumétrica
\dot{K}	Potencia cinética
K_o	Valor inicial del módulo volumétrico
K_s	Módulo secante volumétrico
K_1, K_2	Constantes del material
K_I, K_{II}, K_{III}	Factores de intensidad de tensiones
K_{IC}	Tenacidad del material a la fractura
\mathbf{K}^I	Matriz de rigidez tangente
$\left(K_{ijkl}^\sigma \right)_c$	Tensores que tienen en cuenta la relación del volumen total ocupada por la componente c y su disposición geométrica en el compuesto
$\left(K_{ijkl}^\epsilon \right)_c$	Tensores que tienen en cuenta la relación de volumen y la disposición geométrica.
$\left(K_{ijkl}^\sigma \right)_{c,q}$	Tensor que relaciona el tensor de tensiones de la componente c con el de la componente q
$\left(K_{ijkl}^\epsilon \right)_{c,q}$	Tensor que relaciona el tensor de deformaciones de la componente c con el de la componente q
l_c	Longitud característica del dominio fracturado
l_f^{eq}	Magnitud del daño equivalente al de una fisura real para un punto del espacio discreto
L	Parámetro característico del material y de su anisotropía
L_{km}	Gradiente espacial de velocidad
L^P	Longitud característica que debe ser una medida del ancho de la

	zona dañada o banda de localización.
L^{pc} :	Longitud característica de un elemento finito
L^c :	Operador diferencial
m :	Densidad del material en la configuración material
M :	Masa del sólido o parámetro característico del material y de su anisotropía
M_{ijkl} :	Tensor de cuarto orden que caracteriza el estado de daño en un punto del sólido
n :	Factor de forma
n_k :	Vector normal al plano
\tilde{n}_{int} :	Número de puntos
N :	Parámetro característico del material y de su anisotropía
N_a :	Función de forma asociada con el nodo a
N^c :	Vector fila formado funciones de forma que interpolan los desplazamientos de ciertos puntos nodales del elemento
\vec{OP} :	Vector que representa el estado de tensión de un punto
\vec{OQ} :	Vector que representa la parte hidrostática del estado de tensión
p :	Parámetro del material
p_k^i :	Vector unitario en la dirección de la deformación principal i
$p_k^{(i)}$:	Factor de peso del flujo plástico correspondiente al potencial $G^{(i)}$
$\left(p_r \right)_c$:	Conjunto de variables internas de la componente c
\vec{P} :	Vector de fuerza actuante
P_d :	Potencia deformativa
P_{int} :	Potencia mecánica introducida al sistema
P_{ij}^n :	Tensor proyección espectral regular
P_{ij}^+ :	Tensor proyección espectral positiva
P_{ijkl}^+ :	Tensor proyección positiva de cuarto orden
$(P^+ \epsilon)_{ij}$:	Proyección positiva de ϵ_{ij}
q :	Parámetro del material
q_i :	Flujo de calor
\vec{QP} :	Vector que representa la parte desviadora del estado de tensión
Q_{prop} :	Cantidad de calor propio existente en el sólido

-
- r : Fuente distribuida de calor por unidad de masa denominada radiación o relación de resistencias o relación entre la deformación transversal y la normal al plano.
- r_{ij} : Cosenos directores
- r_o : Umbral de daño inicial
- r_t : Umbral de Degradación
- r_{Δ} : Factor de reducción de desplazamientos
- R : Tensión de fluencia en corte respecto a un plano de anisotropía.
- R_{ijkl} : Tensor de rotación
- R^o : Relación inicial que hay entre la resistencia uniaxial a compresión y tracción.
- $R_I(\sigma), R_{II}(\sigma)$: Funciones de respuesta del material que indican la dirección en la que tiene lugar el daño
- \bar{R}_{kl} : Tensor que representa el flujo en el espacio isótropo ficticio
- R_{ij}^* : Tensor que representa el flujo en el espacio anisótropo real
- \bar{R}_{ij}^* : Tensor definido en ec.(3.70)
- R : Vector de fuerzas residuales
- R^e : Vector de fuerzas residuales del elemento
- S : Superficie o tensión de fluencia en corte respecto a un plano de anisotropía.
- S_d : Espaciamiento entre inclusiones, fibras o agregados
- t : Tiempo
- t_i : Fuerzas de superficie
- T : Tensión de fluencia en corte respecto a un plano de anisotropía
- $\left(T_{ijrs}^{\sigma} \right)_q$: Tensor que relaciona el tensor de tensiones de la componente q en la teoría de mezclas modificada con el correspondiente a la teoría de mezclas clásica
- $\left(T_{ijrs}^{\epsilon} \right)_q$: Tensor que relaciona el tensor de deformaciones de la componente q en la teoría de mezclas modificada con el correspondiente a la teoría de mezclas clásica
- u_i : Campo de desplazamientos o desplazamientos medidos en la superficie de referencia

u_i^* :	Términos de alto orden de los desplazamientos obtenidos también sobre la superficie de referencia mediante un desarrollo en serie de Taylor
u^e :	Vector de desplazamientos de cualquier punto de elemento
U^e :	Vector de desplazamientos de ciertos puntos nodales del elemento
v_i :	Campo de velocidades
V :	Volumen
V^e :	Volumen del elemento finito
V^P :	Volumen de la zona dañada
w :	Energía interna
w_t^{\max} :	Disipación por daño a lo largo del proceso de tracción uniaxial
W :	Función energía de deformación
W^{Pl} :	Energía disipada en todo el sólido, desde el momento en que se inicia la localización hasta el final del proceso de carga.
x_1, x_2, x_3 :	Coordenadas espaciales que dan la posición en el tiempo t .
x :	Posición ocupada por la partícula X en el tiempo t
X :	Partícula o tensión de fluencia en las dirección principal x
X_1, X_2, X_3 :	Coordenadas materiales de la partícula o coordenadas de su posición en la configuración de referencia
Y :	Tensión de fluencia en las dirección principal y
Z :	Tensión de fluencia en las dirección principal z

INDICE

• AGRADecIMIENTOS	<i>i</i>
• RESUMEN	<i>iii</i>
• ABSTRACT	<i>v</i>
• NOTACION	<i>vii</i>
• INDICE	<i>xxi</i>
• LISTA DE FIGURAS	<i>xxxiii</i>
• LISTA DE TABLAS	<i>xli</i>
1. CAPITULO 1: INTRODUCCION	
1.1. INTRODUCCION	1
1.2. CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES ESTRUCTURALES MAS FRECUENTES	2
1.3. MODELOS CONSTITUTIVOS	3
1.3.1. Definición de modelos constitutivos	3
1.3.2. Clasificación de los modelos constitutivos	4
1.4. OBJETIVOS DE LA TESIS	6
1.5. CONTENIDO DE LA TESIS	6

2. CAPITULO 2: MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIALES SIMPLES E ISOTROPOS. PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS CARGAS CUASIESTATICAS DE CORTA DURACION PROBLEMAS TERMICAMENTE ESTABLES GEOMATERIALES, ACERO.	
2.1. INTRODUCCION	9
2.1.1. Características fundamentales del comportamiento de los geomateriales	10
2.1.2. Características fundamentales del comportamiento del acero	13
2.2. BREVE ESTADO DEL ARTE	14
2.2.1. Modelos constitutivos para geomateriales	14
2.2.1.1. Modelos elásticos	14
Modelos elásticos lineales	14
Modelos elásticos no lineales	15
a) Modelos de Cauchy	15
b) Modelos hiperelásticos o de Green	16
c) Modelos hipoelásticos	17
2.2.1.2. Modelos Basados en la Teoría de Plasticidad	20
Modelos elasto-perfectamente plásticos	21
Modelos elasto-plásticos con endurecimiento o ablandamiento	21
2.2.1.3. Modelos basados en la teoría endocrónica de la plasticidad	23
2.2.1.4. Modelos de fractura	25
Modelos de fisuras distribuidas	25
Modelos de fisuras discretas	28
Modelos de mecánica de fractura	29
2.2.1.5. Modelos de daño	29
Modelos de fractura progresiva	31
Modelo de Ortiz	33
Modelo de Ju	37
2.2.2. Modelos constitutivos para aceros	42
2.3. MODELO CONSTITUTIVO PROPUESTO PARA MATERIALES SIMPLES ISOTROPOS	
2.3.1. Introducción	43
2.3.2. Modelo de daño plástico modificado -	
Modelo propuesto	44
2.3.2.1. Introducción	44
2.3.2.2. Descripción general del modelo	44
2.3.2.3. Variables fundamentales del modelo de daño plástico modificado	47
Variable de daño plástico	47
Definición de la variable de daño plástico para estados uniaxiales de tensión	47
Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión multiaxial	49
Cohesión	51

Angulo de rozamiento interno	52
Dilatancia interna	53
2.3.2.4. Criterio de fluencia plástico	55
Criterio de fluencia de	
Mohr-Coulomb modificado	55
Criterio de fluencia Lubliner-Oller	57
2.3.2.5. Criterio de potencial plástico	60
2.3.2.6. Ejemplos de aplicación	61
Ensayos de Kupfer	61
Descripción general de los ensayos	61
Análisis de los resultados	63
Viga de hormigon pretensado	68
Descripción general del ensayo	68
Análisis numérico	71
Análisis de los resultados	74
Consideración de la armadura transversal	80
Vigas de hormigon armado	81
Descripción general de los ensayos	81
Análisis numérico	83
Análisis de los resultados	84
2.3.3. Modelo de daño	91
2.3.3.1. Características fundamentales del modelo	91
Energía libre	91
Energía disipada	93
2.3.3.2. Formas de considerar el daño	94
Forma explícita	94
Tensión equivalente	95
Criterio de daño	96
Condiciones de carga - descarga	98
Regla de evolución del daño	99
Energía disipada por daño	99
Ley constitutiva secante total	101
Ley constitutiva tangente	101
Modelo de daño propuesto - forma implícita	102
Criterio de daño	102
Variable de daño por degradación	103
Evolución del umbral de daño	104
Evolución del daño	104
Ley constitutiva secante total	107
Ley constitutiva tangente	108
2.3.3.3. Ejemplos de aplicación	110
Comparación del modelo elasto-plástico	
con el modelo de daño explícito	110
Comparación del modelo elasto-plástico	
con el modelo de daño implícito	
2.3.4. Plasticidad y daño	111
2.3.4.1. Introducción	112
2.3.4.2. Forma desacoplada	113
2.3.4.3. Forma acoplada	116
Evolución del daño y	
de las deformaciones plásticas	116
Ley constitutiva secante total	119
Ley constitutiva tangente	120

2.3.4.4. Ejemplos de aplicación	121
Comparación entre los modelos desacoplado y acoplado	121
Ensayo de compresión biaxial	122
Ensayo de compresión cíclica	124
2.4. CONSIDERACIONES FINALES	126
ANEXO 2.1: OBJETIVIDAD DE LA RESPUESTA	
A2.1.1. Introducción	127
A2.1.2. Problema de objetividad de la respuesta	129
ANEXO 2.2: DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO	
A2.2.1. Introducción	135
A2.2.2. Dirección del daño plástico	136
A2.2.3. Magnitud del daño plástico	137
3. CAPITULO 3: MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIALES SIMPLES ANISOTROPOS. PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS CARGAS CUASI ESTATICAS DE CORTA DURACION PROBLEMAS TERMICAMENTE ESTABLES	
3.1. INTRODUCCION	139
3.1.1. Descripción del problema de anisotropía	139
3.1.2. Descripción del comportamiento de algunos materiales anisótropos	141
3.2.2.1. Mampostería de ladrillos	141
3.2.2.2. Otros materiales	146
3.2. BREVE ESTADO DEL ARTE SOBRE MODELOS QUE ENTIENDEN EL PROBLEMA DE ANISOTROPIA INELASTICA	149
3.2.1. Modelos constitutivos para materiales anisótropos en general	149
3.2.1.1. Definición de superficies de fluencia y carga anisótropas.	149
3.2.1.2. Propiedades del material variables según la orientación del mismo	154
3.2.1.3. Tratamiento de la anisotropía mediante la transformación de espacios	155
3.2.2. Modelos constitutivos para mampostería	157
3.3. MODELO PROPUESTO PARA TRATAR LA ANISOTROPIA INELASTICA MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE ESPACIOS	163
3.3.1. Introducción	163
3.3.2. Formas originales	164
3.3.2.1. Materiales proporcionales	164
Tensor de transformacion de espacios	164
Relación constitutiva secante	166

Regla de flujo.	167
Evolución de las variables internas	168
Unicidad de la disipación. Energía libre	169
Ecuación constitutiva tangente	170
Datos del modelo	171
3.3.2.2. Materiales no proporcionales	171
Transformaciones de espacios	173
Relación constitutiva secante	174
Regla de flujo.	174
Evolución de las variables internas	175
Unicidad de la disipación.	176
Energía libre en el espacio ficticio isótropo	176
Ecuación constitutiva tangente	177
Datos del modelo	178
3.3.3. Forma condensada del modelo no proporcional propuesto en esta tesis	178
3.3.3.1. Introducción	178
3.3.3.2. Transformación de espacios	180
3.3.3.3. Ecuación constitutiva secante	181
3.3.3.4. Regla de flujo.	181
Evolución de las variables internas	182
3.3.3.5. Unicidad de la disipación.	182
Energía libre en el espacio ficticio isótropo	183
3.3.3.6. Ecuación constitutiva tangente	186
3.3.3.7. Datos del modelo	186
3.3.3.8. Consideración del daño	189
3.4. EJEMPLOS DE COMPROBACION DEL MODELO PROPUESTO	189
3.4.1. Efecto de la orientación de fibras unidimensionales	191
3.4.2. Panel de mampostería	204
3.5. CONSIDERACIONES FINALES	205
ANEXO 3.1: FORMA DE LA SUPERFICIE DE FLUENCIA PARA MATERIALES ANISOTROPOS	
A3.1.1. Introducción	206
A3.3.2. Forma de la superficie de fluencia en el espacio anisótropo real	211
ANEXO 3.2: FLUJO PLASTICO EN MATERIALES ANISOTROPOS	
A3.2.1. Introducción	212
A3.2.2. Orientación del flujo plástico en un material ortótropo. Ejemplo ilustrativo	214
A3.2.3. Flujo en fibras	214

4. CAPITULO 4: MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIALES COMPUESTOS ANISOTROPOS. PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS CARGAS CUASIESTATICAS DE CORTA DURACION PROBLEMAS TERMICAMENTE ESTABLES	
4.1. INTRODUCCION	215
4.2. BREVE ESTADO DEL ARTE SOBRE MODELOS CONSTITUTIVOS PARA MATERIALES COMPUESTOS	218
4.2.1. Modelos elásticos anisótropos	218
4.2.2. Teorías de alto orden para compuestos y materiales laminados en láminas cilíndricas con elementos tipo C^0	219
4.2.3. Modelo de Jayatilaka para compuestos con fibras largas o cortas	221
4.2.4. Modelo constitutivo de daño para materiales compuestos con fibras distribuidas en forma paralela o aleatoria	222
4.2.5. Modelo constitutivo para compuestos de fibras largas por capas, con rigidez diferenciada a tracción y compresión	223
4.2.6. Modelo constitutivo de predicción de daño para estructuras de materiales compuestos	224
4.2.7. Modelos basado en la mecánica de fractura	225
4.2.8. Técnicas de homogeneización	225
4.2.8.1. Modelo de Pietruszczak	226
4.3. TEORIA PROPUESTA PARA COMBINAR LOS MODELOS CONSTITUTIVOS DE DAÑO Y PLASTICIDAD ANISOTROPA	
4.3.1. Introducción	229
4.3.2. Teoría de mezclas	230
4.3.3. Aplicación de la teoría de mezclas al modelo propuesto	231
4.3.3.1. Estado de tensión	231
4.3.3.2. Disipación mecánica	232
4.3.3.3. Rigidez tangente	232
4.3.3.4. Deformación	232
4.3.3.5. Relación constitutiva secante	232
4.3.3.6. Deformacion plastica del compuesto	233
4.3.4. Estado plano de tensiones en materiales compuestos	234
4.4. EJEMPLOS DE COMPROBACION	234
4.4.1. Compuesto formado por láminas con fibras unidireccionales	234
4.4.2. Compuesto reforzado con fibras	236
4.4.3. Hormigón armado como material compuesto	240
4.4.4. Mampostería	242
4.4.4.1. Limitaciones de la teoría de mezclas	243
4.4.4.2. Mampostería armada	244
4.5. CONSIDERACIONES FINALES	250

ANEXO 4.1: COMPORTAMIENTO ELASTICO DE LA MAMPOSTERIA	
TEORIA TOPOLOGICA DE MEZCLAS	
PROPUESTA DE UNA INTRODUCCION	
A4.1.1. Introducción	251
A4.1.2. Esquema de trabajo	251
A4.1.3. Equivalencia entre la teoría de mezclas modificada y la teoría de mezclas clásica	254
A4.1.4. Aplicación a un panel de mampostería	256
A4.1.5. Consideraciones finales	260
5. CAPITULO 5: CONCLUSIONES	
5.1. CONCLUSIONES	261
5.2. LINEAS DE INVESTIGACION FUTURAS	265
• REFERENCIAS	267
A. APENDICE A: DEFORMACIONES	
A.1. INTRODUCCION	287
A.2. CINEMATICA DEL CONTINUO DEFORMABLE	288
A.2.1. Definiciones básicas	288
A.2.2. Medidas de deformación	289
A.3. PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y ROTACIONES	290
A.3.1. Definición del tensor de pequeñas deformaciones	291
A.3.2. Derivada respecto al tiempo del tensor de deformaciones	291
A.3.3. Direcciones principales de deformación Invariantes del tensor de deformación.	292
A.3.4. Componentes esférica y desviadora del tensor de deformaciones.	293
B. APENDICE B: TENSIONES	
B.1. VECTOR TENSION	295
B.2. TENSOR DE TENSIONES	296
B.3. VECTOR DE TENSION EN UN PLANO CUALQUIERA TETRAEDRO DE CAUCHY	298
B.4. DIRECCIONES PRINCIPALES DE TENSION INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES	299
B.5. DESCOMPOSICION DEL TENSOR DE TENSIONES	300

B.6. INTERPRETACION DE LOS INVARIANTES DE TENSION	301
B.6.1. Tensiones octaédricas	301
B.6.2. Tensiones medias	301
B.6.3. Interpretación geométrica	302
B.7. EVALUACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES	305
C. APENDICE C: BASES TERMODINAMICAS	
C.1. INTRODUCCION	307
C.2. PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA	307
C.3. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA	311
C.4. RELACION DE GIBBS	313
C.5. POTENCIALES TERMODINAMICOS	314
C.6. EXPRESIONES DEL PRIMER Y SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA EN FUNCION DE LA ENERGIA LIBRE	315
D. APENDICE D: MODELOS ELASTOPLASTICOS CLASICOS	
D.1. INTRODUCCION	319
D.2. MODELOS ELASTICOS	321
D.2.1. Ortotropía	322
D.2.2. Isotropía	325
D.3. FUNDAMENTOS DE LOS MODELOS PLASTICOS. TEORIA DE PLASTICIDAD CON PEQUEÑAS DEFORMACIONES.	327
D.3.1. Introducción	327
D.3.2. Criterio de discontinuidad para materiales friccionales o criterio de fluencia plástica para metales	328
D.3.3. Comportamiento más allá del límite elástico	331
D.3.3.1. Descomposición de las deformaciones	331
D.3.3.2. Regla del flujo	331
D.3.3.3. Superficie de carga plástica	332
Endurecimiento isotrópico	332
Endurecimiento cinemático	333
Endurecimiento mixto	334
D.3.4. Relación tensión-deformación generalizada	334
D.3.5. Postulados de estabilidad de Drucker	336
D.3.6. Condiciones de Prager	340
D.3.7. Condiciones de Kuhn-Tucker en plasticidad	340
D.3.8. Criterios clásicos de fluencia o discontinuidad	341
D.3.8.1. Criterio de la máxima tensión de tracción (Rankine)	341

D.3.8.2. Criterio de la máxima tensión de corte de Tresca	343
D.3.8.3. Criterio de Von Mises	344
D.3.8.4. Criterio de Mohr - Coulomb	345
D.3.8.5. Criterio de Drucker - Prager	347
D.3.8.6. Combinación de criterios de fluencia	349
D.3.9. Regla del flujo en puntos singulares	350
E. APENDICE E: TRATAMIENTO NUMERICO DEL MODELO CONSTITUTIVO PROPUESTO	
E.1. INTRODUCCION	351
E.2. PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES	352
E.2.1. Desplazamientos virtuales	352
E.2.2. Enunciado del principio de desplazamientos virtuales	354
E.3. CRITERIOS ENERGETICOS PARA FORMULAR LA ESTABILIDAD Y LA UNICIDAD DE LA SOLUCION	354
E.3.1. Estabilidad de la solución	354
E.3.2. Unicidad de la solución	356
E.4. EQUILIBRIO DEL SOLIDO DISCRETO. FORMULACION MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS	357
E.5. DISCRETIZACION ESPACIAL	359
E.5.1. Integración numérica	360
E.5.1.1. Orden de integración necesario	361
E.5.1.2. Problemas de incompresibilidad	362
Integración reducida/selectiva	363
Formulación de la dilatación media	364
Método B-bar	366
E.6. DISCRETIZACION TEMPORAL	370
E.7. SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES (E.24)	370
E.7.1. Método de Newton Raphson	372
E.7.2. Método general de control de respuesta	376
E.7.2.2. Método de control de desplazamientos	379
E.7.2.2. Método de longitud de arco	382
Obtención del incremento del factor de carga	383
Camino plano	384
Determinación de la longitud de arco	386
Algoritmo de control de plastificación	
Cálculo automático de Δl	387
E.7.2.3. Método de control indirecto de desplazamientos	389
ANEXO E1: ESQUEMA DE UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS CON NO LINEALIDAD EN LA ECUACION CONSTITUTIVA	391

F. APENDICE F: INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA	
F.1. INTRODUCCION	395
F.2. DEFINICION DEL PROBLEMA	396
F.3. CLASIFICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA	398
F.3.1. Regla del trapecio generalizada	398
F.3.1.1. Integración explícita o avance directo	401
F.3.1.2. Euler-Backward	404
F.3.2. Regla del punto medio generalizada	406
F.3.3. Otro procedimiento de integración alternativo	408
F.4. PROBLEMA DE TENSIONES PLANAS	410
F.5. MATRIZ DE RIGIDEZ CONSISTENTE	411
F.5.1. Forma general del módulo tangente consistente método de Euler-Backward	413
F.6. MATERIALES CON DEGRADACION DE RIGIDEZ	414
F.7. MATERIALES ANISOTROPOS	419
F.8. MATERIALES COMPUESTOS	420
ANEXO F1: METODO DE EULER BACKWARD ALGORITMO PARA EL MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO	421
ANEXO F2: DERIVADA DE LA FUNCION DE FLUENCIA MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO	425
ANEXO F3: METODO DE EULER BACKWARD ALGORITMO PARA EL MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO ESTADO PLANO DE TENSIONES	431
ANEXO F4: METODO DE RETORNO MAPEADO ALGORITMO PARA EL MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO	435
ANEXO F5: FORMA EXPLICITA DE DAÑO ALGORITMO	439
ANEXO F6: FORMA IMPLICITA DESACOPLADA DE DAÑO ALGORITMO	443

ANEXO F7: FORMA IMPLICITA ACOPLADA DE PLASTICIDAD + DAÑO METODO DE RETORNO MAPEADO PARA EL MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO	447
ANEXO F8: FORMA IMPLICITA ACOPLADA DE PLASTICIDAD + DAÑO METODO DE EULER BACKWARD PARA EL MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO	453
ANEXO F9: DERIVADA DE LAS FUNCIONES DE FLUENCIA Y DAÑO MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO	459
ANEXO F10: MATERIALES ORTOTROPOS ALGORITMO DE CALCULO	463
ANEXO F11: MATERIALES COMPUESTOS ALGORITMO DE INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA	471
ANEXO F12: MATERIALES COMPUESTOS ALGORITMO DE INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA ESTADO PLANO DE TENSIONES	473

LISTA DE FIGURAS

CAPITULO 2

• Fig.2.1 Curvas de deformación de un geomaterial bajo compresión uniaxial	11
• Fig.2.2 Respuesta de un geomaterial bajo compresión cíclica	12
• Fig.2.3 Curvas tensión-deformación típicas de los aceros	13
• Fig.2.4 Funciones de fluencia y carga	22
• Fig.2.5 Representación de la fisura real por medio del concepto de fisuras distribuidas	26
a) Fisura real	
b) Fisuras distribuidas	
• Fig.2.6 Separación nodal en el modelo de fisuras discretas	28
a) Inicio del fenómeno de fisuración	
b) Caso en que se formen fisuras transversales	
• Fig.2.7 Representación esquemática de la hipótesis de deformación equivalente	30
• Fig.2.8 Teoría de Fractura Progresiva	32
a) Incrementos de tensión y deformación	
b) Trabajo de fractura	
• Fig.2.9 Modos de activación de microfisuras	35
a) Modo I o modo de partición	
b) Modo II o modo de compresión	
• Fig.2.10 Curvas de resistencia para procesos de carga-descarga uniaxial	48
• Fig.2.11 Función de Cohesión	52
• Fig. 2.12 Evolución del ángulo de fricción interna en función de la variable de daño plástico	53

• Fig. 2.13 Evolución del ángulo de dilatancia en función del ángulo de fricción interna	54
• Fig.2.14 Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado	56
a) Según meridianos de tracción y compresión máxima	
b) Según plano octaédrico	
c) Según el plano $\sigma_2 = 0$	
• Fig.2.15 Criterio de Fluencia de Lubliner-Oller	59
a) Según el plano $\sigma_2 = 0$	
b) Según meridianos de tracción y compresión máxima	
c) Según plano octaédrico	
• Fig.2.16 Flujo plástico producido por el criterio de Lubliner-Oller y por el criterio de Mohr-Coulomb	60
• Fig. 2.17 Ensayos de compresión y/o tracción biaxial de Küpfer	62
• Fig.2.18 Ensayo de Compresión Uniaxial	64
• Fig.2.19 Ensayo de compresión biaxial simétrica	65
• Fig.2.20 Ensayo de compresión biaxial asimétrica	66
• Fig.2.21 Comparación del criterio de fluencia de Lubliner-Oller con la curva obtenida experimentalmente	66
• Fig.2.22 Ensayo de tracción uniaxial	67
• Fig.2.23 Ensayo de compresión-tracción	68
• Fig.2.24 Dimensiones Generales y Armadura Longitudinal	69
• Fig.2.25 Malla de Elementos Finitos	72
• Fig.2.26 Curva carga-flecha en la sección central	75
• Fig. 2.27 Curva carga-deformación específica del hormigón	76
• Fig. 2.28 Curva carga-deformación en la armadura no tesa	77
• Fig.2.29 Curva carga-deformación en la armadura tesa	78
• Fig.2.30 Cuadro de fisuración	79
• Fig.2.31 Dimensiones generales de las vigas	82
• Fig.2.32 Malla de elementos finitos	83

• Fig.2.33 Diagramas carga-flecha en la sección central	85
a) Viga 1	
b) Viga 2	
c) Viga 3	
d) Viga 4	
• Fig.2.34 Diagramas carga-deformación específica del hormigón	86
a) Viga 1	
b) Viga 2	
c) Viga 3	
d) Viga 4	
• Fig.2.35 Cuadros de fisuración	88
• Fig.2.36 Esquema de un proceso de degradación de rigidez	93
• Fig.2.37 Tensión equivalente en el modelo de daño explícito	96
• Fig.2.38 Función de daño	97
• Fig.2.39 Comparación de procesos elasto-plástico y elástico degradado (daño explícito)	111
• Fig.2.40 Comparación de procesos elasto-plástico y elástico degradado (daño implícito)	112
• Fig.2.41 Comparación de los modelos de plasticidad+daño acoplado y desacoplado	122
• Fig.2.42. Ensayo de compresión biaxial	123
• Fig. 2.43 Ensayo de compresión cíclica	125
• Fig. 2.44 Evolución de la variable de daño en el ensayo de compresión cíclica	125
ANEXO 2.1	
• Fig. A2.1.1 Fenómeno de fractura real	129
• Fig. A2.1.2. Idealización de la fractura en el modelo de daño plástico	130
• Fig.A2.1.3. Energía disipada en un proceso uniaxial	132
• Fig.A2.1.4. Estimación de la longitud característica de un elemento finito	133

ANEXO 2.2

- Fig. A2.2.1 Direccionalidad del daño plástico en un punto 137
 - a) Dirección local de fisuración
 - b) Fisura real y fisura distribuida equivalente a la real

CAPITULO 3

- Fig.3.1. Anisotropía en el módulo de Young 140
- Fig.3.2 Ejes de simetría material en la mampostería 141
 - a) Bloque de mampostería
 - b) Panel de mampostería
- Fig.3.3 Modos de falla para ensayos de compresión biaxial en mampostería 143
 - a) Compresión uniaxial
 - b) Compresión biaxial
- Fig.3.4 Falla de paneles de mampostería bajo compresión biaxial 145
- Fig.3.5 Comportamiento de la mampostería bajo compresión cíclica 146
 - a) Carga normal a la junta
 - b) Carga paralela a la junta
- Fig.3.6 Pieza de metal laminado sometida tracción 147
- Fig.3.7 Variación de r con α para el estirado de una pieza de metal laminado 147
- Fig.3.8. Sección transversal del proceso de embutición de láminas metálicas 148
- Fig.3.9 Pieza resultante de la embutición 148
- Fig.3.10 Función de fluencia de Barlat isotrópica y anisotrópica 154
- Fig.3.11. Relación entre los espacios anisótropo real e isotrópico ficticio 157
- Fig.3.12 Ejes de referencia 158
- Fig.3.13 Direcciones de ortotropía 159
- Fig.3.14 Curvas de rotura por tracción para distintas orientaciones del mortero ($t_r/t_t=2$) 160
- Fig.3.15 Curvas de rotura para elementos de mampostería con simetría polar 161
- Fig.3.16 Relaciones entre los espacios real anisótropo degradado, ficticio isotrópico degradado y ficticio isotrópico no degradado 187

• Fig.3.17 Variación del módulo elástico en función de la orientación de las fibras	190
• Fig.3.18 Variación de la resistencia tracción en función de la orientación de las fibras	191
• Fig.3.19 Panel de mampostería	192
• Fig.3.20 Malla de elementos finitos	192
• Fig.3.21 Ensayo de compresión normal a la junta (Tensión-deformación en la dirección de la carga)	194
• Fig.3.22 Ensayo de compresión normal a la junta (Tensión-deformación en la dirección perpendicular a la carga)	194
• Fig.3.23 Ensayo de compresión paralelo a la junta (Tensión-deformación en la dirección de la carga)	196
• Fig.3.24 Ensayo de compresión paralelo a la junta (Tensión-deformación en la dirección perpendicular a la carga)	196
• Fig.3.25 Panel de mampostería sometido a tracción	198
• Fig.3.26 Variación de la resistencia tracción con la inclinación de la junta.	199
• Fig.3.27 Malla de Elementos Finitos	202
• Fig.3.28 Ensayo de compresión normal a la junta (Tensión-deformación en la dirección de la carga)	202
• Fig.3.29 Ensayo de compresión paralelo a la junta (Tensión-deformación en la dirección de la carga)	203
• Fig.3.30 Ensayo de compresión inclinado respecto a la junta (Tensión tangencial-deformación angular en la dirección de la junta)	204

ANEXO 3.1

• Fig.A3.1. Efecto del cambio de forma para distintas relaciones de resistencias $r = \sigma_1^o / \sigma_3^o$	
a) Tresca	207
b) Von Mises	207
c) Mohr-Coulomb	208
d) Drucker-Prager	208
e) Lubliner-Oller	209

ANEXO 3.2

- Fig.A3.2.1. Flujo plástico en un material ortótropo ($\nu=4,5$) 212

CAPITULO 4

- Fig.4.1 Compuesto laminado y ejes de referencia local 220
- Fig.4.2 Panel de Mampostería 227
 - a) Panel de mampostería
 - b) Medio (1)
 - c) Medio (1) interceptado por juntas horizontales
- Fig.4.3. Compuesto formado por láminas a 90° 235
- Fig.4.4 Estado tensional (Tracción en la dirección de las fibras de la lámina 1) 235
- Fig.4.5. Estado tensional en las láminas 236
- Fig.4.6 Especimen de material reforzado con fibras 237
 - a) Geometría y carga
 - b) Carga paralela a las fibras
 - c) Carga perpendicular a las fibras
- Fig.4.7 Curvas tensión-deformación para tracción en la dirección de las fibras 239
- Fig.4.8 Curvas tensión-deformación para tracción en la dirección perpendicular a la carga 239
- Fig.4.9 Prisma de hormigón armado. Geometría y condiciones de carga 241
- Fig.4.10 Curvas tensión-deformación de un prisma de hormigón armado sometido a tracción 242
- Fig.4.11 Panel de mampostería 243
- Fig.4.12 Paneles de mampostería armada 245
- Fig.4.13 Esquema del ensayo 247
- Fig.4.14 Malla de elementos finitos 248
- Fig.4.15 Curva carga-desplazamiento panel 5 249
- Fig.4.16 Curva carga-desplazamiento panel 12 249

ANEXO 4.1

- Fig.A4.1.1 Esquema de un panel de mampostería 256

APENDICE A

- Fig.A.1 Velocidad relativa de una partícula Q en q respecto de una partucula P en p. 289

APENDICE B

- Fig.B.1 Vector tensión en una superficie S 296
- Fig.B.2 Estado de tensiones en un punto 297
- Fig.B.3 Tetraedro de Cauchy 299
- Fig.B.4 Espacio de tensiones de High Westergard 302
- Fig.B.5 Descomposición de las tensiones en el espacio de tensiones 304
- Fig.B.6. Sistema de Cordenadas Cilíndricas de High Westergard 304

APENDICE D

- Fig.D.1 Comportamiento uniaxial de un material elastoplástico 320
- Fig.D.2 Representación esquemática de la superficie de fluencia 329
- Fig.D.3 Materiales plásticos estables e inestables en el caso de un estado uniaxial de tensión 337
- Fig.D.4. Criterio de fluencia de Rankine 342
- Fig.D.5 Criterio de fluencia de Tresca 343
- Fig.D.6 Criterio de Fluencia de Von Mises 344
- Fig.D.7 Criterio de Mohr-Coulomb. Envolvente de falla. 346
- Fig.D.8 Criterio de Fluencia de Mohr-Coulomb 346
- Fig.D.9 Criterio de Fluencia de Drucker-Prager 349

APENDICE E

- Fig.E.1 Solución de la ecuación no lineal $f(x)=0$ mediante el método de Newton Raphson 373
- Fig.E.2 Método de Newton Raphson (sistema de un grado de libertad) 375
- Fig.E.3. Método de Newton Raphson modificado (sistema de un grado de libertad) 375

• Fig.E.4. Método mixto incremental-iterativo (Sistema de un grado de libertad)	376
• Fig.E.5 Método de la Longitud de Arco Camino Esférico	384
• Fig.E.6 Método de la longitud de arco Camino plano	385

APENDICE F

• Fig.F.1. Regla del Trapecio Generalizada	400
• Fig.F.2. Integración explícita	402
• Fig.F.3. Integración explícita con subincrementación ($m = 3$)	404
• Fig.F.4 Método de Euler Backward	405
• Fig.F.5 Regla del punto medio generalizada	409
• Fig.F.6 Método de retorno mapeado	410

LISTA DE TABLAS

CAPITULO 2	
• TABLA 2.1. Características mecánicas del hormigón	62
• TABLA 2.2. Parámetros que caracterizan a los materiales	70
• TABLA 2.3. Deformaciones iniciales y finales de los tensores	71
• TABLA 2.4. Propiedades mecánicas del hormigón	73
• TABLA 2.5 Propiedades mecánicas de la armadura no tesa	73
• TABLA 2.6. Propiedades mecánicas de la armadura tesa	73
• TABLA 2.6 Características de las vigas ensayadas	82
• TABLA 2.7 Características Mecánicas del Hormigón	83
• TABLA 2.8 Características Mecánicas del Acero	84
• TABLA 2.9 Comparación de Cargas Ultimas Numéricas y Experimentales	89
• TABLA 2.10 Características mecánicas del hormigón	121
• TABLA 2.11. Características mecánicas del hormigón	123
• TABLA 2.12. Características mecánicas del hormigón	124
CAPITULO 3	
• Tabla 3.1 Propiedades mecánicas de las fibras	189
• Tabla 3.2. Propiedades mecánicas de los ladrillos	193
• Tabla 3.3. Propiedades mecánicas del mortero	193
• Tabla 3.4. Resistencia a tracción de la mampostería	198
• Tabla 3.5. Propiedades mecánicas de la mampostería	201

CAPITULO 4

• Tabla 4.1. Propiedades elásticas de las láminas	235
• Tabla 4.2 Propiedades mecánicas de la matriz	238
• Tabla 4.3 Propiedades mecánicas de las fibras	238
• Tabla 4.4 Características mecánicas del hormigón	241
• Tabla 4.5 Características mecánicas del acero	241
• Tabla 4.6. Características mecánicas de la mampostería, Panel 5	245
• Tabla 4.7. Características mecánicas de la armadura, Panel 5	246
• Tabla 4.8 Características mecánicas de la mampostería, Panel 12	246
• Tabla 4.9. Características mecánicas de la armadura, Panel 12	246

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1. INTRODUCCION

Desde hace muchos años la mecánica teórica se ha encargado de resolver problemas estructurales. La necesidad de realizar los cálculos a mano, hacía que todo el esfuerzo estuviera orientado a lograr esquemas simplificados del comportamiento estructural. Para ello se recurría a una serie de hipótesis simplificativas basadas en resultados experimentales. Esto traía aparejado la necesidad de realizar numerosos ensayos experimentales y limitaba la aplicación de las teorías a cada caso particular de material o tipo de estructuras para las cuales había sido desarrollada.

En la actualidad, con el auge de las computadoras, han surgido numerosas técnicas numéricas de aproximación funcional como el método de elementos finitos, el método de diferencias finitas y el método de elementos de contorno. Si bien estos métodos no aportan demasiados elementos nuevos en el

caso de estructuras simples como barras, vigas o columnas, se hacen indispensables para poder resolver adecuadamente estructuras más complejas como contenedores nucleares, plataformas offshore, etc. Los modelos constitutivos juegan un rol fundamental en la obtención de resultados confiables de cualquier procedimiento de solución de estas estructuras. Su importancia se incrementó significativamente con el gran desarrollo y vasta aplicación de las técnicas computacionales ya mencionadas, como el método de elementos finitos.

La toma de conciencia al respecto, ha impulsado a un creciente interés en la formulación teórica de leyes constitutivas y en la determinación de los parámetros que intervienen en las mismas. Lo primero implica el uso de conceptos de la *Mecánica de los Medios Continuos* [Malvern 1969] y lo segundo requiere una adecuada identificación y determinación experimental de los parámetros que definen la ley constitutiva. El segundo aspecto está todavía menos desarrollado que el primero.

En esta Tesis, se enfoca el problema de la formulación de modelos constitutivos para materiales de uso corriente en la ingeniería estructural como son los geomateriales : hormigón, mortero, roca, suelos, ladrillos, y los metales, principalmente el acero. El estudio se restringe a "*la formulación matemática*" e "*identificación de los parámetros fundamentales*" que definen el comportamiento, reconociendo la importancia de disponer de resultados experimentales confiables para asignar valores a dichos parámetros.

1.2. CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES ESTRUCTURALES MAS FRECUENTES

Entre los materiales estructurales más utilizados en la práctica se encuentran el acero, el hormigón y la mampostería que es un material compuesto por ladrillos o bloques que pueden ser de distintos materiales y juntas de mortero. Tanto el hormigón como la mampostería se utilizan, con frecuencia, combinados con barras de acero dando lugar al hormigón armado y a la mampostería armada o al hormigón pretensado y mampostería pretensada en el caso en que estas barras de acero sean pretensadas.

El acero suele presentar un comportamiento elástico lineal hasta la tensión de fluencia. A partir de allí, presenta deformaciones plásticas. Las curvas tensión-deformación son prácticamente iguales para tracción que para compresión, dependiendo la forma de las mismas del tipo de tratamiento térmico y mecánico previo del material [Chen 1982].

Por otro lado, los hormigones y morteros presentan microfisuras, especialmente en la interfase pasta-agregado, aún antes de ser sometidos a cargas [Chen 1982]. Esta propiedad es decisiva en el comportamiento mecánico de este tipo de materiales. La propagación de estas microfisuras durante la carga contribuye al comportamiento no lineal para bajos niveles de tensión y produce la expansión volumétrica cerca de la falla [Chen 1982]. Existe evidencia experimental de dos fenómenos que se producen en el hormigón e interactúan entre sí, dando lugar a todas las características más salientes del comportamiento del mismo. Ellos son: el *crecimiento de microfisuras* y el *deslizamiento entre las partículas*. El *crecimiento de microfisuras* juega un papel fundamental en el comportamiento del hormigón, ya que da como resultado una degradación de las propiedades elásticas e interactúa con el *deslizamiento plástico* dando lugar a lo que normalmente se conoce como *acoplamiento elastoplástico* [Ortiz 1985a].

Por otro lado, como la pasta de cemento tiene una resistencia a la tracción mucho menor que el agregado, da lugar a un vínculo débil en el sistema compuesto y esto trae como consecuencia una resistencia a tracción mucho menor que a compresión.

En el caso del hormigón armado o pretensado y de la mampostería se trata de materiales compuestos en los que el comportamiento del conjunto depende del comportamiento de cada una de sus materiales componentes que a su vez interactúan entre sí. El comportamiento mecánico de este tipo de materiales está altamente influenciado por la disposición geométrica de sus componentes y suele presentar un comportamiento inicialmente anisótropo.

1.3. MODELOS CONSTITUTIVOS

1.3.1. DEFINICION DE MODELOS CONSTITUTIVOS

Una *ley constitutiva* o *modelo constitutivo* es un modelo mecánico-matemático que describe una idea del comportamiento tenso-deformacional del material [Desai 1984]. En otras palabras, una ley constitutiva simula matemáticamente una idealización del comportamiento físico. Por ello, la validez de un modelo constitutivo depende del grado con que ha sido entendido el modelo físico y de la aproximación mecánico-numérica con la que se representa su simulación.

No es simple formular una ley constitutiva que sirva para reproducir el comportamiento de cualquier material. Más aún, en general, es bastante difícil encontrar una ley constitutiva que cubra todos los rangos y modos posibles de excitación y comportamiento de un material en particular. En general se debe restringir los modelos a los rangos de interés específico. En el caso de esta Tesis, se particulariza a los *materiales estructurales bajo cargas cuasiestáticas de corta duración, pequeñas deformaciones y desplazamientos y variación de la temperatura nula*.

1.3.2. CLASIFICACION DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS

El problema de la modelización constitutiva ha sido desarrollado por varias subdisciplinas de la mecánica como la *Teoría de la Elasticidad* [Fung 1965, Malvern 1969], *Teoría de la Plasticidad* [Hill 1967, Malvern 1969, Chen 1982] y *Mecánica de Fractura* [Elices 1985, ASCE 1982, Rilem 1989]. Como resultado, se han propuesto diferentes leyes constitutivas, basadas en diferentes conceptos. En general, cada modelo es válido dentro de un cierto rango o para algunos materiales bajo determinadas condiciones. No se ha desarrollado hasta ahora ningún modelo que sea válido para todos los materiales bajo todas las condiciones posibles. Por otro lado, como el fenómeno descrito es el mismo, hay muchos puntos en común entre los distintos modelos constitutivos.

A continuación se presenta una clasificación general de los distintos

tipos de modelos constitutivos existentes para simular el comportamiento de los materiales. Esta clasificación es muy simplificada y sólo pretende ubicar y poder seguir el desarrollo del modelo que se presenta en esta Tesis. Por ello se pone énfasis en la clasificación de los modelos de la *Mecánica del Sólido Local* [Malvern 1969]. Se utilizan como pautas de clasificación : el tipo de teorías en las que están basados y las características de los materiales a los cuales son aplicables.

CLASIFICACION DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS

- Modelos basados en la *Mecánica de Fractura*
- Modelos basados en la *Mecánica del Sólido No Local*
- Modelos basados en la *Mecánica del Sólido Local*
 - Modelos para *Materiales Simples*
 - *Materiales Isótropos*
 - Modelos *Elásticos* (*Basados en la Teoría de Elasticidad*)
 - Modelos *Inelásticos*
 - Basados en la *Teoría de Daño*
 - Basados en la *Teoría de la Plasticidad*
 - Basados en la *Teoría de la Viscoelasticidad*
 - Basados en la *Teoría de la Viscoplasticidad*
 - Basados en la *Teoría de Fractura Difusa*
 - Combinación de las Teorías Mencionadas
 - *Materiales Anisótropos*
 - Modelos *Elásticos* (*Basados en la Teoría de Elasticidad*)
 - Modelos *Inelásticos*
 - Basados en la *Teoría de Daño*
 - Basados en la *Teoría de la Plasticidad*
 - Basados en la *Teoría de la Viscoelasticidad*
 - Basados en la *Teoría de la Viscoplasticidad*
 - Basados en la *Teoría de Fractura Difusa*
 - Combinación de las Teorías Mencionadas
 - Modelos para *Materiales compuestos*
 - *Teoría de Mezclas*
 - *Teorías de Homogeneización*
 - Otros
- *Modelos Estructurales* simulando cada parte estructural con modelos mecánicos antes mencionados.

1.4. OBJETIVOS DE LA TESIS

El objetivo fundamental de esta Tesis es desarrollar un modelo constitutivo para materiales friccionales no homogéneos y ortótropos, con degradación de rigidez, que sufren deformaciones permanentes, con endurecimiento o ablandamiento, que pueda utilizarse para modelar el comportamiento de materiales estructurales bajo cargas cuasiestáticas. Dicho modelo debe ser aplicable a un amplio rango de materiales desde los más simples como el acero hasta los más complejos como el hormigón y la mampostería.

Para ello, se debe cumplir los siguientes objetivos parciales:

- Formular un modelo constitutivo que cumpla con los postulados de la *Mecánica de los Medios Continuos* y que, a su vez, sepa captar los fenómenos más importantes que caracterizan el comportamiento de los geomateriales y de los aceros dentro de las exigencias de las estructuras civiles.
- Desarrollar una herramienta numérica a través de un programa de computación que permita implementar el modelo propuesto y verificar su validez mediante la solución de problemas concretos y comparación de los resultados con los obtenidos experimentalmente.

1.5. CONTENIDO DE LA TESIS

En esta Tesis se presenta un modelo constitutivo basado en la teoría de plasticidad [Hill 1967, Malvern 1969] y en la teoría de daño isótropo de Kachanov [Kachanov 1958], en pequeñas deformaciones, que permite simular el comportamiento de materiales estructurales simples o compuestos mediante la utilización de la teoría de mezclas y el desarrollo de una herramienta numérica apropiada para su implementación.

Para mayor claridad, la presentación del modelo se hace en forma secuencial, desde su forma más sencilla hasta su forma completa final que permite simular todos los fenómenos mencionados simultáneamente.

La organización de la tesis es la siguiente:

En el Capítulo 2 se presenta el modelo constitutivo propuesto para materiales simples e isotrópicos. En primer lugar el modelo plástico, luego el modelo de daño y finalmente el modelo que acopla las deformaciones permanentes con el fenómeno de degradación de rigidez.

En el Capítulo 3 se presenta el modelo constitutivo propuesto para materiales simples ortótropos.

En el Capítulo 4 se presenta el modelo utilizado para la simulación de materiales compuestos por materiales ortótropos.

En estos tres capítulos se presentan también una revisión previa sobre los antecedentes más notorios en el tema y, además, ejemplos de aplicación en problemas estructurales, que permiten verificar la validez del modelo propuesto.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de la Tesis y sugerencias para nuevos trabajos de investigación.

La Tesis se completa además con una serie de Apéndices en los que se desarrollan algunos aspectos que no hacen al contenido fundamental de la Tesis pero que ayudan a un mejor entendimiento del modelo propuesto y de su implementación numérica.

En los Apéndices A y B se resumen definiciones de deformaciones y tensiones y sus correspondientes invariantes que se utilizan en el desarrollo de la Tesis.

En el Apéndice C se presentan las bases termodinámicas del modelo propuesto.

En el Apéndice D se resumen los fundamentos principales de los modelos elastoplásticos basados en la *Teoría de la Elasticidad y Plasticidad Clásica*.

En el Apéndice E se presentan los aspectos fundamentales del

tratamiento numérico del modelo constitutivo.

Por último, en el Apéndice F se desarrolla en detalle el problema de integración de la ecuación constitutiva.

Se presenta además una serie de Anexos en los que se desarrollan algunos problemas puntuales.

CAPITULO 2

MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIALES SIMPLES E ISOTROPOS.

**PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS
CARGAS CUASISTATICAS DE CORTA DURACION
PROBLEMAS TERMICAMENTE ESTABLES
GEOMATERIALES, ACERO.**

2.1. INTRODUCCION

Algunos materiales estructurales como el acero y los geomateriales en general: hormigón, mortero rocas, suelos, pueden ser tratados como materiales simples e isótopos para la mayoría de los problemas que se plantean en la práctica.

A continuación se describen las características fundamentales del comportamiento de estos materiales.

2.1.1. CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DEL COMPORTAMIENTO DE LOS GEOMATERIALES

[Desai 1984, Chen 1982, Oller 1988]

Dentro de los llamados geomateriales se pueden mencionar los hormigones, morteros, suelos, rocas y ladrillos cerámicos. Los comportamientos de estos materiales no son idénticos, pero todos presentan ciertas propiedades comunes que permiten tratarlos con un modelo constitutivo único, variando los valores de los parámetros intervinientes en forma adecuada.

Tanto la descripción del comportamiento como los modelos que se presentan están principalmente orientados a hormigones y morteros pero pueden ser extendidos a otros geomateriales. Los suelos en particular, presentan algunas características distintas a las de los hormigones, motivo que hace que lo desarrollado en esta Tesis sea aplicable a suelos sólo bajo determinadas condiciones.

Los ensayos experimentales de geomateriales ponen en evidencia la presencia de dos fenómenos que interactúan entre sí y definen el comportamiento mecánico de los mismos [Ortiz 1985a]. Ellos son:

- *Crecimiento de microfisuras*
- *Deslizamiento entre las partículas*

Generalmente, los geomateriales presentan microfisuras aún antes de ser sometidos a cargas. En los hormigones y morteros estas microfisuras aparecen especialmente en la interfase pasta-agregado y son causadas principalmente por retracción de fraguado, segregación, fluencia lenta o expansión térmica. Esta propiedad es decisiva en el comportamiento mecánico de este tipo de materiales. La propagación de estas microfisuras durante la carga contribuye al comportamiento no lineal con degradación de rigidez para bajos niveles de tensión y produce la expansión volumétrica cerca de la falla.

El *deslizamiento plástico* ocurre cuando se vence la fricción interna del material y produce deformaciones permanentes. Por otro lado, este concepto interactúa con el crecimiento de las microfisuras dando lugar a lo que

normalmente se conoce como *acoplamiento elastoplástico* [Ortiz 1985a].

En general, los geomateriales presentan una resistencia a tracción mucho menor que a compresión ya que el vínculo entre las partículas suele ser débil. Por ejemplo, en el caso del hormigón, la pasta de cemento tiene una resistencia a tracción mucho menor que el agregado y da lugar entonces a una zona débil.

Bajo cargas uniaxiales los geomateriales presentan un comportamiento prácticamente elástico lineal al comienzo, luego la curva tensión deformación se curva hasta alcanzar un pico a partir del cual comienza a descender, ver Fig.2.1. La representación de la deformación volumétrica de la Fig.2.1 permite ver que ésta es lineal al comienzo pero luego la deformación volumétrica cambia de signo produciendo una *expansión volumétrica* cerca de la falla.

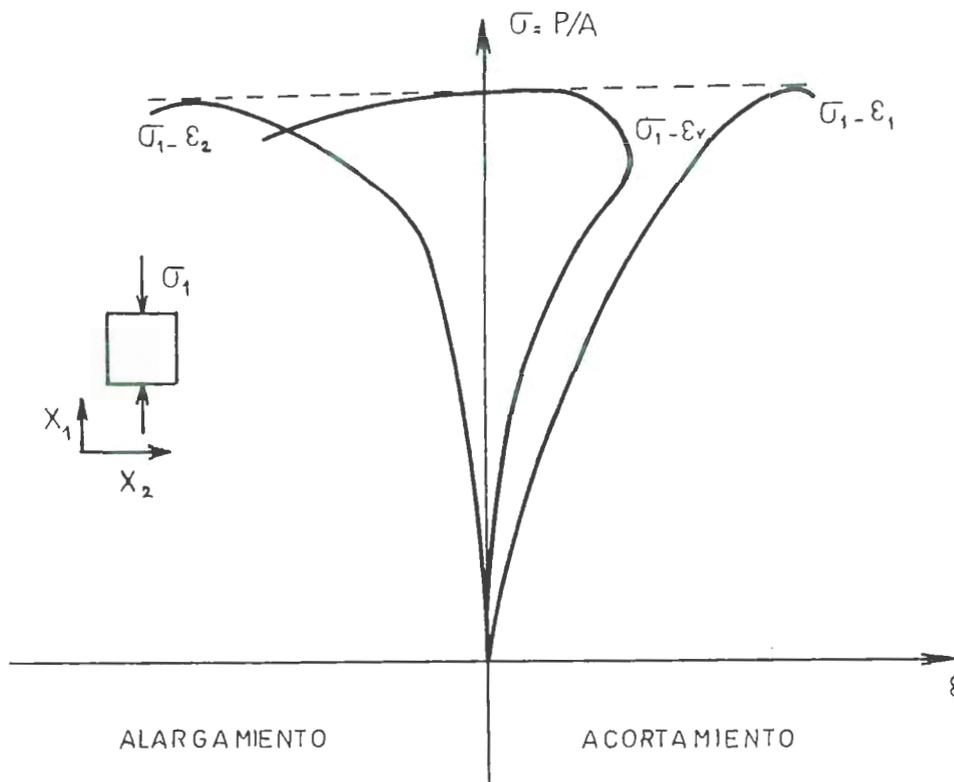


Fig.2.1 Curvas de deformación de un geomaterial bajo compresión uniaxial

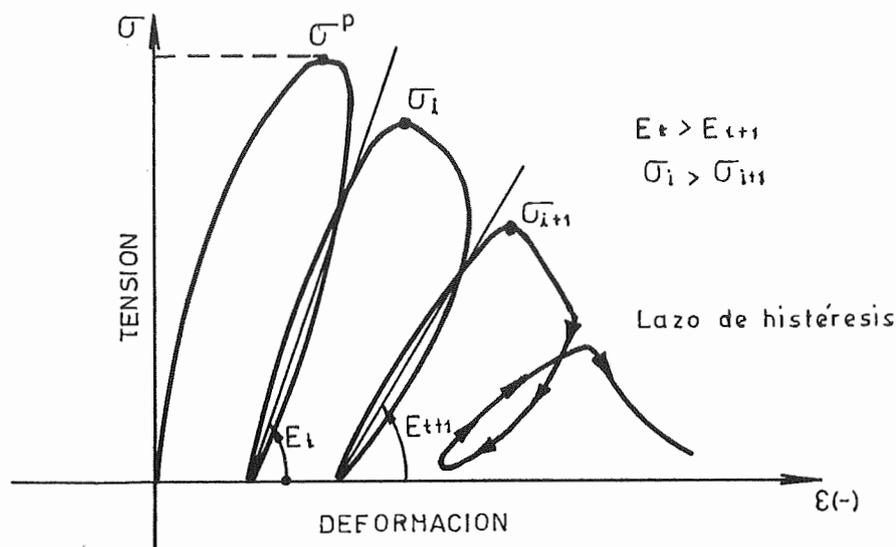


Fig.2.2 Respuesta de un geomaterial bajo compresión cíclica

En la fig.2.2 puede verse un esquema del comportamiento de los geomateriales bajo cargas cíclicas de compresión. El comportamiento se caracteriza por la pérdida de la resistencia ($\sigma_i > \sigma_{i+1}$) y la degradación de la rigidez ($E_t > E_{t+1}$) bajo los sucesivos ciclos de carga y descarga y la formación de pequeños lazos de histéresis.

La curva de respuesta en tracción uniaxial es similar a la de compresión pero con una resistencia de pico mucho menor ($\sigma_T^p \ll \sigma_C^p$). La relación entre las resistencias a tracción y compresión depende del material. En el caso del hormigón, varía entre 0,05 y 0,1.

La máxima resistencia a compresión es mayor en los ensayos de compresión biaxial. En general, el máximo se produce para relaciones de resistencias distintas de $\sigma_{11}/\sigma_{22}=1/1$. Bajo compresión-tracción, en general la resistencia decrece casi linealmente con el aumento de la tracción. Bajo tracción biaxial, la resistencia es prácticamente la misma que para compresión.

Bajo estados triaxiales el comportamiento está altamente influenciado por el valor de la presión de confinamiento, pudiendo ser *frágil*, *elastoplástico con ablandamiento* o *elastoplástico con endurecimiento*. Bajo presiones de confinamiento altas la resistencia aumenta notablemente.

2.1.2. CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DEL COMPORTAMIENTO DEL ACERO

[Chen 1982]

En la Fig.2.3 pueden verse algunas curvas típicas de comportamiento de los aceros usados para hormigón armado y pretensado. Los aceros laminados en caliente presentan una zona elástica lineal hasta la tensión de fluencia, a partir de la cual se tiene un comportamiento perfectamente plástico seguido de una zona de endurecimiento hasta la resistencia pico y la posterior falla.

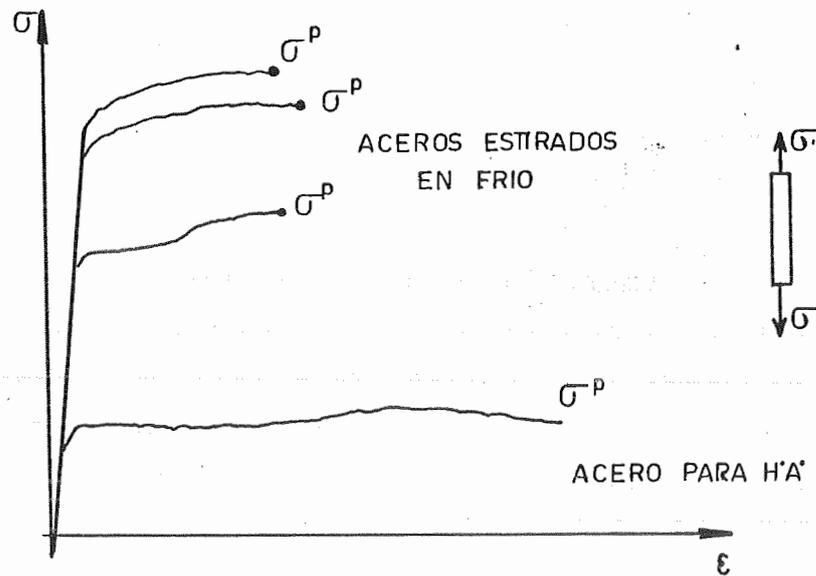


Fig.2.3 Curvas tensión-deformación típicas de los aceros

Para aceros de aleaciones y aceros estirados en frío como los que se usan en pretensado, la tensión de fluencia no aparece tan marcada y debe ser definida convencionalmente. Además el comportamiento es mucho más frágil.

Generalmente se supone que las curvas tensión deformación para el acero son idénticas en tracción y en compresión [Chen 1982].

Un aspecto importante del comportamiento del acero bajo cargas cíclicas es la presencia del llamado *efecto Baushinger*, por el cual un aumento de la tensión de fluencia en carga es seguido de una disminución de la tensión de fluencia cuando el sentido de la tensión es invertido.

2.2. BREVE ESTADO DEL ARTE

2.2.1. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA GEOMATERIALES

En los últimos tiempos se han desarrollado gran cantidad de modelos constitutivos para simular el comportamiento de los geomateriales y del hormigón en particular. En general, estos modelos están basados en distintos tipos de teorías y tienen ventajas y desventajas dependiendo de la aplicación particular para la que se los use. Existen muchos autores que han clasificado y estudiado críticamente los modelos desarrollados [Bazant y Kim 1979, Chen y Ting 1980, Chen 1982]. En lo que sigue, sólo se pretende dar un pantallazo general de cuales son las posibilidades con que se cuenta para el tratamiento de este tipo de materiales que ponga en evidencia la necesidad de desarrollar un *modelo unificado de comportamiento*.

Siguiendo la clasificación dada en el Capítulo 1, los modelos constitutivos para geomateriales se pueden clasificar en *modelos elásticos lineales y no lineales, modelos basados en la teoría de plasticidad, modelos basados en la teoría endocrónica de la plasticidad, modelos basados en la teoría de fractura difusa, modelos de daño y modelos que surgen de la combinación entre estos modelos*.

2.2.1.1. Modelos Elásticos

MODELOS ELASTICOS LINEALES

Una de las características más importantes del comportamiento de los geomateriales es su reducida resistencia a tracción en relación a su resistencia a compresión. La fisuración es una de las causas más importantes de la no linealidad en el comportamiento. Los modelos elásticos lineales suelen utilizarse para predecir la fisuración con bastante aproximación. Generalmente se trata de modelos elásticos lineales con fractura [Ngo and Scordelis 1967, Philips and Zienkiewicz 1976]. Las relaciones tensión-deformación son aquellas de la teoría de la elasticidad en las que intervienen el módulo elástico y el módulo de Poisson. La superficie que marca el límite elástico en el espacio de tensiones, generalmente coincide

con la superficie de fractura. Para el material fisurado las relaciones tensión-deformación son todavía elásticas y lineales pero la matriz de rigidez tangente es modificada para tener en cuenta que las tensiones en la dirección normal a la fisura son nulas. Esto hace que el material se comporte como un material elástico-lineal ortótropo.

MODELOS ELASTICOS NO LINEALES

Una mejor aproximación al comportamiento de los geomateriales puede obtenerse a través de modelos elásticos no lineales. Los modelos elásticos no lineales, que contienen como caso particular a los modelos elásticos lineales, pueden clasificarse en tres tipos diferentes : (a) *Modelos elásticos de Cauchy*, (b) *Modelos hiperelásticos o de Green* y (c) *Modelos hipoelásticos*.

(a) *Modelos de Cauchy* [Chen 1982, Desai 1984]

En los modelos de Cauchy se supone que el estado actual de tensiones depende únicamente del estado actual de deformación. El comportamiento descrito es *reversible e independiente del camino*. Este tipo de modelos se usa bastante en hormigones y suelos.

Es común obtener este tipo de modelos como modificación de los modelos elásticos lineales, definiendo los módulos secantes volumétrico K_s y desviador G_s como funciones del estado de deformación [Cedolín et al 1977, Kupfer and Gerstle 1973, Kotsovos and Newman 1978]

En principio, cualquier función escalar puede ser usada para los módulos secantes K_s y G_s . Obviamente en los modelos constitutivos formulados de este modo el estado de tensión queda determinado únicamente por el estado de deformación y viceversa, independientemente de la historia de carga. Sin embargo, ello no asegura que la función de energía W calculada a partir de esas relaciones sea independiente del camino de carga. Hay que imponer ciertas restricciones en las formas de K_s y G_s para que esto ocurra y de paso queden satisfechas las leyes de la termodinámica. Se puede demostrar que esas condiciones son [Chen 1982]:

$$\begin{cases} K_s = K_s(I_1') & \text{ó} & K_s = K_s(\epsilon_{\text{oct}}) \\ G_s = G_s(J_2') & \text{ó} & G_s = G_s(\gamma_{\text{oct}}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde I_1' y J_2' son el primer y segundo invariante del tensor de deformaciones y su desviador respectivamente; y ϵ_{oct} y γ_{oct} , las deformaciones octaédricas de cambio de volumen y cambio de forma respectivamente.

Un ejemplo de este tipo de modelos es el propuesto por Cedolin et al [Cedolin 1977] para hormigón. Es una formulación secante desacoplada :

$$\begin{cases} \sigma_{\text{oct}} = 3 K_s \epsilon_{\text{oct}} \\ \tau_{\text{oct}} = G_s \gamma_{\text{oct}} \end{cases} \quad (2.2)$$

con módulos tangentes dados por:

$$\begin{cases} K_s/K_o = a b^{-\epsilon_{\text{oct}}/c} + d \\ G_s/G_o = p q^{-\gamma_{\text{oct}}/r} - s \gamma_{\text{oct}} + t \end{cases} \quad (2.3)$$

donde a, b, c, d, p, q, r, s y t son constantes que dependen del material y K_o y G_o son los valores iniciales de los módulos volumétricos y desviadores respectivamente.

A diferencia de éste, el modelo de Kotsovos y Newman [Kotsovos 1978] incorpora en las ecuaciones constitutivas la dependencia entre la deformación normal y la tensión desviadora.

b) Modelos Hiperelásticos o de Green [Chen 1982, Desai 1984]

Estos modelos se basan en la existencia de una *función energía de deformación* (W) y su *complementaria* (Ω) (asegurada por los principios de la

termodinámica) tales que el estado de tensión y deformación resultan de:

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij} \quad \text{y} \quad \epsilon_{ij} = \partial \Omega / \partial \sigma_{ij} \quad (2.4)$$

De esta manera se asegura que no se puede generar energía en forma espontánea en los ciclos de carga y que las leyes de la termodinámica [Malvern 1969] se cumplen siempre.

Para un material inicialmente isotrópico W y Ω se expresan en términos de tres invariantes independientes de los tensores σ_{ij} o de ϵ_{ij} . Si se utiliza una expansión polinómica de grado n en los invariantes, se obtiene un modelo hiperelástico de grado $n-1$.

A diferencia de los modelos elásticos lineales, los modelos elásticos no lineales obtenidos de esta forma producen acoplamiento entre las componentes esférica y desviadora, presentando, por ejemplo, incrementos de volumen bajo tensiones tangenciales puras. Este fenómeno es importante en la modelación del suelo y del hormigón.

Los modelos hiperelásticos conducen a ecuaciones constitutivas reversibles que no pueden describir la dependencia de la historia de carga.

Modelos hiperelásticos de segundo y tercer grado han sido usados para reproducir el comportamiento de las arenas [Desai 1984, Chen 1982]

c) Modelos Hipoelásticos

Este tipo de formulación se usa para describir el comportamiento de materiales en los que el estado de tensión depende de la deformación actual pero también de la historia de tensión.

Las relaciones incrementales tienen la forma :

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (2.5)$$

Un caso particular sería una expresión equivalente que resulta de la utilización de un tensor constitutivo tangente C_{ijkl}^t y que permite escribir la variación temporal del tensor de tensiones $\dot{\sigma}_{ij}$ como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^t (\sigma_{mn}) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.6)$$

Esto describe una relación infinitesimal reversible y de ahí el nombre de *hipoelásticos* que se les asigna a estos modelos. Los modelos hipoelásticos, de la forma descrita por la ec (2.6) presentan *anisotropía inducida*¹ y rigidez tangente idéntica para carga y descarga.

Recientemente apareció otro tipo de relación tensión-deformación incremental, denominada *modelo de módulo variable* [Chen 1982], en el que las funciones tensoriales C_{ijkl}^t son funciones de los invariantes del tensor de tensiones y no de sus componentes. Son generalmente irreversibles y presentan formas distintas para carga, descarga y recarga.

La mayoría de los primeros análisis con elementos finitos fueron realizados con modelos hipoelásticos simplificados [Chen 1982]. La forma más simple consiste en proyectar las tensiones y deformaciones en funciones escalares como las tensiones octaédricas dando lugar a módulos de elasticidad dependientes de las deformaciones o tensiones [Popovic 1970, Duncan 1970]. Un análisis más sofisticado consiste en desacoplar los efectos desviadores y volumétricos y suponer módulos volumétricos y de corte variables en función de, por ejemplo, las tensiones octaédricas [Kupfer 1969, 1973]. Otra forma consiste en crear modelos hipoelásticos ajustando resultados de ensayos biaxiales [Liu 1972] o axilsimétricos [Darwin 1977] suponiendo ortotropía y haciendo coincidir las direcciones principales de tensión con los ejes de ortotropía. La aplicación de estos modelos debe restringirse a cargas monótonas y situaciones similares a las de los ensayos a partir de los cuales se ajustaron los módulos.

¹El tensor C_{ijkl}^t no conserva la forma correspondiente a un material isótropo (dependiente de dos constantes independientes).

Para extender el rango de aplicabilidad de los modelos ortotrópicos para representar el comportamiento del hormigón tanto bajo carga cíclica como monotónica, se introdujo el concepto de *deformación equivalente* [Darwin 1977, Saenz 1964]. Los efectos del estado triaxial de tensión en el daño interno son tenidos en cuenta mediante curvas tensión-deformación equivalentes para cada una de las direcciones principales. Este tipo de modelo ha sido utilizado para resolver una gran variedad de problemas de hormigón armado mediante el método de los elementos finitos [Chen 1982]. Un ejemplo de este tipo de modelos es el de Buyukozturk and Shareef [1985] para hormigón. Este es un modelo ortótropo en el que los módulos elásticos tangentes se establecen por separado para cada una de las direcciones principales, como funciones del estado de tensión y deformación en las direcciones principales. La ley constitutiva tiene la forma descrita en ec.(2.6) en donde el tensor de rigidez tangente C_{ijkl}^t escrito en forma matricial tiene la siguiente forma:

$$C^t = (1/\phi) \begin{bmatrix} (1-v^2)E_1 & v(1+v)\sqrt{E_1 E_2} & v(1+v)\sqrt{E_1 E_3} & & & & 0 \\ & (1-v^2)E_2 & v(1+v)\sqrt{E_2 E_3} & & & & \\ & & (1-v^2)E_3 & & & & \\ & & & Simet. & & & \\ & & & & \phi G_{12} & & \\ & & & & & \phi G_{23} & \\ & & & & & & \phi G_{31} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Donde E_1 , E_2 y E_3 son los módulos de Young tangentes en las direcciones 1, 2 y 3 respectivamente, $\phi = 1 - 3v^2 - 2v^3$, v es el módulo de Poisson y G_{12} , G_{23} y G_{31} los módulos de corte en planos paralelos a los planos coordenados 1-2, 2-3 y 3-1, respectivamente. Los módulos de corte en las direcciones principales se definen como:

$$G_{12} = \alpha \sqrt{E_1 E_2} \quad , \quad G_{23} = \alpha \sqrt{E_2 E_3} \quad , \quad G_{31} = \alpha \sqrt{E_3 E_1} \quad (2.8)$$

Donde α es un parámetro que vale : $\alpha = \frac{1}{2}(1+\nu)$ para hormigón sin fisurar y varía entre 0 y 0,2 para hormigón fisurado.

La deformación uniaxial equivalente escrita en forma de matriz columna ϵ_{iu} está dada por la siguiente relación:

$$\epsilon_{iu} = \frac{\epsilon_i}{1 - \nu \frac{\sigma_k + \sigma_j}{\sigma_i}} \quad (2.9)$$

Donde ϵ_j es la deformación principal en la dirección j y σ_i , σ_j y σ_k las tensiones principales en las direcciones i, j y k respectivamente.

La relación tensión-deformación está dada por:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{ic}} = \frac{n}{n - 1 + (\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^n} \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \quad (2.10)$$

Donde n es un factor de forma.

Los módulos tangentes para la construcción de la matriz de rigidez tangente pueden obtenerse derivando la ec.(2.10).

Este modelo puede extenderse también para carga cíclica [Buyukozturk and Shareef 1985]

2.2.1.2. Modelos Basados en la Teoría de Plasticidad

La teoría de plasticidad se aplica con muy buenos resultados a geomateriales cuando estos trabajan a compresión. Para el hormigón, por ejemplo, son muy comunes los modelos que suponen un comportamiento elástico perfectamente plástico en compresión y elástico fracturable en tracción.

Dentro de los modelos basados en la teoría de la plasticidad se pueden distinguir los modelos perfectamente plásticos y los modelos plásticos con

endurecimiento o ablandamiento. Por otra parte aparecen los modelos que combinan la plasticidad con el daño, modelos que se tratarán más adelante.

MODELOS ELASTO-PERFECTAMENTE PLASTICOS

Algunos materiales friccionales como el hormigón fluyen plásticamente bajo compresión triaxial. Para describir este comportamiento puede utilizarse un modelo elástico-perfectamente plástico combinado con algún criterio de falla o de aplastamiento que marque un límite al flujo plástico. Este criterio puede estar definido en el espacio de deformaciones.

Para definir el límite de fluencia se suele utilizar como criterios : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Willam-Warnke [Chen 1982]. Para describir la ley tensión-deformación en régimen plástico se emplea normalmente flujo asociado lo cual conduce a un aumento excesivo de volumen por efecto de la presión. La *dilatancia*² cerca de la falla es justamente uno de los fenómenos característicos en algunos geomateriales como el hormigón, rocas y suelos bajo determinadas condiciones.

MODELOS ELASTO-PLASTICOS CON ENDURECIMIENTO O ABLANDAMIENTO

Este tipo de modelos es más atractivo que los anteriores debido a que normalmente los geomateriales presentan un comportamiento elastoplástico con endurecimiento.

Un ejemplo de este tipo de modelo es el de Chen [Chen y Chen 1975, Chen y Ting 1980, Chen 1982] para hormigón. En este modelo se supone que inicialmente el material es elástico hasta que alcanza la superficie de fluencia. A partir de allí tiene un comportamiento elastoplástico con endurecimiento. La superficie inicial de fluencia va evolucionando de manera que se trata de una superficie de carga que marca el umbral de comportamiento elástico en el espacio de tensiones. Se define además una *superficie de*

²NOTA: La dilatancia es el fenómeno de cambio de volumen asociado a la distorsión angular que provocan las tensiones tangenciales en un punto del sólido.

fractura que marca la rotura por aplastamiento o fisuración. Cuando el material alcanza este límite su resistencia cae a cero y es incapaz de resistir tensión alguna. En la fig.2.4 se han representado las superficies descriptas en el plano de tensiones principales ($\sigma_1 - \sigma_2$)

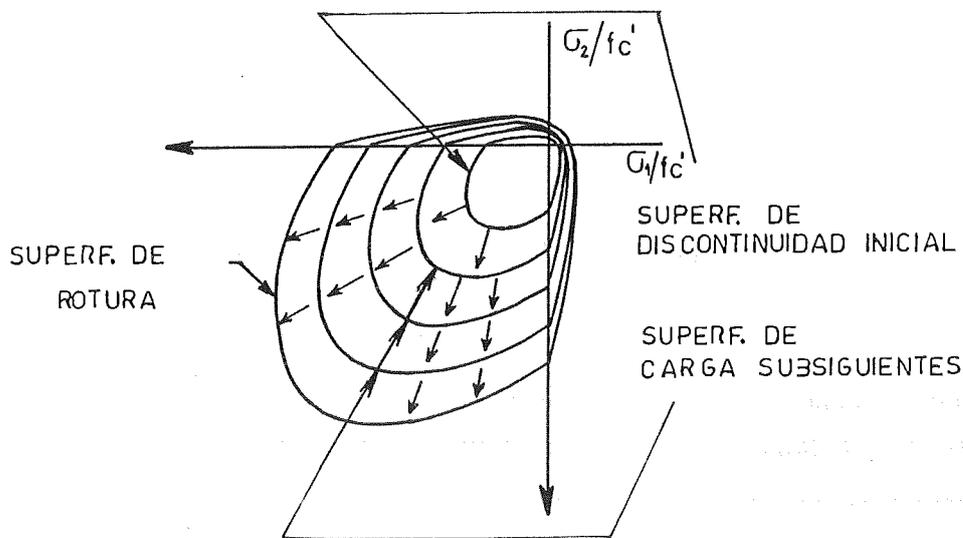


Fig.2.4 Funciones de fluencia y carga [Chen y Chen 1975]

En la zona elastoplástica se trabaja con flujo asociado $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$, por lo que el incremento temporal de la deformación plástica se puede calcular como [Chen and Chen 1975]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{A} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.11)$$

Donde el módulo de endurecimiento se define como:

$$A = \frac{dF}{\sqrt{de_{rs}^p de_{rs}^p}} \quad (2.12)$$

Siendo dF el cambio de volumen que sufre la superficie de carga cuando se pasa de un estado termodinámico a otro.

La ley constitutiva incremental para este modelo se obtiene sumando la deformación elástica a la plástica dada en ec.(2.11).

Si bien el modelo reproduce razonablemente los resultados experimentales tiene algunos problemas como son el uso de flujo asociado con lo cual no logra un adecuado control de la dilatación, la definición de una superficie de fluencia cerrada que está inmersa en el modelo y la definición de un límite brusco de rotura que no coincide con el comportamiento observado experimentalmente.

2.2.1.3. Modelos Basados en la Teoría Endocrónica de la Plasticidad

[Bazant 1978b, Chen 1980]

Recientemente se han hecho muchos esfuerzos para desarrollar un modelo continuo que no incluya la existencia de un criterio de fluencia y la definición de una regla de endurecimiento. Así se originó la teoría endocrónica de la plasticidad para la descripción del comportamiento de los metales. Valanis mostró que, para describir el comportamiento de metales empleando una pseudo-escala de tiempo, el *tiempo intrínseco* se podía derivar de una ecuación constitutiva que incluyera endurecimiento, descarga, recarga, endurecimiento cruzado y deformación bajo carga cíclica. Más tarde, Bazant y sus colaboradores extendieron la teoría para describir el comportamiento de rocas, arenas, hormigón y hormigón armado. Esta teoría está todavía en desarrollo pero tiene muchas aplicaciones prácticas potenciales.

El concepto básico de la teoría endocrónica se origina en la similitud que existe entre la curva tensión-deformación uniaxial de un material elasto-plástico y la curva de deformación diferida para materiales viscoelásticos bajo carga constante. De hecho, la teoría endocrónica puede ser considerada una generalización de la viscoelasticidad clásica que incluye, no sólo la dependencia explícita del tiempo, sino también la historia de deformación

permanente.

Para un material viscoelástico lineal :

$$\sigma_{ij} = \int_0^t C_{ijkl} (t-\tau) (\partial \epsilon_{kl} / \partial \tau) d\tau \quad (2.13)$$

Para un comportamiento que incluye deformaciones plásticas, la ecuación constitutiva debe depender de la historia de deformación. Por ello la teoría endocrónica introduce una pseudo-escala de tiempo, el tiempo intrínseco ξ definido como :

$$\xi = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{f(\zeta)} \quad (2.14)$$

en donde $f(\zeta) > 0$ y $d\zeta > 0$, $f(\zeta)$ es una función que depende de la historia y $d\zeta$ es también una medida del tiempo definida por :

$$d\zeta^2 = a_{ijkl} d\epsilon_{ij} d\epsilon_{kl} + b (dt)^2 \quad (2.15)$$

Donde a_{ijkl} es un tensor que contiene constantes del material.

Para materiales isótropos, la ec.(2.15) queda :

$$d\zeta^2 = K_1 d\epsilon_{ii} d\epsilon_{jj} + K_2 d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij} + b (dt)^2 \quad (2.16)$$

K_1 , K_2 y b son constantes del material. Las ecs. (2.15) y (2.16) son, de hecho, arbitrarias. Bazant propuso formas algo distintas para hormigón.

Usando la pseudo escala de tiempo, la ec.(2.13) queda :

$$\sigma_{ij} = \int_0^{\xi} C_{ijkl} (\xi - \xi') (\partial \epsilon_{kl} / \partial \xi') d\xi' \quad (2.17)$$

En principio, cuando se aplica la teoría endocrónica para la caracterización del comportamiento de un material, se puede elegir libremente las constantes K_1 , K_2 , b , $f(\zeta)$ y C_{ijkl} . Esta libertad en las formas

funcionales permite incluir gran variedad de comportamientos complejos en la ecuación constitutiva. Sin embargo, se ha demostrado que, en algunos casos de carga y descarga, los modelos pueden generar energía espontánea violando los principios básicos de la termodinámica. Por lo tanto, la elección de las funciones materiales tiene algunas restricciones que deben ser estudiadas y clarificadas.

2.2.1.4. Modelos de Fractura [Chen 1982, Oller 1983]

Generalmente se usa este tipo de modelos para describir el comportamiento de materiales en los que el comportamiento no lineal se debe fundamentalmente al fenómeno de fisuración. En el análisis mediante el método de elementos finitos se usan tres tipos de enfoques para modelar la fisuración : 1) modelos de *fisuras distribuidas*, 2) modelos de *fisuras discretas* y 3) modelos de *mecánica de fractura*.

La elección de uno u otro tipo de modelo depende fundamentalmente del propósito del análisis. Si sólo se desea el comportamiento general, por ejemplo carga-deformación, son más apropiados los modelos de fisuras distribuidas. Si, por el contrario, se desea conocer los cuadros de fisuración y la distribución local de fisuras, resultan más apropiados los modelos de fisuras discretas.

MODELOS DE FISURAS DISTRIBUIDAS [Rots 1989]

Estos modelos suponen que el material, cuando se fisura, se transforma en un material ortótropo o transversalmente isótropo. Esta formulación permite tener en cuenta una pérdida gradual o brusca de la resistencia en la dirección perpendicular a las fisuras además de la resistencia al corte remanente en el plano de las fisuras debida al efecto de entrelazado del agregado. Esta resistencia al corte hace que las fisuras secundarias no siempre se produzcan en la dirección perpendicular a las primeras fisuras.

En los modelos de fisuras distribuidas, las fisuras no son discretas, sino que se supone un número infinito de fisuras paralelas a través de esa parte del elemento finito. Ver Fig.2.5.

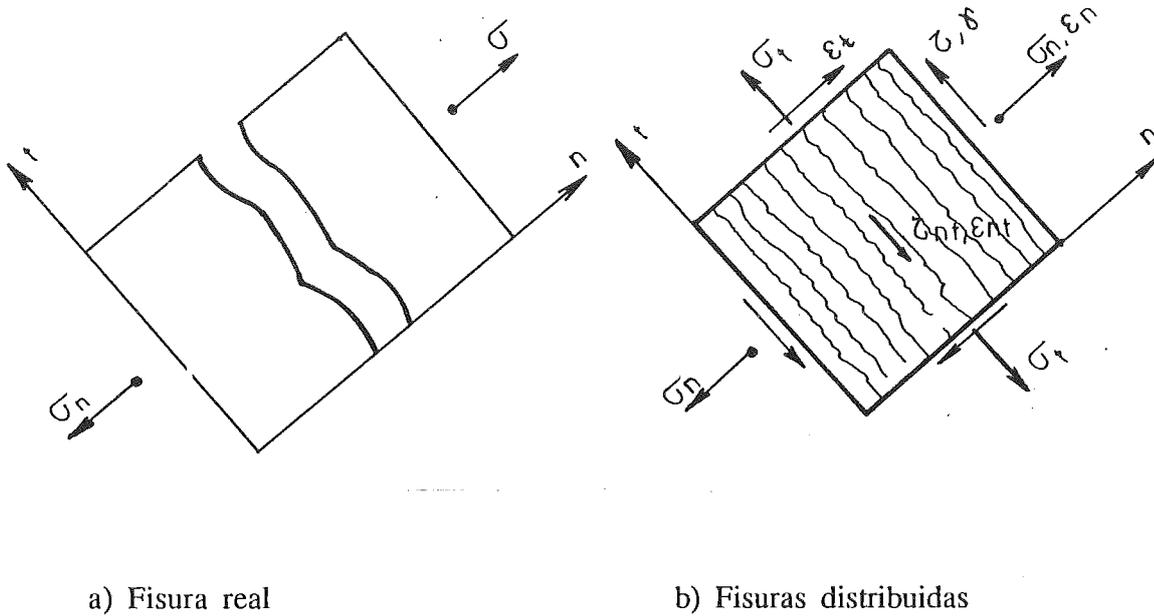


Fig.2.5 Representación de la fisura real por medio del concepto de fisuras distribuidas

Generalmente estos tipos de modelos se utilizan en combinación con modelos lineales elásticos. Se admite que el material tiene un comportamiento lineal elástico hasta que se alcanza una superficie límite definida en el espacio de tensiones y se produce la fisuración. Una vez que se produce la fisuración, se debe modificar la matriz de rigidez tangente. Por ejemplo, para un estado plano de tensiones queda expresada como [Rots 1985]:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_n \\ \Delta\sigma_t \\ \Delta\tau \end{Bmatrix} = C^t \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_n \\ \Delta\epsilon_t \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Donde los subíndices n y t indican las direcciones normales y transversales a la fisura (ver fig.2.5) y la matriz de rigidez tangente C^t está definida por:

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

y la deformación perpendicular al plano vale :

$$\Delta \epsilon_z = - (v/E) \Delta \sigma_t \quad (2.20)$$

En la nueva matriz de rigidez tangente el módulo de elasticidad E en la dirección normal a las fisuras se reduce a 0 y el módulo de corte se reduce a βG donde $0 \leq \beta \leq 1$. En cargas posteriores, las fisuras pueden cerrarse y transmitir tensiones de compresión. Normalmente se supone que las fisuras se cierran cuando la tensión a través de las mismas es de compresión.

Para calcular la matriz de rigidez de todo el sólido es necesario rotar la matriz C^t al sistema de coordenadas globales e integrarla con la de los restantes puntos.

Las relaciones tensión-deformación incrementales para el material fisurado pueden resumirse de la siguiente manera :

. Para material fisurado en más de una dirección se supone que la rigidez es nula y que las tensiones se relajan completamente.

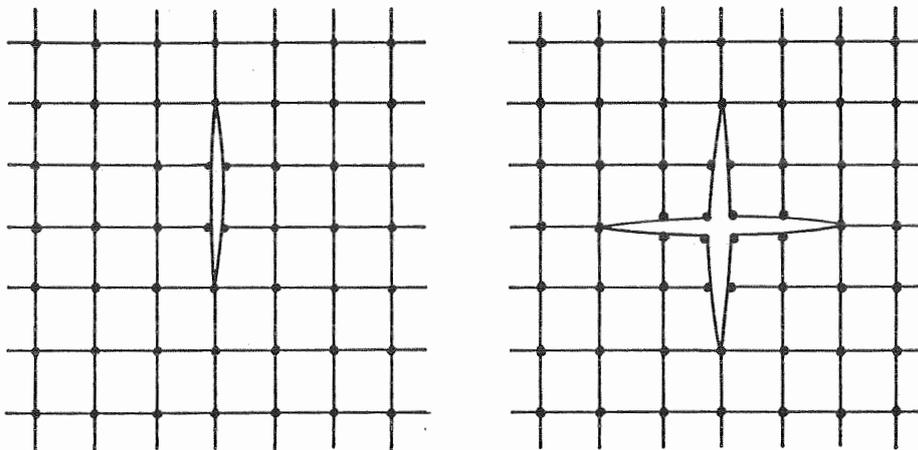
. Para material fisurado, en el que sólo se formó un conjunto de fisuras, las relaciones tensión deformación están dadas por la ec. (2.18)

. Cuando todos los conjuntos de fisuras están cerrados se supone que el material se comporta como un material lineal elástico tal cual lo era antes de fisurarse.

Un ejemplo de este tipo de modelos es el de Rots et al [1985] para hormigones.

MODELOS DE FISURAS DISCRETAS [Chen 1982]

Consisten en introducir fisuras discretas. Normalmente esto se logra desconectando los desplazamientos en los nodos de los elementos adyacentes. Ver Fig.2.6. Esto exige conocer de antemano la ubicación de las fisuras para elegir adecuadamente la malla de elementos finitos o redefinir nodos y elementos, lo cual resulta complejo y lleva mucho tiempo. La tendencia actual en elementos finitos es utilizar elementos de orden superior. Este tipo de elementos, en particular los isoparamétricos, llevan a una mala definición de las tensiones en las esquinas lo cual no condice con la fisuración en los bordes de los elementos asociada al modelo. Por otro lado, el cambio de topología destruye la banda angosta de la matriz de rigidez. Para algunos problemas particulares con una dirección dominante de fisuración y pocas fisuras el modelo anda bien.



a) Inicio del fenómeno de fisuración

b) Caso en que se formen fisuras transversales

Fig.2.6 Separación nodal en el modelo de fisuras discretas

MODELOS DE MECANICA DE FRACTURA [Oller 1988]

Si se acepta que el material es muy frágil, es decir que es sensible a las fracturas, el uso de un criterio de tensiones puede ser peligrosamente no conservativo y la teoría de mecánica de fractura puede proveer una herramienta más racional para el análisis.

Los parámetros que gobiernan la iniciación y propagación de las fisuras en la mecánica de fractura elástica lineal son los *factores de intensidad de tensiones* K_I , K_{II} y K_{III} y la *tenacidad* del material a la fractura K_{IC} . Se supone que el tamaño de la zona fracturada es despreciable frente a su longitud y de esta forma se se pueden calcular las tensiones en el fondo de una fisura a partir de los factores de intensidad de tensiones. La tenacidad del material es una propiedad del mismo que permite estudiar la estabilidad de una fisura. Si el factor de intensidad de tensiones alcanza un valor crítico, la fisura se propaga en forma inestable.

2.2.1.5. Modelos de Daño [Simo 1987, Ju 1989]

La mecánica de daño continuo local fue introducida y usada ampliamente para simular la degradación progresiva de las propiedades mecánicas de los materiales antes de la iniciación de la macrofisuración. Kachanov [1958] fue el primero en introducir el concepto de *tensión efectiva* para modelar la ruptura por fluencia lenta. Más tarde la mecánica de daño continuo fue extendida para modelar fatiga, creep, interacción creep-fatiga y daño dúctil-plástico. Recientemente fue aplicada a materiales frágiles como el hormigón y las rocas.

Las teorías de daño continuo están basadas en la termodinámica de los procesos irreversibles y la teoría de las variables internas de estado. Para modelar el daño isótropo es suficiente considerar una variable de daño escalar mientras que para considerar la anisotropía del daño se necesitan variables de daño tensoriales. Las formulaciones isótropas se usan mucho ya que son simples, eficientes y adecuadas para muchas aplicaciones prácticas.

Si se llama M_{ijkl} al tensor de cuarto orden que caracteriza el estado de

daño en un punto del sólido, entonces la *tensión efectiva* σ_{ij}^o se puede obtener, a partir de la *tensión real* σ_{kl} , como sigue (ver también [Betten 1983]):

$$\sigma_{ij}^o = M_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \tag{2.21}$$

Para el caso de *daño isótropo* el comportamiento mecánico es independiente de la orientación del daño y depende entonces solamente de una variable escalar "d".

$$\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij} / (1-d) \tag{2.22}$$

$$M_{ij} = \delta_{ij} (1-d) \tag{2.23}$$

Donde $d \in [0, d_c)$ es el *parámetro de daño* y el factor (1-d) es un factor asociado con la cantidad de daño que fue introducido por Kachanov [1958].

$d = 0$ para el estado no dañado de un punto

$d = d_c$ para la ruptura total del punto

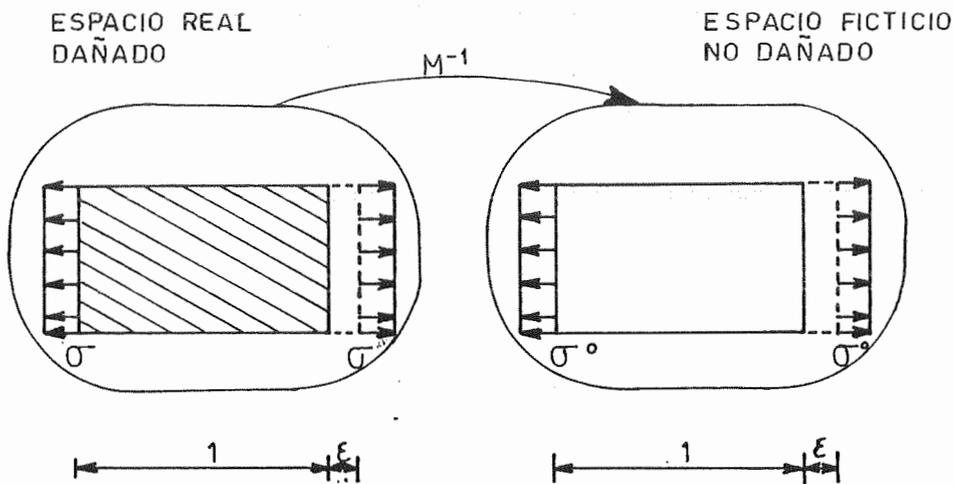


Fig.2.7 Representación esquemática de la hipótesis de deformación equivalente

"d" puede ser interpretado físicamente como la relación entre la

superficie dañada y la superficie total (nominal) en un punto material. Adicionalmente, Lemaitre [Lemaitre 1971, 1978] introdujo la siguiente hipótesis de deformación equivalente :

"La deformación asociada con un estado dañado bajo la tensión aplicada es *equivalente* a la deformación asociada con el estado no dañado bajo la *tensión efectiva*". Ver Fig.2.7.

A continuación se describen algunos modelos de degradación encontrados en la bibliografía. Algunos de ellos combinan las teorías de elasticidad no lineal y la plasticidad con el daño.

MODELOS DE FRACTURA PROGRESIVA

[Dougil 1975, Bazant y Kim 1979, Han y Chen 1986]

Estos modelos permiten tener en cuenta la degradación de rigidez que ocurre como consecuencia de la fractura progresiva del sólido.

Suponé una *superficie de fractura* definida en el espacio de deformaciones :

$$\Phi(\epsilon_{ij}, H_k) = \phi(\epsilon_{ij}) - H(W_f) = 0 , \quad (2.24)$$

que encierra todos los puntos de deformación que pueden ser alcanzados sin que la fractura progrese. Durante la fractura progresiva la superficie de fractura se expande de manera de poder tener en cuenta los estados de tensión adicionales que pueden ser alcanzados con comportamiento elástico lineal. Este modelo supone que el material fracturado es elástico, esto es, una vez quitada la carga, las dimensiones originales se recuperan totalmente. Entonces la tensión se relaciona con la deformación mediante la ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \epsilon_{kl} \quad (2.25)$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s d\epsilon_{kl} + dC_{ijkl}^s \epsilon_{kl} \quad (2.26)$$

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl}^s d\epsilon_{kl} \quad -d\sigma_{ij}^f = dC_{ijkl}^s \epsilon_{kl} \quad (2.27)$$

Ver Fig.2.8a

Por otro lado, el postulado de Il'yushin [Lubliner 1972] requiere que el trabajo realizado durante la aplicación y remoción de $d\varepsilon$ sea no negativo (ver Fig.2.8b) :

$$dW^f = (1/2) d\sigma_{ij}^f d\varepsilon_{ij} \geq 0 \tag{2.28}$$

De ahí se obtiene la regla del flujo

$$d\sigma_{ij}^f = d\mu_d \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2.29}$$

Donde $d\mu_d$ es el *factor de consistencia de degradación* que se obtiene a partir de la condición de consistencia de degradación:

$$d\Phi_{ij} = (\partial \Phi / \partial \varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij} + (\partial H / \partial W_f) dW_f = 0 \tag{2.30}$$

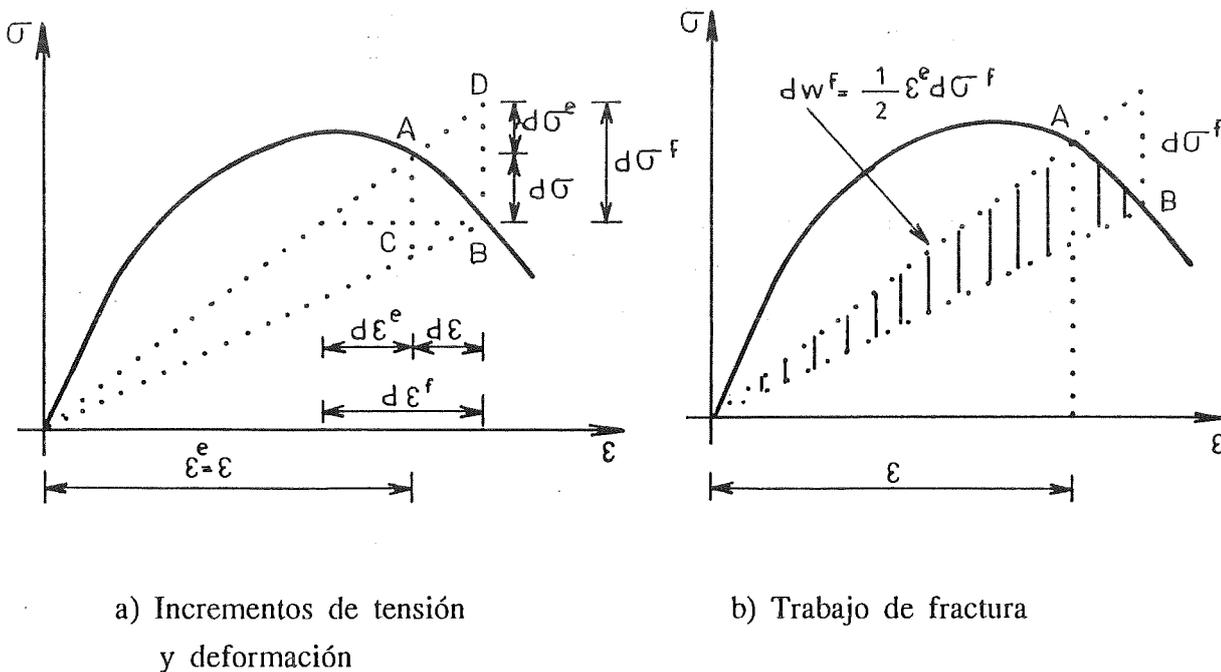


Fig.2.8 Teoría de Fractura Progresiva

Para materiales del tipo de las rocas y el hormigón se producen simultáneamente fractura y deslizamiento en la interface mortero-agregado dando lugar a degradación de rigidez y deformaciones irreversibles respectivamente. Para modelar este comportamiento, Bazant y Kim [1979] propusieron la descomposición del incremento de tensión en tres componentes :

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij}^p - d\sigma_{ij}^f \quad (2.31)$$

En este modelo los incrementos de tensión plástico $d\sigma_{ij}^p$ y de fractura $d\sigma_{ij}^f$ se determinan mediante reglas de flujo basadas en los postulados de Drucker [Hill 1967, Malvern 1969, Chen 1982, Desai 1984] e Il'yushin [Lublinter 1972] respectivamente. Su teoría define una superficie de carga en el espacio de tensiones y otra en el espacio de deformaciones, lo que da lugar a criterios de carga un poco confusos.

En un trabajo posterior, Han y Chen [Han and Chen 1986] proponen una única superficie de carga en el espacio de deformaciones.

MODELO DE ORTIZ [1985a]

Ortiz [Ortiz 1985a] presenta un modelo de daño distribuido para mortero y la aplicación de la teoría de mezclas para tener en cuenta la naturaleza compuesta del hormigón.

De la segunda ley de la termodinámica y siguiendo la deducción de Coleman, las relaciones tensión-deformación están dadas por:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \partial g / \partial \sigma_{ij} = F_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.32)$$

Donde g es el potencial de Gibbs y F_{ijkl} el tensor de flexibilidad.

Diferenciando esta relación se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\dot{\epsilon}}_{ij} = F_{ijkl} \dot{\dot{\sigma}}_{kl} + \dot{F}_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} = \dot{\dot{\epsilon}}_{ij}^e + \dot{\dot{\epsilon}}_{ij}^i \quad (2.33)$$

Donde :

$\dot{\epsilon}_{ij}^e$: incremento de deformación elástica

$\dot{\epsilon}_{ij}^i$: incremento de deformación inelástica

Los valores mismos de F_{ijkl} son tomados como una caracterización del daño. En particular, se supone una estructura aditiva para la matriz de flexibilidad :

$$F_{ijkl} = F_{ijkl}^o + F_{ijkl}^e \quad (2.34)$$

Donde :

F_{ijkl}^o : Tensor de flexibilidad no fisurada

F_{ijkl}^e : Tensor de flexibilidad adicional debida a la microfisuras activas, esto es las fisuras que soportan tensiones de tracción y que se encuentran en proceso de apertura.

$$\epsilon_{ij} = (F_{ijkl}^o + F_{ijkl}^e) \sigma_{kl} = \epsilon_{ij}^o + \epsilon_{ij}^f \quad (2.35)$$

Donde ϵ_{ij}^o es la deformación que ocurriría en ausencia de microfisuras y ϵ_{ij}^f es la deformación debida a las microfisuras.

Puede ocurrir que algunas fisuras soporten, en determinado instante, tensiones de compresión y permanezcan cerradas, no contribuyendo a F_{ijkl}^e . La condición de apertura puede ser vista como una condición unilateral que requiere que los autovalores de ϵ_{ij} sean positivos . Si se escribe:

$$\epsilon_{ij} = \sum \epsilon^{(\alpha)} d_i^{(\alpha)} d_j^{(\alpha)} \quad (2.36)$$

donde los $\epsilon^{(\alpha)}$ y los $d_i^{(\alpha)}$ son los autovalores y autovectores de ϵ_{ij} respectivamente, entonces la proyección positiva de ϵ_{ij} será :

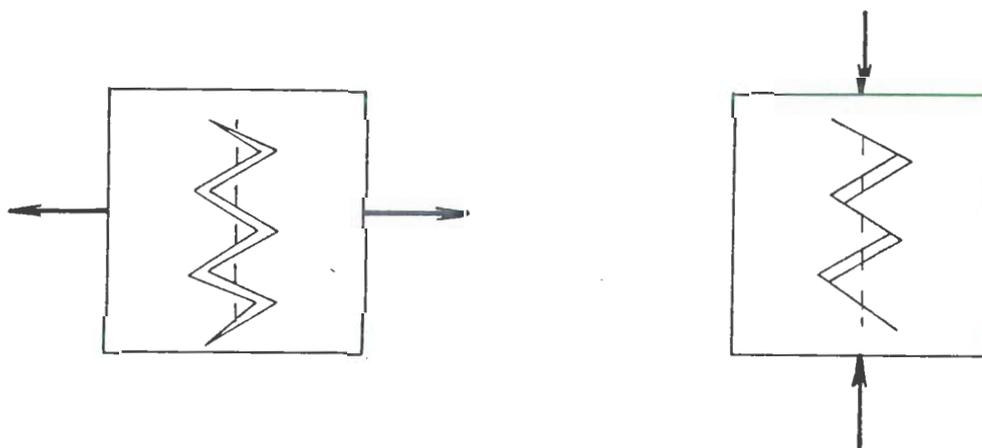
$$(\mathbb{P}^+\epsilon)_{ij} = \sum \langle \epsilon^{(\alpha)} \rangle d_i^{(\alpha)} d_j^{(\alpha)} \quad (2.37)$$

y la ecuación (2.35) puede escribirse más exactamente como :

$$\epsilon_{ij} = F_{ijkl}^o \sigma_{kl} + \mathbb{P}^+(\bar{F}_{ijkl}^c \mathbb{P}^+(\sigma_{kl})) \quad (2.38)$$

Las condiciones antes discutidas suponen una noción intuitiva de que las fisuras son perfectamente planas y sólo pueden abrirse bajo una tracción normal al plano de las mismas. Sin embargo, esta es una idealización demasiado simplista para algunos materiales como el hormigón en los que las fisuras siguen caminos bastante erráticos. Surge, en esos casos, la posibilidad de que las fisuras se abran bajo fuerzas de compresión contenidas en el plano medio de las fisuras. Este efecto se denomina normalmente *efecto cruzado*. Entonces, en resumen, las microfisuras pueden activarse de dos formas distintas :

- Modo I o modo de partición (Fig.2.9a)
- Modo II o modo de compresión (Fig.2.9b)



a) Modo I o modo de partición b) Modo II o modo de compresión

Fig.2.9 Modos de activación de microfisuras

³NOTA: El operador \mathbb{P}^+ da la proyección ortogonal del espacio de deformación en el cono positivo C^+ . Este operador asigna a cada estado de deformación ϵ_{ij} su punto más cercano $(\mathbb{P}^+\epsilon_{ij})$ en el cono positivo del espacio de deformaciones.

El efecto cruzado puede ser incorporado en la fórmula postulando una descomposición aditiva de la flexibilidad adicional.

$$\varepsilon_{ij} = F_{ijkl}^o \sigma_{kl} + P^+(\bar{F}_{ijkl}^e P^+(\sigma_{kl})) + P^-(\bar{F}_{ijkl}^e P^-(\sigma_{kl})) \quad (2.39)$$

El modelo de daño se construye guiándose en los principios de la termodinámica. Se postula una regla de daño del tipo :

$$\dot{\bar{F}}_I^e = \dot{\mu}_d \mathbf{R}_I(\sigma) \quad \dot{\bar{F}}_{II}^e = \dot{\mu}_d \mathbf{R}_{II}(\sigma) \quad (2.40)$$

Donde $\mathbf{R}_I(\sigma)$ y $\mathbf{R}_{II}(\sigma)$ son funciones de respuesta del material que indican la dirección en la que tiene lugar el daño y $\dot{\mu}_d$ es un parámetro escalar que puede ser visto como una medida acumulativa del daño.

$\dot{\mu}_d > 0 \Rightarrow$ el daño progresa

$\dot{\mu}_d = 0 \Rightarrow$ el comportamiento es elástico

Como criterio de daño se usa la siguiente función de daño:

$$\Phi(\sigma, \mu_d) = \phi(\sigma) - (1/2) \sigma_c(\mu_d^2) \leq 0 \quad (2.41)$$

Donde :

Φ : Función de daño

σ_c : Tensión crítica para la extensión del daño.

Si la última desigualdad se satisface el comportamiento es elástico ($\dot{\mu}_d=0$). Si no se satisface, el daño progresa.

La formulación propuesta define un marco fenomenológico general dentro del cual el modelo de daño queda completamente definido cuando se especifican las direcciones de daño $\mathbf{R}_I(\sigma)$ y $\mathbf{R}_{II}(\sigma)$ y la ley de ablandamiento $\sigma_c(\mu_d)$ que da la dependencia de la tensión crítica del daño acumulado.

