

TORSION MIXTA EN VIGAS DE HORMIGON PRETENSADO

por :

Bibiana María Luccioni de Forns

Ing. Civil, Universidad Nacional de Tucumán

Tesis presentada en parcial cumplimiento para la
obtención del grado de Magister en Ingeniería Estructural

Dirigida por :

Dr. Rodolfo Danesi

y aprobada por :

Ing. Juan C. Reimundín

Ing. Arturo Bignoli

Dr. Aldo Viollaz

Ing. José E. Juliá

Laboratorio de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
San Miguel de Tucumán, Noviembre de 1988

TORSION MIXTA EN VIGAS DE HORMIGON PRETENSADO

por

BIBIANA MARIA LUCCIONI DE FORNS

Ing. Civil

Tesis presentada para la obtención del grado
de Magister en Ingenieria Estructural de
la Universidad Nacional de Tucumán

Instituto de Ingeniería Civil
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
S. M. de Tucumán, Octubre de 1988

A mis padres,
a Luis y María Luz

RESUMEN

En esta tesis se estudia el comportamiento de vigas de hormigón pretensado de sección doble T, de uso frecuente en puentes pretensados, bajo torsión mixta.

Con este fin se realizan dos ensayos de vigas de hormigón pretensado de sección doble T de 5m de luz sometidas a torsión con restricción al alabeo. Dichos ensayos completan una serie mayor de ensayos a torsión combinada con flexión y corte. Los resultados muestran la importancia de la componente alabeal de la torsión en este tipo de vigas, sobre todo en lo que hace a los mecanismos de colapso y la resistencia última que, en algunos casos, se duplica.

A la luz de los resultados experimentales se analiza el comportamiento bajo carga de las vigas y la influencia de ambas formas de torsión. Se desarrolla un método simple para el análisis no lineal que predice adecuadamente la degradación de la rigidez bajo carga y permite estudiar la influencia del grado de pretensado en la respuesta torsional.

Se estudian además los modelos de rotura existentes para hormigón armado y pretensado y se proponen modelos de falla que permiten tener en cuenta la torsión alabeal en la resistencia última y obtener diagramas de interacción para flexo-torsión. A través del modelo no lineal del comportamiento se generan superficies de interacción para el diseño de elementos bajo un estado general de sollicitaciones.

Como complemento, se analizan críticamente las normas más conocidas sobre el tema y se propone un método simple para el dimensionado de vigas sometidas a flexo-torsión.

ABSTRACT

In this thesis the behaviour under mixed torsion of prestressed concrete beams frequently used in bridges is studied. Two prestressed concrete I beams of 5 meters span are tested to failure under torsion with warping restraint. These two beams complete a larger serie of tests of prestressed I beams under combined torsion, flexure and shear. The experimental results show the importance of warping torsion in this type of beams, mainly in their failure mechanisms and ultimate strength which some duplicates that of pure torsion.

Using the experimental results the distribution of the two types of torsion is analysed. A simple method for the non-linear analysis is developed. This method accurately predicts stiffness degradation under load and is useful for studying the influence of prestressing on torsional response.

Existing failure mechanisms are studied and modified to take into account warping torsion contribution to ultimate strength. Interaction curves for combined torsion and bending are proposed. Using the non-linear model interaction surfaces for thin-walled prestressed concrete elements under combined loads are obtained.

Finally, different codes and recomendations about the subject are critically analysed and a simple method for the design of beams under combined torsion and flexure is proposed.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue desarrollado en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán. La autora desea agradecer especialmente:

Al Doctor Rodolfo Danesi Director Académico del Magister en Ingeniería Estructural y Jefe del Laboratorio de Estructuras por su incansable apoyo.

A los miembros de la comisión de supervisión.

Al Ing. Juan Carlos Reimundín, por su valiosa orientación y continua colaboración en la realización de esta tesis.

A los ingenieros Roberto Cudmani, Raúl Benito y Alberto Pascual que trabajaron en este proyecto de investigación y realizaron los primeros ensayos aportando valiosos resultados.

A todo el personal docente y técnico del Laboratorio de Estructuras por su colaboración en la realización de los ensayos.

A los técnicos Daniel Torielli y Jose Luis Oviedo, por la realización de los dibujos.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por el sustento económico proporcionado.

INDICE

RESUMEN	I
AGRADECIMIENTOS	III
INDICE	IV
NOTACION	IX
CAPITULO 1. INTRODUCCION	
1.1. FORMULACION DEL PROBLEMA	1
1.2. ANTECEDENTES	2
1.2.1. Estudios Teóricos	2
1.2.1.1. Torsión Elástica	2
1.2.1.2. Torsión Plástica	3
1.2.1.3. Torsión en Hormigón Armado	4
1.2.1.3.1. Torsión Circulatoria	4
1.2.1.3.1.1. Modelo del	
Reticulado	
Espacial	4
1.2.1.3.1.2. Modelo de flexión	
Oblicua	6
1.2.1.3.2. Torsión Mixta	7
1.2.1.4. Torsión en Hormigón Pretensado	8
1.2.2. Estudios Experimentales	8
1.2.3. Conclusiones	9
1.3. OBJETIVOS DE LA TESIS	9

CAPITULO 2. TEORIAS DE TORSION

2.1. INTRODUCCION	13
2.2. TEORIA ELASTICA	13
2.2.1. Torsión Circulatoria	13
2.2.1.1. Barras de Sección Circular	13
2.2.1.2. Barras de Sección no Circular	14
2.2.2. Torsión Mixta	16
2.2.2.1. Hipótesis Cinemáticas	17
2.2.2.2. Ecuaciones Fundamentales	17
2.3. TEORIAS DE TORSION EN HORMIGON ARMADO	19
2.3.1. Modelo del Reticulado Espacial	19
2.3.2. Modelo de Flexión Oblicua	20

CAPITULO 3. MODELOS Y ENSAYOS REALIZADOS

3.1. INTRODUCCION	25
3.2. ELECCION DE LOS MODELOS	25
3.2.1. Dimensiones	25
3.2.2. Parámetros a investigar	25
3.2.3. Materiales	26
3.2.3.1. Hormigón	26
3.2.3.2. Armadura Tesa	27
3.2.3.3. Armadura no Tesa	27
3.2.4. Armaduras	27
3.2.4.1. Armadura de Pretensado	28
3.2.4.2. Armadura Longitudinal no Tesa	29
3.2.4.3. Armadura Transversal	29
3.3. CONSTRUCCION DE LOS MODELOS	29
3.4. DISPOSITIVOS DE CARGA Y APOYO	30
3.4.1. Aplicación de la Carga	30

3.4.2. Apoyos y Anclajes	31
3.5. INSTRUMENTACION	32
3.5.1. Disposición	32
3.5.2. Instrumental Utilizado	33
3.6. DESARROLLO DE LOS ENSAYOS	34
3.7. RESULTADOS EXPERIMENTALES	36
3.7.1. Determinación de los Desplazamientos Verticales	36
3.7.2. Giros de Torsión	37
3.7.3. Desplazamientos Horizontales en Diafragmas	
Extremos	38
3.7.4. Descensos y Levantamientos de Apoyos	38
3.7.5. Deformaciones Normales en la Sección Central ...	39
3.7.6. Medición de Deformaciones en el Alma mediante	
Rosetas de Extensómetros Mecánicos DEMEC	40
3.7.7. Deformaciones en Bielas Comprimidas	40
3.7.8. Ancho de Fisuras	41
3.7.9. Determinación del Cuadro de Fisuración	41
3.7.10. Otras Observaciones	42

CAPITULO 4. MODELOS TEORICOS DESARROLLADOS Y SU COMPARACION CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.1. COMPORTAMIENTO BAJO CARGA	87
4.1.1. Introducción	87
4.1.2. Análisis Lineal	87
4.1.2.1. Condiciones de borde	90
4.1.2.2. Resultados Obtenidos con la Teoría	
Elástica	92
4.1.2.3. Carga de Fisuración	93
4.1.3. Análisis no Lineal	95
4.1.3.1. Introducción	95

4.1.3.2. Hipótesis	96
4.1.3.3. Análisis Seccional	97
4.1.3.3.1. Formulación Matricial	97
4.1.3.3.2. Equilibrio Seccional	99
4.1.3.3.3. Rigidez Alabeal	105
4.1.3.4. Integración de la Ecuación Diferencial	107
4.1.3.4.1. Rigideces	108
4.1.3.4.1.1. Rigidez	
Alabeal	108
4.1.3.4.1.2. Rigidez a	
Torsión	
Circulatoria .	108
4.1.3.4.2. Solución mediante el	
Método de Diferencias	
Finitas	110
4.1.3.4.3. Matrices de transferencia .	111
4.2. MODELOS DE ROTURA	118
4.2.1. Introducción	118
4.2.2. Método del Equilibrio y de las Deformaciones	
Ultimas	118
4.2.3. Método del Equilibrio Ultimo	123
4.2.4. Método de las Deformaciones Límites	127
4.2.4.1. Construcción de Superficies de Inte-	
racción	127
4.2.4.3. Método de las deformaciones	129
4.2.4.4. Comentarios	134
CAPITULO 5. ANALISIS DE NORMAS	
5.1. INTRODUCCION	159
5.2. ACI 318-83	159

5.3. PCI	164
5.4. CEB FIP	166
5.4.1. Torsión de Saint Venant	166
5.4.2. Torsión Alabeal	170
5.5. CIRSOC 201	171
5.6. NORMA NEOZELANDESA	172
5.7. MODELO PROPUESTO	174
CAPITULO 6. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS	
6.1. CONCLUSIONES	177
6.2. SUGERENCIAS PARA PROXIMOS TRABAJOS	180
REFERENCIAS	182