El caso más simple consiste en tomar una regla de flujo asociada en la que :

$$\mathbf{R}_I = \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial \sigma^+ \partial \sigma^+} \quad \mathbf{R}_{II} = \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial \sigma^- \partial \sigma^-} \quad (2.42)$$

La ley de ablandamiento queda completamente determinada por el ensayo de compresión uniaxial.

MODELO DE JU [Simo y Ju 1987, Ju 1989]

En este modelo se supone que el daño del material está ligado a la historia de las variables de estado tanto elásticas como plásticas, o sea que el material presenta lo que suele denominarse *acoplamiento elastoplástico*. Justamente uno de los problemas fundamentales de la formulación de daño dúctil de Lemaitre [1985] es que desacopla la plasticidad y el proceso de daño, contradiciendo la evidencia experimental de que las variables plásticas también contribuyen a la iniciación y crecimiento de microfisuras.

Se supone una descomposición aditiva de las deformaciones en una parte elástica dañada ϵ^e y una parte plástica dañada ϵ^p :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (2.43)$$

Para considerar los mecanismos de plasticidad y daño se introduce la siguiente función de energía libre homogénea :

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha, d) = (1-d) \Psi^o(\epsilon_{ij}^e, \alpha) \quad (2.44)$$

Donde :

Ψ : Energía potencial libre

Ψ^o : Energía potencial libre del material no dañado

α : Conjunto de variables internas plásticas

d : Variable de daño

Para una teoría puramente mecánica la desigualdad de Clausius-Duhem toma la forma :

$$-\dot{\Psi} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (2.45)$$

Diferenciando y teniendo en cuenta que las descargas de daño y plástica son elásticas, se obtiene :

$$\sigma_{ij} = \partial\Psi/\partial\epsilon_{ij}^e = (1-d) \partial\Psi^o/\partial\epsilon_{ij}^e \quad (2.46)$$

y las desigualdades disipativas :

$$\Psi^o(\epsilon^e, \alpha) \dot{d} \geq 0 \quad \text{y} \quad \partial\Psi^o/\partial\epsilon_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^p - \partial\Psi^o/\partial\alpha_i \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad (2.47)$$

De la igualdad (2.47a) surge que Ψ^o es la fuerza termodinámica conjugada de la variable de daño y es por ello que se la propone para caracterizar las condiciones de carga y descarga. Si se define $\xi = \Psi^o(\epsilon^e, \alpha)$ el estado de daño queda caracterizado por el siguiente criterio de daño :

$$\Phi(\xi_t, r_t) = \xi_t - r_t \leq 0 \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.48)$$

Donde r_t es el *umbral de degradación* correspondiente al tiempo t . Según esta condición, la degradación se inicia cuando la tasa de liberación de energía supera el umbral de daño inicial r_0 . Este criterio energético está ligado a la historia de las deformaciones elásticas y plásticas.

Para describir el crecimiento de microfisuras y expansión de las superficies de daño es necesario especificar las ecuaciones de evolución de d y r . Este trabajo propone una descripción fenomenológica ya que no se dispone de una derivación micromecánica para el caso de elastoplasticidad no lineal acoplada con microfisuras interactuantes.

Para el caso de daño isótropo se define :

$$\dot{d}_t = \dot{\mu}_d H(\xi_t, d_t, S_d, a_d, c_d, \rho_d) \quad (2.49)$$

$$\dot{r}_t = \dot{\mu}_d \quad (2.50)$$

Donde :

S_d : espaciamiento entre inclusiones, fibras o agregados

a_d : tamaño del grano

c_d : tamaño de la microfisura

ρ_d : porosidad

$\dot{\mu}_d$ es el *parámetro de consistencia de daño* que define las condiciones de carga-descarga de acuerdo al criterio de Kuhn-Tucker [Simo 1987]:

$$\dot{\mu}_d \geq 0 \quad \Phi(\xi_t, r_t) \leq 0 \quad \dot{\mu}_d \Phi(\xi_t, r_t) = 0 \quad (2.51)$$

En el caso $\dot{\mu}_d > 0$ $\Phi=0$ y $\dot{\mu}_d$ se determina por la condición de consistencia de daño:

$$\dot{\Phi}(\xi_t, r_t) = \Phi(\xi_t, r_t) = 0 \Rightarrow \dot{\mu}_d = \dot{\xi} \quad (2.52)$$

de modo que r_t está dado por :

$$r_t = \max \left\{ r_o, \max_{s \in (-\infty, t)} \xi_s \right\} \quad (2.53)$$

Diferenciando la ec.(2.46) junto con la regla de daño y la condición de consistencia de daño, en ausencia de flujo plástico ($\dot{\alpha}=0$), se obtiene :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.54)$$

$$C_{ijkl}^e = (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \epsilon_{ij}^e \partial \epsilon_{kl}^e} - H \sigma_{ij}^o \sigma_{kl}^o \quad (2.55)$$

Donde C_{ijkl}^e es un tensor simétrico de rango 4 y $\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij}/(1-d)$

Una vez que se producen las microfisuras las tensiones se distribuyen en el material no dañado. De acuerdo a esto, parece lógico establecer que el flujo plástico ocurre sólo en el material no dañado por medio de cantidades efectivas. Es por ello que la caracterización de la respuesta plástica se hace mediante tensiones efectivas, de la siguiente forma:

Regla del flujo:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma^o, \alpha)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.56)$$

Regla de endurecimiento plástico:

$$\dot{\alpha}_i = \dot{\lambda} h_i(\sigma_{mn}^o, \alpha) \quad (2.57)$$

Condición de fluencia:

$$F(\sigma_{mn}^o, \alpha) \leq 0 \quad (2.58)$$

Donde $\dot{\lambda}$ es el parámetro de consistencia plástica y h_i la función vectorial de endurecimiento

Aunque se use la regla del flujo asociado en el espacio de tensiones efectivas σ_{ij}^o , el flujo plástico se aparta de la normal a la superficie de fluencia en el espacio de tensiones σ_{ij} en el caso de daño anisótropo.

Las condiciones de carga-descarga se establecen mediante las condiciones de Kuhn Tucker [Simo 1987]. Mediante la condición de consistencia plástica se llega al módulo tangente elastoplástico dañado. Este tensor es un tensor de rango 4, generalmente no simétrico, sin embargo en el caso en que el tensor $C_{ijkl}^{to} = \partial^2 \Psi^o / \partial \epsilon_{ij}^e \partial \epsilon_{kl}^e$ es constante y se usa la condición de fluencia de Von Mises, resulta simétrico.

Aunque estos modelos son isótopos pueden tener en cuenta el efecto de apertura y cerrado de microfisuras para el modo I. Si se parte de una descomposición espectral del tensor de deformaciones:

$$\epsilon_{kl} = \sum_{i=1}^3 \epsilon^i p_k^i p_l^i \quad (2.59)$$

Donde ϵ^i deformación en la dirección principal i y p_k^i un vector unitario en la dirección de la deformación principal i .

Los tensores proyección espectral regular y positiva P_{ij}^n y P_{ij}^+ respectivamente, se definen como sigue :

$$P_{ij}^n = \sum_{l=1}^3 p_k^l p_l^i \quad P_{ij}^+ = \sum_{l=1}^3 \langle \epsilon^l \rangle p_k^l p_l^i \quad (2.60)$$

y el tensor proyección positiva de cuarto orden :

$$P_{ijkl}^+ = P_{ia}^+ P_{jb}^+ P_{ka}^n P_{lb}^n \quad (2.61)$$

de modo que :

$$\epsilon_{ij}^+ = P_{ijkl}^+ \epsilon_{kl} \quad (2.62)$$

Con esta notación se puede reescribir la ec.(2.46) como sigue:

$$\sigma_{ij} = (\delta_{ik} \delta_{jl} - D_{act,ijkl}) \partial \Psi^o / \partial \epsilon_{kl}^e \quad (2.63)$$

donde $D_{act,ijkl} = d P_{ijmn}^+ P_{mnlk}^+$ es el *tensor de daño activo anisótropo* de cuarto orden. Si todas las deformaciones principales son de tracción $P_{ijkl}^+ = \delta_{ik} \delta_{jl}$ y $D_{act,ijkl} = d \delta_{ik} \delta_{jl}$, el daño es isótropo. Si todas las deformaciones principales son de compresión $P_{ijkl}^+ = 0$ y $D_{act,ijkl} = 0$, las microfisuras locales están enteramente cerradas (pasivas) bajo el estado

actual de deformación. Otras combinaciones de deformaciones dan lugar a apertura o cerrado de microfisuras.

La tasa de liberación de energía de daño $\xi = \Psi_o$ puede ser modificada de la siguiente manera para incluir daño dúctil y frágil:

$$\xi = \begin{cases} \Psi^o(\epsilon_{ij}^e, \alpha) & \text{Dúctil} \\ \Psi^o(\epsilon_{ij}^{e+}, \alpha) & \text{Fragil} \end{cases}$$

Puede verse que en este caso la definición de \mathbb{P}^+ es más precisa que en el trabajo de Ortiz [1985a]. \mathbb{P}^+ es un operador no lineal, no constante, asociado con el estado de deformación. Otra diferencia fundamental con el trabajo de Ortiz [1985a] es que en este trabajo se describe el proceso de daño mediante un tensor de daño \mathbb{D}_{act} mientras que Ortiz lo hace mediante una flexibilidad adicional.

El modelo propuesto en este trabajo puede ser extendido también al caso de daño anisótropo.

2.2.2. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ACEROS [Chen 1982]

El comportamiento de los aceros en pequeñas deformaciones es mucho más simple que el de los geomateriales. Normalmente, para las barras de acero que se usan en hormigón armado o pretensado es suficiente considerar modelos uniaxiales elástico-perfectamente plásticos o elasto-plásticos con endurecimiento según el tipo de acero de que se trate. Cuando es necesario trabajar con elementos de acero tridimensionales se puede utilizar con muy buena aproximación modelos elastoplásticos, con o sin endurecimiento. Generalmente se utiliza el criterio de fluencia de Von Mises que es adecuado para aceros y flujo asociado.

2.3. MODELO CONSTITUTIVO PROPUESTO PARA MATERIALES SIMPLES ISOTROPOS

2.3.1. INTRODUCCION

El fenómeno de fisuración en los geomateriales, en general, tiene lugar para valores bajos de tensión. A nivel microscópico, la microfisuración puede ser considerada como un fenómeno adireccional, sin embargo, a nivel macroscópico, se puede observar una dirección dominante que viene marcada por el lugar geométrico de los puntos isotrópicamente dañados [Oller 1988]. A este concepto se lo conoce como "*anisotropía inducida*" por el proceso mecánico de carga.

El uso de una formulación plástica-degradable localmente isótropa, combinada con el concepto de localización del daño, da lugar a un comportamiento globalmente anisótropo [Oller 1988]. En este sentido, el modelo propuesto considera la direccionalidad del daño macroscópico a través del lugar geométrico de los puntos isotrópicamente dañados. De esta forma se evita trabajar con formulaciones ortótropas.

En este punto se presenta el modelo constitutivo elasto-plástico-degradable denominado "*modelo de daño plástico modificado*" que difiere de su versión original, el "*modelo de daño plástico original*" [Oller 1988a, b y c, 1990a y b], en la forma en que se define la variable de endurecimiento plástico isótropo y en la ley de evolución de la cohesión, por un lado y en la forma de considerar y acoplar el daño con la plasticidad por otro.

El modelo que se presenta permite simular el comportamiento multiaxial del hormigón y de los geomateriales inicialmente isótropos, en general. Surge de la extensión y reinterpretación de las variables fundamentales de la teoría de plasticidad clásica y de la teoría de daño de Kachanov [Kachanov 1958] para poder reproducir el comportamiento de materiales friccionales.

Para mayor claridad en la presentación, se desarrolla primero la parte del modelo basada en la teoría de la plasticidad, luego la correspondiente al daño y finalmente se presenta la forma de acoplar estas dos formulaciones

2.3.2. MODELO DE DAÑO PLÁSTICO MODIFICADO - MODELO PROPUESTO

2.3.2.1. Introducción

El fenómeno de fisuración en geomateriales se produce por la pérdida de cohesión entre partículas, que ha sufrido el material por efecto de la microfisuración. Este fenómeno de microfisuración es el principal responsable del comportamiento inelástico.

Si se admite, como hipótesis, que la microfisuración se produce por deslizamiento entre las partículas de un material friccional, a costa de una pérdida de cohesión entre ellas (fenómeno isótropo), es posible relacionar el comportamiento del material con un fenómeno elastoplástico. En ese caso, se puede considerar la energía disipada como una medida del daño en el punto (daño plástico) [Oller 1988].

El modelo plástico que se presenta contempla gran parte de los aspectos más importantes que caracterizan el comportamiento inelástico del hormigón, tales como la respuesta diferenciada para cada proceso de tensión-deformación multiaxial, la combinación de fenómenos de fisuración con aplastamiento a través de un tratamiento unificado y el control de la dilatación mediante una superficie de potencial plástico adecuada. Por otro lado, el modelo presenta objetividad de la respuesta respecto al tamaño de la zona de localización del daño.

2.3.2.2. Descripción General del Modelo

A continuación se presentan las ecuaciones fundamentales que gobiernan el problema.

- *Un criterio de fluencia plástica* definido por una expresión del tipo:

$$F = F(\sigma_{ij}, c) = f(\sigma_{ij}) - c = 0 \quad (2.64)$$

Donde c es la cohesión

- Una descomposición del tensor de deformación total ϵ_{ij} en una parte elástica ϵ_{ij}^e y en una parte plástica ϵ_{ij}^p :

$$\epsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (2.65)$$

Donde C_{ijkl}^{-1} es la inversa del tensor de rigidez elástica secante

- Una regla de flujo plástica no asociada que proporciona la evolución de la deformación plástica mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} H_{\epsilon_{ij}^p}(\sigma_{kl}, \alpha) = \dot{\lambda} \left[\frac{\partial G(\sigma_{kl}, c)}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (2.66)$$

Donde:

$\dot{\lambda}$: Parámetro de consistencia plástica

$H_{\epsilon_{ij}^p}$: Función de estado tensorial que depende de la función de potencial plástico

α : Vector de variables internas

$G(\sigma_{kl}, c)$: Función de potencial plástico

- Una función de evolución de la variable de daño plástico, que reemplaza la variable de endurecimiento plástico isotrópico de la teoría de plasticidad clásica:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda} H_{\kappa}(\sigma_{kl}, \alpha) = \dot{\lambda} \left[h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{kl}, c)}{\partial \sigma_{ij}} \right] = h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.67)$$

Donde:

κ^p : Variable de daño plástico

H_{κ} : Función de estado escalar que depende del tensor $h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c)$ y

del flujo.

- Una ecuación de evolución de la cohesión, definida como :

$$\dot{c} = \dot{\lambda} H_c(\sigma, \alpha) = \lambda \left[h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{kl}, c)}{\partial \sigma_{ij}} \right]$$

$$\dot{c} = h_c(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p \tag{2.68}$$

Donde H_c es una función de estado escalar que depende de la función $h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c)$, del tensor $h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c)$ y del flujo plástico.

Finalmente, de las 5 ecuaciones (2.64 a 2.68) anteriores y de la condición de consistencia plástica de Prager ($\dot{F} = 0$), se obtiene la relación constitutiva incremental tangente para problemas sin degradación de rigidez :

$$\sigma_{ij} = C_{ep,ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \tag{2.69}$$

Donde $C_{ep,ijkl}^t$ es el tensor de rigidez elastoplástico tangente, que resulta:

$$C_{ep,ijkl}^t = C_{ijkl}^s - \frac{C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnl}^s}{\underbrace{h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{kl}, c)}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}}}_A$$

$$\tag{2.70}$$

Donde A es el *parámetro de endurecimiento plástico*

2.3.2.3. Variables Fundamentales del Modelo de Daño Plástico Modificado

VARIABLE DE DAÑO PLÁSTICO

Los materiales cohesivo-friccionales como el hormigón presentan de deformaciones últimas muy distintas según el tipo de proceso mecánico a que son sometidos. Por ejemplo, para el hormigón la deformación última bajo un estado de compresión uniaxial es 10 a 15 veces mayor que bajo un estado de tracción uniaxial [Chen 1982]. Además estos materiales disipan distinta energía según el proceso de carga a que son sometidos. A modo de ejemplo, el hormigón disipa entre 100 y 150 veces más energía en un proceso de compresión uniaxial que en un proceso de tracción uniaxial.

De lo expuesto, se deduce que para tratar este tipo de materiales mediante la teoría de la plasticidad es necesario formular una nueva variable de endurecimiento plástico isótropo que esté relacionada con la energía disipada y con el tipo de carga. Dicha variable se denomina *variable de daño plástico* en el presente modelo

Definición de la Variable de Daño Plástico para Estados Uniaxiales de Tensión

A partir de ensayos de tracción y compresión uniaxial se pueden definir diagramas σ - ϵ^p que encierran bajo los mismos las áreas g_T^p y g_C^p respectivamente. Ver fig.2.10.

$$\left\{ \begin{array}{l} g_T^p = \int_{\epsilon=0}^{\infty} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p \\ g_C^p = \int_{\epsilon=0}^{\infty} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p \end{array} \right. \quad (2.71)$$

Donde :

σ_T y σ_C : Tensiones uniaxiales de tracción y compresión respectivamente.

ϵ_T^p y ϵ_C^p : Deformaciones plásticas uniaxiales de tracción y compresión respectivamente.

g_T^p y g_C^p : Energías por unidad de volumen máximas disipadas en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente.

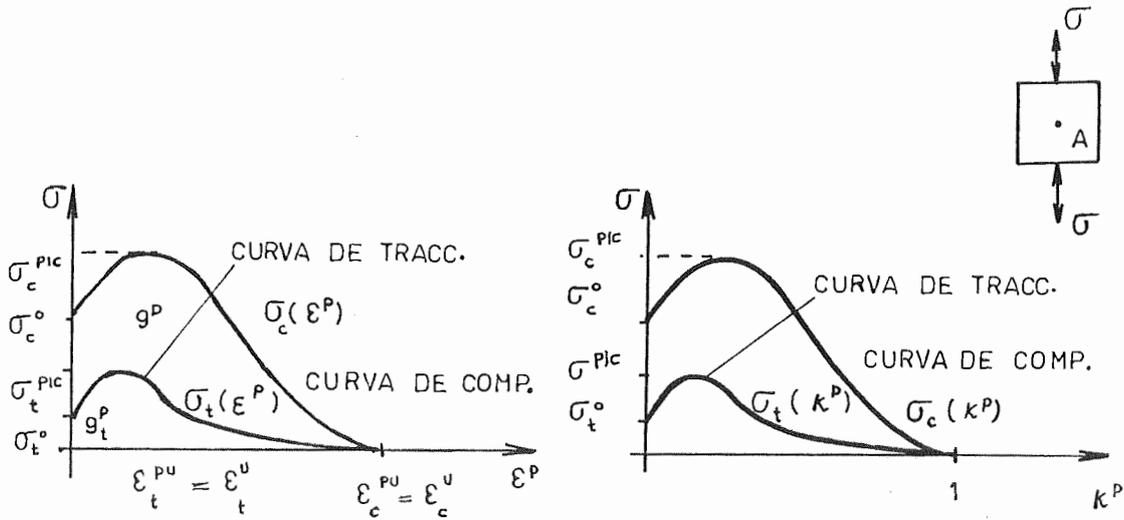


Fig.2.10 Curvas de resistencia para procesos de carga-descarga uniaxial

A partir de estas energías específicas se puede definir la variable de daño para procesos cuasi-estáticos de tracción y compresión uniaxial como sigue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \quad \text{para tracción uniaxial} \\ \kappa^p = \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^t \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad \text{para compresión uniaxial} \end{array} \right. \quad (2.72)$$

De estas dos ecuaciones puede observarse que la variable de daño plástico κ^p es el valor relativo entre la energía disipada en el instante t y la máxima a disipar al final del proceso de carga, tomando siempre valores entre 0 y 1 ($0 \leq \kappa^p \leq 1$). Resulta así una variable objetiva respecto a los dos procesos desarrollados ya que en ambos casos $\kappa^p=0$ cuando no hay daño

y $\kappa^p=1$ cuando el daño es total aunque las energías disipadas sean distintas.

Como κ^p es una variable independiente, se pueden transformar las funciones $\sigma-\epsilon^p$ en otras del tipo $\sigma-\kappa^p$, ver Fig.2.10. Esto es:

$$\begin{cases} \sigma_T = \sigma_T(\kappa^p) \\ \sigma_C = \sigma_c(\kappa^p) \end{cases} \quad (2.73)$$

Definición de la Variable de Daño Plástico para Estados de Tensión Multiaxial

Para procesos de carga genéricos, la variable de daño plástico puede definirse mediante una ecuación de la forma :

$$\dot{\kappa}^p = h_{\kappa_{ij}}(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.74)$$

donde $h_{\kappa_{ij}}(\sigma, \kappa^p, c)$ es un tensor que, en el caso más simple podría ser igual al tensor de tensiones.

Para el caso multiaxial la definición de la variable de daño plástico debe incluir los casos uniaxiales como casos particulares y además debe cumplir con las condiciones :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet 0 \leq \kappa^p \leq 1 \\ \bullet \kappa^p = 0 \text{ para } t=0 \text{ (no hay daño)} \\ \bullet \int_{t=0}^{\infty} \dot{\kappa}^p dt = 1 \text{ (daño total) (para la mayoría de los casos de carga)} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

En esta tesis se propone la siguiente definición que representa una

contribución original ya que difiere de la correspondiente al *modelo de daño plástico* original.

$$\dot{\kappa}^P = \left\{ r(\sigma) \frac{1}{g_T^{P*}} + [1-r(\sigma)] \frac{1}{g_C^{P*}} \right\} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \quad (2.76)$$

Donde:

$$r(\sigma) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (2.77)$$

$$\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2} \left(x \pm |x| \right) \quad \text{Función rampa} \quad (2.78)$$

Donde σ_i son las tensiones principales y g_T^{P*} y g_C^{P*} son las energías específicas a tracción y compresión respectivamente, ponderadas de acuerdo con el estado tensional del punto:

$$g_T^{P*} = g_T^P \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^0}{f(\sigma) \chi} \quad g_C^{P*} = g_C^P \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f(\sigma) \chi} \quad (2.79)$$

$f(\sigma)$: función de fluencia

χ : Factor de proporcionalidad entre cohesión y tensión para un proceso de compresión uniaxial:

$$c_C(\kappa^P) = \frac{1}{\chi} \sigma_C(\kappa^P) \quad c_T(\kappa^P) = \frac{R^0}{\chi} \sigma_T(\kappa^P) \quad (2.80)$$

R^0 : Relación inicial que hay entre la resistencia uniaxial a compresión y tracción.

$$R^0 = \frac{\sigma_C^0}{\sigma_T^0} \quad (2.81)$$

$c_c(\kappa^p)$ y $c_t(\kappa^p)$ representan la evolución de la cohesión durante un ensayo experimental uniaxial de compresión y tracción simple respectivamente.

COHESION

La ecuación de evolución de la cohesión debe ser tal que, para un proceso cualquiera se cumpla que:

$$\begin{cases} c = c^o & \text{para } \kappa^p = 0 \\ c = 0 & \text{para } \kappa^p = 1 \end{cases} \quad (2.82)$$

En forma general se puede definir la cohesión a través de la ecuación de evolución:

$$\dot{c} = h_c(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p \quad (2.83)$$

Esta ecuación indica que la cohesión es una variable interna dependiente del proceso plástico. $h_c(\sigma, \kappa^p, c)$ es una función escalar del estado actual que define la pendiente de la curva $c - \kappa^p$, de tal manera que esta curva estará comprendida entre dos funciones explícitas extremas, que resultan de ensayos uniaxiales a tracción y compresión simple respectivamente. Ver fig.2.11.

En esta tesis se propone una forma original de definir la cohesión, como función explícita de la variable de daño plástico pero dependiente del estado termodinámico en cada instante:

$$h_c(\sigma, \kappa^p, c) = r(\sigma) c_t(\kappa^p) + [1-r(\sigma)] c_c(\kappa^p) \quad (2.84)$$

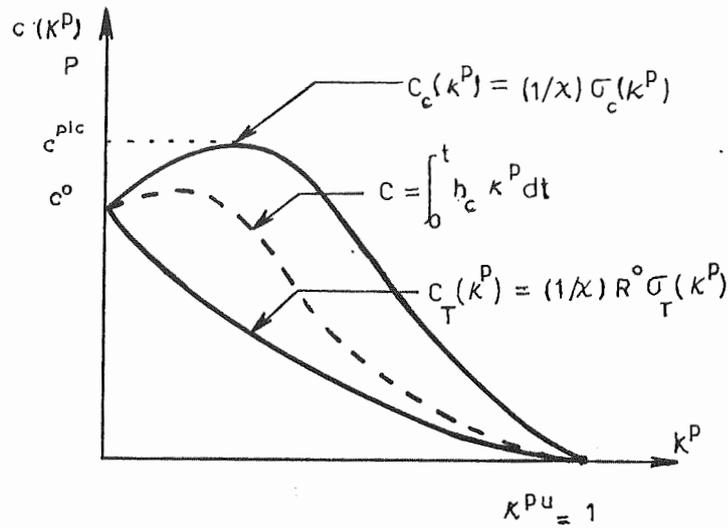


Fig.2.11 Función de Cohesión

ANGULO DE ROZAMIENTO INTERNO

A medida que se aumenta la carga de un sólido cohesivo-friccional, en su interior se produce un deslizamiento entre sus partículas que conduce a una pérdida de cohesión intergranular. Esta pérdida de cohesión implica una ganancia de fricción interna, provocando un comportamiento más dúctil a compresión, debido al incremento de la fuerza de rozamiento entre partículas, y una disminución de la resistencia a tracción por la disminución de las fuerzas cohesivas.

Si bien el modelo de daño plástico permite formular a la fricción interna como una variable interna del problema, resultados experimentales [Borst and Vermeer 1984] han demostrado que, para el hormigón, la evolución del ángulo de fricción interna puede definirse como una función directa del daño plástico κ^P . Basándose en los resultados experimentales se define entonces la fricción interna a través de la siguiente función explícita :

$$\text{sen}\phi = \begin{cases} 2 \frac{\sqrt{\kappa^P \kappa^L}}{\kappa^P + \kappa^L} & \forall \kappa^P \leq \kappa^L \\ \text{sen}\phi^{\text{max}} & \forall \kappa^P > \kappa^L \end{cases} \quad (2.85)$$

Donde κ^L es el límite de daño para el cual la cohesión se anula y el rozamiento interno se mantiene constante e igual a su valor máximo, por lo tanto $\kappa^L = 1$. Ver fig. 2.12.

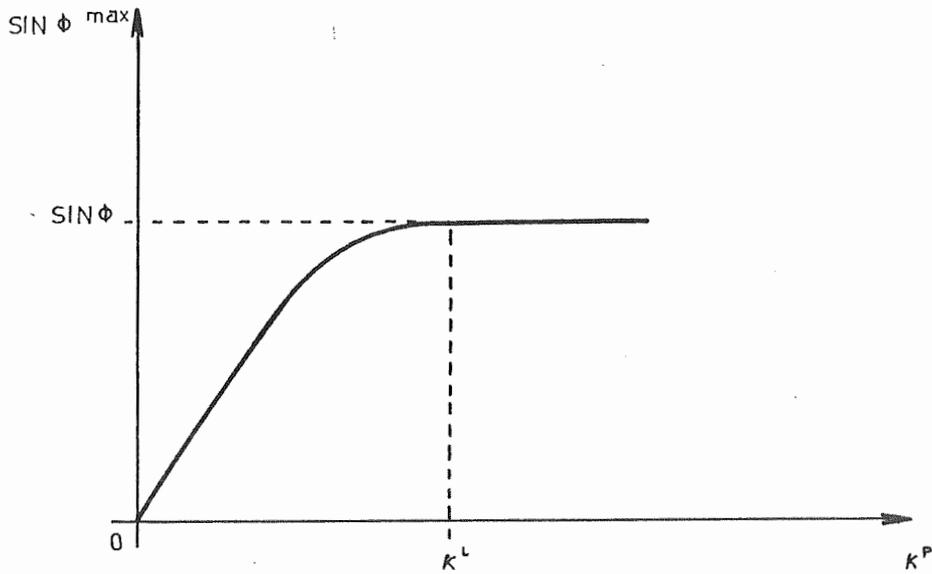


Fig. 2.12 Evolución del ángulo de fricción interna en función de la variable de daño plástico

En materiales frágiles con alta cohesión inicial, como el hormigón, es posible trabajar con fricción interna constante e igual a su valor máximo durante todo el proceso plástico, sin que esto introduzca errores considerables, al menos en la solución de problemas biaxiales.

DILATANCIA INTERNA

Debido a que los sólidos friccionales presentan una dilatancia interna variable durante el proceso elasto-plástico, es necesario formular una ley de evolución para dicha variable. Al igual que en el caso de la fricción interna, es suficiente definir la dilatancia como una función explícita de la variable de daño plástico. Esto es :

$$\psi = \psi(\kappa^P) \tag{2.86}$$

El modelo de daño plástico utiliza una modificación de la ecuación de Rowe [Rowe 1972] propuesta por De Borst y Vermeer [De Borst 1984] que se adapta muy bien al comportamiento de los hormigones , ver Fig. 2.13:

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & \forall \phi(\kappa^p) \leq \phi_{cv} \\ \arcsen \left[\frac{\text{sen}\phi(\kappa^p) - \text{sen}\phi_{cv}}{1 - \text{sen}\phi(\kappa^p)\text{sen}\phi_{cv}} \right] & \forall \phi(\kappa^p) > \phi_{cv} \end{cases} \quad (2.87)$$

Donde:

ϕ_{cv} : Angulo de rozamiento interno a volumen constante

$$\text{sen}\phi_{cv} = \left[\frac{\text{sen}\phi^{max} - \text{sen}\psi^{max}}{1 - \text{sen}\phi^{max}\text{sen}\psi^{max}} \right] \quad (2.88)$$

Para hormigones : $\phi^{max} \cong 35^\circ$
 $\psi^{max} \cong 13^\circ$

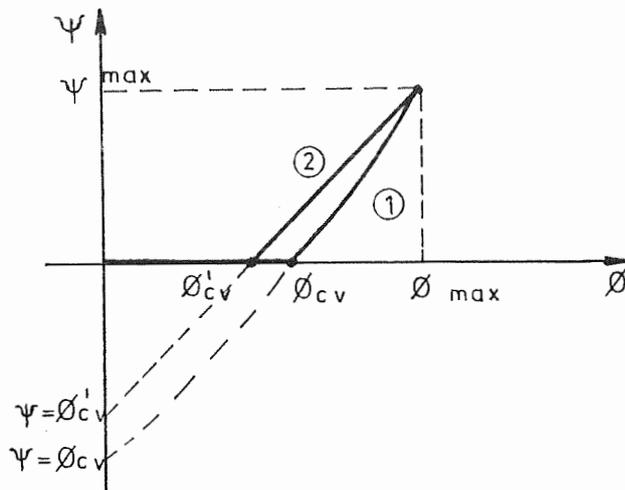


Fig. 2.13 Evolución del ángulo de dilatación en función del ángulo de fricción interna

Una alternativa más sencilla que la definida en la ecuación (2.88) es establecer la siguiente relación lineal entre ϕ y ψ (ver fig.2.13):

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & \forall \phi(\kappa^p) \leq \phi'_{cv} \\ \phi(\kappa^p) - \phi'_{cv} & \forall \phi(\kappa^p) > \phi'_{cv} \end{cases} \quad (2.89)$$

Donde :

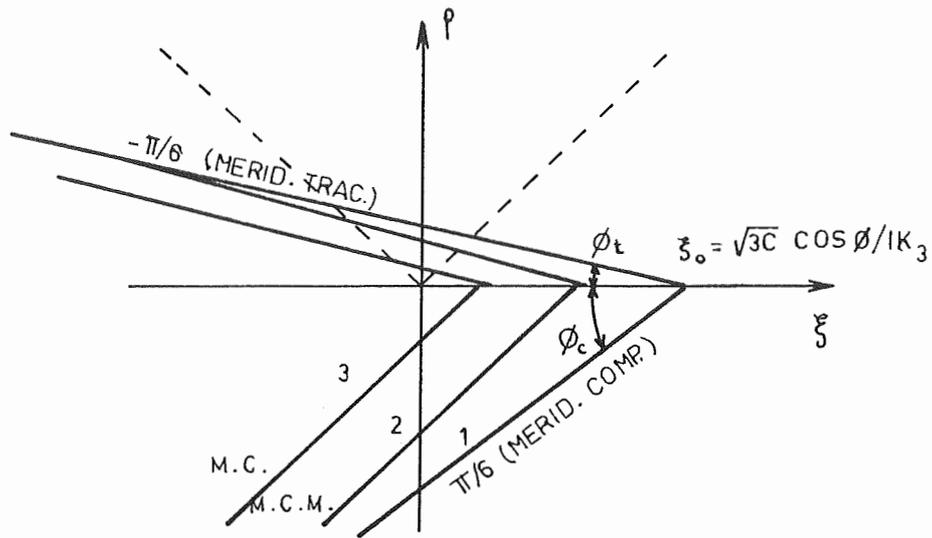
$$\phi'_{cv} = \phi^{\max} - \psi^{\max} \quad (2.90)$$

Las ecuaciones (2.88) y (2.89) dan resultados similares dentro del período que interesa : $\phi_{cv} \leq \phi \leq \phi^{\max}$.

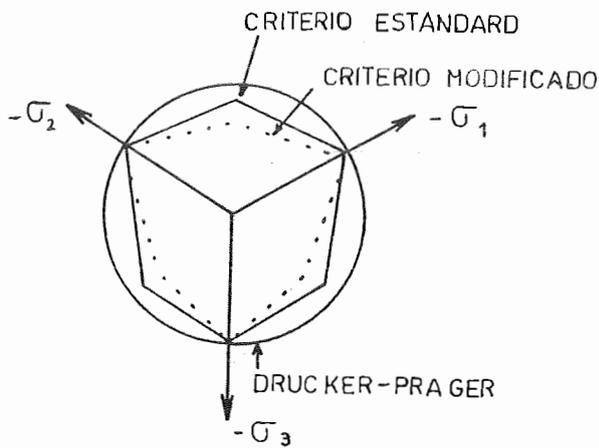
2.3.2.4. Criterio de Fluencia Plástico

CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO

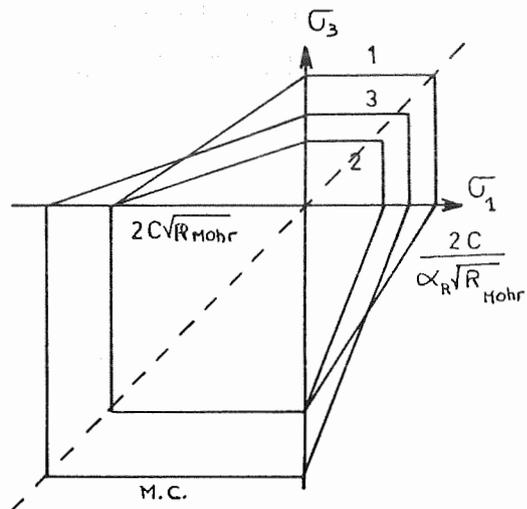
La utilización del criterio de fluencia clásico de Mohr-Coulomb para materiales del tipo del hormigón, presenta el inconveniente de no cumplir con la relación entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción $R^o = |\sigma_C^o / \sigma_T^o|$ para ángulos de rozamiento interno comprendidos entre los valores obtenidos experimentalmente para el hormigón : $30^\circ \leq \phi \leq 35^\circ$. Una alternativa es aumentar la fricción interna hasta obtener la relación de resistencias uniaxiales deseadas. Sin embargo, esto hace que el criterio de fluencia no pueda ser usado como criterio de potencial plástico porque presenta una excesiva dilatancia, obligando entonces al uso de plasticidad no asociada. Otra solución es limitar la resistencia del hormigón en la zona de tracción total mediante una barrera tensional del tipo del criterio de Rankine. No obstante, esta combinación de criterios presenta algunos inconvenientes [Oller 1988].



a) Según los meridianos de tracción y compresión máxima



b) Según plano octaédrico



c) Según plano $\sigma_2 = 0$

Fig.2.14 Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado [Oller 1988]

Con el fin de poder trabajar con plasticidad asociada, Oller [Oller 1988] propone una modificación al criterio clásico de Mohr Coulomb (ver Fig. 2.14) que consiste en afectar a la tensión principal mayor σ_1 de un coeficiente de ajuste α_R para lograr la relación entre resistencias uniaxiales deseada sin modificar el ángulo de fricción interna. La función de fluencia resulta entonces :

$$F(\sigma, c, \phi, \alpha_R) = \left(\frac{\alpha_R \sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\alpha_R \sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \text{sen}\phi - c \text{cos}\phi \quad (2.90)$$

Donde:

$$\sigma_1 = \sigma^{\max}$$

$$\sigma_3 = \sigma^{\min}$$

α_R : Parámetro de ajuste de la tensión principal mayor que puede obtenerse trabajando algebraicamente y resulta :

$$\alpha_R = R^o / R_{\text{Mohr}} \quad R_{\text{Mohr}} = \tan^2\left(\pi/4 + \phi/2\right) \quad (2.91)$$

CRITERIO DE FLUENCIA LUBLINER-OLLER

[Oller 1988a, b y c, 1990a y b]

La modificación del criterio de Mohr-Coulomb presentada en el apartado anterior sólo soluciona un problema puntual del mismo sin mejorar la forma de la superficie de fluencia.

La función de fluencia que se presenta a continuación intenta reproducir el comportamiento del hormigón dentro del dominio de trabajo al que normalmente se somete el mismo y tiene la siguiente forma :

$$F=F(\sigma, c) = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma_{\max} \rangle - \gamma \langle -\sigma_{\max} \rangle \right] - c = 0 \quad (2.92)$$

Donde:

α , β y γ son constantes adimensionales que determinan la forma de la superficie de fluencia

J_2 : Segundo invariante del tensor desviador de tensiones

I_1 : Primer invariante del tensor de tensiones

El criterio de fluencia se ha representado en la fig.2.15.

El parámetro α es el encargado de ajustar la función de discontinuidad inicial en la zona de compresión, regulando la relación entre la resistencia a compresión uniaxial σ_c y la resistencia equibiaxial σ_{cb} , ver Fig. 2.15a. Reemplazando en la función de fluencia, resulta :

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_c} - 1}{2 \frac{\sigma_{cb}}{\sigma_c} - 1} \quad (2.93)$$

Donde σ_{cb} representa la resistencia a compresión equibiaxial para el límite de discontinuidad inicial.

Según los resultados de estudios experimentales, para el hormigón, σ_{cb}/σ_c oscila entre 1,10 y 1,16, para lo cual se obtienen valores de α comprendidos entre 0.08 y 0.1212.

El parámetro β es el encargado de regular la relación entre resistencias uniaxiales de compresión y de tracción cuando se alcanza el primer límite de discontinuidad y resulta :

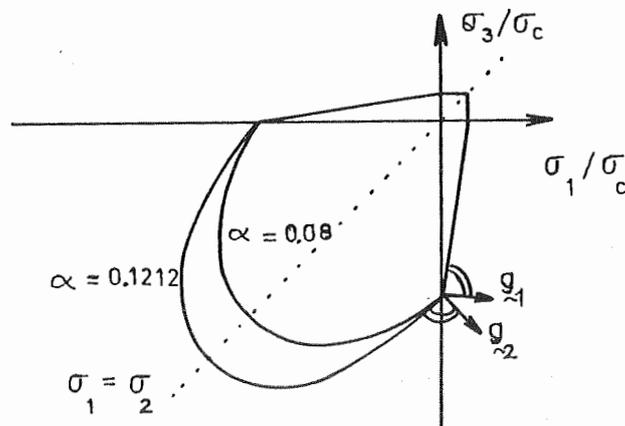
$$\beta = (1-\alpha)R^o - (1+\alpha) \quad (2.94)$$

Según resultados experimentales del comportamiento del hormigón R^o vale en el orden de 10, lo cual, junto con $\alpha=0,1212$, conduce a valores de β del orden de 7,66.

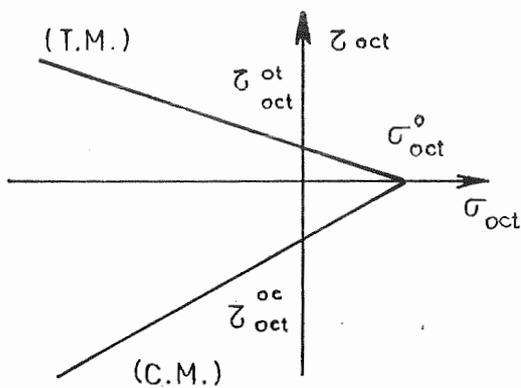
El parámetro γ es el encargado de regular la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión r_{oct}^{max} , ver fig.2.15c.

$$\gamma = \frac{3(1 - r_{\text{oct}}^{\text{max}})}{2r_{\text{oct}}^{\text{max}} - 1} \tag{2.95}$$

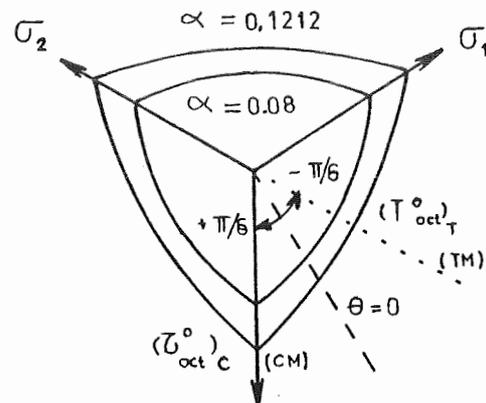
Según ensayos experimentales realizados en el hormigón $r_{\text{oct}}^{\text{max}}$ es prácticamente constante e igual a 0.65, para lo cual se obtiene $\gamma=3.5$.



a) Según el plano $\sigma_2 = 0$



b) Según los meridianos de tracción y compresión máximas



c) Según un plano octaédrico

Fig.2.15 Criterio de Fluencia de Lubliner-Oller [Oller 1988]

2.3.2.5. Criterio de Potencial Plástico

La definición de la función de potencial plástico establece indirectamente la magnitud de la dilatación que se producirá en el sólido ideal que se modeliza. En el modelo de daño plástico se utiliza la superficie de fluencia de Mohr Coulomb modificada con un ángulo de fricción interna igual al de dilatación.

En la fig.2.16 se muestra el error cometido en el tratamiento de los hormigones al considerar un flujo asociado a la superficie de fluencia de Lubliner-Oller [Oller 1988] y la ventaja de usar como superficie de potencial la superficie de fluencia de Mohr Coulomb modificada.

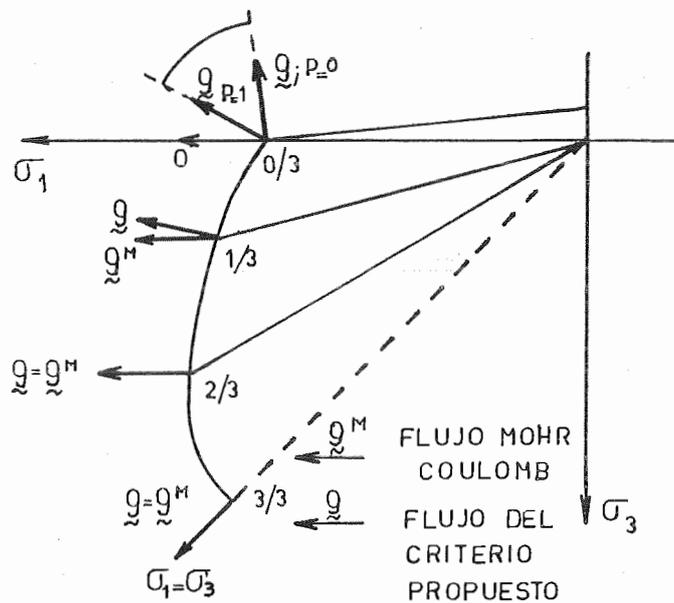


Fig.2.16 Flujo plástico producido por el criterio de Lubliner-Oller [Oller 1988] y por el criterio de Mohr-Coulomb

2.3.2.6. Ejemplos de aplicación

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación del modelo de daño plástico modificado descripto, sin degradación de rigidez.

ENSAYOS DE KUPFER

Descripción general de los ensayos

Como verificación del modelo constitutivo propuesto se adoptaron los ensayos realizados por Kupfer, Hilsdorf y Rüsck [Kupfer 1969] debido a la amplia documentación existente y su característica de ensayo modelo ya que muchos investigadores lo han utilizado para verificar otros ensayos experimentales y numéricos.

Este ensayo consiste en estudiar el comportamiento de una probeta de hormigón de 20,0x20,0x5,0 cm (ver fig. 2.17) sometida a diversos estados de carga, de los cuales se han verificado sólo los siguientes casos :

- Compresión uniaxial ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=-1/0$ y $\sigma_{33}=0$)
- Compresión biaxial o compresión doble simétrica ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=-1/-1$ y $\sigma_{33}=0$)
- Compresión biaxial asimétrica ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=-1/-0,52$ y $\sigma_{33}=0$)
- Tracción simple ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=1/0$ y $\sigma_{33}=0$)
- Tracción - Compresión ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=0.052/-1$ y $\sigma_{33}=0$)

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para realizar el ensayo numérico se muestran en la Tabla 2.1. La mayoría de los datos del modelo de material utilizado surgieron de un análisis simple de las curvas de tracción y compresión uniaxial obtenidas experimentalmente. La relación de resistencias $\sigma_{cb}/\sigma_c=1,16$ se obtiene del ensayo de compresión biaxial y el parámetro γ se toma igual al valor promedio para hormigones $\gamma \approx 3,5$.

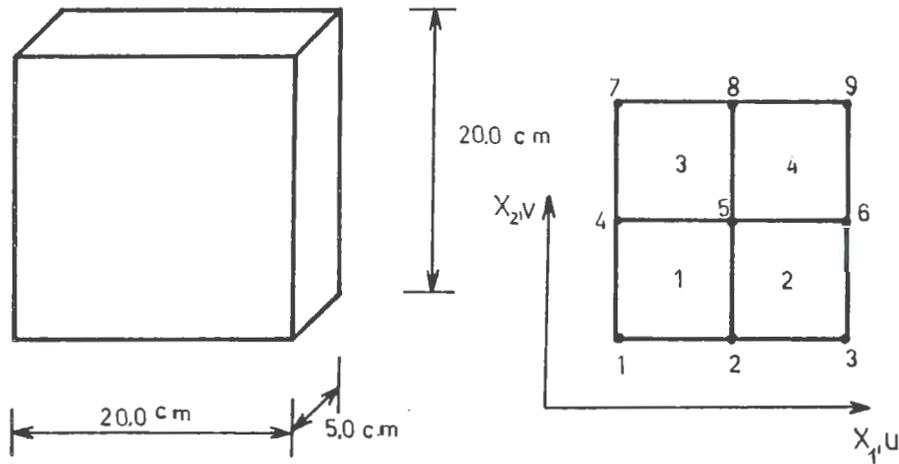


Fig. 2.17 Ensayos de compresión y/o tracción biaxial de Küpfer

TABLA 2.1. Características mecánicas del hormigón

$E_o = 39500 \text{ MPa}$	• Criterio de Fluencia:
$\nu_o = 0,24$	<i>Lubliner-Oller</i>
$\sigma_c^o = -22,9 \text{ MPa}$	
$\sigma_c^{\text{pic}} = -32,8 \text{ MPa}$	• Criterio de potencial:
$\sigma_T^o = 2,29 \text{ MPa}$	• <i>Lubliner Oller</i> (flujo asociado)
$\alpha = 0,12$	• <i>Mohr-Coulomb</i> ($\phi = \psi = 15^\circ$)
$\gamma = 3,0$	
$p = 1,0$	• Sin degradación de rigidez
$G^f = 0,16 \text{ N/mm}$	
$G^c = 16,0 \text{ N/mm}$	$(k^p)^{\text{pic}} = 0,38$

El dominio se discretizó con cuatro elementos finitos planos de 4 nodos (ver fig.2.17). Se utilizó en cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre de 2x2 puntos. También se hicieron pruebas con un solo elemento de 4 nodos y 2x2 puntos de integración obteniéndose los mismos resultados.

Los tipos de carga aplicados, se muestran en las figuras 2.18 a 2.23 junto con las curvas de respuesta para cada caso particular.

Para encontrar la respuesta en la zona de ablandamiento se recurrió al método de control de desplazamientos. En aquellos casos en los que no se conocía de antemano la relación de desplazamientos necesarios para mantener constante la relación de tensiones aplicada hubo que usar métodos de control de respuesta tipo arc-length.

Como el uso de plasticidad no asociada conduce a una matriz de rigidez tangente no simétrica se prefirió trabajar con el método de Newton Raphson modificado con rigidez inicial K_0 .

El método de Euler Backward (ver Apéndice F) para la integración de la ecuación constitutiva permitió resolver en forma directa el problema de tensión plana mediante un programa de elementos finitos en 2D.

Análisis de los Resultados

En general, las curvas de respuesta se aproximan bastante a las obtenidas experimentalmente, lográndose mejor ajuste que el obtenido numéricamente por otros investigadores y un ajuste similar al obtenido por Oller [Oller 1988] con el modelo de daño plástico pero con otro algoritmo de integración de la ecuación constitutiva, con la ventaja de que se lograron ajustar las curvas de respuesta en las tres direcciones.

Compresión Uniaxial

Como se observa en la fig. 2.18, se ha logrado una buena coincidencia de las curvas de respuesta σ_{22} - ϵ_{22} , σ_{22} - ϵ_{11} y σ_2 - ϵ_{33} . Estas dos últimas curvas se ajustan mucho mejor con plasticidad no asociada (criterio de potencial Mohr-Coulomb con $\psi=15^\circ$) que con plasticidad asociada, ya que en este último caso se obtiene una excesiva dilatancia.

El modelo predijo un estado de deformación y fisuración uniforme en todos los puntos de Gauss con fisuras verticales, normales a la

dirección de máxima deformación plástica. La energía total disipada por el sólido resultó igual al producto de $G^c A^f$, confirmándose el cumplimiento estricto de la segunda ley de la termodinámica.

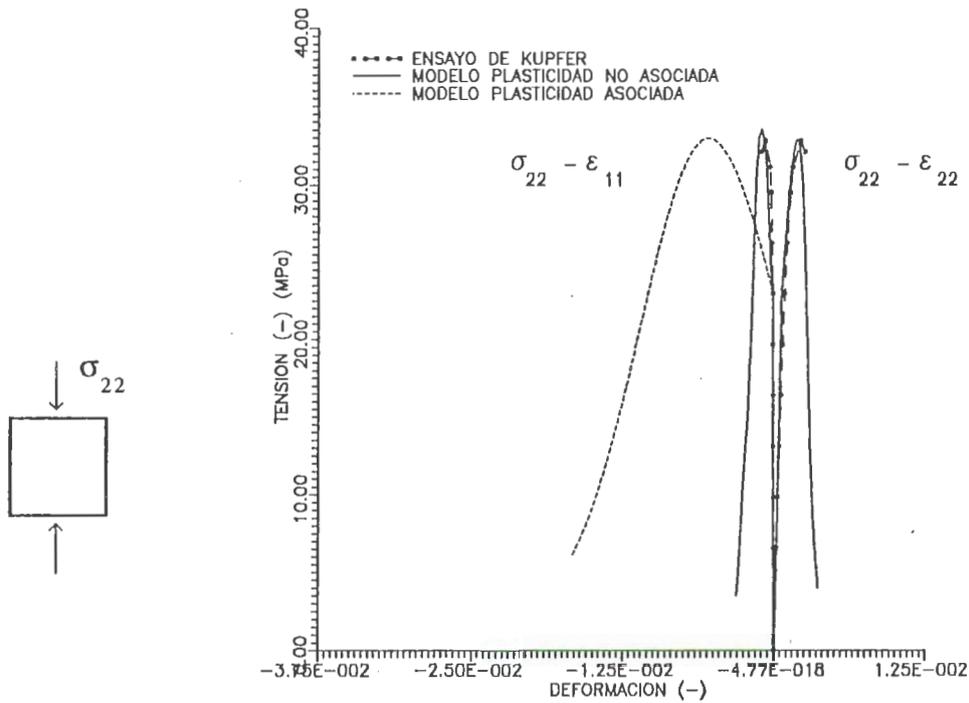


Fig.2.18 Ensayo de Compresión Uniaxial

Compresión Biaxial Simétrica

En la Fig.2.19 se observa una buena aproximación entre los resultados numéricos y los experimentales, salvo una pequeña diferencia a partir del pico de tensiones, lográndose mejor ajuste con plasticidad no asociada.

En este caso no se detectó, con el programa, fisuración en el plano del ensayo.

Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo de integración independiente del camino en este caso.

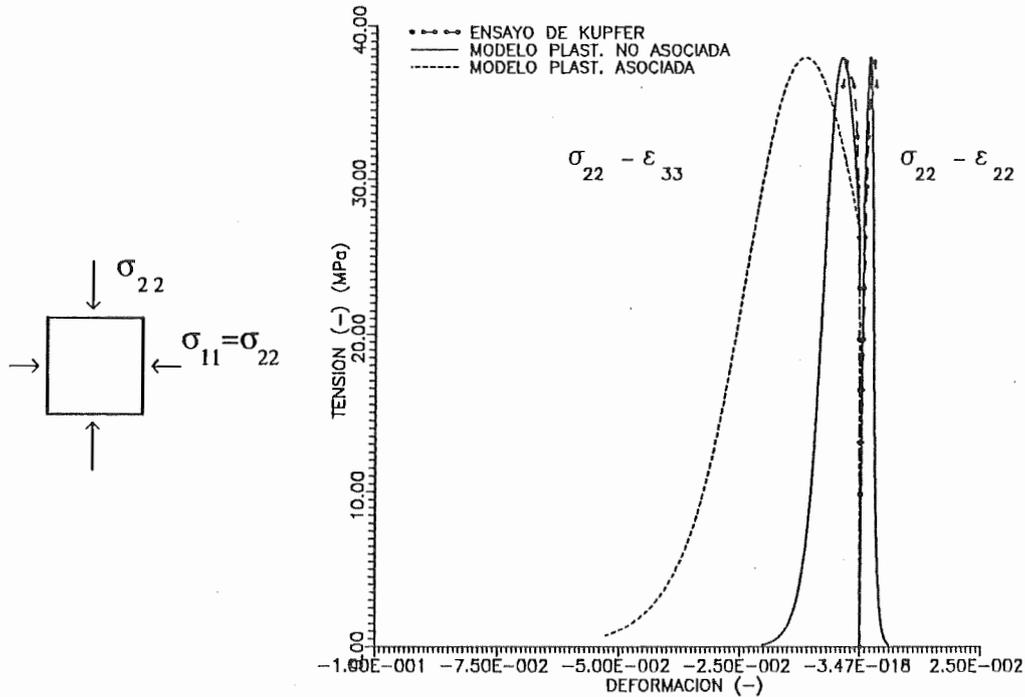


Fig.2.19 Ensayo de compresión biaxial simétrica

Compresión Biaxial Asimétrica

Los resultados obtenidos no son tan buenos como en los dos casos anteriores. Ver Fig. 2.20. El menor ajuste de los resultados numéricos y experimentales, para esta combinación de tensiones también se nota en la tesis de Oller [1988] y puede ser atribuible a la diferencia existente entre el criterio de fluencia utilizado (Lubliner-Oller [Oller 1988]) y la superficie de fluencia real obtenida experimentalmente por Kupfer [1969], en esta zona del espacio de tensiones. Ver Fig.2.21.

En este caso, al igual que para compresión doble simétrica, no aparecen fisuras en el plano del ensayo, aunque es razonable intuir que pueden ocurrir en planos paralelos a éste.

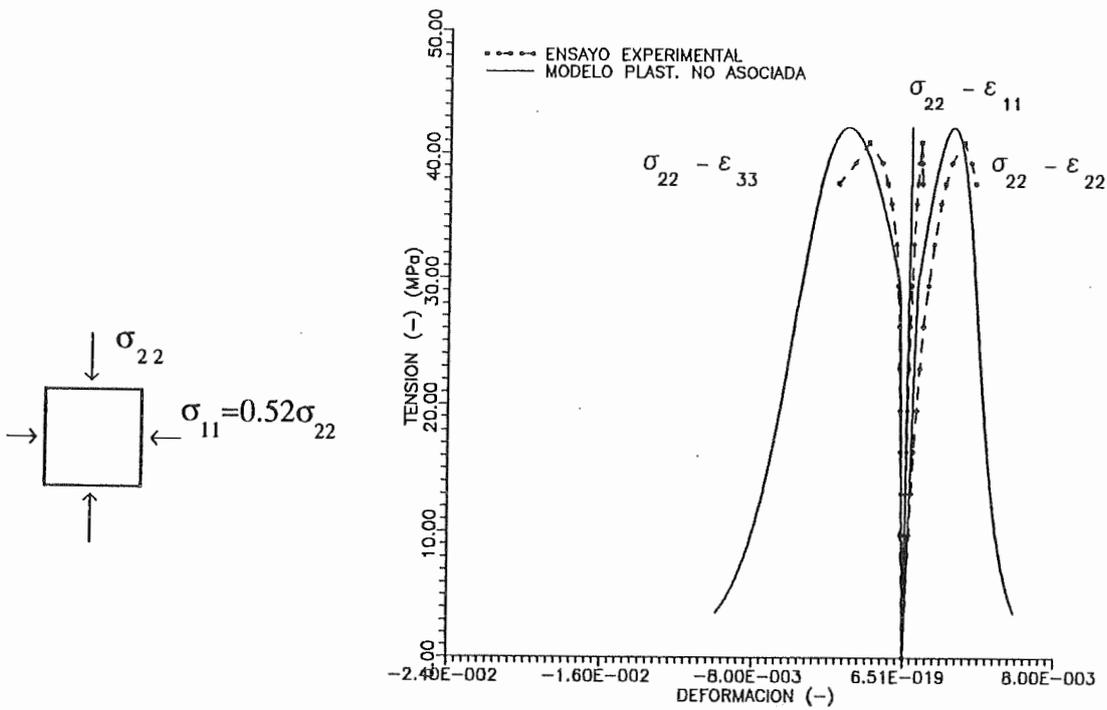


Fig.2.20 Ensayo de compresión biaxial asimétrica

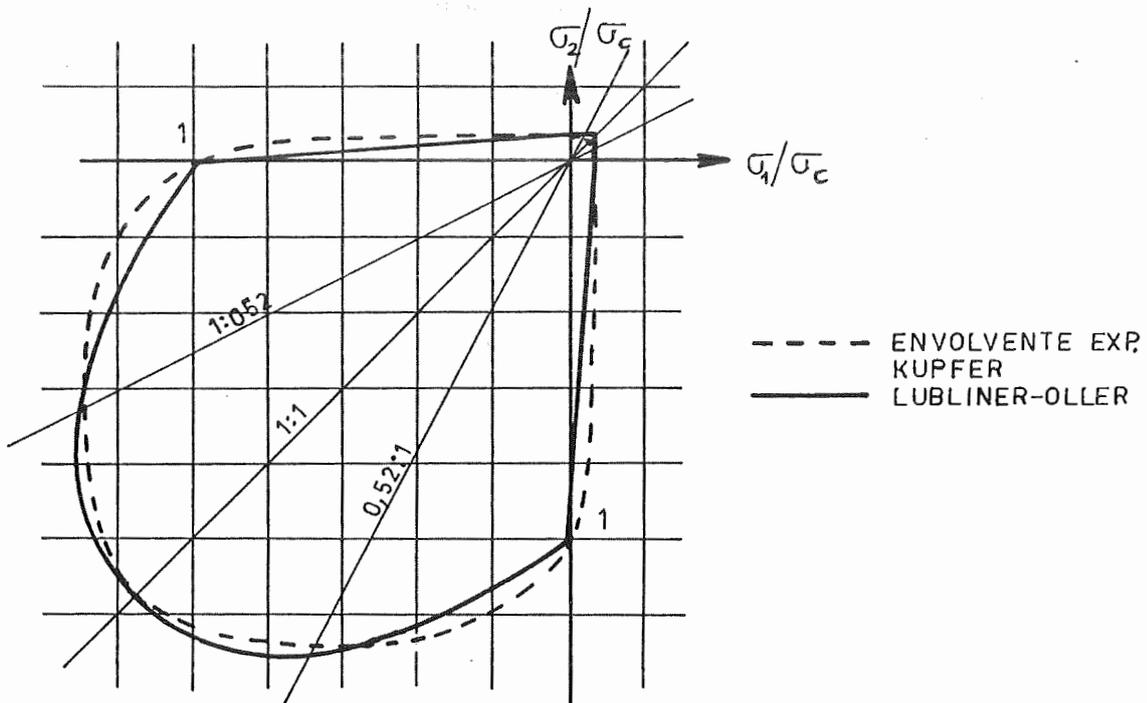


Fig.2.21 Comparación del criterio de fluencia de Lubliner-Oller [Oller 1988] con la curva obtenida experimentalmente [Küpfer 1969]

Tracción Uniaxial

Los resultados del ensayo [Kupfer 1969] son muy pocos para este estado de tensiones. Sólo se tiene una rama ascendente prácticamente recta. El modelo sigue bastante bien esta parte de la respuesta. Ver fig. 2.22.

En este caso la fisuración es de tipo horizontal, normal a a la tensión principal mayor y la energía total disipada por el sólido, calculada con el programa, coincide exactamente con el producto $G^f A^f$.

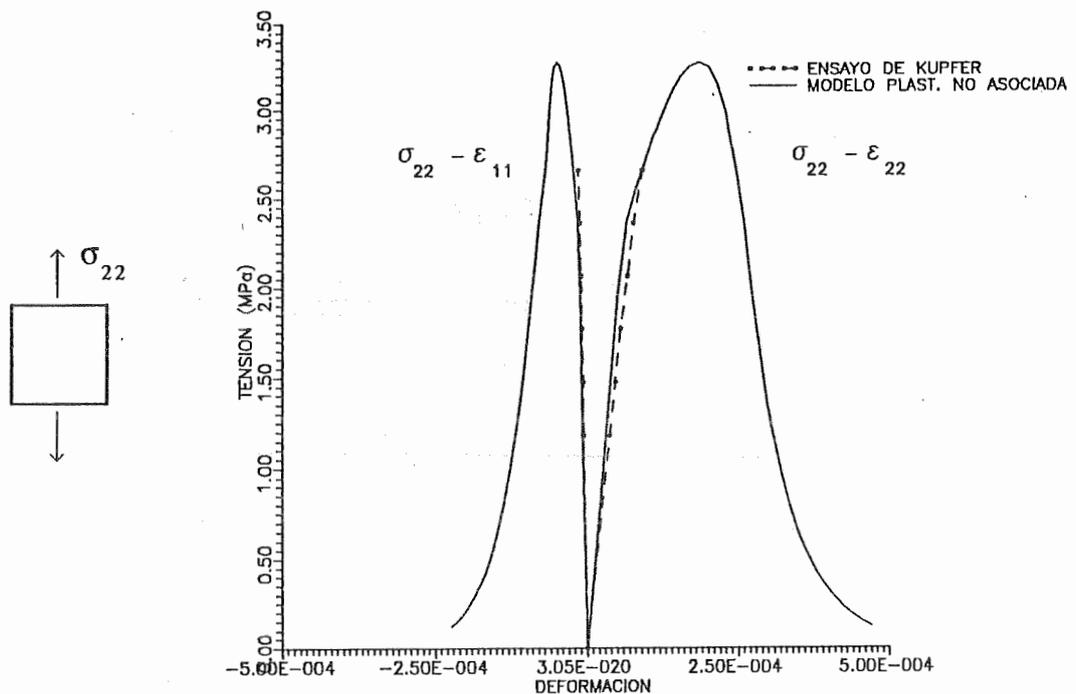


Fig.2.22 Ensayo de tracción uniaxial

Tracción - Compresión

La fig. 2.23 muestra que las curvas de respuesta obtenidas numéricamente se apartan bastante de los resultados experimentales. En particular, es notable la diferencia entre el primer umbral de discontinuidad que predice el programa y el obtenido experimentalmente. Esto es atribuible también a la forma de la superficie de fluencia de Lubliner-Oller [Oller 1988], que se

aparta bastante de la obtenida experimentalmente, para esta combinación de tensiones. Ver fig.2.21

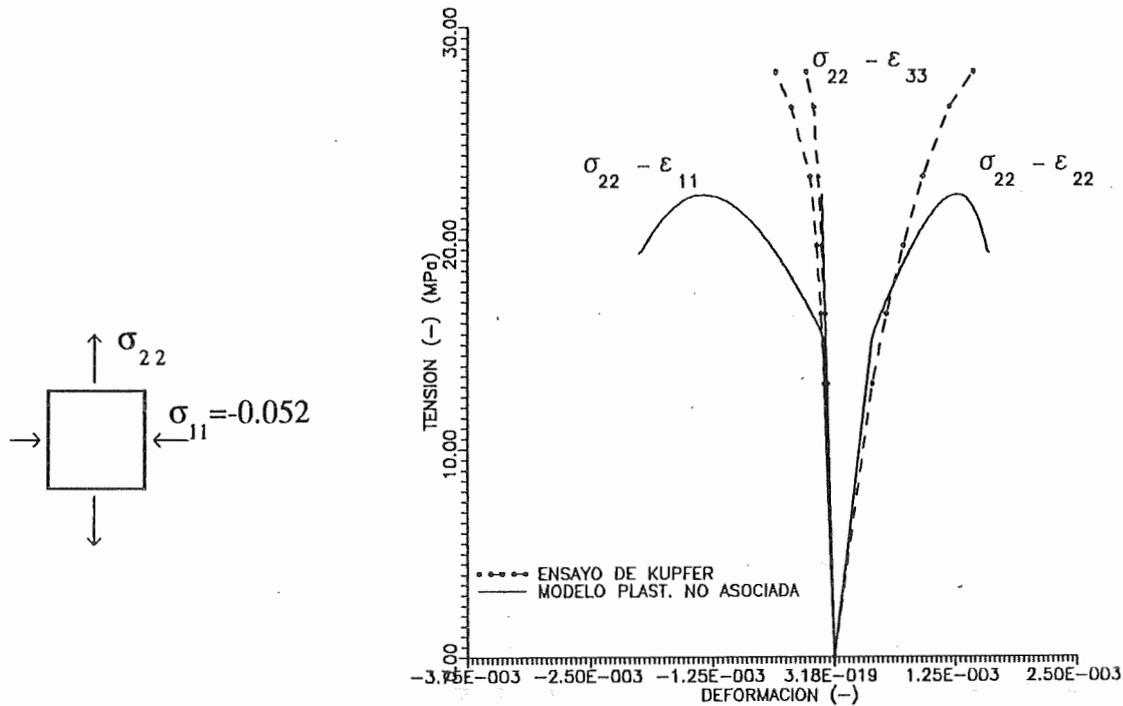


Fig.2.23 Ensayo de compresión-tracción

VIGA DE HORMIGON PRETENSADO

En este punto se presentan los resultados obtenidos con el modelo de daño plástico modificado para una viga de hormigón parcialmente pretensada ensayada a flexión en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán [Barlek 1990].

Descripción General del Ensayo [Barlek 1990]

Dimensiones y Armadura

La viga ensayada era de sección rectangular constante en toda su longitud. La fig.2.24 muestra las dimensiones generales de la pieza ensayada, las cuantías de armadura longitudinal tesa y no tesa y su ubicación en la

sección transversal.

La armadura longitudinal estaba constituida por barras rectas de diámetro 7mm alojadas en vainas corrugadas que luego se inyectaron para asegurar una adecuada transferencia de los esfuerzos a la masa del hormigón.

La armadura transversal consistió en estribos cerrados de diámetro 6mm dispuestos cada 5cm en la sección central y cada 10cm en el resto de la viga.

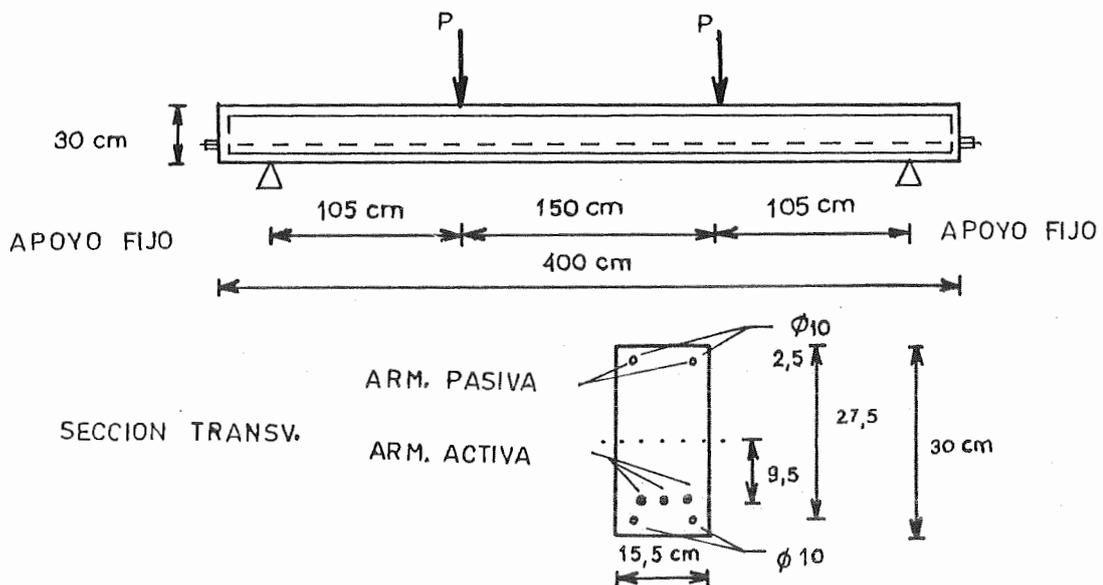


Fig.2.24 Dimensiones Generales y Armadura Longitudinal

Materiales

En la Tabla 2.2 se han resumido las principales parámetros que caracterizan a los materiales y que aparecen en la referencia mencionada.

TABLA 2.2. Parámetros que caracterizan a los materiales

Material	Parámetros	V-1
ACERO NO TESO	E_{s1} [MPa]	2.2×10^5
	E_{s2} [MPa]	5.5×10^4
	β_s [MPa]	500
ACERO TESO	E_{p1} [MPa]	2.05×10^5
	E_{p2} [MPa]	7.8×10^4
	β_p [MPa]	1580
HORMIGON	E_b [MPa]	33000
	σ_c^o [MPa]	37,4

Donde :

E_{s1} : Módulo elástico inicial de la armadura no tesa

E_{s2} : Módulo elástico final de la armadura no tesa

β_s : Tensión de fluencia de la armadura no tesa

E_{p1} : Módulo elástico inicial de la armadura tesa

E_{p2} : Módulo elástico final de la armadura tesa

β_p : Tensión de fluencia de la armadura tesa

E_b : Módulo elástico secante del hormigón correspondiente al 40% de la tensión media de rotura.

σ_{co} : Tensión media de rotura a compresión del hormigón, calculada sobre 15 ensayos de probetas cilíndricas

Tesado

El tesado de las vigas se realizó hasta una tensión de aproximadamente 85% de la tensión de fluencia de la armadura tesa. La Tabla 2.3 contiene los registros de deformación específica de las barras inmediatamente después de realizar el tesado y en el momento de iniciar el ensayo.

TABLA 2.3. Deformaciones iniciales y finales de los tensores

Barra n°	Inicial		Final	
	Deformación	Tensión [Mpa]	Deformación	Tensión [Mpa]
1	$5,91 \times 10^{-3}$	1211	$5,64 \times 10^{-3}$	1157
2	$5,95 \times 10^{-3}$	1220	$5,67 \times 10^{-3}$	1163
3	$5,60 \times 10^{-3}$	1230	$5,70 \times 10^{-3}$	1170

Condiciones de Carga y Apoyo

Las condiciones de apoyo y carga de la viga han sido representadas en la fig.2.24. La viga estaba simplemente apoyada, sobre almohadillas de neopreno en sus dos extremos y la carga consistió en dos fuerzas verticales actuando simultáneamente en la posición indicada en la fig.2.24.

Análisis Numérico

Discretización

En la fig.2.25 se muestra la malla de elementos finitos utilizada para discretizar la viga y las condiciones de apoyo consideradas. Sólo se discretizó la mitad de la viga.

Se combinaron elementos de hormigón con elementos de acero. Los elementos de hormigón eran elementos de tensión plana de 8 nodos y 3x3 puntos de integración de Gauss. Los elementos de acero eran elementos de barras articuladas (sólo resisten esfuerzos axiales) de dos nodos y 2 puntos de integración, conectados a los elementos de hormigón en los nodos extremos, en los cuales se supuso adherencia perfecta una vez realizado el tesado y la transferencia de los esfuerzos de pretensado al hormigón. Se prefirió usar elementos de barra para el acero para reducir el número de nodos y, por ende de grados de libertad, de la estructura. Esto permitió una discretización más densa de la sección de hormigón. La consideración de las armaduras longitudinales como elementos de barras permitió tener

en cuenta el carácter ortótropo del comportamiento de las mismas en el conjunto hormigón-acero, carácter especialmente importante en la simulación del efecto de pretensado. El único problema que tiene la discretización de la armadura con elementos de barras es la superposición de material (hormigón y acero) a la altura de las armaduras que da como resultado una rigidez de conjunto algo mayor que la real. Las pruebas realizadas mostraron que este efecto prácticamente desaparece al fisurarse el hormigón en las fibras inferiores.

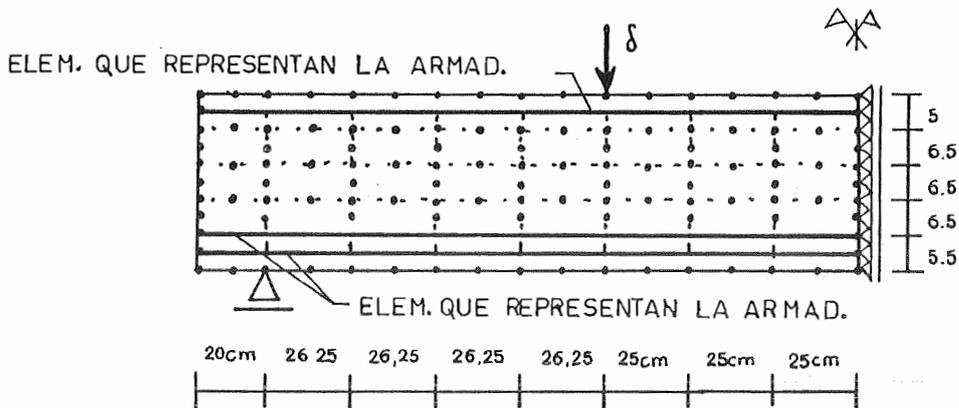


Fig.2.25 Malla de Elementos Finitos

Materiales

En las Tablas 2.4 a 2.6 se han resumido los valores dados a las constantes de cada uno de los materiales. Al respecto, debe notarse que algunos valores como el módulo de elasticidad del hormigón fueron tomados distintos a los de la Tabla 4.2 por tratarse en este caso de un módulo secante, considerado constante hasta la tensión de fluencia. Otros valores, fueron tomados similares a los existentes en bibliografía para ese tipo de hormigones ya que no se contaba con los datos experimentales suficientes.

TABLA 2.4. Propiedades mecánicas del hormigón

$E_o = 22000 \text{ MPa}$	$L_{pe} = \sqrt{A^e}$
$\nu_o = 0,20$	
$\sigma_C^o = 34,2 \text{ MPa}$	Flujo asociado al criterio de fluencia de Lubliner Oller [Oller 1988]
$\sigma_C^{pic} = 37,4 \text{ MPa}$	
$\sigma_T^o = 3,42 \text{ MPa}$	$(\kappa^p)^{pic} = 0,38$
$\alpha = 0,12$	Sin degradación
$\gamma = 3$	$G_f = 0,16 \text{ N/mm}$
$p = 1$	$G_c = 37,8 \text{ N/mm}$

TABLA 2.5 Propiedades mecánicas de la armadura no tesa

$E_o = 220000 \text{ MPa}$	$L_{pe} = \sqrt{A^e}$
$\nu_o = 0,30$	Criterio de Fluencia : Von Mises
$\sigma_C^o = 500 \text{ MPa}$	Flujo asociado al Criterio de Fluencia
$\sigma_T^o = 500 \text{ MPa}$	Plasticidad perfecta
$G_f = G_c = \infty$	

TABLA 2.6. Propiedades mecánicas de la armadura tesa

$E_o = 205000 \text{ MPa}$	$L_{pe} = \sqrt{A^e}$
$\nu_o = 0,30$	Criterio de Fluencia : Von Mises
$\sigma_C^o = 1580 \text{ MPa}$	Flujo asociado al Criterio de Fluencia
$\sigma_T^o = 1580 \text{ MPa}$	Plasticidad perfecta
$G_f = G_c = \infty$	

Para la integración de la ecuación constitutiva elastoplástica del hormigón se utilizó el método de Euler-Backward (ver Apéndice F), para poder reproducir adecuadamente el estado plano de tensión. Para los elementos de acero que usaban la función de fluencia de Von Mises y flujo asociado, se utilizó el método de retorno mapeado a la superficie de fluencia, que en este caso particular es idéntico al método de Euler-Backward.

Aplicación de las Cargas y Control de la Respuesta

En primer lugar se aplicó una deformación relativa inicial en las barras pretensadas, correspondiente al efecto de pretensado y se resolvió el problema.

En segundo lugar se procedió a la etapa de carga misma de la viga. Para poder controlar la respuesta cerca de la carga máxima se utilizó control de desplazamientos. Se aplicaron incrementos de desplazamientos en el punto de aplicación de la carga y se calculó la misma como la reacción correspondiente. El tamaño de los incrementos de desplazamiento fue graduado de manera de lograr convergencia en los procesos iterativos de Newton Raphson e integración de la ecuación constitutiva elastoplástica. Se trabajó con rigidez inicial hasta el final.

Análisis de los Resultados

En la fig.2.26 se ha representado la curva carga-flecha de la sección central. En general, la curva numérica muestra un comportamiento más rígido que el correspondiente a los resultados experimentales, aún cuando se trabaje con un módulo de elasticidad inicial del hormigón igual al módulo secante correspondiente a la tensión de fluencia. Esta mayor rigidez se debe, en parte, a la forma de discretización usada y, en parte, a que las curvas carga-flecha experimentales seguramente incluyen desplazamientos de apoyo ya que los mismos no eran rígidos. Los desplazamientos de apoyos no fueron medidos durante el ensayo por lo que no pudieron descontarse a las flechas registradas.

La respuesta numérica sigue bastante bien la curva experimental presentando dos quiebres marcados en el comportamiento que corresponden a la fisuración del hormigón en las fibras inferiores y a la entrada en fluencia de la armadura longitudinal tesa respectivamente.

La pendiente de la última rama de la curva obtenida numéricamente resulta algo menor que la correspondiente a los resultados experimentales. Esto se debe a que se usó un modelo de plasticidad perfecta para las armaduras para que la convergencia fuera más rápida.

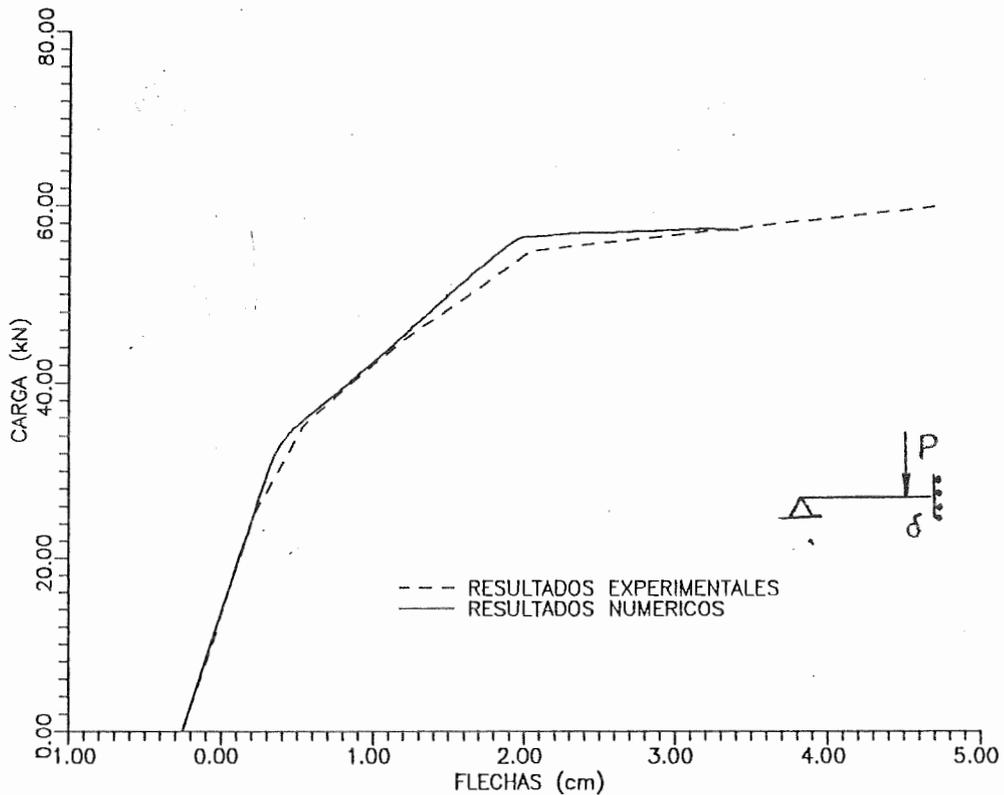


Fig.2.26 Curva carga-flecha en la sección central

En la fig.2.27 se han representados las curvas carga-deformación específica del hormigón. Los resultados experimentales corresponden a las deformaciones medidas con un L.V.D.T. ("linear variable displacement transducer") entre los extremos de dos barras pasantes embebidas en el

hormigón situadas 10 cm a ambos lados de la sección central y a 3cm del borde superior de la viga. Los valores numéricos corresponden al punto de Gauss más cercano a esa medición.

En la fig.2.27 se observa que la respuesta numérica da un comportamiento secante que corta a la respuesta experimental cerca de la deformación correspondiente a la primera fluencia del hormigón en esa zona de la viga. Esto se debe a que se esta trabajando sin degradación de rigidez con una respuesta lineal en la zona elástica y a que se definió como módulo de elasticidad del hormigón al correspondiente a la primera discontinuidad de fluencia del mismo.

Al entrar la armadura tesa en fluencia y debido al modelo de plasticidad perfecta adoptado para las mismas, el hormigón también se sobrecarga y se deforma prácticamente sin incremento de carga.

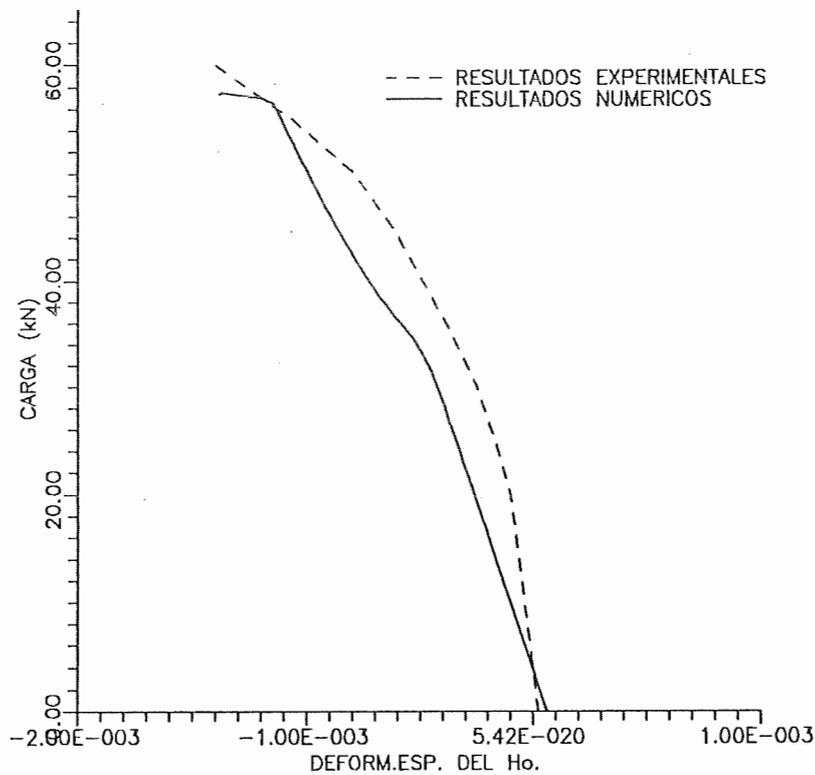


Fig. 2.27 Curva carga-deformación específica del hormigón

En la fig.2.28 se han representado las deformaciones específicas de la armadura no tesa medidas con extensómetros eléctricos sobre las mismas a 15cm de la sección central y las calculadas numéricamente para el punto de Gauss más cercano al punto de medición.

La curva numérica muestra un quiebre bastante retrasado respecto a los resultados experimentales. Esto puede ser consecuencia de que esta curva da una deformación promedio considerando al material como continuo, mientras que los registros experimentales pueden corresponder a una fisura.

La rama final de la curva experimental, de pendiente casi nula corresponde al modelo utilizado para el acero. En realidad, la armadura tesa entra primero en fluencia, pero eso hace que el eje neutro suba rápidamente, produciendo casi instantáneamente la fluencia de la armadura no tesa.

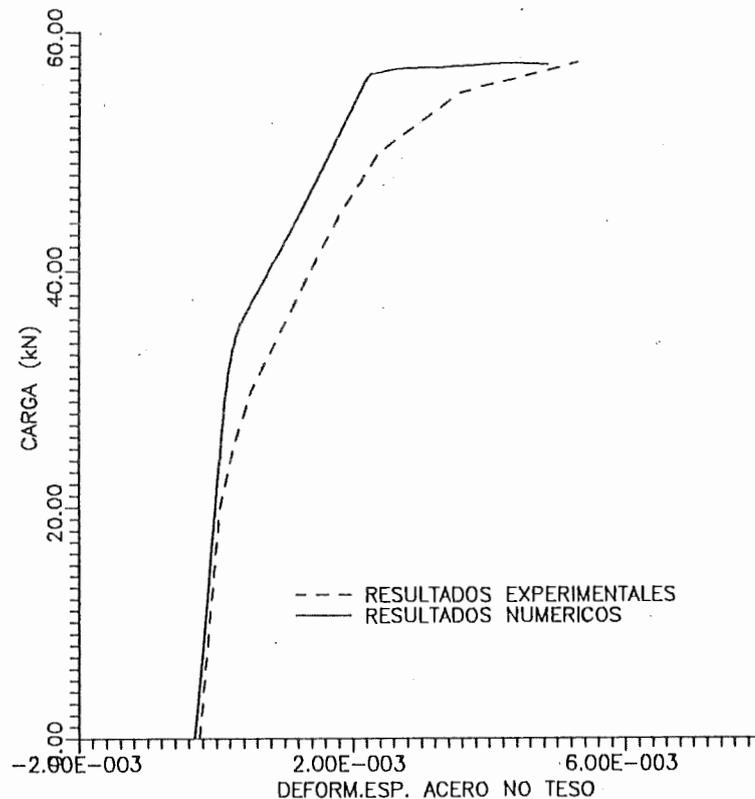


Fig. 2.28 Curva carga-deformación en la armadura no tesa

En la fig.2.29 se han representado el promedio de las deformaciones específicas de las armaduras tesas medidas con extensómetros eléctricos adheridos a las barras y situados a 15 cm de la sección central y los valores de dicha deformación calculados numéricamente en el punto de Gauss más cercano al de medición.

La curva numérica se aproxima a la experimental mostrando quiebres más marcados en el comportamiento y una pendiente en la rama final algo menor que la experimental.

En conjunto, la respuesta numérica da una aproximación razonable al comportamiento experimental mediante tramos prácticamente rectos. Si se incluyera la degradación de rigidez en el modelo del hormigón podría obtenerse una respuesta con cambios más suaves.

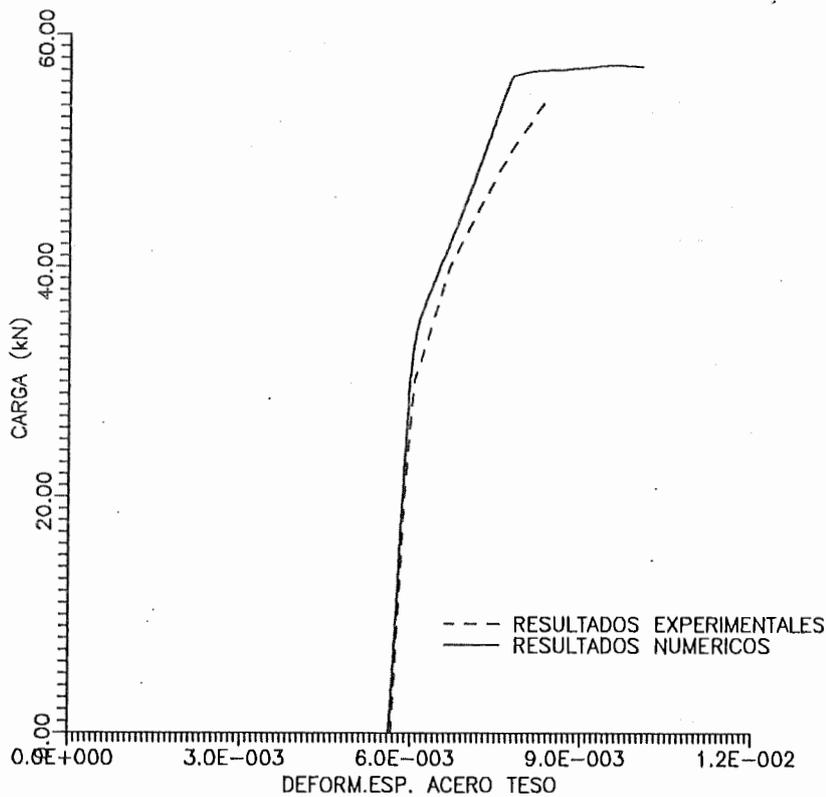


Fig.2.29 Curva carga-deformación en la armadura tesa

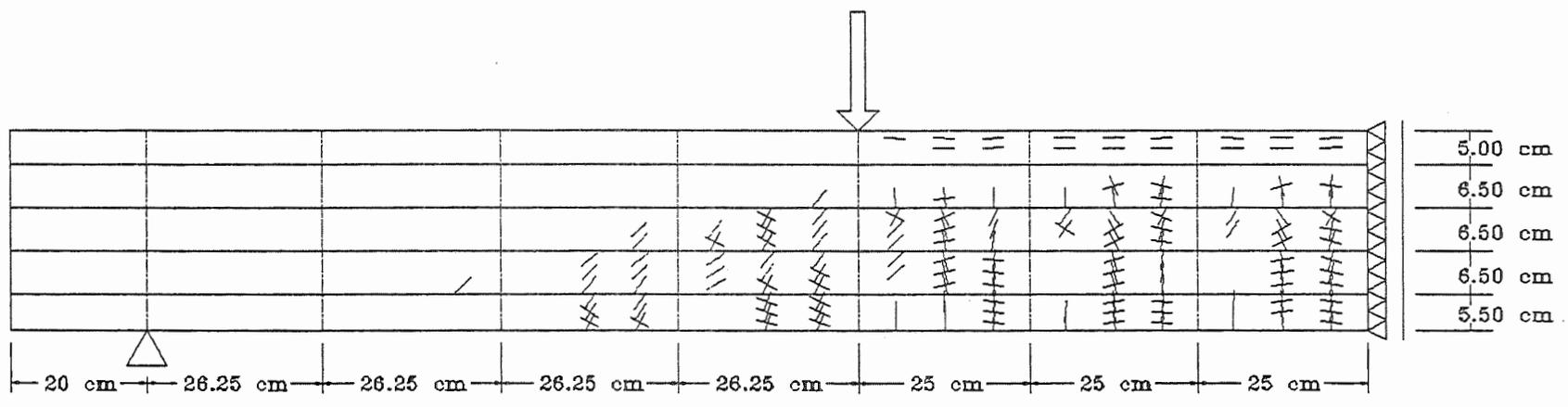


Fig.2.30 Cuadro de fisuración

En la fig.2.30 se ha esquematizado el cuadro de fisuración obtenido mediante el postproceso de los resultados al finalizar el proceso numérico. El mismo se aproxima bastante al observado al finalizar el ensayo. Pueden observarse las fisuras verticales por tracción del hormigón en la zona central de la viga, las fisuras inclinadas debidas al corte, más hacia los extremos y las fisuras horizontales en la parte superior de la zona central debidas a la gran fuerza de compresión que soporta el hormigón en esa dirección.

Consideración de la armadura transversal

Se hicieron algunas pruebas considerando la armadura transversal de la siguiente manera :

- Barras de acero verticales, con dos nodos uno en la parte superior y otro en la parte inferior de la viga, que simulan los estribos en el plano de análisis. Dichas barras se ubicaron en coincidencia con los nodos de la malla de elementos finitos ya definida para no aumentar el número de grados de libertad total de la estructura y se les asignó un área tal que se lograra la cuantía de armadura correspondiente.

- Una restricción a la deformación en la dirección transversal al plano de análisis. En lugar de trabajar con un problema de tensiones planas se impuso la condición de igual deformación de estribos y hormigón en la dirección transversal, que dió lugar a una tensión de confinamiento no nula en la dirección mencionada. Dicho artificio pudo ser introducido con facilidad en la integración de la ecuación constitutiva elastoplástica del hormigón mediante el método de Euler Backward. Para implementar el mismo se supuso que los estribos se comportaban elástica y linealmente y se tuvo en cuenta el promedio de su deformación total (extensión más flexión). De hecho, este efecto de confinamiento en la dirección transversal sólo aparecía cuando el hormigón tendía a dilatarse en dicha dirección.

Pruebas realizadas en elementos sometidos a compresión uniaxial mostraron que el efecto de confinamiento así introducido daba lugar a una resistencia pico del hormigón bastante mayor que la obtenida

experimentalmente por otros investigadores [Park and Paulay 1975, Mander, Pristley and Park 1983]. Esto se debe a que la función de fluencia utilizada tiene meridianos rectos y por tanto, sobreestima la resistencia en compresión triaxial.

Las pruebas realizadas en la viga estudiada dieron como resultado curvas de respuesta prácticamente coincidentes con las obtenidas sin tener en cuenta el confinamiento. Ello se debe en parte a que no se tuvo en cuenta el recubrimiento lateral de la viga y en parte a que se trataba de una viga subarmada en la que el comportamiento después de fisuración estaba controlado casi exclusivamente por la armadura.

VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO

Este ejemplo consiste en simular el comportamiento de 4 vigas de hormigón armado sin estribos ensayadas a flexión combinada con corte en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán [Ramallo et al 1993].

Descripción General de los Ensayos

La serie de vigas ensayadas es similar a la serie de ensayos D realizada por Leonhardt y Walter [Leonhardt 1965]. Se trata de una serie de cuatro vigas de hormigón armado de sección rectangular cuyas dimensiones y características se indican en la fig.2.31 y Tabla 2.6 respectivamente. Las vigas guardaban semejanza geométrica con una relación de tamaños 1:2:3:4 y tenían la misma cuantía de armadura transversal.

Las condiciones de carga y apoyo pueden verse también en la fig.2.31. Las vigas estaban simplemente apoyadas cerca de sus extremos. Se dispuso estribos en los extremos de las vigas, más allá de los puntos de apoyo, para evitar la formación de fisuras no deseadas.

TABLA 2.6 Características de las vigas ensayadas

Viga	L [mm]	a _v [mm]	h [mm]	b [mm]	Fe	μ	f _c [MPa]	P _{f i s} [KN]	P _u [KN]
1	520	210	70	50	2φ6	1,60	37,3	4,67	13,8
2	1040	420	140	100	2φ12	1,61	37,3	11,4	52,5
3	1560	630	210	150	2φ16 1φ20	1,63	37,3	22,9	93,1
4	2080	840	280	200	3φ20	1,68	37,3	38,0	147,5

La carga se aplicó en dos puntos situados simétricamente a ambos lados de la sección central y se utilizó para ello placas de acero fijadas con resina epoxi sobre la cara superior de la viga. Se realizaron 5 a 7 etapas de carga incremental con mantenimiento durante el mapeo del cuadro de fisuración.

Se instrumentaron las secciones de apoyo, bajo las cargas y central realizando la adquisición de datos en forma automática mediante dispositivos electrónicos.

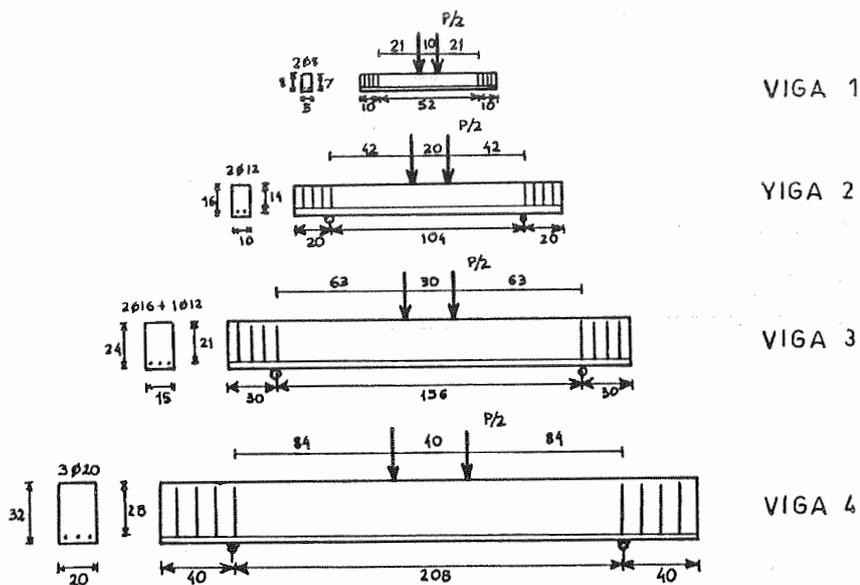


Fig.2.31 Dimensiones generales de las vigas

Análisis Numérico

Descripción General

En la fig 2.32 se ha representado la malla de elementos finitos utilizada en la viga 1 (las correspondientes a las restantes vigas eran similares). Se emplearon elementos finitos planos, isoparámetros de 8 nodos y 3x3 puntos de integración para el hormigón y elementos de barras articuladas para la armadura longitudinal. Las condiciones de apoyo se han representado en la misma figura.

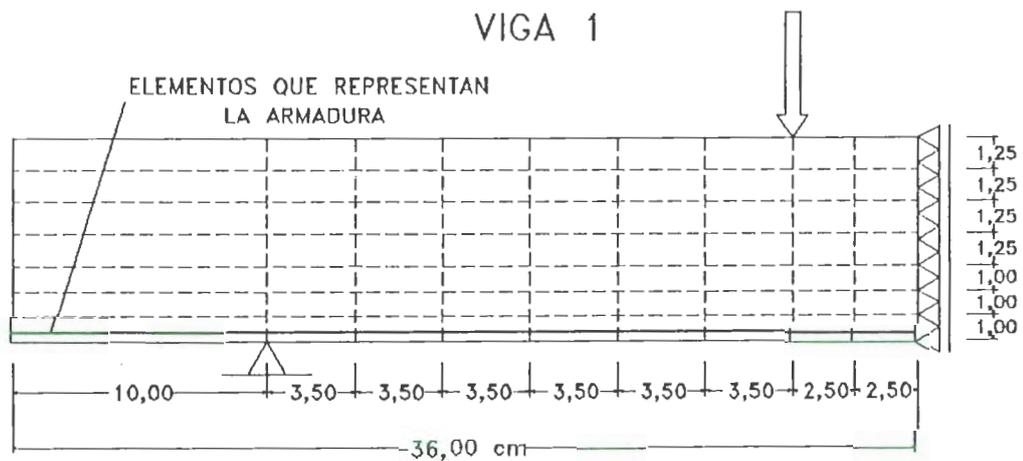


Fig.2.32 Malla de elementos finitos

TABLA 2.7 Características Mecánicas del Hormigón

$E_0 = 20000 \text{ MPa}$	• Criterio de Fluencia de Lubliner-Oller
$\nu_0 = 0,2$	
$\sigma_c^o = 28 \text{ MPa}$	• Flujo asociado
$\sigma_c^{pic} = 37 \text{ MPa}$	$G_f = 0,08 \text{ N/mm}$
	$G_c = 8,00 \text{ N/mm}$
$\sigma_T^o = 2,8 \text{ MPa}$	$\kappa_p^{pic} = 0,38$

TABLA 2.8 Características Mecánicas del Acero

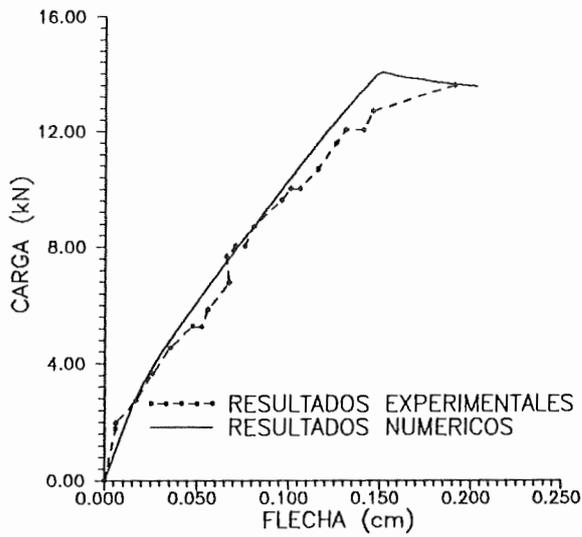
$E_o = 220000 \text{ MPa}$		<ul style="list-style-type: none"> • Criterio de fluencia de Von Mises • Flujo asociado
$\nu_o = 0,3$		
Viga	$\sigma_C^o = \sigma_T^o$ [MPa]	$\sigma_C^{pic} = \sigma_T^{pic}$ [MPa]
1	400	720
2	460	714
3	484	705
4	458	765

En las Tablas 2.7 y 2.8 se han resumido las propiedades mecánicas de los materiales utilizadas.

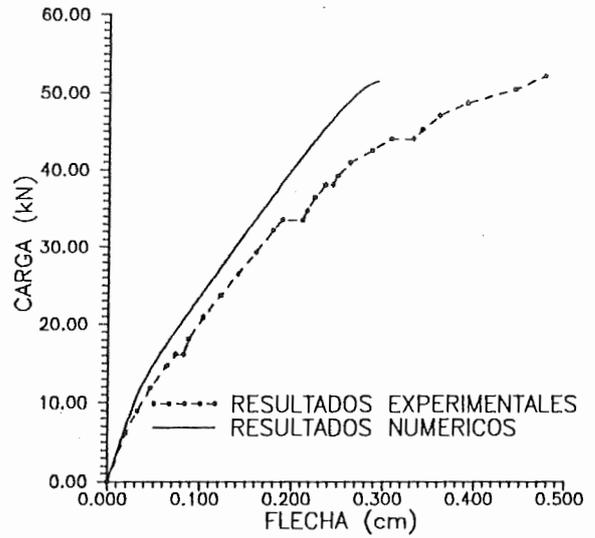
En todos los casos se trabajó con control de desplazamientos en el punto de aplicación de la carga y se utilizó el método de Euler-Backward (ver Apéndice F) para integrar la ecuación constitutiva.

Análisis de los Resultados

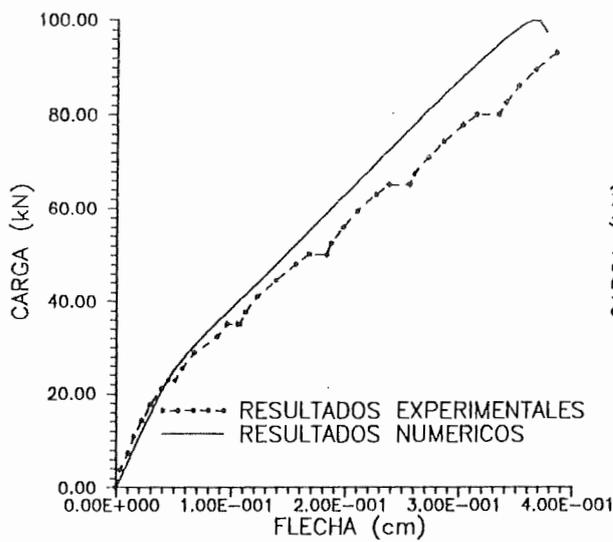
En las figuras 2.33 se han representado los diagramas carga-flecha en la sección central obtenidos para cada una de las cuatro vigas ensayadas. Puede verse que las curvas numéricas se aproximan bastante a las experimentales en el caso de las vigas 1 y 4. En el caso de las vigas 2 y 3 los resultados experimentales muestran deformaciones mayores que los numéricos esto puede atribuirse a ciertos efectos no coplanares detectados durante los ensayos (sobre todo en el caso de estas dos vigas) que no pueden ser tenidos en cuenta en un análisis plano.



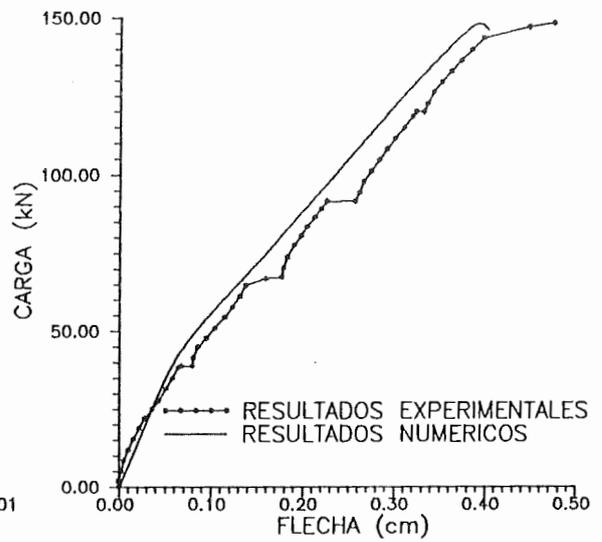
a) Viga 1



b) Viga 2

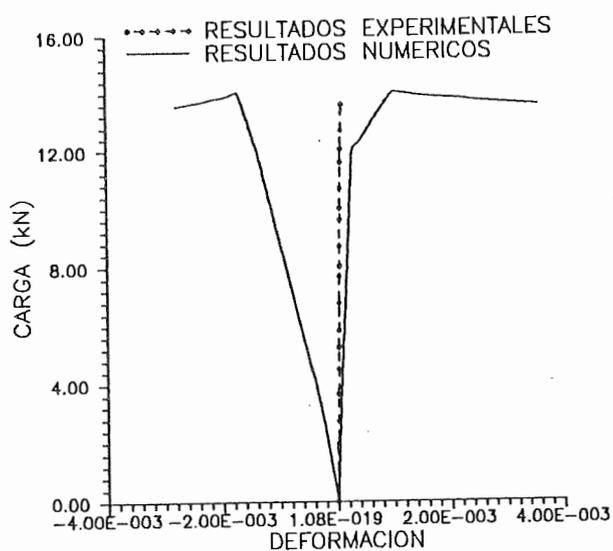


c) Viga 3

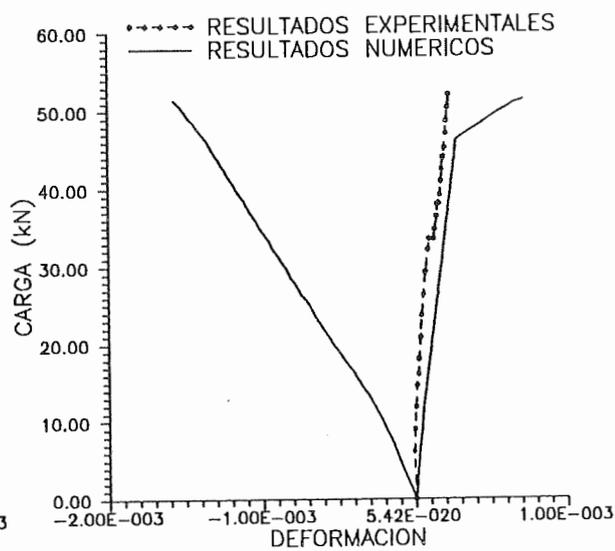


d) Viga 4

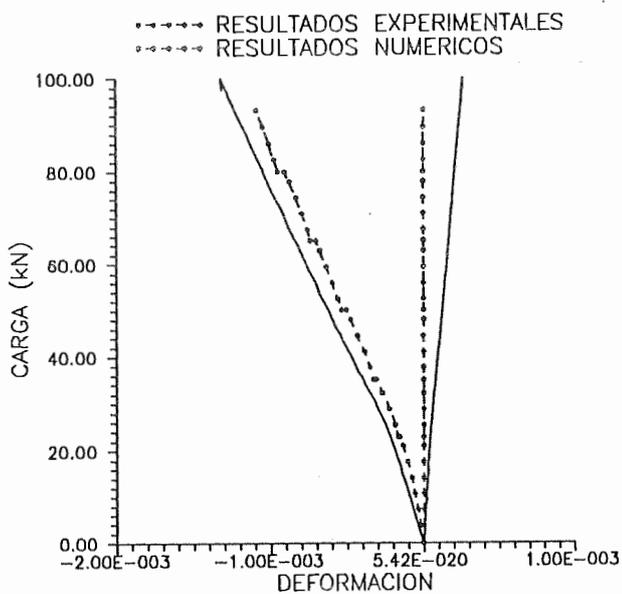
Fig.2.33 Diagramas carga-flecha en la sección central



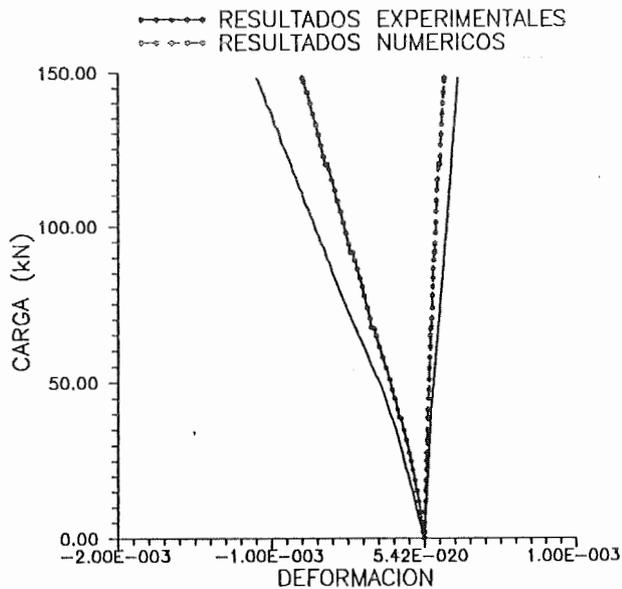
a) Viga 1



b) Viga2



c) Viga 3



d) Viga 4

Fig.2.34 Diagramas carga-deformación específica del hormigón

Debe notarse también que los resultados experimentales presentan escalones en los que la deformación crece sin aumento de carga. Los mismos corresponden a las detenciones de la carga para marcar el cuadro de fisuración. Luego, al empezar a cargar nuevamente, las vigas se comportaron como si fueran más rígidas. Este tipo de efecto no es tenido en cuenta por el modelo constitutivo presentado ya que ha sido desarrollado para cargas instantáneas. De todas formas la respuesta numérica tiende a coincidir con la envolvente experimental.

En las figuras 2.34 se han representado las deformaciones específicas en el hormigón en función de la carga aplicada. Los resultados experimentales corresponden a deformaciones medidas con extensómetros eléctricos adheridos en la cara superior de la viga, en la sección central, en la dirección longitudinal y transversal. Los resultados numéricos corresponden al punto de Gauss más cercano. En todos los casos puede verse que, si bien la tendencia es la misma, la diferencia entre los resultados experimentales y numéricos es mayor que en el caso de las flechas. Esto puede deberse a muchas causas: en primer lugar, los puntos de medición no son coincidentes; en segundo lugar, el método de elementos finitos es una aproximación y por tanto los resultados corresponden al promedio de una zona y no a lo que pasa exactamente en el punto; y en tercer lugar, los resultados experimentales pueden estar influenciados por las placas de acero utilizadas para la transmisión de las cargas ya que los puntos de medición se encontraban muy próximos a ellas.

En la fig.2.35 se han representado los cuadros de fisuración obtenidos para las cuatro vigas. Puede observarse que guardan cierta semejanza entre sí. Se distinguen las fisuras iniciales verticales ubicadas en la parte inferior de la sección central. Luego estas fisuras se extienden hacia los extremos y van formándose fisuras inclinadas. Recién en ese momento se nota la no linealidad en las curvas de respuesta de las figuras 2.33 y 2.34. Finalmente se forman fisuras horizontales en la parte superior de la sección central debido a la fuerte compresión de esa zona.

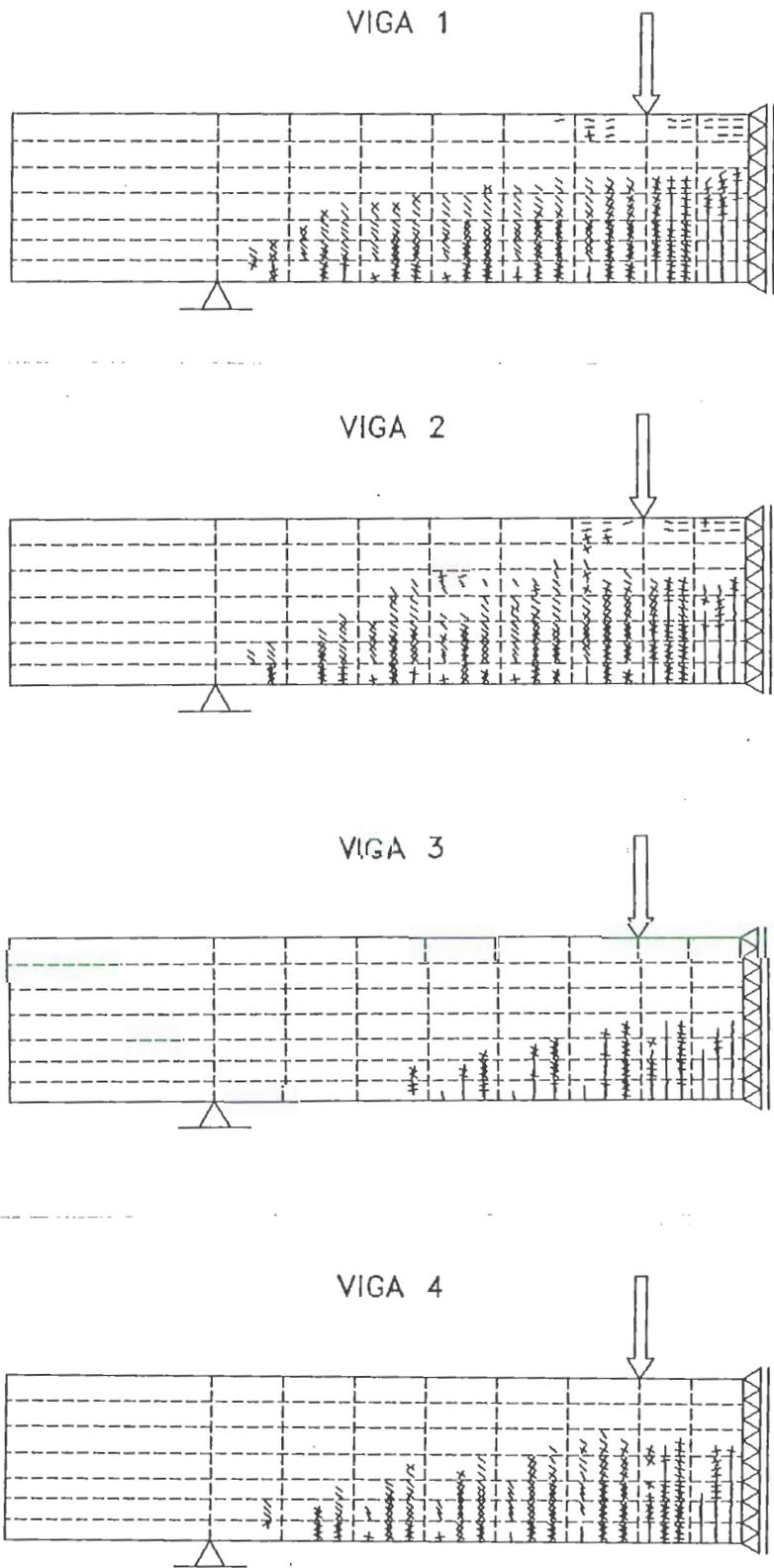


Fig.2.35 Cuadros de fisuración

En el caso de las vigas 2, 3 y 4 la rotura numérica es de tipo frágil debido a la rotura del hormigón. En el caso de la viga 1 los resultados numéricos muestran la entrada en fluencia de la armadura longitudinal con lo cual la viga se deforma sin incremento de carga mostrando un cierto ablandamiento. En todos los casos la carga máxima que puede alcanzarse numéricamente es muy cercana a la carga de rotura registrada experimentalmente. En la Tabla 2.9 se han resumido estos valores para su comparación.

Tabla 2.9 Comparación de Cargas Ultimas Numéricas y Experimentales

Viga	P_u^{exp} [KN]	P_u^{num} [KN]	P_u^{num}/P_u^{exp}
1	13,8	14,0	1,01
2	52,5	51,4	0,98
3	93,1	99,7	1,08
4	147,5	148,2	1,00

2.3.3. MODELO DE DAÑO

[Oliver et al 1990, Oller et al 1990b, Oller et al 1992]

En este punto se presenta el modelo de daño desarrollado en esta Tesis. El mismo está basado en la *teoría de daño de Kachanov* [Kachanov 1958].

2.3.3.1. Características Fundamentales del Modelo

ENERGIA LIBRE

Este modelo está formulado para problemas *térmicamente estables*, con variación temporal de la temperatura nula. Se basa, además, en el concepto de *elasticidad desacoplada* [Green et al. 1964, Lubliner 1990]. Según esta hipótesis restrictiva la energía libre total Ψ puede suponerse compuesta por dos partes: una parte Ψ^e correspondiente al proceso elástico y otra parte Ψ^p correspondiente al proceso plástico, ambas independientes entre sí.

En el caso de pequeñas deformaciones se supone la siguiente forma para la energía libre:

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e; \alpha; \beta) = \Psi^e(\epsilon_{ij}^e; \beta) + \Psi^p(\alpha) \quad (2.96)$$

Donde:

ϵ_{ij}^e : es el tensor de deformación elástica que representa la variable libre del problema

α y β : grupo de variables internas plásticas y no plásticas respectivamente

$$\beta = \{\beta_{kl}^{(i)}\} \quad (2.97)$$

Donde $\beta_{kl}^{(i)}$ son variables de daño, en general representables mediante tensores.

La parte elástica de la energía libre se escribe como una función cuadrática de argumentos tensoriales [Oller 1990b]:

$$\Psi^e = \frac{1}{2m} \left[\epsilon_{ij}^e C_{ijkl}^s(\beta) \epsilon_{kl}^e \right] \quad (2.98)$$

Donde :

m : Densidad del material en la configuración material

$C_{ijkl}^s(\beta)$: Tensor de rigidez secante afectado por la evolución de las variables internas no plásticas, que, en general puede escribirse como [Oller 1990b]:

$$C_{ijkl}^s(\beta) = f_{ijrs}(\beta) C_{rskl}^o \quad (2.99)$$

C_{rskl}^o : Tensor de rigidez inicial del material virgen

$f_{ijrs}(\beta)$: Función tensorial de transformación de un espacio real a uno no degradado equivalente

La forma más simple para esta función es la coincidente con la teoría de daño isótropo de Kachanov [Kachanov 1958] :

$$f(\beta) = 1 - d \quad (2.100)$$

$\beta = d$: variable de daño tal que

$d = 0$ para el material virgen

$d = 1$ para el material totalmente dañado

La fig.2.36 ilustra la forma propuesta en el caso de ausencia de plasticidad.

Para este caso particular, la parte elástica de la energía libre, definida en ecuación (2.98), puede reescribirse como :

$$\Psi^e = (1-d) \Psi^o = (1-d) \frac{1}{2 m_o} \left[\epsilon_{ij}^e C_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^e \right] \quad (2.101)$$

Donde Ψ^o representa la *energía libre del material no dañado*.

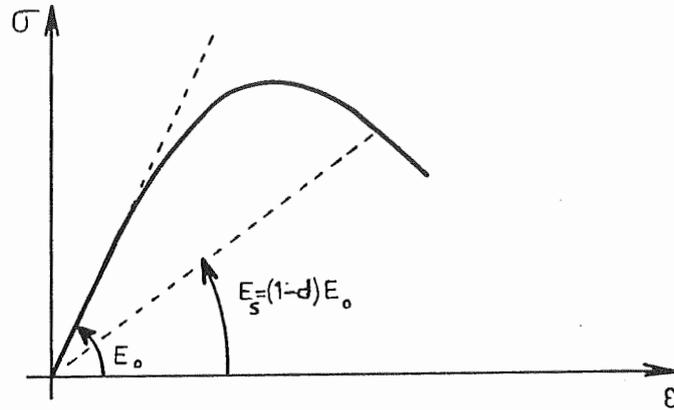


Fig.2.36 Esquema de un proceso de degradación de rigidez

ENERGIA DISIPADA

La desigualdad de Clausius-Duhem [Malvern 1969] (2° Principio de la Termodinámica) puede escribirse en términos de la energía libre como:

$$\dot{E} = m (-\dot{\Psi} - \eta \dot{\theta}) + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (2.102)$$

Donde :

η : Entropía

θ : Medida de la temperatura

q_i : flujo de calor

Reemplazando en esta ecuación la forma propuesta para la energía libre en ec. (2.96), se obtiene :

$$\left(\sigma_{ij} - m \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^e - m \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - m \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_{kl}^{(i)}} \dot{\beta}_{kl}^{(i)} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (2.103)$$

La disipación mecánica puede escribirse como:

$$\underbrace{\Xi_m^P: \text{disip. plástica}}_{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P - m \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i} - \underbrace{\Xi_m^\beta: \text{disip. por daño}}_{m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_{kl}^{(i)}} \dot{\beta}_{kl}^{(i)}} \geq 0 \quad (2.104)$$

De modo que la disipación mecánica puede descomponerse en dos partes : una debida al proceso plástico Ξ_m^P y otra debida a la degradación de rigidez Ξ_m^d .

Para el caso particular descrito por la ec.(2.100) la disipación debida al daño se puede escribir como :

$$\Xi_m^d = m \Psi^o \dot{d} \quad (2.105)$$

2.3.3.2. Formas de Considerar el Daño

Establecido el fundamento termodinámico del modelo de degradación de rigidez existen muchas formas de definir la evolución del daño. A continuación se presentan dos de ellas. La primera es una forma explícita desarrollada por otros autores [Oliver et al 1990, Oller et al 1992] y la segunda una forma implícita que se propone en esta tesis. Se presenta la forma explícita porque, a pesar de sus limitaciones, tiene la ventaja de ser muy simple, lo cual agiliza mucho el cálculo cuando se trata de resolver grandes problemas.

FORMA EXPLICITA [Oliver et al 1990, Oller et al 1992]

Este modelo ha sido desarrollado en las referencias para el caso de daño isotrópico y una sola variable de daño d , como la simplificación presentada en ec.(2.100).

Tensión Equivalente

En primer lugar se adopta una *función de tensión equivalente* en el espacio no dañado σ_{oij} , cuya forma matemática es la siguiente [Oliver et al 1990, Oller et al 1992]

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\sigma_{oij}) \quad \sigma_{oij} = \sigma_{ij}/(1-d) \quad (2.106)$$

Esta tensión equivalente admite distintas formas en el espacio de tensiones principales no dañadas σ_o^i . Se puede usar cualquier función que sea homogénea de primer grado en las componentes de σ_o como Mohr Coulomb, Drucker Prager, Lubliner-Oller [Oller 1988].

En las referencias mencionadas se eligió la siguiente forma para la tensión equivalente, que está relacionada con la energía libre del material no dañado:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\sigma_o^i) = \left[1 + r (n-1) \right] \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma_o^i)^2} \quad (2.107)$$

Donde :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_o^i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_o^i|} \quad \langle \sigma_o^i \rangle = \frac{1}{2} \left(\sigma_o^i + |\sigma_o^i| \right) \quad (2.108)$$

y n es la relación entre los umbrales de discontinuidad por daño en compresión y tracción uniaxial respectivamente :

$$n = f_c / f_t \quad (2.109)$$

f_c : Umbral de degradación en compresión uniaxial

f_t : Umbral de degradación en tracción uniaxial

Esta función de tensión posee la propiedad de ser una función escalar homogénea de primer orden en las componentes del tensor de tensiones no dañadas y , además de ser simple, ha permitido obtener resultados satisfactorios en un amplio rango de problemas [Oller 1992]. La fig.2.37 ilustra la misma.

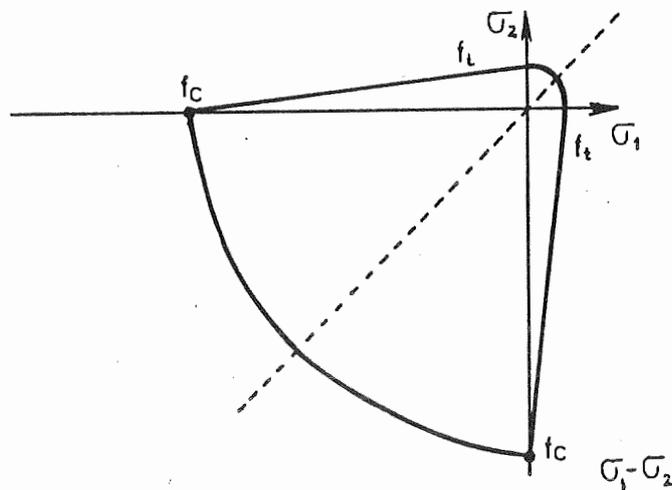


Fig.2.37 Tensión equivalente en el modelo de daño explícito

Criterio de Daño

El criterio umbral de degradación se define en el espacio de tensiones equivalentes de la siguiente manera [Simo 1987, Oliver et al 1990]:

$$\hat{G}^D(\bar{\sigma};\beta) = \hat{G}(\bar{\sigma}) - \hat{G}(f_c) \leq 0 \tag{2.110}$$

Donde:

$\hat{G}(\sigma)$: define la evolución del daño

$\hat{G}(f_c)$: define el umbral de daño

\hat{G} es una función escalar monotónica a ser determinada. En particular, se puede usar :

$$\hat{G}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} \quad \text{y} \quad \hat{G}(f_c) = f_c \quad (2.111)$$

con lo que el criterio de daño resulta :

$$\bar{\sigma} - f_c \leq 0 \quad (2.112)$$

La siguiente forma para la función de daño es adoptada por Oliver et al [Oliver 1990] y Oller et al [Oller 1992] :

$$\hat{G}(\bar{\sigma}) = 1 - \bar{G}(\bar{\sigma})/\bar{\sigma} \quad (2.113)$$

$\bar{G}(\bar{\sigma})$ describe una función como la representada en la fig.2.38 de manera que da para $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$ la tensión de compresión inicial \bar{G}^* y para $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$ la resistencia final $\bar{G} \rightarrow 0$. De esta manera, recorriendo todo el camino, el punto habrá disipado una energía equivalente a la energía específica de fractura.

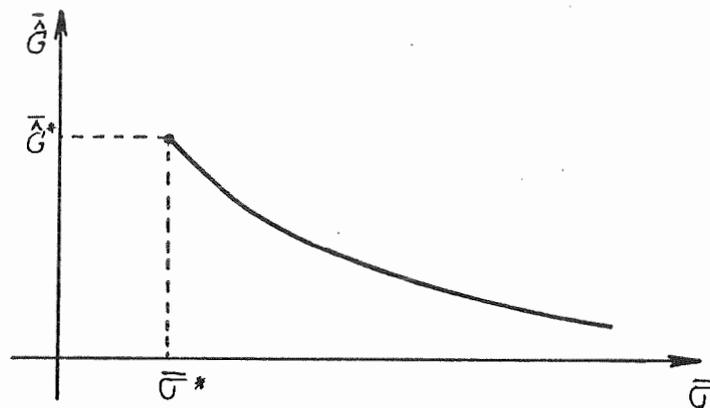


Fig.2.38 Función de daño

En los trabajos mencionados [Oliver 1990, Oller 1992] se adoptó para $\bar{G}(\bar{\sigma})$ una forma exponencial:

$$\bar{G}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^* e^{A(1-\bar{\sigma}/\bar{\sigma}^*)} \quad (2.114)$$

Condiciones de Carga - Descarga

Las condiciones de carga/descarga se derivan de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales:

$$\begin{cases} \text{a) } \dot{\mu} \geq 0 \\ \text{b) } \dot{G}^D \leq 0 \\ \text{c) } \dot{\mu} \dot{G}^D = 0 \end{cases} \quad (2.115)$$

Regla de Evolución del Daño

Se define una expresión general para la evolución de la variable interna de daño con la siguiente forma matemática [Oliver et al 1990, Oller et al 1992]:

$$\dot{d} = \dot{\mu} \left(\frac{\partial \hat{G}^D}{\partial \bar{\sigma}} \right) = \dot{\mu} \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right) \quad \dot{\mu} = \dot{f}_c \quad (2.116)$$

Donde $\dot{\mu}$ es el factor de consistencia de degradación que se obtiene a partir de la condición de Il'yushin [Lublinter 1986]. Al igual que en el caso de plasticidad hay una condición de consistencia de daño para el punto sujeto a degradación que puede escribirse como:

$$\dot{G}^D = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right) \dot{\bar{\sigma}} - \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial f_c} \right) \dot{f}_c = 0 \quad (2.117)$$

$$\hat{G}^D = 0 \Rightarrow \hat{G}(\bar{\sigma}) = \hat{G}(f_c) \quad (2.118)$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_c = \dot{\mu} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}_{o_{ij}}} \dot{\sigma}_{o_{ij}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}_{o_{ij}}} C_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.119)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.16) obtiene la siguiente ley de evolución para la variable de daño d :

$$\dot{d} = \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}_{o_{ij}}} C_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\hat{G}} \quad (2.120)$$

Integrando la ecuación (2.120) se obtiene en forma explícita la variable de daño :

$$d = \int_0^t \dot{d} dt \equiv \int_0^t \dot{\hat{G}}(\bar{\sigma}) dt \equiv \hat{G}(\bar{\sigma}) \quad (2.121)$$

Energía Disipada por Daño

Reemplazando la ec.(2.120) en la ec.(2.105) que da la parte de la disipación debida al daño, se tiene :

$$\dot{\Xi}_m^d = - \Psi^o \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}_{o_{ij}}} C_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.122)$$

Integrando esta ecuación en el tiempo se puede calcular la energía total disipada a lo largo de un proceso de carga. Por ejemplo, para el caso de tracción uniaxial :

$$\bar{\sigma} = n \sigma_t \quad (2.123)$$

$$\Psi^o = (1/2) \epsilon_t E^o \epsilon_t = (1/2 E^o)(\sigma_t)^2 = (1/2 n^2 E^o) \bar{\sigma}^2 \quad (2.124)$$

E^o : Módulo de elasticidad inicial no dañado

La disipación por daño a lo largo del proceso de tracción uniaxial estará dada por :

$$w_t^{\max} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2n^2E^o} \frac{\partial G(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2n^2E^o} dG(\bar{\sigma}) \quad (2.125)$$

$$w_t^{\max} = \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{2n^2E^o} dG(\bar{\sigma}) \right]_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} - \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{G(\bar{\sigma})}{2n^2E^o} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \quad (2.126)$$

$$w_t^{\max} = \frac{\bar{\sigma}^{*2}}{2n^2E^o} \left[1/2 + 1/A \right] \quad (2.127)$$

Para el caso en que no se desarrollen deformaciones plásticas, igualando esta ecuación a la energía específica de fractura , se puede calcular el valor de A.

$$w_t^{\max} = g_f = G_f/l_c \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{g_f n^2 E^o}{(\bar{\sigma}^*)^2} - \frac{1}{2}} \geq 0 \quad (2.128)$$

El valor de la energía específica de fractura g_f es un dato del problema y se deriva de la mecánica de fractura, dividiendo la energía de fractura por unidad de área G_f , por una longitud característica l_c del dominio fracturado (ver Anexo 2.1)

Haciendo lo mismo para un proceso de compresión uniaxial, y postulando que el valor de A debe ser el mismo que en el caso anterior, se deduce que debe ser :

$$g_c = G_c/l_c = n^2 g_f \quad (2.129)$$

Donde g_c es energía específica disipada en el proceso de compresión uniaxial y G_c es la densidad de energía por unidad de área disipada en el mismo proceso.

Ley Constitutiva Secante Total

La ley constitutiva secante total se obtiene a partir de la desigualdad de Clausius-Planck [Lubliner 1985, Malvern 1969]. De su cumplimiento se deduce que :

$$\sigma_{ij} = m_o \frac{\partial \Psi(\epsilon^e; \alpha; d)}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad (2.130)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^e \quad (2.131)$$

Ley Constitutiva Tangente

Tomando la variación temporal de la ecuación (2.131) se obtiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e - \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_{ij} \quad (2.132)$$

En ausencia de deformaciones plásticas, queda

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e - \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_{ij} \quad (2.133)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (2.134)$$

Reemplazando en la ec.(2.133) la ec (2.12), se obtiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e - \frac{1}{1-d} \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right) \sigma_{ij} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}^o} C_{mnkl}^o \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (2.135)$$

De donde:

$$C_{ijkl}^e = C_{ijkl}^s - \frac{1}{1-d} \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right) \sigma_{ij} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}^o} C_{mnlk}^o \quad (2.136)$$

MODELO DE DAÑO PROPUESTO - FORMA IMPLICITA

Esta forma difiere de la anteriormente presentada en que en lugar de llegar a una ecuación de evolución explícita para la variable de daño, se debe hacer una integración de la ecuación de daño. Si bien esto complica un poco el algoritmo de solución, esta forma permite un tratamiento más general del problema de daño, muy similar al que se usa en plasticidad.

Al igual que en el caso anterior, por ahora se trata solo el caso en que no se desarrollan deformaciones permanentes.

Si bien el modelo se presenta en su forma mas general con la posibilidad de un tensor de daño para simular el daño anisótropo, sólo se ha implementado y probado el modelo de daño isótropo.

Criterio de Daño

Se utiliza en este caso una forma muy simple para definir el criterio de daño, inspirada en la forma que se utiliza en plasticidad:

$$\hat{G}^D = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - f_c(\kappa^d) \leq 0 \quad (2.137)$$

en donde $\bar{\sigma}$ es la *tensión equivalente* que puede calcularse usando las formas de los criterios de fluencia conocidos (Tresca, Von-Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager) o la forma utilizada en el planteo anterior, ecuación (2.107). En este modelo, la tensión equivalente es función de la componentes del tensor de tensiones dañado y la *tensión de comparación* f_c es una función de la *variable de daño por degradación* κ^d

Variable de Daño por Degradación

Para lograr que la energía disipada en el proceso de daño sea la correcta, se define una variable normalizada que se denomina *variable de daño por degradación* κ^d tal que :

$$\begin{cases} \kappa^d = 0 & \text{cuando no hay daño (d=0)} \\ \kappa^d = 1 & \text{cuando el daño es total (d=1)} \end{cases} \quad (2.138)$$

La ley de evolución de esta variable se obtiene, de manera similar a la que se usa para definir la variable de daño plástico en un proceso elastoplástico, normalizando la energía disipada en el proceso de degradación. Para procesos uniaxiales está dada por :

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t^d = \frac{-m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_{kl}^{(i)}} \dot{\beta}_{kl}^{(i)}}{g_f^d} & \text{para tracción uniaxial} \\ \dot{\kappa}_c^d = \frac{-m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_{kl}^{(i)}} \dot{\beta}_{kl}^{(i)}}{g_c^d} & \text{para compresión uniaxial} \end{cases} \quad (2.139)$$

y para procesos multiaxiales puede definirse como :

$$\dot{\kappa}^d = - \left[\frac{r}{g_f^*} + \frac{1-r}{g_c^*} \right] m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_{kl}^{(i)}} \dot{\beta}_{kl}^{(i)} \quad (2.140)$$

Donde:

$$g_f^* = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\bar{\sigma}} g_f^d \quad g_c^* = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\bar{\sigma}} g_c^d \quad (2.141)$$

g_f^d y g_c^d son las energías específicas disipadas por daño en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente. En el caso en que no exista plastificación, se calculan como (ver Anexo 2.1):

$$g_f^d = G/l_c \quad \text{y} \quad g_c^d = G/l_c \quad (2.142)$$

Debe observarse la similitud total entre estas ecuaciones y las utilizadas para definir la variable de daño plástico en plasticidad.

En el caso de daño isótropo en el que se utiliza una sola variable de daño se tiene:

$$\dot{\kappa}^d = h_{\kappa^d} \dot{d} = \left[\frac{r}{g_f^*} + \frac{1-r}{g_c^*} \right] m \Psi^o \dot{d} \quad (2.143)$$

Evolución del Umbral de Daño

Para la tensión de comparación f_c , se adopta la siguiente ley de variación explícita en función de la variable de daño por degradación, similar a la utilizada para la cohesión en plasticidad:

$$f_c = r \sigma_t(\kappa^d) + (1-r) \sigma_c(\kappa^d) \quad (2.144)$$

donde $\sigma_t(\kappa^d)$ y $\sigma_c(\kappa^d)$ representan la evolución de la tensión en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente, en función de la variable de daño por degradación y pueden obtenerse a partir de las curvas $\sigma_t-\varepsilon_t$ y $\sigma_c-\varepsilon_c$ experimentales y de las definiciones para la variable de daño por degradación, ecuación (2.139). En particular, estas funciones pueden tener formas exponenciales o polinómicas como las usadas en plasticidad.

Evolución del Daño

En el caso general del daño ortótropo se puede definir una ley de evolución de las variables de daño del tipo:

$$\dot{\beta}_{kl}^{(i)} = \dot{\mu} \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.145)$$

Donde $\dot{\mu}$ es el factor de consistencia de daño y $H^{(i)}$ una función de potencial correspondiente a la variable de daño i que, en particular, puede tomarse igual a la función que define el umbral de daño, esto es:

$$\dot{\beta}_{kl}^{(i)} = \dot{\mu} \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \sigma_{kl}} = \dot{\mu} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.146)$$

El factor de consistencia de daño puede obtenerse de la condición de consistencia de daño. En el caso de una única variable de daño isótropa d no es necesario definir una regla de evolución del tipo de la (2.145), la misma se obtiene directamente de la condición de consistencia de daño.

La condición de consistencia de daño se plantea de manera similar al caso de plasticidad:

$$\dot{\hat{G}}^D = 0 \quad (2.147)$$

Derivando la ecuación (2.137) se obtiene :

$$\dot{\bar{\sigma}} - \dot{f}_c = 0 \quad (2.148)$$

Por la ec.(2.99):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s(\beta) \varepsilon_{kl} = f_{ijrs}(\beta) C_{rskl}^o \varepsilon_{kl} = f_{ijrs}(\beta) \sigma_{rs}^o \quad (2.149)$$

y

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{f}_{ijrs}(\beta) \sigma_{rs}^o + f_{ijrs}(\beta) \dot{\sigma}_{rs}^o \quad (2.150)$$

$$\dot{f}_{ijrs}(\beta) = \frac{\partial f_{ijrs}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \dot{\beta}_{mn}^{(k)} = \frac{\partial f_{ijrs}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \dot{\mu} \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}} \quad (2.151)$$

Resulta entonces la variación temporal de la tensión equivalente:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f_{ijrs}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \mu \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{rs}^o + f_{ijrs}(\beta) \dot{\sigma}_{rs}^o \right) \quad (2.152)$$

Por otro lado :

$$\dot{f}_c = \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \beta_{ij}^{(k)}} \mu \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.153)$$

Reemplazando en la condición de consistencia de daño (2.148), se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f_{ijrs}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \mu \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{rs}^o + f_{ijrs}(\beta) \dot{\sigma}_{rs}^o \right) - \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \beta_{ij}^{(k)}} \mu \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (2.154)$$

De donde se puede obtener :

$$\mu = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} f_{ijrs}(\beta) \dot{\sigma}_{rs}^o}{-\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f_{ijrs}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{rs}^o + \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \beta_{ij}^{(k)}} \mu \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (2.155)$$

En el caso de daño isótropo y una única variable de daño, se tiene:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.156)$$

Teniendo en cuenta que :

$$\sigma_{ij} = (1-d) \sigma_{oij} \quad (2.157)$$

Resulta :

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\sigma_{oij} \dot{d} + (1-d) \dot{\sigma}_{oij} = -\sigma_{oij} \dot{d} + (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.158)$$

y

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \left[-\sigma_{oij} \dot{d} + (1-d) \dot{\sigma}_{oij} \right] \quad (2.159)$$

Por otro lado :

$$\dot{f}_c = \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial d} \dot{d} = \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} \dot{d} \quad (2.160)$$

Reemplazando en la condición de consistencia de daño (2.148), se obtiene :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \left[-\sigma_{oij} \dot{d} + (1-d) \dot{\sigma}_{oij} \right] - \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} \dot{d} = 0 \quad (2.161)$$

De donde se puede obtener :

$$\dot{d} = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} (1-d) \dot{\sigma}_{oij}}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{o_{mn}}} \quad (2.162)$$

Ley Constitutiva Secante Total

La ley constitutiva secante total se obtiene, igual que en el modelo anterior, a partir de la desigualdad de Clausius-Planck [Lubliner 1985,

Malvern 1969]. De su cumplimiento se deduce que :

$$\sigma_{ij} = m_o \frac{\partial \Psi(\epsilon^e; \alpha; d)}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad (2.163)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e = f_{ijrs}(\beta) C_{rskl}^o \epsilon_{kl}^e \quad (2.164)$$

Ley Constitutiva Tangente

Tomando la variación temporal de la ecuación (2.164) se obtiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{f}_{ijrs}(\beta) C_{rskl}^o \epsilon_{kl}^e + f_{ijrs}(\beta) \dot{C}_{rskl}^o \epsilon_{kl}^e \quad (2.165)$$

En el caso que no se desarrollen deformaciones plásticas, se tiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{f}_{ijrs}(\beta) C_{rskl}^o \epsilon_{kl}^e + f_{ijrs}(\beta) \dot{C}_{rskl}^o \epsilon_{kl}^e \quad (2.166)$$

Teniendo en cuenta la ec.(2.151), resulta:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{f}_{ijrs}(\beta) C_{rskl}^o \epsilon_{kl}^e + \frac{\partial f_{ijrs}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \mu \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}} C_{rskl}^o \epsilon_{kl}^e \quad (2.167)$$

Reemplazando μ , resulta:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e + \frac{\partial f_{ijkl}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{kl}^o - \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}} f_{pqrs}(\beta) \sigma_{rs}^o}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f_{pqrs}}{\partial \beta_{tu}^{(v)}} \frac{\partial H^{(v)}}{\partial \sigma_{tu}} \sigma_{rs}^o + \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \beta_{tu}^{(v)}} \mu \frac{\partial H^{(v)}}{\partial \sigma_{tu}}}}{\quad} \quad (2.168)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.169)$$

Donde:

$$C_{ijkl}^e = C_{ijkl}^s + \frac{\partial f_{ijxy}}{\partial \beta_{mn}^{(k)}} \frac{\partial H^{(k)}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{xy}^o - \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} f_{pqrs}(\beta) C_{rskl}^o}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \frac{\partial f_{pqrs}}{\partial \beta_{tu}^{(v)}} \frac{\partial H^{(v)}}{\partial \sigma_{tu}} \sigma_{rs}^o + \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \beta_{tu}^{(v)}} \mu \frac{\partial H^{(v)}}{\partial \sigma_{tu}}} \quad (2.170)$$

En el caso de una sola variable de daño isótopo ($f_{ijkl} \equiv d$) se tiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e - \frac{d}{1-d} \sigma_{ij} \quad (2.171)$$

En ausencia de deformaciones plásticas, se tiene entonces:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{d}{1-d} \sigma_{ij} \quad (2.172)$$

Reemplazando d:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{1-d} \sigma_{ij} \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} (1-d) C_{tukl}^o \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}^o} \quad (2.173)$$

Lo cual puede resumirse mediante la ec.(2.169) donde:

$$C_{ijkl}^e = C_{ijkl}^s - \frac{1}{1-d} \sigma_{ij} \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tu}} C_{tukl}^s}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}^o} \quad (2.174)$$

2.3.3.3. Ejemplos de Aplicación

A continuación se presentan ejemplos simples de aplicación de los modelos de daño presentados. Todos ellos corresponden al ensayo de compresión uniaxial de Küpfer [Küpfer 1969]. Se comparan los resultados del modelo plástico con los de los modelos de daño presentados.

COMPARACION DEL MODELO ELASTO-PLASTICO CON EL MODELO DE DAÑO EXPLICITO

En la fig.2.39 se presentan las curvas tensión-deformación obtenidas con el modelo de daño plástico modificado y la correspondiente al modelo de daño en el que la variable de daño se obtiene en forma explícita. Para poder comparar ambos procesos se utilizó en ambos casos la misma energía de fractura y además, en el modelo plástico se utilizó una variación exponencial para la tensión de comparación.

En la fig.2.39 se puede ver que ambas curvas de respuesta coinciden en carga pero difieren ampliamente en las ramas de descarga, ya que el modelo de daño vuelve siempre al origen sin dejar deformaciones permanentes. Si bien la energía disipada al final de ambos procesos es la misma (se le dio el mismo dato a ambos problemas) la disipación a lo largo de la historia de carga no es la misma.

Se debe hacer notar también que, por tratarse de una forma explícita, este algoritmo de daño es mucho más rápido que cualquiera de los algoritmos que involucren plasticidad. Como conclusión de esto y de lo expresado en el párrafo anterior, en aquellos problemas en los que se tiene seguridad de que no se producen descargas, convendría usar este algoritmo de daño.

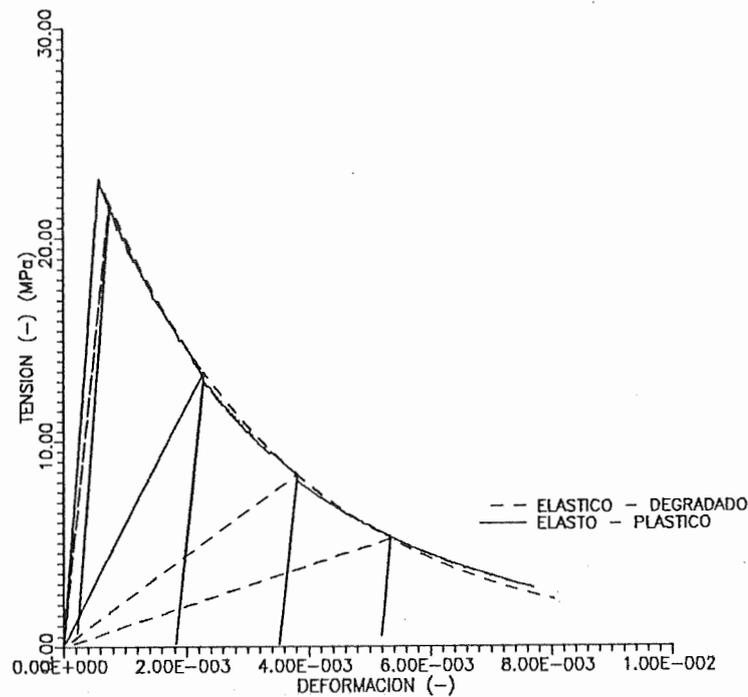


Fig.2.39 Comparación de procesos elasto-plástico y elástico degradado (daño explícito)

COMPARACION DEL MODELO ELASTO-PLASTICO CON EL MODELO DE DAÑO IMPLICITO

Las fig.2.40 se muestra la curva de respuesta obtenida con el modelo de daño plástico modificado y el modelo de daño implícito para la misma función de endurecimiento, esto es $f_c(\kappa^p) \equiv f_c(\kappa^d)$ y además coincidente con la de la fig.2.39. Las curvas tensión-deformación no coinciden en ningún caso porque la evolución de la energía disipada no es la misma en ambos casos. En la fig.2.40 puede verse dos puntos de igual tensión A y B sobre las curvas y las ramas de descarga para ese nivel de tensión correspondientes a ambas curvas. La energía disipada hasta ese nivel de tensión queda definida por el área encerrada por las curvas de carga y descarga en ambos casos. Puede verse que, a igualdad de tensión, la energía disipada es la misma.

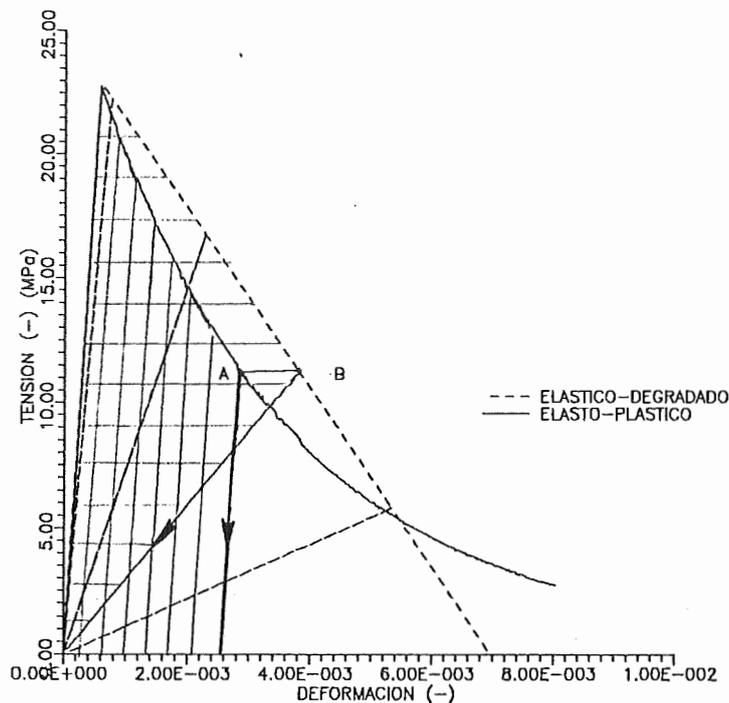


Fig.2.40 Comparación de procesos elasto-plástico y elástico degradado (daño implícito)

2.3.4. PLASTICIDAD Y DAÑO

2.3.4.1. Introducción

La mayoría de los materiales friccionales, como el hormigón, presentan un comportamiento marcadamente no lineal con deformaciones permanentes y degradación de rigidez [Chen 1982, Ortiz 1985].

Las deformaciones irreversibles que ocurren en los geomateriales son causadas por la microfisuración. El daño o la degradación del material está relacionada con la iniciación, crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos.

Los mecanismos físicos de interacción entre el daño y las deformaciones plásticas son de naturaleza complicada y no pueden ser modelados a través de un modelo constitutivo fenomenológico. Se sabe muy poco respecto de los efectos de la temperatura, velocidad de deformación, localización o

microestructura en estas interacciones.

Existen distintas formas de acoplar los fenómenos de plasticidad y degradación de rigidez. En esta tesis se propone un modelo que acopla los fenómenos de deformaciones permanentes y degradación de rigidez.

Se presenta primero un modelo que trata la plasticidad y el daño en forma desacoplada y luego el modelo propuesto que acopla ambos fenómenos. En ambos casos se utiliza el modelo de daño implícito. En la presentación se desarrolla sólo el caso de daño isótropo con una única variable de daño d por simplicidad en la notación. Para el caso general de daño se pueden encontrar las ecuaciones correspondientes siguiendo el procedimiento que se indica a continuación.

2.3.4.2. Forma Desacoplada

En este modelo se hace actuar independientemente primero el daño y luego la plasticidad.

El criterio de daño y de evolución del daño se plantean como se describió en el modelo de daño implícito. Al plantear la condición de consistencia de daño se supone que no hay incremento de deformaciones inelásticas y se obtiene así el incremento de la variable de daño con las mismas ecuaciones (2.145) y (2.155) o (2.162). Finalmente se incrementa la variable de daño.

A continuación se resuelve el problema plástico con la tensión ya degradada. Para ello se utiliza las mismas ecuaciones del modelo de daño plástico modificado, teniendo en cuenta que:

$$\sigma_{ij} = (1-d) \sigma_{o,ij} \quad (2.175)$$

y

$$\dot{d} = 0 \quad (2.176)$$

porque la variable de daño ya fue actualizada.

La ley constitutiva secante total se obtiene de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e = (1-d) C_{rskl}^o \left(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^p \right) \quad (2.177)$$

La ley constitutiva tangente se obtiene a partir de la variación temporal de la ecuación (2.177):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e - \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_{ij} - C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^p \\ \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} - C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^p = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} - C_{ijkl}^s \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \end{aligned} \quad (2.178)$$

Donde:

$$C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_{ij} \quad (2.179)$$

Reemplazando la ec.(2.162), se obtiene:

$$C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{1-d} \sigma_{ij} \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tu}} (1-d) C_{tukl}^o \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{o_{mn}}} \quad (2.180)$$

$$C_{ijkl}^e = C_{ijkl}^s - \frac{1}{1-d} \sigma_{ij} \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tu}} (1-d) C_{tukl}^o}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{o_{mn}}} \quad (2.181)$$

La ecuación (2.178) se puede escribir como :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ep,ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.182)$$

Donde $C_{ep,ijkl}^t$ es el tensor elastoplástico degradado tangente, que se obtiene de la condición de consistencia plástica, como sigue :

$$\dot{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i = 0 \quad (2.183)$$

Reemplazando el incremento de tensión por la ec.(2.178) y la deformación plástica por la regla del flujo de ec.(2.66), se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} = h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{kl}, c)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.184)$$

Despejando se puede calcular el parámetro de consistencia plástica como sigue :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}}{h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{tu}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{rs}, c)}{\partial \sigma_{tu}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (2.185)$$

Reemplazando $\dot{\lambda}$ la ec. (2.178) se obtiene:

$$C_{ep,ijkl}^t = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}^e}{h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{tu}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{rs}, c)}{\partial \sigma_{tu}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (2.186)$$

En la ec.(2.186) puede verse que el tensor tangente $C_{ep,ijkl}^t$, en general, no es simétrico. La condición para que este tensor sea simétrico es que:

$$C_{ijrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \propto \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnij}^e \quad (2.187)$$

La teoría de plasticidad clásica, introduce el concepto de *flujo plástico asociado* a través de una regla de *normalidad a la superficie de fluencia* la que está definida en el espacio de tensiones mediante las ecuaciones (D.32) y (D.33). La regla de flujo asociada definida en esta forma es equivalente al axioma de la máxima disipación plástica para el caso en que la rigidez se mantenga constante [Lubliner 1986]. Una definición más general, de *regla de flujo asociada*, válida para materiales con degradación de rigidez, está dada por la ec.(2.187) [Oller 1988, Lubliner 1989].

2.3.4.3. Forma Acoplada

Este modelo es similar al anterior, tanto en las formas de las ecuaciones de daño como las de plasticidad. La única diferencia es que en este caso se deben cumplir simultáneamente las condiciones de consistencia de plasticidad y daño. Esto hace que las formas para la evolución de las variables de daño y plasticidad sean distintas que en el modelo anterior. Si bien esto complica un poco los desarrollos algebraicos, el modelo así planteado permite asegurar que la energía disipada a lo largo del proceso sea exactamente la que se tiene que disipar.

EVOLUCION DEL DAÑO Y DE LAS DEFORMACIONES PLASTICAS

La evolución de la variable de daño d y de las deformaciones plásticas puede obtenerse a partir del *cumplimiento simultáneo* de las condiciones de consistencia de daño y de plasticidad :

$$\begin{cases} \dot{\hat{G}}^D = 0 \\ \dot{F} = 0 \end{cases} \quad (2.188)$$

La condición de consistencia de daño puede escribirse como:

$$\dot{\bar{\sigma}} - \dot{f}_c = 0 \quad (2.189)$$

donde

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.190)$$

Teniendo en cuenta que :

$$\sigma_{ij} = (1-d) \sigma_{oij} = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p \right) \quad (2.191)$$

Resulta :

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\sigma_{oij} \dot{d} + (1-d) \dot{\sigma}_{oij} \quad (2.192)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\sigma_{oij} \dot{d} + (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} - (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl}^p \quad (2.193)$$

y

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \left[-\sigma_{oij} \dot{d} + (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} - (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl}^p \right] \quad (2.194)$$

Por otro lado :

$$\dot{f}_c = \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial d} \dot{d} = \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} \dot{d} \quad (2.195)$$

Reemplazando en la condición de consistencia de daño (2.189), se obtiene :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \left[\sigma_{ij} \dot{d} + (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - (1-d) C_{ijkl}^o \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right] - \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} \dot{d} = 0 \quad (2.196)$$

La condición de consistencia plástica se escribe :

$$\dot{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i = 0 \quad (2.197)$$

Reemplazando $\dot{\sigma}_{ij}$ y α , se obtiene :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left[\sigma_{ij} \dot{d} + (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - (1-d) C_{ijkl}^o \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right] +$$

$$- h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \lambda \frac{\partial G(\sigma_{kl}, c)}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (2.198)$$

De la resolución simultánea de las ecuaciones (2.198) y (2.196), se pueden obtener \dot{d} y $\dot{\lambda}$:

$$\dot{d} = \frac{A_1}{A_2} \quad (2.199)$$

$$\begin{aligned}
 A_1 = & \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \left(h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{tu}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{rs}, c)}{\partial \sigma_{tu}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) + \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right] C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.200)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & \left(h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{mn}}(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{rs}, c)}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \left(\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{o,ij} \right) + \\
 & - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{o,ij} \quad (2.201)
 \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{A_3}{A_2} \quad (2.202)$$

$$A_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \left(\sigma_{o, mn} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right) C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.203)$$

LEY CONSTITUTIVA SECANTE TOTAL

La ley constitutiva secante total se obtiene, igual que en el modelo anterior, a partir de la desigualdad de Clausius-Planck [Lubliner 1985, Malvern 1969]. De su cumplimiento se deduce que :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e = (1-d) C_{rskl}^o \left(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^p \right) \quad (2.204)$$

LEY CONSTITUTIVA TANGENTE

Tomando la variación temporal de la ecuación (2.204) se obtiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e - \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_{ij} \quad (2.205)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e - C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^p \quad (2.206)$$

$$C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e = \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e - \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_{ij} \quad (2.207)$$

Reemplazando \dot{d} por la ec.(2.197), se tiene:

$$C_{ijkl}^e = C_{ijkl}^s - \frac{1}{A_2} \sigma_{o,ij} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tu}} \left(h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{mn}}(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{rs}, c)}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrst}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) + \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrst}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{tu}} \right] C_{tukl}^s \quad (2.208)$$

La ecuación (2.204) se puede escribir como :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ep,ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (2.209)$$

Donde $C_{ep,ijkl}^t$ es el tensor elastoplástico degradado tangente, que se obtiene de la condición de consistencia plástica, de la misma forma que el modelo desacoplado y resulta:

$$C_{epijkl}^l = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}^e}{h_c(\sigma_{rs}, \kappa^p, c) h_{\kappa_{tu}}(\sigma_{mn}, \kappa^p, c) \frac{\partial G(\sigma_{rs}, c)}{\partial \sigma_{tu}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (2.210)$$

2.3.4.4. Ejemplos de Aplicación

COMPARACION ENTRE LOS MODELOS
DESACOPLADO Y ACOPLADO

Para comparar las formas desacopladas y acopladas presentadas en los apartados anteriores se desarrolló en primer lugar un ejemplo simple consistente en un ensayo de un prisma de hormigón a compresión uniaxial. Como datos del problema se dieron las mismas curvas de endurecimiento para daño que para plasticidad y una energía a disipar en cada uno de estos procesos. Se resolvió este problema en forma desacoplada y luego en forma acoplada.

Las características mecánicas del hormigón utilizado se han resumido en la Tabla 2.10.

TABLA 2.10 Características mecánicas del hormigón

$E_o = 30000 \text{ MPa}$	Criterio de Fluencia :
$\nu = 0,24$	Lubliner-Oller ($\alpha=0,12; \gamma=3,0, p=0,0$)
$\sigma_c^o = 22,9 \text{ MPa}$	Función de potencial :
$\sigma_c^{pic} = 32,8 \text{ MPa}$	Mohr Coulomb $\psi=15^\circ$
$\sigma_f^o = 2,29 \text{ MPa}$	$G_c^p = 38\text{N/mm}; G_c^d = 38\text{N/mm}$
$\kappa_{pic}^p = \kappa_{pic}^d = 0,20$	$G_f^p = 0,08\text{N/mm}; G_f^d = 0,08\text{N/mm}$

En la fig.2.41 se han representado las curvas tensión-deformación obtenidas. Las ramas de descarga muestran la presencia de degradación de rigidez y deformaciones permanentes. La curva del algoritmo acoplado difiere ampliamente de la del algoritmo desacoplado, sobre todo en la rama

descendente. En el caso del algoritmo acoplado, la energía total disipada en el proceso es igual a la suma de las energías máximas a disipar por daño y por deformaciones permanentes. Esto no se verifica en el caso del algoritmo desacoplado.

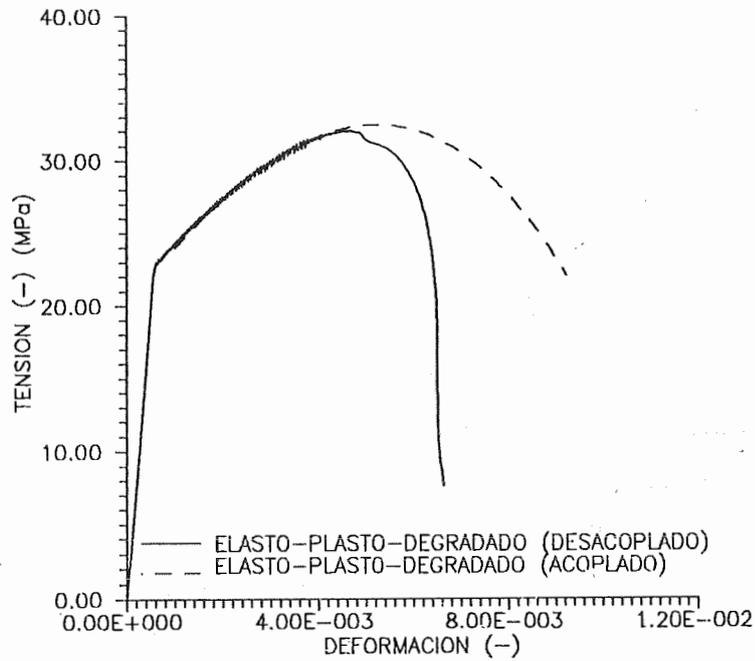


Fig.2.41 Comparación de los modelo de plasticidad+daño acoplado y desacoplado

ENSAYO DE COMPRESION BIAXIAL [Kupfer 1969]

Este ejemplo consiste en el estudio del comportamiento de una probeta de hormigón de 20,0x20,0x5,0 cm bajo compresión biaxial simétrica [Kupfer 1969]. En la Tabla 2.11 se ha resumido las características mecánicas del hormigón.

TABLA 2.11. Características mecánicas del hormigón

$E_o = 30000 \text{ MPa}$	Criterio de Fluencia :
$\nu = 0,24$	Lubliner-Oller ($\alpha=0,12; \gamma=3,0, p=0,0$)
$\sigma_c^o = 22,9 \text{ MPa}$	Función de potencial :
$\sigma_c^{pic} = 32,8 \text{ MPa}$	Mohr Coulomb $\psi=15^\circ$
$\sigma_t^o = 2,29 \text{ MPa}$	$G_c=16\text{N/mm}$ ($G_c^p=8\text{N/mm}; G_c^d=8\text{N/mm}$)
$\kappa_{pic}^p = \kappa_{pic}^d = 0,38$	$G_f=0,16\text{N/mm}$ ($G_f^p=0,08\text{N/mm}; G_f^d=0,08\text{N/mm}$)

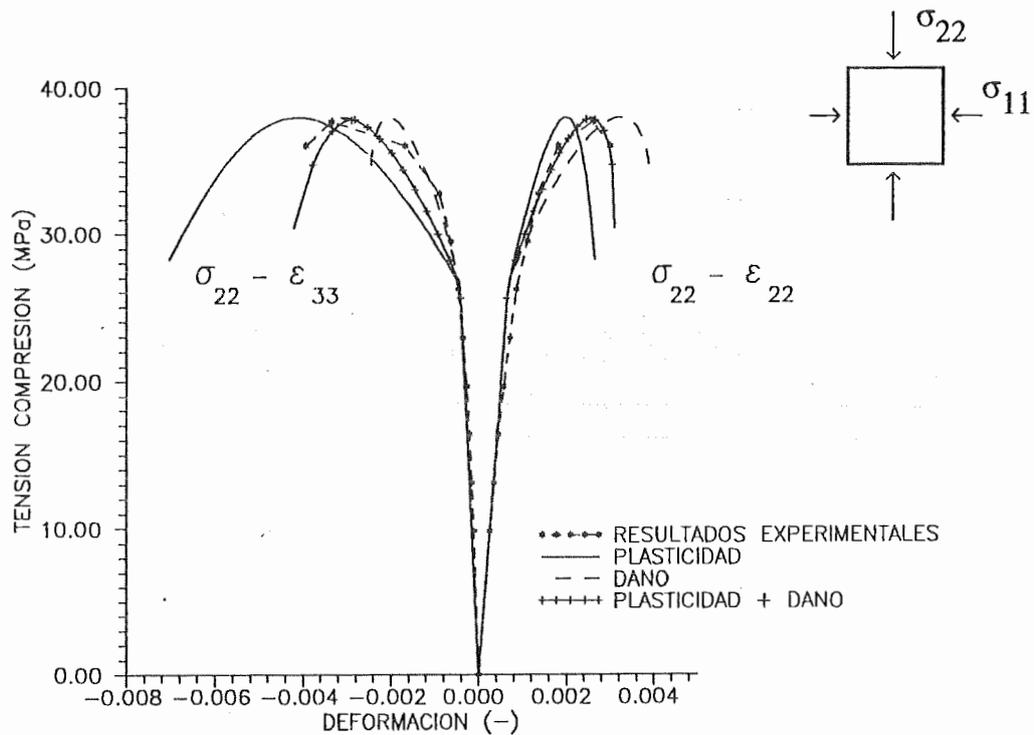


Fig.2.42. Ensayo de compresion biaxial, Kupfer [1969]

En la fig.2.42 se han representado las curvas tensión-deformación en el plano de la carga y en la dirección normal a dicho plano obtenidas experimentalmente y mediante el modelo acoplado propuesto. Se han representado tres curvas numéricas. La primera de ellas corresponde a la solución del problema como si toda la energía se disipara en forma de deformaciones permanentes (plasticidad), la segunda de ellas corresponde al

caso en que toda la energía es disipada por degradación de rigidez, la tercera corresponde a un caso intermedio, más real, en que parte de la energía se disipa por daño y parte por deformaciones inelásticas. Como era de esperar, puede verse que la tercera curva cae entre las dos primeras y se aproxima notablemente a los resultados experimentales obtenidos por Kupfer [1969].

ENSAYO DE COMPRESION CICLICA [Sinha 1964]

Este ejemplo fue utilizado para verificar la capacidad del modelo de daño + plasticidad acoplados para reproducir el comportamiento del hormigón bajo compresión uniaxial cíclica.

Las características mecánicas del hormigón se han resumido en la Tabla 2.12.

TABLA 2.12. Características mecánicas del hormigón

$E_o = 19324,4 \text{ MPa}$	Criterio de Fluencia :
$\nu = 0,24$	Lubliner-Oller ($\alpha=0,12$; $\gamma=3,0$, $p=0,0$)
$\sigma_c^o = 22,0 \text{ MPa}$	Flujo asociado
$\sigma_c^{\text{pic}} = 26,5 \text{ MPa}$	
$\sigma_t^o = 2,20 \text{ MPa}$	$G_c = 40 \text{ N/mm}$ ($G_c^p = 30 \text{ N/mm}$; $G_c^d = 10 \text{ N/mm}$)
$\kappa_{\text{pic}}^p = \kappa_{\text{pic}}^d = 0,12$	$G_f = 0,16 \text{ N/mm}$ ($G_f^p = 0,08 \text{ N/mm}$; $G_f^d = 0,08 \text{ N/mm}$)

En la fig. 2.43 se han representado las curvas obtenidas experimentalmente y la correspondiente al modelo de plasticidad y daño acoplados. Puede observarse que el modelo logra reproducir ajustadamente los resultados experimentales. Las ramas de descarga tienen aproximadamente la misma inclinación promedio. Obviamente, el modelo formulado descarga elásticamente, con un módulo degradado y vuelve a cargar por la misma rama hasta el punto de la descarga no permitiendo lograr las lazos de histéresis obtenidos experimentalmente.

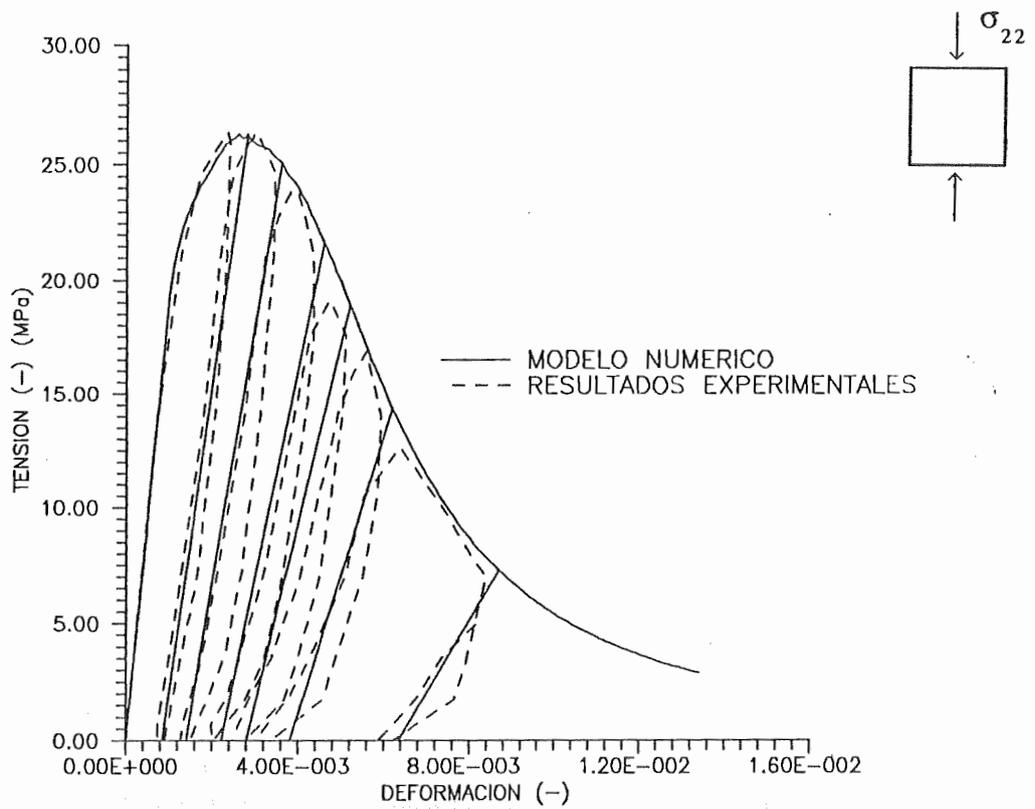


Fig. 2.43 Ensayo de compresión cíclica [Sinha 1964]

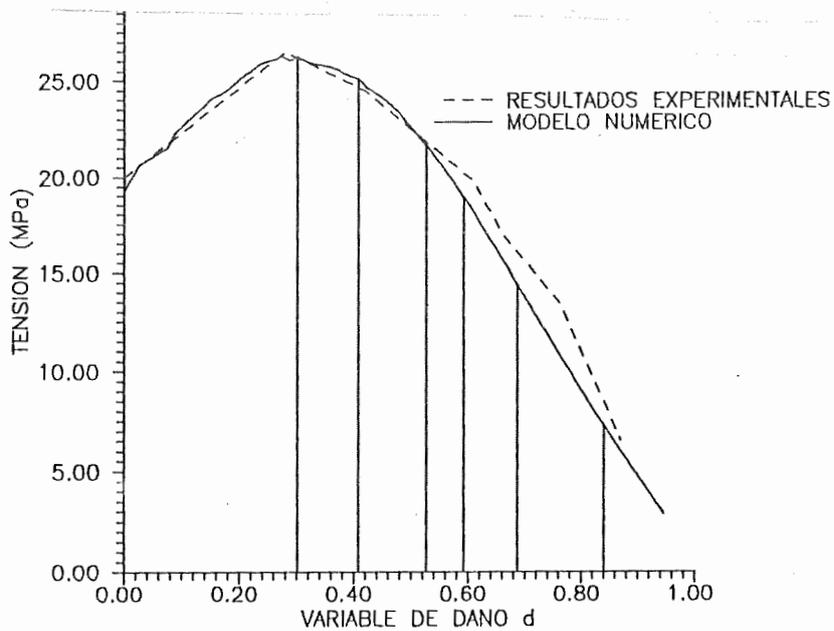


Fig. 2.44 Evolución de la variable de daño en el ensayo de compresión cíclica [Sinha 1964]

En la la figura 2.44 se han representado la curva tensión-variable de daño d resultante de los ensayos y la obtenida con el modelo. Se puede ver que ambas curvas son bastante coincidentes, lo cual ya se intuía al ver la coincidencia de pendiente promedio en las ramas de descarga de la fig.2.43.

2.4. CONSIDERACIONES FINALES

El modelo presentado contempla gran parte de los aspectos más importantes que caracterizan el comportamiento inelástico de los geomateriales, tales como la respuesta diferenciada para cada proceso de tensión-deformación multiaxial y la combinación de fenómenos de fisuración con aplastamiento a través de un tratamiento unificado. El uso de una formulación plástica localmente isótropa, combinada con el concepto de localización del daño, da lugar a un comportamiento globalmente anisótropo.

El modelo propuesto resuelve simultáneamente el problema de evolución de las deformaciones permanentes y de degradación de rigidez, permitiendo cumplir en cada paso de carga con las condiciones de consistencia plástica y de daño. De esta forma se puede controlar y asegurar que la energía disipada en el proceso sea la correcta.

La estructura del modelo acoplado es simple, presentando una analogía prácticamente total con otros modelos elastoplásticos usados para describir el comportamiento de materiales friccionales.

Los ejemplos desarrollados permiten ver que el modelo presentado es capaz de reproducir el comportamiento del hormigón baja carga creciente y bajo carga cíclica, logrando reproducir adecuadamente el desarrollo de deformaciones permanentes y la degradación de la rigidez.

ANEXO 2.1

OBJETIVIDAD DE LA RESPUESTA

A2.1.1. INTRODUCCION

Cuando un sólido se ha deformado suficientemente dentro del rango plástico, superando el pico de tensiones, se produce una concentración de deformaciones inelásticas en una zona reducida del mismo. Este fenómeno, que se denomina *localización de deformaciones*, ocurre tanto en los materiales dúctiles como en los frágiles y suele conducir a la rotura del material.

En el hormigón y en los materiales geológicos en general, la falla ocurre por un daño progresivo que se manifiesta por fenómenos como la microfisuración y la formación de vacíos, formando bandas de gran deformación. Los materiales dúctiles, en cambio, tienden a fallar por corte, a medida que bandas muy finas experimentan deformaciones considerables.

Para muchos autores, la localización está asociada con la pérdida de

estabilidad del material. La bifurcación resultante está asociada con la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de equilibrio incrementales. Consideran que la bifurcación de la respuesta no sólo debe ser analizada a través de los valores propios de C_{ep}^t sino también a través de las condiciones críticas de propagación de ondas de aceleración y para ello proponen estudiar los valores propios del *tensor acústico* :

$$Q_{Tij} = n_k C_{ep,kijl}^t n_l \quad (A2.1.1)$$

donde n_k es el vector normal al plano de discontinuidad que se forma por efecto de la localización de deformaciones y $C_{ep,kijl}^t$ es el tensor elastoplástico tangente.

En la mayoría de las estructuras reales, la escala de dichos fenómenos es mucho menor que la de las mallas de elementos finitos y sus efectos deben ser incorporados en el análisis numérico mediante un modelo homogéneo que presenta ablandamiento.

Existen numerosos trabajos que tratan el problema de ablandamiento y localización de deformaciones desde distintos puntos de vistas y las dificultades que presentan en su simulación numérica :[Willam 1984a y 1984b, Ottosen 1986, Belytschko et al 1986, Ortiz et al [1987, De Borst 1987a, Bazant et al 1976 y 1978b, Oller 1988, Oliver 1988, Belytschko et al 1988, Pijaudier-Cabot 1988, Simo 1989, Ju 1989, Oller et al 1990b].

Los obstáculos más difíciles de salvar en la simulación numérica del problema de localización de deformaciones son los siguientes [Oller 1990b]:

- Falta de objetividad en la respuesta respecto a la malla de elementos finitos considerada ya que la solución no converge a un valor correcto cuando se refina la malla. Más allá, el uso de una teoría del continuo local es inapropiada porque hace que la disipación de energía en la zona de ablandamiento tienda a cero cuando la malla se refina.

- Incapacidad aparente de los elementos finitos usuales para captar el

fenómeno de localización en su dominio. Esto se debe a que los elementos finitos aproximan en forma continua el campo de deformaciones siendo incapaces de simular los grandes gradientes de desplazamiento producidos por la localización de deformaciones.

- La incompresibilidad que presenta el material durante algunos procesos de carga en el punto en que comienza la localización de deformaciones. En ese momento se produce un cambio en el signo de la deformación volumétrica total [Oller 1988] dando lugar a un coeficiente de Poisson que se acerca a 0,5. Esto produce un efecto de incompresibilidad que se traduce en un bloqueo o sobrerigidización de los elementos finitos. Esta situación se produce independientemente de la función de fluencia adoptada.

- Para materiales elásticos y elastoplásticos las ecuaciones del problema pierden elipticidad y eso impide la propagación de ondas (el tensor acústico tiene valores propios imaginarios).

A2.1.2. PROBLEMA DE OBJETIVIDAD DE LA RESPUESTA

Los sólidos friccionales sometidos a procesos de carga cuasi-estáticos, tienden a localizar (concentrar) la deformación en un volumen infinitesimal (plano de fractura), donde se disipa casi la totalidad de la energía entregada al sólido. Ver Fig A2.1.1

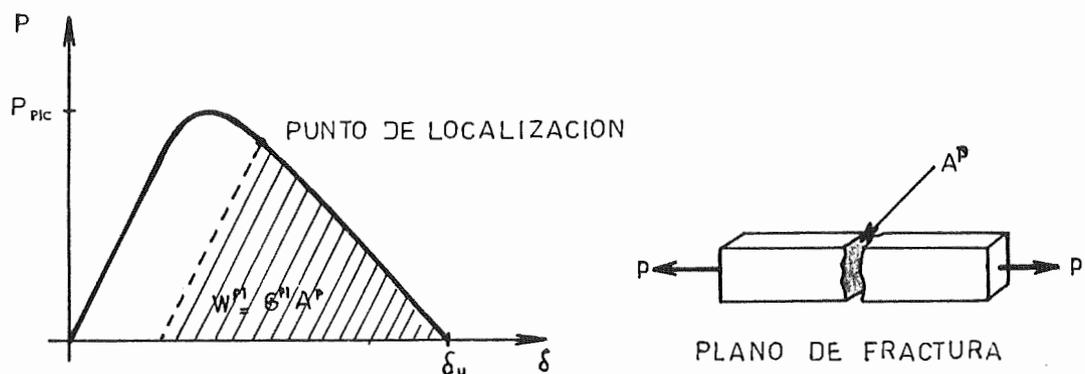


Fig. A2.1.1 Fenómeno de fractura real

El problema de la objetividad de la respuesta de los modelos basados en formulaciones locales, que consideran el ablandamiento como una propiedad del material en el punto de análisis no está totalmente aclarado habiendo opiniones muy divididas. A continuación se describe la forma en que se trata el problema en esta tesis [Oller 1988, Willam et al 1988a y 1988b]

Este procedimiento parte de la hipótesis de que la localización define una zona de daño donde se disipa una energía plástica limitada al tamaño de esa zona, mientras en el resto del sólido se produce una descarga elástica.

Para simular este comportamiento discontinuo por medio de la mecánica del sólido continuo, el modelo de daño plástico formula un comportamiento inelástico con ablandamiento que produce la localización del daño en una zona de volumen finito (zona dañada) que estará formada por el lugar geométrico de los puntos isotrópicamente dañados (ver fig.A2.1.2). En esta zona dañada se admite una fuerte variación del campo de desplazamientos, con una discontinuidad entre el campo de deformaciones de la zona dañada y no dañada.

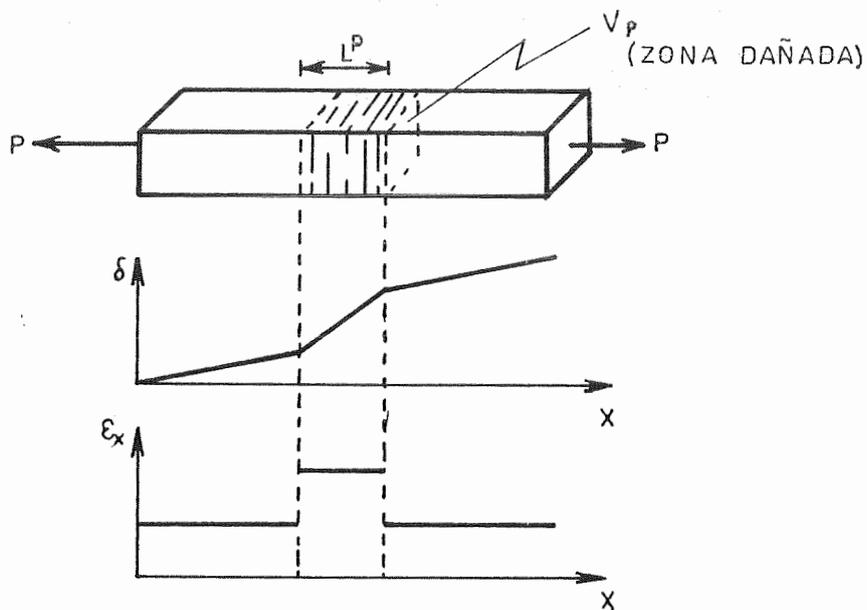


Fig. A2.1.2. Idealización de la fractura en el modelo de daño plástico

Esta formulación, con ablandamiento y disipación, conduce a que el sólido disipe casi la totalidad de la energía a través del volumen dañado y por lo tanto la energía disipada depende del tamaño de la zona dañada. Como se trata de simular un proceso discontinuo a través de un modelo continuo es necesario exigir que la energía disipada sea independiente de las dimensiones de la zona dañada (objetividad) y que, además, sea igual a la energía disipada en el proceso discontinuo real (exactitud de la respuesta).

Con el propósito de objetivizar la respuesta y disipar la energía correcta, el modelo que se presenta necesita considerar en su ley tensión-deformación una medida que depende de la relación que hay entre el *volumen de la zona dañada* V^p y el *área de fractura o discontinuidad* A^p . Para ello, se admite como hipótesis que la energía específica inelástica g^p no sólo depende de la *energía por unidad de área dañada* G^{p1} (considerada por hipótesis como una propiedad del material e igual a la *energía de fractura* G^f para un proceso de tracción simple y a la *energía de aplastamiento* G^c para un proceso de compresión simple), sino que también depende de una propiedad geométrica, que en este caso se la define como la relación:

$$L^p = V^p / A^p \quad (A2.1.2)$$

Si siguiendo esta hipótesis, se define la energía específica inelástica como :

$$g^p = g^{p0} + g^{p1} \quad (A2.1.3)$$

Donde g^{p0} es la *energía específica inelástica* consumida durante un proceso de microfisuración previo a la localización del daño, que puede calcularse a partir de las curvas $\sigma_T - \epsilon_T^p$ y $\sigma_C - \epsilon_C^p$ obtenidas experimentalmente, y g^{p1} la energía específica consumida durante el proceso de localización (ver fig.A2.1.3):

$$g^{p1} = W^{p1} / V^p = G^{p1} A^p / V^p = G^{p1} / L^p \quad (A2.1.4)$$

Donde W^{p1} es la energía disipada en todo el sólido, desde el momento en que se inicia la localización hasta el final del proceso de carga.

L^P puede ser considerada como una longitud característica que debe ser una medida del ancho de la zona dañada o banda de localización.

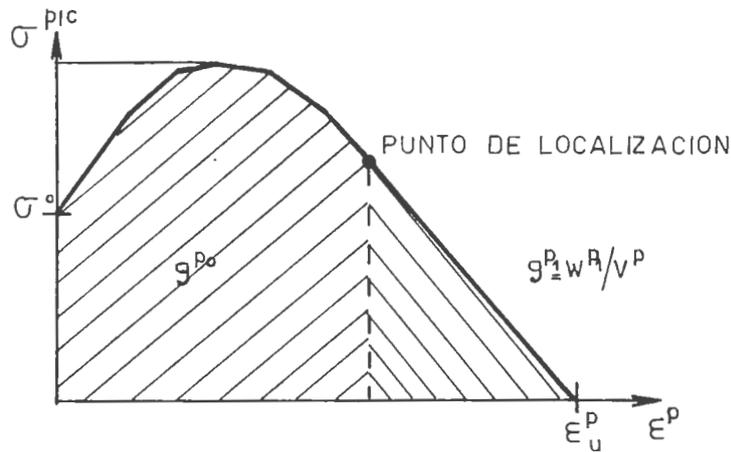


Fig.A2.1.3. Energía disipada en un proceso uniaxial

Distintos investigadores han propuesto formas muy diversas para calcular la longitud característica. Actualmente sigue siendo un tema abierto de discusión, no habiéndose encontrado en ningún caso una solución satisfactoria y compatible con la rigurosidad con que se tratan los restantes problemas que intervienen en las formulaciones constitutivas.

En este trabajo se utiliza para L^P una expresión propuesta por Bazant [Bazant 1983], que da resultados satisfactorios cuando se trabaja con elementos finitos con geometría regular :

$$L^P = L^{pe} = \sqrt{A^e} / \cos\vartheta \tag{A2.1.5}$$

Donde A^e es el área del elemento finito donde se localiza la zona dañada y ϑ el ángulo que hace la banda con el eje de referencia global. Ver fig.A2.1.4.

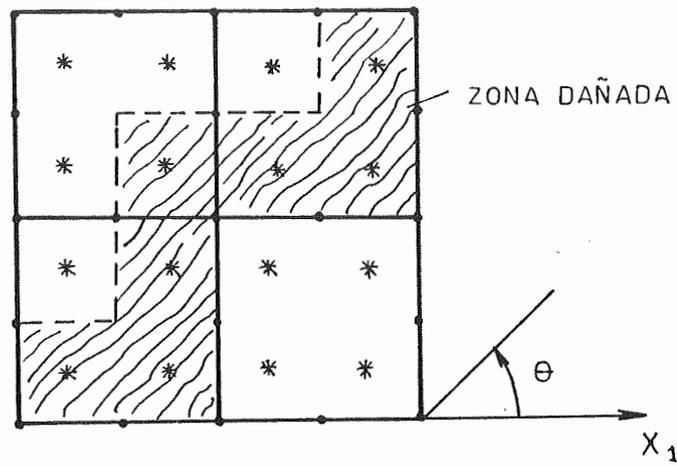


Fig.A2.1.4. Estimación de la longitud característica de un elemento finito

ANEXO 2.2

DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO

A2.2.1. INTRODUCCION

El daño local , en cada punto del sólido, puede considerarse como un fenómeno adireccional. La dirección macroscópica (fractura) del daño queda definida por el lugar geométrico de los puntos isotrópicamente dañados. Si bien en el espacio de tensiones cada punto del sólido exhibe un comportamiento isótropo, en el espacio de deformaciones plásticas puede interpretarse cierta direccionalidad del daño, relacionada con la deformación plástica. Así, se admite como hipótesis que la magnitud y dirección del daño local resultan de un análisis del tensor de deformaciones plásticas ϵ_{ij}^p :

$$\epsilon_{ij}^p = \int_{t=0}^t \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} dt \quad (A2.2.1)$$

Observando esta ecuación, se puede interpretar al parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ como la magnitud del incremento del daño en un punto y al flujo plástico $\partial G / \partial \sigma_{ij}$ como la orientación del daño en el espacio de tensiones principales. Como el modelo de daño plástico no requiere ni la dirección, ni la magnitud del daño, esto no necesita formar parte del cálculo sino que puede utilizarse en el postproceso de los resultados para obtener información acerca de la magnitud y dirección del daño en ciertos puntos, por ejemplo los puntos de integración, en el método de los elementos finitos. La interpretación de los resultados, obtenidos de esta forma, coincide muy bien con los estudios experimentales y también con los obtenidos con otros modelos ortótropos, que sí necesitan determinar la dirección del daño durante el proceso de cálculo [Oller 1988].

La magnitud, dirección y demás información sobre el estado de daño en un punto del sólido discreto, se obtiene a posteriori de un proceso de cálculo, una vez que se ha logrado la convergencia de los resultados hacia un estado de equilibrio.

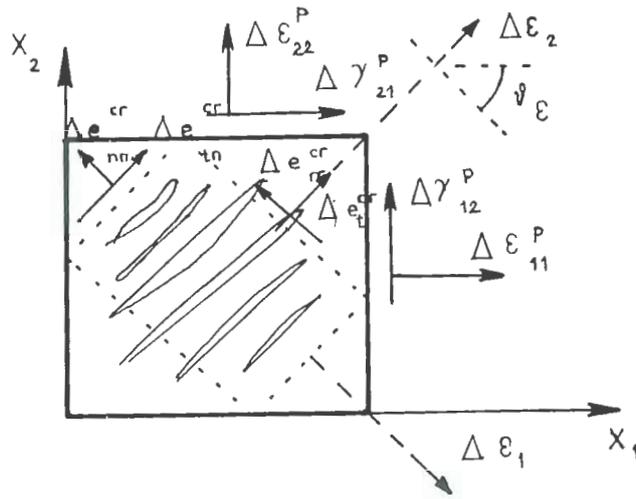
A2.2.2. DIRECCION DEL DAÑO PLASTICO

Se considera que el daño en un punto del espacio discreto comienza cuando $\kappa^p > 0$. A partir de ese momento se considera que hay daño (fisuración) y que su dirección local queda definida por la componente normal a la dirección principal mayor del tensor de deformación plástica. Ver fig.A2.2.1a:

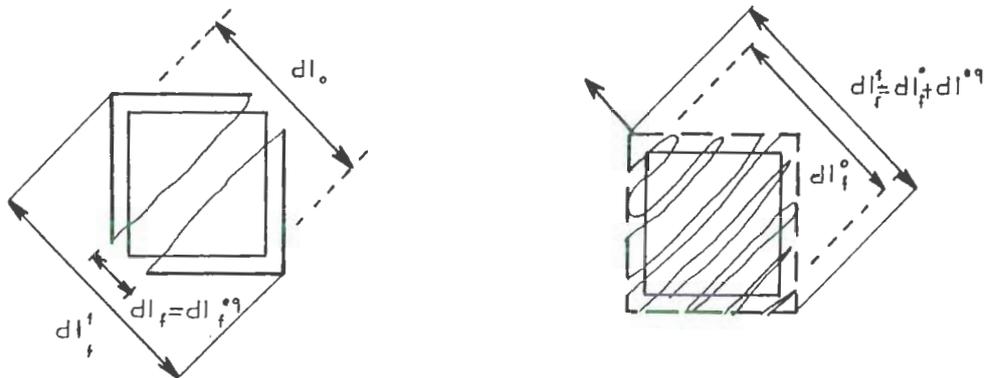
$$\vartheta_{\epsilon} = \vartheta(\epsilon_{ij}^p) \quad (A2.2.2)$$

Donde ϵ_{ij}^p es la deformación plástica definida según un sistema de referencia global y ϑ_{ϵ} el ángulo que hay entre la deformación específica principal mayor y lado positivo del eje material x_1 .

Analizando el signo de las componentes principales del tensor de deformación plástica se tiene aplastamiento si la de mayor valor absoluto es negativa y fisuración si la de mayor valor absoluto es positiva.



a) Dirección local de fisuración



b) Fisura real y fisura distribuida equivalente a la real

Fig. A2.2.1 Direccionalidad del daño plástico en un punto

A2.2.3. MAGNITUD DEL DAÑO PLÁSTICO

El modelo considera al daño como una deformación localizada en una cierta zona de dimensiones finitas que se ha denominado zona de daño plástico. En virtud de esto, se puede considerar que una fisura real es la acumulación en una zona de dimensiones infinitesimales, de todo el daño distribuido en la zona de daño plástico. De esta manera, mediante el pos-proceso de los resultados, se obtiene una magnitud de

daño equivalente al de una fisura. Ver fig.A2.2.1b. Para cada punto del sólido se puede calcular el desplazamiento irrecuperable como :

$$dl_f^{eq} = \epsilon_1^p dl_f^0 \quad (A2.2.3)$$

Donde ϵ_1^p es la deformación plástica principal mayor dl_f^0 la dimensión inicial del punto en la dirección ϑ_ϵ .

A partir de esta última ecuación se puede obtener la magnitud del daño equivalente al de una fisura real, para un punto del espacio discreto, como:

$$I_f^{eq} = \int_{L^{pe}} \epsilon_1^p dl_f^0 \quad (A2.2.4)$$

Donde L^{pe} es la longitud característica de un elemento finito

CAPITULO 3

MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIALES SIMPLES ANISOTROPOS.

PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS CARGAS CUASI ESTATICAS DE CORTA DURACION PROBLEMAS TERMICAMENTE ESTABLES

3.1. INTRODUCCION

3.1.1. DESCRIPCION DEL PROBLEMA DE ANISOTROPIA

En general, se dice que un material es *anisótropo* cuando sus propiedades mecánicas varían según la dirección considerada. Son muchas las propiedades mecánicas de los materiales que sólo pueden ser definidas o medidas haciendo referencia a una dirección en el espacio. Cuando alguna propiedad física del material depende de la orientación, se debe decir que el material es *anisótropo respecto de esa propiedad* porque no necesariamente presenta el mismo grado de anisotropía respecto de todas sus propiedades mecánicas. Por ejemplo, el tungsteno es un material anisótropo respecto a sus tensiones de fluencia no así en lo que hace a sus propiedades elásticas, respecto de las

cuales es prácticamente isótropo [Van Houte 1992].

Como ejemplo de anisotropía elástica se puede tomar un prisma de madera como el de la fig.3.1. Si se realiza un ensayo de tracción en la dirección de la fibra se obtiene que la tensión es proporcional a la deformación a través de un módulo de elasticidad E_x . Si se realiza ahora el ensayo en la dirección transversal se obtiene una respuesta similar pero con un módulo elástico E_y distinto. El módulo elástico varía con la dirección considerada. Se dice entonces que la madera es un material anisótropo respecto de sus propiedades elásticas.

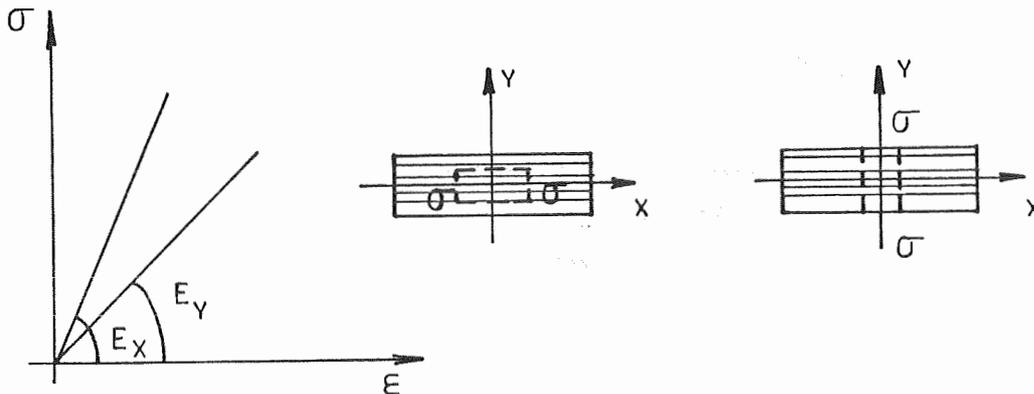


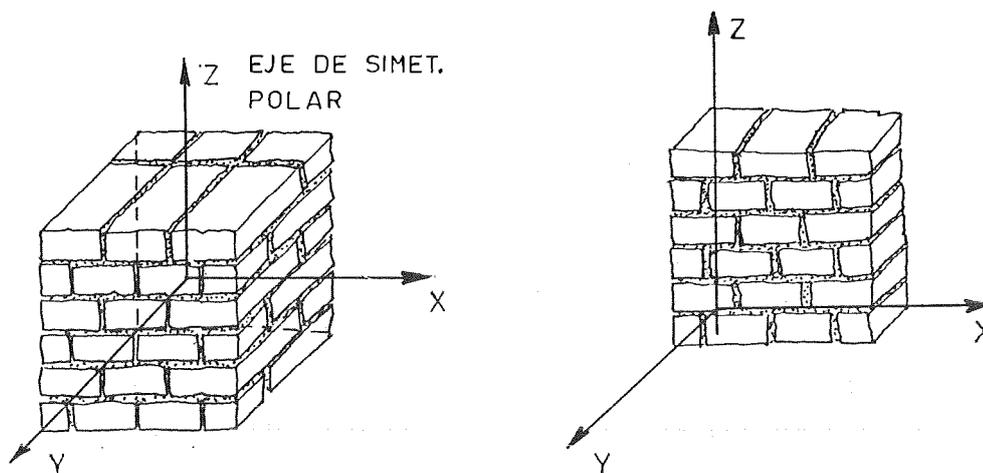
Fig.3.1. Anisotropía en el módulo de Young [Benedetti 1982]

La descripción matemática del comportamiento de este tipo de materiales es muy compleja. Afortunadamente, la mayoría de los materiales de interés en la ingeniería estructural presenta ciertas particularidades de simetría que simplifican el análisis. Por ejemplo, la madera es un material *ortótropo* polar porque es posible individualizar *tres direcciones mutuamente ortogonales de simetría* de sus propiedades mecánicas: axial, radial y circunferencial.

La rocas sedimentarias y metamórficas presentan, en la mayoría de los casos, *isotropía polar*, o dicho de otra forma son *transversalmente isótropas* [Benedetti 1982]. Es posible individualizar en ellas un *eje de simetría material*. Las características mecánicas no varían con la dirección en un plano ortogonal a ese eje, pero son distintas de las propiedades en la

dirección del eje mencionado.

Si se considera un bloque de mampostería como el de la fig.3.2a se tiene un caso típico de *isotropía polar* en el que el eje de isotropía es perpendicular al plano del mortero. Distinto es el caso de un panel de mampostería que debe ser considerado ortótropo con tres ejes de simetría material como se indica en la fig.3.2.b.



a) Bloque de mampostería

b) Panel de mampostería

Fig.3.2 Ejes de simetría material en la mampostería [Benedetti 1982]

3.1.2. DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ALGUNOS MATERIALES ANISOTROPOS

3.2.2.1. Mampostería de Ladrillos [Page 1979, 1981]

La mampostería es un material compuesto por bloques o ladrillos unidos por juntas de mortero. Las propiedades del conjunto dependen de las propiedades de los ladrillos, de las propiedades del mortero y de la disposición de los ladrillos y las juntas (topología estructural). Esto último hace que su comportamiento no dependa exclusivamente de su respuesta constitutiva.

Los ladrillos pueden ser cerámicos o de hormigón (bloques). Las

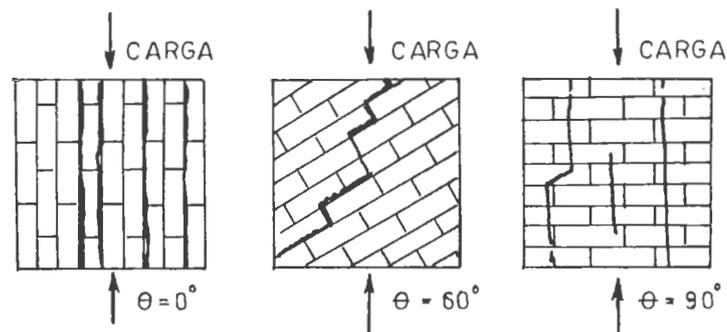
propiedades del ladrillo cerámico varían considerablemente aún para ladrillos de una misma cortada. Esta variación es inherente al proceso de fabricación y contribuye a la dispersión de los resultados obtenidos en ensayos de mampostería. Normalmente los ladrillos pueden ser considerados como materiales elásticos frágiles con un cierto grado de anisotropía que varía según el tipo de ladrillo.

Los morteros usados para mampostería están compuestos por distintas combinaciones de arena, cal, cemento y agua. Normalmente se utiliza morteros de baja resistencia. No es tan importante la resistencia del mortero como el alcanzar una adecuada adherencia con los ladrillos. Las propiedades mecánicas de los morteros son similares a las de un hormigón pobre. Presentan un comportamiento marcadamente no lineal, desarrollando deformaciones permanentes que son las principales responsables del comportamiento inelástico de la mampostería [Page 1981].

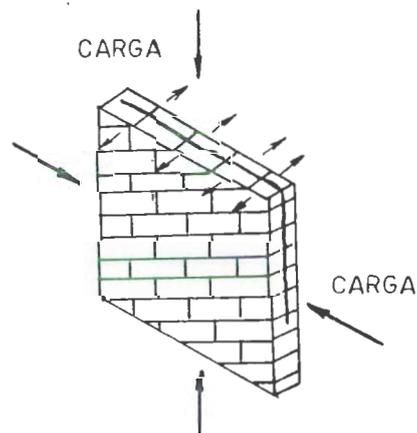
La mampostería transmite fuerzas de compresión en forma muy efectiva. Su capacidad de absorción de fuerzas de compresión está gobernada, entre otras cosas, por la resistencia a tracción de los ladrillos [Page 1981]. El fallo de estos ocurre por tracción debido a la tensión transversal provocada por la diferente expansión lateral de los ladrillos (más rígidos), respecto del mortero (más flexible) [Page 1981]. La resistencia a tracción de la mampostería es extremadamente baja debido a la baja adherencia entre el mortero y los ladrillos bajo tensiones de tracción. Para tracción normal a la junta se obtiene la mínima resistencia [Page 1981].

El comportamiento de la mampostería sujeta a estados complejos de tensión está muy influenciado por la orientación de las juntas de mortero respecto de las cargas. La mampostería presenta un comportamiento marcadamente direccional justamente debido a la influencia de las juntas de mortero que actúan como planos de debilidad. Su falla no puede ser definida entonces a través de un criterio en términos de tensiones principales en un punto. Se debe tener en cuenta también la orientación de las tensiones principales respecto de las juntas de mortero. Dependiendo de dicha orientación, la falla puede ocurrir sólo en la junta o en un mecanismo combinado de rotura de juntas y ladrillos [Page 1981].

En un panel de mampostería sujeto a cargas en el plano, se pueden distinguir dos modos de falla dependiendo de la orientación de las tensiones principales. Ejemplos típicos de estos modos de falla se muestran en la fig3.3.



a) Compresión uniaxial



b) Compresión biaxial

Fig.3.3 Modos de falla para ensayos de compresión biaxial en mampostería
[Page 1981]

Para compresión uniaxial la falla ocurre en planos normales al del panel. Dependiendo de la orientación de las juntas de mortero respecto de la carga aplicada, la falla ocurre por fisuración y deslizamiento en la cabeza o pie de los paneles o de una forma combinada de fisuración de juntas y ladrillos [Page 1981]. Para compresión uniaxial paralela al plano del mortero, la falla ocurre inicialmente por expansión lateral de las juntas de mortero, Fig.3.3.a1 [Page 1981]. Las columnas de ladrillo resultantes son capaces de seguir soportando carga, pero la primera falla es tomada como

carga de colapso y corresponde al momento en que las deformaciones laterales del panel aumentan bruscamente [Page 1981].

En el caso de compresión biaxial, esos modos de falla son impedidos por la presencia de una segunda tensión principal de compresión σ_2 . Para la mayoría de las relaciones σ_1/σ_2 , la falla ocurre en planos paralelos al del panel, independientemente de la orientación de la junta de mortero [Page 1981].

La transición entre los dos modos de falla de la fig.3.3 se produce para valores altos de la relación σ_1/σ_2 y dependiendo de la orientación de la junta.

Las envolventes de falla promedio obtenidas para cada orientación de las juntas han sido representadas en la fig.3.4.

Las propiedades elásticas de la mampostería varían con la inclinación de la junta de mortero respecto de la carga aplicada. Sin embargo dicha variación es bastante moderada en relación a la diferencia que existe en los modos de falla y en la resistencia cuando varía la inclinación de la junta.

Se ha demostrado experimentalmente que el grado de ortotropía disminuye notablemente en la mampostería armada que puede ser considerada isótropa con bastante aproximación [Page 1981].

Ensayos de compresión cíclica en paneles de mampostería [Naraine 1991, Bernardini 1978, 1979] han dado como resultado curvas similares a las obtenidas para el hormigón. En las figs.3.5a y b se han representado dichas curvas para compresión normal y paralela a la junta de mortero. En las mismas se pone en evidencia la presencia de deformaciones permanentes y degradación de rigidez bajo carga a la vez que un comportamiento diferenciado según la orientación de la junta.

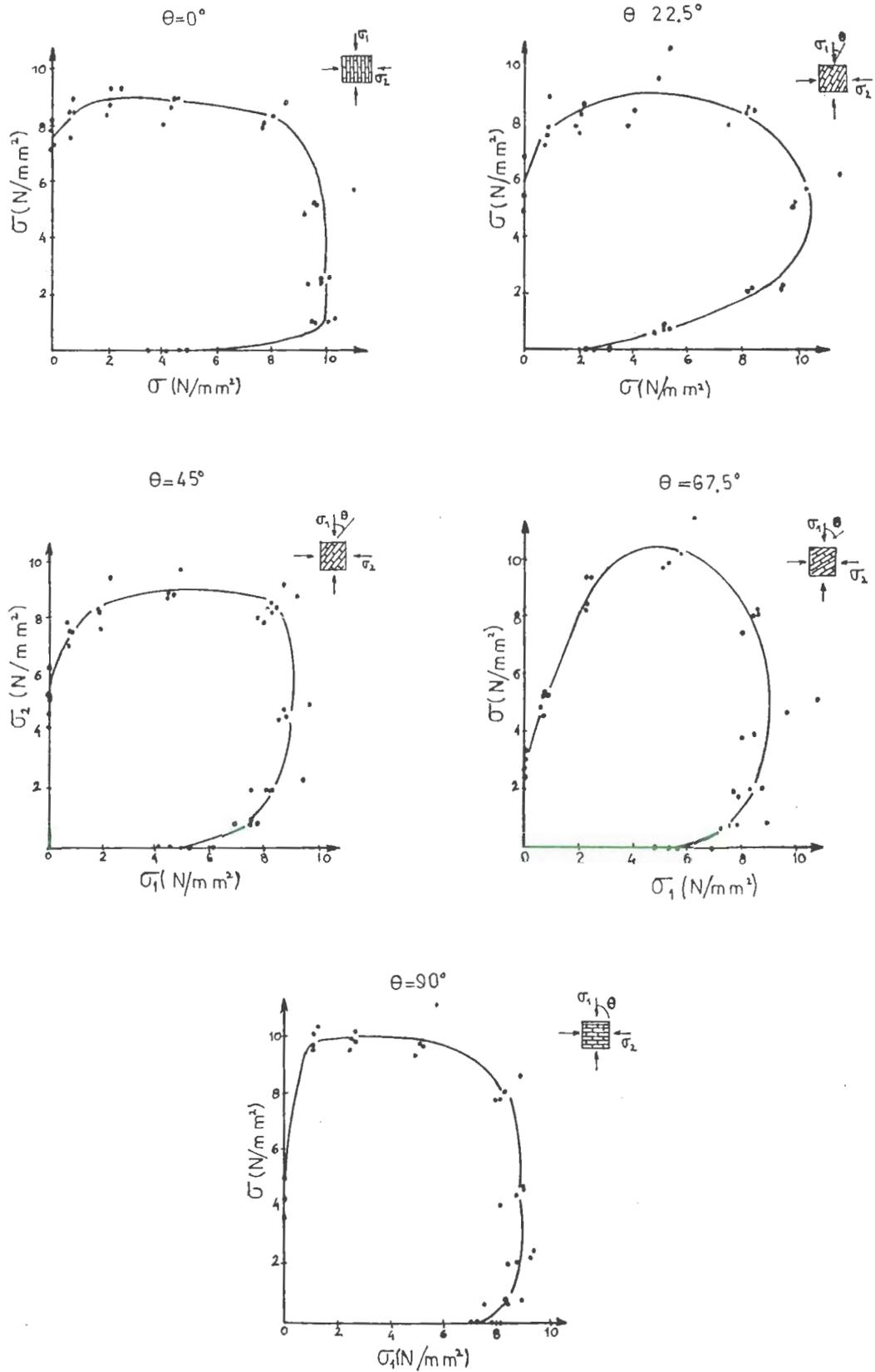
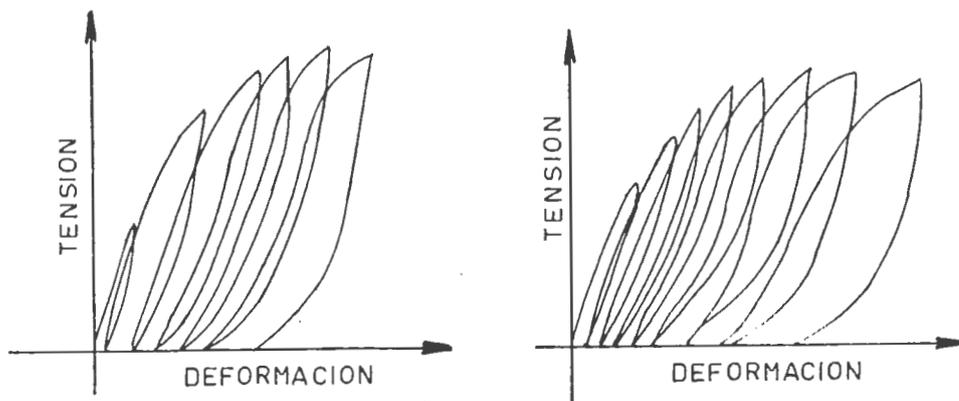


Fig.3.4 Falla de paneles de mampostería bajo compresión biaxial [Page 1981]



a) Carga normal a la junta b) Carga paralela a la junta
 Fig.3.5 Comportamiento de la mampostería bajo compresión cíclica
 [Naraine 1991]

3.2.2.2. Otros Materiales

La anisotropía en los suelos es un fenómeno que está siendo tenido en cuenta en los últimos tiempos. Existe considerable evidencia experimental sobre la ocurrencia de estructuras de suelos anisótropas en depósitos naturales o removidos de suelos cohesivos [Baker 1976]. Normalmente se acepta que las partículas de arcilla tienen formas no simétricas. Resulta entonces lógico pensar que esta forma no simétrica hace que las mismas se comporten en forma sensitiva respecto de la dirección tanto en el proceso de formación de la estructura del suelo como en las posteriores deformaciones del mismo. Esto produce en la estructura del suelo una anisotropía que se ve reflejada en la variación de las propiedades físicas del mismo.