NOTACION

a_i	: Area de armadura i
A	: Area
$\underline{A}$	: Matriz de deformación definida por la ecuación (4.25)
$\bar{A}_i$	: Matriz de transferencia del tramo i
$\underline{A}_i$	: Matriz de transferencia acumulada
$\underline{A}_{ij}$	: Matriz $\underline{A}$ sin la fila j , sin la columna i
$\underline{A}^{*ij}$	: Columna i de la matriz $\underline{A}$ sin la fila j
A_L	: Area de armadura longitudinal
A_{pl}	: Area de armadura longitudinal tesa
A_t	: Area de armadura transversal
$\underline{A}_T^j$	: Matriz tangente en el comienzo de la etapa j .
A_o	: Area encerrada por la línea media de la pared de un tubo
A_l	: Area encerrada por la línea perimetral que une los centros de las barras de la armadura longitudinal
b	: Largo de un rectángulo delgado
b_j	: Dimensión de una sección doble T, ver fig. 50 del Cap.4
b_o	: Ancho del alma en una sección doble T
b_w	: Menor ancho de la sección
$\underline{B}$	: Vector de coordenadas
$\underline{B}_i$	: Matriz de transferencia ampliada del tramo i
$\underline{C}$	: Matriz de coordenadas de cuatro puntos
C_t	: Factor que relaciona las tensiones tangenciales por corte y torsión
$\underline{C}_{i1}$	: Vector de carga del tramo i
$\underline{C}_{i2}$	: Vector de carga nodal del punto i
$\underline{C}_i^*$	: Vector de carga
$\bar{C}_i^*$	: Vector de carga acumulado
C_1	: Constante de integración
C_2	: Constante de integración
C_3	: Constante de integración

- C_4 : Constante de integración
 d : Distancia entre los centros de gravedad de las alas
 def : Diámetro del mayor círculo inscripto en el contorno
 di : Error en la iteración i
 dj : Dimensión indicada en fig.50 del Capítulo 4
 D : Fuerza de compresión en la biela de hormigón del modelo de reticulado espacial
 $\underline{D}$: Vector de desplazamientos
 D_2 : Parametro definido por la ecuación (4.7)
 e : Excentricidad de la carga
 E : Módulo de elasticidad
 $\underline{E}$: Vector de deformaciones
 E_{bo} : Módulo de elasticidad tangente al origen del hormigón
 E_s : Módulo de elasticidad del acero
 $\bar{f}$: Tensión axial promedio debida al pretensado
 f'_c : Resistencia cilíndrica a la compresión del hormigón
 f_{ly} : Tensión de fluencia de la armadura longitudinal
 f_{lyk} : Tensión característica de fluencia de la armadura longitudinal
 f_{plyk} : Tensión característica de fluencia de la armadura longitudinal tesa
 f_{sy} : Tensión de fluencia de la armadura transversal
 f'_t : Resistencia a la tracción del hormigón
 $\underline{F}$: Vector de sollicitaciones
 $\underline{F}_j$: Vector $\underline{F}$ sin la fila j
 F_j : Parámetro definido por la ecuación (4.8)
 G : Módulo elástico transversal
 $\underline{G}$: Vector de giros
 $(G.J)_{fis}$: Rigidez torsional de Saint Venant pos-fisuración
 h : Paso de la malla de diferencias finitas
 hef : Espesor efectivo de la pared de hormigón

H	: Longitud de cada uno de los segmentos en que se divide la viga
Hu	: Fuerza horizontal última en las alas
J	: Constante de torsión
Jp	: Momento de inercia polar
Jsec	: Constante de torsión secante
J_X	: Momento de inercia respecto al eje principal X
J_Y	: Momento de inercia respecto al eje principal Y
J_n	: Momento de inercia sectorial principal
J_{nid}	: Momento de inercia sectorial principal de la sección ideal
k	: Coeficiente que depende de la forma de la sección
Kp	: Factor de plasticidad
Ksec	: Módulo de elasticidad secante
Kt	: Módulo de elasticidad tangente
l	: Longitud
$\tilde{L}$	: Matriz de coeficientes en el método de diferencias finitas
$\tilde{L}_n$	: Matriz L_0 acumulada
$\tilde{L}_0$	: Matriz utilizada para definir las condiciones de contorno
m(x)	: Carga torsional distribuida
mo	: Momento torsor uniformemente distribuido
mx	: Coeficiente definido en ecuación (4.79)
my	: Coeficiente definido en ecuación (4.79)
mw	: Coeficiente definido en ecuación (4.79)
M	: Punto genérico del contorno
$\tilde{M}$	: Vector de términos independientes del método de diferencias finitas
Mf	: Momento flector
Mfu	: Momento flector último
Mfuo	: Momento flector último para flexión pura
Mua	: Momento flector último de las alas
Mx	: Momento flector en la dirección del eje x
Mxu	: Momento flector último en la dirección del eje x

- M_{xuo} : Momento flector último para flexión simple en la dirección del eje x
 M_y : Momento flector en la dirección del eje y
 M_{yu} : Momento flector último en la dirección del eje y
 M_{yuo} : Momento flector último para flexión simple en la dirección del eje y
 M_w : Bimomento
 M : Bimomento en el sistema de coordenadas sectoriales principales
 M_wu : Bimomento último
 M_{wuo} : Bimomento último para torsión alabeal pura
 M_I : Origen de las coordenadas sectoriales
 M_I : Momento de la armadura longitudinal en fluencia respecto a un eje horizontal ubicado en el centro de la zona comprimida en la parte superior de la viga
 M_{II} : Momento de la armadura longitudinal en fluencia respecto a un eje horizontal ubicado en el centro de la zona comprimida en la parte inferior de la viga
 n : Número de armaduras en la sección o número de puntos en una malla o coeficiente definido por ecuación (4.79)
 N : Esfuerzo normal
 N_u : Esfuerzo normal último
 N_{ua} : Esfuerzo normal último en las alas
 N_{uo} : Esfuerzo normal último para compresión simple
 O : Origen de coordenadas cartesianas
 P : Perímetro de la línea que une los centros de la armadura longitudinal
 P : Polo de las coordenadas sectoriales
 P_u : Carga última
 q : Coordenada definida en fig.7 del Capítulo 2
 q_t : Flujo de tensiones tangenciales debidas a torsión
 q_x : Carga transversal en la dirección del eje principal x
 q_y : Carga transversal en la dirección del eje principal y
 Q : Esfuerzo de corte
 Q_{sd} : Esfuerzo de corte actuante

Ord2	: Resistencia al corte teniendo en cuenta la resistencia a compresión de las bielas de hormigón
Qu	: Corte último
Quo	: Corte último para corte simple
Qx	: Corte en la dirección del eje x
Qxu	: Corte último en la dirección del eje x
Qxuo	: Corte último para corte simple en la dirección del eje x
Qy	: Corte en la dirección del eje y
Qyu	: Corte último en la dirección del eje y
Qyuo	: Corte último para corte simple en la dirección del eje y
r	: Radio o coordenada definida en la fig. 7 del Capítulo 2
rj	: Dimensión definida en fig.50 del Capítulo 4
Rt	: Factor definido por ecuación (5.12)
s	: Coordenada curvilínea
S	: Separación entre estribos
Sj	: Pendiente de las alas de una sección doble T
t	: Espesor
to	: Espesor efectivo segun ecuación (5.34)
ts	: Espesor efectivo segun ecuación (5.36)
t1	: Dimensión definida en la figura 50 del Capítulo 4
t2	: Dimensión definida en la figura 50 del Capítulo 4
t3	: Dimensión definida en la figura 50 del Capítulo 4
T	: Momento torsor
Tc	: Resistencia torsional provista por el hormigón
Tcd	: Colaboración del hormigón en la resistencia torsional según CEB-FIP
Tfis	: Momento torsor de Saint Venant correspondiente a la fisuración
Ti	: Resistencia torsional ideal
Tinf	: Resistencia a torsión circulatoria del ala inferior
Tn	: Resistencia torsional nominal

Trd1	: Resistencia torsional teniendo en cuenta la compresión de las bielas de hormigón
Trd2	: Resistencia torsional teniendo en cuenta la tracción de la armadura transversal
Trd3	: Resistencia torsional teniendo en cuenta la tracción de la armadura longitudinal
Ts	: Momento torsor de Saint Venant
Tsd	: Momento torsor de cálculo
Tsu	: Momento torsor de Saint Venant último
Tsup	: Resistencia a torsión circulatoria del ala superior
Tt	: Resistencia torsional provista por la armadura transversal
Tu	: Momento torsor último
Tuo	: Momento torsor último para torsión simple
Tw	: Momento torsor alabeal
u	: Desplazamiento en la dirección perpendicular al contorno
U	: Desplazamiento del polo en la dirección del eje x
v	: Desplazamiento en la dirección del contorno
v'c	: Resistencia al corte puro
vtc	: Resistencia torsional provista por el hormigón
v'tc	: Resistencia torsional provista por el hormigón en torsión pura
vti	: Tensión tangencial por torsión ideal
vts	: Resistencia torsional provista por la armadura transversal
vtu	: Tensión tangencial última por torsión
vu	: Tensión tangencial última por corte
V	: Desplazamiento del polo en la dirección del eje y
w	: Desplazamiento del contorno en la dirección del eje z
wj	: Dimensión definida en fig.50 del Capítulo 4
W	: Desplazamiento definido por la ecuación (2.22)
x	: Coordenada cartesiana en el plano de la sección
X	: Coordenada cartesiana principal o dimensión del lado menor de una sección rectangular o fuerza en la armadura longitudinal del modelo del reticulado espacial