Otros ejemplos de anisotropía aparecen en metales laminados [Van Houte 1992]. Supóngase que de una plancha de acero laminada del tipo de las que se utiliza para la fabricación de piezas de automóviles se extrae una muestra de prueba como la de la fig 3.6 donde x_1 es la dirección de laminado, x_2 la dirección transversal y x_3 la normal a la plancha laminada. α es el ángulo entre la dirección de laminado y el eje longitudinal de la pieza (x'_1) y x'_2 es la dirección transversal de la pieza. Supóngase ahora que se realiza un ensayo de tracción y se lo detiene a una deformación de referencia, por ejemplo 10% de deformación plástica en la dirección longitudinal. Se define

como r la relación entre la deformación transversal y la normal al plano, esto es:

$$r = \epsilon'_{22} / \epsilon'_{33} \tag{3.1}$$

Si el material fuera isótropo r debería ser igual a uno. Sin embargo, en la práctica, r varía entre 1,4 y 2,5 para los aceros que se usan en partes de automóviles y, más aún, es una función del ángulo α como se muestra en la fig.3.7.

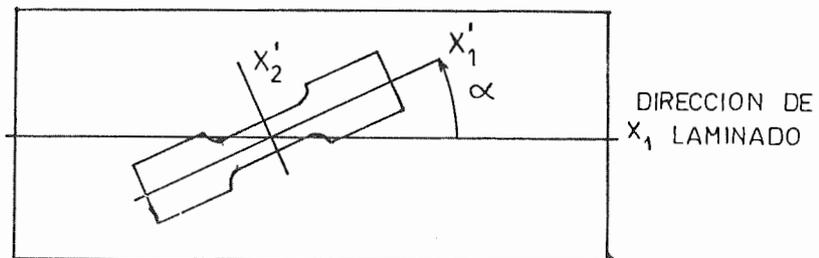


Fig.3.6 Pieza de metal laminado sometida tracción [Van Houte 1992]

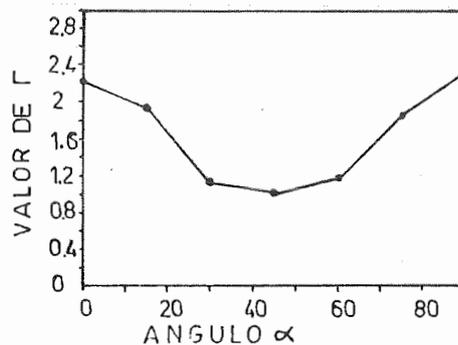


Fig.3.7 Variación de r con α para el estirado de una pieza de metal laminado [Van Houte 1992]

El problema de anisotropía plástica aparece también en la embutición de laminas metálicas. Si se ajusta un lámina circular entre dos anillos y se la presiona con un punzón como se indica en la fig.3.8 se obtiene una pieza con bordes ondulados como la que se esquematiza en la fig.3.9. Estas ondulaciones

son causadas por la anisotropía plástica del material.

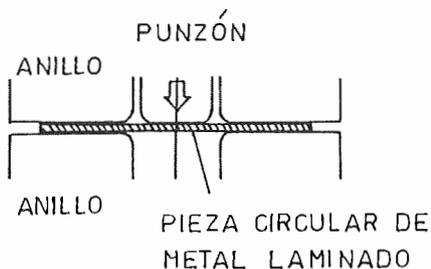


Fig.3.8. Sección transversal del proceso de embutición de láminas metálicas [Van Houte 1992]

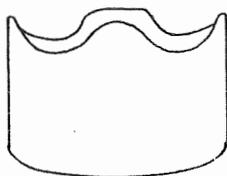


Fig.3.9 Pieza resultante de la embutición [Van Houte 1992]

Un ejemplo extremo de comportamiento anisótropo lo representan las fibras que normalmente se usan en combinación con otros materiales (matrices) formando materiales compuestos. Las fibras tienen la propiedad de que tanto su resistencia como sus propiedades elásticas son mucho mayores en la dirección longitudinal que en la dirección transversal.

3.2. BREVE ESTADO DEL ARTE SOBRE MODELOS QUE ENTIENDEN EL PROBLEMA DE ANISOTROPIA INELASTICA

3.2.1. MODELOS CONSITUTIVOS PARA MATERIALES ANISOTROPOS EN GENERAL

La descripción del comportamiento elástico anisótropo no presenta dificultades. Se puede utilizar para ello las formas generales de la teoría de la elasticidad presentadas en el Apéndice D.

La simulación del comportamiento inelástico anisótropo, como el presentado en los ejemplos del punto anterior, es mucho más compleja. En síntesis podría decirse que existen hasta ahora tres formas desarrolladas de encarar el problema, de las cuales se hace un breve estado del arte a continuación:

- 1) Definición de superficies de fluencia, carga y rotura anisótropas,
- 2) Utilización de funciones de fluencia y carga isotropas con propiedades del material variables según la orientación,
- 3) Definición de una transformación de espacios que permite resolver el problema anisótropo como un problema isotropo.

3.2.1.1. Definición de Superficies de Fluencia y Carga Anisótropas.

- *Superficie de Fluencia de Mises-Hill*

Supóngase un elemento con tres planos ortogonales de simetría y los ejes de referencia coincidentes con los ejes principales de anisotropía (x,y,z). El criterio de fluencia más simple y difundido para materiales metálicos isotropos es el de Von Mises. Así también, el criterio de fluencia más simple utilizado para materiales metálicos anisótropos es aquel que se reduce al de Von Mises cuando la anisotropía se hace despreciable. Este criterio, conocido como de Von Mises-Hill [Hill 1967] propone la siguiente forma cuadrática en las componentes del tensor de tensiones:

$$2 f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{yz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (3.2)$$

Donde F, G, H, L, M y N son parámetros característicos del material y de su anisotropía. No aparecen términos lineales porque no tiene en cuenta el efecto Bauschinger, no aparecen términos cuadráticos lineales en las tensiones de corte debido a la simetría y sólo aparecen diferencias de tensiones principales porque se supone que la presión hidrostática no tiene influencia en la fluencia.

Si X, Y, Z son las tensiones de fluencia en las direcciones principales x, y, z respectivamente, se puede demostrar que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{X^2} = G + H & 2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \\ \frac{1}{Y^2} = H + F & 2G = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \\ \frac{1}{Z^2} = F + G & 2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

De aquí se deduce que sólo uno de los parámetros F, G o H puede ser negativo cuando las tensiones de fluencia difieren mucho entre sí y:

$$\left\{ \begin{array}{ll} F \geq G & \Leftrightarrow X \geq Y \\ F \geq H & \Leftrightarrow X \geq Z \\ G \geq H & \Leftrightarrow Y \geq Z \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Si R, S y T son las tensiones de fluencia en corte respecto a los planos de anisotropía, se tiene:

$$2L = \frac{1}{R^2} \quad 2M = \frac{1}{S^2} \quad 2N = \frac{1}{T^2} \quad (3.5)$$

⇒ L, M y N deben ser positivas

Entonces para describir el estado completo de anisotropía de un elemento se necesita conocer la orientación de los ejes principales de anisotropía y los valores de las 6 tensiones de fluencia independientes: X, Y, Z, R, S y T.

Si hay simetría rotacional respecto al eje z, la expresión (3.2) debe tener la misma forma para cualesquiera ejes de referencia x-y. Se puede demostrar que la condición necesaria y suficiente para que exista simetría polar es que:

$$N = F + 2H = G + 2H \qquad L = M \qquad (3.6)$$

Y hay simetría completa o isotropía cuando se cumple:

$$L = M = N = 3F = 3G = 3H \qquad , \qquad (3.7)$$

De donde resulta que la condición de fluencia (3.2) se reduce al criterio clásico de Von Mises:

$$2F = \frac{1}{Y^2} \qquad (3.8)$$

• *Superficie de Fluencia de Hoffman*

En 1967 Hoffman [Schellekens 1992] propuso el siguiente criterio de fluencia plástico para materiales anisótropos:

$$\alpha_{yz} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \alpha_{zx} (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \alpha_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \alpha_{xx} \sigma_x + \alpha_{yy} \sigma_y + \alpha_{zz} \sigma_z + 3\alpha_{44} \tau_{yz}^2 + 3\alpha_{55} \tau_{zx}^2 + 3\alpha_{66} \tau_{xy}^2 - \bar{\sigma} = 1 \qquad (3.9)$$

Donde los valores de α se determinan en base a las resistencias a tracción en las direcciones correspondientes.

Esta función de fluencia es más general que la de Hill porque presenta dependencia de la presión hidrostática. Además contiene como casos

particulares a los criterios de Hill y Von Mises.

• *Superficie de Fluencia de Hill*

A partir de la función de fluencia de Hill se propusieron numerosas modificaciones con nuevas potencias en sus términos con el objeto de mejorar su comportamiento. Ninguna de estas funciones logra reproducir un comportamiento caracterizado por una relación unitaria entre las resistencias en las direcciones de laminado y transversal y ratios de deformación longitudinal a transversal muy distintos (ec.(3.1)). Hill [Hill 1993] propuso una nueva función de fluencia simple que permite tener en cuenta este aspecto. La misma puede obtenerse agregando términos cúbicos a la forma original [Hill 1967]. Para el caso del estado plano de tensiones tiene la siguiente forma:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} - \frac{c\sigma_1\sigma_2}{\sigma_0\sigma_{90}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{90}^2} + \left[(p+q) - \frac{(p\sigma_1 + q\sigma_2)}{\sigma_b} \right] \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_0\sigma_{90}} = 1 \quad (3.10)$$

Donde:

σ_1 y σ_2 : tensiones principales en las direcciones de laminado y transversal.

σ_0 y σ_{90} tensiones de fluencia bajo tracción uniaxial a 0° y 90° con la dirección de laminado respectivamente

σ_b : tensión de fluencia de una lámina delgada bajo compresión biaxial simétrica en el plano.

p y q son dos parámetros no dimensionales que se calculan en función de las relaciones $r_0 = \left(\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} \right)_{\sigma_0}$ y $r_{90} = \left(\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} \right)_{\sigma_{90}}$

Esto último produce una mezcla de espacios de tensión y deformación que requiere una revisión en la teoría de plasticidad clásica.

El uso del criterio de Hill que no contiene a las tensiones de corte está limitado al caso de isotropía polar en el que las tensiones principales coinciden con las direcciones de anisotropía.

• *Superficie de Fluencia de Barlat*

Un criterio más general es el introducido por Barlat [Peric et al 1992], que en el caso del estado plano de tensiones tiene la siguiente forma:

$$f = a|K_1 + K_2|^M + a|K_1 - K_2|^M + (2-a)|2K_2|^M = \sigma_0 \quad (3.11)$$

Donde:

$$K_1 = \frac{\sigma_x + h \sigma_{yy}}{2} \quad \text{y} \quad K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - h \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + p \sigma_{xy}^2} \quad (3.12)$$

a , h , p y M son constantes del material. Para un dado valor de M se pueden calcular los valores a , h y p a partir de las relaciones de deformación r_0 , r_{45} y r_{90} obtenidas experimentalmente. La constante M regula la forma de la superficie de fluencia. Para el caso de isotropía ($a=h=p=1$) y $\sigma_{xy} = 0$, si se toma $M=2$ se tiene la función de Von Mises y para $M \rightarrow \infty$ se tiene el criterio de Tresca. En la fig.3.10 se ha representado la forma de la superficie de fluencia para el caso de anisotropía en presencia de tensiones tangenciales.

Se puede probar que la función de fluencia descrita en las ecuaciones (3.11) y (3.12) es convexa cuando las constantes a , h y p son positivas y $M > 1$.

El problema de este tipo de funciones de fluencia es que deben ser desarrolladas para cada material en particular y no siempre es fácil obtener superficies convexas que cumplan con las condiciones de invarianza impuestas por la simetría del material y además reproduzcan aproximadamente la fluencia del mismo.

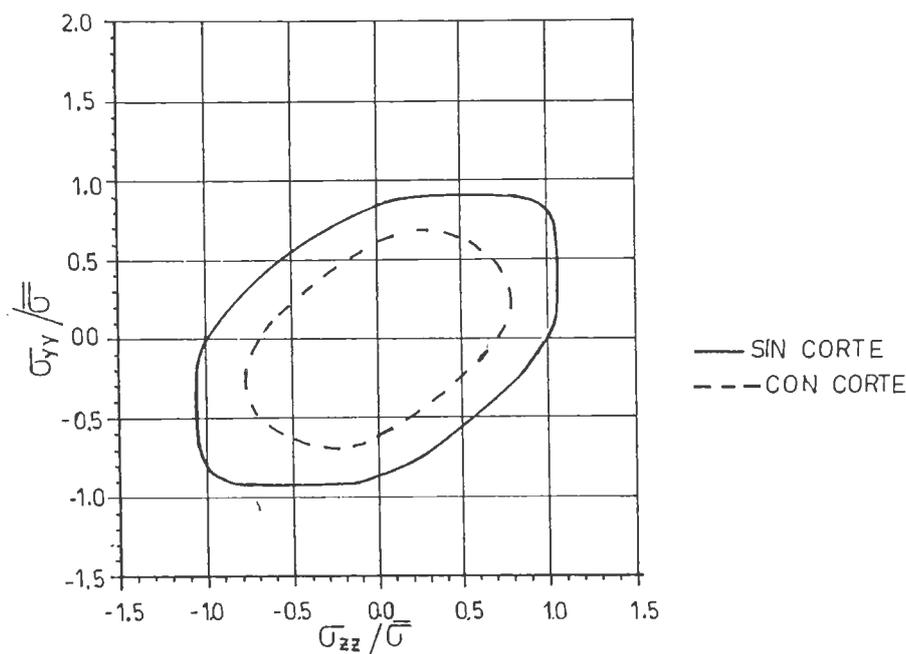


Fig.3.10 Función de fluencia de Barlat isotrópica y anisótropa
[Peric 1992] ($M=8$, $h=1,15$, $p=1,02$ y $\sigma_{xy}=0,4\sigma_0$)

3.2.1.2. Propiedades del Material Variables según la Orientación del Mismo

Otra forma de resolver el problema anisótropo que aparece en la bibliografía, consiste en trabajar con funciones de fluencia isotrópicas pero con propiedades del material que varían según la orientación. Existen aplicaciones de estos conceptos a suelos [Baker 1970] y a mampostería [Benedetti 1982]. Este último modelo se describe con más detalles en el apartado 3.2.2. En ambos casos se trata de extensiones del criterio de Mohr Coulomb al caso de materiales anisótropos. Para ello se supone que tanto la cohesión como la fricción interna del material son funciones de la inclinación del plano de falla respecto al plano de isotropía ya que generalmente son modelos desarrollados para materiales transversalmente isotrópicos.

La solución de un problema mediante el criterio de Mohr Coulomb para materiales anisótropos requiere, además de las funciones que definen la

variación de la cohesión y la fricción interna con la inclinación del plano de falla, el ángulo que forma el plano de falla con el plano de isotropía. La solución evidentemente no es directa sino que requiere un procedimiento iterativo. Por otro lado, las funciones que definen la evolución de la cohesión y de la fricción deben ser determinadas para cada material en particular.

3.2.1.3. Tratamiento de la Anisotropía mediante la Transformación de Espacios [Betten 1981, 1983, 1988]

Este tipo de tratamiento se basa en admitir la existencia de un espacio donde se encuentra el *sólido real* y otro *espacio ficticio* donde se encuentra un sólido isótropo. El problema es resuelto en el *espacio isótropo ficticio* y su resultado es transportado al *espacio real*.

La transformación de espacios sienta las bases y fundamentos del modelo constitutivo para materiales anisótropos que se propone en esta tesis. El primero en introducir estas ideas fue J. Betten [Betten 1981, 1983, 1989] quien las propuso para modelar plasticidad y creep en materiales anisótropos pero no desarrolló ninguna aplicación de las mismas.

Para un material isótropo la forma usual de la función de fluencia es :

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = 0 \tag{3.13}$$

donde la condición de invarianza exige que:

$$F(a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}, \alpha) \equiv F(\sigma_{ij}) \quad , \tag{3.14}$$

bajo cualquier *transformación ortogonal* ($a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$).

De la teoría de funciones tensoriales isótropas, resulta evidente que para un medio isótropo la función escalar F debe poder expresarse como una función simplemente valuada a través de los invariantes principales irreducibles del tensor de tensiones: I_1 , I_2 e I_3 o de sus tensiones

principales σ_1 , σ_2 y σ_3 , esto es:

$$F = F[I_1(\sigma_{ij}), I_2(\sigma_{ij}), I_3(\sigma_{ij})] \quad (3.15)$$

o en el caso de materiales con incompresibilidad:

$$F = F[J_2(\sigma_{ij}), J_3(\sigma_{ij})] \quad (3.16)$$

Para el caso de materiales anisótropos, la restricción dada en ecuación (3.14) es menos severa. La función F debe ser invariante bajo el grupo de transformaciones ($s_{ik}s_{jk} = \delta_{ij}$) asociadas con las propiedades de simetría del material, donde s es un subgrupo del grupo ortogonal a . En otras palabras, las propiedades de simetría del material impone restricciones en la forma en que la función F depende de las componentes del tensor de tensiones.

En lugar de expresar la función de fluencia en términos de una base de integridad del subgrupo s , la misma puede ser expresada como :

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = \bar{F}(\sigma_{ij}, A_{ijkl}, \bar{\alpha}) = \bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}) \quad (3.17)$$

Donde A_{ijkl} es un tensor de cuarto orden que contiene toda la información sobre la anisotropía del material y define una *transformación entre dos espacios* :

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.18)$$

En donde σ_{ij} y $\bar{\sigma}_{ij}$ son los tensores de tensión en el *espacio real anisótropo* y en el *espacio isotropo ficticio*, respectivamente.

La función \bar{F} de la ecuación (3.17) debe ser invariante bajo cualquier transformación ortogonal. Una base irreducible de integridad debe contener invariantes de los tensores argumentos y del conjunto de invariantes simultáneos. Una simplificación consiste en tomar sólo los invariantes de $\bar{\sigma}_{ij}$. Se obtiene así una función de fluencia isotropa en $\bar{\sigma}_{ij}$. La idea de

sustituir los invariantes del tensor de tensiones por los invariantes del tensor mapeado $\bar{\sigma}_{ij}$ se muestra esquemáticamente en la Fig.3.11.

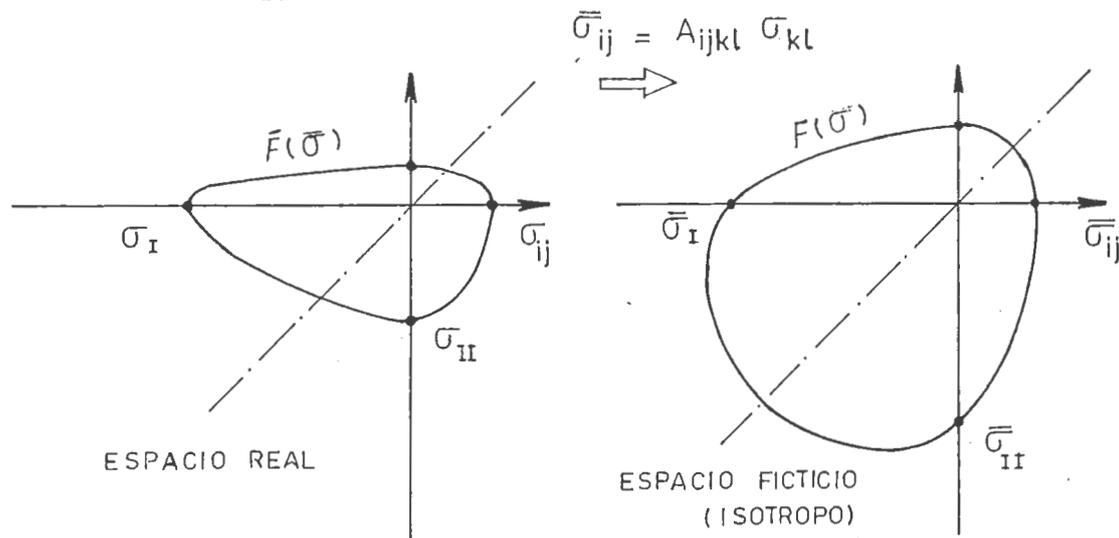


Fig.3.11. Relación entre los espacios anisótropo real e isotrópico ficticio

Los modelos basados en estos conceptos son más simples y generales que los dos antes mencionados y no deben ser formulados para cada material en particular.

3.2.2. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA MAMPOSTERÍA

Existen numerosos estudios experimentales sobre el comportamiento de la mampostería y mampostería armada bajo diversos estados de tensión [Drysdale 1984, Hamid 1992, Khalaf 1992, Ganesan 1992, Abboud 1990, McNary 1985, Page 1978, 1981, Naraine 1991, Decanini 1982, 1983a, 1983b, Astroza 1983, Parducci 1982, Page 1986, Shing 1989, Cheema 1986, Bernardini 1978, 1979, Jurina 1977].

Sin embargo, existen pocos modelos constitutivos para la mampostería que tienen en cuenta su carácter ortótropo. Entre los mismos merece destacarse el modelo de Nova y Sacchi [Benedetti 1982].

Se supone que dentro del rango elástico la mampostería se comporta como un material ortótropo de acuerdo a las ecuaciones presentadas en el Apéndice D hasta que alcanza la rotura.

La anisotropía no sólo altera la magnitud de los esfuerzos que producen la rotura sino también la forma en que la rotura se produce. Para definir el criterio de rotura se utiliza la función de Mohr-Coulomb con una limitación en el esfuerzo de tracción y de alguna manera se introduce en ellos la dependencia de la dirección.

Se supone que la rotura por tracción se produce cuando la tensión según un plano σ_{mm} iguala a un valor límite t_{mm} que depende de la orientación m . Ver Fig.3.12.

$$\sigma_{mm} \geq t_{mm} \quad (3.19)$$

σ_{mm} puede expresarse como :

$$\sigma_{mm} = a_i a_k \sigma_{ik} \quad (3.20)$$

Tomando como referencia las tensiones principales (ver fig.3.12), resulta :

$$\sigma_{mm} = \sigma_1 \cos^2 \psi + \sigma_3 \sin^2 \psi \quad (3.21)$$

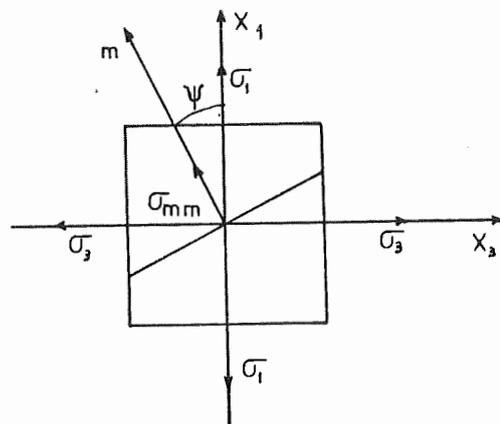


Fig.3.12 Ejes de referencia [Benedetti 1982]

La hipótesis fundamental de este método es que t_{mm} varía como la componente normal de un tensor y que es posible definir un tensor t_{ik} tal que:

$$t_{mm} = a_i a_k t_{ik} \tag{3.22}$$

Siendo t_{ik} un tensor de segundo orden, existirán tres direcciones principales o *direcciones de ortotropía*, tales que $t_{ik}=0$ si $i \neq k$, cuando el tensor está referido a dichos ejes. Si se llama t_{pq} al tensor referido a las direcciones de ortotropía r, s y t , se puede obtener:

$$t_{ik} = t_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_q}{\partial x_k} \quad (i,k=1,2,3) \quad (p,q=r,s,t) \tag{3.23}$$

Ver fig.3.13

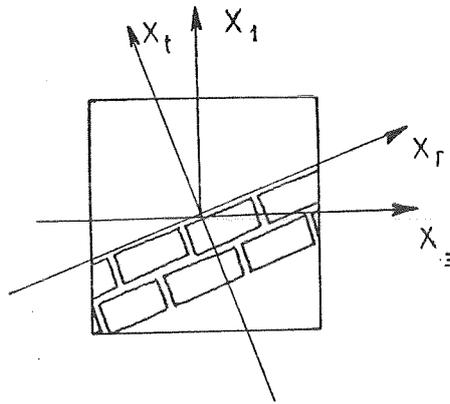


Fig.3.13 Direcciones de ortotropía [Benedetti 1982]

Sustituyendo en la ec.(3.19) se obtiene:

$$(\sigma_{ik} - t_{ik}) a_i a_k \geq 0 \tag{3.24}$$

Para que se produzca el colapso es necesario que:

$$| \sigma_{ik} - t_{ik} | = 0 \tag{3.25}$$

La solución de esta ecuación permite obtener las curvas de rotura en el plano σ_1 - σ_3 para distintos valores del ángulo θ que se han representado en la fig.3.14. En la misma figura puede observarse que cuando $\sigma_1 = \sigma_3$ la tensión de rotura es independiente de la dirección.

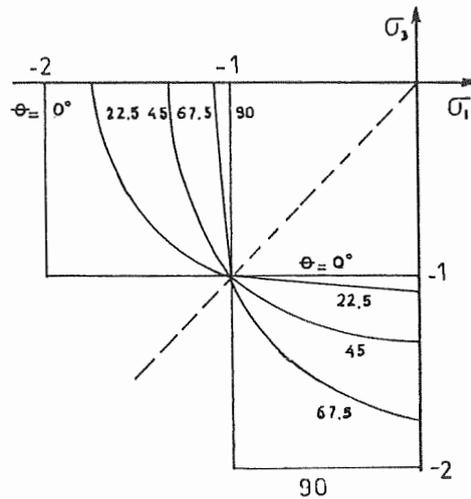


Fig.3.14 Curvas de rotura por tracción para distintas orientaciones del mortero ($t_r/t_t=2$) [Benedetti 1982]

Para otras combinaciones de tensiones, el colapso se produce cuando el esfuerzo de corte σ_{mn} sobre el plano de normal m alcanza un valor crítico dependiente de m que puede calcularse de la siguiente forma:

$$\sigma_{mn} = c_{mm} + f_{mm} \tag{3.26}$$

Donde c_{mm} es el término debido a la cohesión y es tal que:

$$c_{mm} = c_{ik} m_i m_k \tag{3.27}$$

y f_{mm} es el término dependiente de la tensión normal:

$$f_{mm} = \Phi_{mmrs} \sigma_{rs} \tag{3.28}$$

donde Φ_{mmrs} es un tensor de cuarto orden ligado a la fricción interna del material.

Estas ecuaciones son de gran complejidad analítica. El cálculo debe hacerse en forma iterativa.

Combinando estas ecuaciones con las obtenidas para la falla por tracción se obtienen las curvas de rotura de la fig.3.15 para paneles cargados en el plano con distintas inclinaciones θ .

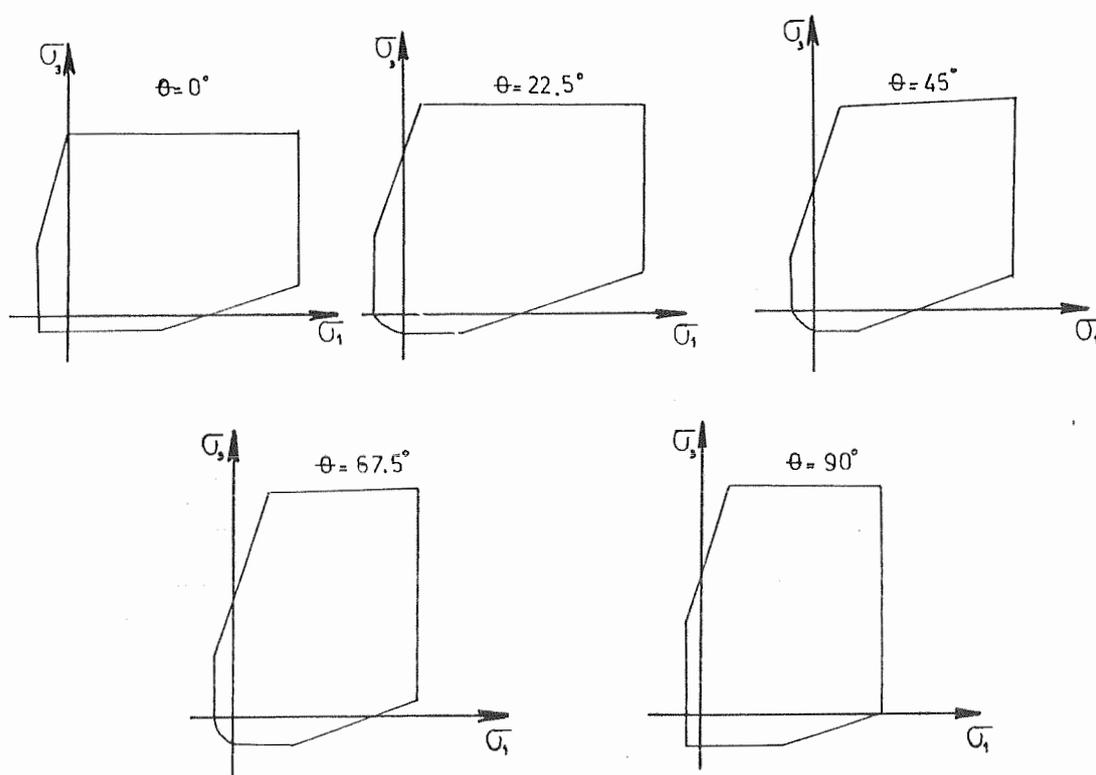


Fig.3.15 Curvas de rotura para elementos de mampostería con simetría polar [Benedetti 1982]

La influencia de la anisotropía es sin duda notable, sobre todo para relaciones σ_1/σ_2 muy distintas de uno.

Entre otros antecedentes de modelos constitutivos para mampostería se pueden citar los siguientes:

- Yokel [Yokel 1976] presentó hipótesis de falla para paneles de mampostería bajo compresión en la dirección normal a la junta. Estas hipótesis son sólo aplicables a esa dirección de carga.

- Page [Page 1978] estudió el problema de paneles de mampostería de ladrillos cerámicos bajo cargas en el plano. Presentó un método que tiene en cuenta el comportamiento no lineal de la mampostería. Consideró a la mampostería como un material compuesto por dos fases consistentes en ladrillos elásticos en una matriz de mortero inelástica. La falla ocurría en las juntas si se violaba un criterio de adherencia en tracción o corte. Estas características geométricas fueron incorporadas en un programa de elementos finitos que modelaba el comportamiento no lineal de las juntas y permitía que ocurriera la falla progresiva de las mismas.

- Drysdale [Drysdale 1984] propuso un modelo para la resistencia a tracción de elementos de mampostería compuestos de bloques de hormigón llenos o no. Este criterio tenía en cuenta la naturaleza anisótropa de la mampostería como material compuesto. El material se suponía globalmente homogéneo y las propiedades de los materiales constituyentes intervenían sólo en las propiedades promedio del material compuesto. La resistencia del conjunto podía ser calculada mediante una combinación lineal de las propiedades de los materiales constituyentes.

- Mc.Nary [Mc. Nary 1985] propuso un modelo para predecir el comportamiento de elementos de mampostería bajo compresión uniaxial normal a la junta de mortero que tiene en cuenta la interacción entre ladrillo y mortero.

- Afsharis [Afsharis 1989], usando propiedades físicas y geométricas de mortero y bloques de hormigón intentó reproducir el comportamiento y la rotura de bloques de mampostería. Para aplicar este modelo se debía conocer la variación de la presión de confinamiento en la junta en función de la tensión normal aplicada. Dicha función podía obtenerse en forma analítica.

- Naraine [Naraine 1991] presentó un modelo para compresión uniaxial

cíclica de elementos de mampostería. El modelo utilizaba las curvas tensión-deformación obtenidas experimentalmente.

- Khalaf [Khalaf 1992] propuso una fórmula semiempírica para determinar el módulo de elasticidad de mampostería de bloque huecos y rellenos. La fórmula estaba basada en las propiedades elásticas de los materiales componentes y no consideraba la anisotropía.

- Pietruszczak [Pietruszczak 1992] presentó una formulación matemática para describir las propiedades mecánicas promedio de la mampostería estructural. Consideraba a la mampostería como un material compuesto consistente en una matriz de ladrillo interceptada por dos conjuntos de inclusiones. Las juntas horizontales representaban planos continuos de debilidad mientras que las juntas verticales eran consideradas como inclusiones débiles uniformemente dispersas. Este modelo se describe con más detalles en el capítulo correspondiente a materiales compuestos.

3.3. MODELO PROPUESTO PARA TRATAR LA ANISOTROPIA INELASTICA MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE ESPACIO

3.3.1. INTRODUCCION

El modelo que se propone para materiales anisótropos surge de una generalización de la teoría clásica de plasticidad isótropa al caso de materiales anisótropos y ortótropos. Este enfoque supone que existe un *espacio real anisótropo* y otro *espacio ficticio isótropo* donde se resuelve el problema ficticio mapeado. Ambos espacios están relacionados mediante tensores de transformación de cuarto orden que contienen toda la información sobre la anisotropía del material.

En un comienzo, Oller et al [Oller 1993c] trataron el problema del comportamiento de un sólido anisótropo por medio de un *tensor de mapeo de tensiones*. Como se demostraba en las referencias mencionadas, la deformación elástica era única para los espacios real y ficticio. Esta situación introducía una limitación en la teoría anisótropa desarrollada ya que esta

hipótesis suponía un concepto de proporcionalidad entre la tensión de fluencia y el módulo elástico longitudinal en cada dirección de material.

En un trabajo posterior Oller [1993d] presentó una generalización de esa teoría básica. Esta nueva presentación estaba basada en la definición de dos tensores mapeados: *el tensor mapeado de tensiones* ya definido y *el tensor mapeado de deformaciones* que resultaban de una *doble transformación de espacios*. Esta nueva teoría fue denominada *teoría isótropa mapeada para materiales no proporcionales*.

En esta tesis se presenta una forma condensada original que, a través de una *única transformación del tensor de tensiones*, permite resolver problemas de anisotropía *no proporcional*, en el sentido antes descrito.

Por claridad en la presentación, se describen primero las dos formas originales [Oller 1993c, d] y luego se desarrolla el modelo propuesto demostrando su equivalencia con la segunda de estas formas.

3.3.2. FORMAS ORIGINALES

3.3.2.1. Materiales Proporcionales [Oller 1993c]

TENSOR DE TRANSFORMACION DE ESPACIOS

En este modelo las propiedades del sólido anisótropo se definen en función de las propiedades de un *sólido ficticio ideal*. Esto se logra relacionando las tensiones entre los espacios real y ficticio a través de una transformación del tipo (ver fig.3.11) :

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.29)$$

donde $\bar{\sigma}_{ij}$ y σ_{kl} son los tensores de tensión en los espacios ficticio y real respectivamente y A_{ijkl} es un tensor de cuarto orden, denominado *tensor de transformación de espacios* o *de mapeo de tensiones* que viene definido

como:

$$A_{ijkl} = \bar{C}_{ijrs}^s C_{rskl}^{-1} = \bar{f}_{ik}^{-1} f_{jl}^{-1} \quad (3.30)$$

donde \bar{C}_{ijrs}^s y C_{rskl}^s son los tensores constitutivos elásticos secantes para el sólido isótropo ficticio y el sólido real respectivamente. \bar{f}_{ik}^{-1} y f_{jl}^{-1} son tensores de resistencia a fluencia correspondientes al sólido ficticio y real respectivamente. C_{rskl}^s y f_{jl}^{-1} están expresados en un sistema global de referencia. Los mismos se obtienen, a partir de sus formas en a los sistemas locales de referencia, de la siguiente manera:

$$C_{ijkl}^s = R_{irjs} \left(C_{rspq}^s \right)_{local} R_{kplq} \quad (3.31)$$

$$f_{ij}^{-1} = R_{ikjl} \left(f_{kl}^{-1} \right)_{local} \quad (3.32)$$

El *tensor de rotación* R_{ijkl} tiene en cuenta los ángulos entre las direcciones principales locales de anisotropía del material y las correspondientes al sistema global de referencia:

$$R_{ijkl} = r_{ik} r_{jl} \quad \text{con} \quad r_{ij} = \cos(\mathbf{e}_{i_{local}}, \mathbf{e}_{j_{global}}) \quad (3.33)$$

donde $\mathbf{e}_{i_{local}}$ es el vector unitario correspondiente a la i -ésima componente del sistema de referencia local.

La transformación de espacios definida en la ec(3.30) sólo puede aplicarse a *materiales proporcionales*, esto es, materiales para los cuales la relación entre las tensiones de fluencia y el módulo de Young para cada dirección del espacio es constante: $f_{11}/E_{11} = f_{22}/E_{22} = \dots = f_{23}/E_{23}$. Más adelante se demostrará que esta hipótesis implica que el tensor de deformación elástica es el mismo en los espacios real y ficticio.

El mapeo expresado en la ec.(3.29) altera la forma de la superficie de

fluencia como se esquematiza en la fig.3.11. En el Anexo 3.1 se muestra este efecto para distintas funciones de fluencia y distintas relaciones entre resistencias.

RELACION CONSTITUTIVA SECANTE

La relación constitutiva secante se obtiene aplicando el método de Coleman a la desigualdad de Clasius Planck:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha)}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad (3.34)$$

Siendo ϵ_{ij}^e la deformación elástica y variable libre del problema y α un conjunto de variables internas.

Donde Ψ es la energía libre del material bajo el estado real de tensiones y se supone que tiene la siguiente forma:

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha) = \Psi^e(\epsilon_{ij}^e) + \Psi^p(\alpha) = \frac{1}{2m} \epsilon_{ij}^e C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e + \Psi^p(\alpha) \quad (3.35)$$

Si se sustituye en esta ecuación la ecuación (3.30), se obtiene:

$$\sigma_{ij}^e = \frac{1}{2m} \epsilon_{ij}^e A_{ijmn}^{-1} \bar{C}_{mnkl}^s \epsilon_{kl}^e + \Psi^p(\alpha) \quad (3.36)$$

Reemplazando esta forma de la energía libre en la ec.(3.34), resulta:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn}^{-1} \bar{C}_{mnkl}^s \epsilon_{kl}^e = A_{ijkl}^{-1} \bar{\sigma}_{kl} \quad (3.37)$$

Es decir que si la tensión en el espacio isótropo ficticio se calcula como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e \quad (3.38)$$

con la misma deformación elástica que en el espacio real, se verifica la relación de partida (ec.(3.29)).

REGLA DE FLUJO.

EVOLUCION DE LAS VARIABLES INTERNAS

Si se define la función de potencial como:

$$G(\sigma_{ij}, \alpha) = \bar{G}(\sigma_{ij}, A_{ijkl}, \alpha) = \bar{G}(\bar{\sigma}_{ij}, \alpha) = K \tag{3.39}$$

La función de potencial de un material anisótropo se puede escribir entonces en función de los invariantes del tensor isótropo mapeado.

A partir de esta función de potencial se puede expresar la regla del flujo como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \underbrace{\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}}_{R_{ij}} A_{klij} = \dot{\epsilon}_{kl}^p A_{klij} \tag{3.40}$$

donde $\dot{\epsilon}_{kl}^p$ es la deformación plástica ficticia definida en el espacio isótropo ficticio.

En el Anexo 3.2 se ilustra mediante un ejemplo numérico el significado de la ec.(3.40) en cuanto a la dirección del flujo plástico en un material anisótropo.

La ley de evolución de una variable interna plástica genérica α^m se obtiene como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}^m &= \dot{\lambda} h_{ij}^m \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} h_{ij}^m \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} h_{ij}^m \underbrace{\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} A_{klij}}_{R_{kl}} = \\
 &= \dot{\lambda} \underbrace{\bar{h}_{ij}^m}_{\bar{R}_{kl}} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} = \dot{\alpha}^m \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Donde h_{ij}^m y \bar{h}_{ij}^m son funciones tensoriales a ser determinadas según las aplicaciones del modelo plástico isótropo.

UNICIDAD DE LA DISIPACION. ENERGIA LIBRE

Si se reemplaza en la expresión de la disipación mecánica la regla del flujo y las leyes de evolución de las variables internas, se obtiene:

$$\bar{\Sigma}_{mec} = \frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m = \frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{kl}^p A_{klij}}{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\alpha}^m} \dot{\alpha}^m = \frac{\bar{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl}^p}{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\alpha}^m} \dot{\alpha}^m = \bar{\Sigma}_{mec} \geq 0 \quad (3.42)$$

En la ec.(3.42) se pone en evidencia que la disipación es un invariante del proceso termodinámico y por lo tanto es independiente del espacio en que se calcula.

La expresión de la energía libre en el espacio ficticio mapeado tiene la siguiente forma:

$$\bar{\Psi}(\epsilon_{ij}^e, \bar{\alpha}^m) = \frac{1}{2m} \epsilon_{ij}^e \bar{C}_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e + \bar{\Psi}^p(\bar{\alpha}^m) \quad (3.43)$$

De esta ecuación se puede verificar que la ecuación (3.34) vale también

- *Espacio real anisótropo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Rigidez inicial local } \left(C_{ijkl}^s \right)_{\text{local}} \\ \bullet \text{ Orientación de los ejes principales de anisotropía local} \end{array} \right.$$

- *Espacio ficticio isótropo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Función de fluencia: } \bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}^m) = 0 \\ \bullet \text{ Función de potencial: } \bar{G}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}^m) = K \end{array} \right.$$

El tensor de rigidez en el espacio ficticio isótropo es un tensor isótropo de comparación que puede definirse en forma arbitraria. Con estos datos se puede desarrollar todos los calculos correspondientes a este modelo.

3.3.2.2. Materiales no Proporcionales [Oller 1993d]

TRANSFORMACIONES DE ESPACIOS

Al igual que en el modelo descrito en el punto 3.3.3.1, este modelo define las propiedades del sólido anisótropo real en términos de un *sólido isótropo ficticio*. Esto se logra relacionando los tensores de tensiones a través de la siguiente transformación lineal:

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} \tag{3.53}$$

donde A_{ijkl}^s es un tensor material de cuarto orden que se denomina *tensor de transformación de espacios de tensión* y se obtiene a través de relaciones de resistencia en los espacios real e isótropo ficticio, como sigue:

$$A_{ijkl}^s = \bar{f}_{ik}^{-1} \bar{f}_{jl}^{-1} \tag{3.54}$$

Para asegurar la no proporcionalidad entre módulos elásticos y resistencias, se define una segunda transformación que relaciona el *tensor de deformaciones elásticas reales* ϵ_{ij}^e con el *tensor de deformaciones elásticas*

ficticio $\bar{\epsilon}_{ij}^e$:

$$\bar{\epsilon}_{ij}^e = A_{ijkl}^e \epsilon_{kl}^e \quad (3.55)$$

Donde A_{ijkl}^e es un tensor material de cuarto orden denominado *tensor de transformación de espacios de deformación* o *de mapeo de deformaciones*.

La ecuación (3.55) muestra que en este modelo la deformación elástica no es única en ambos espacios.

La expresión para la evaluación de A_{ijkl}^e puede ser obtenida partir de la ecuación (3.53) como sigue:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^s \bar{\epsilon}_{kl}^e = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} = A_{ijkl}^s C_{klmn}^s \epsilon_{mn}^e \quad (3.56)$$

De donde:

$$\bar{C}_{ijkl}^s \bar{\epsilon}_{kl}^e = A_{ijkl}^s C_{klmn}^s \epsilon_{mn}^e \quad (3.57)$$

o

$$\bar{\epsilon}_{ij}^e = \underbrace{\bar{C}_{ijkl}^{s-1} A_{klmn}^s C_{mnpq}^s}_{A_{ijpq}^e} \epsilon_{pq}^e \quad (3.58)$$

Comparando esta ecuación con la ec.(3.55) se obtiene:

$$A_{ijpq}^e = \bar{C}_{ijkl}^{s-1} A_{klmn}^s C_{mnpq}^s \quad (3.59)$$

o

$$C_{ijkl}^s = A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{mnpq}^s A_{pqkl}^e \quad (3.60)$$

Nótese que en el caso en que exista proporcionalidad entre módulos

elásticos y resistencias en las distintas direcciones, se recupera la ec.(3.30). Es decir:

$$\bar{C}_{ijrs}^s C_{rskl}^{s-1} = \bar{f}_{ik} f_{jl}^{-1} = A_{ijkl}^s \quad (3.61)$$

o

$$\bar{C}_{ijrs}^s = A_{ijkl}^s C_{rskl}^s \quad (3.62)$$

Reemplazando esta expresión en la ec.(3.59), se obtiene:

$$A_{ijpq}^e = C_{ijrs}^{s-1} A_{rskl}^{s-1} A_{klmn}^s C_{mnpq}^s = \delta_{ip} \delta_{jq} \quad (3.63)$$

lo cual significa que para materiales proporcionales el tensor de transformación de espacios de deformación es igual al tensor identidad o, lo que lo mismo, los tensores de deformación elástica son idénticos en los espacio anisótropo real y en el espacio isótropo ficticio. Esto demuestra que este modelo contiene como caso particular al modelo descrito en el punto 3.2.2.1.

RELACION CONSTITUTIVA SECANTE

La relación constitutiva secante se obtiene aplicando el método de Coleman a la primera desigualdad de Clausius-Planck:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha)}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad (3.64)$$

Donde Ψ es la energía libre del material bajo el estado real de tensiones y se supone que tiene la siguiente forma:

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha) = \Psi^e(\epsilon_{ij}^e) + \Psi^p(\alpha) = \frac{1}{2m} \epsilon_{ij}^e C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e + \Psi^p(\alpha) \quad (3.65)$$

Reemplazando en esta ecuación la ec.(3.60) resulta:

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha) = \frac{1}{2m} \epsilon_{ij}^e A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{mnpq}^s A_{pqkl}^e \epsilon_{kl}^e + \Psi^p(\alpha) \quad (3.66)$$

Sustituyendo esta expresión de la energía libre en la ec.(3.63), se obtiene:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{mnpq}^s A_{pqkl}^e \epsilon_{kl}^e = A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{mnpq}^s \bar{\epsilon}_{pq}^e = A_{ijmn}^{s-1} \bar{\sigma}_{mn} \quad (3.67)$$

lo cual verifica la transformación de espacios de tensiones de partida.

REGLA DE FLUJO.

EVOLUCION DE LAS VARIABLES INTERNAS

Con las transformaciones de espacios definidas en las ecuaciones (3.53) y (3.55) y una función de potencial escrita de la siguiente forma:

$$G(\sigma_{ij}, \alpha) = \bar{G}(\sigma_{ij}, A_{ijkl}^s, \alpha) = \bar{G}(\bar{\sigma}_{ij}, \alpha) = K \quad (3.68)$$

se puede calcular el flujo plástico como sigue:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \underbrace{\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}}_{\bar{R}_{kl}} A_{klij}^s = \dot{\epsilon}_{kl}^{*p} A_{klij}^s \quad (3.69)$$

La regla de transformación de las deformaciones elásticas se extiende también al caso de las deformaciones plásticas y se define:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^p = A_{ijkl}^e \dot{\bar{\epsilon}}_{kl}^p = \dot{\lambda} \underbrace{A_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} A_{mnl}^s}_{\bar{R}_{ij}^*} \quad (3.70)$$

Las variables internas se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^m &= \dot{\lambda} h_{ij}^m \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda} h_{ij}^m \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda} h_{ij}^m \underbrace{\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} A_{kl}^s}_{R_{kl}^*} = \\ &= \dot{\lambda} \underbrace{h_{ij}^m \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}}_{\bar{R}_{kl}^m} = \dot{\alpha}^m \end{aligned} \quad (3.71)$$

UNICIDAD DE LA DISIPACION.

ENERGIA LIBRE EN EL ESPACIO FICTICIO ISOTROPO

Si se reemplaza en la expresión de la disipación mecánica, la regla del flujo y las leyes de evolución de las variables internas, se obtiene:

$$\bar{\Xi}_{mec} = \frac{A_{ijmn}^s \bar{\sigma}_{mn} \dot{\bar{\epsilon}}_{kl}^p A_{kl}^s}{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\alpha}^m} \dot{\alpha}^m = \frac{\bar{\sigma}_{ij} \dot{\bar{\epsilon}}_{kl}^p}{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\alpha}^m} \dot{\alpha}^m = \bar{\Xi}_{mec} \geq 0 \quad (3.72)$$

Al igual que en el modelo anterior se confirma que la disipación es un invariante del proceso termodinámico, independientemente del espacio en el que se la evalúe.

La energía libre en el espacio ficticio isótropo tiene la siguiente forma:

$$\bar{\Psi}(\bar{\epsilon}_{ij}^e, \bar{\alpha}^m) = \frac{1}{2m} \bar{\epsilon}_{ij}^e \bar{C}_{ijkl}^s \bar{\epsilon}_{kl}^e + \bar{\Psi}^p(\bar{\alpha}^m) \tag{3.73}$$

y se cumple que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= m \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\epsilon}_{ij}^e} = \bar{C}_{ijkl}^s \bar{\epsilon}_{kl}^e = A_{ijmn}^s C_{mnpq}^s A_{pqkl}^{e-1} A_{klrs}^e \epsilon_{rs}^e \\ &= A_{ijmn}^s C_{mnpq}^s \epsilon_{pq}^e = A_{ijmn}^s \sigma_{mn} \end{aligned} \tag{3.74}$$

o sea que se vuelve a obtener la hipótesis de partida (ec.(3.53)).

ECUACION CONSTITUTIVA TANGENTE

La ecuación constitutiva tangente se obtiene realizando la derivada temporal de la ec.(3.67) que define la forma secante.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{\epsilon}_{kl}^e} \dot{\epsilon}_{kl}^e = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{mn}}{\partial \bar{\epsilon}_{kl}^e} \frac{\partial \bar{\epsilon}_{kl}^e}{\partial \bar{\epsilon}_{pq}^e} \dot{\epsilon}_{pq}^e \\ &= \underbrace{\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}}}_{A_{ijmn}^{s-1}} \underbrace{\frac{\partial \bar{\sigma}_{mn}}{\partial \bar{\epsilon}_{kl}^e}}_{\bar{C}_{mnkl}^s} \underbrace{\frac{\partial \bar{\epsilon}_{kl}^e}{\partial \bar{\epsilon}_{pq}^e}}_{A_{klpq}^e} \dot{\epsilon}_{pq}^e \\ &= A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{mnkl}^s A_{klpq}^e \dot{\epsilon}_{pq}^e = A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{mnkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e \\ &= A_{ijmn}^{s-1} \dot{\sigma}_{mn} \end{aligned} \tag{3.75}$$

La ec.(3.75) puede ser interpretada como una transformación lineal de la siguiente ecuación incremental definida en el espacio ficticio isótropo:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{\epsilon}_{kl}^e} \dot{\epsilon}_{kl}^e = \bar{C}_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}^e = \bar{C}_{ijkl}^s \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{kl}^e \\ \dot{\epsilon}_{kl}^p \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ep,ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.77)$$

Donde el tensor tangente $\bar{C}_{ep,ijkl}^t$ puede obtenerse a partir de la condición de consistencia plástica y resulta:

$$\bar{C}_{ep,ijkl}^t = \bar{C}_{ijkl}^s - \frac{\bar{C}_{ijmn}^s \bar{R}_{mn}^* \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \bar{C}_{pqkl}^s}{-\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\alpha}^m} \bar{h}_{tu}^m \bar{R}_{tu} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{turs}^s \bar{R}_{rs}^*} \quad (3.78)$$

Combinando la ec.(3.77) con la ec.(3.75) se puede llegar a la forma incremental tangente para el sólido anisótropo real:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn}^{s-1} \dot{\sigma}_{mn} = A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{ep,mnkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} = A_{ijmn}^{s-1} \underbrace{\bar{C}_{ep,mnkl}^t A_{klpq}^e}_{C_{ep,ijpq}^t} \dot{\epsilon}_{pq} \quad (3.79)$$

DATOS DEL MODELO

El modelo presentado requiere los siguientes datos en cada uno de los espacios utilizados:

- *Espacio real anisótropo:*
 - Rigidez inicial local $\left(C_{ijkl}^s \right)_{local}$
 - Tensiones de fluencia $\left(f_{ijkl} \right)_{local}$
 - Orientación de los ejes principales de anisotropía local

- *Espacio ficticio isótropo:*
 - Función de fluencia: $\bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}^m) = 0$
 - Función de potencial: $\bar{G}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}^m) = K$

El tensor de rigidez en el espacio ficticio isótropo es un tensor isótropo de comparación cualquiera que puede definirse en forma arbitraria. Lo mismo ocurre con el tensor que define las tensiones de fluencia en el espacio isótropo ficticio. Con estos datos se puede desarrollar todos los cálculos correspondientes a este modelo.

3.3.3. FORMA CONDENSADA DEL MODELO NO PROPORCIONAL PROPUESTO EN ESTA TESIS

3.3.3.1. Introducción

El modelo que se presenta a continuación es aplicable a materiales no proporcionales y utiliza una única transformación de espacios de tensión.

En primer lugar se presenta la forma del modelo para un material elastoplástico y se lo compara con el modelo presentado en el punto 3.3.2.2. demostrando su equivalencia. Luego se presenta la extensión del modelo al caso en que exista daño.

3.3.3.2. Transformación de Espacios

Al igual que en los otros modelos descriptos, en éste se define las

propiedades del sólido anisótropo real en términos de un *sólido isótropo ficticio*. Esto se logra relacionando los tensores de tensiones a través de la siguiente transformación lineal:

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} \quad (3.80)$$

donde A_{ijkl}^s es un tensor material de cuarto orden que se denomina *tensor de transformación de espacios de tensión* y se obtiene a través de relaciones de resistencia en los espacios real e isótropo ficticio, como sigue:

$$A_{ijkl}^s = \bar{f}_{ik} f_{jl}^{-1} \quad (3.81)$$

Es importante aclarar que, en este modelo, cuando se habla de un *espacio isótropo ficticio* se hace referencia a un espacio ficticio *isótropo respecto de las tensiones de fluencia* pero no necesariamente respecto de las propiedades elásticas.

Por otro lado se supone que las deformaciones elásticas en los espacios isótropo ficticio y real anisótropo son idénticas:

$$\bar{\epsilon}_{ij}^e = \epsilon_{ij}^e \quad (3.82)$$

La tensión en el espacio ficticio se calcula como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^{s*} \bar{\epsilon}_{kl}^e = \bar{C}_{ijkl}^{s*} \epsilon_{kl}^e \quad (3.83)$$

Donde \bar{C}_{ijkl}^{s*} es el tensor de rigidez elástica secante en el espacio isótropo ficticio. Como se trata de un espacio isótropo ficticio en resistencias pero no en rigidez, la forma de este tensor no se conoce apriori, pero puede calcularse a partir de las ecuaciones (3.83) y (3.80) como sigue:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^{s*} \epsilon_{kl}^e = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} = A_{ijkl}^s C_{klmn}^s \epsilon_{mn}^e \quad (3.84)$$

Comparando el segundo y el cuarto miembro de la ec.(3.84) se deduce que:

$$\bar{C}_{ijkl}^{s*} = A_{ijkl}^s C_{klmn}^s \quad (3.85)$$

La ec.(3.84) es idéntica a la ec.(3.56) del modelo que utiliza una doble transformación de espacios.

Reemplazando la ec.(3.60) en la ec.(3.85) se obtiene la siguiente expresión que relaciona los modulos elásticos en los espacios ficticios de ambos modelos:

$$\bar{C}_{ijkl}^{s*} = A_{ijrs}^s A_{rsmn}^{s-1} \bar{C}_{mnpq}^s A_{pqkl}^e = \bar{C}_{ijpq}^s A_{pqkl}^e \quad (3.86)$$

En el caso particular en que el material presenta anisotropía proporcional, se demostró ya que el tensor A_{pqkl}^e es igual al tensor identidad y, por lo tanto, resulta:

$$\bar{C}_{ijkl}^{s*} = \bar{C}_{ijkl}^s \quad (3.87)$$

o sea que, en ese caso, el tensor de rigidez en el espacio ficticio isótropo en resistencia es igual al tensor de rigidez de un material isótropo o, lo que es lo mismo, el espacio ficticio isótropo en resistencias es también isótropo en rigideces.

3.3.3.3. Ecuación Constitutiva Secante

La relación constitutiva secante se obtiene aplicando el método de Coleman a la primera desigualdad de Clausius-Planck:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha)}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad (3.88)$$

Donde la energía libre del material bajo el estado real de tensiones y se supone que tiene la siguiente forma:

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha) = \Psi^e(\epsilon_{ij}^e) + \Psi^p(\alpha) = \frac{1}{2\bar{m}} \epsilon_{ij}^e C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^e + \Psi^p(\alpha) \quad (3.89)$$

Reemplazando en esta ecuación la ec.(3.84) resulta:

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e, \alpha) = \frac{1}{2\bar{m}} \epsilon_{ij}^e A_{ijmn}^{s^{-1}} \bar{C}_{mnlk}^{s*} \epsilon_{kl}^e + \Psi^p(\alpha) \quad (3.90)$$

Sustituyendo esta expresión de la energía libre en la ec.(3.88), se obtiene:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn}^{s^{-1}} \bar{C}_{mnlk}^{s*} \epsilon_{kl}^e = A_{ijmn}^{s^{-1}} \bar{\sigma}_{mn} \quad (3.91)$$

lo cual verifica la transformación de espacios de tensiones establecida de partida.

Además, teniendo en cuenta la ec.(3.86), las ecuaciones (3.91) y (3.77) son idénticas.

3.3.3.4. Regla de Flujo.

Evolución de las Variables Internas

Con la transformación de espacios definida en la ecuación (3.80) y una función de potencial escrita de la siguiente forma:

$$G(\sigma_{ij}, \alpha) = \bar{G}(\sigma_{ij}, A_{ijkl}^s, \alpha) = \bar{G}(\bar{\sigma}_{ij}, \alpha) = K \quad (3.92)$$

se puede calcular el flujo plástico como sigue:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda} \underbrace{\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}}_{R_{ij}} A_{klij}^s = \dot{\epsilon}_{kl}^p A_{klij}^s \quad (3.93)$$

Las variables internas plásticas se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^m &= \dot{\lambda} h_{ij}^m \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda} h_{ij}^m \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda} h_{ij}^m \underbrace{\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}}_{R_{kl}} A_{klij}^s = \\ &= \dot{\lambda} \underbrace{h_{ij}^m}_{\bar{R}_{kl}} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} = \dot{\alpha}^m \end{aligned} \quad (3.94)$$

Las ecuaciones (3.93) y (3.94) son idénticas a las ecuaciones (3.69) y (3.71) del modelo descrito en el punto 3.3.2.2.

3.3.3.5. Unicidad de la Disipación.

Energía Libre en el Espacio Ficticio Isótropo

Si se reemplaza en la expresión de la disipación mecánica la regla del flujo y las leyes de evolución de las variables internas, se obtiene:

$$\dot{\Sigma}_{mec} = \frac{A_{ijmn}^s \bar{\sigma}_{mn} \dot{\epsilon}_{kl}^p A_{klij}^s}{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\alpha}^m} \dot{\alpha}^m = \frac{\bar{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl}^p}{m} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\alpha}^m} \dot{\alpha}^m = \dot{\Sigma}_{mec} \geq 0 \quad (3.95)$$

Al igual que en el modelo anterior se confirma que la disipación es un invariante del proceso termodinámico, independientemente del espacio en el

que se la evalúe.

La energía libre en el espacio ficticio isótropo tiene la siguiente forma:

$$\bar{\Psi}(\epsilon_{ij}^e, \bar{\alpha}^m) = \frac{1}{2m} \epsilon_{ij}^e \bar{C}_{ijkl}^{s*} \epsilon_{kl}^e + \bar{\Psi}^p(\bar{\alpha}^m) \quad (3.96)$$

y se cumple que:

$$\bar{\sigma}_{ij} = m \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_{ij}^e} = \bar{C}_{ijkl}^{s*} \epsilon_{kl}^e = A_{ijmn}^s C_{mnr}^s \epsilon_{rs}^e = A_{ijmn}^s \sigma_{mn} \quad (3.97)$$

o sea que se vuelve a obtener la hipótesis de partida (ec.(3.80)).

3.3.3.6. Ecuación Constitutiva Tangente

La ecuación constitutiva tangente se obtiene realizando la derivada temporal de la ec.(3.91) que define la forma secante.

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}^e} \dot{\epsilon}_{kl}^e = \underbrace{\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}}}_{A_{ijmn}^{s-1}} \underbrace{\frac{\partial \bar{\sigma}_{mn}}{\partial \epsilon_{kl}^e}}_{\bar{C}_{mnkl}^{s*}} \dot{\epsilon}_{kl}^e = A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{mnkl}^{s*} \dot{\epsilon}_{kl}^e = A_{ijmn}^{s-1} \dot{\bar{\sigma}}_{mn} \quad (3.98)$$

La ec.(3.98) puede ser interpretada como una transformación lineal de la siguiente ecuación incremental definida en el espacio ficticio isótropo:

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}^e} \dot{\epsilon}_{kl}^e = \bar{C}_{ijkl}^{s*} \dot{\epsilon}_{kl}^e = \bar{C}_{ijkl}^{s*} \left(\dot{\epsilon}_{kl}^e - \dot{\epsilon}_{kl}^p \right) \quad (3.99)$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \bar{C}_{ep,ijkl}^{t*} \dot{\bar{\epsilon}}_{kl} \quad (3.100)$$

Donde el tensor tangente $\bar{C}_{ep,ijkl}^{t*}$ puede obtenerse a partir de la condición de consistencia plástica y resulta:

$$\bar{C}_{ep,ijkl}^{t*} = \bar{C}_{ijkl}^{s*} - \frac{\bar{C}_{ijmn}^{s*} R_{mn} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \bar{C}_{pqkl}^{s*}}{-\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}^m} \bar{h}_{tu}^m \bar{R}_{tu} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{turs}^{s*} R_{rs}} \quad (3.101)$$

Combinando la ec.(3.100) con la ec.(3.98) se puede llegar a la forma incremental tangente para el sólido anisótropo real:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn}^{s-1} \dot{\bar{\sigma}}_{mn} = \underbrace{A_{ijmn}^{s-1} \bar{C}_{ep,mnkl}^{t*}}_{C_{ep,ijkl}^t} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.102)$$

Como comparación con el modelo resultante de una doble transformación de espacios (punto 3.3.2), se desarrolla el modulo tangente para el material anisótropo real obtenido con dicho modelo. Según la ec.(3.79):

$$C_{ep,ijkl}^t = A_{ijmn}^{-1} \bar{C}_{ep,mnpq}^t A_{pqkl}^c \quad (3.103)$$

Reemplazando $\bar{C}_{ep,mnpq}^t$ por la ec.(3.78), se obtiene:

$$C_{ep,ijkl}^t = A_{ijmn}^{s-1} \left[\bar{C}_{mnpq}^s - \frac{\bar{C}_{mhrs}^s \bar{R}_{rs}^* \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{tupq}^s}{-\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}^m} \bar{h}_{tu}^m \bar{R}_{tu} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{turs}^s \bar{R}_{rs}^*} \right] A_{pqkl}^e \quad (3.104)$$

$$C_{ep,ijkl}^t = A_{ijmn}^{-1} \bar{C}_{mnpq}^s A_{pqkl}^e - A_{ijmn}^{-1} \frac{\bar{C}_{mhrs}^s \bar{R}_{rs}^* \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{tupq}^s}{-\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}^m} \bar{h}_{tu}^m \bar{R}_{tu} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{turs}^s \bar{R}_{rs}^*} A_{pqkl}^e \quad (3.105)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.70) y (3.86), se obtiene:

$$C_{ep,ijkl}^t = A_{ijmn}^{-1} \bar{C}_{mnpq}^{s*} - A_{ijmn}^{-1} \frac{\bar{C}_{mhrs}^{s*} \bar{R}_{rs} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{tupq}^{s*}}{-\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}^m} \bar{h}_{tu}^m \bar{R}_{tu} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{turs}^{s*} \bar{R}_{rs}} \quad (3.106)$$

Con lo que se llega a:

$$C_{ep,ijkl}^t = A_{ijmn}^{-1} \bar{C}_{ep,mnkl}^{t*} \quad (3.107)$$

que es idéntico al resultado expresado en la ec.(3.102)

Como conclusión de este estudio comparativo se puede decir que el modelo propuesto es totalmente equivalente al modelo para materiales anisótropos no proporcionales [Oller 1993d], con la ventaja, frente a este, que requiere una única transformación de espacios y por tanto reduce notablemente el número de operaciones de cálculo y datos a almacenar.

3.3.3.7. Datos del Modelo

El modelo presentado requiere los siguientes datos en cada uno de los espacios utilizados:

- *Espacio real anisótropo:*
 - Rigidez inicial local $\left(C_{ijkl}^s \right)_{local}$
 - Tensiones de fluencia $\left(f_{ijkl} \right)_{local}$
 - Orientación de los ejes principales de anisotropía local

- *Espacio ficticio isótropo:*
 - Función de fluencia: $\bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}^m) = 0$
 - Función de potencial: $\bar{G}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}^m) = K$

El tensor que define las tensiones de fluencia en el espacio ficticio isótropo es un tensor isótropo de comparación cualquiera que puede definirse en forma arbitraria.

En el Anexo F.10 se resume la forma operativa de este modelo

3.3.3.8. Consideración del Daño

Para la consideración del daño se debe admitir la existencia de tres espacios: a) *el espacio real anisótropo degradado*, b) *el espacio isótropo ficticio degradado* y c) *espacio ficticio isótropo no degradado*. Ver fig.3.16.

La siguiente transformación:

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} \tag{3.108}$$

relaciona el tensor de tensión en un *espacio ficticio isótropo degradado*

con el correspondiente en el *espacio real anisótropo degradado* a través de un tensor de transformación que se calcula como:

$$A_{ijkl}^s = \bar{f}_{ik}^{-1} f_{jl} = \bar{f}_{ik}^d f_{jl}^{d-1} \quad (3.109)$$

Donde \bar{f}_{ik} y f_{jl} son tensores de tensiones de fluencia correspondientes al sólido ficticio y real respectivamente y \bar{f}_{ik}^d y f_{jl}^d son tensores de tensiones umbrales de daño correspondientes al sólido ficticio y real respectivamente.

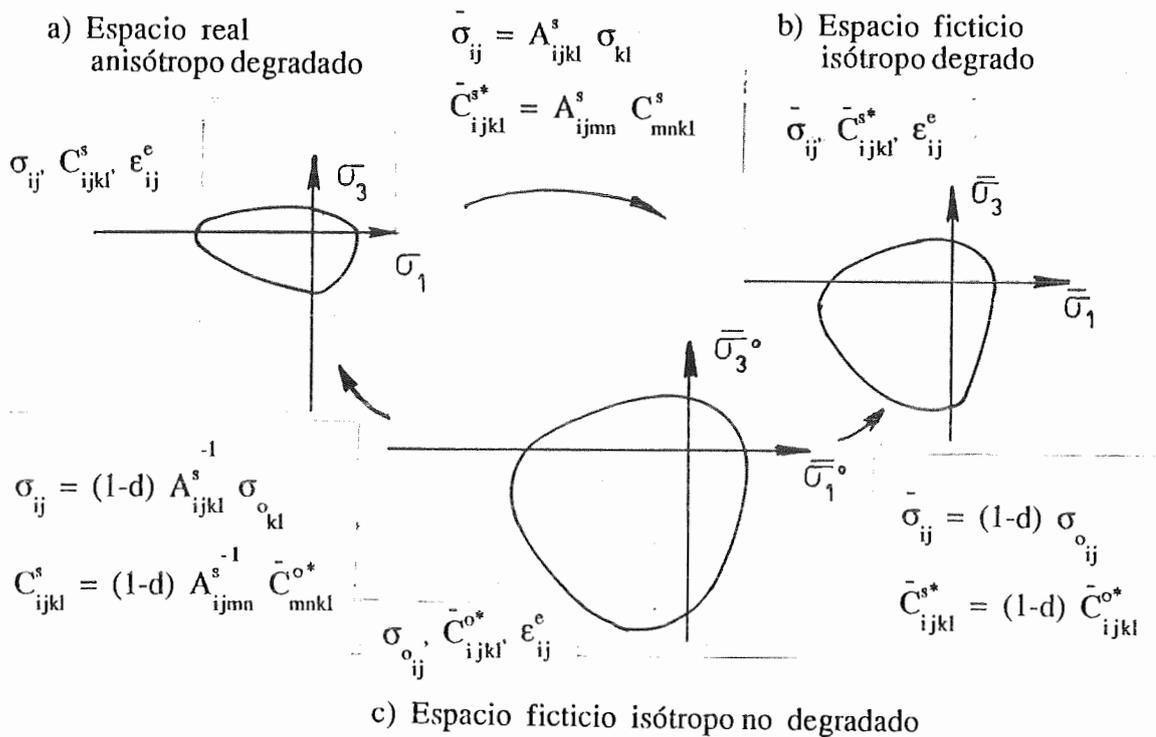


Fig.3.16 Relaciones entre los espacios real anisótropo degradado, ficticio isotrópico degradado y ficticio isotrópico no degradado

La ec.(3.108) supone una hipótesis adicional que es la proporcionalidad entre las tensiones umbrales de fluencia y daño en cada una de las direcciones del material. Esto es una manera de decir que el espacio ficticio definido es *isótropo en las tensiones de fluencia e isótropo en los umbrales de daño*.

Siguiendo esta hipótesis, la función de daño puede escribirse como:

$$\hat{G}^D(\sigma_{ij}, \beta) = \hat{G}^D(\sigma_{ij}, A_{ijkl}, \beta) = \hat{G}^D(\bar{\sigma}_{ij}, \beta) = 0 \quad (3.110)$$

La siguiente transformación define la relación entre los tensores de tensión correspondientes al espacio ficticio isótropo degradado y al espacio ficticio isótropo no degradado :

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1-d) \sigma_{oij} \quad (3.111)$$

Donde σ_{oij} es el tensor de tensiones en el espacio isótropo ficticio no dañado y d la variable de daño.

Por otro lado, se supone que las deformaciones elásticas en los espacios isótropo ficticio degradado y no degradado y real anisótropo degradado son idénticas:

$$\epsilon_{oij}^e = \bar{\epsilon}_{ij}^e = \epsilon_{ij}^e \quad (3.112)$$

Donde ϵ_{oij}^e es el tensor de deformaciones elásticas en el espacio isótropo ficticio no dañado.

La tensión en el espacio ficticio isótropo degradado se calcula como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1-d) \sigma_{oij} = (1-d) \bar{C}_{ijkl}^{o*} \epsilon_{kl}^e = \bar{C}_{ijkl}^{s*} \epsilon_{kl}^e \quad (3.113)$$

Donde \bar{C}_{ijkl}^{s*} es el tensor de rigidez elástica secante en el espacio isótropo ficticio degradado y \bar{C}_{ijkl}^{o*} es el tensor de rigidez elástica secante en el espacio isótropo ficticio no dañado.

Teniendo en cuenta que:

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1-d) \bar{C}_{ijkl}^{o*} \epsilon_{kl}^e = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} = A_{ijkl}^s C_{klmn}^s \epsilon_{mn}^e \quad (3.114)$$

donde C_{klmn}^s es el tensor de rigidez elástica secante en el espacio real anisótropo dañado, se encuentra que:

$$\bar{C}_{ijkl}^{o*} = \frac{1}{1-d} A_{ijmn}^s C_{mnlk}^s \quad (3.115)$$

3.4. EJEMPLOS DE COMPROBACION DEL MODELO PROPUESTO

3.4.1. EFECTO DE LA ORIENTACION DE FIBRAS UNIDIMENSIONALES

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un prisma de material compuesto por fibras de vidrio continuas unidimensionales sometido a tracción uniaxial. Ver fig.3.17. Las fibras se disponen formando un ángulo ϕ con la dirección de tracción ($0 \leq \phi < 90^\circ$) y se estudia como varía el comportamiento en función de ese ángulo ϕ .

Las propiedades mecánicas del material se han resumido en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Propiedades mecánicas de las fibras

$E_{long} = 59199,98 \text{ MPa}$	Criterio de Fluencia:
$E_{trans} = 14061,73 \text{ Mpa}$	Mohr-Coulomb, $\phi = \psi = 15^\circ$
$\nu = 0$	Plasticidad Perfecta
Flujo plastico de fibras	$\sigma_{c, long}^o = 956,19 \text{ MPa}$ $\sigma_{t, long}^o = 95,619 \text{ MPa}$
	$\sigma_{c, trans}^o = \sigma_{c, long}^o / 14$ $\sigma_{t, trans}^o = \sigma_{t, long}^o / 14$

El prisma se discretizó con cuatro elementos de 4 nodos y 2x2 puntos de ntegración.

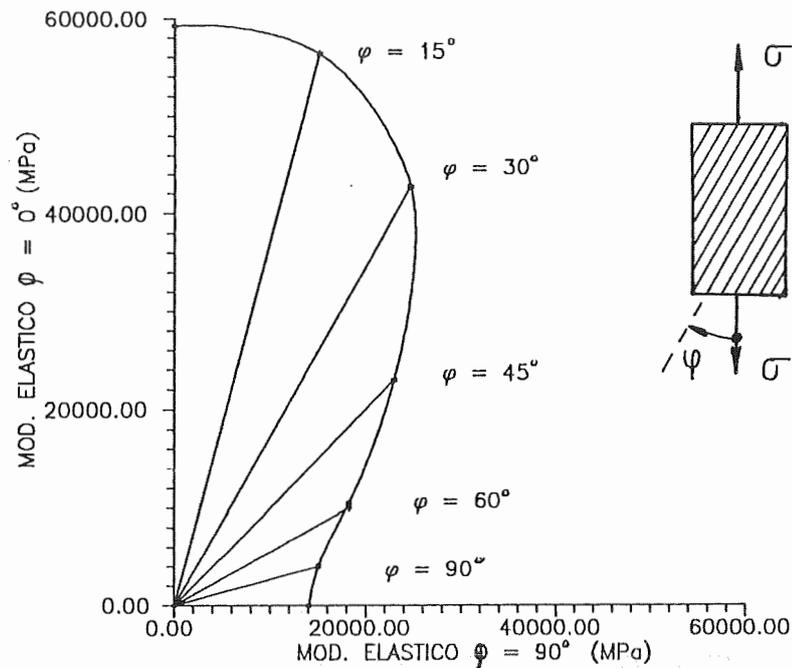


Fig.3.17 Variación del módulo elástico en función de la orientación de las fibras

En la fig.3.17 se ha representado la variación del módulo de Young en la dirección de la fuerza aplicada en función de la inclinación de las fibras respecto a esa dirección. En ese diagrama puede verse como va disminuyendo el módulo elástico a medida que las fibras se van inclinando respecto de la dirección de tracción hasta alcanzar su valor mínimo cuando estas se ubican en dirección ortogonal a la fuerza aplicada.

En la fig.3.18 se ha representado la variación de la resistencia a tracción en función del ángulo de orientación de las fibras. La máxima resistencia se produce cuando las fibras están alineadas con la carga $\varphi=0^\circ$ y la mínima para $\varphi=45^\circ$. La resistencia para $\varphi=0^\circ$ es mayor que para $\varphi=45^\circ$ debido al efecto de restricción de la deformación transversal impuesto por la resistencia a compresión de las fibras.

Si se compara las curvas de las fig.3.17 y 3.18 con resultados

experimentales para este tipo de materiales [Hull 1981] puede verse que sus tendencias son similares. Se podría lograr mejor aproximación con los resultados experimentales si se utilizara otro criterio de fluencia más adecuado para fibras. En este ejemplo sólo se intenta demostrar la capacidad del modelo para reproducir comportamientos altamente anisótipos como los de las fibras por lo que la elección de la superficie de fluencia fue arbitraria.

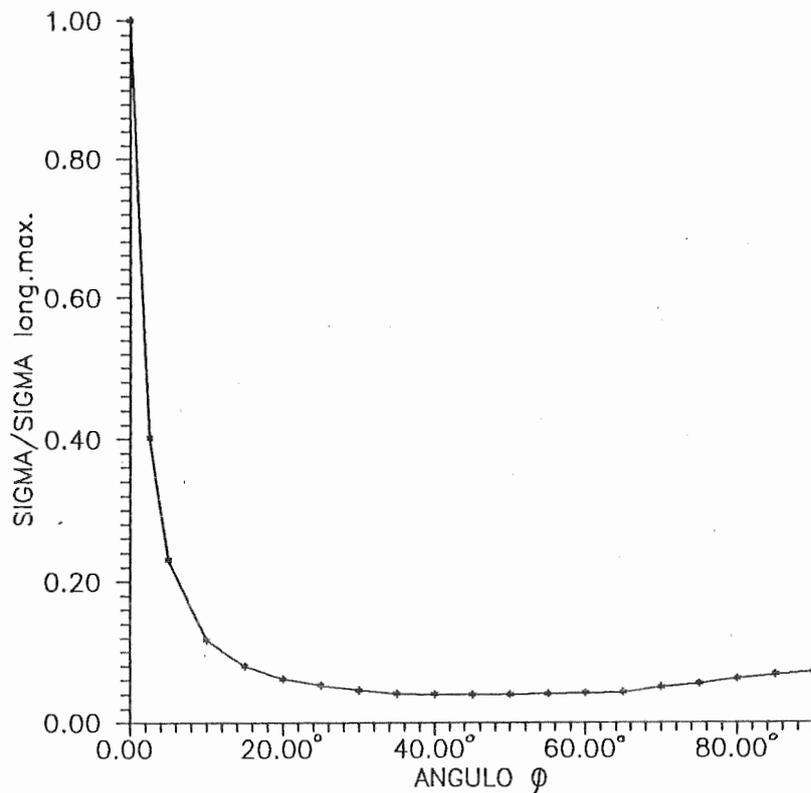


Fig.3.18 Variación de la resistencia tracción en función de la orientación de las fibras

3.4.2. PANEL DE MAMPOSTERIA

Este ejemplo consiste en estudiar el comportamiento de un panel de mampostería ensayado por Page [Page 1978] bajo cargas de compresión con distintas orientaciones respecto de la junta de mortero. El panel estudiado se ha representado en la fig.3.19. Se trata de un panel a escala reducida.

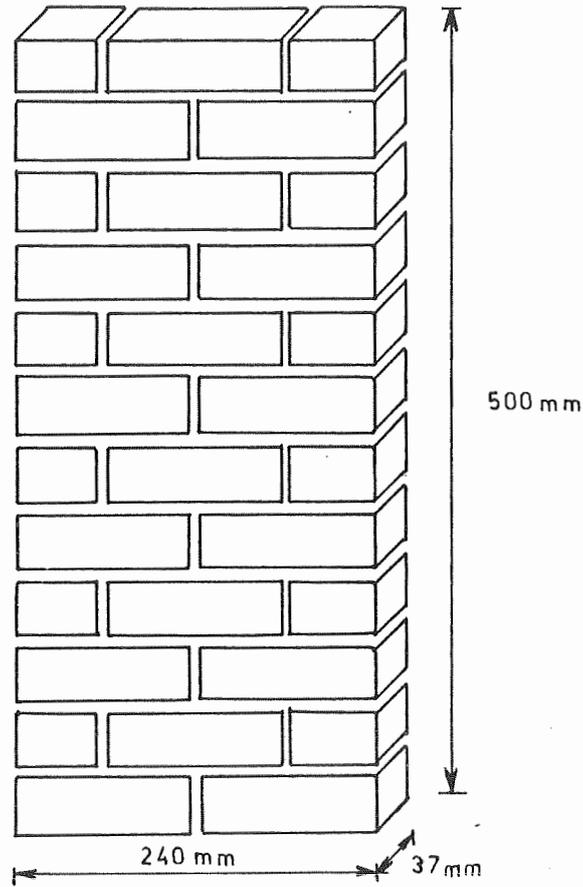


Fig.3.19 Panel de mampostería

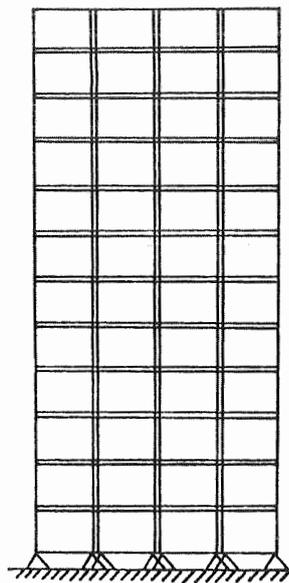


Fig.3.20 Malla de elementos finitos

En primer lugar, como verificación del modelo isótipo y como contraste de los resultados a obtener posteriormente, se resolvió el problema discretizando el panel en elementos de ladrillo y elementos de mortero. Para ello se utilizó la malla de elementos finitos de la fig 3.20, con elementos isoparamétricos de 4 nodos y 2x2 puntos de integración.

Las propiedades mecánicas de los materiales se han resumido en Tablas 3.2 y 3.3. En este primer paso sólo se tuvo en cuenta la anisotropía elástica de los ladrillos.

Tabla 3.2. Propiedades mecánicas de los ladrillos

$E_{horiz} = 5920 \text{ MPa}$	$E_{vert} = 7550 \text{ MPa}$	Criterio de Fluencia :
$\nu = 0,167$		Mohr Coulomb ($\phi=15^\circ$)
$\sigma_c^o = 36,5 \text{ MPa}$		Plasticidad perfecta
$\sigma_t^o = 12,8 \text{ MPa}$		Flujo asociado

Tabla 3.3. Propiedades mecánicas del mortero

$E = 1694,9 \text{ MPa}$	Criterio de Fluencia :
$\nu = 0,21$	Mohr Coulomb ($\phi=30^\circ$)
$\sigma_c^o = 3,2 \text{ MPa}$	Criterio de Potencial :
$\sigma_c^{pic} = 14,0 \text{ MPa}$	Mohr Coulomb ($\psi=15^\circ$)
$\sigma_T^o = 0,29 \text{ MPa}$	$G_c = 12 \text{ N/mm}$ ($G_c^p = 6 \text{ N/mm}; G_c^d = 6 \text{ N/mm}$)
$\kappa_{pic}^d = 0,3$	$G_f = 0,26 \text{ N/mm}$ ($G_f^p = 0,10 \text{ N/mm}; G_f^d = 0,16 \text{ N/mm}$)
Curva de endurecimiento plástico lineal	
Curva de endurecimiento en daño exponencial con pico	

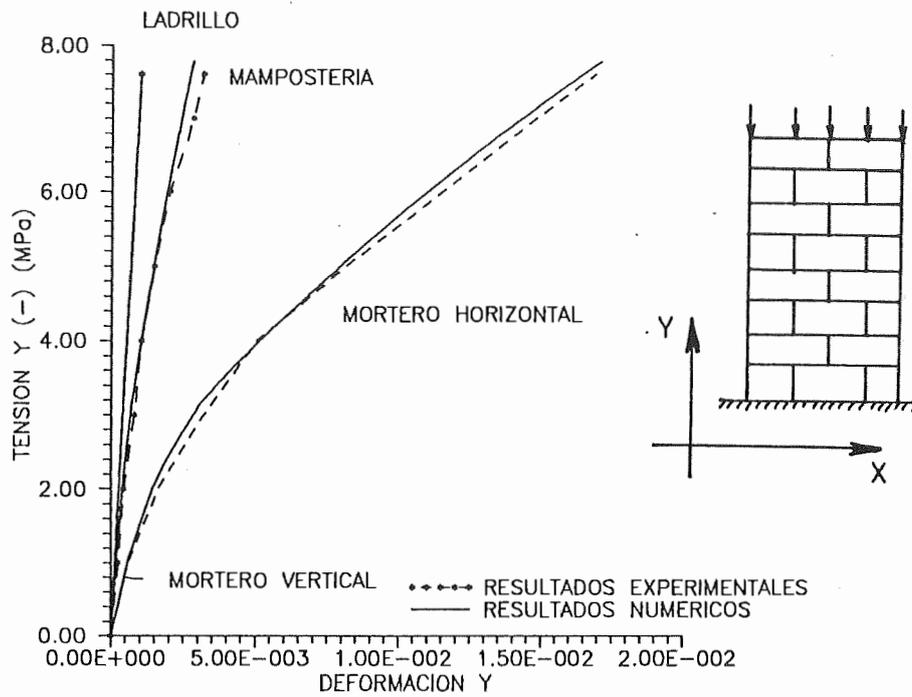


Fig.3.21 Ensayo de compresión normal a la junta
(Tensión-deformación en la dirección de la carga)[Page 1978]

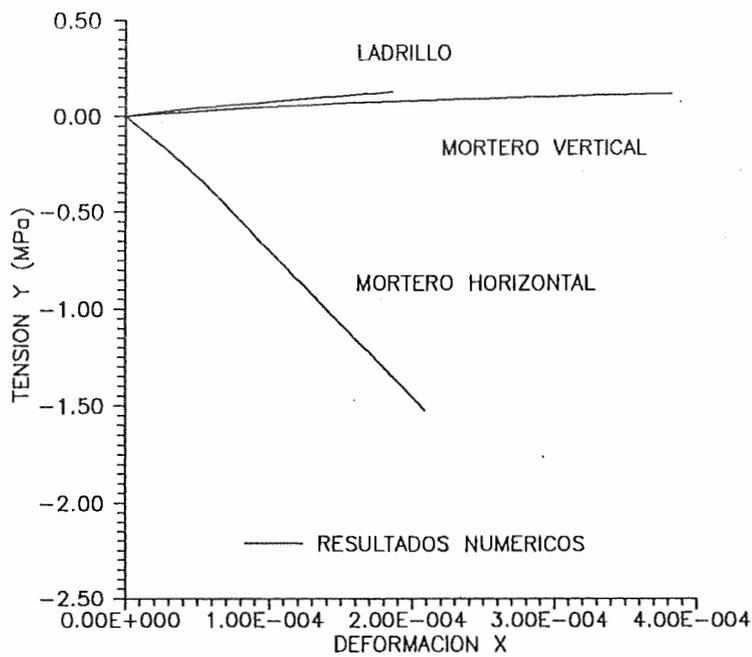


Fig.3.22 Ensayo de compresión normal a la junta
(Tensión-deformación en la dirección perpendicular a la carga)

En la fig.3.21 se han representado las curvas tensión deformación vertical para la carga actuando en dirección vertical (normal a la junta de mortero). Puede verse que los resultados numéricos se aproximan bastante a los experimentales. Los ladrillos permanecen elásticos. El mortero en cambio, plastifica. Hay una diferencia notable de comportamiento entre la junta vertical y la horizontal. La junta vertical se comporta como si fuera perfectamente plástica mientras que las horizontales muestran un gran endurecimiento.

En la fig.3.22 se han representado las curvas tensión-deformación horizontal correspondientes al mismo ensayo. Observando las mismas, se puede explicar la diferencia de comportamiento entre las juntas de mortero detectada en la fig.3.21. La junta horizontal resulta comprimida en la dirección horizontal debido a que su módulo de Poisson es más grande que el del ladrillo. Esto hace que la junta trabaje en compresión biaxial y aumente su resistencia mostrando un endurecimiento mayor que el que tendría si trabajara a compresión simple. La junta vertical, por el contrario, resulta traccionada en la dirección horizontal, esto hace que su resistencia disminuya respecto a la que tendría en compresión uniaxial.

Tanto en la fig.3.21 como en la fig.3.22 las curvas correspondientes a la de la mampostería caen entre las curvas de los ladrillos y la de la junta horizontal.

En la fig.3.23 se han representado las curvas tensión-deformación horizontal para la carga actuando en dirección horizontal (paralela a la junta de mortero). Nuevamente se observa que los ladrillos permanecen elásticos mientras que las juntas de mortero muestran un comportamiento no lineal. Aparece también un comportamiento bien diferenciado de las juntas horizontales y verticales de mortero.

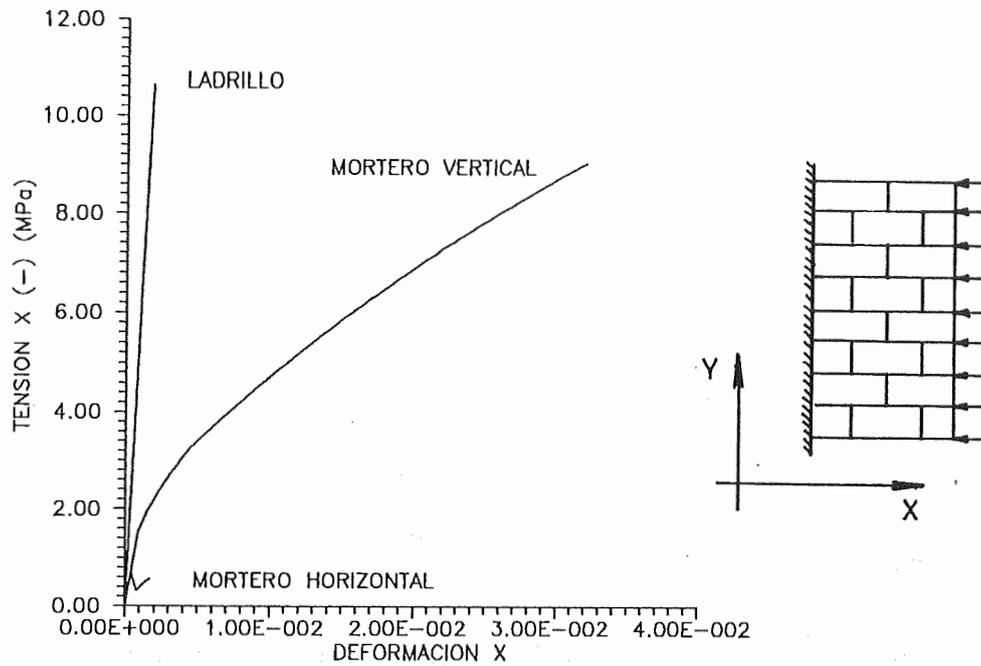


Fig.3.23 Ensayo de compresión paralelo a la junta
(Tensión-deformación en la dirección de la carga)

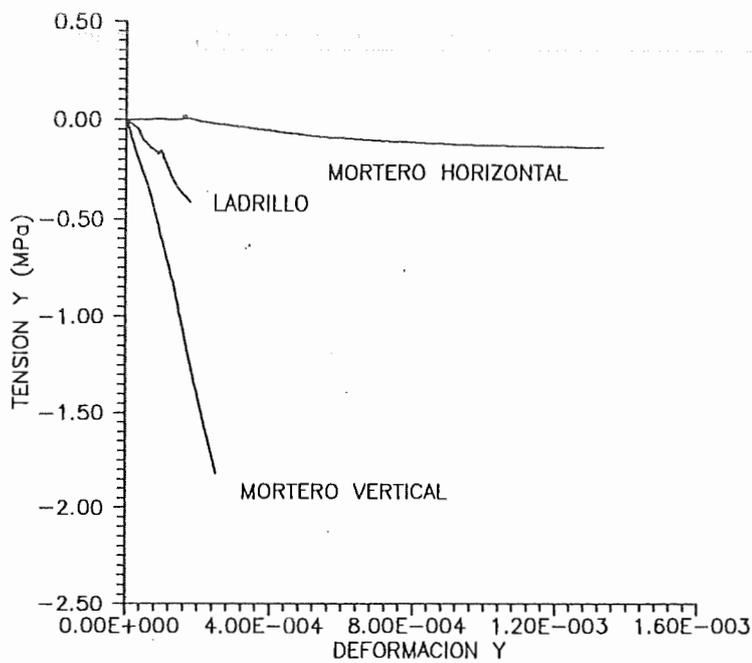


Fig.3.24 Ensayo de compresión paralelo a la junta
(Tensión-deformación en la dirección perpendicular a la carga)

En la fig.3.24 se han representado las curvas tensión-deformación en la dirección vertical para el mismo ensayo. Puede verse que el mortero horizontal en un comienzo resulta traccionado verticalmente por lo que disminuye su resistencia y luego empieza a comprimirse aumentando la misma. El mortero vertical, en cambio, está comprimido verticalmente por la diferencia en el módulo de Poisson con los ladrillos. Es un comportamiento análogo al observado para el ensayo de compresión vertical sólo que con las direcciones intercambiadas.

Como conclusión de este análisis debe notarse que el comportamiento de cada uno de los materiales dentro del conjunto de la mampostería no sólo depende de las características mecánicas propias del material componente sino que está altamente influenciado por su disposición geométrica.

Una vez conocido el comportamiento de la mampostería a través de este ejemplo, se intentó resolver el mismo problema pero simulando a la mampostería como un único material ortótropo. Esto tiene la ventaja de que permite reducir notablemente el número de elementos necesarios para resolver el problema. En ese caso ya no hace falta discretizar ladrillo por ladrillo y junta por junta. Sin embargo, se trata sólo de una *aproximación al comportamiento de la mampostería* ya que el modelo de un único material ortótropo tiene a priori algunas limitaciones. Es conveniente resaltar que la mampostería no es un material compuesto propiamente dicho sino una estructura compuesta de distintos materiales.

La consideración de la anisotropía a través de un tensor de transformación de espacios constante no permite lograr superficies de fluencia o de rotura como las encontradas experimentalmente por Page [1981] en las que la relación entre la resistencia a tracción en la dirección normal y paralela a la junta no es igual a la relación de resistencias a compresión en las mismas direcciones. Para este caso haría falta definir una transformación que dependa del estado tensional. Por otro lado, en un modelo de material único sólo puede tenerse en cuenta en forma muy aproximada el efecto de la disposición geométrica y del tamaño de los mampuesto y de la junta de mortero.

Resistencia Tracción de la Mampostería

En primer lugar, se presenta la aplicación del modelo ortótropo a la evaluación de la resistencia a tracción de la mampostería. Para ello se resolvió un elemento de mampostería con inclinaciones variables respecto del ejes principales de tensión, ver fig.3.25, y se encontró en cada caso la correspondiente resistencia. En la Tabla 3.4 se han resumido los datos utilizados.

Tabla 3.4. Resistencia a tracción de la mampostería

$\sigma_r^o = 2 \sigma_t^o$	Criterio de rotura:
	Rankine
$\sigma_{rt}^o = \sigma_r^o / \sqrt{2}$	θ variable

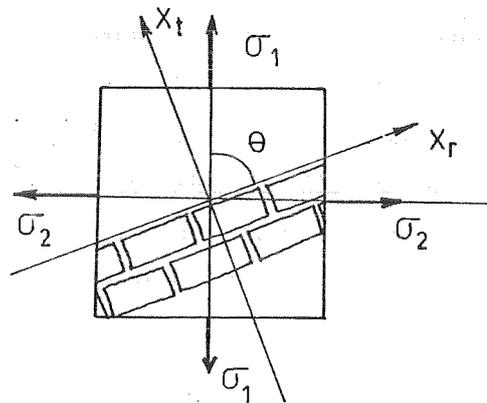


Fig.3.25 Panel de mampostería sometido a tracción

En el espacio isótropo ficticio se trabaja con el criterio de Rankine:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_r^o \tag{3.116}$$

Donde $\bar{\sigma}_1$ es la tensión principal mayor en el espacio ficticio isótropo que puede escribirse en función de las componentes del tensor de tensiones ficticias o de sus invariantes. Si además se reemplaza:

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} \quad (3.117)$$

Donde:

$$A_{ijkl}^s = \bar{f}_{ik} f_{jl}^{-1} \quad (3.118)$$

y se recuerda que el tensor de resistencia f_{ij} depende de la orientación de los ejes locales de anisotropía θ (ver ec.(3.32), se llega a una ecuación del tipo:

$$\mathcal{F}(\sigma_1, \sigma_2, \theta) = \sigma_r^0 \quad (3.119)$$

En la Fig.3.26 se han representado las curvas de rotura en el plano σ_1 - σ_2 para distintas inclinaciones θ . Las mismas son idénticas a las encontradas por [Beneddetti 1982].

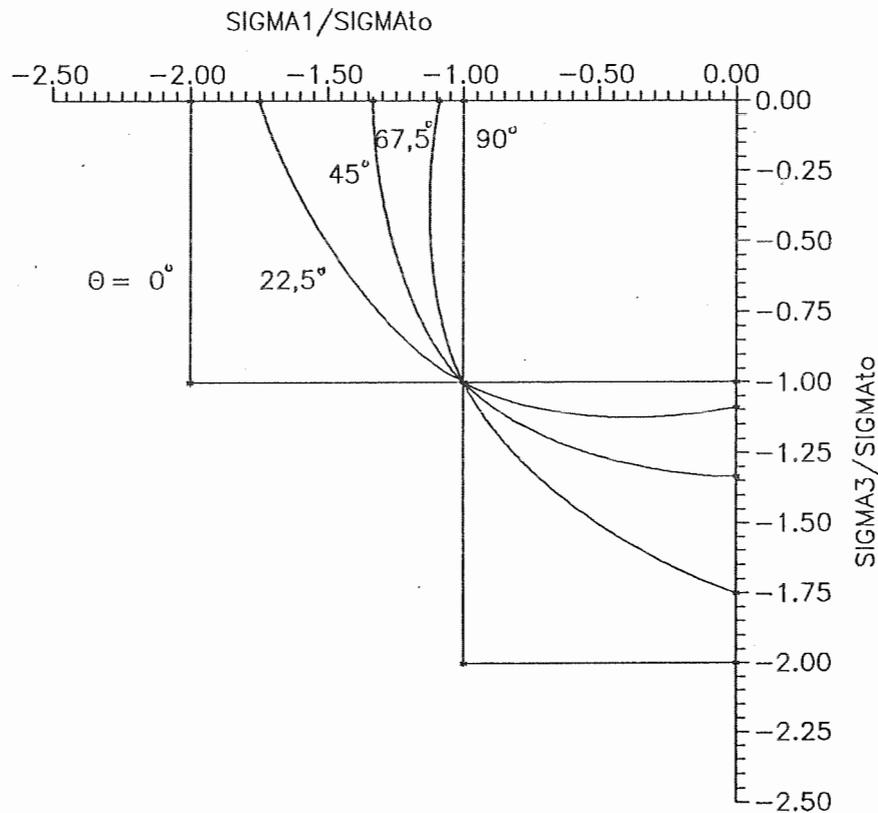


Fig.3.26 Variación de la resistencia tracción con la inclinación de la junta.

Se podría seguir un procedimiento similar para modelar la rotura por compresión con el criterio de Mohr Coulomb, por ejemplo [Benedetti 1982]. El problema está en que la relación entre resistencias compresión en las distintas direcciones es diferente de la correspondiente a tracción [Page 1981]. Debido a ello, la superficie de rotura en el espacio real obtenida como se explicó, a través de una transformación que no depende del estado tensional, difiere de los resultados experimentales [Page 1981]

Modelo Simplificado

En segundo lugar, se pasa ya al modelo simplificado para reproducir el comportamiento del panel ensayado por Page [1978], ver fig.3.19.

Las características mecánicas del material utilizado para simular el comportamiento de la mampostería se han resumido en la Tabla 3.5. Las mismas fueron obtenidas en base a las siguientes hipótesis simplificadoras que a su vez suponen un comportamiento elástico:

- Deformaciones idénticas en las direcciones paralelas a la junta y tensión igual a la suma de tensiones por las relaciones de volúmenes:

$$E_x = E_z = k_m E_m + k_l E_l \quad (3.120)$$

$$v = v_{xz} = k_m v_m + k_l v_l \quad (3.121)$$

Donde:

k : relación del volumen total

$$k_m + k_l = 1 \quad (3.122)$$

E : módulo de elasticidad longitudinal

v : coeficiente de Poisson

y los subíndices m y l indican mortero y ladrillo respectivamente

- Resistencia en direcciones paralelas a la junta igual a la tensión en el momento que el mortero alcanza su resistencia

$$\sigma_x^o = \sigma_z^o = \left(k_l \left(\frac{E_l}{E_m} \right) + k_m \right) \sigma_m^o \tag{3.123}$$

- Deformación en dirección normal a la junta igual a suma de deformaciones y tensiones idénticas.

$$E_y = \frac{1}{\frac{k_l}{E_l} + \frac{k_m}{E_m}} \tag{3.124}$$

- Resistencia en la dirección vertical igual a resistencia del mortero:

$$\sigma_y^o = \sigma_m^o \tag{3.125}$$

- Flujo en la dirección z, normal al plano del panel.

Tabla 3.5. Propiedades mecánicas de la mampostería

$E_x = E_z = 5455,2 \text{ MPa}$, $E_y = 5471,0 \text{ MPa}$	Criterio de Fluencia :
$\nu = 0,172$	Mohr Coulomb ($\phi = 30^\circ$)
$\sigma_c^o = 3,2 \text{ MPa}$	$\sigma_x^o / \sigma_c^o = \sigma_y^o / \sigma_c^o = 4,08$ $\sigma_y^o / \sigma_c^o = 1$
$\sigma_c^{pi} = 14,0 \text{ MPa}$	Flujo de fibra en la dirección z
$\sigma_T^o = 0,29 \text{ MPa}$	$G_c^p = 6 \text{ N/mm}$; $G_c^d = 6 \text{ N/mm}$
$\kappa_{pic}^d = 0,3$	
Curva de endurecimiento plástico lineal	$G_f^p = 0,10 \text{ N/mm}$; $G_f^d = 0,16 \text{ N/mm}$
Curva de endurecimiento en daño exponencial con pico	

Para resolver este panel se utilizó la malla de elementos finitos de la fig.3.27 con sólo seis elementos de 4 nodos y 2x2 puntos de integración.

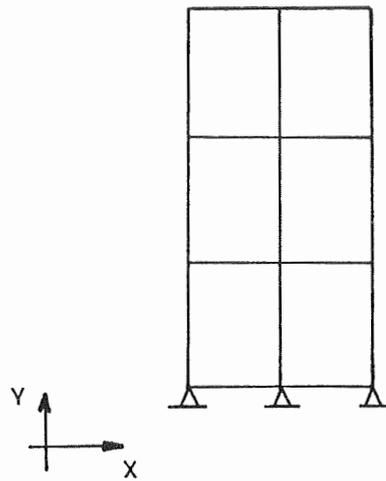


Fig.3.27 Malla de Elementos Finitos

En la fig.3.28 se ha representado la curva tensión deformación de la mampostería para carga vertical, normal a la junta. En la misma puede verse que los resultados se aproximan bastante a los obtenidos experimentalmente.

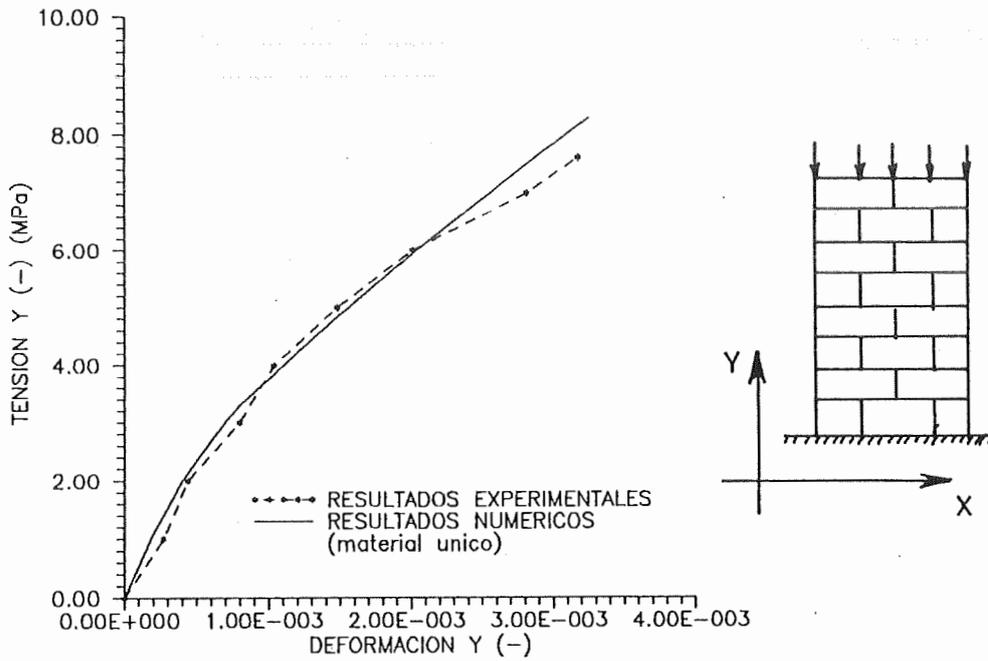


Fig.3.28 Ensayo de compresión normal a la junta
(Tensión-deformación en la dirección de la carga)

En la fig.3.29 se ha representado la curva de la mampostería bajo carga horizontal, paralela a la junta. En la misma puede verse que los resultados se aproximan bastante a los obtenidos como promedio en el mismo ejemplo resuelto con elementos de ladrillo y elementos de mortero.

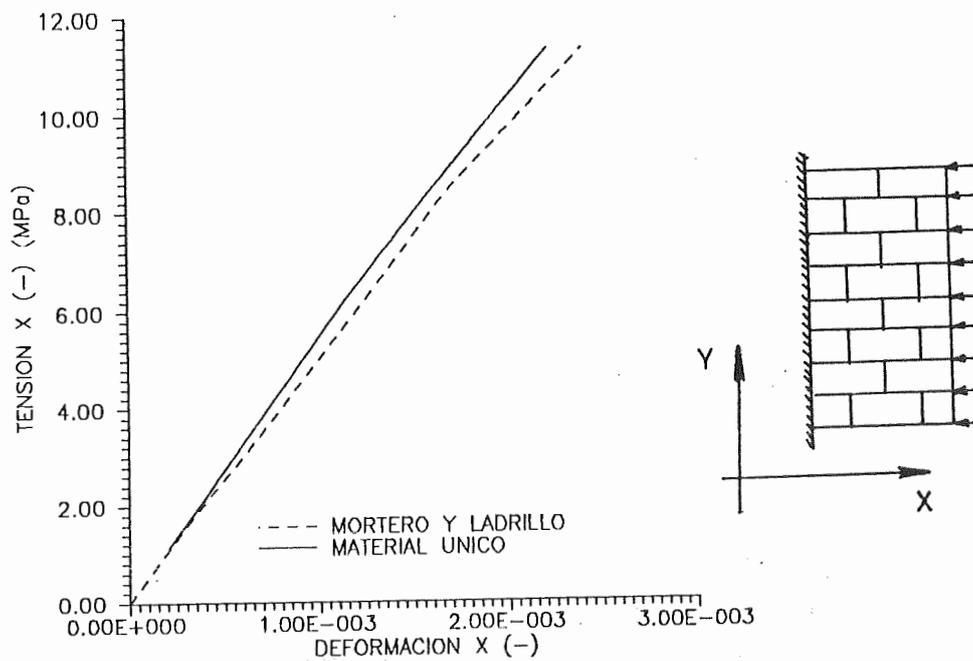


Fig.3.29 Ensayo de compresión paralelo a la junta (Tensión-deformación en la dirección de la carga)

En la fig.3.30 se ha representado la curva tensión tangencial-deformación angular en la junta para ensayos de compresión con cierta inclinación respecto de la junta de mortero. Puede verse que los resultados del modelo aproximado no coinciden con los resultados experimentales pero tienen la misma tendencia.