- $\underline{X}_0$: Vector cuyos elementos son las incógnitas de borde
 X_1 : Dimensión del lado menor de un estribo rectangular
 y : Coordenada cartesiana en el plano de la sección
 Y : Coordenada cartesiana principal o dimensión del lado mayor de una sección rectangular o fuerza en la armadura transversal del modelo del reticulado espacial
 $\underline{Y}_i$: Vector de estado del nodo i
 $\underline{Y}_i^{der}$: Vector de estado del nodo i a la derecha
 $\underline{Y}_i^{izq}$: Vector de estado del nodo i a la izquierda
 Y_1 : Dimensión del lado mayor de un estribo rectangular
 z : Coordenada cartesiana en la dirección axial
 Z : Coordenada cartesiana principal en la dirección axial
 $\underline{Z}_i$: Vector de estado del nodo i ampliado
 α : Angulo que forma la tangente al contorno con el eje x o inclinación de la superficie de falla
 α_t : Parámetro definido por la ecuación (5.2)
 α_2 : Coeficiente adimensional definido por ecuación (4.6)
 β : Relación de rigideces definida por la ecuación (4.2)
 β_{bz} : Módulo de ruptura del hormigón
 β_t : Relación entre tensiones tangenciales definida por ecuación (5.15)
 γ : Deformación angular
 γ_p : Factor que tiene en cuenta el efecto del pretensado en la resistencia al corte del hormigón
 γ_t : Factor que tiene en cuenta el efecto del pretensado en la resistencia torsional del hormigón
 δ : Relación entre la resistencia a tracción y la resistencia a compresión
 ϵ : Deformación específica
 ϵ_{bo} : Deformación inicial del hormigón debida al pretensado
 ϵ_{eo} : Deformación inicial del acero debida al pretensado
 ϵ_o : Deformación relativa inicial de las barras de pretensado respecto al hormigón que las rodea
 ϵ_z : Deformación específica en la dirección del eje z

- ξ : Inclinação de las bielas de hormigón en el modelo del reticulado espacial
 ϕ : Giro de torsión
 $\bar{\phi}$: Solución particular de la ecuación diferencial de torsión
 ϕ'_{fis} : Derivada del angulo de giro correspondiente a la fisuración
 Φ : Factor de minoración de resistencia
 θ : Función de tensiones
 $\psi(x,y)$: Función de alabeo
 ν : Coeficiente de seguridad
 σ : Tensión normal
 σ_{pl} : Tensión de pretensado
 σ_z : Tensión normal en la dirección del eje z
 τ : Tensión tangencial
 τ_{rd} : Resistencia al corte del hormigón
 ω : Area sectorial
 Ω : Area sectorial principal
 K : Factor que relaciona las rigideces torsionales y la longitud, definido en fig. 2 del Capítulo 1

1. INTRODUCCION

1.1. FORMULACION DEL PROBLEMA

Los elementos estructurales de sección abierta y paredes delgadas se alabea al ser sometidos a torsión, es decir que las secciones no se mantienen planas después de la deformación (ver fig.1). Si dicho alabeo es restringido total o parcialmente, se generan tensiones normales variables a lo largo de la dirección axial. Dicha variación da lugar a un sistema de tensiones tangenciales que contribuye a resistir la torsión aplicada.

En el estudio del comportamiento de este tipo de vigas aparecen entonces, en general, dos formas de torsión: La torsión circulatoria o de Saint Venant y la torsión alabeal (1).

La torsión de Saint Venant es resistida por un flujo de tensiones tangenciales que circula alrededor de la sección transversal. La resistencia torsional es función del área encerrada por el flujo de corte (6) y es independiente de la longitud de la viga.

La torsión alabeal es resistida por tensiones tangenciales que no circulan alrededor de la sección. Aparece asociada a algún tipo de restricción en la deformación axial y es importante en secciones muy delgadas. En este caso la resistencia sí es función de la longitud.

La mayoría de las estructuras reales presentan secciones de espesor finito y cierta restricción a alabeo de los miembros torsionados impuesta por la rigidez de los elementos a que estos se conectan o por la presencia de cargas concentradas. Como consecuencia de ello, comparten ambas formas de torsión. En ese caso se habla de torsión mixta. Las proporciones en que la torsión de Saint Venant y la torsión alabeal contribuyen a resistir la torsión aplicada son funciones de las respectivas rigideces, de la

longitud del elemento y de las condiciones de borde. Al respecto resulta muy ilustrativo el gráfico de la fig.2, propuesto en Ref. (2), en el que se han representado en la parte inferior las distintas secciones según la importancia de la torsión alabeal decreciente. La curva representa el bimomento alabeal en función de un parámetro K que tiene en cuenta los factores mencionados como determinantes de la distribución de ambas formas de torsión.

Entre los elementos estructurales que pueden calificarse como de paredes delgadas se encuentran las vigas de puentes de hormigón pretensado y los núcleos de edificios en altura de hormigón armado. En estos casos, una vez fisurado el hormigón, los mecanismos de resistencia de esfuerzos normales y tangenciales son totalmente distintos a los correspondientes a cargas inferiores a la de fisuración. Esto trae como consecuencia una modificación en la distribución de ambas formas de torsión y en el comportamiento general del elemento.

1.2. ANTECEDENTES

1.2.1. ESTUDIOS TEORICOS

1.2.1.1. TORSION ELASTICA

El primero que estudió el problema de torsión en un cuerpo elástico de sección circular fue Coulomb (7) en 1784. El encontró que el momento torsor era proporcional al ángulo de giro. La ecuación teórica para la torsión de una barra circular fue derivada, sin embargo, 40 años más tarde por Navier en sus notas de resistencia de materiales publicadas en 1826 (8).

El problema de la torsión de elementos de sección no circular fue resuelto en 1885 por Saint Venant (9) mediante un método semi-inverso. De acuerdo a la teoría de Saint Venant, la sección más efectiva para resistir torsión es la sección tubular. En 1896

Bredt (6) derivó ecuaciones muy simples para secciones tubulares de paredes muy delgadas, ecuaciones que son muy útiles incluso para la teoría de torsión en hormigón armado.

En 1903 Prandtl (10) descubrió una interesante analogía entre la función de tensiones en el problema de torsión y la deflexión en una membrana bajo carga uniforme. Esta analogía provee una herramienta muy útil para visualizar la magnitud y dirección de las tensiones tangenciales y permite encontrar experimentalmente la constante de torsión de secciones de forma complicada. En 1911 Bach (11) sugirió expresiones aproximadas para la constante de torsión de secciones abiertas compuestas por rectángulos.

En 1940 Vlasov (1) desarrolló una teoría para el comportamiento torsional de las barras de pared delgada que se diferencian del resto porque pueden experimentar tensiones longitudinales bajo torsión. Esta teoría fue aplicada por Kollbrunner (2) en la solución de problemas concretos y recientemente explicada por Gjelsvik a partir de la teoría de cáscaras (12).

Son numerosos los trabajos de aplicación de la teoría de Vlasov (1), sobre todo al análisis del comportamiento de núcleos de edificios en altura bajo cargas torsionales. Las soluciones son de tipo analítico (13) a (15), mediante matrices de rigidez (16) y (17), diferencias finitas (18) y (19), elementos finitos (20) al (24) o matrices de transferencia (25).

Se desarrollaron también numerosos programas computacionales para el cálculo de las propiedades sectoriales de secciones arbitrarias (26) y (27).

1.2.1.2. TORSION PLASTICA

En 1923 Nadai (28) extendió la analogía de la membrana de Prandtl al caso de materiales plásticos. La analogía se establece,

en este caso, entre la función de tensiones y la altura de un montículo de arena.

Gjelsvik (12) y recientemente Yang y Fan (29) estudiaron el problema de torsión en elementos de sección delgada y material elastoplástico, definiendo curvas de interacción para solicitaciones combinadas.

1.2.1.3. TORSION EN HORMIGON ARMADO

1.2.1.3.1. TORSION CIRCULATORIA

Durante los últimos años se desarrollaron una serie de teorías para calcular la resistencia torsional de elementos de hormigón armado. Estas teorías pueden dividirse en dos grandes grupos: el modelo de reticulado espacial y el modelo de flexión oblicua.

1.2.1.3.1.1. MODELO DEL RETICULADO ESPACIAL

Los primeros en simular el comportamiento pos-fisuración de un miembro de hormigón armado sometido a corte fueron Ritter (30) y Mörsch (31). Supusieron que después de fisuración las vigas actuaban como un reticulado plano con un cordón de hormigón comprimido, un cordón traccionado compuesto por la armadura longitudinal, montantes compuestos por la armadura transversal y diagonales comprimidas de hormigón a 45° .

El modelo del reticulado plano fue luego extendido al espacio por Rausch (32) en 1929 para simular el comportamiento pos-fisuración de miembros de hormigón armado sometidos a torsión. El supuso que un elemento de hormigón armado actuaba como un tubo por cuyas paredes circulaba un flujo de corte. Ese tubo resistía el flujo de corte como un reticulado espacial y requería igual volumen de armadura longitudinal y transversal.

En 1950 Cowan (33) introdujo al modelo original un coeficiente de eficiencia obtenido a partir de la distribución de tensiones de Saint Venant mediante un método energético.