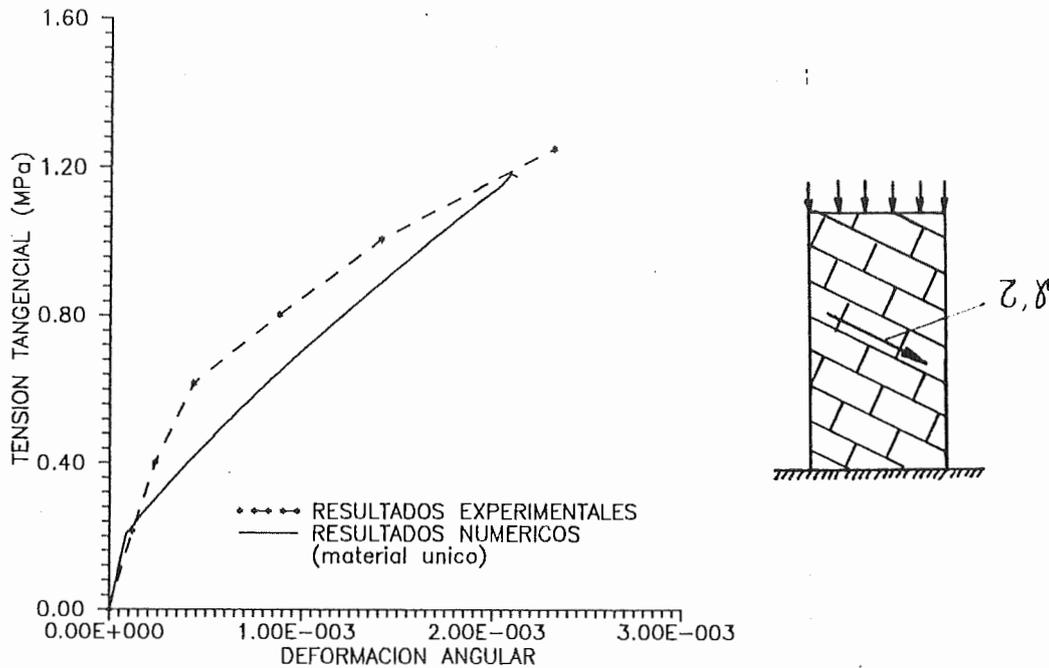


Fig.3.30 Ensayo de compresión inclinado respecto a la junta
(Tensión tangencial-deformación angular en la dirección de la junta)

3.5. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se ha presentado un modelo que permite reproducir el comportamiento de sólidos elásto-plásticos anisótropos no proporcionales mediante un modelo isótropo a través de una única transformación de espacios.

La extensión del modelo al caso de daño debe ser estudiada con más profundidad.

Como generalización de este modelo se propone formular una transformación de espacios que dependa del estado tensional para poder simular materiales donde la relación entre resistencias a compresión y tracción cambia con la dirección en que se la mida.

ANEXO 3.1

FORMA DE LA SUPERFICIE DE FLUENCIA

PARA MATERIALES ANISOTROPOS

A3.1.1. INTRODUCCION

En el Capítulo 3 se presentó un modelo que a través de una transformación de espacios permite resolver problemas de materiales anisótropos elastoplásticos y degradables utilizando funciones de fluencia y daño isotropas. Esto evita la definición particular de estas funciones para cada tipo de material anisótropo.

En este anexo se obtienen y se grafican las formas de las superficies de fluencia que resultan en el espacio anisótropo real.

A3.3.2. FORMA DE LA SUPERFICIE DE FLUENCIA EN EL ESPACIO ANISOTROPO REAL

La función de fluencia del material anisótropo real F puede escribirse como una función isótropa \bar{F} de las componentes del tensor de tensiones en el espacio ficticio isótropo. Esto es:

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = \bar{F}(\sigma_{ij}, A_{ijkl}^s, \bar{\alpha}) = \bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}) \quad (\text{A3.1.1})$$

A la inversa, partiendo de las funciones isótropas \bar{F} en el espacio de tensiones ficticias $\bar{\sigma}_{ij}$ y reemplazando:

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^s \sigma_{kl} \quad (\text{A3.1.2})$$

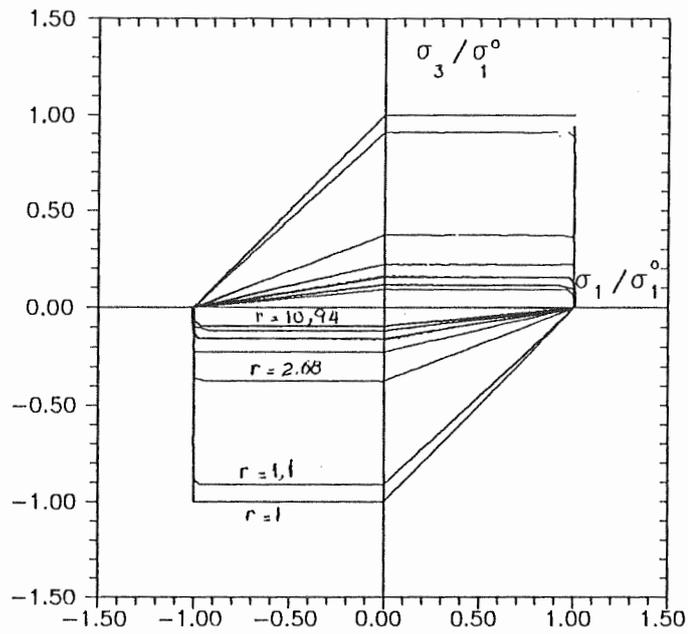
se puede encontrar la forma de las funciones F en el espacio de tensiones reales σ_{ij}

En las figuras A3.1 se han representado las superficies de fluencia en el plano principal σ_1 - σ_3 , para distintas relaciones de resistencias:

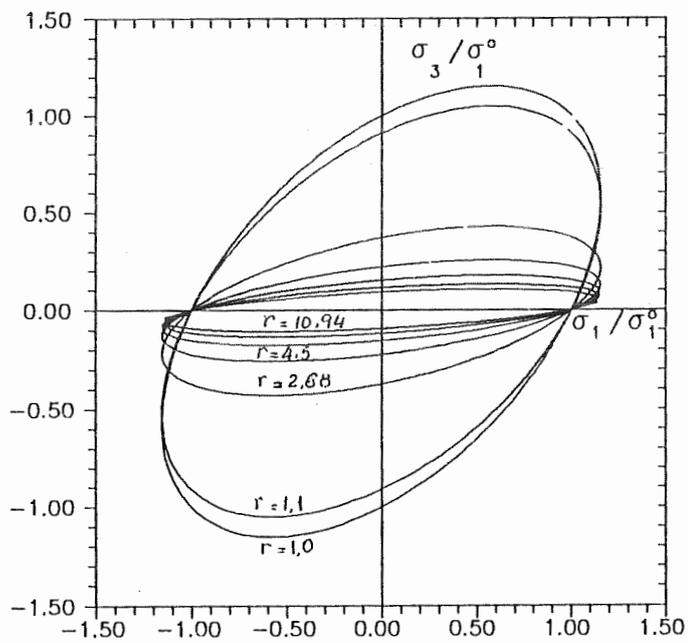
$$r = \sigma_1^o / \sigma_3^o \quad (\text{A3.1.3})$$

y para distintos criterios de fluencia o daño.

De la observación de las figuras A3.1 se desprende que la transformación de espacios propuesta preserva la convexidad original de las superficie de fluencia y daño durante la transformación de espacios.

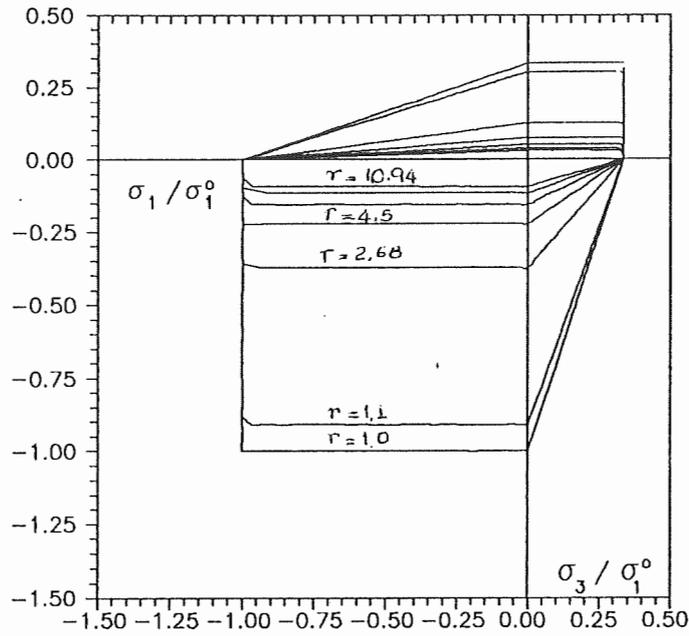


a) Tresca

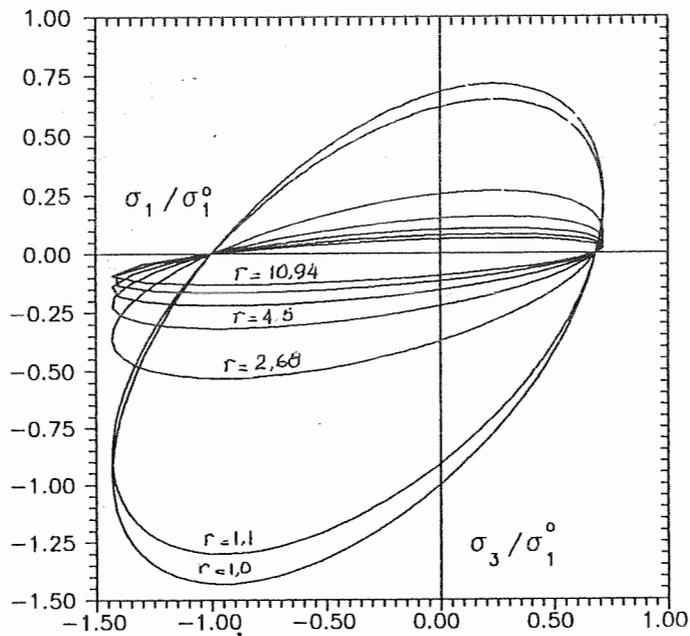


b) Von Mises

Fig.A3.1. Efecto del cambio de forma para distintas relaciones de resistencias $r = \sigma_1^0/\sigma_3^0$

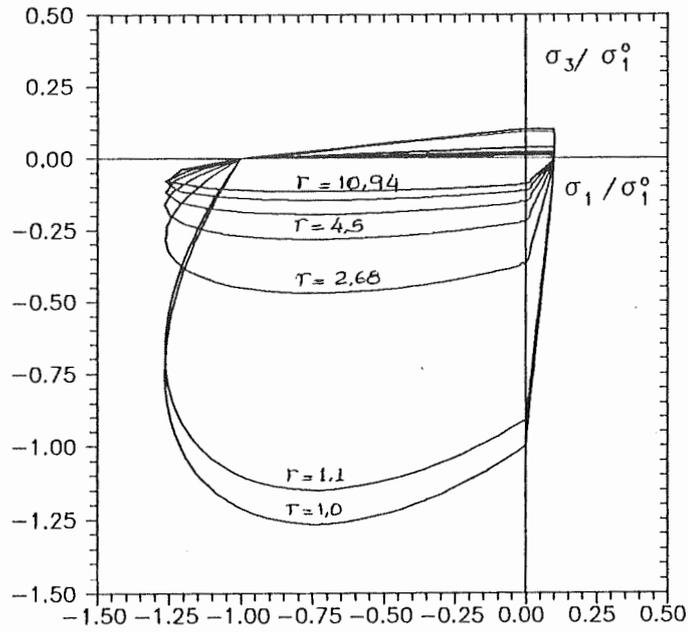


c) Mohr-Coulomb



d) Drucker-Prager

Fig.A3.1. Efecto del cambio de forma para distintas relaciones de resistencias $r = \sigma_1^0 / \sigma_3^0$ (Continuación)



e) Lubliner-Oller

Fig.A3.1. Efecto del cambio de forma para distintas relaciones de resistencias $\gamma = \sigma_1^0 / \sigma_3^0$ (Continuación)

ANEXO 3.2

FLUJO PLASTICO EN MATERIALES ANISOTROPOS

A3.2.1. INTRODUCCION

La anisotropía de un material elastoplástico no sólo influye en su tensión de fluencia sino también en la orientación del flujo plástico. El material tiende a fluir en la dirección de menor resistencia. Este mismo efecto se logra al hacer la transformación de espacios propuesta en el Capítulo 3.

A continuación se presenta un ejemplo numérico en el que se ilustra como se orienta el flujo plástico en un material ortótropo.

Finalmente se trata el problema singular del flujo plástico en fibras unidimensionales.

A3.2.2. ORIENTACION DEL FLUJO PLASTICO EN UN MATERIAL ORTOTROPO.
EJEMPLO ILUSTRATIVO

Supóngase un material con una relación de resistencias :

$$r = \sigma_1^o / \sigma_3^o = 4,5$$

que obedece al criterio de fluencia de Von Mises.

En la Fig A3.2.1 se ha representado la superficie de fluencia en el espacio de tensiones reales F y la superficie de fluencia en el espacio isótropo ficticio \bar{F} , en el plano $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 = 0$.

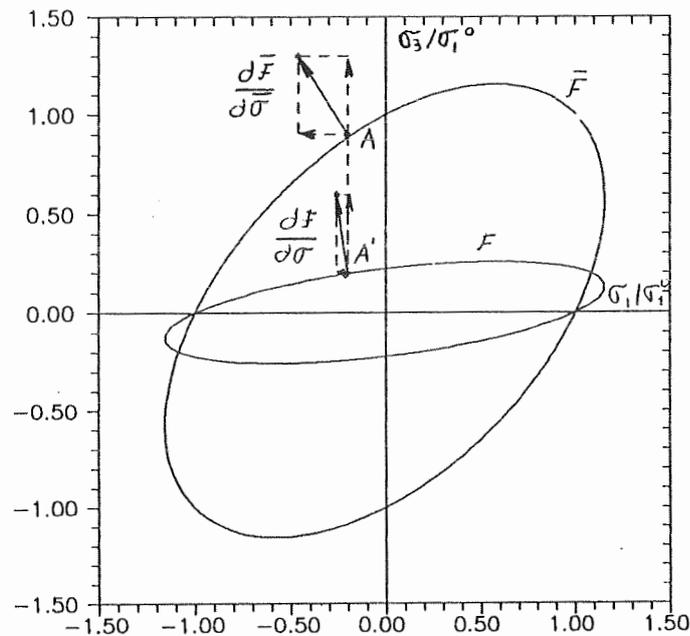


Fig.A3.2.1. Flujo plástico en un material ortótropo
 (r=4,5)

Para el caso $(\sigma_1 = -\sigma_3)$, utilizando la transformación de espacios se tiene: $(\bar{\sigma}_1 = \sigma_1)$ y $(\bar{\sigma}_3 = 4,5 \sigma_3 = -4,5 \sigma_1)$. Reemplazando estos valores en la

ecuación de la función de fluencia isotropa de Von Mises, se obtiene:

$$\bar{\sigma}_1/\sigma_1^0 = -0,2 \quad \bar{\sigma}_3/\sigma_1^0 = 0,9$$

Suponiendo que las direcciones principales de anisotropía coinciden con el sistema de referencia, el tensor de transformación de tensiones escrito en forma matricial resulta:

$$A^s = \begin{bmatrix} 4,5/4,5 & 0 \\ 0 & 4,5/1 \end{bmatrix}$$

Supóngase ahora el caso de flujo asociado, esto es $G \equiv F$ y $\bar{G} \equiv \bar{F}$. En la fig.A3.2.1 se ha indicado la dirección del flujo en el espacio isotropo ficticio, normal a la superficie de potencial correspondiente.

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}} = \begin{Bmatrix} -0.545 \\ 0.838 \end{Bmatrix}$$

Para obtener el flujo en el espacio anisotropo real se debe multiplicar este último por el tensor de transformación, lo que equivale multiplicar la componente en la dirección de menor resistencia por la relación de resistencias. De esta forma, el flujo se orienta en la dirección de menor resistencia.

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}} : A^s = \begin{bmatrix} 4,5/4,5 & 0 \\ 0 & 4,5/1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.545 \\ 0.838 \end{Bmatrix}$$

El flujo plástico en el espacio real normalizado a la unidad resulta:

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} -0.143 \\ 0.990 \end{Bmatrix}$$

A3.2.3. FLUJO EN FIBRAS

Las fibras constituyen un caso extremo de ortotropía en que el comportamiento es prácticamente unidimensional. Sin embargo, su comportamiento no se obtiene como una particularización del modelo antes presentado.

Si bien una fibra tiene su mayor resistencia en la dirección axial, sólo puede fluir en esa dirección. De modo que el caso de fibras debe ser tratado como un caso especial en el que el flujo plástico tiene la dirección de la fibra.

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotac.}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ -\text{sen}\theta \end{Bmatrix}$$

Donde θ es el ángulo que forma la fibra con el eje 1 de referencia.

CAPITULO 4

MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIALES

COMPUESTOS ANISOTROPOS.

PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS

CARGAS CUASISTATICAS DE CORTA DURACION

PROBLEMAS TERMICAMENTE ESTABLES

4.1. INTRODUCCION

La mayoría de los materiales que se encuentran en la naturaleza debe sus propiedades a la *combinación de dos o más componentes* que se distinguen claramente si se lo examina con un microscopio óptico o electrónico [Hull 1992]. Un ejemplo de esto son la madera y el bambú. Un análisis microscópico de los mismos revela la presencia de una estructura fibrilar que se pone en evidencia al quebrar un trozo de ellos.

La mayoría de los materiales que se usan en ingeniería son también combinación de dos ó más fases dispersas a una escala microscópica para

obtener propiedades óptimas. La resistencia y ductilidad de las aleaciones y plásticos que se usan en ingeniería se logra combinando fases de alta resistencia con fases de gran ductilidad. Un ejemplo de esto se encuentra en el acero común al carbono. Cuando este acero es enfriado lentamente desde 800°C su microestructura presenta láminas alternadas de una fase blanda y dúctil que es prácticamente hierro puro y otra fase dura y frágil (Fe_3C).

Los dos tipos de materiales mencionados son *microcompuestos* porque sus propiedades se logran de una dispersión muy fina de las fases. La estructura es usualmente tan fina que se requiere un microscopio electrónico para individualizar cada uno de los componentes.

La idea de *compuesto* puede ser llevada también a la macroescala. Esto es particularmente importante en materiales estructurales en los que se puede combinar dos o más materiales de manera de lograr un comportamiento de conjunto superior al de los materiales individuales. Un ejemplo de esto son el acero galvanizado que combina la resistencia mecánica del acero con la resistencia a la corrosión del zinc. De manera similar el hormigón, que en sí ya puede ser considerado como un compuesto formado por agregados y pasta de cemento, normalmente se combina con barras de acero para aumentar su resistencia a tracción. Otros ejemplos de materiales compuestos son los hormigones con fibras, la mampostería y los plásticos reforzados con fibras.

No existe una definición de *material compuesto*, pero en términos de lo ya expuesto se puede decir que un *material estructural compuesto* reúne las siguientes propiedades [Hull 1992]:

- Está constituido por dos o más materiales físicamente distintos y mecánicamente separables.
- Puede lograrse mezclando materiales de manera que la dispersión de un material en el otro pueda hacerse en forma controlada para lograr propiedades óptimas.
- Las propiedades del material compuesto son superiores a las de los componentes.

Desde el punto de vista constitutivo, los materiales compuestos pueden

clasificarse de la siguiente manera [Oñate 1991]:

- a) Materiales de matriz compuesta
- b) Materiales de matriz reforzada con fibras cortas
- c) Materiales de matriz reforzada con fibras largas
- d) Materiales de estructura compleja

Los *materiales de matriz compuesta* suelen desarrollarse para mejorar las cualidades mecánicas del material base o de la fase principal, mediante el agregado de otros materiales denominados fases secundarias. Ejemplos de este tipo de materiales compuestos son los materiales logrados por compactación de polvos cerámicos.

Los *materiales de matriz reforzados con fibras cortas* tienen incorporadas pequeñas fibras en la matriz, distribuidas muy homogéneamente y de manera aleatoria, de modo que el comportamiento es prácticamente isótropo. Se logra así materiales muy dúctiles que se utilizan en la industria automotriz.

Los *materiales de matriz reforzada con fibras largas* están constituidos por un material matriz de base sobre el que se orientan fibras orgánicas o inorgánicas formando estructuras entramadas o entretejidas. Tienen un comportamiento marcadamente direccional. En general son diseñados para evitar la falla del material, porque después que se rompe la matriz, queda resistiendo la fibra. Estos materiales se utilizan mucho en la industria aeronáutica por su direccionalidad y ductilidad.

Los *materiales de estructura compuesta* forman un amplio grupo. La estructura macroscópica de estos materiales está compuesta por materiales puros o compuestos a su vez. El comportamiento de estos materiales depende de las propiedades mecánicas de sus componentes pero además de la disposición geométrica de los mismos. Ejemplos de este tipo de materiales son el hormigón armado y la mampostería.

4.2. BREVE ESTADO DEL ARTE SOBRE MODELOS CONSTITUTIVOS PARA MATERIALES COMPUESTOS

[Oñate 1991]

Existen gran cantidad de modelos para la simulación del comportamiento de materiales compuestos.

En la mayoría de los modelos de cálculo actuales se analiza el comportamiento de materiales compuestos a través de un tratamiento a nivel de elementos finitos, con estrategias que permiten realizar una aproximación del campo de desplazamientos que permiten obtener la magnitud que actúa en cada componente del compuesto.

Otra alternativa es plantear el problema a nivel ecuación constitutiva y utilizar elementos finitos estándar. De este tipo de modelos existen, a su vez, muchas variantes según el tipo de teoría en las que estén basados.

A continuación se hace una breve síntesis de algunos modelos constitutivos representativos de distintas teorías para el tratamiento constitutivo de materiales compuestos.

4.2.1. MODELOS ELASTICOS ANISOTROPOS

[Vinson 1986, Dept. of Defense 1968]

Estos modelos adoptan una ley constitutiva del tipo:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^0 \epsilon_{kl} \quad (4.1)$$

Donde el tensor constitutivo C_{ijkl}^0 representa el comportamiento del compuesto dentro de ciertos límites.

Este modelo considera la anisotropía inicial pero no puede tener en cuenta la anisotropía inducida porque se admite que las componentes del tensor C_{ijkl}^0 son las correspondientes al material virgen y se mantienen constantes durante todo el proceso de carga.

Otro problema que presenta la adopción de una ley como la de la ec.(4.1) es que no considera que los materiales compuestos tienen un marcado comportamiento inelástico. De aquí que al utilizar estos modelos surge la necesidad de hablar del fenómeno de *crecimiento del módulo de Poisson*, cuando en realidad se trata de un crecimiento ficticio. Esto se debe al fenómeno de *dilatancia* inducido por el deslizamiento inelástico de las fibras respecto de la matriz del material.

Normalmente se combina esta ley con un criterio de rotura, obteniéndose así una formulación elástica frágil. Per debido a que se considera el compuesto como un único material, entonces con solo variar la orientación de las fibras por ejemplo, cambia el comportamiento del material y se debe formular un nuevo tensor constitutivo y un nuevo criterio de rotura.

4.2.2. TEORIAS DE ALTO ORDEN PARA COMPUESTOS Y MATERIALES LAMINADOS EN LAMINAS CILINDRICAS CON ELEMENTOS TIPO C^0 [Kent 1989]

Los compuestos laminares tienen gran aplicación industrial. Tradicionalmente para la resolución de estos problemas se utilizaban *teorías de primer orden*, donde se supone que las tensiones tangenciales son constantes en el espesor necesitando una formulación que dependa del denominado *coeficiente corrector de corte* [Timoshenko 1959]. La determinación de este coeficiente en materiales laminados es muy engorrosa y depende del tipo de material. Por otro lado, la teoría de primer orden considera que las deformaciones varían linealmente en el espesor, hipótesis que no es siempre válida, especialmente en compuestos tipo "sandwich", donde existe un alma débil entre dos láminas muy rígidas.

De lo expuesto, Kent y Menon [Kent 1989] deducen la necesidad de disponer de una teoría que considere en forma más realista la variación de las tensiones tangenciales en el espesor como así también la variación no lineal de las deformaciones a través del espesor. Para ello se en la referencia mencionada, se presenta una formulación mediante elementos finitos tipo C^0 , basada en una aproximación de los desplazamientos de alto orden, como así también una ley constitutiva elástica ortótropa para simular el

comportamiento del compuesto.

Esta teoría se basa en el siguiente modelo de desplazamiento (ver Fig.4.1):

$$U_i = u_i + z \vartheta_i + z^2 u_i^* + z^3 \vartheta_i^* \quad i=1,2 \tag{4.2}$$

$$U_3 = u_3$$

donde las funciones U_i están definidas en el espacio para cada valor de z medido desde el *plano medio o superficie de referencia*. Las funciones u_i y ϑ_i son desplazamientos y rotaciones medidos en la superficie de referencia, mientras que u_i^* y ϑ_i^* son los términos de alto orden de los desplazamientos y rotaciones obtenidos también sobre la superficie de referencia mediante un desarrollo en serie de Taylor. De esta forma, la ec.(4.2) contiene los términos que permiten incluir los efectos de deformación por corte transversal. Así el vector de desplazamientos generalizados δ_s , medido en coordenadas locales de la lámina y sobre la superficie de referencia se expresa como:

$$\delta_s = \{u_1, u_2, u_3, \vartheta_1, \vartheta_2, u_1^*, u_2^*, \vartheta_1^*, \vartheta_2^*\} \tag{4.3}$$

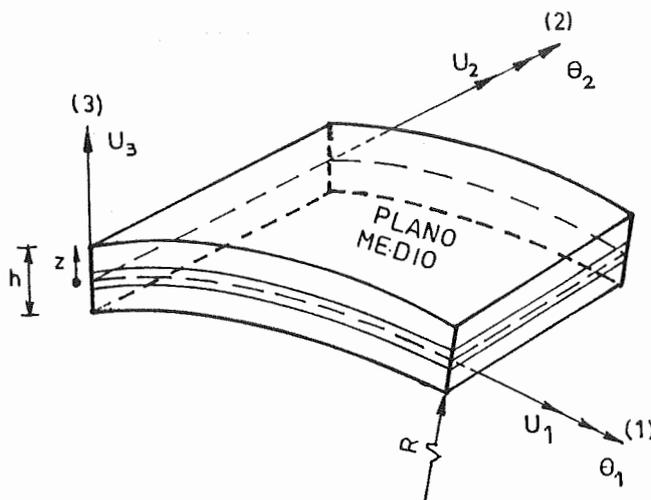


Fig.4.1 Compuesto laminado y ejes de referencia local [Oñate 1991]

A partir de esta expansión de los desplazamientos, se desarrollan dos teorías de láminas: una *teoría de láminas delgadas* y otra *teoría de láminas gruesas*.

Este tratamiento parece dar buenos resultados respecto a la forma tradicional de tratar el problema mediante la teoría de primer orden. Sin embargo, el modelo constitutivo es muy pobre para simular el comportamiento de un material compuesto, más aún si se quiere simular un compuesto fuera del campo de las láminas.

4.2.3. MODELO DE JAYATILAKA PARA COMPUESTOS CON FIBRAS LARGAS O CORTAS [Jayatilaka 1979]

Este modelo supone que las fibras están uniformemente distribuidas y que no hay desplazamientos relativos entre las fibras y la matriz. Trata en forma diferenciada los problemas de fibras largas y cortas, paralelas o dispuestas arbitrariamente.

Para el caso de fibras largas paralelas supone que la tensión total es la suma de las tensiones en la matriz y las fibras multiplicadas cada una por la relación del volumen que ocupan cada una de ellas. La deformación en las fibras y en la matriz es única y las fibras se deforman en forma constante en toda su longitud. La teoría resultante es un caso particular de la *teoría de mezclas*.

En los compuestos con fibras cortas paralelas existe un mecanismo de transferencia de cargas desde la matriz a las fibras diferente. Esta transferencia es gradual a lo largo de la longitud. En los extremos de la fibra la transferencia es nula y la tensión de adherencia máxima. Se supone que tanto las fibras como la matriz tienen un comportamiento elástico y que las tensiones tangenciales desarrolladas por efecto de la adherencia dependen de los desplazamientos relativos entre fibras y matriz. El único efecto que no contempla esta hipótesis es el problema de concentración de tensiones en los extremos de las fibras.

En el caso en que las fibras no sean paralelas a la carga aplicada se

debe transformar el estado tensional a los ejes materiales y resolver ahí el problema.

Este modelo, basado en hipótesis simples que han sido confirmadas en su mayoría experimentalmente, es un caso muy particular de la teoría de mezclas, pudiendo dar buenos resultados dentro del rango elástico.

4.2.4. MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PARA MATERIALES COMPUESTOS CON FIBRAS DISTRIBUIDAS EN FORMA PARALELA O ALEATORIA

[Pickett 1989, Rouvray 1989]

La simulación del comportamiento de estos materiales se hace mediante una ley constitutiva *bifase* [Truedell 1960], donde la matriz constituye una de las fases cuyo comportamiento es no lineal con pérdida de rigidez y resistencia debidas a la formación de poros e interconexión entre ellos. La otra fase está constituida por las fibras que se suponen con comportamiento elástico frágil. Para simular el comportamiento de la matriz se usa la teoría de daño de Kachanov [Kachanov 1958].

En el caso particular en que el compuesto esté constituido por fibras largas el modelo simula la ruptura del material, dejando sólo una resistencia residual debida a la existencia de fibras que no han roto. En este caso se produce el ablandamiento por deformación que provoca la localización de las deformaciones y aparece el inconveniente de que la solución de un problema se hace dependiente de la malla de elementos finitos. Las fibras se consideran continuas y unidireccionales con comportamiento elástico lineal hasta alcanzar un criterio de falla definido en el espacio de deformaciones.

En el caso en que las fibras sean cortas se utiliza también un modelo bifase, sólo que se aplica el modelo isótropo de degradación de rigidez a todos los componentes del material compuesto. Es decir que en estos materiales, cuando la variable de daño se hace igual a la unidad, el compuesto queda totalmente dañado.

En resumen, este modelo es un caso particular de la teoría de mezclas.

Es capaz de simular la anisotropía natural pero no la anisotropía inducida durante el proceso de carga. Además tiene la limitación de que no puede simular el fenómeno de dilatación. Presenta la ventaja, frente a los modelos elastoplásticos, de que es muy estable y rápido.

4.2.5. MODELO CONSTITUTIVO PARA COMPUESTOS DE FIBRAS LARGAS POR CAPAS, CON RIGIDEZ DIFERENCIADA A TRACCIÓN Y COMPRESIÓN [Idelsohn 1982]

Este modelo trata cada lámina compuesta (fibras y matriz) como un único material con un comportamiento antes de alcanzar el umbral de fallo y otro comportamiento distinto después de alcanzar dicho límite.

Para el comportamiento previo a la rotura propone tres tipos de comportamiento:

- *Material elástico lineal*
- *Material no lineal* en donde las propiedades del material que definen la matriz de rigidez son funciones de ciertas deformaciones equivalentes.
- *Material con rigidez diferenciada a tracción y compresión* que trabaja con un tensor de rigidez cuyas componentes dependen del tipo de estado tensional.

El criterio de rotura es de tipo ortótropo y actúa sólo como una barrera tensional que marca una diferencia en el comportamiento.

Después de la rotura de la matriz, la rigidez transversal y de corte decrece a valores muy pequeños, reduciéndose sólo a la rigidez transversal aportada por las fibras longitudinales. Así la matriz de rigidez se reduce a una forma diagonal.

El conjunto del laminado (material compuesto) se considera dentro de la técnica de elementos finitos mediante un elemento especial para materiales laminados cuya integración se realiza por capas. De esa forma la rigidez se obtiene como suma de las contribuciones de cada capa, utilizando el mismo

campo de desplazamientos sobre todo el elemento.

La obtención de los parámetros intervinientes en este modelo es difícil. Los resultados obtenidos con el mismo tienen son compatibles con las hipótesis realizadas en su formulación. El modelo no tiene en cuenta la anisotropía inducida ni la evolución continua de la degradación de rigidez; no puede simular los fenómenos de dilatación y decohesión.

4.2.6. MODELO CONSTITUTIVO DE PREDICCIÓN DE DAÑO PARA ESTRUCTURAS DE MATERIALES COMPUESTOS

[Allix 1989]

En este trabajo de Allix y Ladevèze [Allix 1989] se formula un modelo constitutivo para tratar el comportamiento no lineal de los compuestos laminados, teniendo en cuenta el fallo de cada material componente y el fenómeno de delaminación que se desarrolla en la interface entre láminas.

La teoría clásica de daño isótropo de Kachanov [Kachanov 1958] no es suficiente para simular el comportamiento de materiales compuestos, debido a la complejidad que induce la anisotropía de comportamiento. Por ejemplo, los materiales compuestos de fibras laminadas tienen un amplio rango de comportamiento que depende de la interacción entre fibra y matriz del material, pudiéndose tipificar en la siguiente forma: a) fractura progresiva de la matriz, b) fractura frágil de las fibras, c) desprendimiento de la interfaz entre matriz y fibra, d) desprendimiento de la capa adyacente o *delaminación*.

Este modelo se reduce a modelizar dos componentes: una lámina compuesta y su interfase con la adyacente cuyo espesor es nulo.

Para simular el comportamiento de cada lámina componente se utiliza un modelo que incluye deformaciones permanentes y daño anisótropo. Por medio de una *técnica de homogeneización* [Devries 1989] se incorpora esta información como parte del comportamiento del conjunto de láminas.

La interfaz se considera como una superficie que garantiza la

transferencia de fuerzas y desplazamientos entre dos láminas adyacentes. La superficie de contacto se simula mediante un material inicialmente elástico que luego sufre una degradación de rigidez. El estado de delaminación se alcanza cuando la rigidez de la interfaz es nula y su resistencia de adherencia tiende a cero. Sin embargo, la restricción que tiene este modelo se debe a la incapacidad que presenta para simular el pandeo de las láminas, que luego de la delaminación se comportan independientemente entre sí.

En resumen, el modelo presentado se basa en la mecánica de daño, y a partir de un estudio experimental trata de ajustar la respuesta macroscópica de los fenómenos de pérdida de rigidez y delaminación.

En la referencia mencionada [Allix 1989] no se presentan resultados que prueben la eficiencia del modelo. Por otro lado, este modelo se ajusta estrictamente a una tipología particular de los materiales compuestos, es decir los compuestos laminados, gracias a la teoría de homogeneización.

4.2.7. MODELOS BASADO EN LA MECANICA DE FRACTURA

[Yeh 1989]

Existen muchos modelos para simular el comportamiento de materiales compuestos basados en la mecánica de fractura propiamente dicha. Por ejemplo, Yeh [Yeh 1989] desarrolla un modelo para simular el comportamiento de un material compuesto por tres capas, tal que en dos de ellas las fibras están orientadas en una dirección y la capa intermedia con las fibras orientadas en la dirección perpendicular.

Este modelo trabaja dentro del ámbito de la mecánica de fractura lineal y por ello no tiene en cuenta los problemas determinantes del comportamiento de los materiales compuestos.

4.2.8. TECNICAS DE HOMOGENEIZACION

Se ha dedicado considerable esfuerzo a la obtención de un modelo constitutivo que asimile un compuesto laminado a un material único con propiedades homogéneas.

La mayor parte de las *técnicas de homogeneización* [Ladeveze 1986] desarrolladas se basan en lograr un elemento monocapa que proporcione la misma energía de deformación que el compuesto multicapa. Para encontrar los términos de la matriz de rigidez que relaciona tensiones y deformaciones suele desarrollarse en serie dichos términos en el espesor del elemento. Los coeficientes de dicha serie se obtienen minimizando la diferencia entre los coeficientes reales y los equivalentes en un conjunto de puntos seleccionados.

Las técnicas de homogeneización están todavía en la fase de desarrollo y validación. Han sido utilizadas ya en el contexto de la predicción del daño y del inicio de la delaminación en bordes de compuestos laminados con estructura periódica o cuasiperiódica, empleando técnicas basadas en desarrollos asintóticos de los campos de desplazamientos, tensiones y deformaciones.

Entre estas técnicas conviene mencionar un modelo presentado por Pietruszczak [Pietruszczak 1992] para describir las propiedades mecánicas promedio de la mampostería.

4.2.8.1. Modelo de Pietruszczak [Pietruszczak 1992]

Se hace particular mención a este modelo porque se considera importante su aporte a la resolución de la mampostería.

Este modelo considera que un panel de mampostería, a nivel de macroescala, puede ser supuesto como un compuesto bifase consistente en unidades de ladrillos interceptadas por dos conjuntos ortogonales de juntas llenas con mortero.

Para describir el comportamiento mecánico de la mampostería se considera que la misma está formada por dos medios superpuestos, ver fig.4.2.

El medio (1) está formado por la matriz de ladrillos con una familia de juntas de cabeza de ladrillos. Estas juntas pueden ser tratadas como inclusiones débiles alineadas y uniformemente dispersas en la matriz. Este

medio homogeneizado puede considerarse como un materia ortótropo, elástico-frágil. En ese caso las componentes de la matriz de rigidez se pueden calcular a partir de la solución de Eshelby [Pietruszczak 1992] para el problema de inclusiones elipsoidales combinada con la teoría del campo medio de Mori-Tanaka [Pietruszczak 1992].

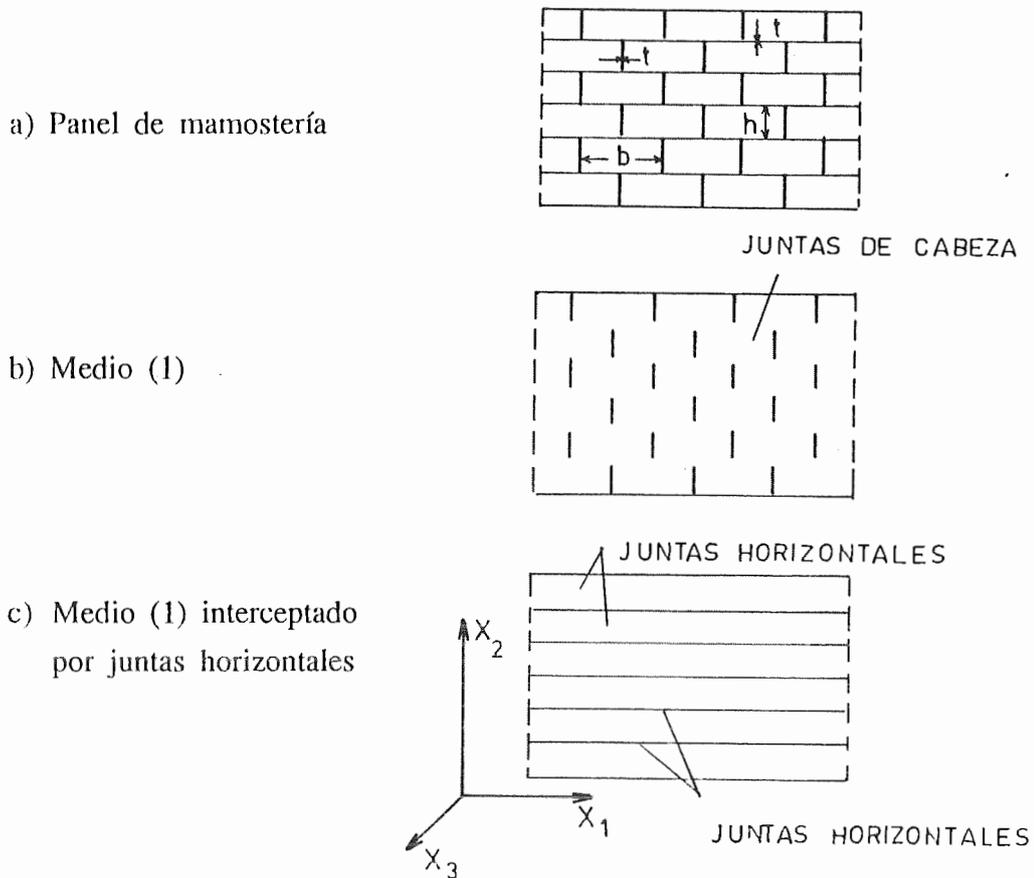


Fig.4.2 Panel de Mampostería [Pietruszczak 1992]

El panel de mampostería completo puede representarse como el medio homogéneo (1) estratificado con una familia de juntas (2) (ver fig.4.2c). Estas juntas son continuas y atraviesan todo el panel creando vínculos debiles en la microestructura del panel. En particular estas juntas pueden tener un comportamiento elastoplástico.

Suponiendo que ambos componentes, (1) y (2), existen simultáneamente y están perfectamente adheridos, la regla tensión deformación del conjunto

puede obtenerse a través de la siguiente regla de promedio [Hill 1963]:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = k_1 \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} + k_2 \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} \quad (4.4)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = k_1 \dot{\sigma}_{ij}^{(1)} + k_2 \dot{\sigma}_{ij}^{(2)} \quad (4.5)$$

donde k_1 y k_2 son las proporciones de volumen de cada uno de los componentes.

La hipótesis de adherencia perfecta entre los componentes y los requerimientos de equilibrio proveen dos condiciones adicionales, una cinemática y otra estática que, escritas en forma matricial, resultan:

$$[[\delta^*] \dot{\epsilon}^{(1)} = [\delta^*] \dot{\epsilon}^{(2)} \quad (4.6)$$

$$[\delta] \dot{\sigma}^{(1)} = [\delta] \dot{\sigma}^{(2)} \quad (4.7)$$

Donde:

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [\delta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Las ecuaciones (4.4) a (4.7) junto con las leyes constitutivas de cada una de las fases :

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} = C_{ijkl}^{(1)} \dot{\epsilon}_{kl}^{(1)} \quad \dot{\sigma}_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)} \dot{\epsilon}_{kl}^{(2)} \quad (4.9)$$

permiten resolver el problema.

La implementación de este modelo en un programa de elementos finitos no es directa. Por otro lado, la referencia mencionada [Pietruszczak 1992] no incluye comparaciones con resultados experimentales, sólo presenta un

análisis cualitativo del comportamiento de la mampostería.

4.3. TEORIA PROPUESTA PARA COMBINAR LOS MODELOS CONSTITUTIVOS DE DAÑO Y PLASTICIDAD ANISOTROPA

4.3.1. INTRODUCCION

En general los modelos constitutivos para materiales compuestos que se encuentran en la bibliografía presentan deficiencias a nivel formulación que impiden que los mismos sean aplicables a distintos materiales. Por otro lado, la mayoría de ellos no permite simular fenómenos que se desarrollan dentro del compuesto como la degradación de la matriz y de las fibras componetes, deformaciones permanentes, dilatación, decohesión entre componetes, etc.

En esta Tesis se utiliza la *teoría de interacción entre las sustancias componentes* [Oller 1993a, b] y se la aplica dentro del marco de los modelos constitutivos de daño y plasticidad anisótropa desarrollados en los capítulos 2 y 3. Esta teoría tiene en cuenta la coparticipación de n sustancias componentes en cada punto, tal que cada sustancia puede ser independiente de las demás: isótropa, ortótropa o anisótropa y tener un modelo constitutivo distinto: elástico, frágil, de daño, plástico o la combinación de ellos, permitiendo así simular fenómenos de fisuración, fractura del material, dilatación, pérdida de cohesión, cambios en el rozamiento interno y degradación de rigidez. Es decir que si este modelo se aplica a un punto de un compuesto se pueden tener en cuenta una amplia gama de comportamientos acoplados entre sí.

La *teoría de mezclas* fue estudiada por Truesdell y Toupin [Truesdell 1960] quienes dieron las bases para los trabajos de Ortiz y Popov [Ortiz 1982b] realizados muchos años más tarde. Los resultados obtenidos por Truesdell dieron también lugar a sucesivas publicaciones, entre las que se encuentran la de Green-Naghdi [Green 1965] cuyo marco teórico fue utilizado por Ortiz y Popov [Ortiz 1982a] para la simulación del comportamiento del hormigón como un material bifase compuesto por mortero y agregado. En esta Tesis se combina este principio básico con el modelo constitutivo presentado

que permite simular el comportamiento elasto-plástico-degradable de materiales anisótropos en general [Oller 1993a, 1993b].

En primer lugar se describe las hipótesis y principios fundamentales de la teoría de mezclas y luego se presenta su aplicación en el modelo propuesto.

4.3.2. TEORIA DE MEZCLAS [Oñate 1991, 1993a, 1993b]

La teoría de mezclas parte de las siguientes hipótesis:

- Cada volumen infinitesimal de la mezcla está compuesto por un número finito de materiales componentes.
- Cada componente participa en el comportamiento total del compuesto en la misma proporción de volumen total.
- Todas las sustancias componentes experimentan las mismas deformaciones (*compatibilidad de deformaciones*).
- El volumen ocupado por cada una de las sustancias componentes es menor que el volumen total del compuesto.

La segunda hipótesis implica una distribución homogénea de todas las sustancias en una cierta región del compuesto.

La interacción entre las distintas sustancias componentes, cada una con su propio modelo constitutivo, da como resultado un comportamiento de conjunto del compuesto que depende del volumen ocupado por cada componente y de su distribución en el compuesto.

La tercera hipótesis supone que *en ausencia de difusión atómica* (temperaturas moderadas¹) entre las sustancias componentes del sólido, se cumple la siguiente ecuación de compatibilidad :

¹Los fenómenos de difusión atómica se producen a temperaturas muy altas

$$\left(\epsilon_{ij}\right)_1 = \left(\epsilon_{ij}\right)_2 = \dots = \left(\epsilon_{ij}\right)_c = \dots = \left(\epsilon_{ij}\right)_n = \epsilon_{ij} \quad (4.10)$$

Más aún, en materiales compuestos la energía libre puede ser escrita como [Truesdell y Toupin 1960]:

$$m \Psi(\epsilon_{ij}^c, \alpha, \beta) = m \Psi(\epsilon_{ij}, \underbrace{\epsilon_{ij}^p}_{P_r}, \alpha, \beta) = m \sum_{c=1}^n k_c \Psi_c \left(\left(\epsilon_{ij}\right)_c, \left(P_r\right)_c \right) \quad (4.11)$$

Donde $\Psi_c \left(\left(\epsilon_{ij}\right)_c, \left(P_r\right)_c \right)$ es la energía libre correspondiente a cada componente de los "n" que intervienen en la mezcla, $\left(P_r\right)_c$ un conjunto de variables internas para cada componente c y $k_c = \frac{dV}{dV^c}$ la participación de la fracción de volumen del "c-ésimo" componente dentro del volumen total. Es conveniente observar que estas relaciones de volumen deben cumplir con la condición:

$$\sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad (4.12)$$

4.3.3. APLICACION DE LA TEORIA DE MEZCLAS AL MODELO PROPUESTO

4.3.3.1. Estado de Tensión

La tensión en el compuesto se calcula a partir de la energía libre de la misma forma que en el caso de materiales simples. Para problemas térmicamente estables:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\epsilon_{kl}, P_r)}{\partial \epsilon_{ij}} = m \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c(\epsilon_{kl}, (P_r)_c)}{\partial \epsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c \left(\sigma_{ij} \right)_c \quad (4.13)$$

Donde $\left(\sigma_{ij}\right)_c$ es la tensión correspondiente a la "c-ésima" componente.

4.3.3.2. Disipación Mecánica

Siguiendo la desigualdad de Clasius Planck se puede obtener la expresión termodinámica para la disipación mecánica:

$$\Xi_{mec} = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{kl}, p_r)}{\partial p_i} \dot{p}_i = \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c \left(\left(\epsilon_{ij}\right)_c, \left(p_r\right)_c \right)}{\partial (p_i)_c} (\dot{p}_i)_c \leq 0 \quad (4.14)$$

4.3.3.3. Rigidez Tangente

$$C_{ijkl} = m \frac{\partial \Psi(\epsilon_{mn}, p_r)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = m \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c \left(\left(\epsilon_{ij}\right)_c, \left(p_r\right)_c \right)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \sum_{c=1}^n k_c \left(C_{ijkl} \right)_c \quad (4.15)$$

4.3.3.4. Deformación

Teniendo en cuenta la compatibilidad de deformaciones, la deformación en el compuesto puede escribirse como:

$$\epsilon_{ij} = \left(\epsilon_{ij}\right)_c = \left(\epsilon_{ij}^e\right)_c + \left(\epsilon_{ij}^p\right)_c = \left(C_{ijkl}^{s-1} \right)_c \left(\sigma_{kl}\right)_c + \left(\epsilon_{ij}^p\right)_c \quad (4.16)$$

Debe observarse que la compatibilidad de deformaciones implica la igualdad de deformaciones totales pero no necesariamente de deformaciones elásticas y plásticas.

4.3.3.5. Relación Constitutiva Secante

La relación constitutiva secante se obtiene como:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n k_c \left(\sigma_{ij} \right)_c = \sum_{c=1}^n k_c \left(C_{ijkl}^s \right)_c \left(\epsilon_{kl}^c \right)_c = C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^c \quad (4.17)$$

4.3.3.6. Deformación plástica del compuesto

Desarrollando la ecuación (4.17) se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n k_c \left(C_{ijkl}^s \right)_c \epsilon_{kl} - \sum_{c=1}^n k_c \left(C_{ijkl}^s \right)_c \left(\epsilon_{kl}^p \right)_c \quad (4.18)$$

y por otro lado:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \epsilon_{kl} - C_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^p \quad (4.19)$$

Igualando las expresiones (4.18) y (4.19), se obtiene:

$$\epsilon_{ij}^p = C_{ijkl}^{s-1} \sum_{c=1}^n k_c \left(C_{ijkl}^s \right)_c \left(\epsilon_{kl}^p \right)_c \quad (4.20)$$

En esta ecuación se ha tenido en cuenta que

$$C_{ijkl}^s = \sum_{c=1}^n k_c \left(C_{ijkl}^s \right)_c \quad (4.21)$$

lo cual surge de las ec.(4.15) y (4.17)

En realidad esta deformación permanente no tiene sentido físico ni interviene en el cálculo ya que se trabaja con cada modelo constitutivo a nivel componente a partir de una deformación del compuesto que es dato.

En el Anexo F.11 se presenta la forma en que la teoría de mezclas puede

insertarse en un programa de elementos finitos.

4.3.4. ESTADO PLANO DE TENSIONES EN MATERIALES COMPUESTOS

Conviene observar que cuando se aplica la teoría de mezclas a un compuesto bajo estado plano de tensiones la tensión normal al plano debe cumplir con la restricción:

$$\sigma_{zz} = \sum_{c=1}^n k_c \left(\sigma_{zz} \right)_c = 0 \quad (4.22)$$

lo cual no necesariamente implica que cada una de las componentes del compuesto esté bajo un estado plano. Todas las componentes tendrán la misma deformación transversal al plano, pero, en general tendrán tensiones no nulas en esa dirección. Dichas tensiones deberán equilibrarse entre todas las componentes de manera de cumplir con la ecuación (4.22).

Esta observación tiene particular importancia en la solución de problemas de estado plano de tensiones mediante programas de elementos finitos en 2D. En esos casos, debe tenerse en cuenta que, en general, cada componente no trabaja en estado plano de tensiones.

En el Anexo F.12 se presenta la forma operativa de la teoría de mezclas para un problema de estado plano de tensiones resuelto mediante un programa de elementos finitos en dos dimensiones.

4.4. EJEMPLOS DE COMPROBACION

4.4.1. COMPUESTO FORMADO POR LAMINAS CON FIBRAS UNIDIRECCIONALES [Hull 1992]

En este ejemplo se resuelve el problema de una pieza de material compuesto formada por dos láminas adheridas entre sí. Cada una de las láminas está compuesta por una matriz con fibras unidireccionales. Las láminas se disponen de manera que las fibras forman un ángulo de 90° entre sí. Ver fig.

4.3.

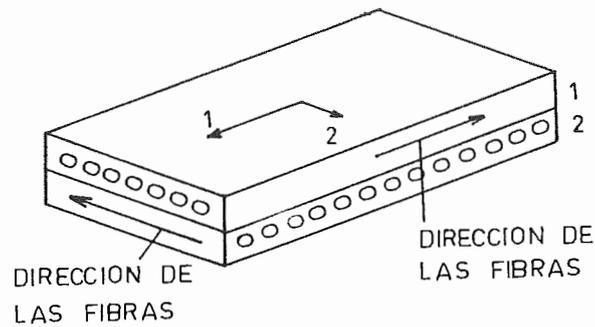


Fig.4.3. Compuesto formado por láminas a 90° [Hull 1992]

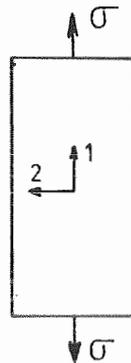


Fig.4.4 Estado tensional
(Tracción en la dirección de las fibras de la lámina 1)

TABLA 4.1. Propiedades elásticas de las láminas

Módulo elástico en la dirección de las fibras: E_1
Módulo elástico en la dirección transversal a las fibras: E_t
Relación de módulo elásticos : $E_1/E_t = 10$
Módulo de Poisson : $\nu_{1t} = 0,25$
$\nu_{t1} = \nu_{1t} E_t/E_1 = 0,025$

Interesa conocer el estado tensional en cada una de las láminas cuando se somete el compuesto a una tensión en la dirección de las fibras 1. Ver

Fig.4.4.

Se supone que los materiales trabajan en régimen elástico por lo que sólo intervienen las propiedades elásticas. En la Tabla 4.1. se han resumido dichas propiedades. Se divide la pieza en cuatro elementos finitos de 4 nodos y 2x2 puntos de integración.

En la fig.4.5. se ha representado el estado tensional obtenido para las láminas que coincide exactamente con el encontrado analíticamente por Hull [1992] haciendo hipótesis similares a las de la teoría de mezclas.

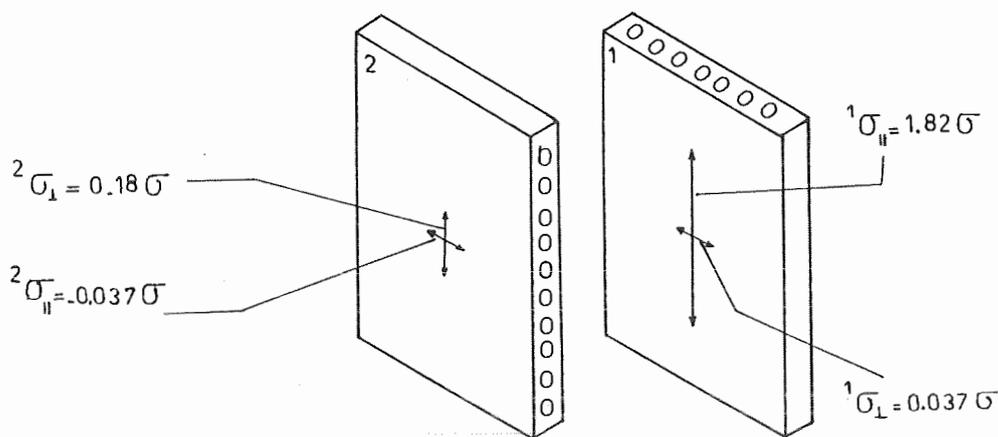


Fig.4.5. Estado tensional en las láminas

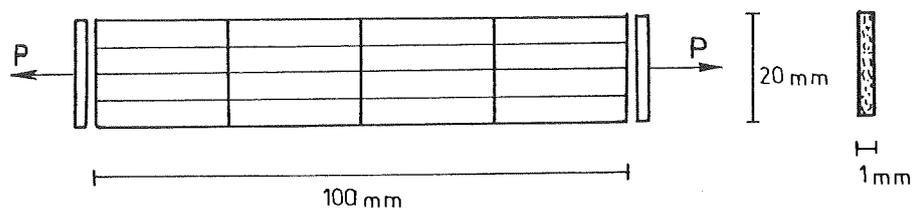
4.4.2. COMPUESTO REFORZADO CON FIBRAS [Oller 1993d]

En este punto se analiza el comportamiento de un prisma rectangular de material reforzado por fibras. La fig.4.6. muestra las dimensiones del mismo, las condiciones de carga y la malla de elementos finitos utilizada.

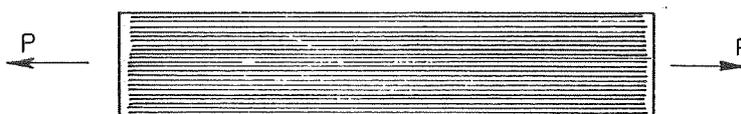
El material esá compuesto por una matriz isótropa reforzada con fibras. En un primer paso las fibras se disponen en la dirección longitudinal, paralelas a la fuerza aplicada (fig.4.6.b). En un segundo paso las fibras se disponen transversalmente, perpendiculares a la fuerza aplicada (fig.4.6.c).

Las propiedades mecánicas de la matriz y de las fibras se han resumido

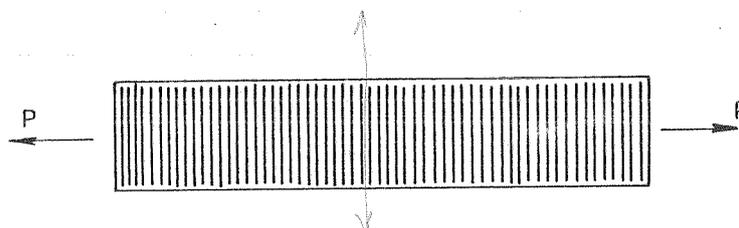
en las tablas 4.2 y 4.3 respectivamente.



a) Geometría y carga



b) Carga paralela a las fibras



c) Carga perpendicular a las fibras

Fig.4.6 Especimen de material reforzado con fibras

TABLA 4.2 Propiedades mecánicas de la matriz (80% del volumen total)

$E = 72400 \text{ MPa}$ $\nu = 0,33$ $\sigma_c^o = \sigma_t^o = 360 \text{ MPa}$ Criterio de Fluencia de Von Mises Flujo asociado Plasticidad perfecta

TABLA 4.3 Propiedades mecánicas de las fibras (20% del volumen total)

$E_{\text{long}} = 844000 \text{ MPa}$	$E_{\text{trans}} = 10000 \text{ MPa}$
$\nu = 0$	
$\sigma_c^o = \sigma_t^o = 2283 \text{ MPa}$	
Criterio de Fluencia de Von Mises Flujo de fibra Plasticidad perfecta	

En la fig.4.7 se han representado las curvas tensión deformación en la dirección longitudinal y transversal a la pieza correspondientes a la matriz, la fibra y el compuesto, para el caso en que las fibras se disponen paralelas a la carga aplicada (fig.4.6.b). En la misma puede verse que al estirar la pieza en la dirección de las fibras, la matriz tiende a contraerse por el efecto Poisson. Como la fibra tiene módulo de Poisson nulo y flujo plástico en la dirección longitudinal, no se contrae y por tanto resulta comprimida. Esto hace que la fibra trabaje en un estado combinado de tracción-compresión y por tanto no alcance la resistencia a tracción uniaxial sino una menor. A su vez la matriz resulta traccionada transversalmente por lo que trabaja en tracción biaxial y su resistencia aumenta. Al ir progresando las deformaciones plásticas esa componente de tensión transversal varía de manera que el conjunto no tiene un comportamiento perfectamente plástico como el que tendría si cada una de las componentes trabajara en compresión uniaxial.

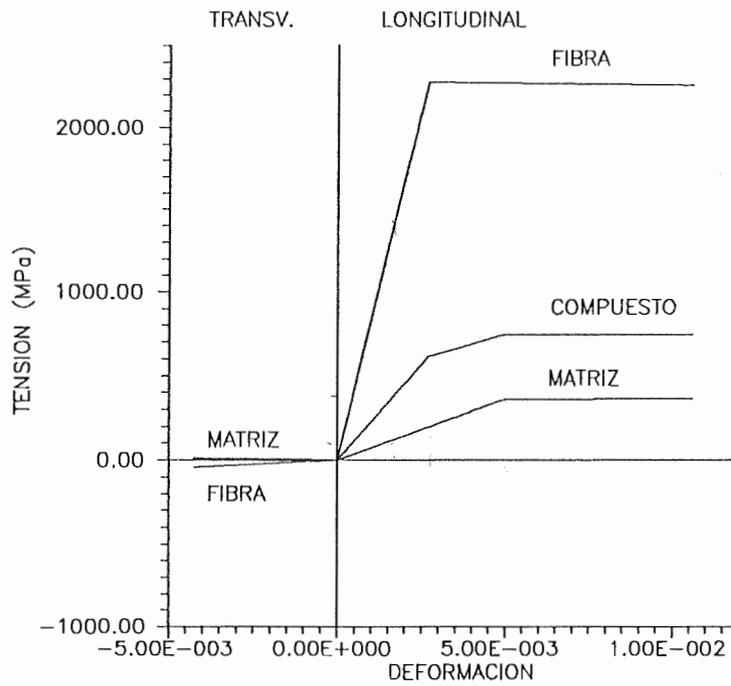


Fig.4.7 Curvas tensión-deformación para tracción en la dirección de las fibras

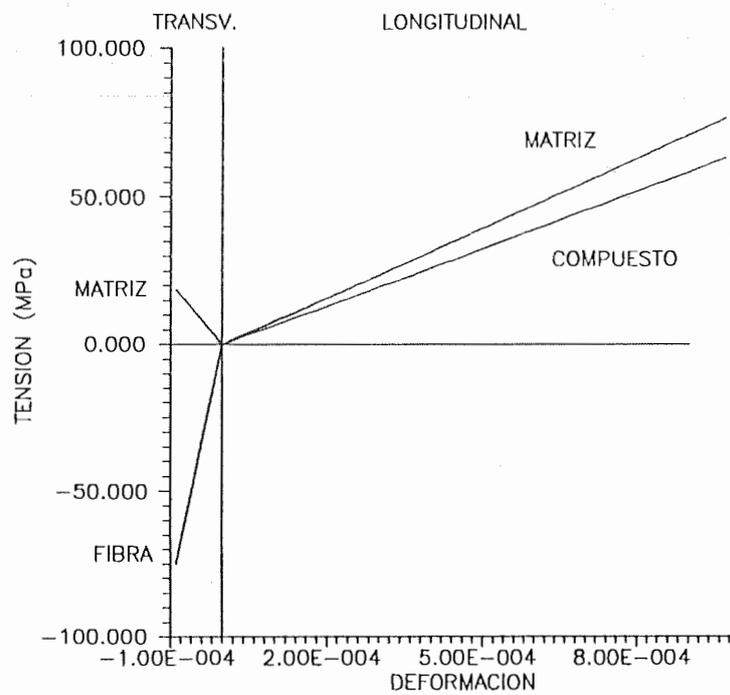


Fig.4.8 Curvas tensión-deformación para tracción en la dirección perpendicular a la carga

En la fig.4.8 se han representado las curvas tensión deformación de la matriz, las fibras y el compuesto para el caso en que las fibras se disponen transversalmente a la dirección de la carga (fig.4.5.c).

En la fig.4.8 puede verse que el módulo elástico y la resistencia del compuesto en la dirección longitudinal son menores que los de la matriz y esto se debe a que un 20% del compuesto está formado fibras transversales que no toman prácticamente nada de la carga debido a su reducido módulo elástico en esa dirección. Las curvas correspondientes a la dirección transversal de la pieza muestran como la matriz tiende a contraerse, lo cual da como resultado una compresión de las fibras que tienden a impedirlo, la tracción de la matriz lo cual aumenta su resistencia por sobre el valor correspondiente a tracción uniaxial y una tensión nula del compuesto.

4.4.3. HORMIGON ARMADO COMO MATERIAL COMPUESTO

[Oller 1993a, c]

En este ejemplo se resuelve un prisma de hormigón armado como el de la fig.4.9 sometido a tracción uniaxial. El hormigón armado se idealiza como un material compuesto formado por una matriz de hormigón con fibras formadas por las barras de acero. Se utilizan 4 elementos finitos de 4 nodos y 2x2 puntos de integración.

Se supone que un 10% del volumen total corresponde al acero y el resto al hormigón. Las barras de acero se disponen en la dirección de la carga aplicada. Las características mecánicas del hormigón y del acero se han resumido en las Tablas 4.4 y 4.5 respectivamente.

En la fig.4.10 se han representado las curvas tensión deformación correspondientes al hormigón, al acero y al compuesto hormigón-armado. En la misma puede verse que la tensión en el hormigón no cae a cero como lo haría si el mismo trabajara a tracción uniaxial. Esto se debe a que el hormigón soporta una tensión de tracción en la dirección transversal debida a la diferencia de módulo de Poisson entre el hormigón y el acero. Esto produce a su vez una tensión de tracción transversal en el acero que aumenta su resistencia sobre la correspondiente a tracción uniaxial mostrando un

aparente endurecimiento.

TABLA 4.4 Características mecánicas del hormigón (90% del volumen total)

Material isótropo	Criterio de Fluencia:
$E = 39500 \text{ MPa}$	Mohr-Coulomb $\phi=15^\circ$
$\nu = 0,24$	
$\sigma_c^o = 22,9 \text{ MPa}$	Flujo asociado $\psi=15^\circ$
$\sigma_c^{pic} = 32,8 \text{ MPa}$	
$\sigma_t^o = 2,29 \text{ MPa}$	$G_f = 0,16 \text{ N/mm}$
	$G_c = 16 \text{ N/mm}$
Sin degradación de rigidez	$\kappa^P = 0,38$

TABLA 4.5 Características mecánicas del acero (10% del volumen total)

$E = 210000 \text{ MPa}$
$\nu = 0,3$
$\sigma_c^o = \sigma_t^o = 120 \text{ MPa}$
Criterio de Fluencia de Von Mises
Flujo asociado
Plasticidad perfecta

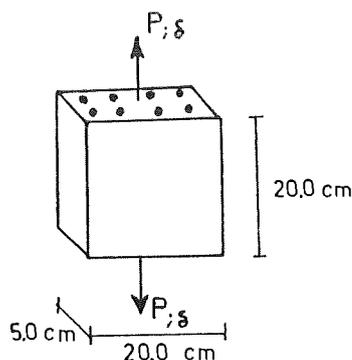


Fig.4.9 Prisma de hormigón armado.
Geometría y condiciones de carga

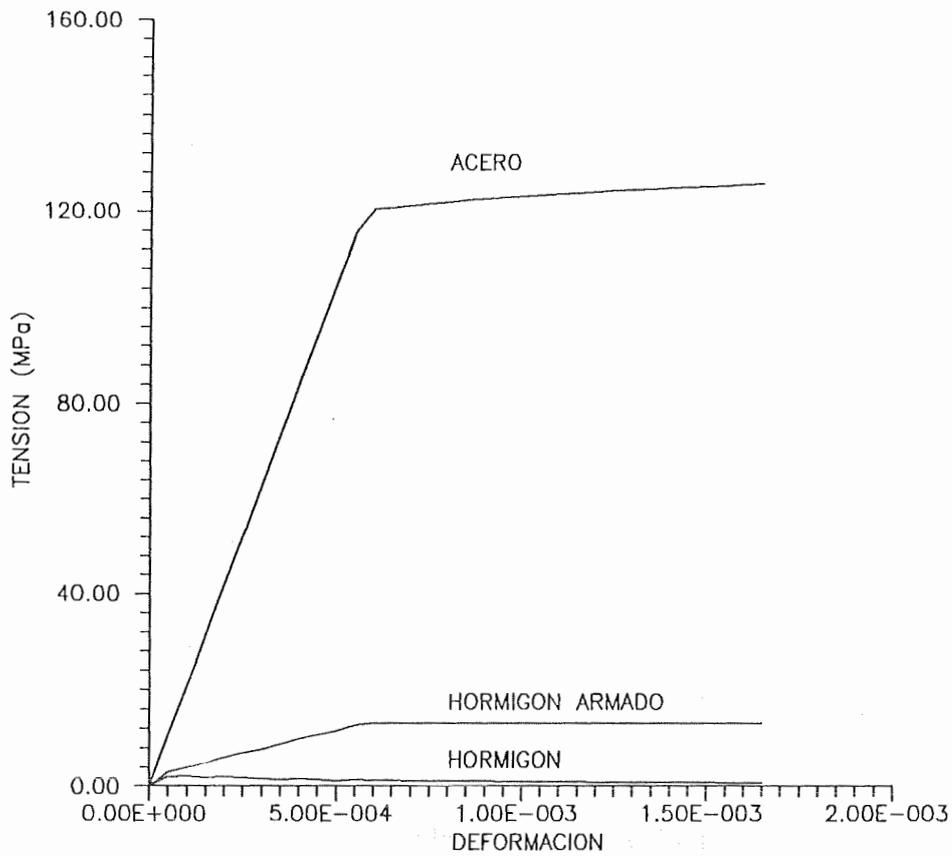


Fig.4.10 Curvas tensión-deformación de un prisma de hormigón armado sometido a tracción

4.4.4. MAMPOSTERIA

En este punto se estudia la aplicación de la teoría de mezcla, presentada en este capítulo al análisis de estructuras de mampostería. En primer lugar se describen algunas limitaciones que presenta la teoría de mezclas para su aplicación a la simulación del comportamiento de la mampostería tradicional y luego una aplicación a mampostería armada que presenta características de comportamiento básicamente distintas.

4.4.4.1. Limitaciones de la Teoría de Mezclas

La teoría de mezclas presentada tiene como hipótesis fundamental la compatibilidad de deformaciones de todos los componentes (ec.4.10). Esto es equivalente a una idealización del material como un sistema en paralelo en que todos los componentes sufren la misma deformación y la tensión se reparte entre ellos en forma proporcional a la relación del volumen total que ocupa cada una de ellas (4.13).

Si ahora se observa, por ejemplo, el panel de mampostería de la fig.4.11, se ve que la forma en que trabaja no es esta. En la dirección vertical (y), perpendicular a la junta, el comportamiento responde más bien a un modelo "serie", la deformación total es la suma de las deformaciones de los componentes y la tensión es la misma en todos los componentes. En la dirección horizontal (x), paralela a la junta, el comportamiento se parece más a un modelo paralelo que uno serie. En el punto 3.4.2 del se han presentado ecuaciones aproximadas correspondientes al comportamiento descrito en régimen elástico (ecs. (3.114) a (3.118)). Si además se pretende tener en cuenta las juntas de cabeza de los ladrillos el comportamiento es más complejo aún.

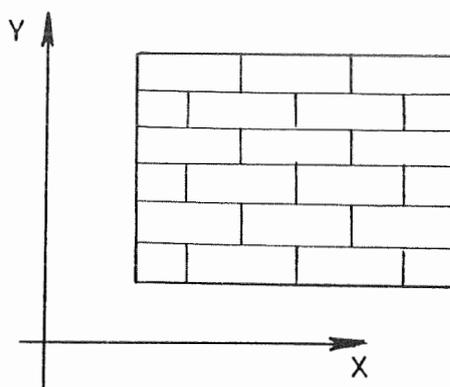


Fig.4.11 Panel de mampostería

El comportamiento elástico de la mampostería podría simularse aproximadamente mediante la teoría de mezclas siguiendo las hipótesis de comportamiento antes presentadas. En el Anexo 4.1 se deriva una forma de tratar elásticamente la mampostería mediante la teoría de mezclas. Esta forma

presenta cierta complejidad de cálculo y solo es aplicable al rango elástico.

Es muy difícil simular cualquier discontinuidad en el comportamiento, plastificación o degradación de rigidez, a través de un criterio tensional. Por ejemplo, si se somete el panel de la fig.4.11 a una fuerza de tracción en la dirección vertical, el mismo fallará cuando se alcance la resistencia a tracción de la junta horizontal. En un modelo de mezclas esto no puede simularse porque la tensión se reparte entre los componentes y la falla del sistema se produce cuando falla la última componente.

Por otro lado, analizando los resultados del ejemplo de mampostería resuelto en el Capítulo 3 discretizando cada elemento de mortero y mampostería, puede verse que hay muchos fenómenos que se dan a nivel local que no podrían tenerse en cuenta en modelo de material compuesto.

Como conclusiones de este breve análisis, la teoría de mezcla es apta para simular materiales compuestos en que las componentes están uniformemente distribuidas en el elemento de volumen pero no es adecuada para materiales con una disposición geométrica decisiva en el comportamiento como en el caso de la mampostería.

Resulta difícil encontrar un tipo de modelo constitutivo adecuado para tratar problemas de mampostería. Lo que ocurre, en realidad, es que se intenta trasladar un problema geométrico, como lo es el de la disposición de los ladrillos y de las juntas, a la modelización constitutiva.

4.4.4.2. Mampostería Armada

Como ya se mencionó la mampostería armada presenta algunas diferencias de comportamiento respecto de la mampostería tradicional. En el caso de la mampostería armada, la anisotropía de comportamiento es prácticamente despreciable debido a la presencia de la armadura. Esto hace posible que la mampostería armada pueda ser considerada como un material isótropo en el que se dispone una armadura distribuida. Vista de esta forma puede resolverse el problema utilizando el modelo de material compuesto presentado en este capítulo.

En este punto se presenta la simulación del comportamiento de dos paneles de mampostería armada pertenecientes a una serie de paneles ensayadas por Shing [Shing 1989, Lofti 1991]. Los mismos corresponden a los especímenes 5 y 12 de la serie. Las dimensiones y disposición de la armadura en los paneles pueden verse en la fig.4.12.

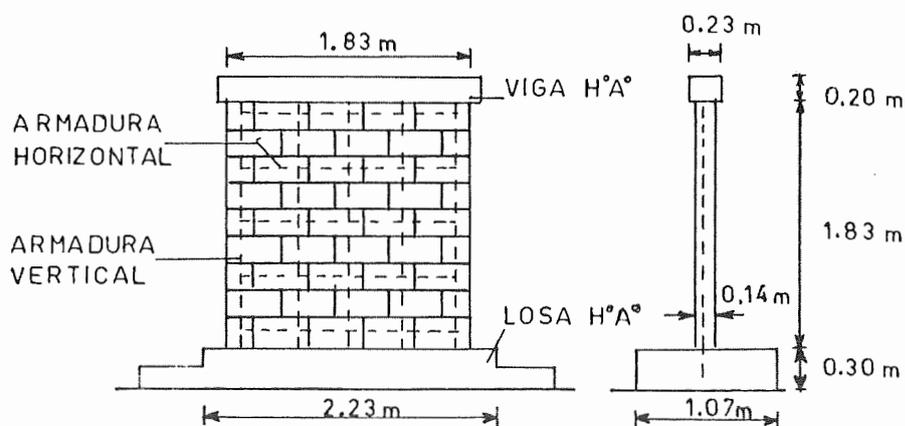


Fig.4.12 Paneles de mampostería armada [Shing 1989]

TABLA 4.6. Características mecánicas de la mampostería, Panel 5

Material isótropo	Criterio de Fluencia:
$E = 12000 \text{ MPa}$	Mohr-Coulomb $\phi=30^\circ$
$\nu = 0,16$	Criterio de Potencial:
$\sigma_c^o = 10,0$	Mohr-Coulomb $\psi=15^\circ$
$\sigma_c^{\text{pic}} = 13,2 \text{ MPa}$	
$\sigma_t^o = 0,67 \text{ MPa}$	$G_f = 0,17 \text{ N/mm}$
	$G_c = 38 \text{ N/mm}$
Sin degradación de rigidez	$\kappa^p = 0,3$

TABLA 4.7. Características mecánicas de la armadura, Panel 5

Armadura vertical 0,74%	Armadura horizontal 0,14%
$E_{long} = 199955 \text{ MPa}; E_{transv} = 1 \text{ MPa}$ $\nu = 0,3$ $\sigma_c^o = \sigma_t^o = 496 \text{ MPa}$ Criterio de Fluencia de Von Mises Flujo asociado Plasticidad perfecta	$E = 199955 \text{ MPa}; E_{transv} = 1 \text{ MPa}$ $\nu = 0,3$ $\sigma_c^o = \sigma_t^o = 386 \text{ MPa}$ Criterio de Fluencia de Von Mises Flujo asociado Plasticidad perfecta

TABLA 4.8 Características mecánicas de la mampostería, Panel 12

Material isótropo	Criterio de Fluencia:
$E = 12000 \text{ MPa}$	Mohr-Coulomb $\phi=15^\circ$
$\nu = 0,16$	Criterio de Potencial
$\sigma_c^o = 10,8 \text{ MPa}$	Mohr-Coulomb $\psi=15^\circ$
$\sigma_c^{pic} = 14,3 \text{ MPa}$	
$\sigma_t^o = 0,72 \text{ MPa}$	$G_f = 0,18 \text{ N/mm}$
	$G_c = 40 \text{ N/mm}$
Sin degradación de rigidez	$\kappa^p = 0,3$

TABLA 4.9. Características mecánicas de la armadura, Panel 12

Armadura vertical 0,38%	Armadura horizontal 0,24%
$E = 199955 \text{ MPa}$ $\nu = 0,3$ $\sigma_c^o = \sigma_t^o = 441 \text{ MPa}$ Criterio de Fluencia de Von Mises Flujo asociado Plasticidad perfecta	$E = 199955 \text{ MPa}$ $\nu = 0,3$ $\sigma_c^o = \sigma_t^o = 462 \text{ MPa}$ Criterio de Fluencia de Von Mises Flujo asociado Plasticidad perfecta

En la Tablas 4.6 y 4.8 se han resumido las características mecánicas de la mampostería de bloques de hormigón correspondiente a ambos paneles. En la Tabla 4.7 y 4.9 se han resumido los datos relativos a la armadura de ambos

paneles.

Ambos paneles fueron sometidos a una presión vertical constante de 0,6896MPa y luego a una fuerza horizontal en su extremo superior. En la fig.4.13 se ha esquematizado el ensayo.

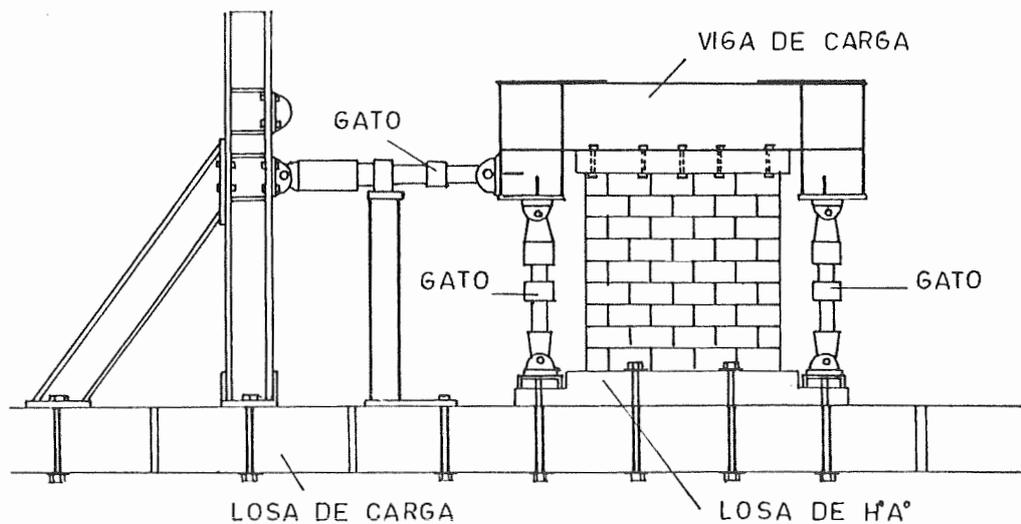


Fig.4.13 Esquema del ensayo [Lofti 1991]

El panel número 12 falló de forma dúctil, predominantemente flexional, con importante fluencia de la armadura vertical acompañada del aplastamiento del ángulo inferior del panel. El panel número 5 falló de manera frágil con predominio de fisuras diagonales por corte.

En la fig.4.14 se ha esquematizado la malla de elementos finitos utilizada. Se emplearon elementos finitos de 4 nodos y 2x2 puntos de integración. Los elementos de mampostería fueron considerados como formados por un material compuesto por una matriz de mampostería isótropa con las propiedades mecánicas indicadas en las Tablas 4.6 y 4.8 reforzada con dos conjuntos de fibras ortogonales correspondientes a la armadura.

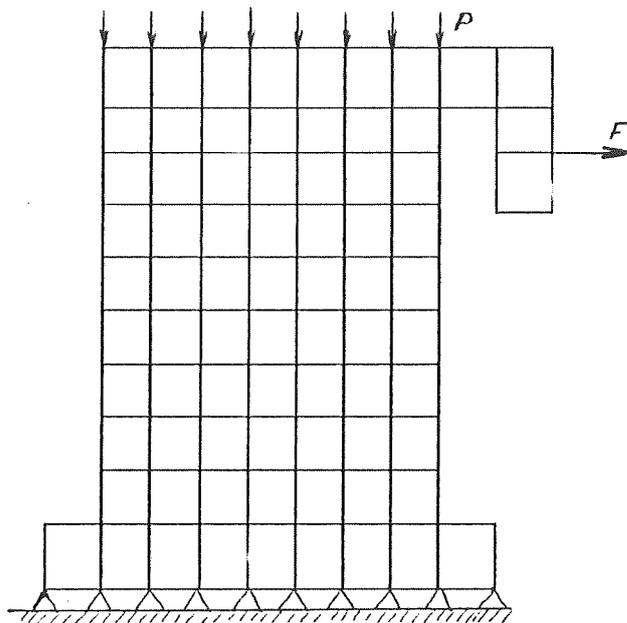


Fig.4.14 Malla de elementos finitos

En la fig.4.15 se han representado las curvas carga-desplazamiento del punto de aplicación de la carga correspondientes al panel número 5 obtenidas experimentalmente y numéricamente. Puede verse que al igual que en el trabajo de Lofti [Lofti 1991] que utiliza un modelo de fisuras distribuidas para simular el comportamiento del panel, la curva numérica muestra una resistencia mayor que la registrada experimentalmente lo cual puede atribuirse al criterio de fluencia utilizado que no se adapta al material para los estados tensionales (corte predominante) que se producen en el panel. No obstante la forma de la curva de respuesta es similar a la experimental.

El cuadro de fisuración obtenido para este panel coincide con el encontrado experimentalmente [Lofti 1991] con predominio de fisuras por corte.

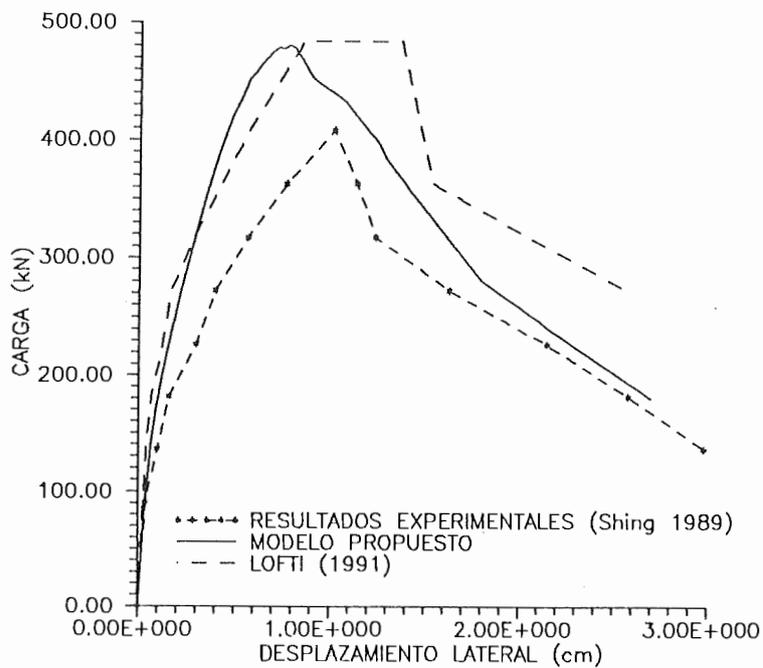


Fig.4.15 Curva carga-desplazamiento panel 5

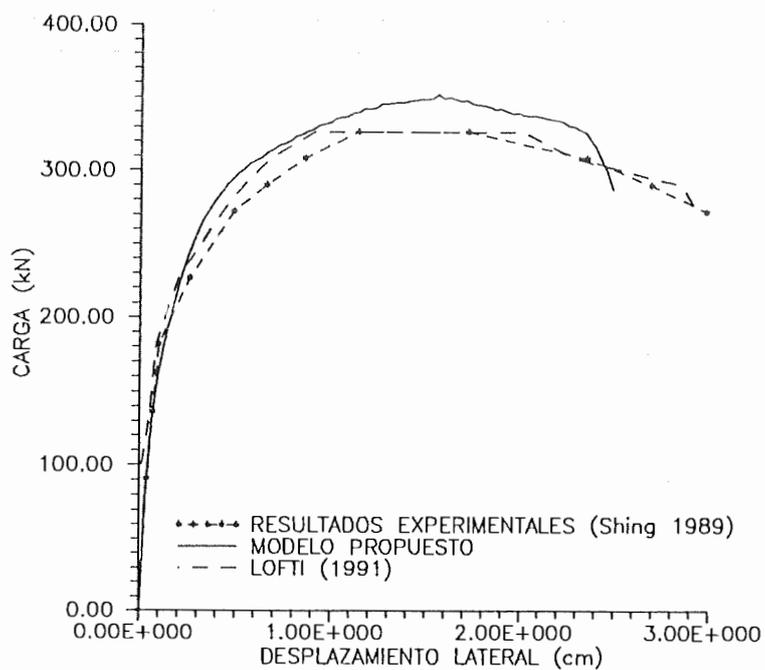


Fig.4.16 Curva carga-desplazamiento panel 12

En la fig.4.16 se han representado las curvas carga-desplazamiento del panel número 12. En la misma puede verse que la curva numérica reproduce mucho mejor el comportamiento experimental que en el caso del panel número 5. Debe observarse que en este caso el comportamiento es más dúctil con un falla predominantemente flexional.

El cuadro de fisuración obtenido numéricamente, al igual que en el caso anterior, muestra similitud con el obtenido experimentalmente [Lofti 1991].

4.5. CONSIDERACIONES FINALES

El modelo desarrollado en este capítulo que combina los principios de la teoría de mezclas para materiales multifases con el modelo elasto-plástico-degradable para materiales anisótropos desarrollado en los capítulos anteriores, provee una herramienta muy potente para la simulación del comportamiento de materiales compuestos en general. La posibilidad de combinar materiales de comportamientos diversos permite solucionar una gran cantidad de problemas ingenieriles.

La teoría de mezclas parte de la hipótesis de compatibilidad de deformaciones por lo cual resulta apropiada para materiales compuestos en los que las componentes están dispuestas en una estructura de tipo paralelo. Por esta misma razón no puede ser aplicada directamente a la simulación del comportamiento de la mampostería. Para este material parecería ser más apropiado el modelo simplificado de material único ortótropo presentado en el Capítulo 3.

Se propone para nuevos trabajos y líneas futuras de investigación la formulación de una teoría para materiales compuestos, algo más general que la teoría de mezclas, que permita tratar materiales del tipo de la mampostería. La formulación de dicha teoría no es simple ya que se trata de trasladar un problema geométrico al modelo constitutivo.

ANEXO 4.1

COMPORTAMIENTO ELASTICO DE LA MAMPOSTERIA

TEORIA TOPOLOGICA DE MEZCLAS PROPUESTA DE UNA INTRODUCCION

A4.1.1. INTRODUCCION

En este anexo se desarrolla una generalización de la teoría de mezclas para la simulación del comportamiento elástico de la mampostería. El planteo es totalmente general y puede ser extendido a otros materiales compuestos en los que la disposición geométrica de sus componentes hace imposible su tratamiento directo mediante la teoría de mezclas.

A4.1.2. ESQUEMA DE TRABAJO

La ec.(4.13) del Capítulo 4:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n k_c \left(\sigma_{ij} \right)_c \quad (\text{A4.1.1})$$

se puede reformular para el caso más general en que influye la topología de las sustancias participantes:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n \left(K_{ijkl}^{\sigma} \right)_c \left(\sigma_{kl} \right)_c \quad (\text{A4.1.2})$$

Donde los tensores $\left(K_{ijkl}^{\sigma} \right)_c$ tienen en cuenta la relación del volumen total ocupada por la componente c y su disposición geométrica en el compuesto. De modo que la ecuación (A4.1.2) representa de manera más real el comportamiento de un compuesto.

Siguiendo un razonamiento similar, en un compuesto genérico, la deformación del conjunto puede escribirse como:

$$\epsilon_{ij} = \sum_{c=1}^n \left(K_{ijkl}^{\epsilon} \right)_c \left(\epsilon_{kl} \right)_c \quad (\text{A4.1.3})$$

Donde los tensores $\left(K_{ijkl}^{\epsilon} \right)_c$ tienen en cuenta la relación de volumen y la disposición geométrica.

En el caso particular de la *teoría de mezclas* clásica, los tensores K se calculan de la siguiente forma:

$$\left(K_{ijkl}^{\sigma} \right)_c = k_c \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{A4.1.4})$$

$$\left(K_{ijkl}^{\epsilon} \right)_c = \begin{cases} \delta_{ik} \delta_{jl} & \text{para cualquier } c=c^* \\ 0 \delta_{ik} \delta_{jl} & \text{para todo } c \neq c^* \end{cases} \quad (\text{A4.1.5})$$

Por otro lado, en un compuesto real existen relaciones entre las

tensiones de las componentes y entre las deformaciones de las mismas que pueden expresarse como:

$$\left(\sigma_{ij} \right)_c = \left[K_{ijkl}^\sigma \right]_{c,q} \left(\epsilon_{kl} \right)_q \quad (\text{A4.1.6})$$

y

$$\left(\epsilon_{ij} \right)_c = \left[K_{ijkl}^\epsilon \right]_{c,q} \left(\epsilon_{kl} \right)_q \quad (\text{A4.1.7})$$

Donde normalmente no se conoce a priori todos los términos de $\left[K_{ijkl}^\sigma \right]_{c,q}$ y $\left[K_{ijkl}^\epsilon \right]_{c,q}$. Combinando las ecuaciones (A4.1.2) y (A4.1.3) con las ecuaciones constitutivas elásticas del material:

$$\left(\sigma_{ij} \right)_c = \left[C_{ijkl}^s \right]_c \left(\epsilon_{kl} \right)_c \quad (\text{A4.1.8})$$

es siempre posible llegar a las formas (A4.1.6) y (A4.1.7)

En el caso particular de la teoría de mezclas:

$$\left[K_{ijkl}^\epsilon \right]_{c,q} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \forall c,q \quad (\text{A4.1.9})$$

y los $\left[K_{ijkl}^\sigma \right]_{c,q}$ pueden obtenerse si se utilizan las relaciones constitutivas de los materiales componentes que, para el caso elástico, se escriben como:

$$\left(\sigma_{ij} \right)_c = \left[C_{ijkl}^s \right]_c \left(\epsilon_{kl} \right)_c = \left[C_{ijkl}^s \right]_c \epsilon_{kl} \quad (\text{A4.1.10})$$

Como en la teoría de mezclas las deformaciones son idénticas en todas las componentes, se cumple que:

$$\left(C_{ijkl}^{s^{-1}} \right)_c \left(\sigma_{kl} \right)_c = \left(C_{ijkl}^{s^{-1}} \right)_q \left(\sigma_{kl} \right)_q \quad (A4.1.11)$$

$$\left(\sigma_{ij} \right)_c = \left(C_{ijkl}^s \right)_c \left(C_{klmn}^{s^{-1}} \right)_q \left(\sigma_{mn} \right)_q \quad (A4.1.12)$$

o sea que:

$$\left(K_{ijkl}^\sigma \right)_{c,q} = \left(C_{ijmn}^s \right)_c \left(C_{mnkl}^{s^{-1}} \right)_q \quad (A4.1.13)$$

A4.1.3. EQUIVALENCIA ENTRE LA TEORIA DE MEZCLAS MODIFICADA Y LA TEORIA DE MEZCLAS CLASICA

El comportamiento de un material compuesto genérico, que responde a las ecuaciones (A4.1.2) y (A4.1.3), podría simularse mediante la teoría de mezclas clásica si se trabaja con componentes ficticias, distintas de las reales de manera de obtener el mismo resultado de conjunto. En lo que sigue se marca con un asterísco las tensiones, deformaciones y rigideces de las componentes en la teoría de mezclas clásicas ya que en la mayoría de los casos no coinciden con sus valores reales.

Igualando las ecuaciones (A4.1.2) y (A4.1.3) con las correspondientes a la teoría de mezclas clásica se tiene:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n \left(K_{ijkl}^\sigma \right)_c \left(\sigma_{kl} \right)_c = \sum_{c=1}^n \left(K_{ijkl}^{\sigma^*} \right)_c \left(\sigma_{kl}^* \right)_c = \sum_{c=1}^n k_c \delta_{ik} \delta_{jl} \left(\sigma_{kl}^* \right)_c \quad (A4.1.14)$$

y

$$\epsilon_{ij} = \sum_{c=1}^n \left(K_{ijkl}^\epsilon \right)_c \left(\epsilon_{kl} \right)_c = \epsilon_{ij}^* \quad (A4.1.15)$$

A partir de estas ecuaciones y teniendo en cuenta las relaciones

(A4.1.6) y (A4.1.7) se puede llegar a las siguientes ecuaciones que relacionan la tensión y la deformación real en una componente con las que tiene cuando se simula el comportamiento del compuesto con la teoría de mezclas clásica:

$$\left(\sigma_{ij}\right)_q = \left[\left(K_{ijkl}^{\sigma}\right)_q + \sum_{c=1}^{q-1} \left(K_{ijmn}^{\sigma}\right)_c \left(K_{mnkl}^{\sigma}\right)_{c,q} + \sum_{c=q+1}^n \left(K_{klmn}^{\sigma}\right)_c \left(K_{mnkl}^{\sigma}\right)_{c,q} \right]^{-1} \quad (A4.1.16)$$

$$\left[\sum_{c=1}^n k_c \left(C_{ijmn}^{s*}\right)_c \left(C_{mnkl}^{s*-1}\right)_q \right] \left(\sigma_{rs}^*\right)_q$$

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)_q = \left[\left(K_{ijkl}^{\varepsilon}\right)_q + \sum_{c=1}^{q-1} \left(K_{ijmn}^{\varepsilon}\right)_c \left(K_{mnkl}^{\varepsilon}\right)_{c,q} + \sum_{c=q+1}^n \left(K_{ijmn}^{\varepsilon}\right)_c \left(K_{mnkl}^{\varepsilon}\right)_{c,q} \right]^{-1} \left(\varepsilon_{kl}^*\right)_q \quad (A4.1.17)$$

Si estas ecuaciones se escriben como:

$$\left(\sigma_{ij}\right)_q = \left(T_{ijrs}^{\sigma}\right)_q \left(\sigma_{rs}^*\right)_q \quad (A4.1.18)$$

y

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)_q = \left(T_{ijrs}^{\varepsilon}\right)_q \left(\varepsilon_{rs}^*\right)_q \quad (A4.1.19)$$

Reemplazando en la ec.(A4.1.8), resulta:

$$\left(T_{ijrs}^{\sigma}\right)_q \left(\sigma_{rs}^*\right)_q = \left(C_{ijkl}^s\right)_q \left(T_{klrs}^{\varepsilon}\right)_q \left(\varepsilon_{rs}^*\right)_q \quad (A4.1.20)$$

De donde :

$$\left(\sigma_{ij}^*\right)_q = \left(T_{ijrs}^{\sigma}\right)_q^{-1} \left(C_{rskl}^s\right)_q \left(T_{klmn}^{\varepsilon}\right)_q \left(\varepsilon_{mn}^*\right)_q \quad (A4.1.21)$$

De lo que se deduce que:

$$\left(C_{ijkl}^{s*} \right)_q = \left(T_{ijrs}^\sigma \right)_q^{-1} \left(C_{rskl}^s \right)_q \left(T_{klmn}^\epsilon \right)_q \quad (A4.1.22)$$

En esta ecuación $\left(T_{ijrs}^\sigma \right)_q$ depende también de $\left(C_{ijkl}^{s*} \right)_c$. En general adoptando "n-1" de ellos se puede calcular el restante.

La ecuación (A4.1.22) define la rigidez elástica que habría que asignar a la componente q para que el compuesto resuelto según la teoría de mezclas clásica, de el mismo estado de tensiones y deformaciones que los que ocurren en el compuesto real.

A4.1.4. APLICACION A UN PANEL DE MAMPOSTERIA

En este punto se aplican los conceptos desarrollados en los puntos anteriores a la solución de un panel de mampostería mediante la teoría de mezclas clásica. El panel y los sistemas de coordenadas se han esquematizado en la fig.A4.1.1. Se considera al panel como un compuesto formado por dos fases: (1) juntas horizontales y (2) ladrillos. Las juntas verticales no se tienen en cuenta.

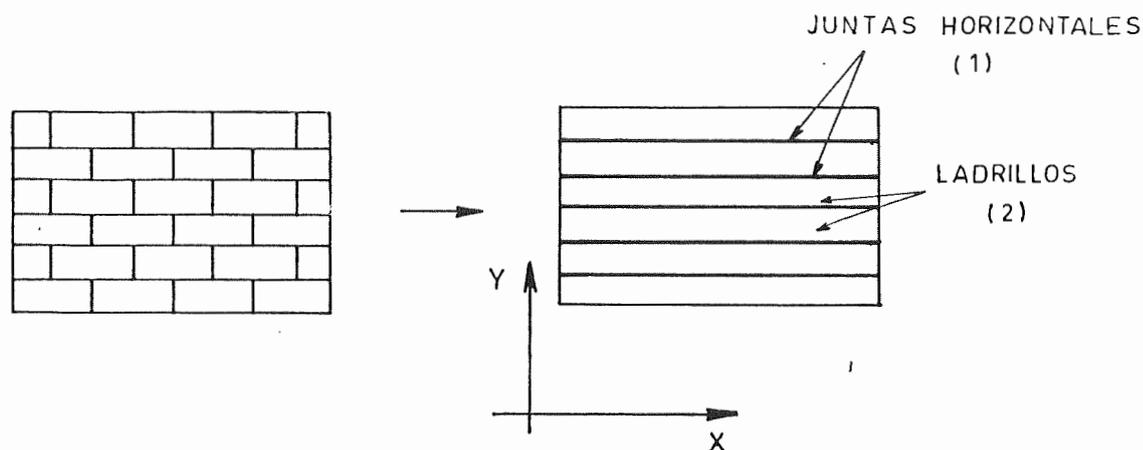


Fig.A4.1.1 Esquema de un panel de mampostería

Se supone que el panel está sometido a un estado plano de tensiones y, para mayor claridad en la presentación, se reemplaza la notación vectorial del apartado anterior por la notación vectorial.

El estado de tensión está dado entonces por¹:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_{\sim 1}^{\sigma}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_{\sim 2}^{\sigma}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_2 \quad (\text{A4.1.23})$$

y el estado de deformación por:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_{\sim 1}^{\varepsilon}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_{\sim 2}^{\varepsilon}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_2 \quad (\text{A4.1.24})$$

Además se conoce las siguientes relaciones:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_{\sim 1,2}^{\sigma}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_2 \quad (\text{A4.1.25})$$

¹La consideración de las tensiones tangenciales al igual que la de las deformaciones angulares es sólo aproximada.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K_{\sim 1,2}^\varepsilon} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_2 \quad (A4.1.26)$$

Donde las 16 constantes (a_1 a a_{16}) pueden obtenerse a partir de las relaciones constitutivas elásticas:

$$\underline{\sigma}_1 = C_1^s \underline{\varepsilon}_1 = K_{\sim 1,2}^\sigma \underline{\sigma}_2 = K_{\sim 1,2}^\sigma C_2^s \underline{\varepsilon}_2 = K_{\sim 1,2}^\sigma C_2^s K_{\sim 1,2}^{\varepsilon^{-1}} \underline{\varepsilon}_1 \quad (A4.1.27)$$

que conducen a la siguiente ecuación:

$$C_1^s = K_{\sim 1,2}^\sigma C_2^s K_{\sim 1,2}^{\varepsilon^{-1}} \quad (A4.1.28)$$

de la solución de la cual se pueden calcular las 16 constantes aún no conocidas.

Planteando las ecuaciones (A4.1.14) y (A4.1.15), para este caso particular, se tiene:

$$K_{\sim 1}^\sigma \sigma_1 + K_{\sim 2}^\sigma \sigma_2 = k_1 \sigma_1^* + k_2 \sigma_2^* \quad (A4.1.29)$$

$$K_{\sim 1}^\varepsilon \varepsilon_1 + K_{\sim 2}^\varepsilon \varepsilon_2 = \varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = \varepsilon \quad (A4.1.30)$$

De donde se puede obtener:

$$\begin{aligned}\sigma_{\sim 1}^* &= \left[k_1 \underline{I} + k_2 \underline{K}_{\sim 1,2}^{\sigma^*} \right]^{-1} \left[\underline{K}_{\sim 1}^{\sigma} + \underline{K}_{\sim 2}^{\sigma} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\sigma^{-1}} \right] \sigma_{\sim 1} = \\ &= \underbrace{\left[k_1 \underline{I} + k_2 \underline{C}_2^{s*} \underline{C}_1^{s*} \right]^{-1} \left[\underline{K}_{\sim 1}^{\sigma} + \underline{K}_{\sim 2}^{\sigma} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\sigma^{-1}} \right]}_{T_1^{\sigma}} \sigma_{\sim 1}\end{aligned}\quad (\text{A4.1.31})$$

$$\sigma_{\sim 2}^* = \underbrace{\left[k_2 \underline{I} + k_1 \underline{C}_1^{s*} \underline{C}_2^{s*} \right]^{-1} \left[\underline{K}_{\sim 2}^{\sigma} + \underline{K}_{\sim 1}^{\sigma} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\sigma} \right]}_{T_2^{\sigma}} \sigma_{\sim 2}\quad (\text{A4.1.32})$$

$$\varepsilon_{\sim 1}^* = \underbrace{\left[\underline{K}_{\sim 1}^{\varepsilon} + \underline{K}_{\sim 2}^{\varepsilon} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\varepsilon^{-1}} \right]}_{T_1^{\varepsilon}} \varepsilon_{\sim 1}\quad (\text{A4.1.33})$$

$$\varepsilon_{\sim 2}^* = \underbrace{\left[\underline{K}_{\sim 2}^{\varepsilon} + \underline{K}_{\sim 1}^{\varepsilon} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\varepsilon} \right]}_{T_2^{\varepsilon}} \varepsilon_{\sim 2}\quad (\text{A4.1.34})$$

La ec.(A4.1.22) se escribe en este caso como:

$$\begin{cases} \underline{C}_1^{s*} = T_1^{\sigma^{-1}} \underline{C}_1^s T_1^{\varepsilon} = \left[\underline{K}_{\sim 1}^{\sigma} + \underline{K}_{\sim 2}^{\sigma} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\sigma^{-1}} \right]^{-1} \left[k_1 \underline{I} + k_2 \underline{C}_2^{s*} \underline{C}_1^{s*} \right] \underline{C}_1^s \left[\underline{K}_{\sim 1}^{\varepsilon} + \underline{K}_{\sim 2}^{\varepsilon} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\varepsilon^{-1}} \right] \\ \underline{C}_2^{s*} = T_2^{\sigma^{-1}} \underline{C}_2^s T_2^{\varepsilon} = \left[\underline{K}_{\sim 2}^{\sigma} + \underline{K}_{\sim 1}^{\sigma} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\sigma} \right]^{-1} \left[k_2 \underline{I} + k_1 \underline{C}_1^{s*} \underline{C}_2^{s*} \right] \underline{C}_2^s \left[\underline{K}_{\sim 2}^{\varepsilon} + \underline{K}_{\sim 1}^{\varepsilon} \underline{K}_{\sim 1,2}^{\varepsilon} \right] \end{cases}\quad (\text{A4.1.35})$$

Si se supone, por ejemplo, que:

$$C_1^{s*} = C_1^s \tag{A4.1.36}$$

Reemplazando en la segunda de las ec.(A4.1.35), se puede obtener C_2^{s*} y luego las relaciones entre las tensiones ficticias de trabajo y las reales en cada componente (ec.(A4.1.31) a (A4.1.34)).

A4.1.5 CONSIDERACIONES FINALES

En resumen, el comportamiento elástico de un compuesto cualquiera puede simularse mediante la teoría de mezclas clásica si se calculan adecuadamente los tensores de rigidez de sus componentes y se tiene en cuenta que las tensiones y deformaciones con que estas componentes trabajan dentro de dicha teoría no son reales.

Conviene destacar que los tensores de rigidez elástica que se obtienen no tienen un forma similar a la de los materiales simples originales lo cual complica la utilización de este algoritmo en un programa de elementos finitos.

La solución completa del problema estaría en desarrollar un teoría de materiales compuestos que tenga en cuenta relaciones generales como las (A4.1.2) y (A4.1.3).

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

5.1. CONCLUSIONES

En esta tesis se presenta un modelo constitutivo que permite simular el comportamiento de materiales estructurales en general bajo cargas cuasiestáticas de corta duración y pequeñas deformaciones y desplazamientos.

De la formulación del modelo se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- El modelo es termodinámicamente consistente.
- El modelo para materiales inicialmente isótropos surge de una extensión y reinterpretación de las variables de la teoría de la plasticidad clásica y de la teoría de daño isótropo de Kachanov.
- La estructura matemática resultante es totalmente análoga a la de los

modelos elastoplásticos clásicos.

- El modelo presentado contempla gran parte de los aspectos más importantes que caracterizan el comportamiento inelástico de los geomateriales, tales como la respuesta diferenciada para cada proceso de tensión-deformación multiaxial y la combinación de fenómenos de fisuración con aplastamiento a través de un tratamiento unificado.

- Las variables de endurecimiento plástico isótropo y de endurecimiento en daño han sido definidas para tener en cuenta el estado tensional y controlar la disipación de energía durante el proceso. Las mismas surgen de una generalización de las definiciones correspondientes a estados uniaxiales y permiten definir el endurecimiento a partir de los resultados experimentales de dichos ensayos.

- El uso de una formulación plástica localmente isótropa, combinada con el concepto de localización del daño, da lugar a un comportamiento globalmente anisótropo, resultante del proceso.

- El modelo propuesto resuelve simultáneamente el problema de evolución de las deformaciones permanentes y de degradación de rigidez, permitiendo cumplir en cada paso de carga con las condiciones de consistencia plástica y de daño. De esta forma se puede controlar y asegurar que la energía disipada en el proceso sea la correcta.

- La extensión al tratamiento de materiales inicialmente anisótropos no proporcionales se logra a través de una única transformación de espacios. De esta forma se trabaja en un espacio ficticio isótropo, utilizando funciones de fluencia y potencial definidas para materiales inicialmente isótropos.

- El tensor de transformación de espacios depende de la relación de resistencias en las distintas direcciones y se mantiene constante durante la historia de carga.

- La estructura de trabajo es totalmente análoga a la del modelo para materiales inicialmente isótropos con algunas transformaciones de espacios

que se agregan.

- Como resultado de estas transformaciones se logran superficies de fluencia y potencial anisótropas y convexas en el espacio real. El flujo plástico en el espacio real se orienta en la dirección de menor resistencia.

- Combinando el modelo de material simple anisótropo con la teoría de mezclas se obtiene un modelo para materiales compuestos por materiales anisótopos elasto-plástico-degradables.

- Este modelo provee una herramienta muy potente para la simulación del comportamiento de materiales compuestos en general. La posibilidad de combinar materiales de comportamientos diversos permite reproducir una amplia gama de materiales.

- La teoría de mezclas parte de la hipótesis de compatibilidad de deformaciones por lo cual resulta apropiada sólo para materiales compuestos en los que las componentes están dispuestas en una estructura de tipo paralelo.

De la implementación numérica del modelo propuesto se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- La implementación del modelo constitutivo propuesto en un programa de elementos finitos es relativamente simple.

- El método desarrollado para la integración de la ecuación constitutiva es particularmente apropiado para la solución de problemas de estado plano de tensiones de materiales simples en programas de elementos finitos 2D.

- La resolución de problemas de estado plano de tensiones en materiales compuestos, mediante programas de elementos finitos 2D, exige de un algoritmo especial que integre la ecuación constitutiva de cada componente con tensión transversal al plano no nula y luego plantee la condición de estado plano en el compuesto a nivel ecuación constitutiva.

- El método desarrollado para la integración de la ecuación constitutiva en materiales compuestos bajo estado plano de tensión reproduce adecuadamente la interacción entre las distintas componentes en la dirección transversal al plano.

- En general, la convergencia de los métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados es muy buena. La integración independiente del camino exige mayor número de iteraciones pero permite obtener mejores resultados con pasos de carga más grandes.

- La solución del problema no lineal se realizó en la mayoría de los casos con el método de Newton Raphson. La utilización del módulo tangente consistente con el algoritmo de integración permitió mantener la tasa de convergencia cuadrática de dicho método.

De los ejemplos de aplicación desarrollados se desprende que:

- El modelo logra reproducir el fenómeno de acoplamiento entre las deformaciones permanentes y la degradación de rigidez que aparece con frecuencia en los geomateriales dando lugar a un comportamiento elasto-plástico degradable.

- El modelo presentado es capaz de reproducir el comportamiento del hormigón simple, armado y pretensado bajo carga creciente y bajo carga cíclica, logrando reproducir adecuadamente el desarrollo de deformaciones permanentes y la degradación de la rigidez.

- El modelo desarrollado para materiales anisótropos permite reproducir la direccionalidad del comportamiento de una amplia gama de materiales. Es posible desarrollar un modelo de material simple anisótropo que aproxime el comportamiento de la mampostería.

- El modelo de materiales compuestos permite reproducir el comportamiento de materiales muy diversos, siendo de especial utilidad en materiales reforzados con fibras o incluso hormigón armado

- El modelo de materiales compuestos basado en la teoría de mezclas no puede ser aplicado directamente a la simulación del comportamiento de la mampostería.

5.2. LINEAS DE INVESTIGACION FUTURA

Durante el desarrollo de este trabajo han surgido como propuestas nuevas líneas de investigación para profundizar, mejorar o generalizar algunos aspectos del modelo propuesto. Se destacan las siguientes:

- Debería estudiarse más el fenómeno de localización de deformaciones que está ligado al problema de objetividad de la respuesta. Es un tema para el que no existe una solución definitiva probada. En la tesis se ha utilizado una de las tantas formas existentes para lograr objetividad que da mejores resultados. Pero se han detectado problemas con esta forma cuando no se produce localización de deformaciones por lo que sería conveniente profundizar más en el estudio de este tema.

- Como el modelo presentado pretende ser un modelo de aplicación general no incorpora datos o relaciones entre datos correspondientes a ningún material. Durante el desarrollo de los ejemplos de aplicación se detectó una falencia muy grande de resultados experimentales sobre el comportamiento de los materiales utilizados bajo estados uniaxiales de tensión. Es clara la necesidad de estudiar experimentalmente, con mayor profundidad, el comportamiento de los materiales para poder obtener los datos necesarios para la simulación numérica. En particular, hace falta disponer de los valores de la energía de fractura y de aplastamiento e incluso estudiar la determinación experimental de este último valor. Es claro también que para simular adecuadamente el comportamiento de un material elastoplástico degradable se debe disponer de alguna información sobre cómo se comporta el material bajo cargas uniaxiales cíclicas.

- Deben formularse superficies de fluencia, potencial y daño con meridianos curvos e intersección con el plano octaédrico variable. En particular para el hormigón, hace falta definir mejor la superficie de fluencia en la zonas de corte.

- El modelo para materiales inicialmente anisótropos sólo permite simular una relación de resistencias constante e independiente del tipo de estado tensional (compresión, tracción u otra combinación de tensiones). Como generalización de este modelo se propone formular una transformación de espacios que dependa del estado tensional para poder simular materiales en los que las relaciones de resistencias de tracción y de compresión en las distintas direcciones no son iguales como es el caso de la mampostería.

- Se debe profundizar sobre el problema de daño anisótropo.

- Se propone para nuevos trabajos la formulación de una teoría para materiales compuestos, algo más general que la teoría de mezclas, que permita tratar materiales en los que no existe compatibilidad de deformaciones ni de tensiones entre las componentes en todas las direcciones, como es el caso de la mampostería. La formulación de dicha teoría no es simple ya que se trata de trasladar un problema geométrico al modelo constitutivo.

- El criterio utilizado para definir el estado de fisuración, basado en los valores principales del tensor de deformaciones plásticas, no se ajusta estrictamente a los resultados experimentales, particularmente cuando se incorpora degradación de rigidez. Sería conveniente reformular dicho criterio.

- Sería conveniente extender la formulación del modelo propuesto al tratamiento de materiales con grandes deformaciones y problemas dinámicos.

- En general, se debe mejorar la velocidad y la convergencia de los procesos no lineales utilizados.

REFERENCIAS

- . Abboud B.E., Hamid A.A. (1990) Harris H.G., *Small Scale Modeling Concrete Block Masonry Structures*, ACI Structural Journal, V.87, No.2, Mar.-Apr., PP. 145-155.
- . Afshari F., Kaldjian M.J. (1989), *Finite Element Analysis of Concrete Masonry Prisms*, American Concrete Institute, Materials Journal, Vol.86, No.5, September-October, PP. 525-530.
- . Allix O. and Ladèveze P. (1989), *A Damage Prediction Method for Composite Structures*, Int. Journal for Num. Methos in Engineering, Vol.27, 271-283.
- . Argyris J.H., Dunne P.C., Angelopoulos T., Bichat B. (1974), *Large Natural Strains and some Special Difficulties Due to Nonlinearity and*

- Incompressibility in Finite Elements*, Comput. Meths. Appl. Mech. Eng. 4
219-278.
- . ASCE(1982),State of Art Report on: "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete".
 - . Astroza M., Delfim F. (1983), Cruzat R., *Estudio Experimental de Elementos de Albañilería Armada Sometidos a Flexo-Compresión*, Memorias de las IV Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural.
 - . Baker W.H., Krizek R.J. (1970), *Mohr-Coulomb Strength Theory for Anisotropic Soils*, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, January, PP.269-292.
 - . Barlek J.R. (1990), *Comportamiento hasta Rotura de Elementos Flexados de Hormigón Parcialmente Pretensados*, Tesis de Magister en Ingeniería Estructural, Universidad Nacional de Tucumán.
 - . Bathe K.J. (1982), Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall.
 - . Bazant Z.P. (1976), *Inestability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete*, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.102, No.EM2, pp.331-344.
 - . Bazant Z.P. (1978a), *Inestability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete*, Discussion [5], ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division.
 - . Bazant Z. (1978b), *Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity*, International Journal for Solids and Structures, Vol.14, No.9, pp. 691-714.
 - . Bazant Z. P., Kim S.S. (1979), *Plastic - Fracturing Theory for Concrete*, Journal of Engineering Mechanics ASCE , Vol. 105, No. EM3, June.
 - . Bazant Z. and Oh. B. (1983), *Crack Band Theory for Fracture of Concrete*, Mat. Construct. 16 (93), pp.155-177

-
- . Bellini P.X., Chulya A. (1987), *An Improved Automatic Algorithm for the Efficient Solution of Non-Linear Finite Element Equations*, Computers & Structures, Vol.26, No. 1/2, pp. 99-110.
 - . Belytschko T., Bazant Z.P., Hyun Y.W., Chang T.P.(1986), *Strain Softening Materials and Finite Element Solutions*, Computer & Structures, Vol.23, No.2, pp.163-180.
 - . Belytschko T., Fish J., Engelmann B.E.(1988), *A Finite Element with Embedded Localization Zones*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 70, North Holland , pp.59-89.
 - . Benedetti et all (1982), *Comportamento Statico e Sismico delle Structure Murarie*, CLUP, PP. 64-87.
 - . Bernardini A., Modena C., Vescovi U. (1978), *Ricerca Sperimentale sui Parametri di Resistenza e Deformabilita di Murature in Laterizio Normale e Alveolato*, Construire N0.109.
 - . Bernardini A., Modena C., Vescovi U. (1979), *Ricerca Sperimentale sui Parametri di Resistenza e Deformabilita di Murature in Laterizio Normale e Alveolato (Segunda Parte)*, Construire N0.114.
 - . Betten J. (1981), *Creep Theory of Anisotropic Solids*, Journal of Rheology, 25(6), PP. 565-581.
 - . Betten J. (1983), *Damage Tensors in Continuum Mechanics*, Journal de Mechanique Theorique et Appliquee, Vol.2, No.1, pp 13-32.
 - . Betten J. (1988), *Applications of Tensor Functions to the Formulation of Yield Criteria for Anisotropic Materials*, International Journal of Plasticity, Vol.4, PP. 29-46.
 - . Buyukozturk O. and Shareef S. (1985), *Constitutive Modeling of Concrete in Finite Element Analysis*, Computer & Structures, Vol.21, No.3, pp. 581-610.

- . Cedolin. L., Crutzen R., Dei Poli S. (1977), *Triaxial Stress-Strain Relationship for Concrete*, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.103, No. EM3, June, pp. 423-439.
- . Crisfield M.A. (1981a), *A Fast Incremental Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-Through"*, Computer & Structures, Vol.13, pp. 55-62.
- . Crisfield M.A. (1981b), *Finite Element Analysis for Combined Material and Geometric Nonlinearities*, pp.325-338.
- . Crisfield M.A. (1982), *Accelerated Solutions Techniques and Concrete Cracking*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 33, pp. 585-607.
- . Crisfield M.A. (1983), *An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, pp. 1269-1289.
- . Crisfield M.A. (1986), *Snap-Through and Snap-Back Response in Concrete Structures and the Danger of Under Integration*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.22, pp. 751-767.
- . Crisfield M.A. (1991), *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & sons Ltd., England.
- . Cheema T.S. and Klinger R.E. (1986), *Compressive Strength of Concrete Masonry Prisms*, ACI Journal, Jan-Feb
- . Chen A. and Chen W.F. (1975), *Constitutive Relations for Concrete*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, No. EM4, pp.465-481.
- . Chen W. F., Ting, E. (1980) *Constitutive Models for Concrete Structures*, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.106, Nro.EM1, pp 1-18.

-
- . Chen W. F. (1982), Plasticity in Reinforced Concrete, Mc Graw Hill.
 - . Darwin D., Pecknold D.A. (1977), *Nonlinear Biaxial Law for Concrete*, Journal Engineering Mechanics Division ASCE, Vol.103, No.EM2, Ap., pp.229-241.
 - . De Borst R., Vermeer P.A. (1984), *Possibilities and Limitations of Finite Elements for Limit Analysis*, Geotechnique 34, No.2, 1984, pp. 199-210.
 - . De Borst R. (1987a), *Computation of Post-Bifurcation and Post-Failure Behaviour of Strain Softening Solids*, Computers & Structures, Vol.25, No.2, pp.211-224.
 - . De Borst R. (1987b), *Integration of Plasticity Equations for Singular Yield Functions*, Computers & Structures, Vol 26, No.5, pp. 823-829.
 - . Decanini L. , Payer A., Terzariol R. (1982), *Contribución al Establecimiento de los Indices de Resistencia de la Mampostería*, Informe Interno, Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba.
 - . Decanini L. , Payer A. (1983a), *Comentarios sobre Normas para Construcciones Sismorresistentes de Mampostería*, Informe Interno, Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba.
 - . Decanini L. et al (1983b), *Investigación Experimental sobre el Comportamiento de Prototipos a Escala Natural de Muros de Mampostería Encadenada*, Memorias de las IV Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural.
 - . Dept. of Defense, *Structural Sandwich Composites* (1968), MIL-HDBK, Dept. of Defense, Washington, D.C.; available from the U.S. Government Printing Office.
 - . Desai C., Siridwardane H. (1984), Constitutive Laws for Engineering Materials, with Emphasis on Geologic Materials, Prentice Hall.

- . Devries F., Dumontet H., Duvaut G. and Lene F. (1989), *Homogeneization and Damage for Composite Structures*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.27, 285-298.
- . Dodds R.H. (1987), *Numerical Techniques for Plasticity Computations in Finite Element Analysis*, Computer & Structures, Vol.26, No.5, pp. 767-779.
- . Doherty W.P., Wilson E.L., Taylor R.L. (1969), *Stress Analysis of Axisymmetric Solids Utilizing Higher Order Quadrilateral Finite Elements*, SESM Report No.69-3 (Dept. Civil Eng., Univ.California, Berkeley).
- . Dougil J.W. (1975), *Some Remarks on Path Independence in the Small Plasticity*, Q. Appl. Math. 32, pp.233-243.
- . Drysdale R.G., Hamid A.A. (1984), *Tension Failure Criteria for Plain Concrete Masonry*, Journal of Structural Engineering, Vol.110, No.2, February, PP. 228-244.
- . Duncan J.M., Chang C.Y., (1970), *Non Linear Analysis of Stress and Strain in Soils*, Journal of Soil Mechanics and Foundations Div. ASCE, Vol.96, No. SM5, Sept., pp.1629-1653.
- . Elices M. (1985), *Fractura del Hormigón en Régimen Elástico y Lineal*, Informes de la Construcción, Vol.37, No.372, Madrid.
- . Feenstra P.H., de Borst R. (1988), *Accuracy Analysis of Return Mapping Algorithm for Hill Criterion*, Proceedings of the Second International Conference on Computational Plasticity: Models, Software and Applications, Part I, pp. 377-388.
- . Fried I. (1974), *Finite Element Analysis of Incompressible Material by Residual Energy Balancing*, Int. Journal Solids Structs. 10, PP. 993-1002.
- . Fung Y.C. (1965), *Foundations of Solids Mechanics*, Prentice Hall.
- . Fuschi P., Peric D., Owen D.R.J. (1992), *Studies on Generalized Midpoint Integration in Rate-Independent Plasticity with Reference to Plane Stress*

- J₂-Flow Theory*, Computer & Structures, Vol.43, No.6, pp.1117-1133.
- . Ganesan T.P., Ramamurthy K. (1992) *Behavoir of Concrete Hollow-Block Masonry Prisms Under Axial Compression*, Journal of Structural Engineering, Vol.118, No.7, July, PP. 1751-1769.
 - . Green A., Naghdi P. (1964), *A General Theory for an Elastic-Plastic Continuum*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol.18, pp. 19 - 281.
 - . Green A., Naghdi P. (1965), *A Dynamical Theory of Interacting Continua*, Int. Jour. Eng. Science, pp.2-231.
 - . Hamid A.A., Chia-Calabria Catherine, Harris H.G. (1992), *Flexural Behavior of Joint Reinforced Block Masonry Walls*, American Concrete Institute, Structural Journal, V.89, No.1, January-February, PP.20-26.
 - . Han D.J., Chen W.F. (1986), *Strain-Space Plasticity Formulation for Hardening-Softening Materials with Elasto-Plastic Coupling*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 22, No. 8, pp. 935-949.
 - . Hill R. (1963), *Elastic Properties of Reinforced Soils; some Theoretical Principles*, J. Mech. Phys. Solids 11, pp.357-372.
 - . Hill R. (1967), *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, Ely House, London, PP. 317-340.
 - . Hill R. (1993), *A User-Friendly Theory of Orthotropic Plasticity in Sheet Metals*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 35, No. 1, PP. 19-25.
 - . Hinton y Owen (1980) *Finite Elements in Plasticity. Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea U.K..
 - . Hughes T.J.R., Taylor R.L., Kanoknukulchai W. (1977), *A Simple and Efficient Finite Element Element for Plate Bending*, Int. J. Numer. Meths. Eng. 11 , PP.1529-1543.

- . Hughes T.J.R., Liu W.K. Brooks A. (1979), *Review of Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow by the Penalty Function Formulation*, J. Comp. Phys. 30, 1-60.
- . Hughes T.J.R. (1980), *Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Non-Linear Media*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 15, PP. 1413-1418.
- . Hughes T.J.R. (1987), *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall.
- . Hull D. (1992), *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge Solid State Science Series.
- . Idelsohn I., Laschet G. (1982), Nyssen C., *Computer Methods in Mechanics and Engineering*, Vol.30, pp.133-149.
- . Jayatilaka A. (1979), *Fracture of Engineering Brittle Material*, Applied Science Publishers, LTD, England.
- . Ju J.W. (1989), *On Energy-Based Coupled Elasto-Plastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects*, International Journal of Solids and Structures, Vol.25, No.7, pp. 803-833.
- . Jurina L., Maier G. (1977), *Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete*, Discussion [5] ASCE Journal of the Engineering Mechanics.
- . Kachanov L.M. (1958), *Time of the Rupture Process under Creep Conditions*, IVZ Akad Nauk, S.S.R., Otd Tech Nauk, No.8, pp. 26-31.
- . Kent T. and Menon M.P. (1989), *Higher-Order Theories for Composite and Sandwich Cylindrical Shells with C^0 Finite Element*, Computer & Structures, Vol.33, No.5, pp.1191-1204.
- . Khalaf F.M., Hendry A.W., Fairbairn D.R. (1992), *Elastic Modulus and*

- Strength of Hollow Concrete Block Masonry with Reference to the Effect of Lateral Ties*, Magazine of Concrete Research, 44, No.160, September, PP. 185-194.
- . Kotsovos M.D. and Newman J.B. (1978), *Generalized Stress-Strain Relations for Concrete*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.104, No. EM4, pp.845-856.
 - . Kojic M. (1992), *An Implicit Procedure for Stress Integration of A General Anisotropic Von Mises Material*, Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Proceedings of the third International Conference, Barcelona, España, Pineridge Press, pp.263-269.
 - . Kupfer H., Hildsford H., Rusch H. (1969), *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*, Journal of the ACI , Vol.66, No.8.
 - . Kupfer H.B., Gerstle K.H. (1973), *Behaviour of Concrete under Biaxial Stress*, Journal Engineering Mechanics Division ASCE , Vol.99, pp.852-866.
 - . Ladeveze P. (1986), *Sur la Mécanique de l'Endommagement des Composites*, Comptes rendus des 5ème JOURNÉES Nationales sur les Composites, JNC 5, Paris 9-11, pp.667-683.
 - . Lemaitre J. (1971) *Evaluation of Dissipation and Damage in Metals*. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. pp 240,323.
 - . Lemaitre J., Chaboche J.L. (1978), *Aspects Phenomenologiques de la rupture par endommagement*, J. Mec. Appl. 2, 317-365.
 - . Lemaitre J. (1985), *A Continuous Damage Mechanic Model for Ductile Fracture*, J. Engng. Mater. Technol, 107, pp.83-89.
 - . Leonhardt F. and Walther R. (1965), *The Stuttgart Shear Tests, 1961"*, Translation No. 111, C&A Londres, Traducción de los artículos aparecidos en *Betton und-Stahlbettonbau*, Vol.65, No.12, 1961, Vol.57, No.2, 3, 6, 7 y 8, 1962.

- . Li Q., Ting T.C.T. (1989), *Line Inclusions in Anisotropic Elastic Solids*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 56, September, PP. 556-563.
- . Liberatore D., Braga F., Mancinelli E., Mazzolani S. (1992), *Comparison of Different Material Models in Simulating Masonry Behaviour under Horizontal Loads*, Proceedings of the Tenth World Conference on Earthquake Engineering, Madrid, Madrid, Spain. PP.4575-4579.
- . Liu T.C., Nilson A.H., Slate F.O. (1972), *Biaxial Stress-Strain Relations for Concrete*, Journal of the Structural Div. ASCE, Vol.98, No.ST5, May, pp.1025-1034.
- . Lofti H.R., Shing P.B. (1991), *An Appraisal of Smeared Crack Models for Masonry Shear Wall Analysis*, Computers & Structures, Vol.41, No.3, PP. 413-425.
- . Loret B, Hammoum F, Dafalias Y.F. (1992), *A Note on the Accuracy of Stress-point algorithms for Anisotropic Elastic-plastic Solids*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 98, PP.399-409.
- . Lubliner, J. (1972), *On the Thermodynamics Foundations of Non-Linear Solid Mechanics*, International Journal Non-Linear Mechanics, Vol.7, pp. 237-254.
- . Lubliner J. (1984), *A Maximum-Dissipation Principle in Generalized Plasticity*, Acta Mechanica 52, by Springer Verlag, pp. 225-237.
- . Lubliner J. (1985), *Thermomechanics of Deformable Bodies*, Mc. Millan Publishing, U.S.A.
- . Lubliner J. (1986), *Normality Rules in Large Deformation Plasticity*, Mechanics of Materials 5, North Holland, pp. 29-34.
- . Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E. (1989), *A Plastic-Damage Model for Concrete*, International Journal of Solids and Structures, Vol.25, No.3, 1989, 299-326.

-
- . Lubliner J. (1990), *Plasticity Theory*, Mc. Millan Publishing, U.S.A., New York, 1990.
 - *. Malkus D.S. (1975), *Finite Element Analysis of Incompressible Solids*, Ph.D. Thesis, Boston Univ., Boston.
 - . Malkus D.S. (1976a), *A Finite Element Displacement Model Valid for any Value of Compressibility*, Int. Journal Solids and Structures, 12, pp.731-738.
 - . Malkus D.S.(1976b), Kearsley, *Application of the Finite Element Method to Problems in Rheology* (preprint).
 - . Malkus D.S., Hughes T.J.R.(1978), *Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration techniques : A Unification of Concepts*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15, No.1, 63-81.
 - . Malvern L.E.(1969), *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium*, Prentice Hall, USA.
 - . Mander J.B., Priestly M.J.N., Park R. (1984), *Seismic Design of Bridge Piers*, Research Report 84-2, Department of Civil Engineering, Univ. Canterbury.
 - . McNary W.S., Abrams D.P. (1988), *Mechanics of Masonry in Compression*, Journal of Structural Engineering, Vol.111, No.4, PP. 857-869.
 - . Mitchell G.P., Owen D.R.J. (1988), *Numerical Solutions for Elasto-Plastic Problems*, Eng. Comput., Vol 5, pp. 274-284.
 - . Naraine K., Sinha S. (1991), *Model for Cyclic Compressive Behavior of Brick Masonry*, ACI Structural Journal V.88,No.5, September-October, PP. 603-609.
 - . Nagtegaal J.C., Parks D.M., Rice J.C. (1974), *On Numerical Accurate Finite*

Element Solutions in Fully Plastic Range, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol.4, No.2, Sept, 153-177.

- . Nayak G.C., Zienkiewicz O. C. (1972), *Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization of Various Constitutive Relations Including Strain Softening*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.5, pp.113-135.
- . Naylor D.J. (1974), *Stresses in Nearly Incompressible Materials by Finite Elements with Application to the Calculation of Excess Pore Pressures*, Int. J. Numer. Meths. Eng. 8 ,443-460.
- . Ngo D. and Scordelis A. (1967), *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams*, Vol. 64, No.3.
- . Oliver J. (1988), *A Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models*, Applied Numerical Methods.
- . Oliver J., Cervera M., Oller S., Lubliner J. (1990), *Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete*, Proceedings of the Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell Am Su, Austria, 4-6 April.
- . Oller S. (1988a) *Un Modelo de Daño Continuo para Materiales Friccionales*. Tesis doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona.
- . Oller S. (1988b), Oliver J., Lubliner J., Oñate E., *Un Modelo Constitutivo de Daño Plástico para Materiales Friccionales. Parte I: Variables Fundamentales, Funciones de Fluencia y Potencial*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 4, pp. 397-431.
- . Oller S., Oliver J., Lubliner J., Oñate E. (1988c), *Un Modelo Constitutivo de Daño Plástico para Materiales Friccionales. Parte II : Generalización para Procesos con Degradación de Rigidez. Ejemplos*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol.4, 4, pp.

433-461.

- . Oller S. (1989), *Nuevos Materiales Estructurales Cerámicos en Ingeniería*, Publicado por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España.
- . Oller S., Oñate E., Oliver J., Lubliner J. (1990a), *Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures Using a Plastic-Damage Model*, Engineering Fracture Mechanics, Vol.35, No.1/2/3, pp.219-231.
- . Oller S., Oliver J., Cervera M., Oñate E. (1990b), *Simulación de Procesos de Localización en Mecánica de Sólidos, mediante un Modelo Plástico*, Memorias del I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI 1990, Gran Canaria, 11-15 , pp. 423-431.
- . Oller S., Barbat A.H., Oñate E., Hanganu A. (1992), *A Damage Model for the Seismic Analysis of Building Structures*, Congreso Mundial de Ingeniería Antisísmica, Madrid.
- . Oller S., Oñate E., Miquel J. and Botello S. (1993a), *A finite Element Model for Analysis of Multiphase Composite Materials*, Ninth International Conferences on Composite Materials", Madrid.
- . Oller S., Botello S., Miquel J. and Oñate E. (1993b), *A Multiphase Constitutive Model for Composite Materials*, to be submitted to: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- . Oller S., Oñate E., Miquel J. (1993c), *Simulation of an Anisotropic Elastic-Plastic Behaviour of Materials by Means of Anisotropic Formulation*, 2nd U.S. National Congress on Computational Mechanics, Washington, U.S.A., August.
- . Oller S., Botello S., Canet J.M. and Oñate E. (1993d), *An Anisotropic Elasto-Plastic Model Based on an Anisotropic Formulation*, to be submitted to : International Journal of Solids and Structures.

- . Oñate, E., Oller, S., Oliver, J., Lubliner, J. (1988), *A Constitutive Model for Cracking of Concrete Based on the Incremental Theory of Plasticity*, Eng. Comput., Vol.5, pp. 309-319.
- . Oñate E., Oller S., Botello S. (1991), Miquel J., *Métodos Avanzados de Cálculo de Estructuras de Materiales Compuestos*, Publicación CIMNE No.11, Barcelona, España.
- . Oñate E. (1992), *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos . Análisis Estático Lineal*, Centro Internacional de Métodos Numéricos, Barcelona.
- . Ortiz M. and Popov E.P. (1982a), *Plain Concrete as Composite Material*, Mechanics of Materials, North Holland Publishing Company, No. 1, 139-150.
- . Ortiz M., Popov E.P. (1982b), *A Physical Model for the Inelasticity of Concrete*, Proc. Roy. Soc. Lond., A.383, 101-125.
- . Ortiz, M. (1985a), *A Constitutive Theory for the Inelastic Behaviour of Concrete*, Mechanics of Materials 4, pp. 67-93.
- . Ortiz, M., Popov, E.P. (1985b), *Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.21, 1561-1576.
- . Ortiz, M., Simo, J.C. (1986), *An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elasto-Plastic Constitutive Relations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.83, pp. 353-366.
- . Ortiz, M., Leroy, Y., Needleman, A. (1987), *A Finite Element Method for Localized Failure Analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 61, North Holland, pp.189-214.
- . Ottosen, N.S. (1986), *Thermodynamic Consequences of Strain Softening in Tension*, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.112, no.11, Nov., pp.1152-1164.

-
- . Page A.W. (1978), *Finite Element Model for Masonry*, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Vol.104, No.ST8, August, PP. 1267-1285.
 - . Page A.W. (1981), *The Biaxial compressive Strength of Brick Masonry*, Proc. Instit. Civ. Eng., Part 2, 73, 441-454.
 - . Park R., Pauley T. (1975), *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley and Sons, New York.
 - . Peric D., Dutko M., Owen D.R.J. (1992), *Yield Criterion Based on Superquadric Functional Representation: Computational Issues with Applications, Computational Plasticity. Fundamentals and Applications* (Proceedings of the Third International Conference 1992), Pineridge Press.
 - . Philips D.V. and Zienkiewicz O. (1976), *Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures*, Proc. Inst. Civ. Eng., Part 2, Vol.61, March, pp. 59-88.
 - . Pickett A.K., Rückert J., Ulrich D. and Hang E. (1989), *Material Damage Law Suitable for Crash Worthiness Investigations of Random and Directional Fibre Composite Materials*, XVIII Int. Finite Element Congress, Baden-Baden.
 - . Pietruszczak S., Niu X. (1992), *A Mathematical Description of Macroscopic Behaviour of Brick Masonry*, Int. J. Solids Structures, Vol.29, No.5, PP. 531-546.
 - . Pijaudier-Cabot, G., Bazant, Z.P., Tabbara, M. (1988), *Comparison of Various Models for Strain-Softening*, Eng. Comput., Vol.5, June, pp.141-150.
 - . Ramallo J.C., Kotsovos M., Danesi R., *Una Posible Explicación del Efecto del Tamaño en las Estructuras de Hormigón*, Memorias de las XXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tomo III, pp.383-394.
 - . Ramm, E. (1981), *Strategies for Tracing Non-Linear Responses near Limit*

- Points*, E. Stein and K.J. Bathe, Eds., Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer, New York, pp. 63-89.
- . Rilem Report (1989), *Fracture Mechanics of Concrete Structures. From Theory to Applications*, Ed. by L. Elfgren.
 - . Riks E. (1972), *The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability*, Journal of Applied Mechanics, 39, pp.1060-1066.
 - . Rots J.G., Nauta P., Kusters G. and Blaauwendraad J. (1985), *Smearred Crack Approach and Fracture Localization in Concrete*, Heron, Vol.30, Delft, Netherlands.
 - . Rots J.G., Blaauwendraad J. (1989), *Crack Models for Concrete: Discrete or Smearred? Fixed, Multi-Directional or Rotating?*, Heron, Vol.34, No.1.
 - . Rouvray A. and Haug E., *Failure of Brittle and Composite Materials by Numerical Methods* (1989), Reprint from Wierzbicki: Structural Failure, by John Willey & Sons, Inc.
 - . Rowe P.W. (1972), *Theoretical Meaning and Observed Values of Deformation Parameters for Soil*, Proc. Rascoe Memorial Symp. on Stress-Strain Behavior of Soils, Cambridge.
 - . Saenz L.P. (1964), *Equation for the Strain-Stress Curve of Concrete*, Discussion by Desayi and Krishnan, Journal of the Amer. Conc. Inst., 61, pp. 1229-1235.
 - . Sayir M. (1970), *Zur Fließbedingung der Plastizitätstheorie*, Ingenieur Archiv, PP. 414-432.
 - . Schellekens, J.C.J. (1992), *Computational Strategies for Composite Structures*, Tesis de doctorado, Universidad de Delft.
 - . Shing P.B., Noland J.L., Klamerus E., Spaeh H. (1988), *Inelastic Behavior of Concrete Masonry Shear Walls*, ASCE Journal of Structural Engineering,

- Vol.115, No.9, September, pp.2204-2225.
- . Simo, J.C., Taylor, R.L. (1985), *Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, North-Holland, 48, pp.101-118.
 - . Simo, J.C., Ju, J.W. (1987), *Strain and Stress-Based Continuum Damage Models - I Formulation*, International Journal for Solids and Structures", Vol.23, No.7, 821-840.
 - . Simo J. & T.J.R. Hughes (1988), *Elastoplasticity y Viscoplasticity. Computational Aspects.*
 - . Simo, J.C. (1989), *Strain Softening and Dissipation : A Unification of Approaches.*
 - . Simo J.C. (1992), *Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 99, pp.61-112.
 - . Sinha B.P., Pedreschi R.F. (1990), *Reinforced and Prestressed Brickwork*, Proc. 3° Inf. Seminary on Structural Masonry for the Developing Countries , PP. 175-191.
 - . Sinha, B.P., Gerstle, K.H., Tulin L.G. (1964), *Stress-Strain Relations for Concrete under Cyclic Loading*, Journal of the American Concrete Institute , Vol. 62, Mo. 2, pp.195-210.
 - . Sloan S.W., Booker J.R. (1992), *Integration of Tresca and Mohr-Coulomb Constitutive Relations in Plain Strain Elastoplasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.33, 163-196.
 - . Takeda T. (1993), *Yield and Flow Behavior of Initially Anisotropic Aluminum Tube Under Multiaxial Stresses*, Journal of Engineering Materials and Technology, January, Vol. 115, PP. 77-82.

- . Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S. (1959), *Theory of Plates and Shells*, 2nd Ed., Mac Graw-Hill, New York.
- . Trusdell C. and Toupin R. (1960), *The Classical Field Theories*, Ed. by S. Flugge - Handbuch der Physik III/I, Springer Verlag, Berlin.
- . Valanis K.C. (1985), *On the Uniqueness of Solution of the Initial Value problem in Softening Materials*, Journal of Applied Mechanics, Vol.52, pp.649-653.
- . Van Houte P. (1992), *Numerical Modelling of Material Deformation Processes. Research, Development and Applications, Cahpter 4 : Anisotropic Plasticity*, Springer Verlag, PP. 84-111.
- . Vinson and Sierakowski (1986), *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, MartinusNijhoff Publishers, Dordrecht.
- . Willam, K.J. (1984a), *Experimental and Computational Aspects of Concrete Fracture*", *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Peneridge Press, Swansea, U.K., pp.33-70.
- . Willam, K.J., Bicanic, N., Sture, S. (1984b), *Constitutive and Computational Aspects of Strain Softening and Localization in Solids*, Proceedings of the ASME-WAM'84 Symposium on "Constitutive Equations: Micro, Macro and Computational Aspects", New Orleans, Dec., pp.1-20.
- . Yeh J. (1989), *The Mechanics of Multitransverse Cracking in Composite Laminates*, Int. Jour. Solids and Structures, Vol.25, No.12, (1445-1455).
- . Yokel F.Y., Fattal S.George (1976), *Failure Hypothesis for Masonry Shear Walls*, Journal of the Structural Division, Proceeding of the American Society of the Civil Engineers, Vol.102,No.ST3, March , PP 515-532.
- . Zienkiewicz, O.C., Valliapan, S., King, I.P. (1969), *Elastoplastic Solutions of Engineering Problems. Initial Stress Finite Element Approach*,

International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.1, pp. 75-100.

- . Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M. (1971), *Reduced Integartion Technique in General analysis of Plates and Shells*, Int. Jour. Numer. Meths.Eng. 3, 275-290.
- . Zienkiewicz O.C., Godbole P.N. (1975), *Viscous Incompressible Flow with Special Reference to Non-Newtonian (Plastic) Fluids*, *Fin.Elem. Meths. in Fluids 1* , Wiley, London.
- . Zienkiewicz O.C. (1980), *El Método de los Elementos Finitos*, Ed. Reverté, Barcelona. España.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

APENDICE A

DEFORMACIONES

A.1. INTRODUCCION

Cuando un cuerpo es sometido a un sistema de fuerzas externas experimenta una deformación respecto a su configuración original. Hay distintas maneras de definir las deformaciones.

En este apéndice se dan algunas definiciones básicas de la cinemática del continuo deformable y se trata luego el caso de pequeñas deformaciones y rotaciones. Para ese caso se definen los invariantes que se utilizan a lo largo de la Tesis.

A.2. CINEMATICA DEL CONTINUO DEFORMABLE [Malvern 1969]

A.2.1. DEFINICIONES BASICAS

El movimiento de un continuo se puede definir de distintas formas:

- a) *Descripción material*: las variables independientes son la partícula X y el tiempo t . Entonces el movimiento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X,t)$ da simbólicamente la posición \mathbf{x} ocupada por la partícula X en el tiempo t .
- b) *Descripción referencial*: Las variables independientes son la posición X de la partícula en una configuración arbitraria de referencia y el tiempo t . Cuando se toma como configuración de referencia la correspondiente a $t=0$, la descripción referencial se denomina *descripción Lagrangeana* (o algunas veces *descripción material*). El movimiento se describe entonces como $\mathbf{x}=\mathbf{x}(X,t)$ que da simbólicamente la posición \mathbf{x} ocupada en el tiempo t por la partícula que ocupaba la posición X en la configuración de referencia.
- En coordenadas cartesianas:
 X_1, X_2 y X_3 se denominan *coordenadas materiales* de la partícula o coordenadas de su posición en la configuración de referencia.
 x_1, x_2 y x_3 son las *coordenadas espaciales* que dan la posición en el tiempo t .
- c) *Descripción espacial*: pone atención en una dada región del espacio. Las variables independientes son la posición actual \mathbf{x} y el tiempo actual t . Comúnmente se la denomina *descripción Euleriana*.
- d) *Descripción relativa*: Expresa la posición ξ ocupada en el tiempo τ por la partícula que ocupa la posición actual \mathbf{x} en el tiempo t , en términos de las variables independientes \mathbf{x} y τ : $\xi=\xi_i(\mathbf{x},\tau)$. Es un caso particular de descripción referencial en la que se reemplaza la posición X en $t=0$ por la posición \mathbf{x} en t .

A.2.2. MEDIDAS DE DEFORMACION

Supongamos dos puntos P y Q y sus trayectorias Pp y Qq. Los vectores de velocidad v en P y $v+dv$ en Q son tangentes a las trayectorias. Ver Fig.A.1.

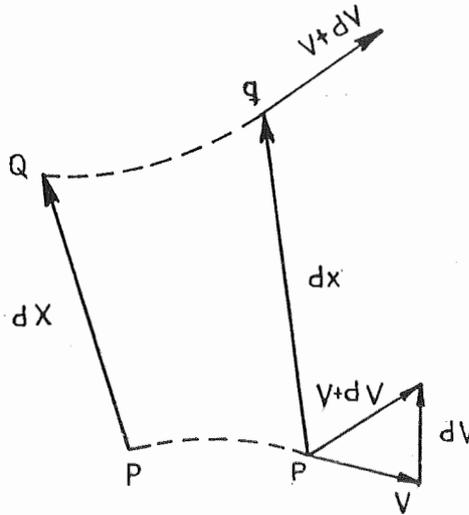


Fig.A.1 Velocidad relativa de una partícula Q en q respecto de una partucula P en p.

La velocidad de una partícula instantáneamente en q respecto de una partícula instantáneamente en p es :

$$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} dx_m = L_{km} dx_m, \tag{A.1}$$

donde:

$$L_{km} = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \tag{A.2}$$

L_{km} se denomina *gradiente espacial de velocidad* que puede descomponerse en un tensor simétrico D_{km} (*tensor velocidad de deformación*) y otro antimétrico Ω_{km} (*tensor de spin*), tales que:

$$L_{km} = D_{km} + \Omega_{km}, \quad (A.3)$$

$$D_{km} = (1/2)(L_{km} + L_{mk}) \quad (A.4)$$

y

$$\Omega_{km} = (1/2)(L_{km} - L_{mk}) \quad (A.5)$$

Tomando como referencia la configuración indeformada, se puede escribir:

$$dx_k = (\partial x_k / \partial X_m) dX_m = F_{km} dX_m \quad (A.6)$$

Donde F_{km} es el *gradiente de deformación*

En una formulación Lagrangeana se definen además los siguientes tensores de deformación:

$$ds^2 - dS^2 = 2 dX_k E_{km} dX_m \quad (A.7)$$

$$(ds)^2 = dX_k C_{km} dX_m \quad (A.8)$$

donde C_{km} es el *tensor de deformaciones de Green*

Y en una formulación Euleriana:

$$ds^2 - dS^2 = 2 dx_k E_{km}^* dx_m \quad (A.9)$$

$$(dS)^2 = dx_k B_{km}^{-1} dx_m \quad (A.10)$$

Donde B_{km}^{-1} es el *tensor de deformaciones de Cauchy*

A.3. PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y ROTACIONES

[Malvern 1969, Desai 1984, Chen 1982, Oller 1988]

En este punto se trata el caso de pequeñas deformaciones o deformaciones infinitesimales.

A.3.1. DEFINICION DEL TENSOR DE PEQUEÑAS DEFORMACIONES

Si se toma el mismo sistema de referencia para las coordenadas cartesianas rectangulares X_i y x_i se tiene :

$$x_i = X_i + u_i, \quad (\text{A.11})$$

y resultan :

$$E_{ij} = (1/2) \left[\partial u_i / \partial X_j + \partial u_j / \partial X_i + (\partial u_k / \partial X_i)(\partial u_k / \partial X_j) \right] \quad (\text{A.12})$$

En el caso de pequeñas deformaciones se pueden despreciar los productos de derivadas y queda el tensor de pequeñas deformaciones referido al sistema material:

$$\epsilon_{ij} = (1/2) \left[\partial u_i / \partial X_j + \partial u_j / \partial X_i \right] = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.13})$$

Donde ϵ_{ij} es el *tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy* cuyas componentes se definen de la siguiente manera:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \epsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

A.3.2. DERIVADA RESPECTO AL TIEMPO DEL TENSOR DE DEFORMACIONES

Muchas veces se confunde el tensor velocidad de deformación D_{km} con la derivada respecto al tiempo del tensor de deformaciones ϵ_{km} . Sin embargo :

$$(d\epsilon_{km}/dt) = (1/2)(\partial v_k / \partial X_m + \partial v_m / \partial X_k) \quad (\text{A.15})$$

y

$$D_{km} = (1/2)(\partial v_k / \partial x_m + \partial v_m / \partial x_k) \quad (\text{A.16})$$

El primero de estos tensores contiene derivadas respecto a las coordenadas materiales y el segundo derivadas respecto a las coordenadas espaciales. Con la hipótesis de pequeños desplazamientos ambos tensores coinciden.

A.3.3. DIRECCIONES PRINCIPALES DE DEFORMACION INVARIANTES DEL TENSOR DE DEFORMACION.

Las direcciones para las cuales las deformaciones son máximas o *direcciones principales de deformación*, pueden determinarse mediante la siguiente ecuación:

$$(\epsilon_{ij} - \epsilon^* \delta_{ij}) n_j = 0, \quad (\text{A.17})$$

que conduce a:

$$\det(\epsilon_{ij} - \epsilon^* \delta_{ij}) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Donde δ_{ij} es el delta de Kronecker [Malvern 1969]

Desarrollando la ec.(A.18) se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$(\epsilon^*)^3 - I_1' (\epsilon^*)^2 + I_2' \epsilon^* - I_3' = 0 \quad (\text{A.19})$$

Donde I_1' , I_2' e I_3' son los *invariantes del tensor de deformaciones* y se calculan como:

$$\begin{cases} I_1' = \epsilon_{ii} = 3 \epsilon_{\text{oct}} = \epsilon_V \\ I_2' = \epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{11} \epsilon_{33} + \epsilon_{22} \epsilon_{33} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{23}^2 \\ I_3' = \det(\epsilon_{ij}) \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Donde ϵ_V se denomina *deformación volumétrica*

Reemplazando los valores de ϵ^* obtenidos de la ecuación (A.19) en la ec.(A.17) se obtienen las direcciones de las normales \mathbf{n} a cada uno de los planos en que las deformaciones normales son máximas y no tienen ninguna componente según esos planos.

A.3.4. COMPONENTES ESFERICA Y DESVIADORA DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

El tensor de deformaciones puede ser descompuesto en dos componentes :

$$\epsilon_{ij} = (1/3) \epsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij} \quad (A.21)$$

La primera componente se denomina *tensor esférico o volumétrico* y la segunda *tensor desviador de deformaciones*

Los valores principales del tensor desviador de deformaciones e_{ij} se obtienen de la siguiente ecuación característica :

$$(e^*)^3 - J'_1 (e^*)^2 + J'_2 e^* - J'_3 = 0 \quad (A.22)$$

Donde J'_1 , J'_2 y J'_3 son los invariantes del tensor desviador de deformaciones e_{ij} y se calculan como:

$$\begin{cases} J'_1 = 0 \\ J'_2 = (1/2) e_{ij} e_{ij} \\ J'_3 = (1/3) e_{ik} e_{kj} e_{ji} \end{cases} \quad (A.23)$$

APENDICE B

TENSIONES

B.1. VECTOR TENSION

El *vector de tensión* $\vec{\rho}_1$ en una superficie S en un punto Q se define como:

$$\vec{\rho}_1 = \frac{d\vec{P}}{dS} \quad (\text{B.1})$$

Donde \vec{P} es el vector de fuerza actuante. Ver Fig. B.1

El vector $\vec{\rho}_1$ puede descomponerse en dos vectores componentes: uno según la dirección de la normal $\vec{\sigma}_{11}$ y otro coincidente con el plano S $\vec{\sigma}_{12}$. Ver Fig. B.1.

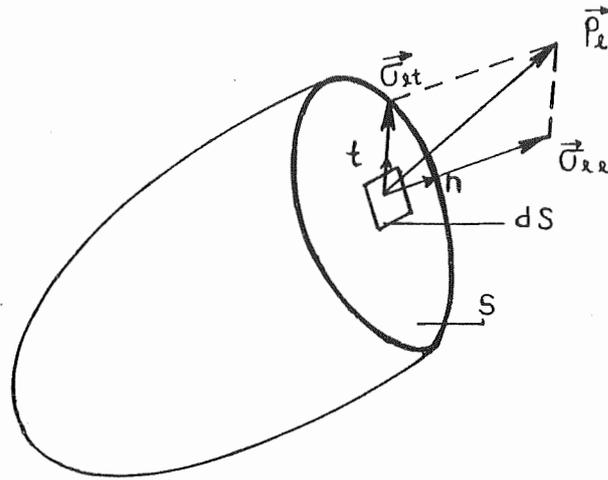


Fig.B.1 Vector tensión en una superficie S

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_t \quad (\text{B.2})$$

$$\rho_{1_i} = \|\sigma_n\| n_i + \|\sigma_t\| t_i \quad (\text{B.3})$$

Donde:

$\|\sigma_n\|$: Módulo de la tensión normal

$\|\sigma_t\|$: Módulo de la tensión tangencial

n_i : Versor normal al plano S

t_i : Versor tangente al plano S

B.2. TENSOR DE TENSIONES

El estado de tensión en un punto puede ser representado por los vectores tensión actuantes en tres planos ortogonales que pasen por ese punto. En cada plano, cada vector tensión puede ser descompuesto en tres componentes : una según la normal al plano y otras dos componentes tangentes según las direcciones de las normales a los otros dos planos. Ver Fig.B.2.

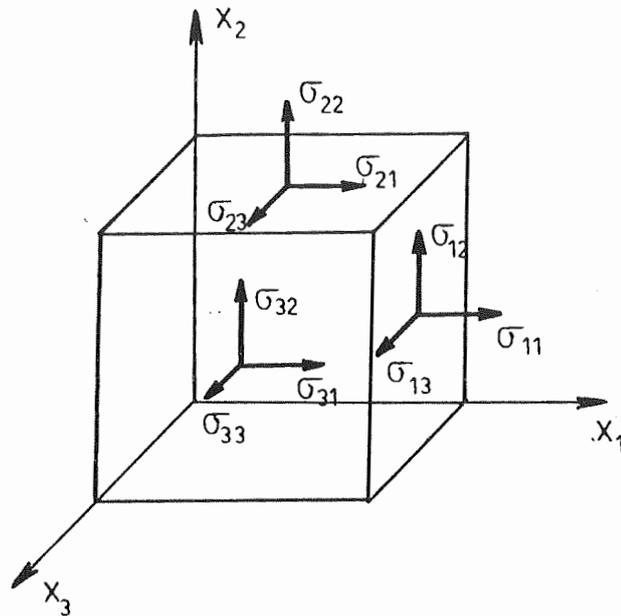


Fig.B.2 Estado de tensiones en un punto

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\rho}_1 = \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \} \\ \vec{\rho}_2 = \{ \sigma_{21} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{23} \} \\ \vec{\rho}_3 = \{ \sigma_{31} \quad \sigma_{32} \quad \sigma_{33} \} \end{array} \right. \quad (B.4)$$

Resultan así nueve componentes de tensión que dan lugar al *tensor de tensiones* σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

El tensor σ_{ij} se denomina *tensor de tensiones de Cauchy*, está referido a la configuración deformada y es simétrico.

Para algunas aplicaciones resulta más cómodo trabajar con la parte simétrica del tensor de tensiones y se define el siguiente vector que representa el estado tensional:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

B.3. VECTOR DE TENSION EN UN PLANO CUALQUIERA TETRAEDRO DE CAUCHY

Sustituyendo las componentes de tensión en la ecuación de equilibrio de un prisma de Fig. B.3, se obtiene :

$$\rho_{ii} = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{B.7})$$

Donde los n_j son los cosenos directores de la normal al plano.

Si x_i y x'_i son dos sistemas cartesianos relacionados por la transformación de coordenadas:

$$x'_i = l_{ij} x_j, \quad (\text{B.8})$$

donde $l_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, entonces los tensores de tensión en ambos sistemas de coordenadas están relacionados por la siguiente ecuación :

$$\sigma'_{ij} = l_{im} l_{jn} \sigma_{mn} \quad (\text{B.9})$$

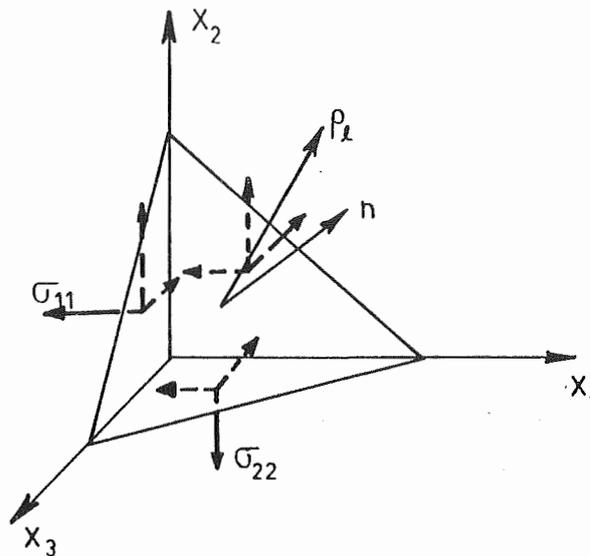


Fig.B.3 Tetraedro de Cauchy

B.4. DIRECCIONES PRINCIPALES DE TENSION INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES

[Malvern 1969, Desai 1984, Chen 1982, Oller 1988]

Para un punto de un sólido existen infinitos vectores de tensión asociados a los infinitos planos que pasan por ese punto. Interesan, en particular, aquellos planos para los cuales la tensión normal es máxima. Esos planos se denominan *planos principales* y las direcciones de sus normales *direcciones principales*. El vector tensión es normal a dichos planos o sea que las componentes tangenciales son nulas. Se puede plantear entonces:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma^* n_i \quad (\text{B.10})$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma^* \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (\text{B.11})$$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial debe ser :

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma^* \delta_{ij}) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Esto conduce a una ecuación característica de la forma:

$$(\sigma^*)^3 - I_1 (\sigma^*)^2 + I_2 \sigma^* - I_3 = 0 \quad (\text{B.13})$$

Se puede probar que esta ecuación tiene tres raíces reales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Reemplazando esos valores en la ecuación (B.11), se obtienen las direcciones de las normales a los tres planos principales.

I_1 , I_2 e I_3 se denominan *invariantes de tensión* y se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr}(\sigma_{ij}) \\ I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \\ I_3 = \det(\sigma_{ij}) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

B.5. DESCOMPOSICION DEL TENSOR DE TENSIONES

El tensor de tensiones σ_{ij} puede ser expresado como la suma de un *tensor hidrostático o esférico* $\sigma_m \delta_{ij}$ y de un *tensor desviador de tensiones* S_{ij} .

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij} \quad (\text{B.15})$$

De la misma forma que antes se puede encontrar la ecuación característica del tensor desviador de tensiones :

$$(S^*)^3 - J_1 (S^*)^2 + J_2 S^* - J_3 = 0 \quad (\text{B.16})$$

Donde J_1 , J_2 y J_3 son *invariantes* del tensor desviador de tensión y se calculan del siguiente modo:

$$\begin{cases} J_1 = S_{ii} = 0 \\ J_2 = (1/2) S_{ij} S_{ij} \\ J_3 = (1/3) S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

B.6. INTERPRETACION DE LOS INVARIANTES DE TENSION

Existen distintas interpretaciones físicas y geométricas de los invariantes de tensión.

B.6.1. TENSIONES OCTAEDRICAS

Se denomina *plano octaédrico* a un plano que forma ángulos idénticos con las tres direcciones principales de tensión. Se puede demostrar que la tensión normal en ese plano, que se denomina *tensión normal octaédrica*, vale:

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m = I_1/3 \quad (\text{B.18})$$

y la tensión tangencial que se denomina *tensión de corte octaédrica*:

$$\tau_{\text{oct}} = (2/3 J_2)^{1/2} \quad (\text{B.19})$$

La dirección de la tensión de corte octaédrica esta dada por el *ángulo de similitud de Lode* θ definido por :

$$\sin 3\theta = \sqrt{2} J_3 / \tau_{\text{oct}}^3 \quad (\text{B.20})$$

Ver Fig.B.4.

B.6.2. TENSIONES MEDIAS

Si se considera un elemento esférico infinitesimal de volumen, el valor medio de las tensiones normales sobre la superficie de la esfera vale :

$$\sigma_m = I_1/3 \quad (B.21)$$

y el valor medio de las tensiones tangenciales :

$$\tau_m = \sqrt{2/5 J_2} \quad (B.22)$$

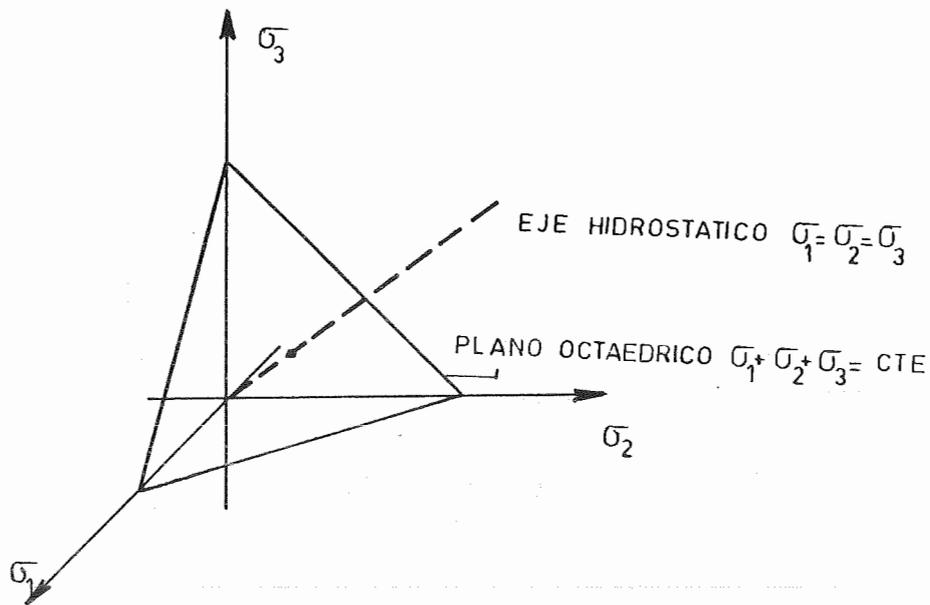


Fig.B.4 Espacio de tensiones de High Westergard

B.6.3. INTERPRETACION GEOMETRICA

La representación geométrica más simple del estado de tensiones en un punto consiste en considerar las tres tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 como coordenadas de un punto en un espacio tridimensional de tensiones que se denomina *espacio de tensiones de High - Westergard*. Ver Fig. B.4 .

Se denomina *eje hidrostático* al eje que forma iguales ángulos con los ejes 1, 2 y 3 cuya ecuación es :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (\text{B.23})$$

Cualquier punto sobre esta diagonal corresponde a un estado de tensión hidrostática puro.

Los planos perpendiculares a este eje se denominan *planos desviadores* o *planos octaédricos* y están definidos por la ecuación :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{constante} \quad (\text{B.24})$$

El plano desviador que pasa por el origen ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) se denomina *plano* π . Los puntos de tensión sobre el plano π corresponden a estados de corte puro.

El vector \vec{OP} que representa el estado de tensión de un punto puede ser descompuesto en dos componentes : una \vec{OQ} según el eje hidrostático y una \vec{QP} perpendicular al mismo contenida en un plano desviador. Ver Fig. B.5

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} \quad (\text{B.25})$$

Se puede demostrar que :

$$\|\vec{OQ}\| = \xi = I_1/\sqrt{3} = \sqrt{3} \sigma_{\text{oct}} = \sqrt{3} \sigma_m \quad (\text{B.26})$$

$$\|\vec{QP}\| = \rho = \sqrt{2 I_2} \quad (\text{B.27})$$

\vec{OQ} representa la parte hidrostática del estado de tensión y \vec{QP} la parte desviadora de dicho estado. Es por ello, que los planos perpendiculares al eje hidrostático se denominan *planos desviadores*.

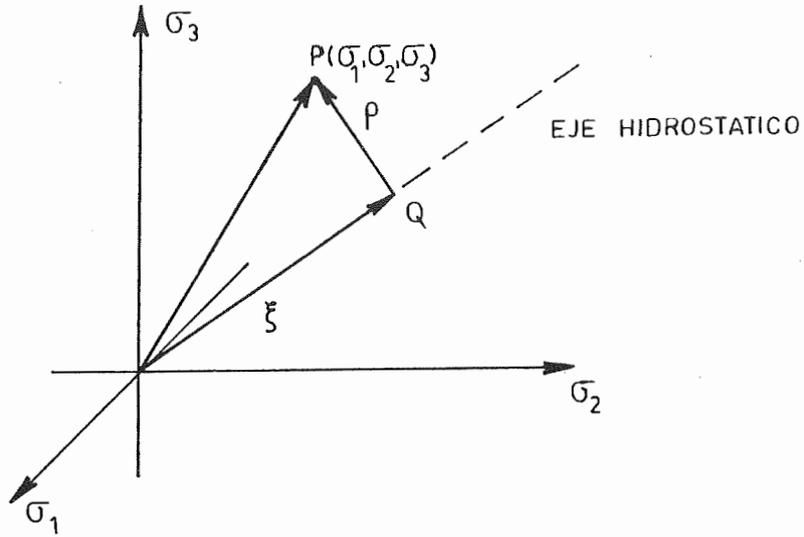


Fig.B.5 Descomposición de las tensiones en el espacio de tensiones

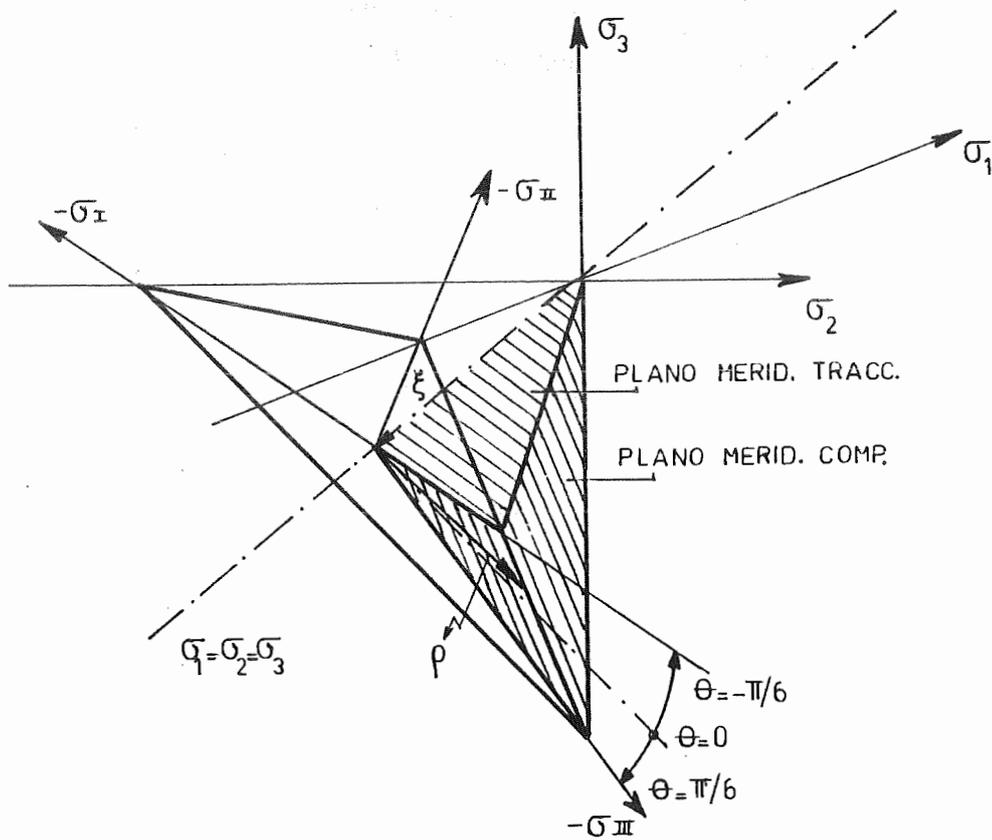


Fig.B.6. Sistema de Cordenadas Cilíndricas de High Westergard

En la Fig.B.6 puede observarse que los invariantes I_1 , J_2 y J_3 permiten ubicar un punto de tensión en el espacio de High - Westergard:

- El primer invariante fija la posición del plano octaédrico (ξ).
- El segundo invariante fija la distancia al eje hidrostático (ρ).
- El tercer invariante permite definir la tercera coordenada del *sistema cilíndrico de High - Westergard* y suele representarse mediante el ángulo de similaridad de Lode θ . Ver Fig. B.6.

En la Fig.B.6 se indican los denominados *planos meridianos de tracción y compresión* que son planos que contienen al eje hidrostático y para los cuales $\theta = -\pi/6$ y $\theta = \pi/6$ respectivamente.

B.7. EVALUACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES

La evaluación de las raíces de las ecuaciones (B.13) ó (B.16) para la determinación de las tensiones principales no es simple. La solución se logra observando la similitud con una ecuación trigonométrica en $\text{sen}\theta$ que da los siguientes resultados para las tensiones principales:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{Bmatrix} + 2 \sqrt{J_2/3} \begin{Bmatrix} \text{sen } (\theta+2\pi/3) \\ \text{sen } \theta \\ \text{sen } (\theta+4\pi/3) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

1. El primer grupo de personas que se benefició de la reforma fue el grupo de personas que se benefició de la reforma de la Ley de Ingresos para el ejercicio 2000.

2. El segundo grupo de personas que se benefició de la reforma fue el grupo de personas que se benefició de la reforma de la Ley de Ingresos para el ejercicio 2001.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

APENDICE C

BASES TERMODINAMICAS

C.1. INTRODUCCION

Las leyes básicas de la Termodinámica proveen un fundamento físico-matemático al modelo que se presenta en esta Tesis.

C.2. PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

La *Primera Ley de la Termodinámica* relaciona el trabajo realizado sobre un sistema y el calor entregado al mismo con el cambio de energía del sistema. Postula el balance de energía, exigiendo la conservación de la energía total del sistema. En otras palabras, relaciona la *potencia mecánica introducida* al sistema P_{in} y la potencia no mecánica o *cantidad de calor propio* Q_{prop} existente en el sólido con el cambio de energía global \dot{W} que éste experimenta.

Este principio parte de la hipótesis de que existen:

- a) Una *cantidad de calor propio* Q_{prop} y
 - b) Una *cantidad de energía global* W resultante de la variable de estado w denominada *densidad de energía interna*,
- tales que:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V m w dV \right] = \frac{dW}{dt} = \dot{W} = Q_{\text{prop}} + P_{\text{in}} \quad (\text{C.1})$$

Donde:

m : masa volumétrica o densidad aparente

t : tiempo

$$m = M/V \quad (\text{C.2})$$

M : masa del sólido

V : volumen del sólido

La *potencia mecánica introducida* P_{in} vale:

$$P_{\text{in}} = \oint_S t_i v_i dS + \int_S m b_i v_i dV \quad (\text{C.3})$$

Donde:

t_i : Fuerzas de superficie

b_i : Fuerzas de volumen

S : Superficie que envuelve al sólido

v_i : Campo de velocidades

Si $t = \text{cte}$ o t es mucho mayor que el período fundamental del cuerpo, se tiene un problema cuasiestático donde el campo de velocidades se transforma en el *incremento temporal del campo de desplazamientos* y la potencia introducida en *incremento temporal del trabajo introducido*.

Las fuerzas superficiales pueden calcularse como:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{C.4})$$

Donde σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy y n_j el vector normal a la superficie.

Por el teorema de la divergencia se puede transformar la integral de superficie de la ec.(C.3) en una integral de volumen como sigue:

$$P_{in} = \int_V \left[v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + m b_i \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (\text{C.5})$$

Donde el término que está entre paréntesis puede calcularse mediante la *ecuación de movimiento de Cauchy* como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + m b_i = m \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (\text{C.6})$$

Para aceleración nula, $\partial v_i / \partial t = 0$, la ecuación anterior se convierte en la *ecuación de equilibrio de Cauchy*:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (\text{C.7})$$

Donde $f_i = m b_i$ es la fuerza por unidad de volumen.

Sustituyendo la ec.(C.6) en la ec.(C.5), se obtiene:

$$P_{in} = \int_V \left[v_i m \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m v_i v_i \right) \right] dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (\text{C.8})$$

$$P_{in} = \dot{K} + P_d \quad (C.9)$$

Donde \dot{K} es la *potencia cinética* y P_d la *potencia deformativa*¹ dada por:

$$P_d = P_{in} - \dot{K} = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (C.10)$$

La *cantidad de calor propio* Q_{prop} o *potencia térmica* está compuesta por el calor existente en forma distribuida en el interior del sólido más el que se introduce por las fronteras y puede expresarse como:

$$Q_{prop} = \int_V m r dV - \oint_S q_i n_i dS \quad (C.11)$$

Donde:

r : fuente distribuida de calor por unidad de masa denominada *radiación*

q_i : campo vectorial del flujo de calor por conducción.

El signo menos en el segundo término de la ec.(C.11) indica que el calor *es recibido* por el sólido.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, la ecuación de *conservación de la energía* para problemas cuasiestáticos puede expresarse como:

$$\int_V m \dot{w} dV = \int_V m r dV - \oint_S q_i n_i dS + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (C.12)$$

Transformando la integral de superficie en integral de volumen mediante el teorema de Green, resulta la siguiente forma *local Euleriana* (ver Apéndice A):

¹ Nota : Para problemas cuasiestáticos $K=0$ y la potencia introducida es igual a la potencia deformativa

$$m \dot{w} = m r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{C.13})$$

Donde además:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} L_{ij} = \sigma_{ij} D_{ij} + \underbrace{\sigma_{ij} \Omega_{ij}}_{\equiv 0} \quad (\text{C.14})$$

Donde :

L_{ij} es el *gradiente espacial de velocidad* que puede descomponerse en un tensor simétrico D_{ij} ² o *velocidad de deformación* y en un tensor antimétrico Ω_{ij} o *tensor de spin*. El producto de Ω_{ij} por el tensor simétrico σ_{ij} es idénticamente nulo.

La ec.(C.13) resulta entonces:

$$m \dot{w} = m r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} D_{ij} \quad (\text{C.15})$$

C.3. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

El *segundo principio de la termodinámica* postula el balance de la *entropía*. En termodinámica se define la *entropía* como una función de estado relacionada con la transfrenecia de calor. Para un proceso reversible, se define la *entropía específica o entropía por unidad de masa*, η , como:

$$d\eta = \frac{1}{\theta} dq \quad \Rightarrow \quad \oint \dot{\eta} dt = \oint \left(\frac{\dot{q}}{\theta} dt \right)_{\text{rev}} \quad (\text{C.16})$$

Donde q es flujo de calor por conducción y θ un campo escalar que representa una medida de la temperatura local absoluta. La *entropía total* está dada por:

²Para pequeñas deformaciones D_{ij} es igual a la derivada temporal del tensor de deformaciones ϵ_{ij}

$$\mathcal{F} = \int_V m \eta \, dV \quad (\text{C.17})$$

Una de las formas de expresar el *segundo principio de la termodinámica* es a través de la *desigualdad de Clasius-Duhem*. El mismo establece el cambio de la producción interna de entropía interna debe ser mayor o igual que el cambio de *entropía introducida* $\dot{\mathcal{F}}_{in}$. Esto es:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F} \geq \dot{\mathcal{F}}_{in} \quad (\text{C.18})$$

La entropía introducida al sistema se calcula como:

$$\dot{\mathcal{F}}_{in} = \int_V \frac{m\dot{r}}{\theta} \, dV - \oint_S \frac{q_i}{\theta} n_i \, dS \quad (\text{C.17})$$

De modo que la ec.(C.18) puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \int_V m \eta \, dV \geq \int_V \frac{m\dot{r}}{\theta} \, dV - \oint_S \frac{q_i}{\theta} n_i \, dS \quad (\text{C.18})$$

Esta última integral es la forma integral de la *desigualdad de Clasius - Duhem*. Aplicando el teorema de Green se puede obtener la siguiente forma local:

$$\dot{\eta} \geq \frac{\dot{r}}{\theta} - \frac{1}{m\theta} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{1}{m\theta^2} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (\text{C.20})$$

ó

$$\Xi = \dot{\eta} - \frac{\dot{r}}{\theta} + \frac{1}{m\theta} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{m\theta^2} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (\text{C.21})$$

Donde Ξ es la *disipación local por unidad de masa o producción interna de entropía por unidad de masa*.

Combinando la ec.(C.21) con la forma Euleriana del primer principio de la termodinámica, resulta:

$$\dot{E} = \theta \dot{\eta} - \dot{w} + \frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{m} - \frac{1}{m\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (C.22)$$

Para procesos *termo-mecánicos desacoplados*, donde el problema térmico está desacoplado del problema mecánico, se puede exigir el cumplimiento independiente de las siguientes desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \dot{\eta} - \dot{w} + \frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{m} \geq 0 \\ q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \leq 0 \end{array} \right. \quad (C.23)$$

La primera de estas ecuaciones se conoce como *desigualdad de Clasius - Planck* y la segunda expresa que el calor fluye hacia el frío.

En la mecánica del continuo, la desigualdad de Clasius-Duhem, que debe satisfacerse para cualquier proceso posible, impone restricciones en la forma de las ecuaciones constitutivas.

C.4. RELACION DE GIBBS

La termodinámica del continuo supone que la energía interna local por unidad de masa queda determinada por el estado termodinámico y especificada mediante *n variables termodinámicas de subestado* : v_1, v_2, \dots, v_n y la *entropía específica* η . Esto es :

$$w = w(\eta, v, x) \quad (C.24)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación calórica de estado*. En la misma x es

la posición de la partícula en el tiempo t .

La *temperatura termodinámica* se define como:

$$\theta = \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_{V=\text{cte}} \quad (\text{C.25})$$

y las *tensiones termodinámicas* τ_j como:

$$\tau_j = \left(\frac{\partial w}{\partial v_j} \right)_{\eta=\text{cte}} \quad (\text{C.26})$$

Para cada cambio de estado de una partícula X se obtiene:

$$dw = \theta d\eta + \tau_j dv_j \quad (\text{C.27})$$

Esta es una generalización de la *ecuación de Gibbs* quien consideró como única variable termodinámica al volumen específico.

C.5. POTENCIALES TERMODINAMICOS

Suponiendo la existencia de una *ecuación calórica de estado*, se pueden definir los siguientes cuatro potenciales:

- *Energía interna: w*
Variables independientes: v_j y η
- *Densidad de energía libre de Helmholtz: Ψ*
Es la parte de la energía aprovechable para realizar trabajo a volumen constante y se define como:

$$\Psi = w - \eta \theta \quad (\text{C.28})$$

Variables independientes: θ y η_j

- *Entalpía o contenido de calor: h*

Es la parte de la energía interna que puede disiparse en forma de calor cuando las tensiones termodinámicas se mantienen constantes y se calcula como:

$$h = w - \tau_j v_j \quad (\text{C.29})$$

VARIABLES INTERNAS: θ y τ_j

- *Entalpía libre o función de Gibbs: g*

Se define como:

$$g = h - \eta \theta = \Psi - \tau_j v_j \quad (\text{C.30})$$

El estado termodinámico puede variar hipotéticamente como consecuencia de la variación de uno o más potenciales:

$$\begin{aligned} dw &= \theta d\eta + \tau_j dv_j \\ d\Psi &= -\eta d\theta + \tau_j dv_j \\ dh &= \theta d\eta - v_j d\tau_j \\ dg &= -\eta d\theta - v_j d\tau_j \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

C.6. EXPRESIONES DEL PRIMER Y SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA EN FUNCION DE LA ENERGIA LIBRE

La ecuación de conservación de la energía, expresada en términos de la energía libre, resulta:

$$m \dot{\Psi} = \sigma_{ij} D_{ij} + m r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - m \dot{\eta} \theta - m \eta \dot{\theta} \quad (\text{C.32})$$

y la desigualdad de Clausius-Duhem, resulta:

$$\Xi = \frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{m} - \dot{\Psi} - \frac{1}{m\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \eta \dot{\theta} \geq 0 \quad (C.33)$$

Existen distintas formas de expresar la energía libre. En esta Tesis se utiliza la siguiente [Oller 1989]:

$$\Psi = \Psi(\epsilon^e; \theta; \alpha; \beta) \quad (C.34)$$

Donde ϵ^e es el tensor de deformaciones elásticas, θ la temperatura absoluta, α un conjunto de variables de estado plásticas y β otro conjunto de variables internas, por ejemplo las asociadas con la degradación de rigidez.

La variación temporal de la energía libre se puede escribir entonces como:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i \quad (C.35)$$

Reemplazando en la ecuación de la disipación, ec.(C.33), se obtiene:

$$\left(\sigma_{ij} D_{ij} - m \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^e \right) - m \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} - m \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (C.36)$$

Para el caso de pequeños desplazamientos, en la expresión anterior se puede reemplazar el tensor tasa de deformación D_{ij} por el incremento temporal del tensor de deformaciones $\dot{\epsilon}_{ij}^e$. Por otro lado, la potencia deformativa puede considerarse como compuesta por dos partes, una elástica y otra plástica, a través de una descomposición aditiva del tensor de deformaciones ϵ_{ij} en una parte elástica ϵ_{ij}^e y otra parte plástica ϵ_{ij}^p . Resulta entonces:

$$\left(\sigma_{ij} - m \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^e - m \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - m \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (C.37)$$

Esta es la forma local de la *desigualdad de Claius-Duhem*. Sobre esta desigualdad se puede hacer las siguientes consideraciones:

1) Como $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ y $\dot{\theta}$ representan variaciones temporales arbitrarias de las variables libres, para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Claius-Duhem, para un dado estado termodinámico, sus multiplicadores deben ser idénticamente nulos. De allí surge que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \\ \text{b) } \eta = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad (C.38)$$

Estas expresiones, obtenidas por Coleman, pueden interpretarse como las *relaciones constitutivas más generales* compatibles con el segundo principio de la termodinámica.

2) Además, para problemas termomecánicos desacoplados se exige el cumplimiento, en forma independiente, de las siguientes desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi_m^p: \text{disip. plástica} \quad \Xi_m^\beta: \text{otros términos disip.} \\ \text{a) } \Xi_m = \underbrace{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - m \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i}_{\Xi_m^p} - \underbrace{m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i}_{\Xi_m^\beta} \geq 0 \\ \text{b) } \Xi_\theta = \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \leq 0 \end{array} \right. \quad (C.39)$$

Las ecuaciones (C.38) constituyen un conjunto de *ecuaciones constitutivas termomecánicas (relaciones de Coleman)* para el material. Un material cuya energía libre es independiente de las variables α y β , es un material *elástico*. Para ese material, las relaciones de Coleman son suficientes y la desigualdad (C.39a) se satisface trivialmente. Sin embargo, para la mayoría de los materiales, la energía libre depende de variables internas y entonces, la desigualdad (C.39a) actúa como una restricción en las ecuaciones constitutivas.

APENDICE D

MODELOS ELASTOPLASTICOS CLASICOS

D.1. INTRODUCCION

En la fig.D.1 se muestra la curva de comportamiento uniaxial de un punto correspondiente a un material elastoplástico ideal. Al comienzo muestra una zona lineal elástica hasta el punto A llamado, *límite de proporcionalidad*. A partir de él, se inicia una etapa elástica no lineal hasta alcanzar el punto A' denominado *límite de elasticidad*. Seguidamente comienza un período elasto-plástico con rigidez tangente decreciente debido a los mecanismos inelásticos irreversibles. Si durante esta etapa se descarga, se observa que sólo se recupera una parte ϵ^e (*deformación elástica*) de la *deformación total* ϵ , quedando una parte remanente, no recuperable, que recibe el nombre de *deformación plástica* ϵ^p .

Dentro de la zona elasto-plástica se distinguen tres regiones :

- Una zona donde hay crecimiento de la tensión (A'-C) que se denomina *zona elasto-plástica con endurecimiento*.
- Una zona sin cambio de tensiones (C-D) que se denomina *zona perfectamente plástica o plástica con endurecimiento nulo*.
- Una zona donde la tensión decrece bajo crecimiento sostenido de la deformación (D-E) que se denomina *zona elasto-plástica con ablandamiento*.

La *teoría de la elasticidad* simula el comportamiento dentro del rango elástico. La *teoría de la plasticidad* permite simular el fenómeno de *irreversibilidad de las deformaciones* que induce a un comportamiento energético *no conservativo dependiente del camino recorrido*.

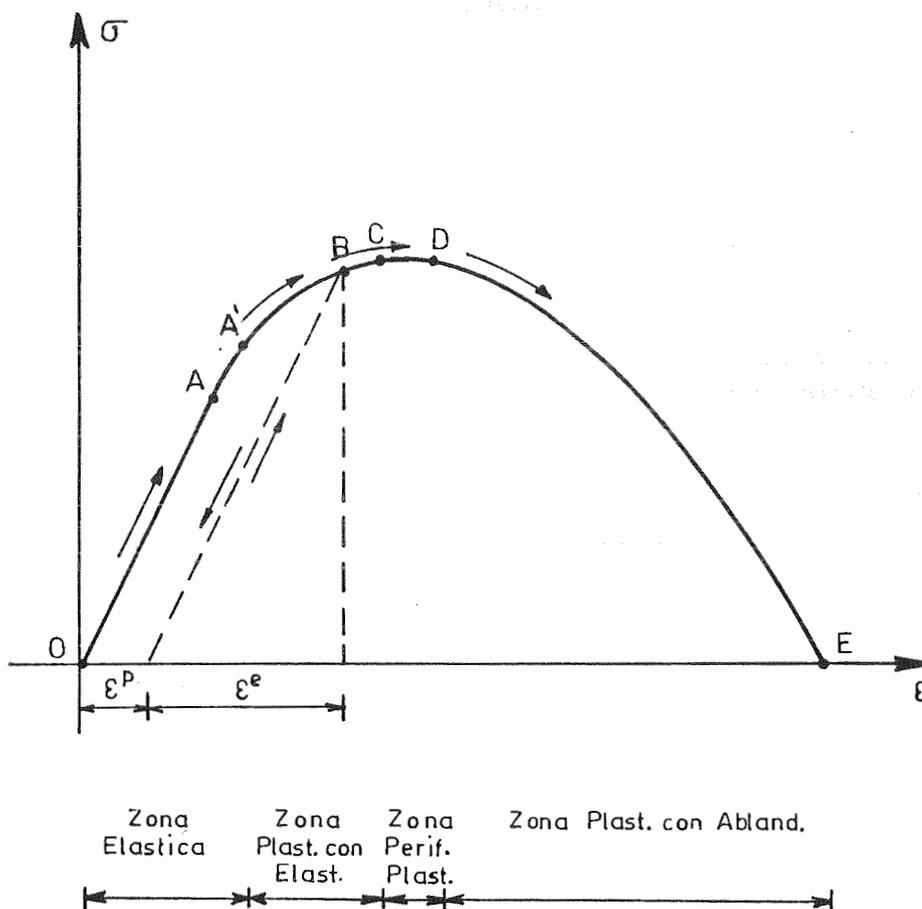


Fig.D.1 Comportamiento uniaxial de un material elasto-plástico

En este apéndice se presentan los principios y elementos fundamentales de los modelos elastoplásticos clásicos, modelos cuya estructura matemática se utiliza como base en el modelo constitutivo propuesto en esta Tesis.

D.2. MODELOS ELASTICOS [Desai 1984, Chen 1982, Malvern 1969, Oller 1988]

La forma general de los modelos elásticos, para pequeñas deformaciones y desplazamientos es la siguiente:

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs}^s \epsilon_{rs} \quad (D.1)$$

Donde C_{ijrs}^s es el tensor constitutivo secante.

La ecuación (D.1) involucra 81 coeficientes que se reducen a 36 si se considera la simetría de los tensores de tensión y deformación. Si se usa las formas vectoriales de los tensores de tensión y deformación, el tensor secante puede representarse mediante una matriz C^s de 6x6 tal que:

$$\underline{\sigma} = C^s \underline{\epsilon} \quad (D.2)$$

Se puede probar que la existencia de una función de potencial elástico o función de energía de deformación W tal que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (D.3)$$

implica la simetría de la matriz C^s reduciendo el número de constantes de 36 a 21.

El *grupo de simetría material* o *grupo isotrópico* de un material es aquel que deja las ecuaciones constitutivas invariantes. Para materiales que presentan un plano de simetría material el número de constantes se reduce a 13, para materiales con tres planos de simetría el número de constantes se reduce a 9 y para materiales isotrópicos el número de constantes es 2.

D.2.1. ORTOTROPIA

En el caso de simetría ortotrópica (tres planos de simetría) el número de constantes se reduce a 9 y la inversa de la matriz secante tiene la siguiente forma:

$$C^s{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

Donde E_x , E_y y E_z son los *módulos de elasticidad* en las tres direcciones principales de ortotropía, ν_{xy} , ν_{yx} , ν_{yz} , ν_{zy} , ν_{xz} y ν_{zx} los *módulos de Poisson* y G_{xy} , G_{yz} y G_{zx} los *módulos elásticos transversales* correspondientes.

Para que la matriz definida en la ecuación (D.4) sea simétrica deben cumplirse las siguientes relaciones entre los módulos de Poisson y los módulos elásticos longitudinales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \\ \frac{\nu_{zx}}{E_y} = \frac{\nu_{xz}}{E_z} \\ \frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \end{array} \right. \quad (\text{D.5})$$

Esto reduce a 9 el número de constantes independientes que intervienen en la definición del tensor de rigidez secante. Además, se puede tomar como aproximación [Oñate 1992]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{G_{xy}} = \frac{1 + \nu_{yx}}{E_y} + \frac{1 + \nu_{xy}}{E_x} \\ \frac{1}{G_{yz}} = \frac{1 + \nu_{zx}}{E_y} + \frac{1 + \nu_{xz}}{E_z} \\ \frac{1}{G_{zx}} = \frac{1 + \nu_{zy}}{E_z} + \frac{1 + \nu_{yz}}{E_y} \end{array} \right. \quad (\text{D.6})$$

Invirtiendo la ec.(D.4) resulta:

$$C^s = \begin{bmatrix} \frac{E_x(-1+v_{yz}v_{zy})}{D} & -\frac{E_x(v_{yx}+v_{yz}v_{zx})}{D} & -\frac{E_x(v_{zx}+v_{yx}v_{zy})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_y(v_{xy}+v_{xz}v_{zy})}{D} & \frac{E_y(-1+v_{xz}v_{zx})}{D} & -\frac{E_y(v_{zy}+v_{xy}v_{zx})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_z(v_{xz}+v_{xy}v_{yz})}{D} & -\frac{E_z(v_{yz}+v_{xz}v_{yx})}{D} & \frac{E_z(-1+v_{xy}v_{yx})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \quad (D.7)$$

Donde:

$$D = -1 + v_{xy}v_{yx} + v_{xz}v_{zx} + v_{xy}v_{yz}v_{zx} + v_{xz}v_{yx}v_{zy} + v_{yz}v_{zy} \quad (D.8)$$

Para el caso del estado plano de deformación ($\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x(-1+v_{yz}v_{zy})}{D} & -\frac{E_x(v_{yx}+v_{yz}v_{zx})}{D} & 0 \\ -\frac{E_y(v_{xy}+v_{xz}v_{zy})}{D} & \frac{E_y(-1+v_{xz}v_{zx})}{D} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (D.9)$$

Y

$$\sigma_z = -\frac{E_z(v_{xz}+v_{xy}v_{yz})}{D} \epsilon_x - \frac{E_z(v_{yz}+v_{xz}v_{yx})}{D} \epsilon_y \quad (D.10)$$

Para el caso del estado plano de tensiones ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) se trabaja con:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} & \nu_{xy} \frac{E_x}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} & 0 \\ \nu_{yx} \frac{E_y}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} & \frac{E_y}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Y

$$\epsilon_z = -\nu_{xz} \epsilon_x - \nu_{yz} \epsilon_y \quad (\text{D.12})$$

D.2.2. ISOTROPIA

En el caso de isotropía el número de constantes se reduce a dos y la matriz constitutiva resulta simétrica aún sin suponer la existencia de una función de potencial elástico. La ecuación constitutiva tiene en este caso la siguiente forma :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (\text{D.13})$$

ó

$$\sigma_{ij} = K \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 G \epsilon_{ij} \quad (\text{D.14})$$

Donde :

$$K = \lambda + (2/3) G = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\text{D.15})$$

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{D.16})$$

λ y μ son las *constantes de Lamé*, K el *módulo de dilatación volumétrica*, G el *módulo elástico transversal*, E el *módulo elástico longitudinal* y ν el *coeficiente de Poisson*.

La condición de *definida positiva* de la energía de deformación impone las siguientes restricciones en los módulos elásticos isotrópicos :

$$\begin{cases} K > 0 \\ G > 0 \end{cases} \quad \delta \quad \begin{cases} E > 0 \\ -1 < \nu < 0.5 \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

Para el caso $\nu = 0.5$ ($1/K = 0$) se tiene un material incompresible.

Para el caso del estado plano de deformación se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.18})$$

Y

$$\sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (\text{D.19})$$

Para el caso del estado plano de tensiones se trabaja con:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

Y

$$\epsilon_z = -\frac{1}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (\text{D.21})$$

Para el caso de simetría axial ($\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \gamma_{z\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$) se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

Donde r indica la dirección radial, θ la circunferencial y z la axial.

D.3. FUNDAMENTOS DE LOS MODELOS PLÁSTICOS.

TEORÍA DE PLASTICIDAD CON PEQUEÑAS DEFORMACIONES.

[Desai 1984, Chen 1982, Malvern 1969, Oller 1988]

D.3.1. INTRODUCCION

El desarrollo de los modelos elasto-plásticos con endurecimiento mediante la teoría incremental de la plasticidad comprende dos grandes aspectos :

- El *criterio de fluencia o discontinuidad* que permite establecer durante el proceso de carga el comienzo del período inelástico y la posterior evolución de las fronteras del dominio elástico en el espacio de tensiones.
- El comportamiento más allá del límite elástico o comportamiento elastoplástico que queda definido mediante :
 - Una descomposición de las deformaciones en una parte elástica y una parte plástica.
 - Una regla de flujo plástico que será interpretada como una regla de evolución explícita de las variables internas.
 - Un conjunto de variables internas α : que son escalares o tensores definidos internamente por el mismo proceso elastoplástico, en forma implícita, a partir de una regla de evolución explícita.

D.3.2. CRITERIO DE DISCONTINUIDAD PARA MATERIALES FRICCIONALES O CRITERIO DE FLUENCIA PLASTICA PARA METALES

En forma general, se puede definir el límite de discontinuidad a través de una *función escalar que depende del estado de tensión σ_{ij} y de un grupo de variables internas plásticas α* .

$$F(\sigma_{ij}(t), \alpha(t)) = 0 \quad (D.23)$$

Donde:

$\sigma_{ij}(t)$: Tensor de tensiones actual

$\alpha(t)$: Conjunto de variables internas plásticas en el estado actual

$$\alpha(t) = \left\{ \kappa(t), \eta(t), e^p(t) \right\}^T \quad (D.24)$$

$\kappa(t)$: Variable de endurecimiento plástico isotrópico

$\eta(t)$: Variable de endurecimiento plástico cinemático

$e^p(t)$: Tensor de deformación plástica

El comportamiento de un punto en un instante cualquiera t queda definido de la siguiente manera:

- El comportamiento es *elástico* antes de que se alcance el límite de discontinuidad :

$$F(\sigma_{ij}(t), \alpha(t)) < 0 \quad (D.25)$$

o cuando hay descarga:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i < 0 \quad (D.26)$$

- El proceso de deformación es elasto-plástico cuando hay carga :

$$F(\sigma_{ij}(t), \alpha(t)) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i = 0 \quad (\text{D.27})$$

Esto resulta más fácil de interpretar cuando $F(\sigma_{ij}, \alpha)$ se entiende como una superficie en el espacio de tensiones. Para materiales isótropos se puede representar como una superficie en el espacio de tensiones principales : $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, pero, en general, es una hipersuperficie en un espacio de nueve dimensiones. En la Fig.D.2 se ha representado esquemáticamente una superficie de fluencia o carga.

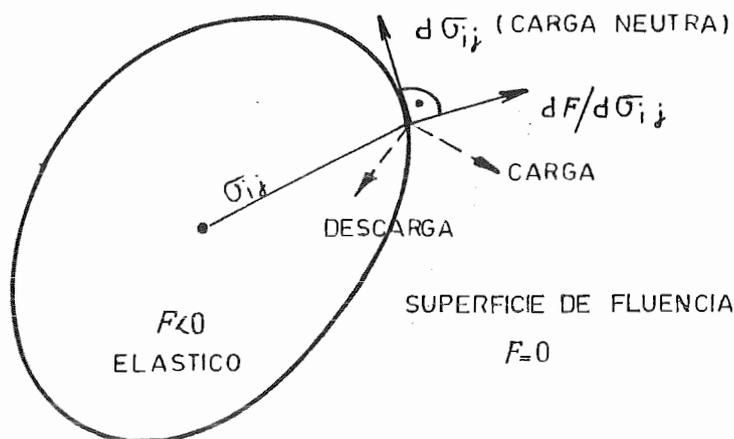


Fig.D.2 Representación esquemática de la superficie de fluencia

Para *materiales con endurecimiento*, si $d\sigma_{ij}$ está dirigido hacia adentro de la superficie se trata de una descarga y sólo hay deformaciones elásticas. Si $d\sigma_{ij}$ está dirigido hacia afuera se trata de un proceso de carga y ocurren deformaciones elásticas y plásticas. Si $d\sigma_{ij}$ está en el plano tangente se trata de una carga neutra y sólo ocurren deformaciones elásticas.

Para *materiales perfectamente plásticos*, si el vector $d\sigma_{ij}$ está dirigido hacia adentro de la superficie se trata de una descarga y las deformaciones son elásticas. En el caso de carga, el vector $d\sigma_{ij}$ no puede salir de la superficie (en este caso superficie de fluencia) porque

ésta es fija en el espacio de tensiones y debe ser tangente a la superficie, o sea que ocurre flujo plástico cuando :

$$F(\sigma_{ij}(t)) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (\text{D.28})$$

Para materiales isótopos, el comportamiento del material es idéntico en todas las direcciones por lo que el criterio de fluencia o discontinuidad puede expresarse en términos de las tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 o de cualquier conjunto de invariantes linealmente independientes, del tensor de tensiones o de su desviador.

Estudios experimentales muestran que la influencia de la presión hidrostática en la deformación plástica de materiales no porosos como los metales es despreciable. Eso asegura que la deformación volumétrica será siempre elástica. Para el caso particular de materiales metálicos isótopos el criterio de fluencia plástico se reduce a :

$$F(J_2, J_3, \alpha) = 0 \quad (\text{D.29})$$

Para materiales friccionales, en cambio, la resistencia crece con el aumento de las fuerzas de rozamiento interno que a su vez están influenciadas por la presión hidrostática (I_1). Tanto el hormigón como los geomateriales presentan esa característica y por lo tanto, en esos casos, el criterio de discontinuidad debe tomar la forma :

$$F(I_1, J_2, J_3, \alpha) = 0 \quad (\text{D.30})$$

D.3.3. COMPORTAMIENTO MAS ALLA DEL LIMITE ELASTICO

D.3.3.1. Descomposición de las Deformaciones

La teoría incremental de la plasticidad clásica sin degradación de rigidez *descompone la deformación total* en una parte elástica y otra parte plástica :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = C_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (D.31)$$

D.3.3.2. Regla del Flujo

Se define una *regla de flujo generalizada* que considera el incremento de deformación plástica temporal como una variable interna tensorial cuya regla de evolución está dada por :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{kl}, \alpha)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (D.32)$$

Donde :

$\dot{\lambda}$: Parámetro de consistencia plástica

G : Función de potencial plástico

Esta regla establece que $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ está dirigido según la normal a la superficie de potencial plástico. Cuando, en particular, se adopta como superficie de potencial plástico a la superficie de fluencia ,se tiene :

$$G \equiv F \quad (D.33)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma_{kl}, \alpha)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (D.34)$$

Y se habla de una *regla de flujo asociada a la superficie de fluencia*. En caso contrario, se trata de una *regla de flujo no asociada a la superficie*

de fluencia. El hormigón y los geomateriales, en general, necesitan una regla del flujo no asociada para describir su comportamiento

D.3.3.3. Superficie de Carga Plástica

El límite entre la zona elástica y la zona plástica se establece mediante una superficie de fluencia o superficie de discontinuidad y a partir de allí esta superficie adquiere movilidad en el espacio de tensiones, a medida que evoluciona el proceso elasto-plástico, convirtiéndose en la llamada *superficie de carga plástica*. Esta función no es otra cosa que la actualización del límite de discontinuidad de acuerdo a la evolución de las variables internas plásticas α . El fenómeno que gobierna el cambio de posición y forma en el espacio de tensiones se denomina *endurecimiento plástico*.

El endurecimiento puede ser de distintos tipos : *isotrópico*, *cinemático* o *mixto*.

ENDURECIMIENTO ISOTRÓPICO

Se tiene *endurecimiento isotrópico* cuando la superficie de carga cambia su tamaño sin cambiar su forma, posición ni orientación. Puede ser, a su vez, positivo, cuando hay endurecimiento, nulo cuando el material es perfectamente plástico o negativo cuando hay ablandamiento.

Este movimiento puede ser controlado por la *función de endurecimiento plástico* $K(\kappa)$ que depende de la *variable de endurecimiento plástico* κ .

Una forma simple de expresar la función de carga plástica es

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = f(\sigma_{ij}) - K(\kappa) = 0 \quad (D.35)$$

donde f es una función escalar homogénea de primer orden en las componentes de σ_{ij} , lo cual permite asociar la función de endurecimiento plástico $K(\kappa)$ con una *tensión uniaxial equivalente* $\bar{\sigma}(\kappa)$.

La variable de endurecimiento plástico varía según la siguiente ley explícita de evolución :

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} H_{\kappa}(\sigma_{ij}, \alpha) \equiv \dot{\lambda} \left[h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{kl}, \alpha) \frac{\partial G(\sigma_{kl}, \alpha)}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (D.36)$$

$$\dot{\kappa} = h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{kl}, \alpha) \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (D.37)$$

Donde $h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{kl}, \alpha)$ es un tensor de segundo orden que, en el caso más simple, puede tomarse :

$$h_{\kappa_{ij}}(\sigma_{kl}, \alpha) \equiv \sigma_{ij} \quad (D.38)$$

En ese caso particular, resulta la variable de endurecimiento plástico igual al incremento temporal de trabajo plástico :

$$\dot{\kappa} = \dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (D.39)$$

ENDURECIMIENTO CINEMATICO

Se tiene *endurecimiento cinemático* cuando la superficie de carga se traslada en el espacio de tensiones sin cambiar su forma, tamaño ni orientación.

El movimiento de traslación de la superficie de carga plástica es controlado por la *variable interna de endurecimiento plástico cinemático* η_{ij} que define el movimiento del centro de la misma.

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = f(\sigma_{ij} - \eta_{ij}) - K = 0 \quad (D.40)$$

La regla de evolución de η_{ij} está dada por :

$$\dot{\eta}_{ij} = \beta_{ij} \dot{\kappa} \quad (D.41)$$

Donde β_{ij} es un tensor que define la dirección del movimiento.

Prager y Melan propusieron una ecuación aún más simple :

$$\dot{\eta}_{ij} = c_{\kappa} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (D.42)$$

que define un *endurecimiento lineal* en el que c_{κ} es un escalar. En ese caso la superficie se traslada según la normal a la misma.

Ziegler demostró que cuando algunas componentes de tensión se anulan, por ejemplo para estados planos esta condición no se cumple y propuso como regla de evolución :

$$\dot{\eta}_{ij} = \dot{\beta} (\sigma_{ij} - \eta_{ij}) \quad (D.43)$$

donde $\dot{\beta}$ es un escalar positivo característico de un cada material

ENDURECIMIENTO MIXTO

Se tiene endurecimiento mixto cuando la superficie cambia su tamaño y simultáneamente se traslada en el espacio de tensiones. En este caso general, la función de carga plástica se puede escribir como :

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = f(\sigma_{ij} - \eta_{ij}) - K(\kappa) = 0 \quad (D.44)$$

D.3.4. RELACION TENSION-DEFORMACION GENERALIZADA

Durante la carga plástica debe cumplirse que :

$$F(\sigma_{ij}(t), \kappa(t)) = 0 \quad y \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (D.45)$$

condiciones que constituyen la denominada *condición de consistencia plástica*.

Si se sustituye en la ec.(D.45b) la regla del flujo dada por las ec.(D.32) y (D.36) y se relaciona $\dot{\sigma}_{ij}$ con los incrementos de deformación a través de la ec. (D.31), se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} h_{\kappa_{ij}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (D.46)$$

de donde resulta:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl}}{A + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (D.47)$$

Donde:

$\dot{\lambda} \geq 0$: Parámetro de consistencia plástica

y

$$A = - \frac{\partial F}{\partial \kappa} h_{\kappa_{ij}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (D.48)$$

Sustituyendo este valor de $\dot{\lambda}$ en la ecuación:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = C_{ijkl}^s \left[\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right] \quad (D.49)$$

se obtiene :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnlk}^s}{A + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (D.50)$$

Finalmente la ley constitutiva incremental puede escribirse como :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ep,ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (D.51)$$

donde $C_{ep,ijkl}^t$ es el tensor *elastoplástico tangente* y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$C_{ep,ijkl}^t = C_{ijkl}^s - \frac{C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnl}^s}{A + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (D.52)$$

El segundo término representa la degradación del material debida al flujo plástico.

Notar que si se usa una regla de flujo no asociada a la superficie de fluencia ($G \neq F$) el tensor elastoplástico $C_{ep,ijkl}^t$ no resulta simétrico.

Cuando $\partial F / \partial \kappa \rightarrow \infty$ entonces $A \rightarrow \infty$ y $C_{ep,ijkl}^t \rightarrow C_{ijkl}^s$

D.3.5. POSTULADOS DE ESTABILIDAD DE DRUCKER

Las definiciones de material plásticamente estable dadas por Drucker no son más que una generalización al espacio n-dimensional de las conclusiones que pueden extraerse sobre el trabajo plástico desarrollado en un proceso uniaxial causado por un agente externo. Ver fig.D.3.

Enuncian que un punto de un sólido tiene un *comportamiento estable* si se cumple que :

- 1) Durante la aplicación de las tensiones, el trabajo realizado por el agente externo es positivo.

2) Durante un ciclo de aplicación y remoción de las tensiones, el trabajo realizado por el agente externo es no negativo.

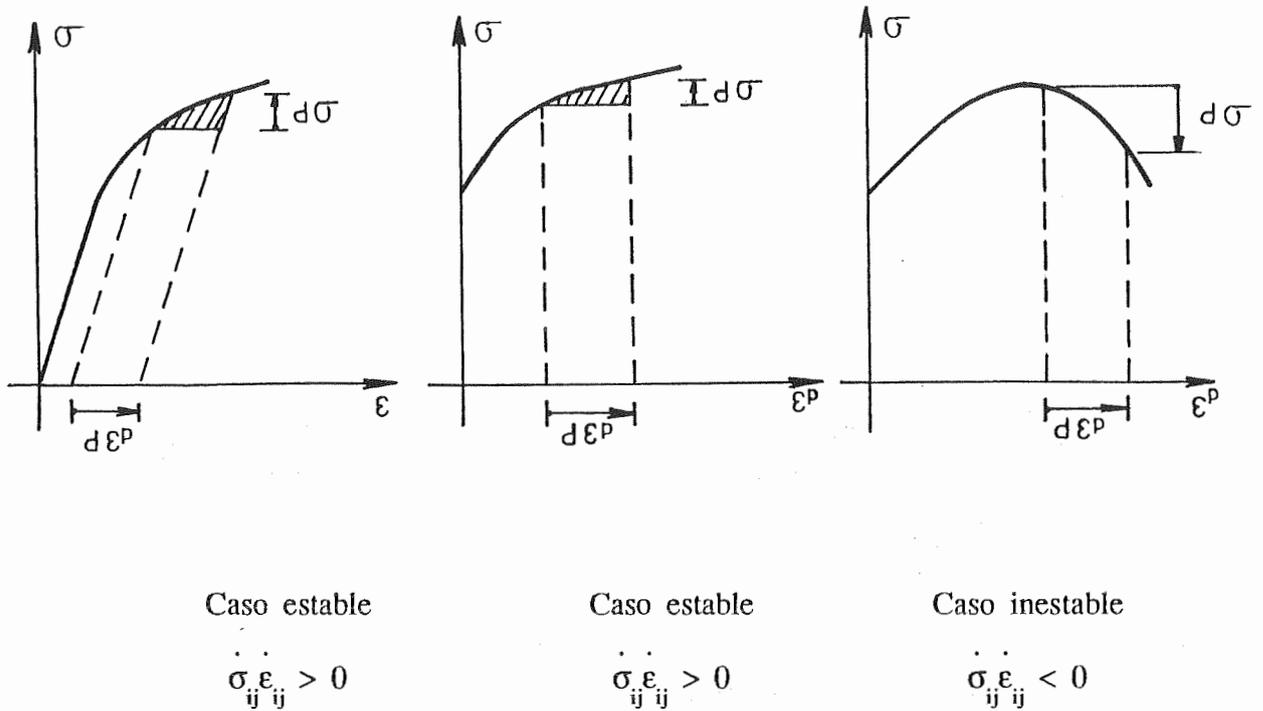


Fig.D.3 Materiales plásticos estables e inestables en el caso de un estado uniaxial de tensión

Para enunciar matemáticamente estos postulados, supóngase un material cuyo estado de tensión y deformación actual está dado por σ_{ij} y ϵ_{ij} respectivamente. Supóngase ahora que un agente externo modifica las tensiones en $\dot{\sigma}_{ij}$ y las deformaciones en $\dot{\epsilon}_{ij}$. Entonces, de acuerdo al primer postulado, la respuesta es estable si se cumple que :

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \tag{D.53}$$

o

$$\dot{\sigma}_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p) > 0 \tag{D.54}$$

Según el segundo postulado, se tiene estabilidad en la respuesta

tensión-deformación si el *incremento temporal del trabajo plástico de segundo orden* es no negativo:

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{D.55})$$

Tres consecuencias inmediatas pueden extraerse de los postulados de Drucker :

- La superficie de fluencia inicial y las superficies de carga deben ser *convexas*.
- El vector incremento de deformación plástica debe ser normal a la superficie de fluencia o carga ; *ley de flujo asociada* a la superficie de fluencia.
- El incremento de deformación plástica es *lineal* en el incremento de tensión.

El cumplimiento de los postulados de Drucker asegura que el tensor elastoplástico tangente C_{epijkl}^t definido en ec.(D.52) resulte simétrico y definido positivo (material con endurecimiento).

El segundo postulado de Drucker de disipación no negativa durante un ciclo de carga no se aplica a materiales con ablandamiento debido a inestabilidades materiales locales o reglas de flujo no asociadas. En estos casos el tensor C_{epijkl}^t pierde su condición de definido positivo. El no cumplimiento del segundo postulado de Drucker no significa que se trate de un proceso inestable para todo el sólido. Este postulado será tomado como una *condición suficiente de estabilidad global* [Bazant 1976, Bazant 1978, Jurina et al 1977]

El *principio de la máxima disipación* [Lubliner 1984], que es clásico en la teoría de la plasticidad, tiene la forma :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{D.56})$$

Donde σ_{ij}^* es cualquier estado de tensión dentro o sobre la superficie de fluencia.