Más recientemente, Hsu (34) estudió las condiciones de compatibilidad del modelo de Rausch y obtuvo una expresión para la rigidez torsional pos-fisuración.

El modelo de reticulado a 45° fue generalizado por Lampert y Thurliman (35) en 1969 al caso de torsión combinada con flexión. Admitieron que las diagonales podían tener inclinaciones distintas de 45° y que era válida la teoría de plasticidad. De esta forma pudieron explicar que la armadura transversal y longitudinal entraran en fluencia aún cuando sus volúmenes no fueran iguales.

El modelo de reticulado espacial de ángulo variable fue luego aplicado por Elfgren (36) a elementos sometidos a torsión, flexión y corte. Él observó que en un elemento de hormigón armado, después de fisuración, el alma sólo podía tomar esfuerzos de compresión y usó la teoría de plasticidad para determinar la inclinación de estos esfuerzos que es distinta de la inclinación de las fisuras. Esta teoría se denomina "Teoría del campo de Compresión".

El modelo del reticulado espacial fue desarrollado de una manera distinta por Collins en 1973 (37). En lugar de usar la teoría de plasticidad, centró su atención en las condiciones de compatibilidad de deformación y derivó de esta forma una ecuación para determinar la inclinación del campo de compresión. Collins denominó a su teoría "Teoría del Campo de Compresión Diagonal".

Además de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se debe aceptar una curva tensión-deformación para las bielas de hormigón. Al usar las curvas convencionales obtenidas en el ensayo de compresión de probetas cilíndricas se observó que la resistencia torsional resultaba poco conservativa. Utilizando una curva

tensión-deformación reducida, que ellos denominaron "softened strain-stress curve", Hsu y Mo (38) introdujeron el efecto de la fisuración diagonal en la respuesta a compresión del hormigón. De esta manera pudieron predecir adecuadamente la resistencia torsional así como las deformaciones durante la historia de carga.

El modelo del campo de compresión, basado en la teoría de plasticidad sirvió de base al método de diseño del Código Modelo de 1978 (39).

1.2.1.3.1.2. MODELO DE FLEXION OBLICUA

La característica básica de estas teorías es la definición de una superficie de falla oblicua. Esta superficie se inicia en una fisura helicoidal sobre tres caras de una viga rectangular y sus extremos se unen mediante una zona de compresión en la cuarta cara. La superficie de falla intersecta la armadura longitudinal y transversal. Las fuerzas en las armaduras, que se suponen generalmente en fluencia, proveen las fuerzas y momentos que equilibran las acciones exteriores.

En 1958 Lessig (40, 41) propuso por primera vez esta teoría definiendo dos modos de falla: el modo de falla 1 con la zona de compresión en la cara superior y el modo de falla 2 con la zona de compresión en una de las caras laterales. Para cada modo de falla escribió dos ecuaciones de equilibrio y una para la determinación de la inclinación de la superficie obtenida a partir de la minimización de la resistencia. Estas ecuaciones podían resolverse mediante un proceso iterativo. La teoría de Lessig fue luego simplificada e introducida en el Código Ruso (42) en 1962.

Más tarde, Collins et al (43, 44) combinaron las tres ecuaciones en una sola para cada modo de falla. Esta ecuación podía ser expresada en forma adimensional y dio lugar a la primera

curva de interacción. El modo 1 conducía a una curva de interacción torsión-flexión, el modo 2 a una curva de interacción torsión-corte. Collins et al descubrieron incluso un tercer modo de falla con la zona de compresión en la cara inferior de la viga. Esta teoría sirvió de base al Código Australiano de 1973 (45).

En 1962, poco después de la aparición de la teoría de Lessig, Yudin (46) introdujo una tercera ecuación de equilibrio y pudo, de esta forma, disponer de dos ecuaciones: una para el diseño de la armadura longitudinal y otra para el diseño de la armadura transversal.

En 1968 Hsu (47) señaló que las teorías propuestas no ajustaban los resultados experimentales y propuso una superficie de falla plana similar a la que se usa para hormigón simple. Este modelo, simple y conservativo, estaba sostenido, en parte, por los resultados experimentales obtenidos por el autor (48).

Elfgren et al (49, 50) supusieron que las fisuras podían tener inclinación variable. Ese ángulo podía variar incluso de una cara a otra dando lugar a fuerzas verticales que equilibraban el esfuerzo de corte. De esta forma introdujeron una cuarta ecuación de equilibrio de fuerzas verticales. Esta ecuación condujo a la curva de interacción flexión-corte y se obtuvo así la superficie de interacción torsión-flexión-corte completa.

Muller (51) señaló, más tarde, que todas las teorías que asumen una superficie de falla continua violan las condiciones cinemáticas y la ley del flujo plástico. Para satisfacer esas condiciones propuso un mecanismo de colapso discontinuo.

1.2.1.3.2. TORSION MIXTA

Los únicos antecedentes que se conocen sobre estudios teóricos de la torsión mixta en hormigón armado son los trabajos de

Krpan y Collins (3, 4, 5) que desarrollaron un modelo no lineal en el que se actualiza las propiedades geométricas de la sección mediante el concepto de módulo elástico secante. Dicho modelo desprecia la componente ciculatoria de la torsión.

Recientemente Diaz Molina y Bartó (52), desarrollaron un programa similar para el diseño de elementos de hormigón armado sometidos a torsión, flexión y corte.

1.2.1.3. TORSION EN HORMIGON PRETENSADO

En el estudio de la influencia del esfuerzo de pretensado en el comportamiento del hormigón se hicieron una serie de intentos para tratar de describir la envolvente de Mohr para la falla del hormigón. Los más simples fueron los criterios de Cowan (53) que permitieron expresar la tensión cortante en el momento de la falla en función del esfuerzo de pretensado. Estos criterios fueron usados por Zia y Hsu (54, 55) para la determinación de la resistencia torsional de miembros de hormigón pretensado, dando lugar al método de cálculo del PCI (56).

La teoría del campo de compresión diagonal (37, 88) es también aplicable a elementos de hormigón pretensado. Por otro lado, Ewida y Mc Mullen (57, 58) extendieron el modelo de flexión oblicua y propusieron modelos matemáticos para predecir el comportamiento de vigas de hormigón armado y pretensado bajo solicitaciones combinadas.

Todas estas teorías desarrolladas para hormigón pretensado se refieren únicamente a torsión circulatoria.

1.2.2. ESTUDIOS EXPERIMENTALES

Son numerosos los estudios experimentales realizados en vigas de hormigón armado y pretensado sometidas a torsión o tor-

sión combinada con flexión y corte. Entre ellos se pueden mencionar los realizados por Zia (59) en vigas de sección rectangular, T y doble T, los ensayos de Gersch et al (60) en vigas doble T, los de Bishara (61) y otros que pueden hallarse en refs. (62) a (68). Todos estos ensayos se refieren a torsión circulatoria.

El único ensayo experimental que se conoce sobre vigas de hormigón armado sometidas a torsión mixta es el realizado por Krpan (5) sobre una viga de sección U.

1.2.3. CONCLUSIONES

Aún cuando los elementos estructurales de pared delgada son de uso frecuente en vigas de puentes y núcleos de edificios, el comportamiento completo de los mismos ha sido poco estudiado. Es recomendable entonces realizar, no sólo estudios teóricos sino también ensayos experimentales que permitan verificar la validez de los modelos desarrollados.

Los puntos de mayor interés son el comportamiento pos-fisuración y los mecanismos de colapso.

1.3. OBJETIVOS DE LA TESIS

El objetivo fundamental de esta tesis es estudiar el comportamiento torsional de vigas de hormigón pretensado de sección doble T, que es un tipo de sección que se emplea con frecuencia en puentes pretensados. Dentro del comportamiento interesan fundamentalmente los siguientes puntos:

- Obtención de la respuesta carga-giro durante la historia de carga.
- Cuantificación de la caída de rigidez torsional después de fisuración.

- Estudio de los modelos de falla bajo torsión combinada con otras sollicitaciones.

Todos estos puntos permitirán establecer recomendaciones tendientes a un mejor diseño y cálculo de este tipo de vigas.

Con este fin se realizan dos ensayos a torsión de vigas de hormigón pretensado de sección doble T, que completan una serie mayor de 8 ensayos a torsión combinada con flexión y corte, y, a la luz de los mismos, se encara el estudio del comportamiento.