El caso unidimensional daría :

$$(\sigma - \sigma^*) \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (\text{D.57})$$

Esta desigualdad tiene la siguiente interpretación :

El estado de tensión actual o real es mayor (menor) que cualquier estado de tensión alcanzable por una descarga si el incremento temporal de deformación plástica es positivo (negativo).

Las principales consecuencias de la ec.(D.56) son las siguientes :

- En las zonas continuas de la superficie de fluencia $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ es perpendicular a la misma.
- En los vértices $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ cae dentro del cono formado por las normales.
- La superficie de fluencia es convexa.

Analizando la expresión (D.56) resulta obvio que la validez de este postulado no se limita a materiales con endurecimiento. El único requerimiento es que la dirección de $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ en un proceso de carga forme un ángulo obtuso con el cambio de tensión en un proceso de descarga. Consecuentemente, la estabilidad en el sentido de postulado de Drucker es una hipótesis más fuerte que el principio de máxima disipación plástica. Se puede demostrar que la desigualdad de Drucker implica a la ec.(D.56).

D.3.6. CONDICIONES DE PRAGER

Además de los postulados de Drucker, un material elastoplástico debe satisfacer las siguientes condiciones :

- *Condición de continuidad* : Supóngase un estado de tensiones σ_{ij} sobre la superficie de carga. Un incremento de tensión $\dot{\sigma}_{ij}$ produce carga, carga neutra o descarga según hacia dónde está dirigido : hacia afuera, tangente o hacia adentro. Para evitar discontinuidades en la relación tensión-deformación es necesario que la carga neutra no produzca deformaciones plásticas.
- *Condición de unicidad* : Esta condición asegura que para un dado estado mecánico del cuerpo y un sistema de incrementos de tensión, las deformaciones correspondientes son únicas.
- *Condición de irreversibilidad* : debido a la naturaleza irreversible de las deformaciones plásticas. El trabajo realizado sobre estas deformaciones debe ser positivo.

$$\dot{W}_p = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \quad (D.58)$$

- *Condición de consistencia* : La carga a partir de un estado plástico conduce a otro estado plástico. Esta condición exige que la condición de fluencia se satisfaga mientras el material esté en estado plástico.

D.3.7. CONDICIONES DE KUHN-TUCKER EN PLASTICIDAD

Las condiciones de carga-descarga y la condición de consistencia plástica se satisfacen simultáneamente mediante las *condiciones de Kuhn-Tucker*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda} \geq 0 \\ F(\sigma_{ij}, \alpha) \leq 0 \\ \dot{\lambda} F(\sigma_{ij}, \alpha) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.59})$$

De estas condiciones puede deducirse que :

- Si $F(\sigma_{ij}, \alpha) < 0$, la condición de fluencia no se satisface, se desarrolla un proceso elástico. De la tercera condición se deduce que en este caso $\dot{\lambda} = 0$, de donde se deduce que las variables plásticas, en particular ϵ_{ij}^p , no evolucionan
- Si $\dot{\lambda} > 0$, se deduce, de la tercera condición, que el proceso debe satisfacer la condición de fluencia plástica $F(\sigma_{ij}, \alpha) = 0$ o sea que se trata de un estado de carga en un proceso elastoplástico.
- Si $\dot{\lambda} = 0$, debe ser $F(\sigma_{ij}, \alpha) \leq 0$ que puede representar un estado de carga nula donde $F(\sigma_{ij}, \alpha) = 0$ ó un proceso de descarga elástico con $F(\sigma_{ij}, \alpha) < 0$

D.3.8. CRITERIOS CLASICOS DE FLUENCIA O DISCONTINUIDAD

En los últimos años se han desarrollado muchos criterios de fluencia o discontinuidad, algunos de ellos simulan mejor el comportamiento de los metales, otros son más adecuados para materiales friccionales. Generalmente, estos modelos sirven para representar el comportamiento dentro de un cierto rango. A su vez estos modelos se usan también a veces como criterios de fractura para materiales frágiles o criterios de falla en general.

A continuación se presentan algunos criterios de fluencia clásicos.

D.3.8.1. Criterio de la Máxima Tensión de Tracción (Rankine)

Se utiliza para establecer el límite donde se inicia la falla por

fractura frágil bajo tracción en materiales frágiles. Establece que la fractura se produce cuando la máxima tensión principal en un punto alcanza el valor de la *máxima resistencia a tracción uniaxial* : σ_T^{\max} .

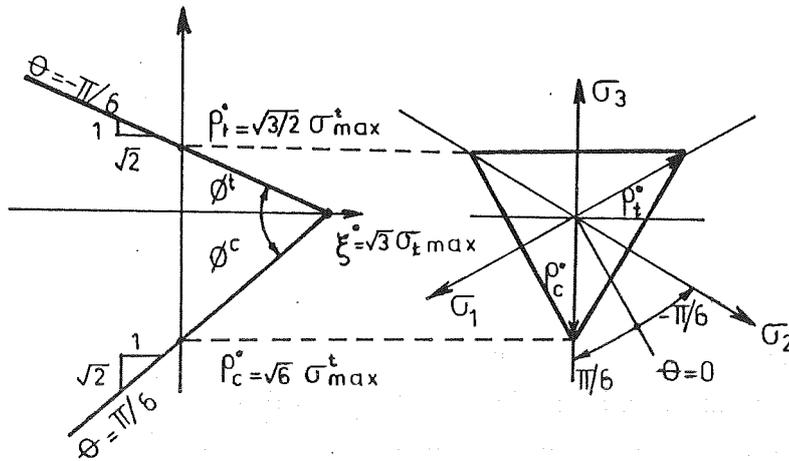


Fig.D.4. Criterio de fluencia de Rankine

$$F(\sigma_{ij}, \sigma_T^{\max}) = \max.\sigma_i - \sigma_T^{\max} = 0 \tag{D.60}$$

$$K_o = K(\kappa_o) = \sigma_T^{\max} \tag{D.61}$$

$$F(I_1, J_2, \theta, \sigma_T^{\max}) = 2 \sqrt{3J_2} \cos(\theta + \pi) + I_1 + 3 \sigma_T^{\max} = 0 \tag{D.62}$$

Este criterio depende de los tres invariantes de tensión I_1 , J_2 y J_3 y representa una pirámide de base triangular en el espacio de tensiones principales. En la fig.D.4 se ha representado este criterio según los planos meridianos y el plano π .

Normalmente, este criterio se usa como barrera tensional en tracción combinado con otros criterios para compresión.

D.3.8.2. Criterio de la Máxima Tensión de Corte de Tresca

Este criterio simula bastante bien la fluencia de los metales. De acuerdo al mismo, la fluencia se alcanza cuando la función de endurecimiento $K'(\kappa)$ alcanza la *máxima tensión de corte puro* : τ^{\max} .

$$F(\sigma_{ij}, K') = \max. \tau - K'(\kappa) = 0 \tag{D.63}$$

ó

$$F(J_2, \theta, K') = \sqrt{J_2/3} \cos\theta - K'(\kappa) = 0 \tag{D.64}$$

Multiplicando por $\sqrt{J_2/3}$ la ecuación anterior se tiene el criterio expresado en términos de tensión uniaxial efectiva $\bar{\sigma}$, lo cual permite usar como función de endurecimiento plástico $\bar{\sigma}(\kappa)$ obtenida de un ensayo uniaxial.

$$F(J_2, \theta, \bar{\sigma}) = 2 \sqrt{J_2} \cos\theta - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \tag{D.65}$$

Este criterio depende sólo de dos invariantes, J_2 y J_3 , y representa un prisma de base hexagonal con eje coincidente con el eje hidrostático en el espacio de tensiones principales. Ver Fig. D.5.

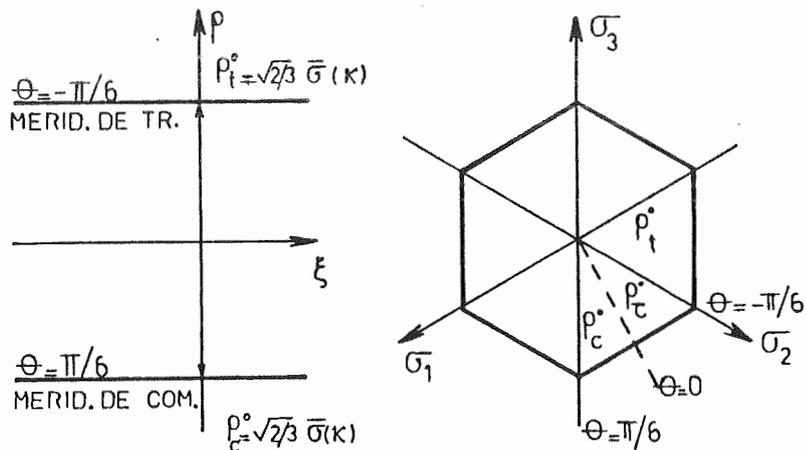


Fig.D.5 Criterio de fluencia de Tresca

D.3.8.3. Criterio de Von Mises

De acuerdo a este criterio un material alcanza la fluencia plástica cuando la función de endurecimiento $K_0(\kappa)$ alcanza el valor de la máxima tensión de corte octaédrica τ_{oct}^{max}

$$F(\sigma_{ij}, K) = (1/6) \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] - K^2(\kappa) = 0 \tag{D.66}$$

$$J_2 - K^2(\kappa) = 0 \tag{D.67}$$

Donde:

$$\tau_{oct} = \sqrt{(2/3)J_2} = \sqrt{2/3} K(\kappa) \tag{D.68}$$

$$\sqrt{3J_2} - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \tag{D.69}$$

Este criterio depende de un solo invariante (J_2) y representa un cilindro circular cuyo eje coincide con el eje hidrostático en el espacio de tensiones principales. Ver Fig.D.6.

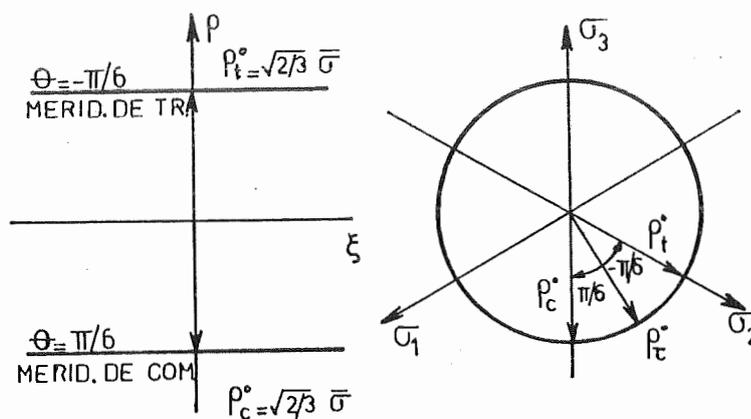


Fig.D.6 Criterio de Fluencia de Von Mises

La mayor diferencia entre el criterio de Von Mises y el criterio de Tresca aparece para $\theta = 0$ (corte puro) :

$$\frac{(\rho^o)_{V.Mises}}{(\rho^o)_{Tresca}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma}(\kappa)}{\sqrt{2/3} \bar{\sigma}(\kappa)} = 1,1547 \quad (D.70)$$

D.3.8.4. Criterio de Mohr - Coulomb

El criterio de Mohr está gobernado por la ecuación :

$$|\tau| = f(\sigma_n) \quad (D.71)$$

que expresa que la tensión tangencial máxima en un plano depende únicamente de la tensión normal a ese plano. Es un criterio basado en el concepto de rozamiento interno entre las partículas que crece con el aumento de la presión en la masa del sólido.

La ec.(D.71) es la envolvente de los círculos de Mohr. De acuerdo al criterio de Mohr, la falla ocurre cuando el mayor de los círculos de Mohr se hace tangente a la envolvente. La forma más simple de esta envolvente son las líneas rectas que se muestran en la Fig.D.7. El criterio de falla basado en la ecuación de esas líneas rectas es lo que se conoce como criterio de Mohr Coulomb :

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi \quad (D.72)$$

donde c es la *cohesión* y ϕ el *ángulo de fricción interna* entre las partículas del sólido. Si $\phi = 0$ este criterio se convierte en el criterio de Tresca.

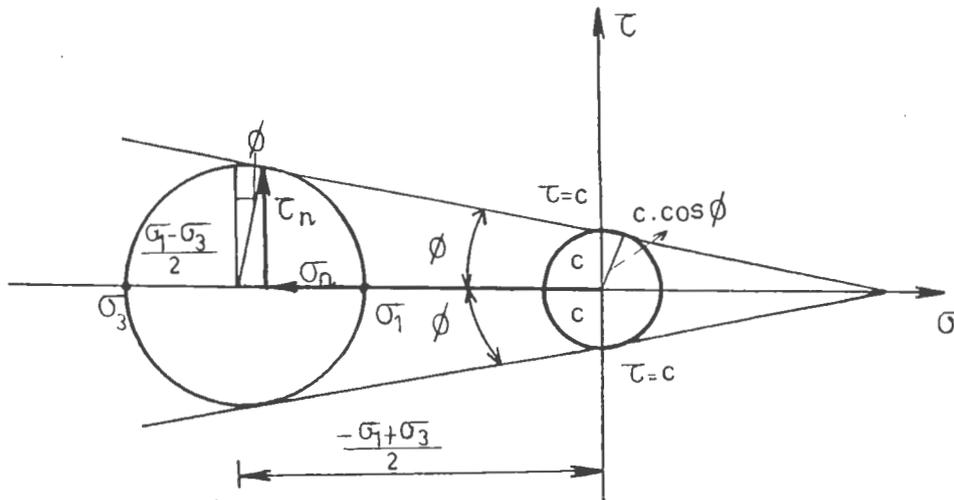


Fig.D.7 Criterio de Mohr-Coulomb. Envolvente de falla.

Este criterio puede representarse también como :

$$F(\sigma_{ij}, c, \phi) = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] + \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] \text{sen } \phi - c \text{ cos } \phi = 0 \quad (D.73)$$

$$F(I_1, J_2, \theta, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \text{sen } \phi + \sqrt{J_2} (\text{cos } \theta - \text{sen } \theta \text{sen } \phi / \sqrt{3}) - c \text{ cos } \phi = 0 \quad (D.74)$$

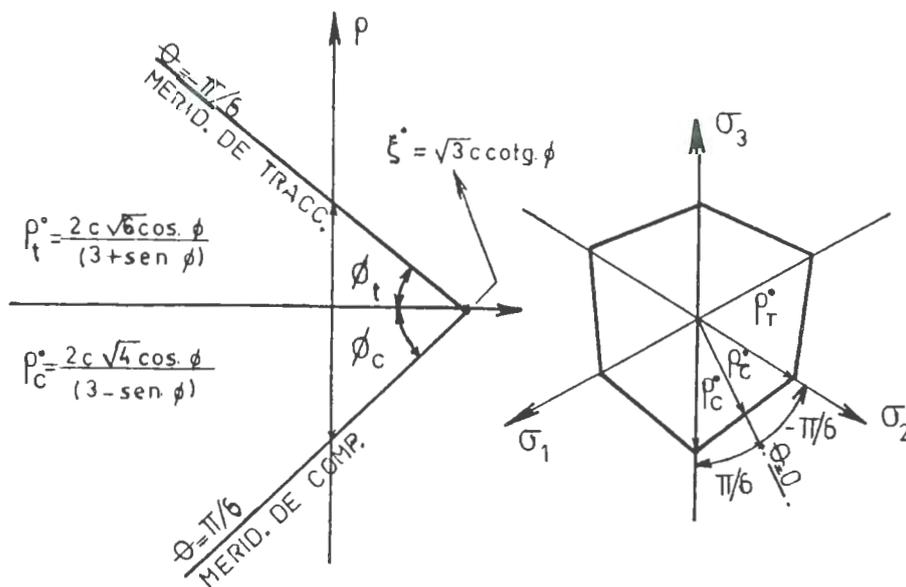


Fig.D.8 Criterio de Fluencia de Mohr-Coulomb

Este criterio depende de los tres invariantes de tensión I_1 , J_2 y J_3 e ignora la influencia de la tensión principal intermedia. Representa una pirámide de base hexagonal distorsionada y con eje coincidente con el eje hidrostático en el espacio de tensiones principales. Ver Fig.D.8. Es un modelo apropiado para materiales friccionales porque incorpora la dependencia de la presión hidrostática, sin embargo, su uso como criterio de fluencia plástica para hormigón presenta los siguientes inconvenientes :

- No tiene en cuenta la influencia de la tensión principal intermedia, lo cual significa, por ejemplo, que la máxima tensión en compresión uniaxial es igual a la máxima tensión en compresión biaxial. En hormigón, por ejemplo, está demostrado experimentalmente que esto no es cierto.
- Los meridianos de tracción y compresión son rectos lo cual constituye una aproximación muy pobre para altas presiones hidrostáticas, donde los meridianos deben ser aproximadamente paralelos.
- Las secciones sobre planos octaédricos son similares con relaciones ρ_c/ρ_t constantes, dependientes solamente del ángulo de rozamiento interno ϕ .
- La superficie no es suave sino que tiene aristas que dificultan el análisis numérico.

D.3.8.5. Criterio de Drucker - Prager

Este criterio es una versión suavizada del criterio de Mohr-Coulomb que evita las aristas que constituyen un problema numérico cuando se trabaja con plasticidad asociada. Se obtiene como una modificación del criterio de Von-Mises :

$$F(I_1, J_2, c, \phi) = \bar{\alpha} I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{K}(\kappa) = 0 \quad (D.75)$$

donde $\bar{\alpha}$ y \bar{K} son constantes positivas que permiten ajustar este modelo al de Mohr Coulomb. Si $\bar{\alpha} = 0$ se tiene el criterio de Von Mises.

Este criterio depende de los invariantes I_1 y J_2 y representa un cono circular con eje coincidente con el eje hidrostático en el espacio de tensiones principales. Ver Fig.D.9.

Existen distintas maneras de encontrar las constantes de ajuste $\bar{\alpha}$ y \bar{K} :

- Exigiendo que el criterio de Drucker Prager coincida con el de Mohr Coulomb en los meridianos de tracción máxima , resulta un cono inscrito en la pirámide de Mohr Coulomb, para el cual :

$$\bar{K} = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \operatorname{sen} \phi)} \quad (\text{D.76})$$

$$\bar{\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3} (3 + \operatorname{sen} \phi)} \quad (\text{D.77})$$

- Exigiendo que el criterio de Drucker Prager coincida con el de Mohr Coulomb en los meridianos de compresión máxima, resulta un cono que circunscribe a la pirámide y para el cual:

$$\bar{K} = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (\text{D.78})$$

$$\bar{\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (\text{D.79})$$

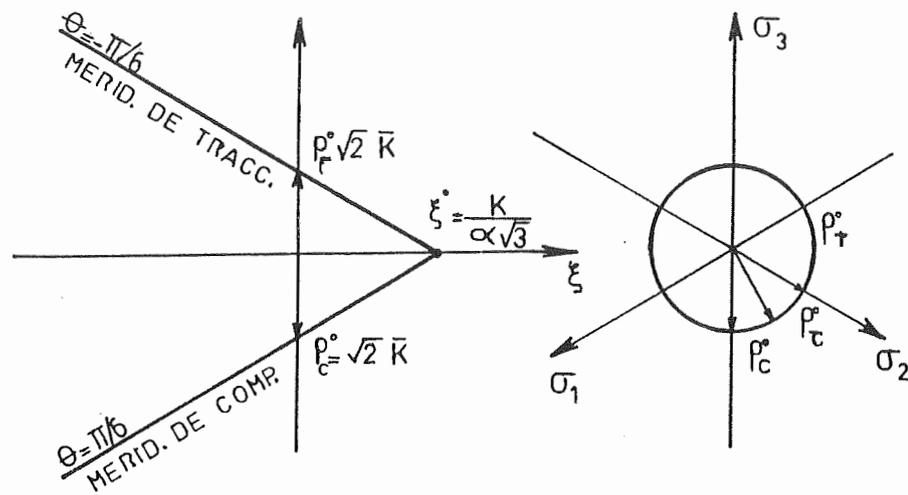


Fig.D.9 Criterio de Fluencia de Drucker-Prager

Entre los principales inconvenientes que presenta la aplicación de este criterio como criterio de fluencia plástica para hormigón y geomateriales en general se mencionan :

- Los meridianos de tracción y compresión máxima son líneas rectas.
- No depende del tercer invariante J_3 (secciones octaédricas circulares)
- La relación entre las resistencias uniaxiales a tracción compresión sólo depende del ángulo de fricción interna.

D.3.8.6. Combinación de Criterios de Fluencia

Para salvar algunos de los inconvenientes que presenta la aplicación de los criterios de fluencia plástica clásicos al hormigón y a los geomateriales se suele usar una combinación de dos ó más criterios en distintas zonas del espacio de tensiones principales.

Un ejemplo típico de combinación de criterios es el empleo del criterio de Rankine como barrera tensional en tracción combinado con los criterios de

Mohr Coulomb o Drucker Prager.

D.3.9. La Regla del Flujo en Puntos Singulares

La aplicación de la regla del flujo en puntos singulares de la función de potencial plástico G , es decir en puntos donde las derivadas de G no son continuas presenta algunos problemas.

Koiter propuso una generalización de la regla del flujo para el caso de tener n superficies de potencial plástico que concurren a un punto singular :

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \sum_{i=1}^n p^{(i)} \lambda_{kl}^{(i)} \frac{\partial G^{(i)}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (\text{D.80})$$

donde $p^{(i)}$ es un factor de peso del flujo plástico correspondiente al potencial $G^{(i)}$, que varía entre 0 y 1 y sirve para ajustar la regla del flujo tanto como sea necesario.

Otra forma de lograr un flujo único en puntos singulares de la superficie de potencial plástico es mediante el método de *redondeo de aristas* propuesto por Nayak y Zienkiewicz [1972]. Si el estado de tensiones corresponde a una arista, entonces $\partial F / \partial \sigma_{kl}$ o $\partial G / \partial \sigma_{kl}$ se evalúan a ambos lados de la singularidad y se toma un valor promedio. Esto equivale a un redondeo de aristas. Como ejemplos, si se trabaja con el criterio de Tresca, la dirección del flujo plástico en las aristas está dada por la normal al cilindro de Von Mises que pasa por esa arista, cuando se usa el criterio de Mohr-Coulomb se usa la dirección de la normal al cono de Drucker-Prager que pasa por la arista en cuestión.

APENDICE E

TRATAMIENTO NUMERICO DEL MODELO CONSTITUTIVO PROPUESTO

E.1. INTRODUCCION

En la mayoría de los casos, la aplicación del modelo constitutivo propuesto no puede hacerse a mano sino que requiere un método de cálculo adecuado. En esta Tesis se utiliza como método de cálculo el *método de elementos finitos*.

En lo que sigue se estudian algunos aspectos fundamentales del tratamiento numérico de los modelos constitutivos y , en especial, su implementación mediante el método de elementos finitos.

Toda la presentación del método de elementos finitos se hace en forma matricial (como un conjunto ordenado de variables) que es la usual en este

tipo de aplicaciones.

E.2. PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES [Malvern 1969]

Los métodos variacionales se usan mucho en la mecánica del continuo; y conducen al *principio de desplazamientos virtuales* [Malvern 1969]. Este principio difiere de los métodos energéticos en que el trabajo computado es un trabajo ficticio con un conjunto de fuerzas y tensiones *estáticamente admisibles*, supuestas constantes mientras realizan trabajo, sobre un conjunto de *desplazamientos virtuales* infinitesimales *cinemáticamente admisibles*. Las tensiones y desplazamientos no deben necesariamente ser reales.

Se puede demostrar que en los medios deformables el principio de desplazamientos virtuales es equivalente a las condiciones de equilibrio.

Un *campo de tensiones estáticamente admisible* es aquel que satisface las ecuaciones diferenciales de equilibrio (ecuación de equilibrio de Cauchy) en el interior del cuerpo y las condiciones de borde en aquellos lugares en que están explicitadas en términos de tensiones. Aún cuando todas las condiciones de borde estén dadas en términos de tensiones, la distribución de tensiones depende en general, de las propiedades del material. Generalmente, existen varias configuraciones de equilibrio posibles. Cualquiera de ellas puede ser usada en el principio de los desplazamientos virtuales.

Un *campo de desplazamientos cinemáticamente admisible* es aquel que satisface las condiciones de borde prescriptas en términos de desplazamientos y posee derivadas parciales primeras continuas en el interior del cuerpo.

E.2.1. DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Supóngase que a un cuerpo en equilibrio se le impone un conjunto de *desplazamientos virtuales* δu_i en cada punto del mismo. Estos desplazamientos δu_i dependen de la posición en el cuerpo, tienen derivadas parciales primeras continuas y valen $\delta u_i = 0$ donde los desplazamientos están prescriptos.

El trabajo realizado por las fuerzas externas sobre estos

desplazamientos virtuales vale :

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_S \sigma_{ji} n_j \delta u_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV \quad (\text{E.1})$$

Donde:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_i = \sigma_{ji} n_j \text{ fuerzas de superficie} \\ f_i = \text{fuerzas de volumen} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Constantes durante la aplicación} \\ \text{de los desplazamientos virtuales} \end{array}$$

Transformando la integral de superficie en integral de volumen resulta:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V \left[\sigma_{ji} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \underbrace{\delta u_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \right)}_{=0 \text{ por equilibrio}} \right] dV \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} = \delta \epsilon_{ij} + \delta \omega_{ij} \quad (\text{E.3})$$

$\delta \epsilon_{ij}$ y $\delta \omega_{ij}$ son las deformaciones y rotaciones virtuales asociadas con el desplazamiento virtual infinitesimal. En este trabajo las deformaciones y rotaciones virtuales son infinitesimales, pero no hay ninguna restricción sobre ellos, de manera que este principio puede ser usado en problemas con deformaciones y rotaciones finitas.

Como ω_{ij} es un tensor antimétrico; se puede reescribir la ec.(E.2) como:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (\text{E.4})$$

Esta ecuación da lugar al enunciado del principio de desplazamientos virtuales.

E.2.2. ENUNCIADO DEL PRINCIPIO DE DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

[Malvern 1969]

Si un campo de tensiones es estáticamente admisible, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores sobre un campo de desplazamientos virtuales infinitesimales cinemáticamente admisible es igual al dado por la ec.(E.4).

El inverso dice que si el trabajo virtual realizado por las fuerzas exteriores sobre un conjunto de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles es el dado por la ec.(E.4), entonces el campo de tensiones es estáticamente admisible.

E.3. CRITERIOS ENERGETICOS PARA FORMULAR

LA ESTABILIDAD Y LA UNICIDAD DE LA SOLUCION [Oller 1988]

E.3.1. ESTABILIDAD DE LA SOLUCION

Partiendo de una configuración de equilibrio denominada *configuración inicial* en la que las variables del problema son : el campo de desplazamientos u_i , el tensor de tensiones σ_{ij} , el tensor de deformaciones ϵ_{ij} , las fuerzas de superficie f_{s_i} y las fuerzas de volumen f_{v_i} , se le aplica desplazamientos virtuales δu_i y se obtiene una nueva configuración en donde las variables valen :

$$u_i^* = u_i + \delta u_i \quad (E.5)$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij} \quad (E.6)$$

$$\epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij} \quad (E.7)$$

y las fuerzas de superficie y de volumen permanecen inalteradas.

La energía potencial en la nueva configuración puede aproximarse mediante un desarrollo en serie de Taylor de la siguiente manera :

$$\Pi^* = \Pi + \delta\Pi + 1/2! \delta^2\Pi + 1/3! \delta^3\Pi + \dots \tag{E.8}$$

Donde Π es la energía potencial en la configuración inicial y $\delta^i\Pi$ representa la i -ésima variación de la energía potencial.

Despreciando las variaciones de orden superior a dos, el incremento de la energía potencial puede aproximarse como sigue :

$$\Delta\Pi = \Pi^* - \Pi \cong \delta\Pi + 1/2 \delta^2\Pi \tag{E.9}$$

Donde :

$$\delta\Pi = \int_v \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV - \int_v f_{v_i} \delta u_i dV - \int_s f_{s_i} \delta u_i dS \tag{E.10}$$

$$\delta^2\Pi = \int_v \delta\sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV - \int_v \delta f_{v_i} \delta u_i dV - \int_s \delta f_{s_i} \delta u_i dS \tag{E.11}$$

Pero como δu_i representa desplazamientos virtuales sobre la configuración inicial, en equilibrio, entonces $\delta\Pi = 0$.

Resulta entonces :

$$\Delta\Pi \cong 1/2 \delta^2\Pi \tag{E.12}$$

Como δf_{v_i} y δf_{s_i} son ambas nulas, la última ecuación puede escribirse como :

$$\Delta\Pi \cong 1/2 \int_v \delta\sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV \tag{E.13}$$

La condición de estabilidad de la configuración original en la vecindad de un punto de equilibrio puede decidirse a través de la variación de la energía potencial total. Esto es :

$$\text{Si } \Delta\Pi \begin{cases} >0 \text{ la configuración inicial es estable} \\ & \text{para cualquier desplazamiento virtual} \\ <0 \text{ la configuración original es inestable} \\ & \text{para algún desplazamiento virtual} \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Esta condición aplicada a materiales con ablandamiento, permite definir el tamaño de la zona con localización de deformaciones plásticas, donde se produce un incremento de deformación positivo, que junto con el el incremento de deformación negativo que se produce en al zona no plastificada, da lugar a una variación de segundo orden positiva y máxima del trabajo interno sobre todo el volumen del sólido.

Debe observarse la diferencia que existe entre la condición de estabilidad global dada por (E.13) y (E.14) y la condición de estabilidad local establecida por Drucker. Es posible que un punto del sólido viole la condición de estabilidad local de Drucker sin que la respuesta global sea inestable [Oller 1988]

E.3.2. UNICIDAD DE LA SOLUCION

[Valanis 1985, De Borst 1987a, Oller 1988]

Si, a partir de la configuración de origen, se aplican dos desplazamientos virtuales arbitrarios, y cinemáticamente admisibles, δu_{1i} y δu_{2i} , la diferencia de energía potencial entre las dos nuevas configuraciones puede evaluarse aplicando un desplazamiento virtual $\Delta(\delta u_i) = \delta u_{2i} - \delta u_{1i}$, que produce la variación de deformaciones $\Delta(\delta \epsilon_{ij})$ y la variación de tensiones $\Delta(\delta \sigma_{ij})$.

La variación del trabajo de segundo orden está dada por :

$$\Delta(\delta^2\Pi) = \int_v \Delta(\delta \sigma_{ij}) \Delta(\delta \epsilon_{ij}) dV \quad (\text{E.15})$$

De esto se deduce que, si la solución no es única, o sea, si se tienen dos estados con igual tensión ($\Delta(\delta \sigma_{ij})=0$) para dos desplazamientos distintos

$(\delta u_{1_i} \neq \delta u_{2_i})$, resulta $\Delta(\delta^2 \Pi) = 0$. O, lo que es lo mismo, la condición:

$$\Delta(\delta^2 \Pi) = 0 \quad (\text{E.16})$$

es una condición necesaria para la bifurcación de la respuesta, o alternativamente, la condición:

$$\Delta(\delta^2 \Pi) > 0. \quad (\text{E.17})$$

es una condición suficiente para la unicidad de la solución.

E.4. EQUILIBRIO DEL SOLIDO DISCRETO.

FORMULACION MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

[Bathe 1982, Zienkiewicz 1980]

En el método de elementos finitos, el medio continuo se divide mediante líneas o superficies en dominios más pequeños denominados en elementos. Dentro del dominio V^e de un elemento, los desplazamientos $\mathbf{u}^e(x_1, x_2, x_3)$ de cualquier punto se aproximan como:

$$\mathbf{u}^e(x_1, x_2, x_3) \approx \mathbf{N}^e(x_1, x_2, x_3) \mathbf{U}^e \quad (\text{E.18})$$

Donde:

\mathbf{N}^e es un vector fila formado funciones de forma que interpolan los desplazamientos de ciertos puntos nodales del elemento contenidos en el vector \mathbf{U}^e .

Una vez conocidos los desplazamientos, se pueden evaluar las deformaciones en un punto cualquiera del sólido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{L}^e \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{B}^e(x_1, x_2, x_3) \mathbf{U}^e \quad (\text{E.19})$$

Donde \mathbf{L}^e es un operador diferencial y

$$\mathbf{B}^e(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{L}^e \mathbf{N}^e(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{E.20})$$

La condición de equilibrio del volumen discreto V^e puede obtenerse mediante el principio de trabajos virtuales de la siguiente manera :

$$\left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \underline{\sigma}^e dV - \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{f}_V dV - \int_{S^f} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{f}_S dS \right\} \delta \mathbf{U}^e = 0 \quad (\text{E.21})$$

Para que esta igualdad se cumpla para cualquier desplazamiento virtual $\delta \mathbf{U}^e$, debe ser :

$$\mathbb{R}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \underline{\sigma}^e dV - \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{f}_V dV - \int_{S^f} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{f}_S dS = \mathbf{0} \quad (\text{E.22})$$

ó

$$\mathbb{R}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \underline{\sigma}^e dV - \mathbb{F}^e = \mathbf{0} \quad (\text{E.23})$$

Donde :

\mathbb{R}^e : Vector de fuerzas residuales del elemento

\mathbb{F}^e : Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de volumen y fuerzas de superficie externas.

Si se ensamblan las ecuaciones de equilibrio de los n elementos definidos en el sólido, se obtiene la ecuación de equilibrio global del mismo:

$$\mathbb{R} = \mathbb{A} \left[\int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \underline{\sigma}^e dV \right] - \mathbb{F} = \mathbf{0} \quad (\text{E.24})$$

Donde el símbolo \mathbb{A} indica ensamblaje y los vectores de fuerzas residuales \mathbb{R} y de fuerzas externas \mathbb{F} se obtienen ensamblando las correspondientes contribuciones elementales.

La ec.(E.20) es válida cualquiera sea la ley constitutiva del material.

Cuando se utiliza el método de elementos finitos para resolver problemas no lineales como los que surgen de la utilización de la teoría de plasticidad, normalmente se reduce el problema no lineal a una serie de problemas lineales sobre incrementos de carga muy pequeños. La mayoría de los métodos utilizan la matriz de rigidez tangente definida como :

$$\mathbf{K}^t = \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{n}{A} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^e} \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dV - \mathbb{F}^e \right] \quad (\text{E.25})$$

$$\mathbf{K}^t = \frac{n}{A} \left[\int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_{ep}^t \mathbf{B}^e dV \right] \quad (\text{E.26})$$

Donde \mathbf{C}_{ep}^t es la forma matricial del tensor elastoplástico tangente.

E.5. DISCRETIZACION ESPACIAL [Zienkiewicz 1980]

La discretización espacial en elementos finitos puede hacerse de diversas maneras. Existen distintos tipos de familias de elementos finitos y, a su vez, se puede variar dentro de ellas el orden de los polinomios de integración. En general el elemento óptimo debe determinarse para cada caso en especial.

Se puede demostrar que el orden de error en la aproximación es $O(h^{p+1})$ donde h es el *tamaño* del elemento y p el grado del polinomio completo que aparece en el desarrollo. Evidentemente, al aumentar el grado de las funciones de formas, aumentará también la potencia del error y la convergencia hacia la solución exacta se hará más rápida [Zienkiewicz 1980] .

Un problema importante a resolver en cualquier análisis mediante el método de elementos finitos es la solución de las integrales intervinientes en las ecuaciones (E.24) y (E.26). La integración exacta de estas ecuaciones es muy engorrosa aún en problemas sencillos. En el caso de elementos finitos más complejos distorsionados, la integración numérica es imprescindible.

E.5.1. INTEGRACION NUMERICA [Zienkiewicz 1980, Bathe 1982]

Para encontrar numéricamente el valor de una integral se pueden seguir básicamente dos tipos de procedimientos:

- *Cuadratura de Newton Cotes*

En primer lugar se determina el número de puntos en los que se precisa el valor de la función (generalmente espaciados a intervalos iguales), se hace pasar un polinomio por los valores de la función en esos puntos y se integra exactamente ese polinomio.

Como n valores de la función definen un polinomio de grado $n-1$, el error será del orden de $O(\Delta^n)$, donde Δ es la separación entre puntos. Esto conduce a la conocida fórmula de *Newton Cotes*. Para $n=2$ se obtiene la *regla del trapecio* y para $n=3$ se obtiene la *regla de Simpson*.

- *Cuadratura de Gauss*

Si en lugar de especificar a priori la posición de los puntos en los que precisa el valor de la función, estos se encuentran de manera que se alcance la mayor precisión posible para un número de puntos dados, pueden conseguirse resultados más exactos.

Por ejemplo para una función de una variable la integral se escribe:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (E.27)$$

Para n puntos se tienen $2n$ incógnitas (H_i y ξ_i) y, por lo tanto, se puede formar un polinomio de grado $2n-1$ y obtener su integral exacta. El error sería así de orden $O(\Delta^{2n})$.

La solución puede obtenerse explícitamente en función de polinomios de Legendre por eso este método particular suele ser conocido como *cuadratura de*

Gauss Legendre.

Cuando se opta por una integración numérica se debe decidir qué tipo de procedimiento de integración utilizar y de qué orden.

Como en elementos finitos el número de evaluaciones de la función incrementa directamente el costo del análisis, el uso de las reglas de cuadratura de Gauss es atractivo. Sin embargo, las fórmulas de Newton Cotes pueden ser más eficientes en problemas de no linealidad geométrica en donde se produce distorsión de los elementos.

E.5.1.1. Orden de Integración Necesario¹

[Bathe 1982, Zienkiewicz 1980]

La elección del orden de integración es muy importante porque, en primer lugar, el costo del análisis se incrementa cuando se utiliza una integración de alto orden y, en segundo lugar, utilizar un orden de integración bajo puede afectar los resultados.

Al elegir un orden de integración se debe observar que, utilizando un orden suficientemente alto, todas las matrices se evalúan exactamente. En el otro extremo, si se utiliza un orden de integración demasiado bajo, las matrices pueden ser evaluadas muy imprecisamente y, de hecho, puede ocurrir que la solución del problema sea imposible. En general, el orden de integración apropiado depende de la matriz que se está integrando y del elemento finito considerado. Por ejemplo, se puede demostrar que para integrar exactamente la matriz de rigidez de un elemento isoparamétrico de cuatro nodos es suficiente con tomar 2x2 puntos de Gauss de integración.

En algunos casos no muy frecuentes de no linealidad geométrica, debe usarse una regla de integración de orden mayor que la que se utilizaría en un análisis lineal. En los problemas con no linealidad física, a veces también es conveniente trabajar con integraciones de orden mayor porque de esta

¹El orden de integración se define como el número de puntos de integración necesarios en cada dirección local del elemento. Una cuadratura de Gauss de orden n integra exactamente un polinomio de grado n en una dirección.

manera se puede captar mejor el comienzo y la distribución de la no linealidad. Como las no linealidades del material se evalúan sólo en los puntos de integración, el uso de una integración de orden demasiado bajo podría significar que la distribución de la no linealidad no esté bien representada.

Suponiendo que se asegura la convergencia, la formulación basada en desplazamientos del método de elementos finitos, provee un *límite inferior* para el valor exacto de la energía de deformación del sistema [Bathe 1982], o, dicho de otra forma, una formulación basada en desplazamientos sobreestima la rigidez del sistema. Entonces, si no se evalúa las matrices de rigidez exactamente en la integración numérica, puede lograrse resultados mejores siempre que el error en la integración numérica compense adecuadamente la sobreestimación de la rigidez estructural debida a la discretización en elementos finitos. En otras palabras, la *reducción del orden de integración* por debajo del que se requiere para integrar exactamente la matriz de rigidez puede conducir, en muchos casos, a mejores resultados. Adicionalmente, a veces es más conveniente utilizar una *integración selectiva*, es decir, integrar los diferentes términos de deformación con diferentes órdenes de integración. Por otro lado, existen algunos problemas, que se detallan en el punto siguiente, que hacen necesario el empleo de algunos de estos tipos de integración.

E.5.1.2. Problemas de Incompresibilidad

Los elementos finitos estándares tienen el problema de que bloquean cuando el material se vuelve incompresible.

Se han hecho muchos intentos para desarrollar formulaciones de elementos finitos satisfactorias para medios incompresibles o casi incompresibles [Hughes 1980, 1987]. Las dos técnicas más conocidas para tratar el problema son : la técnica de *integración reducida/selectiva* [Hughes 1979, Malkus 1978] y la *formulación de la dilatación media* [Nategaal 1974]. Ambas técnicas han probado ser satisfactorias en una variedad de problemas y pueden ser usadas efectivamente con elementos de bajo orden.

INTEGRACION REDUCIDA/SELECTIVA

El primer ejemplo de *integración reducida* de un elemento fue el elemento de placa/cáscara presentado por Zienkiewicz et al [Zienkiewicz 1971]. Se empleaba una regla de cuadratura de 2×2 en un elemento serendipity de 8 nodos en el que se notaba una considerable mejora sobre la regla de cuadratura de Gauss de 3×3 . El mismo concepto fue usado por Naylor [Naylor 1974] y Zienkiewicz y Godbole [Zienkiewicz 1975] en problemas de incompresibilidad.

El concepto de *integración selectiva* fue usado por primera vez por Doherty et al [Doherty 1969] para mejorar el comportamiento a flexión de elementos elásticos de 4 nodos. Se usaba un punto de Gauss para el término de deformaciones por corte y cuadratura de 2×2 para los restantes términos. Aunque en algunas configuraciones se notaba una mejora en el comportamiento, la falta de invarianza hizo que este enfoque se abandonara.

Estudios llevados a cabo por Fried [Fried 1974], Nagtegaal et al [Nagtegaal 1974] y Argyris et al [Argyris 1974] revelaron por qué el método de los desplazamientos fallaba en problemas incompresibles. Fue Fried [1974] el primero en sugerir una integración reducida/selectiva como una posible solución. Desde entonces se ha avanzado considerablemente tanto teórica como prácticamente en el tema. Malkus [Malkus 1976a y b] aplicó la técnica de integración reducida/selectiva a problemas de reología. Hughes y otros coautores aplicaron el concepto a problemas de elasticidad lineal y no lineal, ecuaciones de Navier-Stokes y flexión de placas [Malkus 1978].

Las técnicas de integración reducida/selectiva pueden emplearse con éxito en problemas en los que las ecuaciones matriciales pueden separarse en una parte volumétrica y otra desviadora. La parte volumétrica es tratada con cuadratura reducida, aliviando el bloqueo de la malla. En los términos restantes, en cambio, se usa cuadratura completa para mantener el rango de las matrices elementales. En problemas anisótropos y/o no lineales, no es tan fácil separar las ecuaciones matriciales en una parte volumétrica y otra desviadora. En principio, siempre se puede separar la matriz de rigidez en una parte volumétrica, otra desviadora y otra de términos acoplados volumétrico-desviadores. Pero esto tiene dos problemas fundamentales: no se

sabe cómo tratar los términos acoplados y la implementación elemental es bastante difícil. Es por esto que esta técnica no se ha difundido en los programas de elementos finitos no lineales. La alternativa que se usa en estas situaciones es emplear una integración reducida unificada que tiene el problema de engendrar deficiencias de rango, o usar elementos de alto orden (típicamente cúbicos) que, aunque no son especialmente exactos en problemas de incompresibilidad, convergen y son seguros. Por supuesto, el costo inherente de adoptar elementos tan complejos hace que sean inutilizables en problemas prácticos.

FORMULACION DE LA DILATACION MEDIA [Nagtegaal 1974]

Se encuentra frecuentemente que las soluciones de matriz tangente de problemas de elementos finitos para materiales elasto-plásticos exhiben una respuesta demasiado rígida en el rango plástico. Esto es más notable en el caso de materiales perfectamente plásticos. En esos casos las soluciones de elementos finitos exceden considerablemente la carga límite o directamente no presentan carga límite. Se puede demostrar que la causa de esta inexactitud es que los campos incrementales de deformación de elementos finitos de dos y tres dimensiones están altamente restringidos en o cerca de la carga límite.

El requerimiento absoluto para la existencia de la carga límite es que el incremento de deformación volumétrica $\dot{\epsilon}_{kk}$ se anule. Se ha demostrado que sólo algunos pocos elementos convencionales son adecuados o pueden adaptarse para que sean adecuados para analizar problemas con estas restricciones. Es entonces deseable lograr elementos finitos diferentes en los cuales se necesite menos restricciones por elemento para satisfacer las condiciones de incompresibilidad. Esto se puede lograr teniendo el cuidado de que la dilatación volumétrica esté gobernada por menos parámetros que en los elementos convencionales. Claramente este procedimiento sólo puede ser aplicado a elementos de alto orden para los cuales el número de condiciones de restricción por elemento excede la unidad.

Una forma alternativa de resolver el problema es la propuesta por Nagtegaal [Nagtegaal 1974] que consiste en crear un principio variacional en el cual el incremento de deformación volumétrica y los incrementos de

desplazamientos están presentes como variables independientes. Se tiene entonces completa libertad para caracterizar la deformación volumétrica por tan pocos parámetros como se elija.

El funcional se puede expresar completamente en términos de los desplazamientos nodales por lo que no se debe usar variables adicionales. El funcional resultante es idéntico al usual con excepción de la relación entre incrementos de deformaciones e incrementos de desplazamientos. Esto hace que sea extremadamente simple adaptar programas de elementos finitos ya existentes. Sólo hace falta modificar la matriz que convierte los desplazamientos nodales en deformaciones.

A modo de ejemplo, para un elemento cuadrilátero de 4 nodos, la deformación se define como :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{\phi} \delta_{ij} \tag{E.28}$$

Donde :

$\dot{\epsilon}_{ij}$: Nueva definición del incremento de deformación

\dot{e}_{ij} : Incremento de deformación desviadora

$\dot{\phi}$: Incremento de deformación volumétrica (variable independiente) definida para elemento α como :

$$\dot{\phi}_\alpha = V_\alpha^{-1} \int_{V_\alpha} \dot{u}_{k,k} dV_\alpha \tag{E.29}$$

Donde :

\dot{u}_k : Incremento de desplazamiento

V_α : Volumen del elemento α

Es claro que en este caso ϕ representa la dilatación media del elemento.

El incremento de deformación se puede expresar entonces como :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(V_{\alpha}^{-1} \int_{V_{\alpha}} \dot{u}_{k,k} dV_{\alpha} - \dot{u}_{k,k} \right) \quad (E.30)$$

En la presentación original de la formulación de la dilatación media se dio una posible generalización a elementos de alto orden. Sin embargo, las aplicaciones que se han presentado hasta ahora han estado limitadas a elementos cuadriláteros de 4 nodos o ladrillos de 8 nodos. En problemas rectilíneos es idéntica a la técnica de integración selectiva pero en el caso de problemas axilimétricos es diferente y presenta algunas ventajas [Hughes 1979]

METODO B-BAR

Hughes [Hughes 1980] presenta un nuevo procedimiento que generaliza las técnicas de integración selectiva y de la dilatación media y que puede implementarse simplemente en problemas anisótropos y/o no lineales.

Si se considera un elemento finito típico, la matriz de rigidez y las fuerzas internas pueden calcularse respectivamente de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{ep}^t \mathbf{B} d\Omega \quad (E.31)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \underline{\sigma} d\Omega \quad (E.32)$$

La matriz deformación-desplazamiento se puede expresar en términos de las submatrices nodales como sigue :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \dots \mathbf{B}_n] \quad (E.33)$$

donde n es el número de nodos del elemento.

En un análisis tridimensional una matriz típica \mathbf{B}_a , con $1 \leq a \leq n$, tiene la forma :

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \\ \hline B_2 & B_1 & 0 \\ 0 & B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & B_1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.34})$$

Donde :

$$B_i = \partial N_a / \partial x_i \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (\text{E.35})$$

N_a : Función de forma asociada con el nodo a

x_i : i-ésima coordenada cartesiana

Las expresiones anteriores son estándar pero deben ser modificadas para poder aplicarse con éxito en materiales incompresibles.

La parte volumétrica de la matriz \mathbf{B}_a puede escribirse como :

$$\mathbf{B}_a^{\text{dil}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.36})$$

y la parte desviadora como :

$$\mathbf{B}_a^{\text{dev}} = \mathbf{B}_a - \mathbf{B}_a^{\text{dil}} \quad (\text{E.37})$$

Para lograr una formulación efectiva para problemas de incompresibilidad $\mathbf{B}_a^{\text{dil}}$ debe ser reemplazada por una contribución dilatacional "mejorada", denominada $\bar{\mathbf{B}}_a^{\text{dil}}$:

$$\bar{\mathbf{B}}_a^{dil} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \bar{B}_2 & \bar{B}_3 \\ \bar{B}_1 & \bar{B}_2 & \bar{B}_3 \\ \bar{B}_1 & \bar{B}_2 & \bar{B}_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (E.38)$$

En lugar de \mathbf{B}_a se emplea ahora :

$$\bar{\mathbf{B}}_a = \mathbf{B}_a^{dev} + \bar{\mathbf{B}}_a^{dil} \quad (E.39)$$

Es claro que todo este enfoque se reduce a definir apropiadamente los \bar{B}_i .

Supóngase que la regla de cuadratura para integrar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales está especificada (regla normal de cuadratura). Se define ahora otra regla de cuadratura que se considera una regla "reducida". Para esta regla \bar{n}_{int} y $\bar{\xi}_a$ denotan el número de puntos y su ubicación respectivamente. Se define un conjunto especial de funciones \bar{N}_a con puntos nodales en los $\bar{\xi}_a$. La forma general de $\bar{\mathbf{B}}_a^{dil}$ está dada por:

$$\bar{B}_i(\xi) = \sum_{a=1}^{\bar{n}_{int}} \bar{N}_a(\xi) B_{ai} \quad (E.40)$$

Donde ξ representa la coordenada natural del elemento y los B_{ai} se define en los próximos ejemplos [Hughes 1987].

Ejemplo 1 : Generalización de la integración selectiva [Hughes 1987]

A modo de ejemplo, considérese un cuadrilátero de cuatro nodos bilineal. La regla normal de integración es una regla de Gauss de 2x2 puntos. Supóngase

como regla reducida una regla de Gauss de un punto, de modo que $\bar{n}_{int}=1$, $\bar{N}=1$ y $\xi_i=0$ (centro del elemento). Entonces la ec.(E.40) se reduce a :

$$\bar{B}_i(\xi) = B_i(0) \quad (E.41)$$

Es decir que se utiliza el centro del elemento para computar la contribución dilatacional.

Ejemplo 2 : Generalización de la formulación de la dilatancia media [Hughes 1987]

Un enfoque que generaliza la formulación de la *dilatancia media* [Nagtegaal 1974] es el siguiente:

$$B_{ai} = \sum_{a=1}^{\bar{n}_{int}} m_{ab}^{-1} \int_{\Omega^e} \bar{N}_b(\xi) B_i d\Omega \quad (E.42)$$

Donde:

$$m_{ab} = \int_{\Omega^e} \bar{N}_a(\xi) \bar{N}_b(\xi) d\Omega \quad (E.43)$$

Para el caso del elemento de cuatro nodos del ejemplo anterior, la ecuación (E.42) se reduce a :

$$\bar{B}_i(\xi) = \frac{\int_{\Omega^e} B_i d\Omega}{\int_{\Omega^e} d\Omega} \quad (E.44)$$

Es decir que se utiliza el valor medio de B_i para computar la

contribución dilatacional lo cual es una generalización de la ec.(E.29).

Para un elemento cuadrilátero de 4 nodos, Ortiz [Ortiz 1987] propone la siguiente forma para $\bar{\mathbf{B}}_a$:

$$\bar{\mathbf{B}}_a(\xi) = \mathbf{B}_a^{\text{dev}}(\xi) + \delta \mathbf{B}_a^{\text{dil}}(\xi) + (1-\delta) \bar{\mathbf{B}}_a^{\text{dil}}(\xi_0) \quad (\text{E.45})$$

Donde el último término está evaluado en el centro del elemento, ξ_0 , y δ es un pequeño factor de estabilización incluido para suprimir modos de presión espúreos.

Las definiciones de \mathbf{B}_a y $\mathbf{B}_a^{\text{dil}}$ no son triviales en problemas de grandes deformaciones.

E.6. DISCRETIZACION TEMPORAL

Además de las integrales espaciales sobre las que se trató en el apartado anterior la solución de un problema con no linealidad física, requiere en la mayoría de los casos, una integración temporal de la ecuación constitutiva. Si el modelo constitutivo del material está escrito en forma diferencial como es el caso del modelo presentado en esta Tesis, es necesario integrar dichas ecuaciones dentro de un intervalo finito de tiempo. Esto es lo que se denomina *integración de la ecuación constitutiva*. Como el tema es de especial importancia para la exactitud general del análisis, se lo desarrolla en un apéndice aparte (Apéndice F).

E.7. SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES (E.24) [Crisfield 1991]

Cuando la respuesta del sólido es no lineal, el sistema de ecuaciones (E.24) es un sistema de ecuaciones no lineales, cuya solución puede hacerse fundamentalmente con dos tipos de métodos: aquellos que ajustan la ecuación $\mathbb{R} = 0$ y aquellos que procuran ajustar, dentro de cierta tolerancia, $\dot{\mathbb{R}} = 0$.

En general, los métodos del primer grupo son iterativos y dentro de ellos se pueden citar:

- *Método de la rigidez variable o rigidez secante* en el que se usa la matriz secante actualizada en la iteración anterior
- *Método de Newton Raphson* en el que se utiliza rigidez tangente actualizada y las fuerzas residuales para calcular la corrección del vector de desplazamientos. Tiene convergencia cuadrática
- *Método de Newton Raphson modificado* utiliza siempre la rigidez tangente en el origen y, de esta forma, evita la construcción y triangularización de la matriz de rigidez en cada iteración a expensas de la pérdida de velocidad de convergencia.
- *Newton conjugado* que mejora la búsqueda de la solución exigiendo que la corrección de los desplazamientos siga una determinada dirección.
- *Quasi-Newton* que intentan recuperar las ventajas del método de Newton Raphson a menor costo computacional, calculando el jacobiano a partir de los valores de las fuerzas residuales, en lugar de sus derivadas.
- *Newton secante* que puede ser visto como otra versión de los métodos quasi-Newton
- *Minimización directa de las ecuaciones de potencial*

Dentro del segundo grupo se encuentran los *métodos incrementales y de perturbación estática*. Si bien estos métodos no requieren iteraciones, tienen el problema de que se van apartando de la solución, presentando el denominado "*drifting*".

Con frecuencia suele utilizarse una combinación de estos dos tipos de métodos que disminuye el número de iteraciones y evita el "*drifting*". El procedimiento consiste en dividir la historia de carga en etapas, dentro de las cuales se usa el procedimiento iterativo, generalmente Newton modificado con la matriz tangente evaluada al comienzo de cada incremento o después de la primera iteración de cada incremento.

De todos estos métodos, los que se utilizan con más frecuencia en la implementación de modelo constitutivo propuesto en esta tesis son el método de Newton Raphson, el método de Newton Raphson modificado y la combinación incremental-Newton Raphson modificado. En el punto siguiente se describe el método de Newton Raphson.

El método de Newton Raphson no es eficiente cuando se tiene respuestas con ablandamiento ya que no puede sobrepasarse el punto de rigidez nula (punto crítico) donde se produce un cambio de problema elíptico a parabólico. A medida que la matriz de rigidez se va aproximando a la singularidad, el número de iteraciones aumenta, aunque las etapas de carga sean reducidas y, finalmente, la solución diverge.

En las últimas décadas se han propuesto numerosos métodos que permiten salvar *puntos críticos* y otros problemas como *snap through* y *snap back* que aparecen cuando se considera la no linealidad geométrica. Estos métodos se denominan, en general, *métodos de control de respuesta* y se tratan a continuación del método de Newton Raphson.

En el Anexo E1 se esquematiza un programa de elementos finitos para problemas con no linealidad física.

E.7.1. METODO DE NEWTON RAPHSON [Crisfield 1991, Hinton y Owen 1980]

El método de Newton Raphson es un método clásico para la solución de ecuaciones no lineales. En el caso de una ecuación de una única variable:

$$f(x) = 0 \quad (\text{E.46})$$

La solución de la misma se obtiene como:

$$x^i = x^{i-1} + \Delta x^i \quad (\text{E.47})$$

Donde:

$$\Delta x^i = - \frac{f(x^{i-1})}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i-1}} \tag{E.48}$$

En la figura E.1 se ha representado esquemáticamente el proceso de búsqueda de la solución.

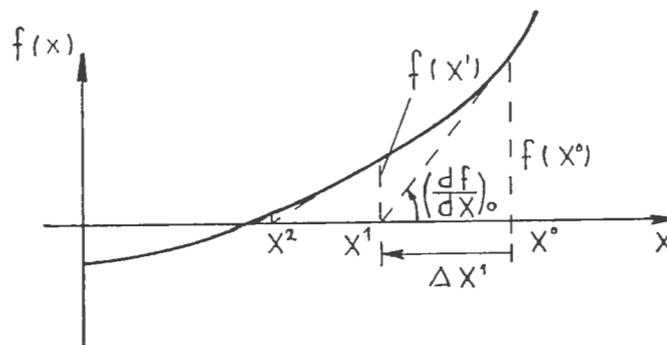


Fig.E.1 Solución de la ecuación no lineal $f(x)=0$ mediante el método de Newton Raphson

La posibilidad de encontrar una solución correcta mediante este método depende de una buena elección del valor inicial de x (x^0).

El método de Newton Raphson tiene *convergencia de segundo orden* porque ajusta la función y su derivada primera. Cuando se puede aplicar, es un método muy eficiente.

Extendiendo la idea a un espacio n dimensional, se trata de resolver un sistema de ecuaciones no lineales del tipo:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{E.49}$$

A partir de un punto \mathbf{x}^0 se hace un desarrollo en serie de Taylor:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}^0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2!} \dots \quad (\text{E.50})$$

Donde \mathbf{J}^0 es la *matriz jacobiana del sistema*.

$$\mathbf{J}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}^0 \quad (\text{E.51})$$

Tomando sólo el término lineal de la serie y haciendo el desarrollo alrededor de \mathbf{x}^{i-1} , se obtiene:

$$f(\mathbf{x}^i) = f(\mathbf{x}^{i-1} + \Delta \mathbf{x}^i) = f(\mathbf{x}^{i-1}) + \mathbf{J}^{i-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{i-1}) \quad (\text{E.52})$$

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} - \left(\mathbf{J}^{i-1} \right)^{-1} f(\mathbf{x}^{i-1}) \quad (\text{E.53})$$

En el problema que se trata la ecuación no lineal a resolver es:

$$\mathbb{R}(\mathbf{U}) = \underbrace{\sum_{e=1}^n \int_{V^e} \mathbf{B}^e \sigma^e dV}_{\text{Fuerzas internas}} - \mathbb{F} = \mathbf{0} \quad (\text{E.54})$$

Por lo que la solución se obtiene como:

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{U}^{i-1} - \left(\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{i-1}^{-1} \mathbb{R} = \mathbf{U}^{i-1} - \left(\mathbf{K}^{i-1} \right)^{-1} \mathbb{R} \quad (\text{E.55})$$

Donde la matriz tangente \mathbf{K}^i se calcula según la ec.(E.26).

En la fig.E.2 se ha esquematizado el proceso de solución para un sistema de un solo grado de libertad.

Este método requiere un gran trabajo computacional debido a que se debe calcular las fuerzas internas y la matriz de rigidez en cada iteración además de resolver el sistema completo (triangularización y retrosustitución). Para

disminuir el trabajo computacional se puede utilizar siempre la matriz tangente en el origen con lo cual en cada iteración sólo deben calcularse las fuerzas internas y realizarse la retrosustitución. Se logra así el *método de Newton Raphson Modificado* en el que se pierde la tasa de convergencia cuadrática. La ecuación general de este método es :

$$U^i = U^{i-1} - \left(K^{t^0} \right)^{-1} R \tag{E.56}$$

y en la fig.E.3 se ha esquematizado el proceso de solución para un sistema de un grado de libertad.

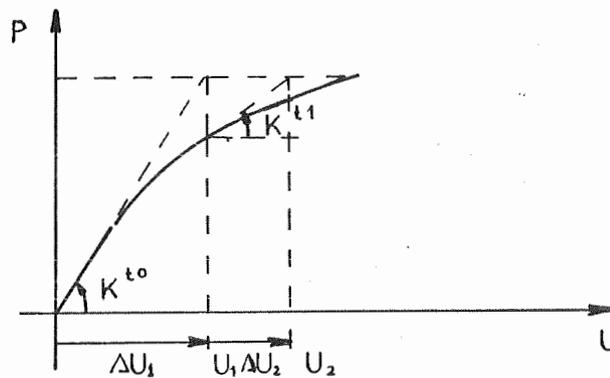


Fig.E.2 Método de Newton Raphson
(sistema de un grado de libertad)

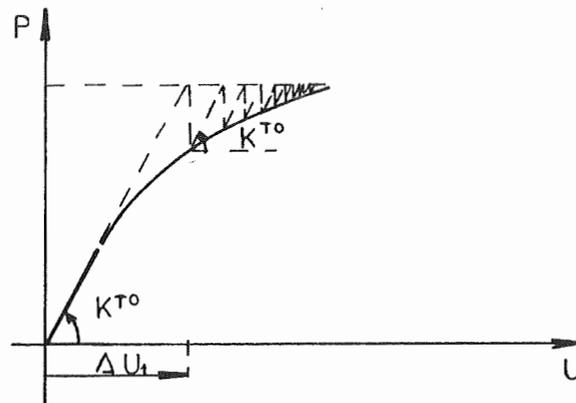


Fig.E.3. Método de Newton Raphson modificado
(sistema de un grado de libertad)

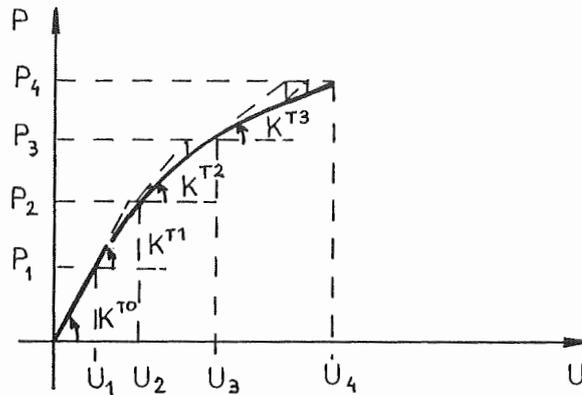


Fig.E.4. Método mixto incremental-iterativo
(Sistema de un grado de libertad)

Otra alternativa es trabajar con un método mixto: dividir la carga en etapas dentro de las cuales se trabaja con el método de Newton Raphson, actualizando la rigidez sólo en la primera o segunda iteración de cada etapa de carga. En la fig.E.4 se ha esquematizado este procedimiento para un sistema de un grado de libertad.

E.7.2. METODO GENERAL DE CONTROL DE RESPUESTA

[Oller 1988, Crisfield 1991]

Para un cierto incremento de carga m , la ecuación de equilibrio global de un sólido discreto se puede escribir como:

$$R(U_m, \mu_m) = \frac{n}{A} \left[\int_{V^e} B^{eT} \sigma^e dV \right] - \mu_m F = 0 \tag{E.57}$$

Donde U_m es el vector desplazamientos nodales en la etapa de carga m y μ_m el factor de carga correspondiente a dicha etapa.

El método está formulado para carga proporcional, en cada etapa de carga m la carga total está dada por $F_m = \mu_m F$. Sin embargo, con muy pequeños cambios puede extenderse a carga no proporcional.

El factor μ_m es una variable adicional que se ajusta automáticamente a través de una ecuación de restricción del tipo:

$$h(\mathbf{U}_m, \mu_m) = 0 \quad (\text{E.58})$$

Entonces, la solución del problema es la que cumple simultáneamente con

$$\begin{cases} \mathbb{R}(\mathbf{U}_m, \mu_m) = \mathbf{0} \\ h(\mathbf{U}_m, \mu_m) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.59})$$

La solución simultánea de estas N+1 ecuaciones con N+1 incógnitas, donde N es el número de grados de libertad del sistema, destruye las características de simetría y banda de las ecuaciones de equilibrio del sistema. Para evitar este problema, se utiliza la siguiente aproximación: se desarrolla en serie el vector de fuerzas residuales y se conserva sólo los términos de primer orden:

$$\mathbb{R}(\mathbf{U}_{m,i-1} + \delta\mathbf{U}_{m,i}, \mu_{m,i-1} + \delta\mu_{m,i}) = \mathbb{R}(\mathbf{U}_{m,i-1}, \mu_{m,i-1}) + \left[\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{m,i-1} \delta\mathbf{U}_{m,i} + \left[\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mu} \right]_{m,i-1} \delta\mu_{m,i} \quad (\text{E.60})$$

Donde $\delta\mathbf{U}_{m,i}$ y $\delta\mu_{m,i}$ son respectivamente los incrementos de desplazamientos y del factor de carga correspondientes a la iteración i del incremento de carga m.

Además:

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K}^t \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mu} = -\mathbb{F} \quad (\text{E.61})$$

Donde \mathbf{K}^t es la matriz de rigidez tangente global de la estructura.

Entonces la ec.(E.60) puede escribirse como:

$$\mathbb{R}(\mathbf{U}_{m,i-1}, \mu_{m,i-1}) + \mathbf{K}^t(\mathbf{U}_{m,i-1}) \delta\mathbf{U}_{m,i} - \mathbb{F} \delta\mu_{m,i} = 0 \quad (\text{E.62})$$

De donde se puede escribir:

$$\delta \mathbf{U}_{m,i} = \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i} + \delta \mu_{m,i} \mathbf{U}_{m1} \quad (\text{E.63})$$

Donde:

$$\delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i} = - \left(\mathbf{K}^t(\mathbf{U}_{m,i-1}) \right)^{-1} \mathbb{R}(\mathbf{U}_{m,i-1}, \mu_{m,i-1}) \quad (\text{E.64})$$

$$\mathbf{U}_{m1} = \left(\mathbf{K}^t(\mathbf{U}_{m,i-1}) \right)^{-1} \mathbb{F} \quad (\text{E.65})$$

Entonces el incremento de desplazamientos correspondiente al incremento de carga m , después de la iteración i queda como:

$$\Delta \mathbf{U}_{m,i} = \Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \mathbf{U}_{m,i} \quad (\text{E.66})$$

y el desplazamiento:

$$\mathbf{U}_{m,i} = \mathbf{U}_{m-1} + \Delta \mathbf{U}_{m,i} \quad (\text{E.67})$$

Sustituyendo en la ecuación de restricción (E.58) se obtiene el incremento del factor de carga $\delta \mu_{m,i}$ y el factor de carga correspondiente:

$$\mu_{m,i} = \mu_{m,i-1} + \delta \mu_{m,i} \quad (\text{E.68})$$

El procedimiento puede resumirse en los siguientes pasos:

- a) Obtención del incremento de desplazamientos $\delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i}$ para el nivel actual de fuerzas residuales.
- b) Obtención del desplazamiento total \mathbf{U}_{m1} para el nivel de carga total
- c) Obtención del factor de carga $\delta \mu_{m,i}$ a partir de la ecuación de restricción

d) Actualización de los desplazamientos y del nivel de carga.

Este procedimiento se repite en forma iterativa hasta lograr convergencia.

A continuación se presentan dos de las formas de control de respuesta más utilizadas.

E.7.2.1. Control de Desplazamientos [Ramm 1981]

Este método consiste en intercambiar las variables dependientes e independientes del problema. Se prescribe una de las componentes de desplazamiento, elegida como parámetro de control, y el correspondiente nivel de carga es tomado como una incógnita.

Por simplicidad, supóngase que la ec.(E.62) es reordenada de modo que el desplazamiento prescrito $\delta U_{2_{m,i}}$ es el último en el vector de desplazamientos $\delta U_{m,i}$. La ec.(E.62) puede ser descompuesta entonces en dos partes como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^t & \mathbf{K}_{12}^t \\ \mathbf{K}_{21}^t & \mathbf{K}_{22}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_{1_{m,i}} \\ \delta U_{2_{m,i}} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbb{R}_{1_{m,i-1}} \\ \mathbb{R}_{2_{m,i-1}} \end{Bmatrix} + \delta \mu_{m,i} \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{E.69}$$

Cambiando las variables queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^t & -\mathbb{F}_1 \\ \mathbf{K}_{21}^t & -\mathbb{F}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_{1_{m,i}} \\ \delta \mu_{m,i} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbb{R}_{1_{m,i-1}} \\ \mathbb{R}_{2_{m,i-1}} \end{Bmatrix} - \delta U_{2_{m,i}} \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{12}^t \\ \mathbf{K}_{22}^t \end{Bmatrix} \tag{E.70}$$

La pérdida de simetría y banda de la matriz de rigidez es un gran inconveniente. Para evitarlo, la solución de esta ecuación puede formarse por dos partes de la siguiente manera:

$$\delta U_{1,m,i} = \delta \mu_{m,i} \delta U_{1,m,i}^{(1)} + \delta U_{1,m,i}^{(II)} \quad (E.71)$$

Donde:

$$\mathbf{K}_{11}^{tm} \delta U_{1,m,i}^{(I)} = \mathbb{F}_1 \quad (E.72)$$

$$\mathbf{K}_{11}^{tm} \delta U_{1,m,i}^{(II)} = -R_{1,m,i-1} - \underline{\mathbf{K}_{12}^{tm} \delta U_{2,m,i}} \quad (E.73)$$

El parámetro de carga se calcula entonces, a partir de la ec.(E.70), como:

$$\delta \mu_{m,i} = \frac{-R_{2,m,i-1} + \mathbf{K}_{21}^{tm} \delta U_{1,m,i}^{(II)} + \mathbf{K}_{22}^{tm} \delta U_{2,m,i}}{\mathbb{F}_2 - \mathbf{K}_{21}^{tm} \delta U_{1,m,i}^{(I)}} \quad (E.74)$$

Como el desplazamiento $U_{2,m}$ se mantiene constante durante las iteraciones, los términos subrayados deben ser omitidos en las próximas iteraciones.

Una simplificación valiosa de este método consiste en trabajar con toda la matriz de rigidez completa y reemplazar las ecuaciones (E.72) y (E.73) por:

$$\mathbf{K}^{tm} \delta U_{m,i}^{(I)} = \mathbb{F} \quad (E.75)$$

$$\mathbf{K}^{tm} \delta U_{m,i}^{(II)} = -R_{m,i-1} \quad (E.76)$$

Nuevamente se suma las dos soluciones para obtener el vector de desplazamientos:

$$\delta U_{m,i} = \delta \mu_{m,i} \delta U_{m,i}^{(I)} + \delta U_{m,i}^{(II)} \quad (E.77)$$

Este vector incluye también la componente prescripta:

$$\delta U_{2,m,i} = \delta \mu_{m,i} \delta U_{2,m,i}^{(1)} + \delta U_{2,m,i}^{(11)} = \delta U_{2,m} \quad (E.78)$$

La ec.(E.78) es usada como ecuación de restricción en la primera iteración de cada etapa de carga y permite determinar el incremento del factor de carga:

$$\delta \mu_{m,o} = \frac{\delta U_{2,m} - \delta U_{2,m,o}^{(11)}}{\delta U_{2,m,o}^{(1)}} \quad (E.79)$$

Para todas las iteraciones siguientes U_2 no cambia entonces:

$$\delta \mu_{m,i} = - \frac{\delta U_{2,m,i}^{(11)}}{\delta U_{2,m,i}^{(1)}} \quad (E.80)$$

Si se aplica el método de Newton Raphson modificado, la ec.(E.75) sólo debe resolverse una vez cuando se actualiza la matriz de rigidez.

La iteración se continua hasta que se ajustan las otras componentes de desplazamiento y se encuentra la nueva posición de equilibrio.

Este método se utiliza para mejorar la convergencia en toda la historia de carga y sobrepasar puntos límite pero falla cuando se presenta "*snap back*".

Una modificación obvia de este método es incluir todos los desplazamientos en lugar de uno solo y eso da lugar a los métodos que se discuten a continuación.

E.7.2.2. Metodo de Longitud de Arco

[Crisfield 1981, 1982, 1983, 1986, 1991, Ramm 1981, Bellini 1987, Oller 1988]

El método original de la *longitud de arco* fue presentado por Riks [1972] quien propuso un procedimiento que permitía mejorar la convergencia y sobrepasar puntos límite. Con ese fin, añadió a las ecuaciones de equilibrio estándar una ecuación de restricción que fija la longitud del incremento de carga en el espacio carga-desplazamiento. El nivel de carga aplicado se convierte entonces en una variable adicional.

La restricción propuesta por Riks [Riks 1972], que se añade a las N ecuaciones de equilibrio, es la siguiente:

$$\Delta \mathbf{U}_{m,i}^T \Delta \mathbf{U}_{m,i} + b^2 \Delta \mu_{m,i}^2 \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.81})$$

Donde:

$$\Delta \mu_{m,i} = \mu_{m,i} - \mu_{m-1,n} \quad (\text{E.82})$$

$\mu_{m-1,n}$: factor de carga de la etapa m-1 obtenido después de n iteraciones.

b : parámetro de escala de la carga

$\Delta l_{m,i}$: Longitud del incremento de carga en el espacio N+1 dimensional.

Para b=1 se obtiene el *método del camino esférico* originalmente propuesto por Crisfield [Crisfield 1981] y Ramm [Ramm 1981]. La ecuación de restricción toma la siguiente forma:

$$\Delta \mathbf{U}_{m,i}^T \Delta \mathbf{U}_{m,i} + \Delta \mu_{m,i}^2 \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.83})$$

Para b=0 se obtiene la forma más simple, también propuesta por Crisfield [Crisfield 1981] en base a la experiencia. La ecuación de restricción tiene la forma:

$$\Delta \mathbf{U}_{m,i}^T \Delta \mathbf{U}_{m,i} = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.84})$$

OBTENCION DEL INCREMENTO DEL FACTOR DE CARGA

Desarrollando la ecuación de restricción en el caso $b=0$, se obtiene:

$$(\Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i} + \delta \mu_{m,i} \mathbf{U}_m^I)^T (\Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i} + \delta \mu_{m,i} \mathbf{U}_m^I) = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.85})$$

Que puede escribirse como:

$$C_1 \delta \mu_{m,i}^2 + C_2 \delta \mu_{m,i} + C_3 = 0 \quad (\text{E.86})$$

Donde:

$$\begin{cases} C_1 = \mathbf{U}_m^{IT} \mathbf{U}_m^I \\ C_2 = 2(\Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i})^T \mathbf{U}_m^I \\ C_3 = (\Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i})^T (\Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i}) - \Delta l_{m,i}^2 \end{cases} \quad (\text{E.87})$$

La ec.(E.86) tiene dos raíces reales según que el arco corte al camino de equilibrio en A o en B, ver fig.E.5. Se debe elegir el valor de $\delta \mu_{m,i}$ para la cual el coseno del ángulo entre $\Delta \mathbf{U}_{m,i}$ y $\Delta \mathbf{U}_{m,i-1}$ sea positivo. En el caso en que ambas soluciones den cosenos positivos, la solución más adecuada es la que se acerca más a la solución lineal.

Una vez obtenido $\delta \mu_{m,i}$, se obtiene la variación de desplazamiento a través de la ec.(E.63)

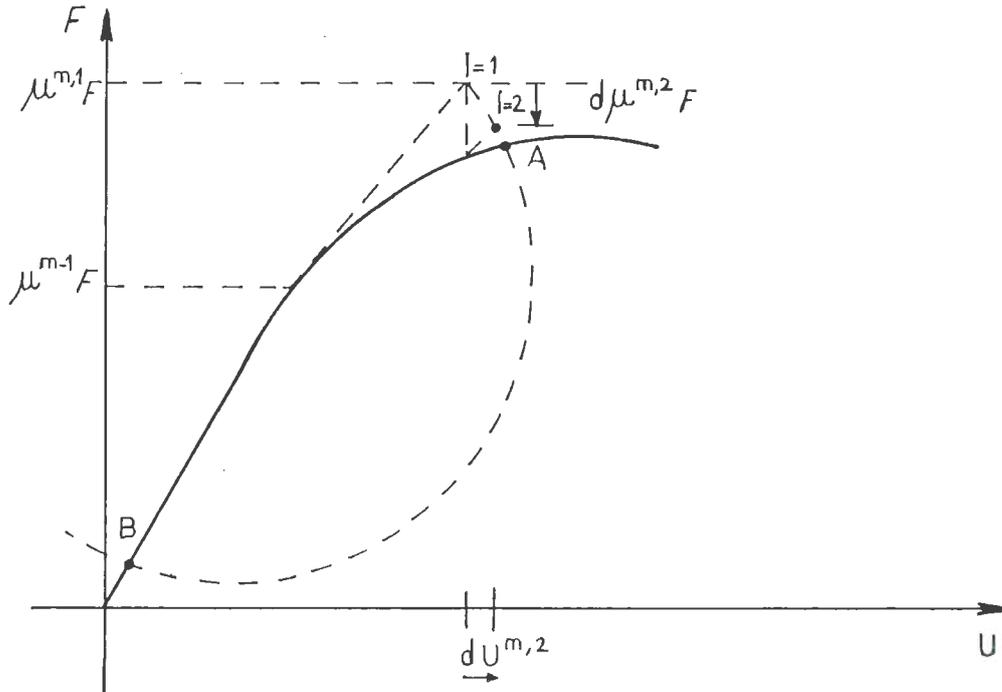


Fig.E.5 Método de la Longitud de Arco
Camino Esférico

CAMINO PLANO

Riks y Wemper [Crisfield 1983] basaron su trabajo en una linealización de la ecuación de restricción de la forma:

$$\delta U_{m,i}^T \Delta U_{m,i-1} + b^2 \delta \mu_{m,i} \Delta \mu_{m,i-1} F^T F = \Delta l_{m,i}^2 \quad (E.88)$$

Es posible proponer otras variantes como las de Ramm [Ramm 1981] y Crisfield [Crisfield 1983]. En particular $\delta U_{m,i}$ y $\delta \mu_{m,i}$ pueden ser obligados a ser tangentes a la solución tangente original. Este procedimiento pertenece a los denominados métodos de control de respuesta a través de un *camino plano* y de llama *método del plano tangente fijo*.

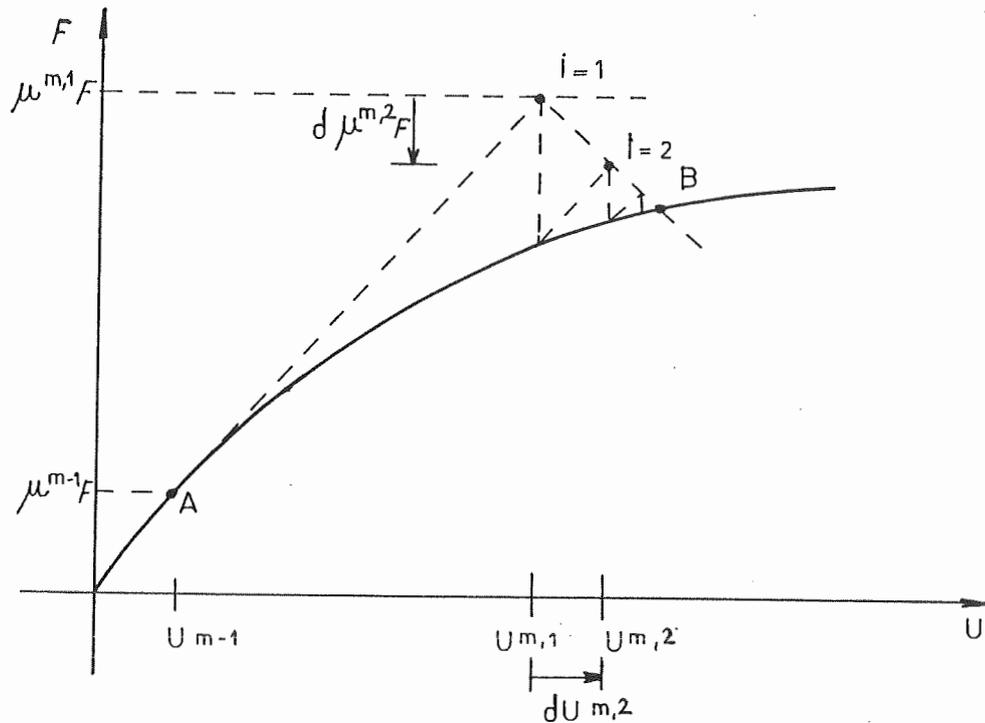


Fig.E.6 Método de la longitud de arco
Camino plano

Si, en particular, $b^T F = 1$, la ecuación de restricción es del tipo:

$$\delta U_{m,i}^T \Delta U_{m,o} + \delta \mu_{m,i} \Delta \mu_{m,o} = 0 \quad (E.89)$$

Este procedimiento de solución está ilustrado en la fig.E.6.

Oller [Oller 1988] utiliza una variante simple que da buenos resultados para distintos problemas presentados en su tesis. El procedimiento corresponde a los denominados *métodos del plano normal actualizado*. Sólo permite encontrar la respuesta en procesos con endurecimiento o ablandamiento en los que hay crecimiento de desplazamientos y no puede hacerlo si hay retroceso de los desplazamientos. La ecuación de restricción controla los desplazamientos de la siguiente forma:

$$\Delta U_{m,i}^T \Delta U_{m,i-1} = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.90})$$

Desarrollando la ecuación de restricción se obtiene:

$$C_1 + C_2 + C_3 \delta\mu_{m,i} = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.91})$$

Donde:

$$\begin{cases} C_1 = \Delta U_{m,i-1}^T \Delta U_{m,i-1} \\ C_2 = \delta \bar{U}_{m,i}^T \Delta U_{m,i-1} \\ C_3 = U_m^T \Delta U_{m,i-1} \end{cases} \quad (\text{E.92})$$

La ec.(E.91) tiene una única raíz:

$$\delta\mu_{m,i} = \frac{\Delta l_{m,i}^2 - C_1 - C_2}{C_3} \quad (\text{E.93})$$

De donde se deduce que el plano normal corta al camino de equilibrio en un solo punto. En la primera iteración de cada incremento de carga $\Delta U_{m,0} = 0$ y, como consecuencia, el método presenta una indefinición. En la primera iteración, entonces, se procede con cualquier método de control de desplazamientos y en las subsiguientes con el método descripto.

DETERMINACION DE LA LONGITUD DE ARCO

Crisfield [Crisfield 1981] propone estimar el incremento $\Delta\mu_{0,0}$ para la primera iteración del primer incremento de carga y, a partir de allí calcular:

$$\Delta l_{o,o} = \Delta \mu_{o,o} \sqrt{\mathbf{U}_o^I \mathbf{T} \mathbf{U}_o^I} \quad (\text{E.94})$$

Esta longitud de arco se mantiene constante durante el incremento de carga pero es ajustada en los siguientes incrementos para lograr un número ideal, prácticamente constante de iteraciones, para establecer el equilibrio de cada incremento. Con ese fin Crisfield hace distintas propuestas:

$$1) \Delta l_m = \Delta l_{m-1} I^d / I_{m-1} \quad [\text{Crisfield 1981}] \quad (\text{E.95})$$

$$2) \Delta l_m = \Delta l_{m-1} \sqrt{I^d / I_{m-1}} \quad [\text{Crisfield 1983}]$$

Donde I^d es el número ideal de iteraciones e I_{m-1} es el número de iteraciones del incremento $m-1$. Para todos los escalones, excepto el primero, el incremento inicial del factor de carga se calcula como sigue:

$$\Delta \mu_{o,m} = \frac{\pm \Delta l_m}{\sqrt{\mathbf{U}_m^I \mathbf{T} \mathbf{U}_m^I}} \quad (\text{E.96})$$

El signo se escoge siguiendo el del incremento previo, salvo que el determinante de la matriz tangente cambie de signo, en cuyo caso, $\Delta \mu_{m,o}$ tiene el signo contrario al del incremento $m-1$ [Crisfield 1981]. En un trabajo posterior Crisfield [Crisfield 1983] propone tomar el signo igual al signo de $(\mathbf{U}_m^I \mathbf{T} \mathbf{K}^I \mathbf{U}_m^I)$.

ALGORITMO DE CONTROL DE PLASTIFICACION CALCULO AUTOMATICO DE Δl [Oller 1988]

El método de la longitud de arco permite encontrar el equilibrio del sólido bajo cargas o desplazamientos impuestos. Sin embargo, en problemas de elastoplasticidad, resulta también importante lograr que, en cada iteración, plastifique un solo punto de la estructura.

El control de plastificación consiste en buscar, en cada instante del

proceso de carga, la distancia de todos los puntos a la superficie de fluencia, elegir la menor de ellas y, en base a la misma, calcular la longitud de arco. Si se utiliza dicha longitud de arco, durante la iteración sólo plastificará el punto más cercano a la superficie de fluencia.

Como en plasticidad la relación entre deformaciones y desplazamientos, como así también la relación entre incrementos de tensión e incrementos de deformación es lineal, se puede definir el factor de reducción de desplazamientos r_{\wedge} a partir de la distancia del punto de tensión a la superficie de fluencia. Con el desplazamiento reducido se calcula la longitud de arco como :

$$\Delta l_{m,i} = g(r_{\wedge}) \quad (\text{E.97})$$

Donde la forma de la función g depende del tipo de restricción. Si se usa la ecuación de restricción:

$$\Delta l_{m,i}^2 = \Delta \mathbf{U}_{m,i}^T \Delta \mathbf{U}_{m,i} \quad (\text{E.98})$$

Donde:

$$\Delta \mathbf{U}_{m,i} = \Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \mathbf{U}_{m,i} \quad (\text{E.99})$$

y

$$\delta \mathbf{U}_{m,i} = r_{\wedge} \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i} \quad (\text{E.100})$$

Donde $\delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i}$ es el incremento de desplazamientos que resulta del incremento de carga impuesto y $\delta \mathbf{U}_{m,i}$ es el incremento de desplazamiento para el cual plastifica un solo punto.

Reemplazando en la ecuación de restricción se obtiene la longitud de arco:

$$\Delta \mathbf{U}_{m,i-1}^T \Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + 2 r_{\wedge} \left(\Delta \mathbf{U}_{m,i-1} + \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i} \right) + r_{\wedge}^2 \left(\delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i}^T \delta \bar{\mathbf{U}}_{m,i} \right) = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.101})$$

El factor de reducción de desplazamientos se puede calcular como la distancia a la superficie de fluencia del punto más cercano a la misma, utilizando la expresión propuesta por Nayak [Nayak 1972]:

$$\Gamma_{\Lambda} = \Gamma_1 - \frac{F \left[\left(\sigma_{kl} \right)_{m,i} + \Gamma_1 C_{klpq}^s \left(\delta \epsilon_{pq}^- \right)_{m,i} \right]}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right)_{m,i-1} C_{klpq}^s \left(\delta \epsilon_{pq} \right)_{m,i}} \quad (E.102)$$

Donde:

$$\Gamma_1 = - \frac{F \left[\left(\sigma_{kl} \right)_{m,i-1} \right]}{F \left[\left(\sigma_{kl} \right)_{m,i-1} + C_{klpq}^s \left(\delta \epsilon_{pq}^- \right)_{m,i} \right] - F \left[\left(\sigma_{kl} \right)_{m,i-1} \right]} \quad (E.103)$$

Donde :

F : Función de fluencia

C_{klpq}^s : Tensor de rigidez secante

$\left(\delta \epsilon_{pq}^- \right)_{m,i}$: Tensor incremento de deformación correspondiente a

incremento de desplazamientos $\delta \bar{U}_{m,i}$

E.7.2.3. Metodo de Control Indirecto de Desplazamientos

[De Borst 1987a]

El método de longitud de arco en el espacio N-dimensional, donde N es el número total de grados de libertad, no es muy adecuado para controlar el proceso de solución en sólidos con ablandamiento [De Borst 1987a]. De Borst encontró que la ecuación de restricción global, que tiene en cuenta todos los grados de libertad, no permite obtener una ecuación convergente satisfactoria cuando se analizan estructuras de hormigón [De Borst 1987a]. Esto se debe a que en problemas con ablandamiento la falla se localiza mucho. Sólo algunos nodos contribuyen a la norma del vector incremento de desplazamientos y la

falla no es sensible a la norma global. Entonces, en problemas de no linealidad material con ablandamiento es más eficiente usar sólo un grado de libertad dominante, aplicar ciertos pesos a los distintos grados de libertad u omitir algunos grados de libertad en la norma de los incrementos de desplazamientos. Se tiene entonces lo que De Borst denomina *método de control indirecto de desplazamientos* [De Borst 1987a].

La ecuación de restricción es del tipo:

$$\Delta\tilde{\mathbf{U}}_{m,i}^T \Delta\tilde{\mathbf{U}}_{m,i} = \Delta l_{m,i}^2 \quad (\text{E.104})$$

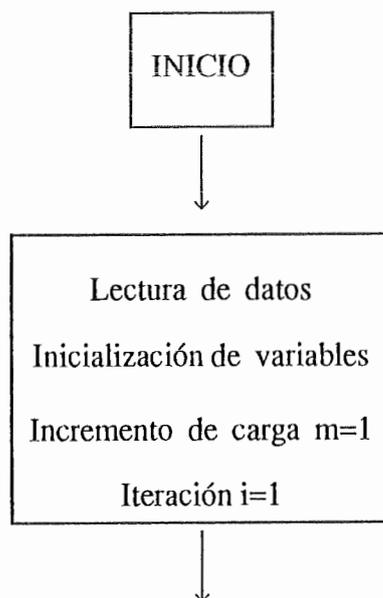
Donde $\Delta\tilde{\mathbf{U}}_{m,i}$ contiene sólo un número de grados de libertad limitado del vector $\Delta\mathbf{U}_{m,i}$.

La desventaja más importante de esta modificación de la ecuación de restricción, es que la misma se hace dependiente del problema particular que se analiza y, como consecuencia, el método pierde generalidad.

ANEXO E1

ESQUEMA DE UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

PARA PROBLEMAS CON NO LINEALIDAD
EN LA ECUACION CONSTITUTIVA



Definición de las fuerzas nodales
 \mathbb{F}



(1)
Aplicación de una parte de las fuerzas nodales
como incremento de carga

$$\Delta \mathbb{F}_m = \mu_m \mathbb{F}$$



En la primera iteración

$$\mathbb{R}_{m,1} = -\Delta \mathbb{F}_m$$

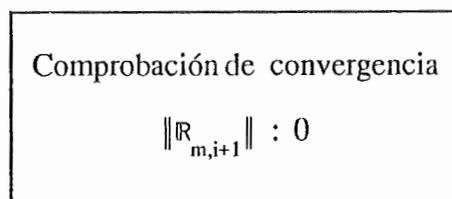
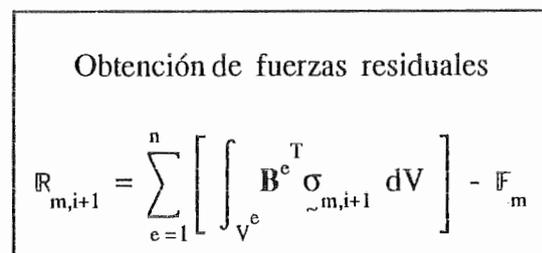
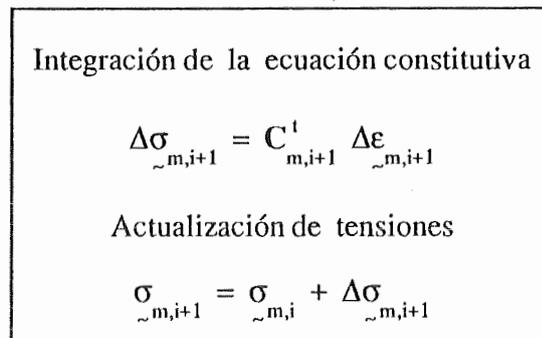
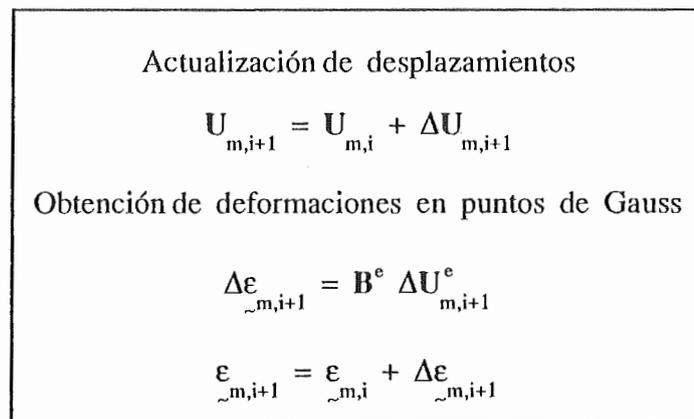


(2)
Obtención del incremento de desplazamientos
correspondiente a la iteración i

$$\mathbf{K}_{m,i}^t = \sum_{e=1}^n \left[\int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_{ep}^t \mathbf{B}^e dV \right]_{m,i}$$

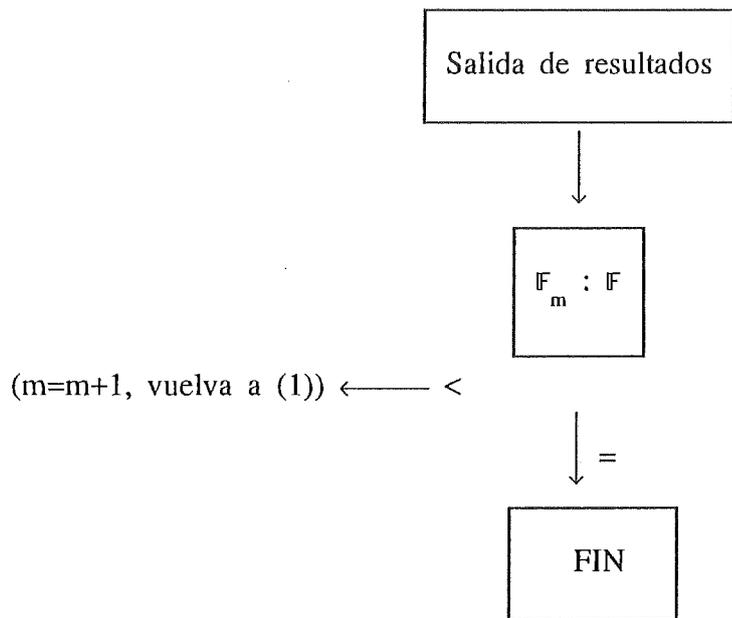
$$\Delta \mathbf{U}_{m,i+1} = - \left(\mathbf{K}_{m,i}^t \right)^{-1} \mathbb{R}_{m,i}$$





(i=i+1, vuelva a (2)) ← ≥ 0





APENDICE F**INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA****F.1. INTRODUCCION**

El método de elementos finitos es uno de los métodos más utilizados para analizar la respuesta elasto-plástica de los sólidos. La capacidad de predicción del análisis no lineal mediante el método de elementos finitos depende considerablemente de un número de factores tales como la discretización espacial, la discretización temporal, el procedimiento iterativo de solución, los modelos constitutivos y la integración en el tiempo de estos modelos. Este último aspecto ha recibido mucha atención en los últimos años [Zienkiewicz 1969, Nayak 1972, De Borst 1984, Ortiz 1985b, Simo 1985, Ortiz 1986, Dodds 1987, De Borst 1987b, Mitchell 1988, Feenstra 1988, Oller 1988, Simo 1988, Crisfield 1991, Sloan 1992, Fuschi 1992, Loret 1992, Simo 1992]. Mientras la precisión en el cálculo de la matriz de rigidez

tangente puede dejarse de lado a expensas de la velocidad de convergencia, la precisión con que se integran las ecuaciones constitutivas tiene un impacto directo en la exactitud general del análisis.

En este apéndice se presenta el problema de integración de la ecuación constitutiva junto con las formas clásicas de resolverlo para materiales elastoplásticos y luego se extiende y desarrolla estos métodos para el modelo de material compuesto por materiales elasto-plásticos-degradables ortótropos presentado en esta tesis.

F.2. DEFINICION DEL PROBLEMA

El problema de integración de la ecuación constitutiva consiste en reemplazar la ley elastoplástica diferencial por una regla que permita realizar cálculos para incrementos finitos de carga. Durante el cálculo, se debe actualizar las deformaciones $(\epsilon_{ij})_{n-1}$, las variables internas $(\alpha_i)_{n-1}$ y las tensiones $(\sigma_{ij})_{n-1}$ asociadas con una configuración de equilibrio n-1, a sus valores $(\epsilon_{ij})_n$, $(\alpha_i)_n$ y $(\sigma_{ij})_n$ en la configuración actualizada n. En los problemas con no linealidad física, el proceso de búsqueda de solución se realiza considerando que los desplazamientos que definen la actualización geométrica son datos. Los estados n-1 y n corresponden, en general, a dos incrementos sucesivos durante la aplicación de una carga.

Para un sólido elastoplástico el proceso de integración de la ecuación constitutiva consiste en lo siguiente:

En cada punto de Gauss se conoce:

$$(\Delta u_i)_n = \text{dato} \quad (\text{F.1})$$

y se debe calcular:

$$(\Delta \epsilon_{ij})_n = (\Delta u_{i,j})_n \quad (\text{F.2})$$

y actualizar el estado tensional y las variables internas:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n \quad (F.3)$$

$$(\alpha_i)_n = (\alpha_i)_{n-1} + (\Delta\alpha_i)_n \quad (F.4)$$

Donde:

$$(\Delta\sigma_{ij})_n = C_{ijkl}^s \left[(\Delta\epsilon_{kl})_n - (\Delta\epsilon_{kl}^p)_n \right] \quad (F.5)$$

$$(\Delta\epsilon_{ij}^p)_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} d\tau \quad (F.6)$$

$$(\Delta\alpha_i)_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} H_i(\sigma_{kl}, \alpha_r) d\tau \quad (F.7)$$

$(\Delta u_i)_n$: Incremento de desplazamiento entre los estados n-1 y n,

$(\Delta\epsilon_{ij})_n$: Incremento del tensor de deformaciones correspondiente a $(\Delta u_i)_n$,

$(\sigma_{ij})_{n-1}$: Tensor de tensiones en el estado n-1,

$(\sigma_{ij})_n$: Tensor de tensiones en el estado n,

$(\Delta\sigma_{ij})_n$: Incremento del tensor de tensiones entre los estados n-1 y n ,

C_{ijkl}^s : Tensor de rigidez secante,

$(\Delta\epsilon_{ij}^p)_n$: Incremento del tensor de deformaciones plásticas entre los estados n-1 y n,

Δt : Incremento de tiempo entre los estados n-1 y n,

$\dot{\lambda}$: Parámetro de consistencia plástica,

G : Función de potencial plástico,

τ : Parámetro de medida del tiempo,

α_i : Vector de variables internas,

H_i : Módulo plástico.

El problema consiste en evaluar las integrales de las ecuaciones (F.6) y (F.7) para actualizar las tensiones y las variables internas a un nuevo estado n que satisfaga la condición de fluencia y la condición de consistencia incremental :

$$F_n = F\left((\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n\right) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta F_n = F\left((\Delta\sigma_{ij})_n, (\Delta\alpha_i)_n\right) = 0 \quad (\text{F.8})$$

Un algoritmo eficiente para la integración numérica de la ecuación constitutiva debe satisfacer tres requerimientos básicos [Ortiz y Popov 1985]:

a) *Consistencia con las relaciones constitutivas* a integrar o precisión de primer orden. Esta condición requiere que las variables actualizadas calculadas mediante la integración numérica $((\epsilon_{ij})_n, (\alpha_i)_n, (\sigma_{ij})_n)$ coincidan con sus valores exactos dentro de los términos de segundo orden de Δt .

b) *Estabilidad numérica*. La estabilidad numérica juega un papel central debido a que junto con la condición anterior constituyen condiciones necesarias y suficientes para la convergencia cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

c) *Condición de consistencia plástica incremental*.

Además una propiedad no necesaria pero sí deseable es la *precisión de segundo orden*.

F.3. CLASIFICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA

Ortiz y Popov [Ortiz 1985b] distinguen dos familias de algoritmos de integración de las ecuaciones constitutivas que satisfacen potencialmente las cuatro condiciones mencionadas : la *regla del trapecio generalizada* y la *regla del punto medio generalizada*. A continuación, se describen las principales características de las mismas.

F.3.1. REGLA DEL TRAPECIO GENERALIZADA

Está dada por las ecuaciones :

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n \quad (\text{F.9})$$

$$(\Delta\sigma_{ij})_n = C_{ijkl}^s \left[(\Delta\epsilon_{kl})_n - (\Delta\epsilon_{kl}^p)_n \right] = (\Delta\sigma_{ij}^e)_n - (\Delta\sigma_{ij}^p)_n \quad (F.10)$$

$$(\Delta\epsilon_{ij}^p)_n = \Delta\lambda \left[(1-\alpha) \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right]_{n-1} + \alpha \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right]_n \right] \quad (F.11)$$

$$(\alpha)_n = (\alpha)_{n-1} + \Delta\lambda \left[(1-\alpha) [H_i]_{n-1} + \alpha [H_i]_n \right] \quad (F.12)$$

$$F_n = F(\sigma_{ij}^e)_n, (\alpha)_n = 0 \quad (F.13)$$

Donde :

$(\Delta\sigma_{ij}^e)_n$: Incremento predictor de tensión

$(\Delta\sigma_{ij}^p)_n$: Incremento plástico de tensión

$\Delta\lambda$: Parámetro de consistencia plástica que se obtiene de la condición de consistencia plástica

α : Parámetro del algoritmo que puede variar entre 0 y 1 ($0 \leq \alpha \leq 1$)

La forma en que se actualizan las tensiones está ilustrada en la Fig.F.1 donde se ve primero el predictor elástico y luego el mapeo para restablecer la condición de fluencia (Ec.2.14) en dos etapas : primero una proyección a

lo largo del flujo plástico inicial $\left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right]_{n-1}$ y luego una proyección en la

dirección del flujo plástico final $\left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right]_n$.

Este algoritmo de retorno mapeado puede ser usado en plasticidad no asociada y con reglas de endurecimiento arbitrarias.

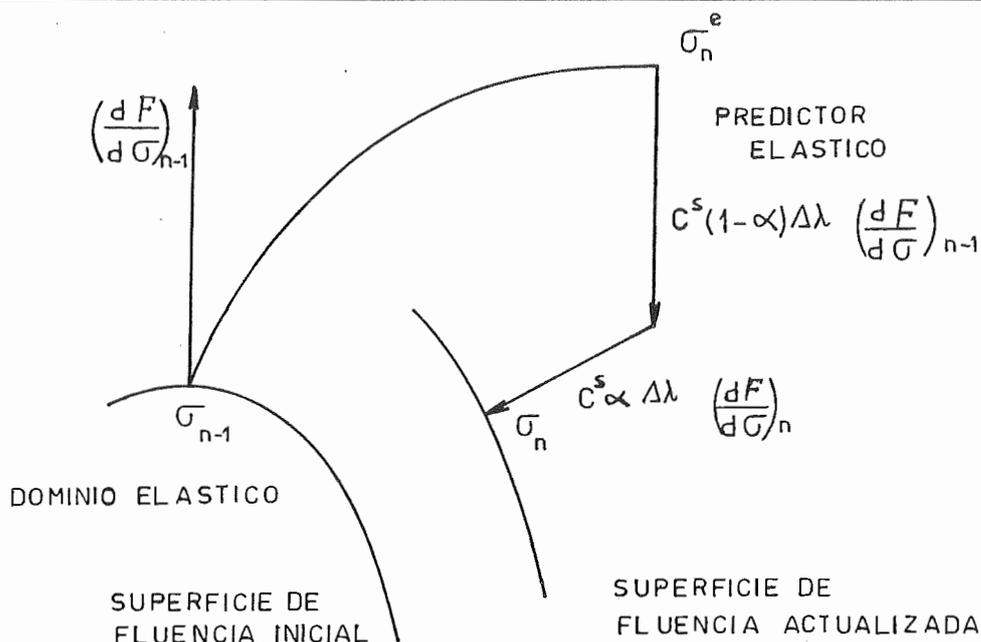


Fig.F.1. Regla del Trapecio Generalizada

Para $\alpha=0$ la integración es explícita. Para $\alpha>0$ el algoritmo es *implícito*. Para $\alpha=1/2$ y el caso particular del criterio de Von Mises con plasticidad asociada y perfecta, la *regla del trapecio generalizada* coincide con el procedimiento denominado de la *normal media*. Para $\alpha=1$ se tiene el método de *Euler-Backward*. Para $\alpha=1$ y plasticidad perfecta se obtiene el algoritmo de *proyección del punto más cercano* que fue propuesto como una generalización del llamado algoritmo de *retorno radial* (en el plano octaédrico) desarrollado para el modelo de Von Mises con endurecimiento lineal.

La regla del trapecio generalizada es consistente con las relaciones constitutivas elastoplásticas para cualquier valor de α y presenta precisión de segundo orden para $\alpha=1/2$. Para $\alpha<1/2$ el algoritmo es siempre condicionalmente estable. Para $\alpha\geq 1/2$ el algoritmo puede ser incondicionalmente estable dependiendo de la forma de la superficie de carga. Para superficies de carga suaves como la de Von Mises, la regla del trapecio generalizada es incondicionalmente estable para $\alpha\geq 1/2$. Un fuerte grado de distorsión de la superficie de carga reduce significativamente el rango de estabilidad incondicional. En particular, para superficies de carga con aristas, el único valor de α con el que se consigue estabilidad incondicional es $\alpha=1$.

A continuación se presentan como ejemplo dos algoritmos correspondientes a $\alpha=0$ y $\alpha=1$ respectivamente.

F.3.1.1. Integración Explícita o Avance Directo

Cuando $\alpha=0$ la integración es explícita y, en general, exige subdivisión del incremento de desplazamientos correspondiente a la iteración actual en una cantidad de subincrementos para los cuales se calcula el subincremento de deformación. A partir de ellos y la matriz elastoplástica actualizada, se calcula el incremento de tensión en cada subincremento.