ALABEO DE LA SECCION TRANSVERSAL

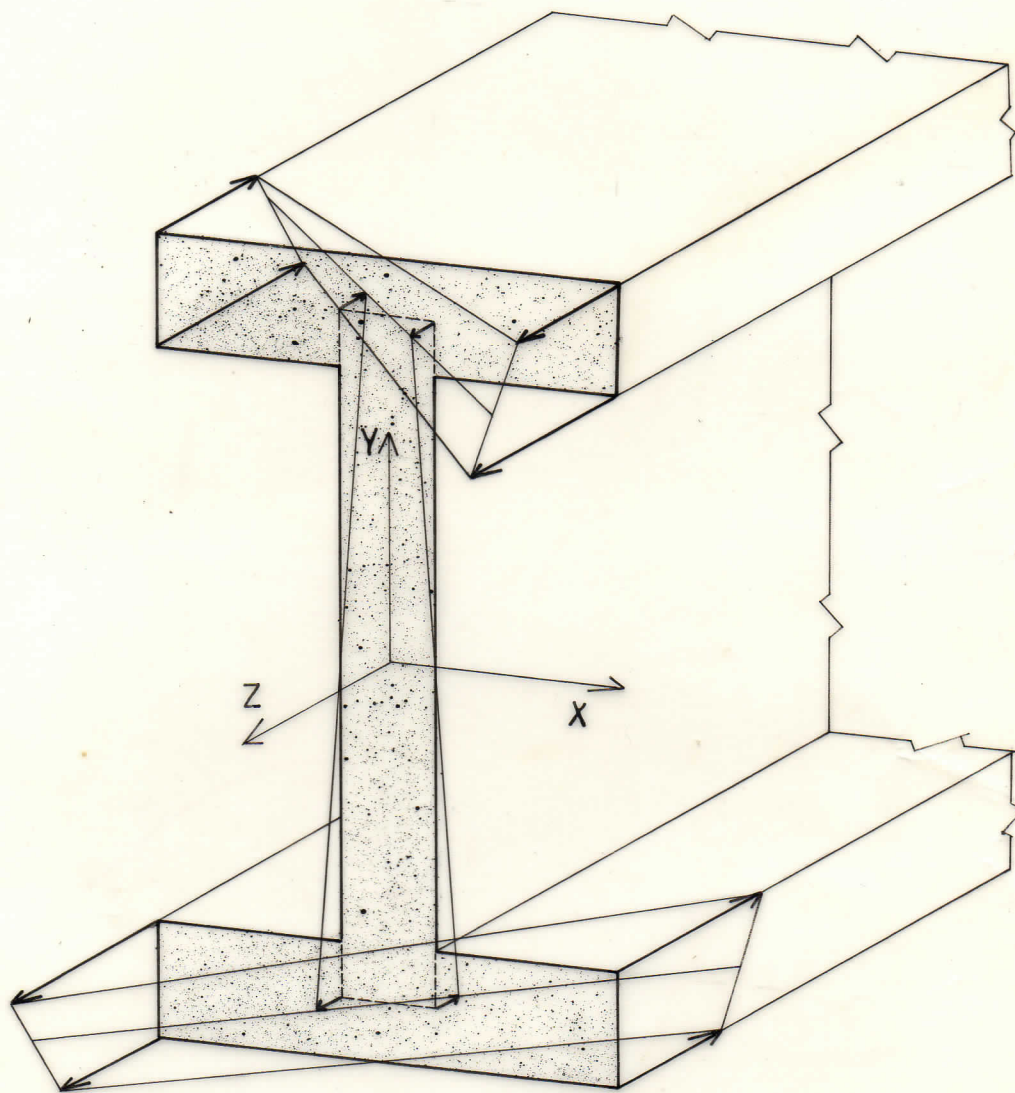
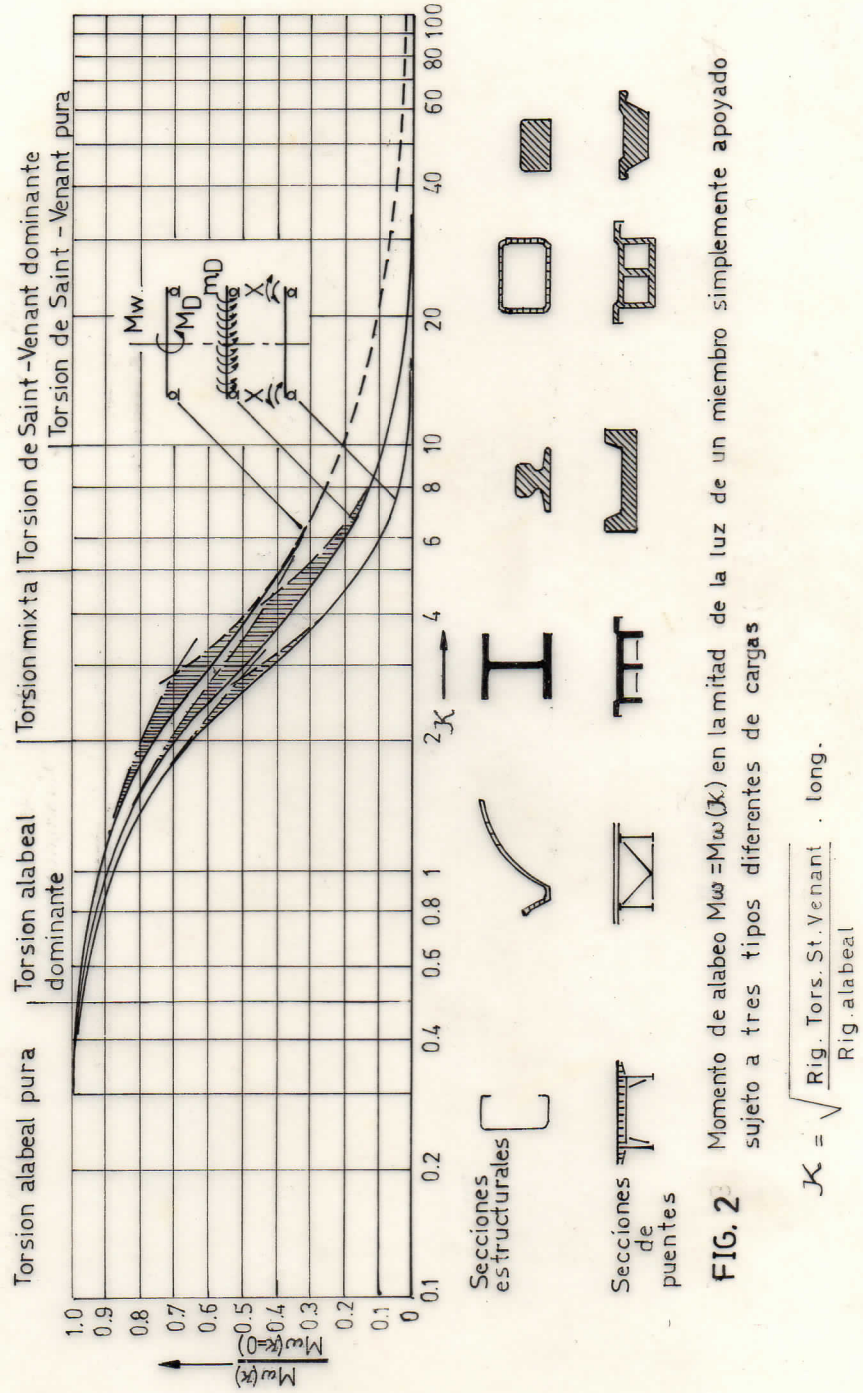


FIG. 1



2. TEORIAS DE TORSION

2.1. INTRODUCCION

En este capítulo se resumirán sólo aquellas teorías que se aplican luego al estudio del comportamiento de las vigas ensayadas.

Respecto a las teorías de torsión en hormigón armado y pretensado sólo se darán los principios de cada modelo, sin incluir todas las modificaciones de que fueron objeto.

2.2. TEORIA ELASTICA

2.2.1. TORSION CIRCULATORIA

2.2.1.1. BARRAS DE SECCION CIRCULAR (8)

Se supone la barra de fig.3 fija en una punta y libre en la otra, sometida a un momento torsor T. Se hacen las siguientes hipótesis cinemáticas:

1. La sección no se deforma en su plano.
2. La sección transversal se mantiene plana.

Segun la fig.3 la deformación angular γ resulta:

$$\gamma = r \cdot d\phi/dz = r \cdot \phi' \quad (2.1)$$

Donde:

ϕ : Angulo de giro

r : radio

Aplicando las relaciones constitutivas, resulta:

$$\zeta = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \phi' \quad (2.2)$$

Donde:

ζ : Tensión tangencial

G : Módulo elástico transversal

La ecuación de equilibrio de momentos torsores internos y externos puede escribirse como:

$$T = \int_A \tau \cdot r \cdot dA = G \cdot J_p \cdot \phi' \quad (2.3)$$

Donde:

J_p : Momento de inercia polar

$$J_p = \int_A r^2 \cdot dA \quad (2.4)$$

2.2.1.2. BARRAS DE SECCION NO CIRCULAR

Para resolver el problema de torsión en secciones no circulares, Saint Venant (9) utilizó un método semi-inverso. Hizo las siguientes hipótesis cinemáticas:

1. La sección no se deforma en su plano
2. El alabeo de la sección transversal es constante en toda la longitud de la pieza torsionada.

Los desplazamientos resultan entonces:

$$u = -\phi' \cdot z \cdot y \quad (2.5)$$

$$v = \phi' \cdot z \cdot x \quad (2.6)$$

$$w = \phi' \cdot \psi(x,y) \quad (2.7)$$

Donde:

u, v y w son los desplazamientos según los ejes x, y y z respectivamente.

$\psi(x,y)$: Función de alabeo independiente de z .

Ver fig.4

Las ecuaciones de equilibrio de tensiones se reducen a una sola:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Esta ecuación se satisface si se define una función de tensiones θ tal que:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.9)$$

Utilizando las relaciones cinemáticas se puede llegar a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = - 2.G.\phi' \quad , \quad (2.10)$$

que es la ecuación diferencial del problema.

La ecuación de equilibrio de momentos torsores se puede escribir:

$$T = 2. \iint \theta . dx . dy \quad (2.11)$$

En general se llega a una ecuación del tipo:

$$T = G.J.\phi' \quad (2.12)$$

Donde:

J : Constante de torsión. Depende de la geometría. Para obtenerla es necesario, en general, resolver la ecuación diferencial (2.10).

Para un rectángulo muy delgado resulta:

$$J \approx (1/3) . b . t^3 \quad (2.13)$$

Donde:

b: Largo del rectángulo

t: Espesor del rectángulo

Para una sección compuesta por rectángulos se tiene aproximadamente:

$$J \cong \sum_{i=1}^n (1/3) \cdot b_i \cdot t_i^3 \quad (2.14)$$

Donde la suma se extiende a todos los rectángulos componentes de la sección.

Para tubos de paredes delgadas se puede demostrar que el flujo de corte q_t debe ser constante.

$$q_t = \zeta \cdot t \quad (2.15)$$

Ver fig.5

$$T = q_t \cdot \oint r \cdot ds \quad (2.16)$$

$$\zeta = T / (2 \cdot A_o \cdot t) \quad (2.17)$$

Donde A_o es el área encerrada por la línea media de la pared del tubo.

2.1.2. TORSION MIXTA (1)

Se analiza una viga prismática de sección abierta y paredes delgadas, ver fig.6. Se denomina contorno a la intersección de la superficie media con el plano x,y y se define una coordenada curvilínea s, con origen en M1, que tiene la dirección del contorno.

2.1.2.1. HIPOTESIS CINEMATICAS

- 1.- El contorno no se deforma en su plano
- 2.- La deformación tangencial de la superficie media γ_{sz} es nula.

2.1.2.2. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Las hipótesis enunciadas junto con las relaciones cinemáticas permiten obtener los siguientes desplazamientos que se han representado en fig 6.

$$u(s,z) = U(z) \cdot \sin \alpha(s) - V(z) \cdot \cos \alpha(s) - \phi(z) \cdot q(s) \quad (2.18)$$

$$v(s,z) = U(z) \cdot \cos \alpha(s) + V(z) \cdot \sin \alpha(s) + \phi(z) \cdot r(s) \quad (2.19)$$

$$w(s,z) = W(z) - U'(z) \cdot x(s) - V'(z) \cdot y(s) - \phi'(z) \cdot \omega(s) \quad (2.20)$$

donde ω es el área sectorial

$$\omega = \int_{M1}^M r(s) \cdot ds \quad (2.21)$$

ver fig.7, y las primas indican derivadas con respecto a z .

$$W(z) = w_{M1} + x_{M1} \cdot U' + y_{M1} \cdot V' \quad (2.22)$$

A partir del desplazamiento axial se puede obtener también la deformación axial:

$$\xi_z(s) = W'(z) - U''(z) \cdot x(s) - V''(z) \cdot y(s) - \phi''(z) \cdot \omega(s) \quad (2.23)$$

Mediante las relaciones constitutivas y las ecuaciones de equilibrio se pueden obtener las ecuaciones diferenciales del problema que, en coordenadas principales, resultan:

$$E.A.W'' = 0 \quad (2.24)$$

$$E.J_Y.U'''' = q_X \quad (2.25)$$

$$E.J_X.V'''' = q_Y \quad (2.26)$$

$$E.J_\Omega.\phi'''' - G.J.\phi'' = m(z) \quad (2.27)$$

Donde:

- A : Area de la sección transversal
- J_X : Momento de inercia respecto al eje principal x
- J_Y : Momento de inercia respecto al eje principal y
- J : Momento de inercia sectorial principal

$$J_\Omega = \int_A \Omega^2 . dA \quad (2.28)$$

- Ω : Coordenada sectorial normalizada
- J : Constante de torsión
- E : Módulo de elasticidad longitudinal
- q_X : Carga transversal distribuida en la dirección x
- q_Y : Carga transversal distribuida en la dirección y
- $m(z)$: Carga torsional distribuida

Para la obtención de la coordenada sectorial normalizada, se deben cumplir las siguientes igualdades:

$$\int \Omega \cdot dA = 0$$

$$\int \Omega \cdot x \cdot dA = 0$$

(2.29)

$$\int \Omega \cdot y \cdot dA = 0$$

Estas tres ecuaciones permiten determinar las tres incógnitas que son las coordenadas del polo y la posición del origen.

2.3. TEORIAS DE TORSION EN HORMIGON ARMADO

2.3.1. MODELO DEL RETICULADO ESPACIAL (32)

Se supone que despues de fisuración, el hormigón queda separado por fisuras a 45° en una serie de partes helicoidales. Estas hélices de hormigón interactúan con las barras longitudinales y transversales formando un reticulado espacial, ver fig.8.

Se hacen las siguientes hipótesis:

1. El reticulado espacial está formado por diagonales de hormigón a 45° grados, barras longitudinales y estribos articulados entre sí.
2. Las diagonales de hormigón sólo pueden resistir esfuerzos de compresión.
3. Las barras longitudinales y transversales sólo resisten tracción axial.
4. En el caso de una sección sólida, el núcleo de hormigón no contribuye a la resistencia torsional.

Si se denomina X, Y y D a las fuerzas en la armadura longitudinal, transversal y bielas de hormigón respectivamente, las ecuaciones de equilibrio en los nudos conducen a:

$$X = Y = D / \sqrt{2} = \text{Const}$$

(2.30)

El equilibrio de la sección completa conduce a la siguiente ecuación, para la resistencia última:

$$T_u = 2.A.A_t.f_{sy} / S \quad (2.31)$$

Donde:

T_u : Momento torsor último

A : Area total dentro del reticulado

A_t : Area de armadura transversal

S : Separación entre estribos

f_{sy} : Tensión de fluencia de la armadura transversal

Teniendo en cuenta la ecuación (31), debe existir la siguiente relación entre la armadura longitudinal y la armadura transversal:

$$A_L . f_{ly} / p = A_t . f_{sy} / S \quad (2.32)$$

Donde:

A_L : Area de armadura longitudinal

f_{ly} : Tensión de fluencia de la armadura longitudinal

p : Perímetro del area encerrada por la línea media de los estribos

La ecuación para la resistencia última resulta poco conservativa en muchos casos y, por otro lado, debido a las hipótesis simplificativas, no siempre predice adecuadamente el comportamiento.

2.2.3. MODELO DE FLEXION OBLICUA (40)

La característica básica de estas teorías es la definición de una superficie de falla oblicua. Esta superficie se inicia

en una fisura helicoidal sobre tres caras de una viga rectangular y sus extremos se unen mediante una zona de compresión en la cuarta cara. La superficie de falla intersecta la armadura longitudinal y transversal. Las fuerzas en las armaduras, que se suponen generalmente en fluencia, proveen las fuerzas y momentos que equilibran las acciones exteriores.

Las hipótesis fundamentales de esta teoría son:

1. Tanto la armadura longitudinal como la armadura transversal entran en fluencia antes de la falla.
2. Se desprecia la resistencia a tracción del hormigón.
3. Los estribos están igualmente espaciados en la zona de falla.
4. No hay fuerzas exteriores aplicadas en la zona de falla.
5. Las tensiones tangenciales en la zona de compresión no tienen ningún efecto en la resistencia.
6. Se desprecia el efecto clavija de la armadura.
7. La componente de momento torsor en la dirección de la superficie de falla no tiene efecto en la resistencia última.

En las figs. 9 y 10 se han representado los dos modos de falla. Para cada modo se plantean dos ecuaciones de equilibrio, una de momentos alrededor del eje AB y otra de fuerzas en la dirección normal a la zona de compresión, y una ecuación de minimización de la resistencia. Estas tres ecuaciones se resuelven mediante un proceso iterativo.

FIG.3 TORSION DE UNA BARRA DE SECCION CIRCULAR

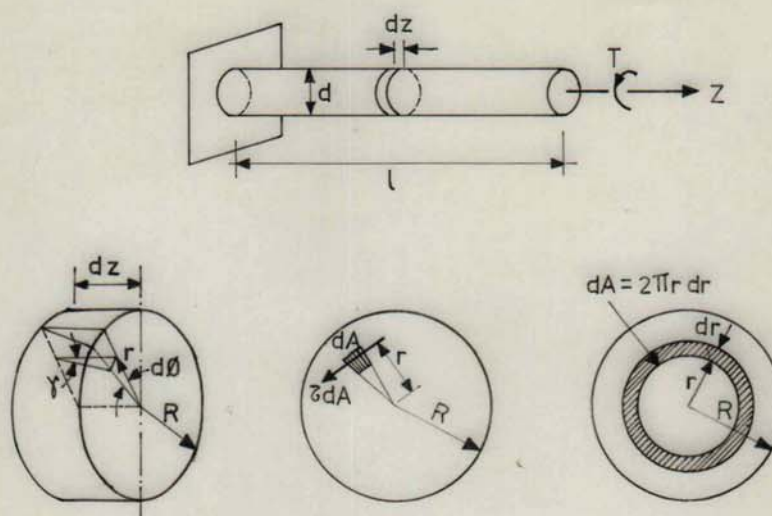


FIG.4 TORSION DE UNA BARRA DE SECCION ARBITRARIA

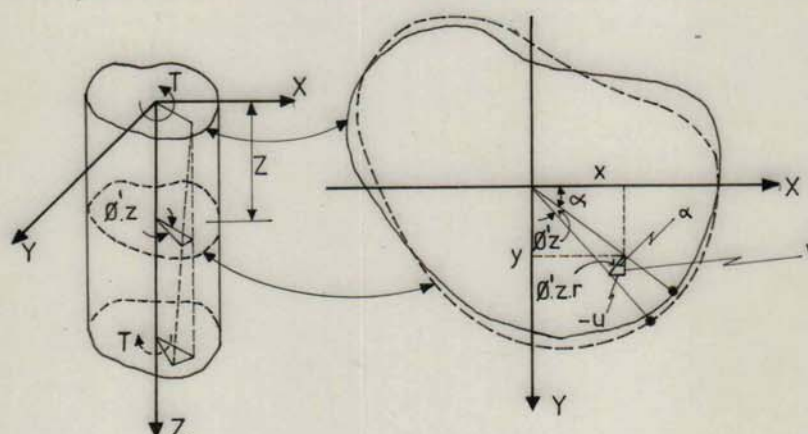
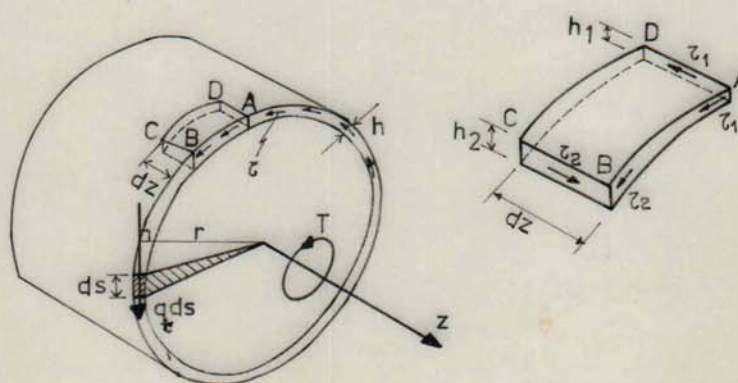