Ejemplos de este tipo de procedimientos son los utilizados por Nayak and Zienkiewicz [Nayak 1972], Hinton y Owen [Hinton 1982], y lo que Dodds [Dodds 1987] denomina "método de rigidez tangente con corrector radial". A continuación se presenta el procedimiento descrito por Nayak and Zienkiewicz [Nayak 1972].

La tensión en un punto de Gauss se calcula como:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n \quad (\text{F.14})$$

$$(\Delta\sigma_{ij})_n = C_{ijkl}^s (\Delta\epsilon_{kl})_n - C_{ijkl}^p (\Delta\epsilon_{kl})_n \quad (\text{F.15})$$

$$(\Delta\sigma_{ij})_n = (\Delta\sigma_{ij}^e)_n - (\Delta\sigma_{ij}^p)_n \quad (\text{F.16})$$

$$(\Delta\sigma_{ij}^e)_n = \int_0^{\Delta\epsilon} C_{ijkl}^s d\epsilon_{kl} = C_{ijkl}^s (\Delta\epsilon_{kl})_n \quad (\text{F.17})$$

$$(\Delta\sigma_{ij}^p)_n = \int_0^{\Delta\epsilon} C_{ijkl}^p d\epsilon \approx (1-r) \left[C_{ijkl}^p \right]_{n-1} (\Delta\epsilon_{kl})_n \quad (\text{F.18})$$

Donde :

$r(\Delta\epsilon_{kl})_n$: parte de del incremento de deformación para la cual se alcanza la superficie de fluencia.

C_{ijkl}^p : Tensor de rigidez plástica.

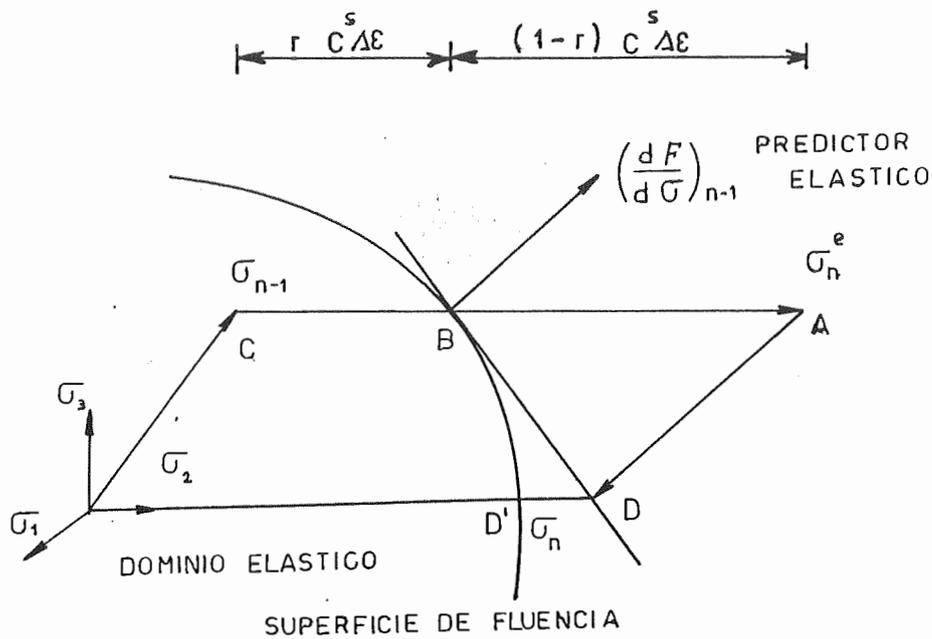


Fig.F.2. Integración explícita

Este procedimiento está ilustrado en la Fig.F.2 y puede explicarse como sigue. Cargando desde C, el punto de tensión se mueve elásticamente hasta tocar la superficie de fluencia en B. Un comportamiento elástico por sobre la superficie de fluencia conduciría al punto A. Sin embargo, para satisfacer el criterio de fluencia, el punto no puede salir fuera de la superficie de fluencia y debe ser traído nuevamente a la misma.

Se debe determinar entonces el valor de r tal que :

$$F_n = F\left((\sigma_{ij})_{n-1} + r (\Delta\sigma_{ij}^e)_n, (\alpha_i)_{n-1}\right) = 0 \quad (F.19)$$

Punto B de la Fig.F.2

Por interpolación lineal se obtiene una primera aproximación :

$$r_1 = \frac{-F_0}{F_1 - F_0} \quad (F.20)$$

Donde :

$$F_0 = F\left((\sigma_{ij})_{n-1}, (\alpha_i)_{n-1}\right) \quad (F.21)$$

$$F_1 = F\left((\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij}^e)_n, (\alpha_i)_{n-1}\right) \quad (F.22)$$

Debido a la no linealidad de la función F , en general :

$$F_2 = F\left((\sigma_{ij})_{n-1} + r(\Delta\sigma_{ij}^e)_n, (\alpha_i)_{n-1}\right) \neq 0 \quad (F.23)$$

Una aproximación mejor se obtiene como :

$$r = r_1 - \frac{F_2}{\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right\} (\Delta\sigma_{ij}^e)_n} \quad (F.24)$$

Esta última ecuación es también aproximada y conduce a un punto de tensión que no se encuentra sobre la superficie de fluencia. Para conservar la condición de fluencia se corrige la tensión mediante una corrección normal a la superficie de fluencia (trayectoria D-D' de Fig.F.2). La condición mencionada asegura el cumplimiento de la condición de fluencia pero no permite una buena aproximación del flujo.

Para lograr una mejor aproximación se divide el intervalo $(1-r)\Delta\epsilon^n$ en m pequeños subintervalos en los que se va actualizando el módulo plástico. Este procedimiento está ilustrado en la Fig.F.3 para $m=3$.

Mientras la subincrementación mejora notablemente la precisión, puede ser necesario un número inaceptable de subincrementos para asegurar la estabilidad. Recalcular la rigidez tangente y actualizar las variables de estado para demasiados subincrementos puede requerir un tiempo computacional excesivo. Además existen dos inconvenientes adicionales con este método. En primer lugar, es necesario determinar la tensión de contacto con la superficie de fluencia para dividir el vector incremento de deformación en

una parte elástica y otra parte elastoplástica. En segundo lugar, al final de cada subincremento, el vector tensión cae fuera de la superficie de fluencia y para evitar un endurecimiento artificial debe ser escalado radialmente hasta la superficie. Eso produce una modificación adicional del flujo plástico que debiera ser incorporada en el vector de deformaciones plásticas. Más allá, cuando el módulo plástico varía, se produce una inconsistencia en el radio de la superficie de fluencia actualizada debido a la linealización de la curva tensión-deformación durante cada subincremento. Se necesitaría un escalamiento adicional del vector tensión actualizado para evitar este error.

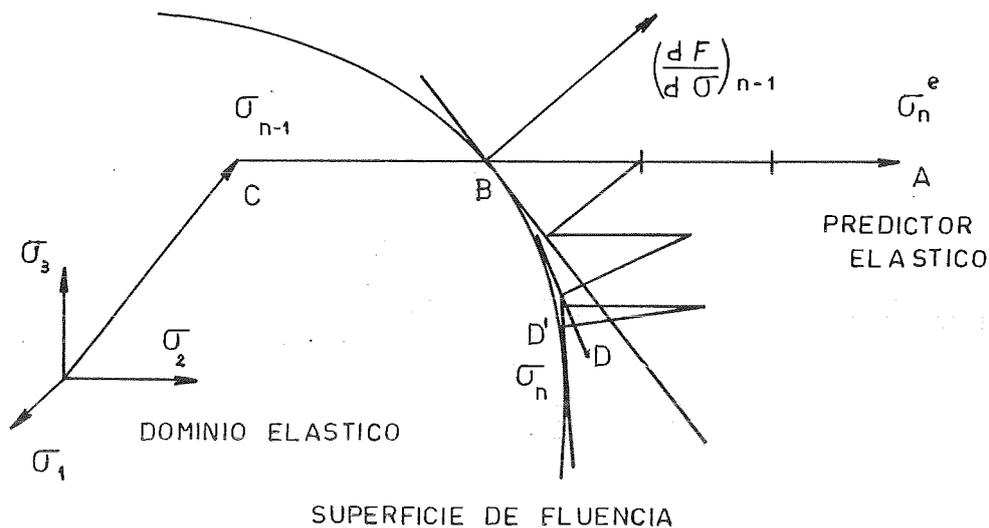


Fig.F.3. Integración explícita con subincrementación
(m = 3)

F.3.1.2. Euler-Backward [Ortiz 1985b, Feenstra 1988, Mitchel and Owen 1988, Simo and Hughes 1988, Crisfield 1991]

Este método se obtiene para $\alpha=1$ (ver Fig.F.4) y consiste en actualizar las variables del problema de la siguiente forma :

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij}^c)_n - \Delta\lambda C_{ijkl}^s \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right]_n \tag{F.25}$$

$$(\alpha_{i_n}) = (\alpha_{i_{n-1}}) + \Delta\lambda \left(H_i \right)_n \quad (\text{F.26})$$

Si se sustituye en la condición de fluencia :

$$F_n = F\left((\sigma_{ij})_n, (\alpha_{i_n})\right) = 0 \quad (\text{F.27})$$

se obtiene una ecuación no lineal en $\Delta\lambda$ de la forma :

$$f(\Delta\lambda) = 0 \quad (\text{F.28})$$

que puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de Newton-Raphson:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{k-1} - \left[\frac{df}{d(\Delta\lambda)} \right]^{-1} f(\Delta\lambda^{k-1}) \quad (\text{F.29})$$

En el Anexo F1 se presenta el algoritmo de integración para el modelo de daño plástico presentado en el Capítulo 2.

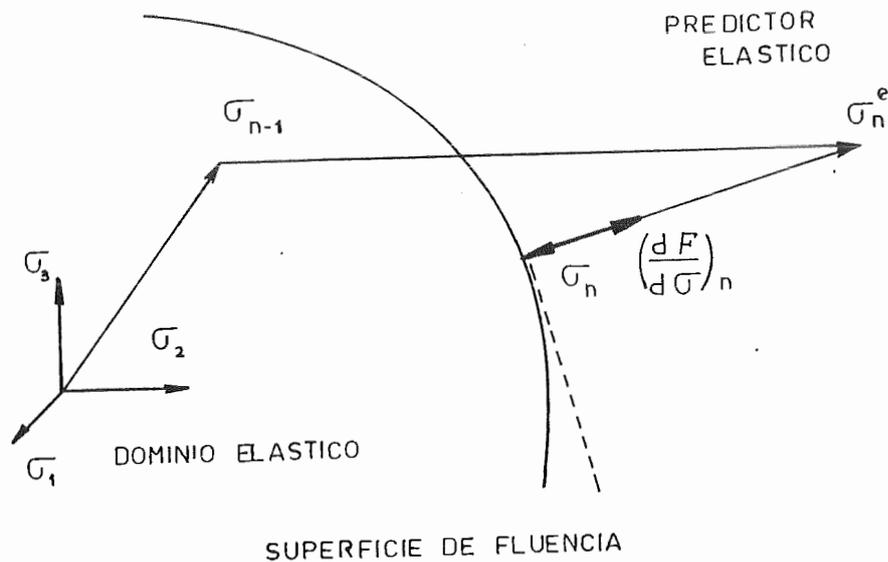


Fig.F.4 Método de Euler Backward

La mayor dificultad que presenta este método es la evaluación de la derivada de la función de fluencia respecto del incremento del parámetro de consistencia plástica (ec.(F.29)). La misma debe desarrollarse para cada modelo elastoplástico. En el Anexo F2 se presenta el cálculo de esta derivada para el modelo de daño plástico modificado.

Una de las ventajas que presenta este modelo es que permite resolver problemas de estado plano de tensiones con programas de elementos finitos en 2D en forma directa. En el Anexo F3 se presenta el algoritmo correspondiente al método de Euler Backward para el caso del estado plano de tensiones.

F.3.2. REGLA DEL PUNTO MEDIO GENERALIZADA

Es una familia alternativa de algoritmos que tiene la siguiente forma:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n \quad (F.30)$$

$$(\Delta\sigma_{ij})_n = C_{ijkl}^s \left[(\Delta\epsilon_{kl})_n - (\Delta\epsilon_{kl}^p)_n \right] \quad (F.31)$$

$$(\Delta\epsilon_{ij}^p)_n = \Delta\lambda \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right]_{n-1+\alpha} \quad (F.32)$$

$$(\alpha)_n = (\alpha)_{n-1} + \Delta\lambda \left[H_i \right]_{n-1+\alpha} \quad (F.33)$$

$$F_n = F\left((\sigma_{ij})_n, (\alpha)_n\right) = 0 \quad (F.34)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Este es un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales a resolver en las incógnitas $(\sigma_{ij})_n$, $(\Delta\epsilon_{ij}^p)_n$, $(\alpha)_n$ y $\Delta\lambda$.

En la Fig.F.5 se presenta una interpretación geométrica del algoritmo. Puede verse que éste es también un algoritmo de retorno mapeado en que la

tensión predecida elásticamente es proyectada sobre la superficie de fluencia actualizada según la dirección del flujo evaluado en un punto intermedio $((\sigma_{ij})_{n-1+\alpha}, (\alpha)_{n-1+\alpha})$.

Para el caso del criterio de Von Mises con plasticidad asociada y endurecimiento lineal, las reglas del trapecio y del punto medio generalizadas coinciden.

El algoritmo del punto medio generalizado es consistente para todo valor de α y presenta precisión de segundo orden para $\alpha=1/2$. Para $\alpha<1/2$ la regla del punto medio generalizada es sólo condicionalmente estable. A diferencia de la regla del trapecio generalizada, para $\alpha\geq 1/2$ es incondicionalmente estable independientemente de la elección de la superficie de carga [Ortiz y Popov 1985].

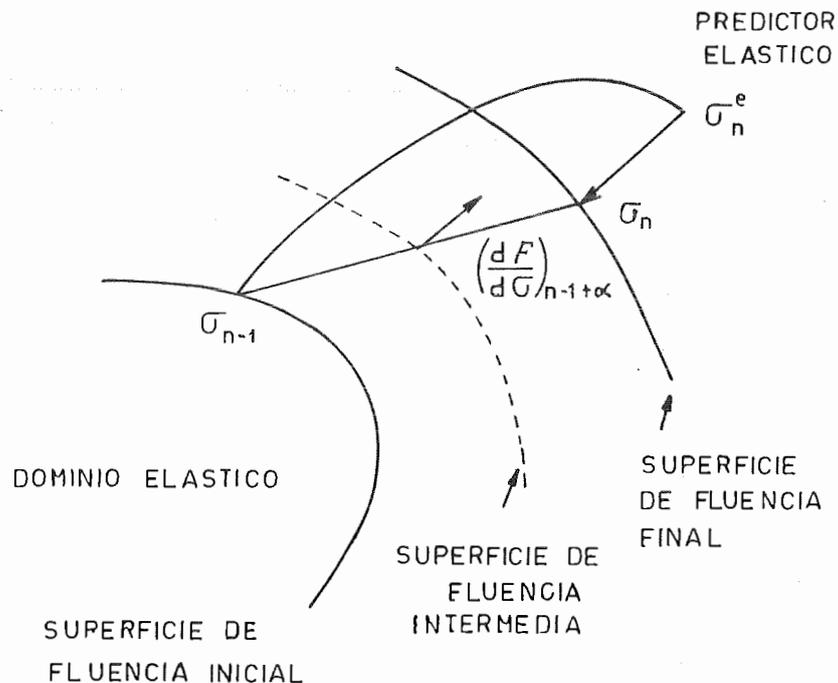


Fig.F.5. Regla del punto medio generalizada

Ortiz y Popov [1985b] demostraron también que la elección óptima de α depende de la naturaleza del problema en consideración. Cuando son de preveer

incrementos de deformación grandes , $\alpha=1$ da probablemente el algoritmo óptimo. Por el contrario, en problemas con pequeños incrementos de deformación, $\alpha=1/2$ puede mejorar la precisión.

F.3.3. OTRO PROCEDIMIENTO DE INTEGRACION ALTERNATIVO

[Simo y Ortiz 1986, Simo and Hughes 1988, Crisfield 1991]

Generalmente el método de Euler Backward ha sido utilizado en casos simples como plasticidad con criterio de Von Mises, endurecimiento lineal y módulo elástico isótropo y constante. Pero cuando se aplica a modelos de plasticidad no triviales, a pesar de su generalidad, conduce a un sistema de ecuaciones no lineales, cuya solución mediante el método de Newton Raphson requiere la evaluación de los gradientes de la dirección del flujo plástico, de la normal a la superficie de fluencia, del módulo plástico y del tensor de elasticidad. Todo esto hace que la solución mediante este método sea muy laboriosa.

La gran ventaja del método que se describe a continuación es que se formula sólo en términos de la función de fluencia, la normal a la misma, la dirección del flujo plástico y módulo elástico tangente, sin necesidad de recurrir a sus gradientes y, a pesar de ello, presenta una tasa de convergencia cuadrática.

Este método fue presentado por de Borst [De Borst 1986] y deducido por Ortiz y Simo [Ortiz 1986] a partir de una descomposición aditiva de la tensión en una parte elástica y otra parte plástica y difiere de los algoritmos de retorno mapeado anteriormente descritos, en la forma en que las tensiones predecidas elásticamente son relajadas.

En primer lugar se integra las ecuaciones elásticas para obtener un predictor elástico que es tomado como condición inicial para las ecuaciones plásticas. Estas últimas definen un corrector plástico mediante el cual las tensiones obtenidas elásticamente son relajadas hasta una superficie de fluencia adecuadamente actualizada en forma iterativa.

Es un algoritmo eficiente y capaz de trabajar con modelos muy generales.

Para computar el camino de retorno se usa el siguiente procedimiento: En cada iteración se linealiza la función de fluencia alrededor de los valores actuales de las variables de estado :
 $(\sigma_{ij})_{n-1}, (\alpha_i)_{n-1}$

$$F((\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n) = F((\sigma_{ij})_{n-1}, (\alpha_i)_{n-1}) + \quad (F.35)$$

$$+ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right\}_{n-1} \left[(\sigma_{kl})_n - (\sigma_{kl})_{n-1} \right] + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \right\}_{n-1} \left[(\alpha_k)_n - (\alpha_k)_{n-1} \right]$$

Además :

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij}^e)_n - \Delta \lambda_n C_{ijkl}^s \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right]_{n-1} \quad (F.36)$$

$$(\alpha_i)_n = (\alpha_i)_{n-1} + \Delta \lambda_n \left[H_i \right]_{n-1} \quad (F.37)$$

Reemplazando en la ecuación (F.35) y haciendo :

$$F_n = F((\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n) = 0 \quad (F.38)$$

se obtiene :

$$\Delta \lambda_n = \frac{F((\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n)}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right\}_{n-1} C_{ijkl}^s \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right]_{n-1} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \right\}_{n-1} H_{i_n}} \quad (F.39)$$

Sustituyendo este valor de $\Delta \lambda_n$ en las ecuaciones anteriores se obtienen los valores de $(\sigma_{ij})_n$ y $(\alpha_i)_n$. Las condiciones iniciales para este procedimiento son las dadas por el predictor elástico. La iteración se realiza hasta lograr convergencia. En Fig.E.6 se ilustra el procedimiento

para el caso de flujo asociado.

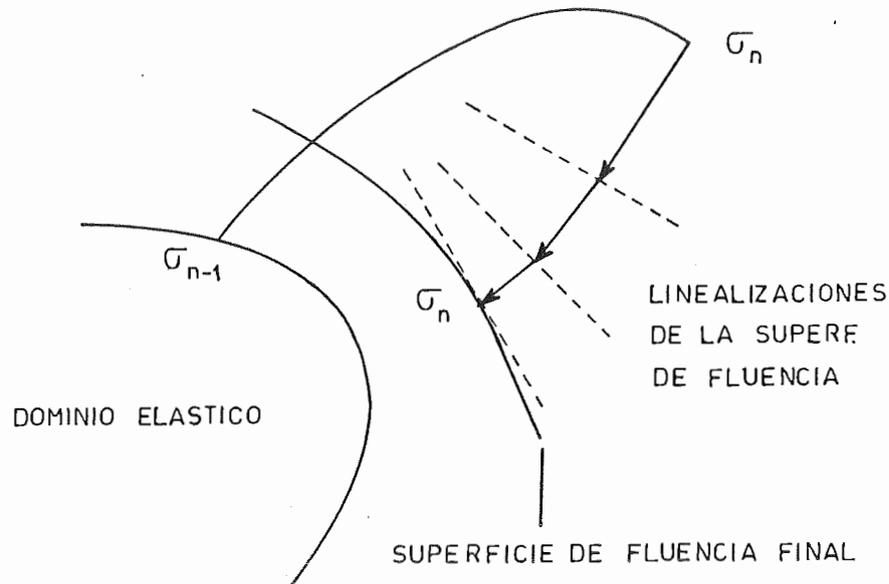


Fig.F.6 Método de retorno mapeado

Esta formulación es capaz de tratar criterios de fluencia complejos, reglas de flujo y de endurecimiento o ablandamiento cualesquiera. El algoritmo propuesto por Ortiz and Simo [1986] incluye la posibilidad de trabajar con degradación de rigidez.

En el Anexo F4 se presenta el algoritmo de cálculo desarrollado para el modelo de daño plástico modificado.

De todos los algoritmos para la integración de la ecuación de la ecuación constitutiva, este es el más adecuado para la aplicación en códigos implícitos. Es conceptualmente simple y provee gran precisión. Es incondicionalmente estable y no necesita determinar la tensión de contacto ni escalar el vector tensión actualizado. Además permite tener en cuenta endurecimiento isótropo y cinemático.

Es interesante notar que, para el criterio de Von Mises, este método y

el algoritmo de Euler Backward coinciden y, en consecuencia, dan los mismos resultados. Esto es debido a la curvatura constante de esta superficie de fluencia en el espacio de tensiones.

F.4. PROBLEMA DE TENSIONES PLANAS [Dodds 1987]

El problema de estado plano de tensiones complica significativamente el procedimiento de integración de la ecuación constitutiva cuando se trabaja con programas de elementos finitos 2D. Para satisfacer la condición de estado plano de tensiones, la tensión normal al plano, σ_z , debe ser nula.

El problema está en que se necesita conocer el valor de ϵ_z para integrar la ecuación constitutiva. Algunas veces se calcula ϵ_z forzando $\sigma_z=0$ en la matriz elastoplástica tangente. Ese es un procedimiento aceptable en los algoritmos de integración explícita en los que se trabaja con pequeños intervalos de deformación, pero no lo es en los algoritmos de integración implícita.

Dodds [Dodds 1987] propone un algoritmo que consiste en ajustar iterativamente, mediante un procedimiento de Newton-Raphson, el incremento de deformación $(\Delta\epsilon_z)_n$ hasta lograr que $\sigma_z=0$. La estimación inicial de $(\Delta\epsilon_z)_n$ puede ser hecha con el esquema elástico o plástico formando la fila zz de C^s o C_{ep}^t y obligando a que $(\Delta\sigma_z)_n$ sea nula. Sin embargo, pareciera ser que la tasa de convergencia no depende demasiado del valor elegido para $(\Delta\epsilon_z)_0$ y el mismo puede tomarse igual a cero.

En el Anexo F3 se propone la solución directa del problema del estado plano de tensiones utilizando el método de integración de Euler Backward.

F.5. MATRIZ DE RIGIDEZ CONSISTENTE

Algunas publicaciones recientes [Simo and Taylor 1985, Dodds 1987, Mitchell and Owen 1988, Simo and Hughes 1988, Crisfield 1991] señalan la ventaja de usar una matriz de rigidez consistente para resolver problemas elastoplásticos. Se ha demostrado que la tasa de convergencia cuadrática del método de Newton Raphson sólo puede asegurarse si el módulo tangente se

deriva de un modo consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La consistencia implica que el incremento de tensión producido por el operador tangente actuando sobre el incremento de deformación debe aproximarse al incremento de tensión predicho por el procedimiento de integración al menos en el primer orden.

Cuando se trabaja con el método de Newton Raphson se debe integrar la ecuación constitutiva en cada iteración i de cada incremento de carga n . Se puede utilizar dos incrementos de deformación distintos para actualizar el tensor de tensiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta \epsilon_{kl}^n)^{PI} = (\epsilon_{kl}^n)_{i-1} - (\Delta \epsilon_{kl}^n)_{i-1} \\ \text{ó} \\ (\Delta \epsilon_{kl}^n)^{PD} = (\epsilon_{kl}^n)_{i-1} - (\Delta \epsilon_{kl}^n)_{i-1} \end{array} \right. \quad (F.40)$$

La primera forma conduce a un algoritmo *independiente del camino* y la segunda a un *algoritmo dependiente del camino* [Crisfield 1991].

En el segundo caso se integra las ecuaciones constitutivas sobre la corrección de deformaciones correspondiente a la iteración $i-1$. Esto tiene dos grandes problemas. En primer lugar, el incremento de deformación predicho de esta manera puede diferir marcadamente del camino de deformación real. La dirección del flujo plástico varía fuertemente de iteración a iteración aunque la dirección real del flujo plástico varía suavemente durante el intervalo. La integración de esas variaciones sobre las iteraciones puede no representar adecuadamente una dirección promedio del flujo plástico para el incremento. En segundo lugar, las abruptas variaciones en el vector de corrección de deformaciones generalmente indican falsas descargas elásticas.

El uso de una estrategia independiente del camino elimina la posibilidad de falsas descargas. Sin embargo, las ecuaciones constitutivas deben ser integradas sobre grandes incrementos de deformación por lo que la precisión y estabilidad de los algoritmos de integración son factores determinantes en la solución. Adicionalmente, los operadores tangentes utilizados para la

formación de la matriz de rigidez requieren especial consideración. En efecto, el operador tangente continuo se aproxima más al operador tangente consistente con el algoritmo dependiente del camino y difiere mucho para el algoritmo independiente del camino.

F.5.1. FORMA GENERAL DEL MODULO TANGENTE CONSISTENTE METODO DE EULER-BACKWARD

La forma del algoritmo de integración es la siguiente :

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij}^e)_n - \Delta\lambda_n C_{ijkl}^s \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n \quad (F.41)$$

Diferenciando esta ecuación se obtiene:

$$(d\sigma_{ij})_n = C_{ijkl}^s (d\varepsilon_{kl})_n - d\lambda_n C_{ijkl}^s \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n - \Delta\lambda_n C_{ijkl}^s \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{pq}} \right)_n (d\sigma_{pq})_n \quad (F.42)$$

Ordenando, se obtiene :

$$(d\sigma_{ij})_n = (C_{ijkl}^*)_n \left((d\varepsilon_{kl})_n - d\lambda_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n \right) \quad (F.43)$$

Donde :

$$(C_{ijkl}^*)_n = \left[\delta_{ip} \delta_{jq} + \Delta\lambda_n C_{ijrs}^s \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{rs} \partial \sigma_{pq}} \right)_n \right]^{-1} C_{pqkl}^s \quad (F.44)$$

Escribiendo la condición de consistencia plástica, se obtiene :

$$d\lambda_n = \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right]_n (C_{ijkl}^*)_n (d\varepsilon_{kl})_n}{A_n + \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right]_n C_{ijkl}^* \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right]_n} \quad (\text{F.45})$$

$$(d\sigma_{ij})_n = (\hat{C}_{ijkl})_n (d\varepsilon_{kl})_n \quad (\text{F.46})$$

$$(\hat{C}_{ijkl})_n = (C_{ijkl}^*)_n - \frac{(C_{ijpq}^*)_n \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right]_n \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} \right]_n (C_{rskl}^*)_n}{A_n + \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \right]_n C_{pqrs}^* \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right]_n} \quad (\text{F.47})$$

Para el caso de algoritmo de retorno mapeado descrito en el punto F.3.3, el cálculo del operador tangente consistente no es tan simple porque se dispone del flujo en la última iteración que no corresponde a la dirección de avance entre los estados $n-1$ y n .

F.6. MATERIALES CON DEGRADACION DE RIGIDEZ

En este punto se describen los algoritmos utilizados para la integración de la ecuación constitutiva del sólido elasto-plástico-degradable.

En el caso de trabajar con el modelo de daño explícito, no es necesario integrar la ecuación constitutiva porque se puede obtener explícitamente la variable de degradación. Si el material presenta deformaciones permanentes, se resuelve primero el problema de daño y se integra luego la ecuación constitutiva elastoplástica con cualquiera de los métodos ya descritos. En el Anexo F5 se presenta el algoritmo correspondiente a este método.

Si se utiliza una forma implícita para considerar el daño, se debe integrar la ecuación de daño. En el caso en que se trabaje con un modelo

desacoplado, se debe integrar primero la ecuación de daño y luego la ecuación elastoplástica. Para integrar la ecuación de daño se utiliza un algoritmo de los del tipo retorno mapeado que se emplean en plasticidad. Se parte de una linealización de la función de daño y de la condición de consistencia de daño:

$$\hat{G}^d(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, d + \Delta d) = 0 = \hat{G}^d(\sigma_{ij}, d) + \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial d} \Delta d \quad (\text{F.48})$$

$$\frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{F.49})$$

Como se considera que los fenómenos de plasticidad y daño no actúan simultáneamente, el incremento de tensión se puede calcular como:

$$\Delta\sigma_{ij} = -\Delta d \sigma_{ij}^o \quad (\text{F.50})$$

y

$$\frac{\partial \hat{G}^d}{\partial d} = - \frac{\partial f_c}{\partial d} = - \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} \quad (\text{F.51})$$

Reemplazando en la ec.(F.48), se puede obtener :

$$\Delta d = \frac{\hat{G}^d(\sigma_{ij}, d)}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^o} \quad (\text{F.52})$$

y actualizar la variable de daño. Una vez resuelto el problema de daño se puede pasar a la integración de la ecuación constitutiva elastoplástica.

El algoritmo de integración correspondiente se ha esquematizado en el Anexo F6.

¹En estos desarrollos se han suprimido los subíndices n y n-1 por simplicidad en la notación. Se entiende que, en todos los casos, se parte de una configuración n-1 y se llega a una n.

Si se utiliza un modelo de daño y plasticidad acoplado, se requiere una integración simultánea de las ecuaciones de plasticidad y de daño. En esta tesis se desarrollaron, para ello, dos tipos de algoritmos.

- *Algoritmo del tipo retorno mapeado*

Este algoritmo es similar al que se usa en plasticidad. Se parte de una linealización de la función de daño y de la función de fluencia:

$$\hat{G}^d(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, d + \Delta d) = 0 = \hat{G}^d(\sigma_{ij}, d) + \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial d} \Delta d \quad (F.53)$$

$$F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, \alpha_r + \Delta\alpha_r) = 0 = F(\sigma_{ij}, \alpha_r) + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_r} \Delta\alpha_r \quad (F.54)$$

En este caso se puede calcular el incremento de tensión como:

$$\Delta\sigma_{ij} = -\Delta d \sigma_{ij}^o - \Delta\lambda C_{ijkl}^s \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (F.55)$$

Reemplazando en las ecuaciones (F.53) y (F.54) queda un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas : $\Delta\lambda$ y Δd . De su resolución se obtiene:

$$\Delta\lambda = \frac{F(\sigma_{ij}, \alpha_r) \left[\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_k^d + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right] - \hat{G}^d(\sigma_{ij}, d) \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} H_k \right] \left[\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_k^d + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right] - \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right] \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right]} \quad (F.56)$$

$$\Delta d = \frac{\hat{G}^d(\sigma_{ij}, d) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} H_k \right) - F(\sigma_{ij}, \alpha_r) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} H_k \right) \left(\frac{\partial f_c}{\partial K^d} h_{k,d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right)}$$

(F.57)

Seguindo las ecuaciones (F.56) y (F.57) se puede calcular el parámetro de consistencia plástica y la variable de degradación. En el Anexo F7 se ha esquematizado el algoritmo de integración correspondiente.

- *Algoritmo de tipo Euler-Backward*

Este algoritmo consiste en obtener el parámetro de consistencia plástica y el incremento de la variable de daño d a través del siguiente sistema de ecuaciones no lineales, correspondientes a las condiciones de fluencia y daño respectivamente :

$$\begin{cases} H^p(\Delta\lambda, \Delta d) = F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, \alpha_r + \Delta\alpha_r) = 0 \\ H^d(\Delta\lambda, \Delta d) = \hat{G}^d(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, d + \Delta d) = 0 \end{cases} \quad (F.58)$$

Este sistema puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de Newton Raphson, de la siguiente manera :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta d \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta d \end{Bmatrix}_{k-1} - \begin{bmatrix} \frac{\partial H^p}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial H^p}{\partial \Delta d} \\ \frac{\partial H^d}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial H^d}{\partial \Delta d} \end{bmatrix}_{k-1}^{-1} \begin{Bmatrix} H^p(\Delta\lambda, \Delta d) \\ H^d(\Delta\lambda, \Delta d) \end{Bmatrix}_{k-1} \quad (F.59)$$

La mayor dificultad de este método reside en el cálculo de las derivadas que intervienen en la ecuación (F.59). Sin embargo, con este método se puede resolver en forma simple un problema de estado plano de tensiones con un programa en 2D. En el Anexo F8 se esquematiza el algoritmo de solución correspondiente a este método y en el Anexo F9 se desarrollan las derivadas intervinientes en la ec.(F.59).

Partiendo de la forma de integración correspondiente a este último algoritmo se puede deducir una forma para la matriz de rigidez tangente consistente. Derivando:

$$(\sigma_{ij})_n = (1-d)_n C_{ijkl}^o \left[(\epsilon_{ij})_n - (\epsilon_{ij}^p)_{ij\ n-1} - \Delta\lambda_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n \right] \quad (F.60)$$

Resulta:

$$\begin{aligned} (d\sigma_{ij})_n = & -dd_n C_{ijkl}^o \left[(\epsilon_{ij})_n - (\epsilon_{ij}^p)_{ij\ n-1} - \Delta\lambda_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n \right] + \\ & + \left[C_{ijkl}^s \right]_n (d\epsilon_{ij})_n - d\lambda \left[C_{ijkl}^s \right]_n \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right]_n \\ & - \Delta\lambda_n \left[C_{ijkl}^s \right]_n \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{pq}} \right]_n (d\sigma_{pq})_n \end{aligned} \quad (F.61)$$

Ordenando, se obtiene :

$$(d\sigma_{ij})_n = (C_{ijkl}^{e*})_n (d\epsilon_{kl})_n - (C_{ijkl}^{s*})_n d\lambda_n \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right]_n \quad (F.62)$$

Donde :

$$(C_{ijkl}^{e*})_n = \left[\delta_{ip} \delta_{jq} + \Delta\lambda_n C_{ijrs}^s \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{rs} \partial \sigma_{pq}} \right)_n \right]^{-1} C_{pqkl}^e \quad (F.63)$$

$$(C_{ijkl}^{s*})_n = \left[\delta_{ip} \delta_{jq} + \Delta\lambda_n C_{ijrs}^s \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{rs} \partial \sigma_{pq}} \right)_n \right]^{-1} C_{pqkl}^s \quad (F.64)$$

Escribiendo la condición de consistencia plástica se obtiene el modulo elásto-plástico-degradadotangente consistente:

$$\hat{C}_{ijkl}_n = (C_{ijkl}^{e*})_n - \frac{(C_{ijpq}^{s*})_n \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \right)_n \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} \right)_n (C_{rskl}^{e*})_n}{A_n + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \right)_n C_{pqrs}^{s*} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right)_n} \quad (F.65)$$

F.7. MATERIALES ANISOTROPOS

Para sólidos anisótropos , si se utiliza, por ejemplo, el criterio de Hill [Hill 1967], la curvatura de la superficie de fluencia puede variar fuertemente alrededor del contorno. En esos casos, Fenestra y de Borst [Fenestra 1988] probaron que el método de Euler Backward se comporta mucho mejor que los métodos de retorno mapeado. Más tarde, Loret [Loret 1992] demostró que esta conclusión no era general sino que dependía de que la tensión predictora atravesase o no la superficie de fluencia. Kojic [Kojic 1992] desarrolló un método de integración implícito para el criterio de Hill [Hill 1967].

En realidad, el modelo de material anisótropo propuesto no requiere un tratamiento especial en lo que hace a la integración de la ecuación

constitutiva. Lo que ocurre es que la misma se integra en un espacio isótropo ficticio y lo único que cambia es la evaluación de las derivadas intervinientes.

En el Anexo F10 se esquematiza el proceso de integración de la ecuación constitutiva en un sólido elastoplástico ortótropo. Respecto al caso isótropo son necesarias algunas transformaciones de espacio adicionales.

F.8. MATERIALES COMPUESTOS

La integración de la ecuación constitutiva en el caso de materiales compuestos no tiene ninguna complejidad adicional ya que en realidad se integra la ecuación constitutiva de cada componente y sólo debe hacerse una descomposición previa y una composición posterior para lograr el comportamiento del compuesto. En el Anexo F11 se esquematiza la forma de trabajo.

El punto que merece atención es la solución de problemas de tensión plana. Como ya se señaló, en un compuesto bajo estado plano de tensiones las componentes, generalmente no trabajan en estado plano de tensiones. Esto debe ser tenido en cuenta en el proceso de integración de la ecuación constitutiva. Si se trabaja con programas de elementos finitos 2D la componente de deformación transversal al plano debe ser obtenida iterativamente. En este caso no se puede aprovechar la ventaja del método de Euler Backward para el tratamiento del estado plano de tensiones porque las componentes no trabajan en estado plano. Por lo tanto la condición de tensión normal al plano nula debe ser planteada fuera del proceso de integración de la ecuación constitutiva de las componentes. En el Anexo F12 se esquematiza el algoritmo propuesto para la integración de la ecuación constitutiva de un compuesto bajo estado plano de tensiones.

ANEXO F1

METODO DE EULER BACKWARD

ALGORITMO PARA EL MODELO DE
DAÑO PLASTICO MODIFICADO

Este algoritmo consiste en actualizar las variables del problema de la siguiente forma :

Cálculo del incremento de deformación

$$(\Delta \epsilon_{ij})_n = (\Delta u_{i,j})_n$$

y actualización de la deformación

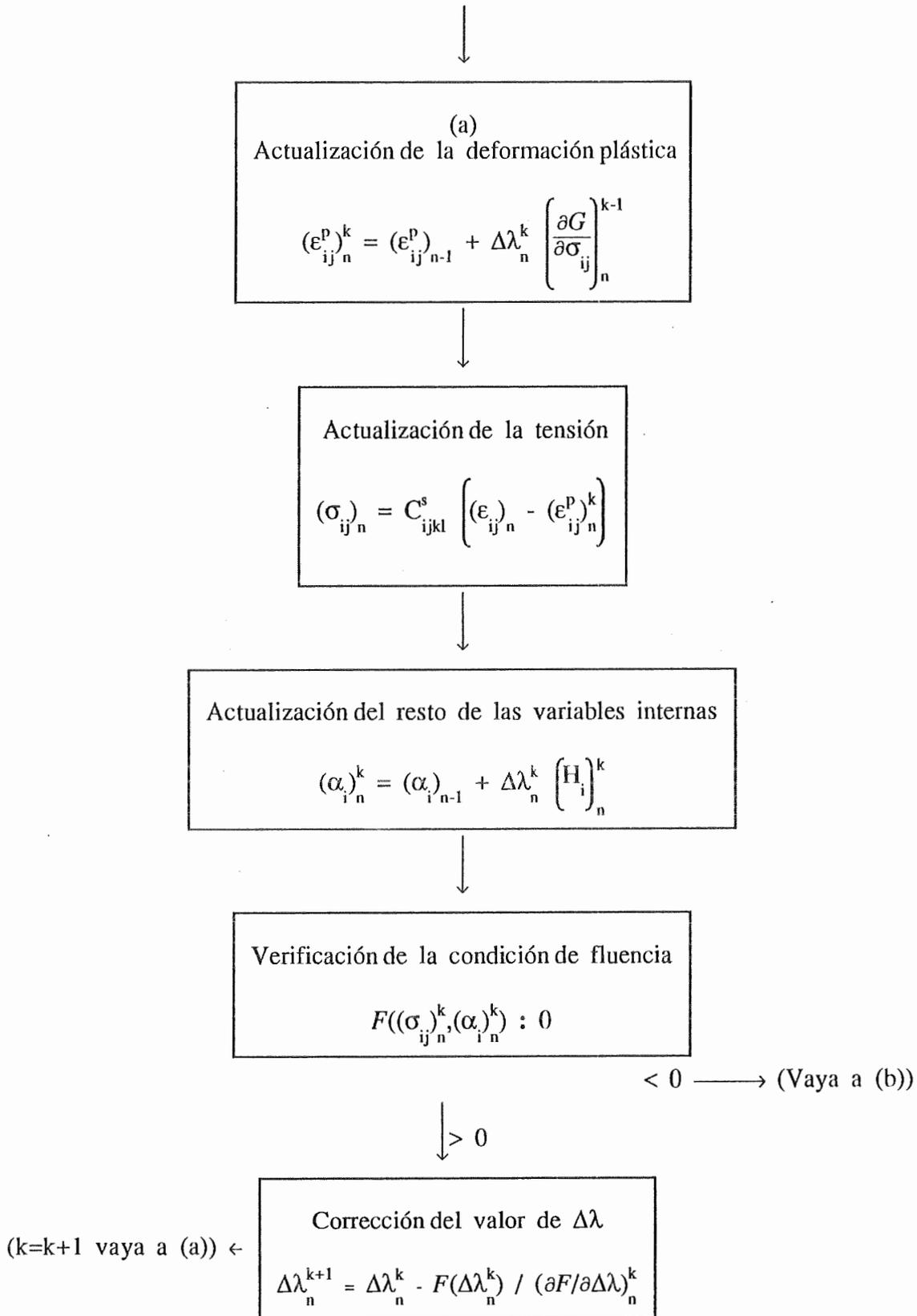
$$(\epsilon_{ij})_n = (\epsilon_{ij})_{n-1} + (\Delta \epsilon_{ij})_n$$



INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA
Inicialización

$$k = 0$$

$$\Delta \lambda^0 = 0$$



(b)

$$(e_{ij}^p)_n = (e_{ij}^p)_n^k$$
$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_n^k$$
$$(\alpha_{i_n}) = (\alpha_{i_n})^k$$



FIN

ANEXO F2

DERIVADA DE LA FUNCION DE FLUENCIA MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO

Para la función de fluencia escrita en la forma:

$$F = F(\sigma_{ij}, \kappa^p) = f(\sigma_{ij}, \kappa^p) - c(\sigma_{ij}, \kappa^p) \quad (\text{AF2.1})$$

La derivada tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \kappa^p} \frac{\partial \kappa^p}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{AF2.2})$$

a) Cálculo de $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial c}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{AF2.3})$$

$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ generalmente se expresa como :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = C_1 f_{ij}^1 + C_2 f_{ij}^2 + C_3 f_{ij}^3 \quad (\text{AF2.4})$$

Donde :

$$f_{ij}^1 = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} \quad f_{ij}^2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} \quad f_{ij}^3 = \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{AF2.5})$$

I_1 : Primer invariante del tensor de tensiones, J_2 : Segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_3 : Tercer invariante del tensor desviador de tensiones.

C_1 , C_2 y C_3 dependen del criterio de fluencia y se calculan como:

$$C_1 = \frac{\partial f}{\partial I_1} \quad C_2 = \frac{\partial f}{\partial (J_2)^{1/2}} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\tan(3\theta)}{(J_2)^{1/2}}$$

$$C_3 = - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \quad (\text{AF2.6})$$

Donde θ es el ángulo de similaridad de Lode

La derivada de la cohesión respecto del vector tensión se calcula como:

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma_{ij}} = \left[\sigma_T(\kappa^p) - \sigma_c(\kappa^p) \right] \frac{\partial r(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{AF2.7})$$

$$\frac{\partial r(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}} = 0.5 \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[\sum_{k=1}^3 \sigma_k \right] \sum_{k=1}^3 |\sigma_k| - \sum_{k=1}^3 \sigma_k \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[\sum_{k=1}^3 |\sigma_k| \right]}{\left[\sum_{k=1}^3 |\sigma_k| \right]^2} \right) \quad (\text{AF2.8})$$

Las derivadas de las tensiones principales σ_k se pueden calcular a partir de :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta+2\pi/3) \\ \text{sen } \theta \\ \text{sen}(\theta+4\pi/3) \end{Bmatrix} + I_1/3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{AF2.9})$$

Teniendo en cuenta la forma de expresar la derivada presentada en ecuación (AF2.4), resulta, por ejemplo :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} &= (1/3) f_{ij}^1 + \frac{2}{3} \left[\text{sen}(\theta+2\pi/3) - \tan(3\theta) \cos(\theta+2\pi/3) \right] f_{ij}^2 + \\ &- \left(\frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \right) \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{2}{3} \sqrt{J_2} \cos(\theta+2\pi/3) f_{ij}^3 \end{aligned} \quad (\text{AF2.10})$$

b) Cálculo de $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta \lambda}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta \lambda} = \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \Delta \lambda C_{ijpq}^s \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{pq} \partial \sigma_{kl}} \right)^{-1} C_{klrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \quad (\text{AF2.11})$$

El gradiente del flujo $\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{pq} \partial \sigma_{kl}}$ se puede calcular a partir de la expresión (AF2.4):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} = f_{ij}^1 \frac{\partial C_1}{\partial \sigma_{kl}} + f_{ij}^2 \frac{\partial C_2}{\partial \sigma_{kl}} + f_{ij}^3 \frac{\partial C_3}{\partial \sigma_{kl}} + C_1 \frac{\partial f_{ij}^1}{\partial \sigma_{kl}} + C_2 \frac{\partial f_{ij}^2}{\partial \sigma_{kl}} + C_3 \frac{\partial f_{ij}^3}{\partial \sigma_{kl}} \quad (\text{AF2.12})$$

c) Cálculo de $\frac{\partial F}{\partial \kappa^P}$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa^P} = \frac{\partial f}{\partial \kappa^P} - \frac{\partial c}{\partial \kappa^P} \quad (\text{AF2.13})$$

$$\frac{\partial c}{\partial \kappa^P} = r(\sigma) \frac{dc_T(\kappa^P)}{d\kappa^P} + [1-r(\sigma)] \frac{dc_C(\kappa^P)}{d\kappa^P} \quad (\text{AF2.14})$$

d) Cálculo de $\frac{\partial \kappa^P}{\partial \Delta \lambda}$

$$\frac{\partial \kappa^P}{\partial \Delta \lambda} = h_{k_{ij}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + \Delta \lambda \frac{\partial h_{k_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + \Delta \lambda h_{k_{ij}} \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{AF2.15})$$

Donde :

$$\frac{\partial h_{k_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\partial h_{k_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{AF2.16})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_{k,ij}}{\partial \sigma_{kl}} = & \left[\frac{\chi}{\sum_{r=3}^3 |\sigma_r|} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^p R^o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_C^p} \right] \sigma_{ij} \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \\
 & \left[\frac{f(\sigma)\chi}{\left(\sum_{r=1}^3 |\sigma_r|\right)^2} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^p R^o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_C^p} \right] \sigma_{ij} \right] \frac{\partial \left(\sum_i^3 |\sigma_i|\right)}{\partial \sigma_{kl}} + \\
 & \left[\frac{f(\sigma)\chi}{\sum_{r=3}^3 |\sigma_r|} \left[\frac{1}{g_T^p R^o} - \frac{1}{g_C^p} \right] \sigma_{ij} \right] \frac{\partial r(\sigma)}{\partial \sigma_{kl}} + \\
 & \left[\frac{f(\sigma)\chi}{\sum_{r=3}^3 |\sigma_r|} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^p R^o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_C^p} \right] \delta_{ik} \delta_{jl} \right]
 \end{aligned}
 \tag{AF2.17}$$

ANEXO F3

METODO DE EULER BACKWARD

ALGORITMO PARA EL MODELO DE
DAÑO PLASTICO MODIFICADO
ESTADO PLANO DE TENSIONES

Este algoritmo consiste en actualizar las variables del problema de la siguiente forma :

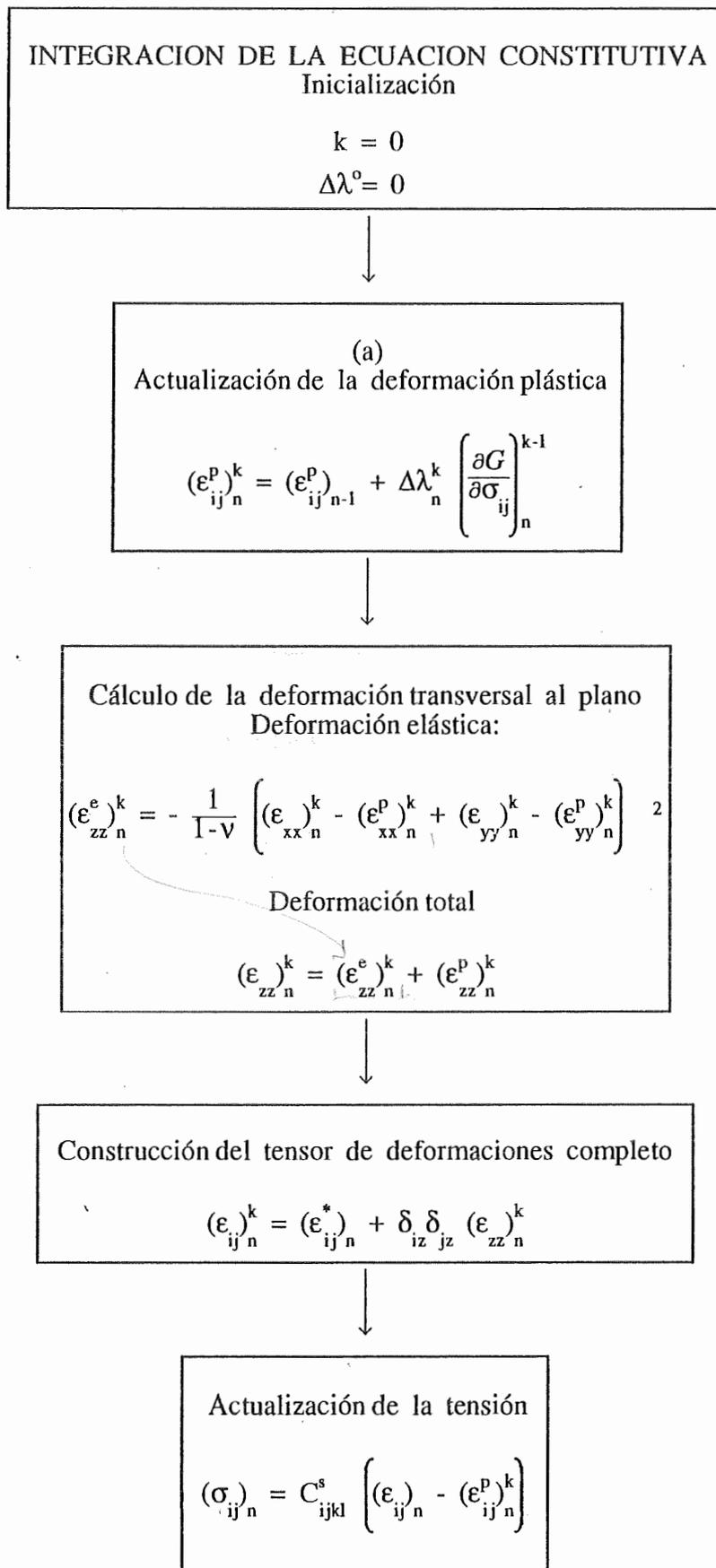
Cálculo del incremento de deformación

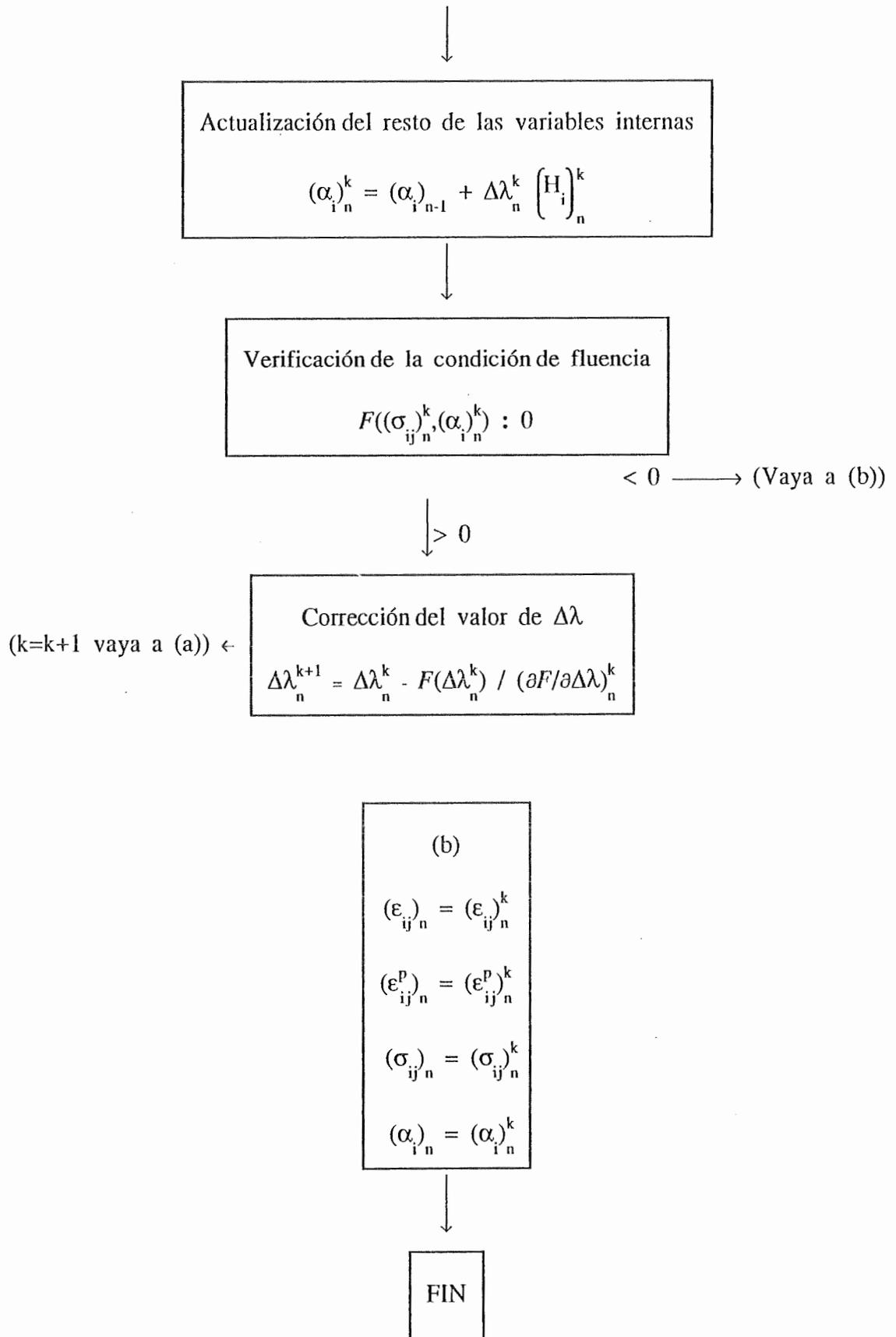
$$(\Delta \epsilon_{ij}^*)_{n} = (\Delta u_{i,j}^*)_{n}^{-1}$$

y actualización de la deformación

$$(\epsilon_{ij}^*)_{n} = (\epsilon_{ij}^*)_{n-1} + (\Delta \epsilon_{ij}^*)_{n}$$







¹ El tensor ε_{ij}^* sólo contiene las componentes de deformación en el

$$\text{plano: } \varepsilon_{xx}^* = \varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}^* = \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{xy}^* = \varepsilon_{xy}; \varepsilon_{zz}^* = \varepsilon_{yz}^* = \varepsilon_{zx}^* = 0$$

² Esto se obtiene haciendo cumplir las condiciones de estado plano de tensiones en la ecuación:

$$(\sigma_{ij})_n = C_{ijkl}^s (\varepsilon_{kl}^e)_n = C_{ijkl}^s \left[(\varepsilon_{kl})_n - (\varepsilon_{kl}^p)_n \right]$$

v es el coeficiente de Poisson

ANEXO F4

METODO DE RETORNO MAPEADO

ALGORITMO PARA EL MODELO DE
DAÑO PLASTICO MODIFICADO

Este algoritmo consiste en actualizar las variables del problema de la siguiente forma :

Cálculo del incremento de deformación

$$(\Delta \epsilon_{ij})_n = (\Delta u_{i,j})_n$$

y actualización de la deformación

$$(\epsilon_{ij})_n = (\epsilon_{ij})_{n-1} + (\Delta \epsilon_{ij})_n$$



Predictor elástico
k=0

$$(\epsilon_{ij}^p)_n^o = (\epsilon_{ij}^p)_{n-1}$$

$$(\epsilon_{ij}^e)_n^o = (\epsilon_{ij})_n - (\epsilon_{ij}^p)_n^o$$

$$(\sigma_{ij}^e)_n = C_{ijkl}^s (\epsilon_{ij}^e)_n^o$$

$$(\alpha_i)_n^o = (\alpha_i)_{n-1}$$



Verificación de la condición de fluencia

$$F((\sigma_{ij}^e)_n^o, (\alpha_i)_n^o) : 0$$

< 0 → (Vaya a (b))



INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA

k = 1



(a)
Cálculo de $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda_n^k = \frac{F\left((\sigma_{ij}^e)_{n-1}^{k-1}, (\alpha_i)_{n-1}^{k-1}\right)}{\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right\}_n^{k-1} C_{ijkl}^s \left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right\}_n^{k-1} - \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}\right\}_n^{k-1} H_{i_n}^{k-1}}$$



Actualización de la deformación plástica

$$(\epsilon_{ij}^p)_n^k = (\epsilon_{ij}^p)_n^{k-1} + \Delta\lambda_n^k \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right]_n^{k-1}$$

Actualización de la tensión

$$(\sigma_{ij})_n^k = C_{ijkl}^s \left[(\epsilon_{ij})_n - (\epsilon_{ij}^p)_n^k \right]$$



Actualización del resto de las variables internas

$$(\alpha_i)_n^k = (\alpha_i)_n^{k-1} + \Delta\lambda_n^k \left[H_i \right]_n^k$$



Verificación de la condición de fluencia

$$F((\sigma_{ij})_n^k, (\alpha_i)_n^k) : 0$$

(k=k+1 vaya a (a)) ←→ 0



(b)

$$(\epsilon_{ij}^p)_n = (\epsilon_{ij}^p)_n^k$$

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_n^k$$

$$(\alpha_i)_n = (\alpha_i)_n^k$$



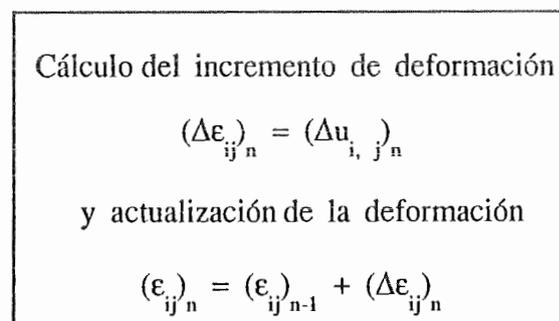
FIN

ANEXO F5

FORMA EXPLICITA DE DAÑO

ALGORITMO

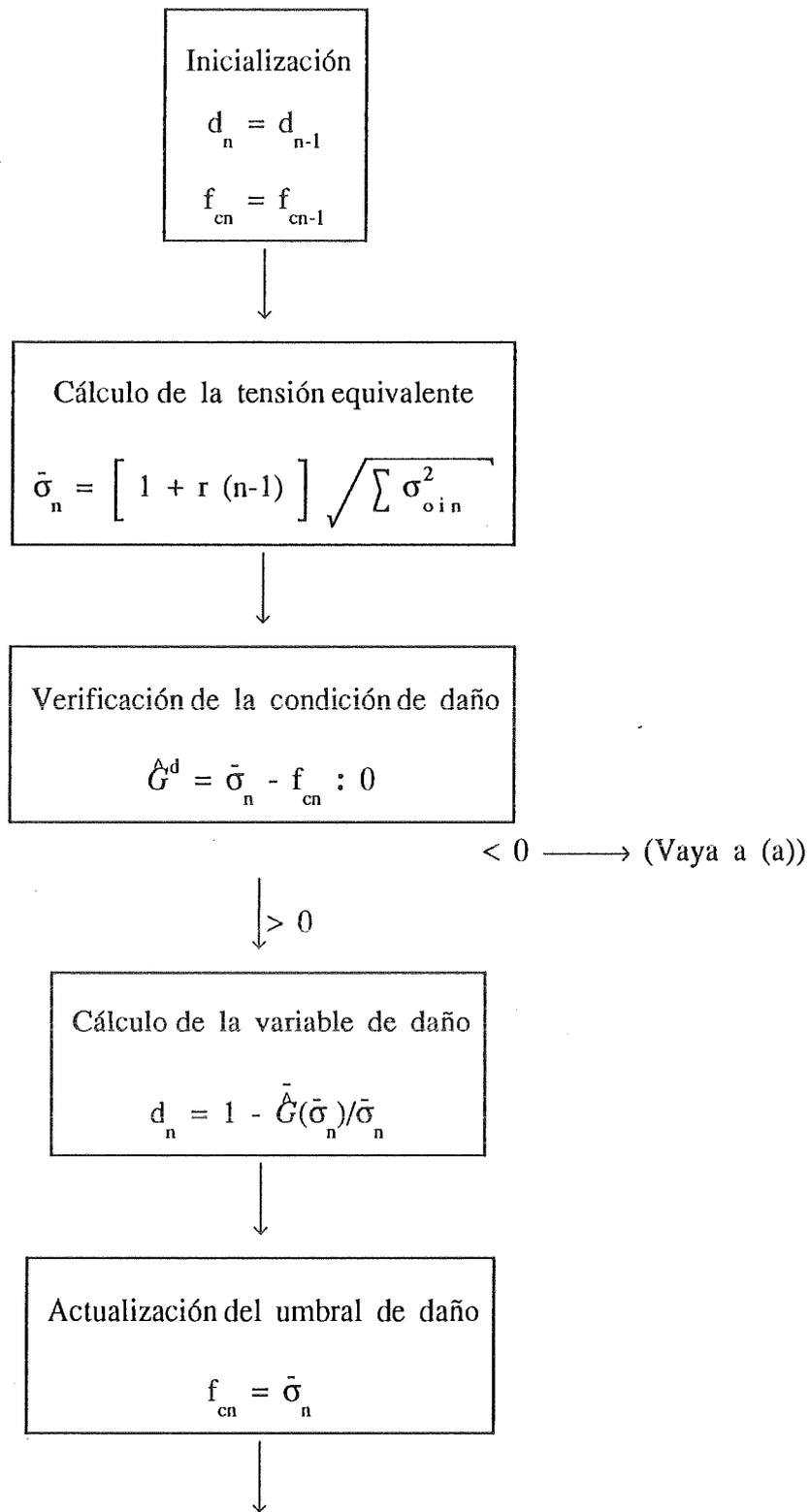
Este algoritmo consiste en actualizar las variables del problema de la siguiente forma :



Cálculo de la tensión no dañada

$$(\sigma_{ij}^o)_n = C_{ijkl}^o \left[(\epsilon_{ij})_n - (\epsilon_{ij}^p)_{n-1} \right]$$

```
graph TD; B["Cálculo de la tensión no dañada  
(σoij)n = Coijkl [(εij)n - (εpij)n-1"] --> C[" "]
```



Cálculo de la tensión dañada
predictora

$$(\sigma_{ij}^e)_n = (1-d_n)(\sigma_{ij}^o)_n$$



(a)

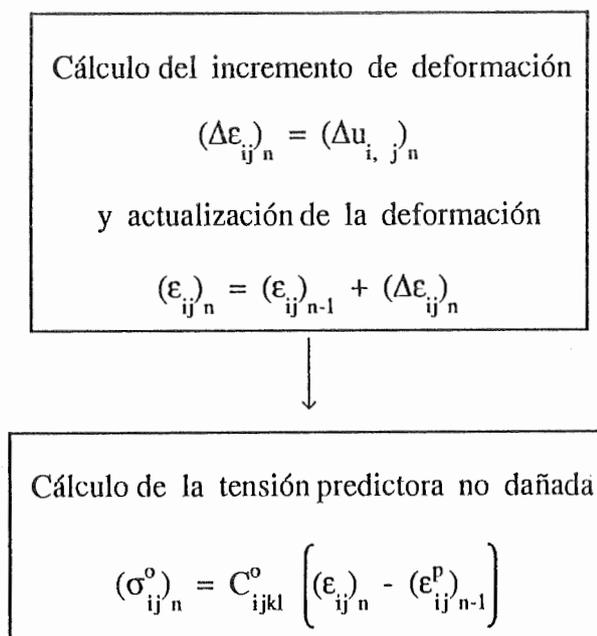
Integración de la ecuación elastoplástica

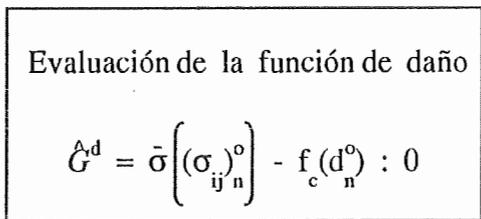
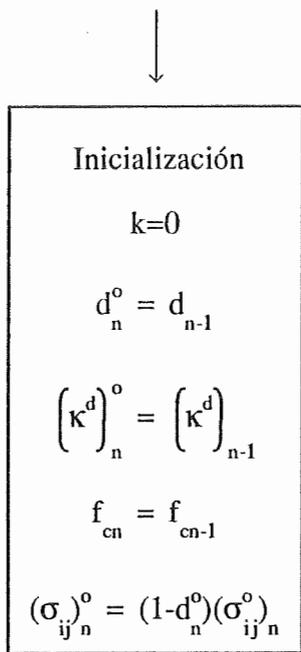
ANEXO F6

FORMA IMPLICITA DESACOPLADA DE DAÑO

ALGORITMO

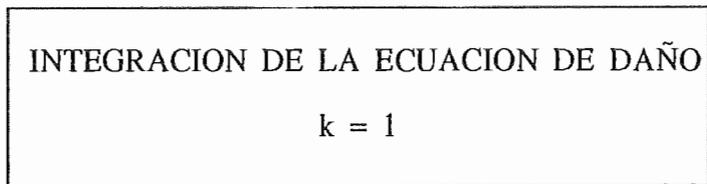
Este algoritmo consiste en actualizar las variables del problema de la siguiente forma :





$\leq 0 \longrightarrow$ (Vaya a (b))

↓
> 0



(a)
Cálculo de Δd

$$\Delta d_n^k = \frac{\hat{G}^d \left((\sigma_{ij_n}^{k-1}, d_n^{k-1}) \right)}{\left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \right\}_n^{k-1} h_{\kappa^d} + \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij_n}} \right\}_n^{k-1} (\sigma_{ij_n}^o)^{k-1}}$$



Actualización de la variable de daño

$$d_n^k = d_n^{k-1} + \Delta d_n^k$$

Actualización de la tensión predictor

$$(\sigma_{ij_n}^k = (1-d_n^k)(\sigma_{ij_n}^o)$$



Actualización del resto de las variables internas de daño

$$\left(\Delta \kappa^d \right)_n^k = \Psi_n^o \Delta d_n^k ; \left(\kappa^d \right)_n^k = \left(\kappa^d \right)_n^{k-1} + \left(\Delta \kappa^d \right)_n^k$$

$$f_{cn}^k = f_c(\kappa_n^{dk})$$



Verificación de la condición de daño

$$\hat{G}^d \left((\sigma_{ij_n}^k, d_n^k) \right) : 0$$

(k=k+1 vaya a (a)) \leftarrow >0

$\downarrow \leq 0$

(b)

$$d_n = d_n^k$$
$$(\sigma_{ij}^e)_n = (\sigma_{ij}^e)_n^k$$
$$(\kappa^d)_n = (\kappa^d)_n^k$$
$$(f_c)_n = (f_c)_n^k$$

\downarrow

INTEGRACION DE LA ECUACION ELASTOPLASTICA

ANEXO F7

FORMA IMPLICITA ACOPLADA DE PLASTICIDAD + DAÑO

METODO DE RETORNO MAPEADO PARA
EL MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO

Cálculo del incremento de deformación

$$(\Delta \epsilon_{ij})_n = (\Delta u_{i,j})_n$$

y actualización de la deformación

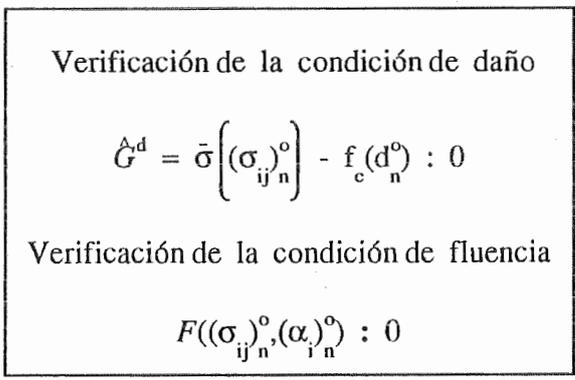
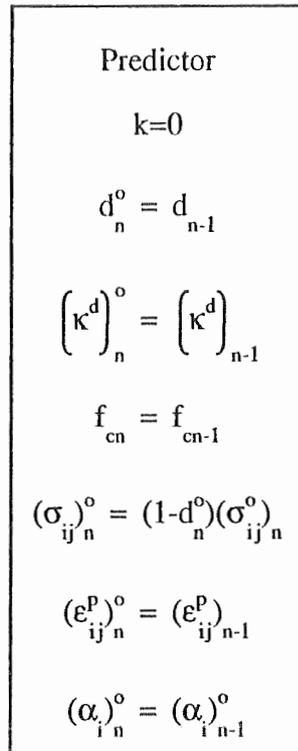
$$(\epsilon_{ij})_n = (\epsilon_{ij})_{n-1} + (\Delta \epsilon_{ij})_n$$



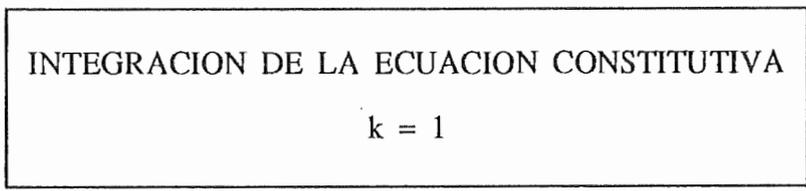
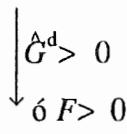
Cálculo de la tensión no dañada predictor

$$(\sigma_{ij}^o)_n = C_{ijkl}^o \left[(\epsilon_{ij})_n - (\epsilon_{ij}^p)_{n-1} \right]$$





$\dot{G}^d \leq 0 \longrightarrow$ (Vaya a (d))
y $F \leq 0$



↓

(a)

$$F((\sigma_{ij}^n)^{k-1}, (\alpha_i^n)^{k-1}) : 0$$

$F > 0 \longrightarrow$ (Vaya a (b))

↓ $F \leq 0$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}^o} \sigma_{kl}^o \right)_n^{k-1} = 0$$

Vaya a (c)

(b)

$$\hat{G}^d = \bar{\sigma} \left((\sigma_{ij}^n)^{k-1} \right) - f_c(d_n^{k-1}) : 0$$

$\hat{G}^d > 0 \longrightarrow$ (Vaya a (c))

↓ $\hat{G}^d \leq 0$

$$\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}^o} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}^o} \right)_o^{k-1} = 0$$

↓

(c)
Cálculo de $\Delta\lambda$ y Δd

$$D = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} H_k \right) \left(\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{k^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right) \right]_n^{k-1}$$

$$\Delta \lambda_n^k = \left(\frac{1}{D} \right) \left[\langle F(\sigma_{ij}, \alpha_r) \rangle \left(\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{k^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right) - \langle G^d(\sigma_{ij}, d) \rangle \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl}^o \right) \right]_n^{k-1}$$

$$\Delta d_n^k = \left(\frac{1}{D} \right) \left[\langle G^d(\sigma_{ij}, d) \rangle \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} H_k \right) - \langle F(\sigma_{ij}, \alpha_r) \rangle \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} C_{klpq}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right) \right]_n^{k-1}$$

Actualización de la deformación plástica

$$(\epsilon_{ij}^p)_n^k = (\epsilon_{ij}^p)_n^{k-1} + \Delta \lambda_n^k \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_n^{k-1}$$

Actualización de la variable de daño

$$d_n^k = d_n^{k-1} + \Delta d_n^k$$

Actualización de la tensión

Tensión no dañada

$$(\sigma_{ij})_n^k = C_{ijkl}^o \left[(\epsilon_{ij})_n - (\epsilon_{ij}^p)_n^k \right]$$

Tensión dañada

$$(\sigma_{ij})_n^k = (1-d_n^k)(\sigma_{ij}^o)_n^k$$



Actualización del resto de las variables internas

$$(\alpha_i)_n^k = (\alpha_i)_n^{k-1} + \Delta\lambda_n^k \left[H_i \right]_n^k$$

$$\left[\Delta\kappa^d \right]_n^k = \Psi_n^{ok} \Delta d_n^k ; \left[\kappa^d \right]_n^k = \left[\kappa^d \right]_n^{k-1} + \left[\Delta\kappa^d \right]_n^k$$

$$f_{cn}^k = f_c(\kappa_n^{dk})$$



Verificación de la condición de daño

$$\hat{G}^d = \bar{\sigma} \left[(\sigma_{ij})_n^k \right] - f_c(d_n^k) : 0$$

Verificación de la condición de fluencia

$$F((\sigma_{ij})_n^k, (\alpha_i)_n^k) : 0$$

(k=k+1 vaya a (a)) ← $\hat{G}^d > 0$

ó $F > 0$

↓ $\hat{G}^d \leq 0$
y $F \leq 0$

(d)

$$d_n = d_n^k$$
$$(\sigma_{ij}^e)_n = (\sigma_{ij}^e)_n^k$$
$$(\kappa_n^d) = (\kappa_n^d)^k$$
$$(f_{c_n}) = (f_{c_n})^k$$
$$(\epsilon_{ij}^p)_n = (\epsilon_{ij}^p)_n^k$$
$$(\alpha_{i_n}) = (\alpha_{i_n})^k$$



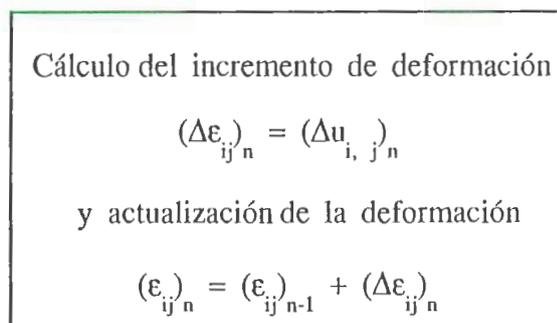
FIN

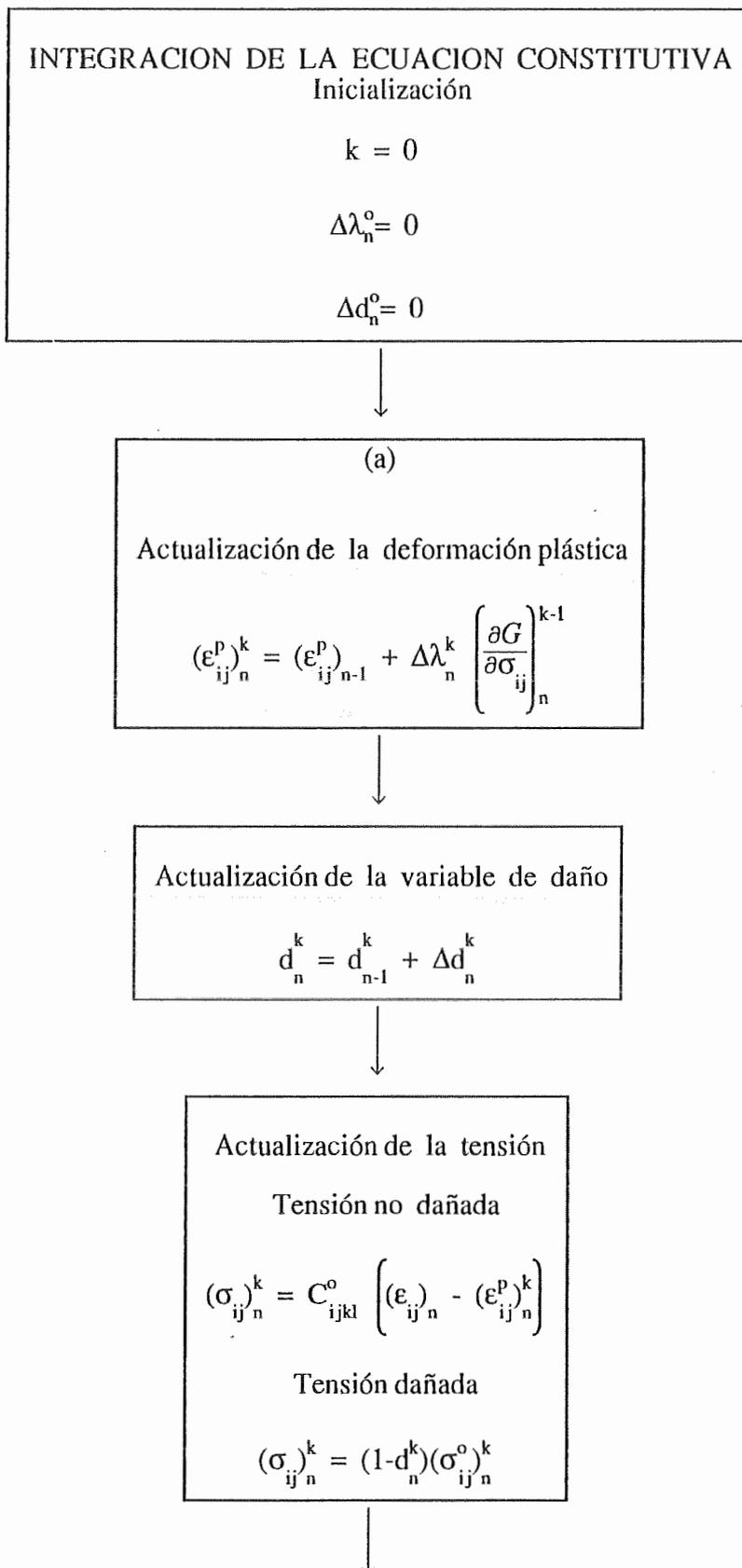
ANEXO F8

FORMA IMPLICITA ACOPLADA DE PLASTICIDAD + DAÑO

METODO DE EULER BACKWARD PARA
EL MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO

A continuación se presenta un esquema del algoritmo correspondiente a este método.





Actualización del resto de las variables internas

$$(\alpha_i)_n^k = (\alpha_i)_{n-1} + \Delta\lambda_n^k \left(H_i \right)_n^k$$

$$\left(\Delta\kappa^d \right)_n^k = \Psi_n^{ok} \Delta d_n^k ; \left(\kappa^d \right)_n^k = \left(\kappa^d \right)_n^{k-1} + \left(\Delta\kappa^d \right)_n^k$$

$$f_{cn}^k = f_c(\kappa_n^{dk})$$



Verificación de la condición de daño

$$\hat{G}^d = \bar{\sigma} \left((\sigma_{ij})_n^k \right) - f_c(d_n^k) = (H^d)_n^k : 0$$

Verificación de la condición de fluencia

$$F((\sigma_{ij})_n^k, (\alpha_i)_n^k) = (H^p)_k^n : 0$$

y $(H^d)_n^k \leq 0$
 $(H^p)_n^k \leq 0$ → (Vaya a (d))

↓ $(H^d)_n^k > 0$
 $(H^p)_n^k > 0$

$(H^p)_k^n : 0$

$(H^p)_k^n > 0$ → (Vaya a (b))

↓ $(H^p)_k^n < 0$

$(\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k = 0$
 Vaya a (c)

$$(b) \\ (H^d)_n^k = 0$$

$(H^d)_n^k > 0 \longrightarrow$ (Vaya a (c))

$$\downarrow (H^d)_n^k \leq 0$$

$$(\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k = 0$$



$$(c) \\ \Delta \lambda_n^{k+1} = \Delta \lambda_n^k - \frac{\langle H^p(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^d / \partial \Delta d)_n^k - \langle H^d(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k}{(\partial H^p / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^d / \partial \Delta d)_n^k - (\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k} \\ \Delta d_n^{k+1} = \Delta d_n^k - \frac{\langle H^d(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^p / \partial \Delta \lambda)_n^k - \langle H^p(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k}{(\partial H^p / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^d / \partial \Delta d)_n^k - (\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k}$$

$k=k+1 \leftarrow$
vaya a (a)

$$(d) \\ d_n = d_n^k \\ (\sigma_{ij}^e)_n = (\sigma_{ij}^e)_n^k \\ (\kappa^d)_n = (\kappa^d)_n^k \\ (f_c)_n = (f_c)_n^k \\ (\epsilon_{ij}^p)_n = (\epsilon_{ij}^p)_n^k \\ (\alpha_i)_n = (\alpha_i)_n^k$$



FIN

ANEXO F9

DERIVADA DE LAS FUNCIONES DE FLUENCIA Y DAÑO

MODELO DE DAÑO PLASTICO MODIFICADO

Para mayor simplicidad en la notación se dejan de lado los índices correspondientes al número de iteración y al número de incremento de carga.

1) Cálculo de $\frac{\partial H^P}{\partial \Delta \lambda}$

$$\frac{\partial H^P}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{Ver Anexo F2}) \quad (\text{AF9.1})$$

2) Cálculo de $\frac{\partial H^P}{\partial \Delta d}$

$$\frac{\partial H^P}{\partial \Delta d} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta d} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ij}^P} \frac{\partial \kappa_{ij}^P}{\partial \Delta d} \quad (\text{AF9.2})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta d} = \frac{\partial}{\partial \Delta d} \left[(1-d) C_{ijkl}^o (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^P) \right] \quad (\text{AF9.3})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta d} = - \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \Delta \lambda C_{ijmn}^s \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{mn} \partial \sigma_{kl}} \right]^{-1} C_{klpq}^o \varepsilon_{pq}^e \quad (\text{AF9.4})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta d} = - \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \Delta \lambda C_{ijmn}^s \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{mn} \partial \sigma_{kl}} \right]^{-1} \sigma_{kl}^o \quad (\text{AF9.5})$$

$$\frac{\partial \kappa^p}{\partial \Delta d} = \Delta \lambda \frac{\partial h_{\kappa^p ij}}{\partial \Delta d} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + \Delta \lambda h_{\kappa^p ij} \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \Delta d} \quad (\text{AF9.6})$$

$$\frac{\partial h_{\kappa^p ij}}{\partial \Delta d} = \frac{\partial h_{\kappa^p ij}}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \Delta d} \quad (\text{AF9.7})$$

3) Cálculo de $\frac{\partial H^d}{\partial \Delta d}$

$$\frac{\partial H^d}{\partial \Delta d} = \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta d} + \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \Delta d} \quad (\text{AF9.8})$$

$$\frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{AF9.9})$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial r(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}} [\sigma_{\Gamma}^d(\kappa^d) - \sigma_c^d(\kappa^d)] \quad (\text{AF9.10})$$

$$\frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \kappa^d} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \kappa^d} - \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \quad (\text{AF9.11})$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} = r(\sigma) \frac{\partial \sigma_{\Gamma}^d}{\partial \kappa^d} + [1-r(\sigma)] \frac{\partial \sigma_c^d}{\partial \kappa^d} \quad (\text{AF9.12})$$

$$\Delta \kappa^d = \frac{\bar{\sigma}}{\sum |\sigma_i|} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^d R_o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_T^d} \right] \psi^o \Delta d \quad (\text{AF9.13})$$

$$\frac{\partial \kappa^d}{\partial \Delta d} = \frac{\bar{\sigma}}{\sum |\sigma_i|} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^d R_o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_T^d} \right] \psi^o \quad (\text{AF9.14})$$

4) Cálculo de $\frac{\partial H^d}{\partial \Delta \lambda}$

$$\frac{\partial H^d}{\partial \Delta d} = \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta \lambda} + \frac{\partial \hat{G}^d}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{AF9.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \Delta \lambda} = & \left\{ \frac{1}{\sum |\sigma_i|} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^d R_o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_T^d} \right] \psi^o \Delta d \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} - \right. \\ & - \frac{\bar{\sigma}}{(\sum |\sigma_i|)^2} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^d R_o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_T^d} \right] \psi^o \Delta d \frac{\partial \sum |\sigma_i|}{\partial \sigma_{ij}} + \\ & \left. + \frac{\bar{\sigma}}{\sum |\sigma_i|} \left[\frac{1}{g_T^d R_o} - \frac{1}{g_T^d} \right] \psi^o \Delta d \frac{\partial r(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta \lambda} + \\ & + \frac{\bar{\sigma}}{\sum |\sigma_i|} \left[\frac{r(\sigma)}{g_T^d R_o} + \frac{1-r(\sigma)}{g_T^d} \right] \Delta d \frac{\partial \psi^o}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{AF9.16}) \end{aligned}$$

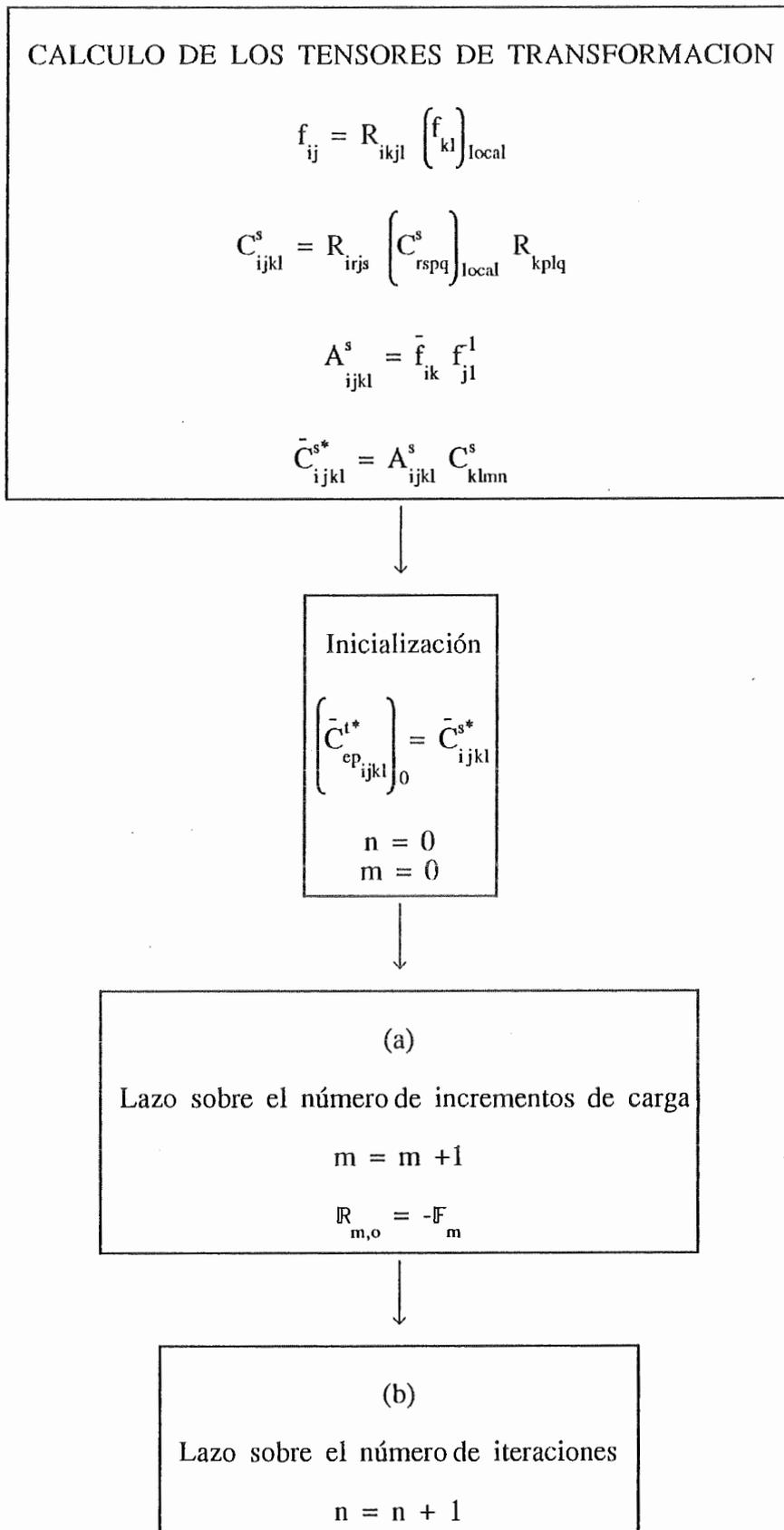
$$\frac{\partial \psi^o}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\partial}{\partial \Delta \lambda} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij}^o \left(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p \right) \right) \quad (\text{AF9.17})$$

$$\frac{\partial \psi^o}{\partial \Delta \lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial \Delta \lambda} \left(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p \right) - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^o \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2} \Delta \lambda \sigma_{ij}^o \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{AF9.18})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial \Delta \lambda} = \frac{1}{1-d} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{AF9.19})$$

ANEXO F10**MATERIALES ORTOTROPOS****ALGORITMO DE CALCULO**

A continuación se presenta el algoritmo de cálculo e integración para el caso de materiales ortótropos. El mismo está basado en un algoritmo de tipo Newton Raphson para la solución del problema no lineal y retorno mapeado para la integración de la ecuación constitutiva, por la forma en que se actualizan las variables internas. La idea puede usarse también con otros algoritmos de integración. Los subíndices $m-1$ y m corresponden a dos incrementos sucesivos de carga y $n-1$ y n dos iteraciones sucesivas dentro del incremento m .





Cálculo de la rigidez tangente

$$C_{ep}^{t \text{ijkl}} = A_{ijpq}^{s^{-1}} \bar{C}_{ep}^{t^*pqkl}$$

$$\left[\mathbf{K}^t \right]^{m,n-1} = \sum_{e=1}^{nelem} \left[\int_{V^e} \mathbf{B}^e \mathbf{T} \left(\mathbf{C}_{ep}^t \right)^{m,n-1} \mathbf{B}^e dV^e \right]$$



Cálculo del Incremento de Desplazamientos

$$\left(\delta \mathbf{U} \right)_{m,n} = - \left[\left(\mathbf{K}^t \right)_{m,n-1} \right]^{-1} \mathbb{R}_{m,n-1}$$

$$\left(\Delta \mathbf{U} \right)_{m,n} = \left(\Delta \mathbf{U} \right)_{m,n-1} + \left(\delta \mathbf{U} \right)_{m,n}$$



Cálculo del incremento de deformación

$$\left(\Delta \epsilon_{ij} \right)_{m,n} = \left(\Delta U_{i,j} \right)_{m,n}$$

y actualización de la deformación

$$\left(\epsilon_{ij} \right)_{m,n} = \left(\epsilon_{ij} \right)_{m-1} + \left(\Delta \epsilon_{ij} \right)_{m,n}$$



Predictor elástico
k=0

$$(\epsilon_{ij}^p)^o = (\epsilon_{ij}^p)_{m,n-1}$$

$$(\epsilon_{ij}^e)^o = (\epsilon_{ij}^o)_{m,n} - (\epsilon_{ij}^p)^o$$

$$(\sigma_{ij}^e)^o = (\sigma_{ij}^o)_{m,n} = C_{ijkl}^s (\epsilon_{ij}^e)^o$$

$$(\alpha_i)^o = (\alpha_i)_{m,n-1}$$



Transformación de las Tensiones Predictoras al espacio ficticio isótropo

$$\left(\bar{\sigma}_{ij}^e \right)_{m,n} = A_{ijkl}^s \left(\sigma_{kl}^e \right)_{m,n}$$



INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA EN EL ESPACIO FICTICIO ISOTROPO



Verificación de la condición de fluencia

$$F \left(\bar{\sigma}_{ij}^e, \bar{\alpha}_i \right)_{m,n}^o : 0$$

< 0 → (Vaya a (d))



Proceso iterativo de integración
 $k = 1$

(c)
 Cálculo de $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda_{m,n}^k = \frac{F\left(\bar{\sigma}_{ij}, \alpha_i\right)}{\left[\frac{\partial F}{\partial \alpha^m} \bar{h}_{tu}^m \bar{R}_{tu} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{turs}^{s*} R_{rs} \right]_{m,n}^{k-1}}$$

Actualización de la deformación plástica

$$(\epsilon_{ij}^p)_{m,n}^k = (\epsilon_{ij}^p)_{m,n}^{k-1} + \Delta\lambda_{m,n}^k \left\{ \frac{\partial G}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \right\}_{m,n}^{k-1} A_{pqij}^s$$

Actualización de la tensión

$$(\bar{\sigma}_{ij})_{m,n}^k = \bar{C}_{ijkl}^s \left[(\epsilon_{ij})_{m,n} - (\epsilon_{ij}^p)_{m,n}^k \right]$$

Actualización del resto de las variables internas

$$(\alpha_{i m,n})^k = (\alpha_{i m,n})^{k-1} + \Delta \lambda_n^k \left(H_i \right)_{m,n}^k$$



Verificación de la condición de fluencia

$$F((\bar{\sigma}_{ij})^k, (\alpha_{i m,n})^k) : 0$$

(k=k+1 vaya a (a)) ←→ >0



(d)

$$(\epsilon_{ij}^p)_{m,n} = (\epsilon_{ij}^p)_{m,n}^k$$

$$(\bar{\sigma}_{ij})_{m,n} = (\bar{\sigma}_{ij})_{m,n}^k$$

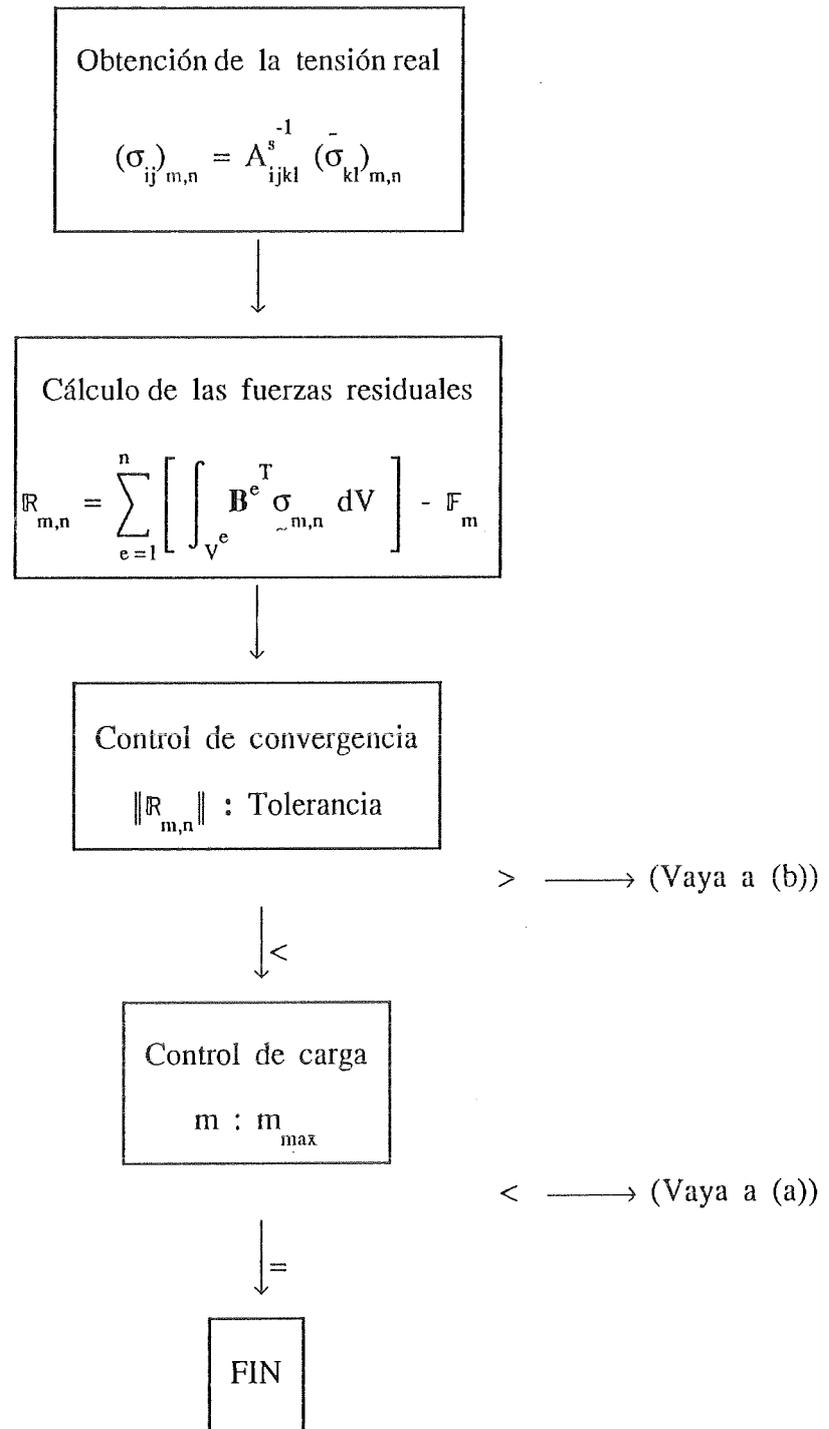
$$(\alpha_{i m,n}) = (\alpha_{i m,n})^k$$



Cálculo del tensor constitutivo en el espacio isótropo

$$\bar{C}_{ep ijkl}^{t*} = \bar{C}_{ijkl}^{s*} - \left(\frac{\bar{C}_{ijmn}^{s*} R_{mn} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \bar{C}_{pqkl}^{s*}}{\frac{\partial F}{\partial \alpha^m} \bar{h}_{tu}^m \bar{R}_{tu} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{tu}} \bar{C}_{turs}^{s*} R_{rs}} \right)_{m,n}$$



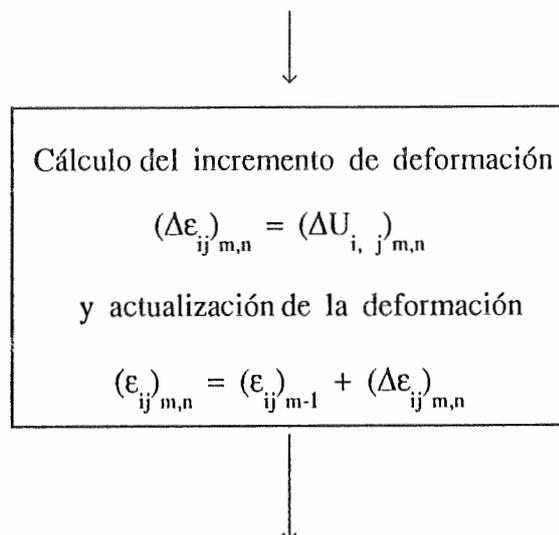


ANEXO F11

MATERIALES COMPUESTOS

ALGORITMO DE INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA

A continuación se presenta un esquema del algoritmo de trabajo para la integración de la ecuación constitutiva de materiales compuestos.



ANEXO F12

MATERIALES COMPUESTOS

ALGORITMO DE INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA

ESTADO PLANO DE TENSIONES

A continuación se presenta un esquema del algoritmo de trabajo para la integración de la ecuación constitutiva de materiales compuestos.



Cálculo del incremento de deformación

$$(\Delta \epsilon_{ij}^*)_{m,n} = (\Delta U_{i,j})_{m,n}^{-1}$$

y actualización de la deformación

$$(\epsilon_{ij}^*)_{m,n} = (\epsilon_{ij}^*)_{m-1} + (\Delta \epsilon_{ij}^*)_{m,n}$$

$$k = 1$$



(a)

Cálculo de la deformación transversal al plano
Deformación elástica:

$$(\epsilon_{zz}^e)_{m,n}^k = -\frac{1}{1-\nu} \left[(\epsilon_{xx})_{m,n} - (\epsilon_{xx}^p)_{m,n}^{k-1} + (\epsilon_{yy})_{m,n} - (\epsilon_{yy}^p)_{m,n}^{k-1} \right]^2$$

Deformación total

$$(\epsilon_{zz})_{m,n}^k = (\epsilon_{zz}^e)_{m,n}^k + (\epsilon_{zz}^p)_{m,n}^{k-1}$$

Construcción del tensor de deformaciones completo

$$(\epsilon_{ij})_{m,n}^k = (\epsilon_{ij}^*)_{m,n} + \delta_{iz} \delta_{jz} (\epsilon_{zz})_{m,n}^k$$

$$\downarrow (\sigma_{ij}^e)^1 = \left[C_{ijkl}^s \right]_{m,n-1}^1 \left[(\epsilon_{ij})_{m,n} - (\epsilon_{ij}^p)_{m,n-1}^1 \right]$$

Modelo
Const.
(1)
4 compon.

$$\begin{aligned} &(\sigma_{ij}^e)^1_{m,n} \\ &(\epsilon_{ij}^p)^1_{m,n} \\ &\left[C_{epijkl}^t \right]_{m,n}^1 \end{aligned}$$

$$\downarrow (\sigma_{ij}^e)^2_{m,n}$$

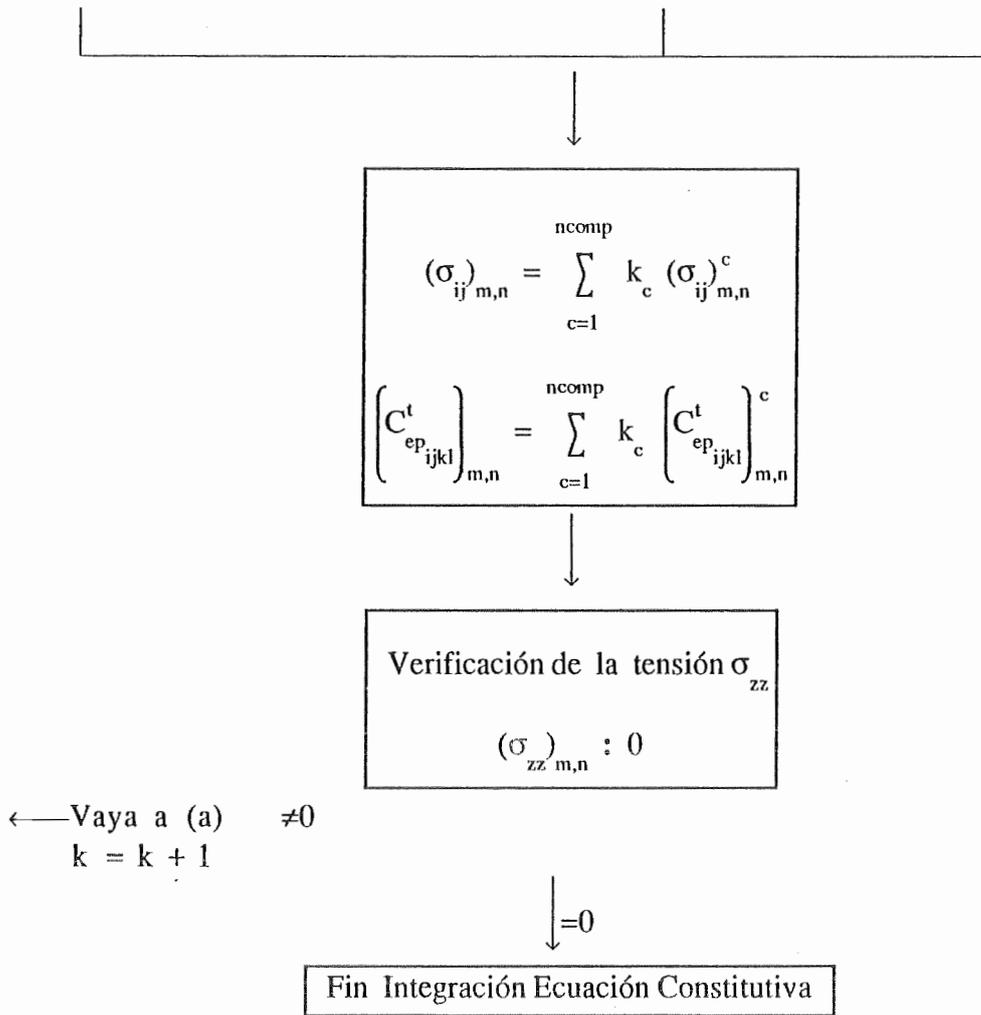
Modelo
Const.
(2)
4 compon.

$$\begin{aligned} &(\sigma_{ij}^e)^2_{m,n} \\ &(\epsilon_{ij}^p)^2_{m,n} \\ &\left[C_{epijkl}^t \right]_{m,n}^2 \end{aligned}$$

$$\downarrow (\sigma_{ij}^e)^{n \text{ comp}}_{m,n}$$

Modelo
Const.
(ncomp)
4 comp.

$$\begin{aligned} &(\sigma_{ij}^e)^{n \text{ comp}}_{m,n} \\ &(\epsilon_{ij}^p)^{n \text{ comp}}_{m,n} \\ &\left[C_{epijkl}^t \right]_{m,n}^{n \text{ comp}} \end{aligned}$$



¹ El tensor ϵ_{ij}^* sólo contiene las componentes de deformación en el plano: $\epsilon_{xx}^* = \epsilon_{xx}$; $\epsilon_{yy}^* = \epsilon_{yy}$; $\epsilon_{xy}^* = \epsilon_{xy}$; $\epsilon_{zz}^* = \epsilon_{yz}^* = \epsilon_{zx}^* = 0$

² Esto se obtiene haciendo cumplir las condiciones de estado plano de tensiones en la ecuación:

$$(\sigma_{ij})_{m,n}^k = C_{ijkl}^s (\epsilon_{kl}^e)_{m,n}^{k-1} = C_{ijkl}^s \left[(\epsilon_{kl})_{m,n} - (\epsilon_{kl}^p)_{m,n}^{k-1} \right]$$