FIG.5 TORSION DE UN TUBO DELGADO



SISTEMAS DE COORDENADAS Y DESPLAZAMIENTOS

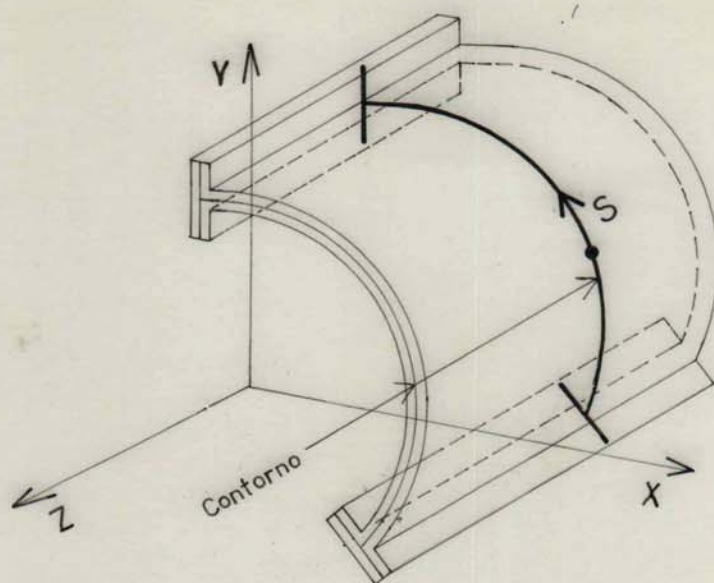


FIG. 6

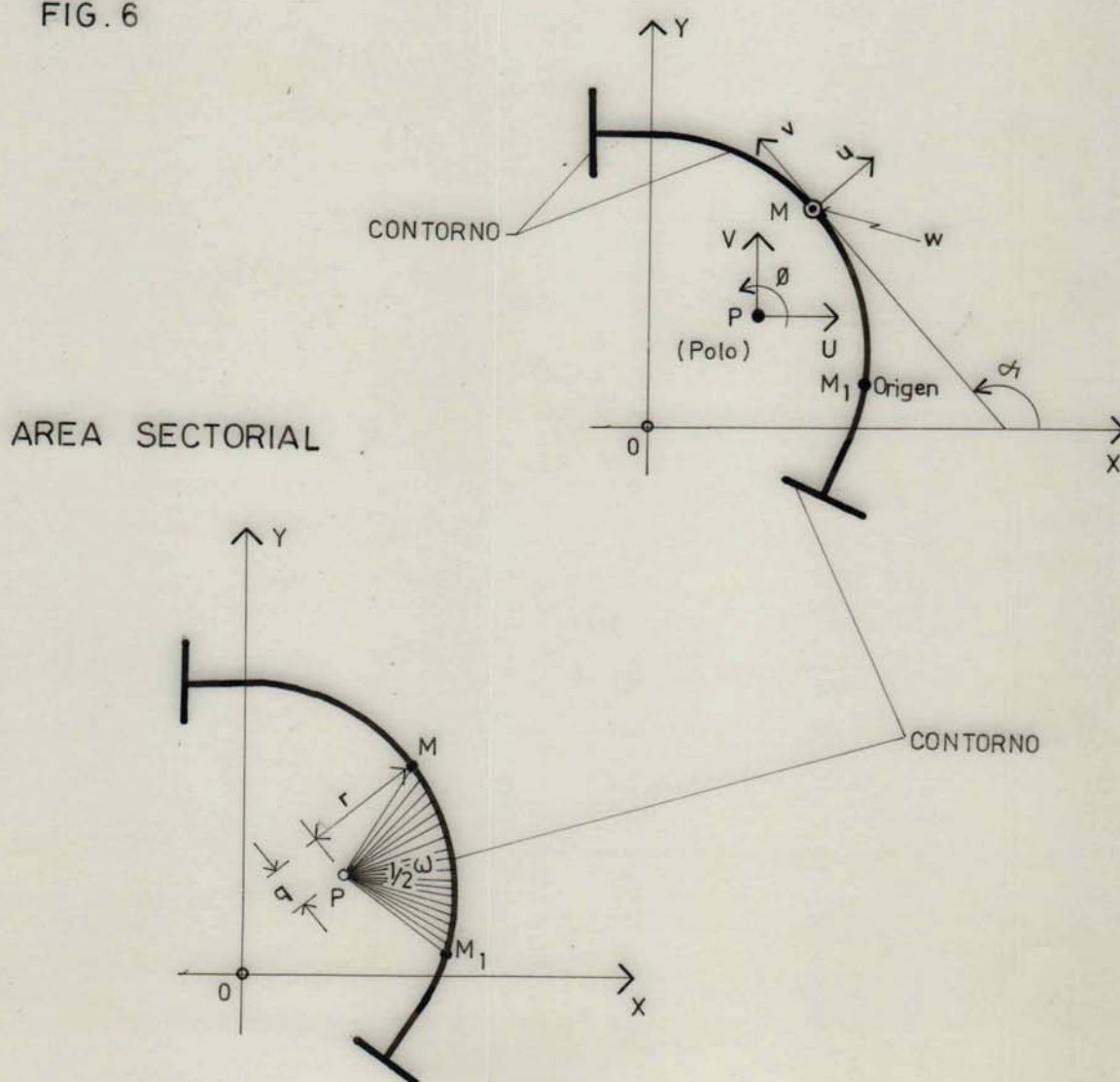
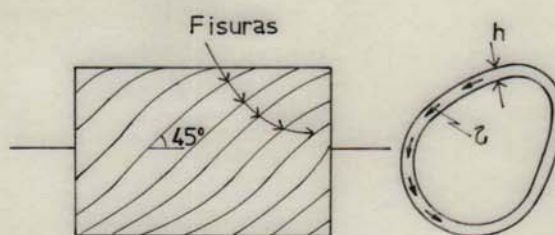
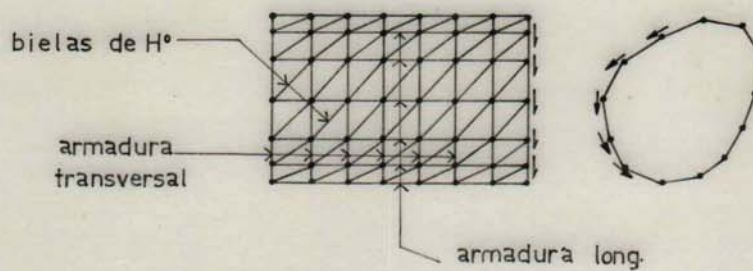


FIG.8 MODELO DE RETICULADO ESPACIAL

a) FISURACION DIAGONAL DE UN ELEMENTO DE $H^\circ A^\circ$ 

b) RETICULADO IDEAL

MODELO DE FLEXION OBLICUA

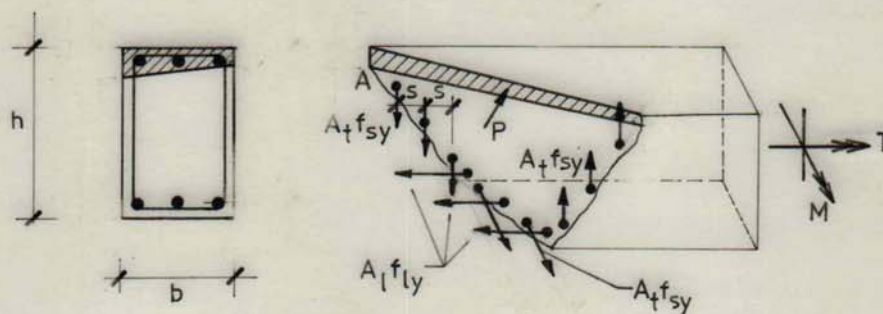


FIG. 9 MODO DE FALLA 1

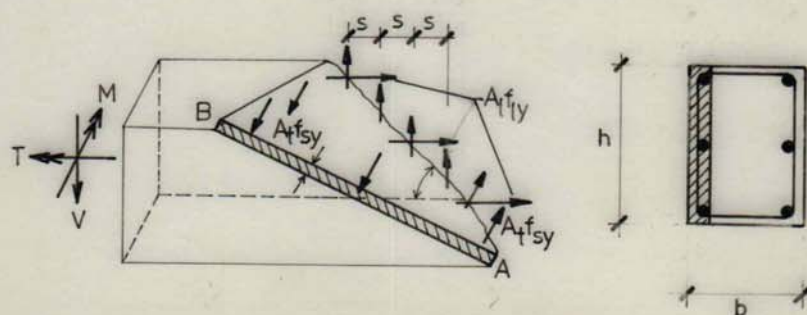


FIG. 10 MODO DE FALLA 2

3. MODELOS Y ENSAYOS REALIZADOS

3.1. INTRODUCCION

Los ensayos experimentales realizados forman parte de una serie mayor de ensayos a torsión combinada con flexión y corte que se desarrolla en el Laboratorio de Estructuras de la UNT.

A continuación se resumen las características y resultados de los ensayos a torsión combinada (70,71), centrandose principalmente la atención en la descripción y análisis de los resultados de los ensayos a torsión.

3.2. ELECCION DE LOS MODELOS

Los ensayos experimentales estuvieron principalmente orientados al estudio de una sección típica de hormigón pretensado y, por este motivo, se optó por una sección doble T.

3.2.2. DIMENSIONES

En la elección de las dimensiones generales de los modelos se contemplaron las siguientes premisas:

- a) Minimizar los efectos de escala detectados en trabajos llevados a cabo en otros centros de investigación, particularmente en Zürich por el profesor Thurliman.
- b) Facilitar, en lo posible, las tareas de ejecución.
- c) Compatibilizar las dimensiones de los elementos a ensayar con las dimensiones del laboratorio y los equipos disponibles.

Como resultado de la imposición de estas condiciones se arribó a las dimensiones generales que se indican en fig.11.

3.2.3. PARAMETROS A INVESTIGAR

Los parámetros a investigar eran fundamentalmente la cuantía de armadura transversal, la relación momento torsor-momento flector y el espesor del alma. Para ello se programó una

serie original de 12 ensayos correspondientes a dos cuantías de armadura transversal, tres relaciones momento torsor-momento flector y dos espesores de alma. Luego los resultados experimentales mostraron que la serie podía reducirse a 8 ensayos cuyas características se resumen en la siguiente tabla:

TABLA I

Viga	Espesor Alma (cm)	Relación T / Mf	Estribos	
			Diám. (mm)	Sep. (cm)
1T	8	0,20	6	20
2T	8	0,10	6	10
3T	8	0,10	6	20
4T	8	0,20	6	10
5T	5	0,20	4,2	16,5
6T	5	0,10	4,2	16,5
7T	5	Torsión	4,2	16,5
8T	5	Torsión	4,2	8

3.2.3. MATERIALES

A continuación se resumen las características de los materiales empleados.

3.2.3.1. HORMIGON

Dosificación para pastón de 100 litros

Cemento	: 46,6 Kg
Agua	: 21,0 Kg
Relación A/C	: 0,50
Arido Grueso (Tamaño máx. 10mm):	86,0 Kg
Arido Fino (Módulo de fineza)	: 86,0 Kg

Propiedades Mecánicas:

Se obtuvo mucha dispersión en las resitencias a compresión de los hormigones de las distintas vigas debido a que en

muchos de ellos la dosificación se hizo midiendo volúmenes y no se tuvo en cuenta la humedad de los áridos. La siguiente tabla resume las resistencias medias a compresión del hormigón a la fecha de los ensayos para las distintas vigas.

TABLA II

! Viga !	f'c	!
!	(MPa)	!
! 1T !	29,4	!
! 2T !	44,2	!
! 3T !	32,3	!
! 4T !	34,1	!
! 5T !	39,0	!
! 6T !	37,8	!
! 7T !	31,6	!
! 8T !	44,8	!

Módulo de elasticidad longitudinal
promedio: 35000 MPa

Módulo de elasticidad transversal
promedio: 15000 MPa

3.2.3.2. ARMADURA TESA

Alambres $\varnothing$ 7mm

Tensión convencional de fluencia : 1671 MPa

Tensión de rotura : 1761 MPa

Alargamiento de rotura : 7,1%

Módulo elástico longitudinal : 205000 MPa

3.2.3.3. ARMADURA NO TESA

Alambres $\varnothing$ 4,2 y $\varnothing$ 6 para estribos

$\varnothing$ 10 y $\varnothing$ 8 para armadura long. constructiva

Tensión convencional de fluencia : 450 MPa

Tensión de rotura : 510 MPa

Alargamiento de rotura : 11%

Módulo elástico longitudinal : 210000 MPa

3.2.4. ARMADURAS

La disposición de la armadura en la sección transversal puede verse en la fig 12. La fotografía 1 ilustra la disposición longitudinal de la armadura.

3.2.4.1. ARMADURA DE PRETENSADO

Para la determinación de las armaduras de pretensado se consideró el estado de transferencia prescindiendo del efecto de peso propio el cual actúa positivamente constituyendo una reserva de seguridad. Se adoptaron las tensiones admisibles del entonces Proyecto Cirsoc 201 (73).

A continuación se resumen los resultados correspondientes a cada tipo de sección:

TABLA III

! Ancho !	Fuerza !	Num. de !	Excent. !
! alma !	Pret. !	barras !	! (cm) !
! (cm) !	! (KN) !	! !	! !
! 8 !	! 460 !	! 10 !	! 10,78 !
! 5 !	! 402 !	! 9 !	! 12,00 !

Vainas:

Se utilizaron vainas de fleje de acero helicoidal galvanizado de diámetro interno 9,5mm, dispuestas rectilíneamente entre placas de anclaje.

Anclajes:

Los anclajes eran de tipo cuñas partidas de acero de alta resistencia cadmiado, alojadas en conos hembra de acero galvanizado. Entre los anclajes y el hormigón se dispuso una placa de acero de 9,5 mm de espesor para lograr una mejor distribución de la

fuerza de pretensado.

Inyección:

Para la inyección se utilizó una pasta cementicia con relación A/C igual a 0,5 más el agregado de un fluidificante.

3.2.4.2. ARMADURA LONGITUDINAL NO TESA

Esta armadura tenía sólo fines constructivos pero resultó importante en área debido a las entrantes que presenta la sección.

3.2.4.3. ARMADURA TRANSVERSAL

Se adoptaron dos cuantías de armadura transversal como ya se indicó. Los estribos eran cerrados y tenían la forma de la sección. Se contruyeron en dos partes con una plantilla de hierro y luego se juntaron superponiéndolos en algunas zonas. Ver fig.12.

3.3. CONSTRUCCION DE LOS MODELOS

Para la construcción de los modelos se utilizó un encofrado de madera de pino Brasil de sección rectangular al cual se adosaron laterales de chapa. De esta forma se pudieron realizar, con un mismo encofrado de base, vigas con distintos espesores de alma. En fotografía 2 se puede ver el encofrado.

El hormigonado se realizó por capas horizontales y se utilizaron vibradores de aguja para facilitar la colocación y compactación del hormigón que ofreció dificultades en el caso de las vigas de menor espesor de alma.

Con cada pastón se moldearon probetas cilíndricas que luego fueron ensayadas a compresión a 7 y 28 días.

Para el curado, las vigas y las probetas se cubrieron con un plástico y se mantuvieron húmedas regándolas periódicamente.

te.

Aproximadamente un mes después del hormigonado se procedió al tesado de las barras. El mismo se realizó en etapas, alternando las barras según un protocolo confeccionado a tal fin. Se utilizó un equipo de tesado unifilar de capacidad máxima 65 KN.

Una vez tesada la armadura, se inyectaron las vainas a través de las mangueras plásticas dejadas para ello.

3.4. DISPOSITIVOS DE CARGA Y APOYO

Para facilitar la aplicación de la carga y la materialización de los apoyos se dispusieron diafragmas en la sección central y en ambos extremos de las vigas. Estos diafragmas permitieron, a su vez, restringir el alabeo, simulando el efecto de las vigas transversales en los puentes.

3.4.1. APLICACION DE LA CARGA

El diafragma central permitió la aplicación de la carga mediante gatos. En el caso de los ensayos a torsión combinada con flexión y corte se dispuso un solo gato actuando hacia abajo con excentricidades de 0,50 o 0,25 m según las relaciones momento torsor momento flector, ver fotografía 3 y fig. 13. Para los ensayos a torsión simple se emplearon dos gatos actuando simultáneamente en sentidos opuestos. Los mismos se ubicaron en los extremos del diafragma central con un brazo de palanca de 1m, ver fotografia 4 y fig.14.

Para la aplicación de la carga se utilizaron gatos hidráulicos Amsler de capacidad 200 KN y sensibilidad 200 N por división conectados a una central de comando con dinámometro de resorte.

El montaje de los gatos que actuaban hacia abajo se rea-

lizó en pórticos de carga de hasta 1000 KN de capacidad en carga estática. La losa de carga, de 0,60 m de espesor, sirvió de elemento reactivo.

La transmisión de la carga se realizó mediante apoyos de rodillo que permitieron, junto con la rótula de los gatos, la deformación de los modelos. Sin embargo, en algunos casos, fue necesario disponer un suplemento en forma de cuña debido a la magnitud de los giros experimentados por las vigas.

3.4.2. APOYOS Y ANCLAJES

Las vigas reaccionaban sobre cuatro apoyos, dos por cada extremo. A tal fin, las mismas se colocaron sobre cuatro prismas de hormigón interponiendo almohadillas de neopreno de 10 cm x 15 cm, que permitieran un giro de flexión en los extremos.

En el caso de los ensayos a torsión combinada con flexión y corte todas las reacciones eran hacia abajo pero en el caso de torsión simple, uno de los lados del diafragma extremo reaccionaba hacia abajo sobre la pila y el otro hacia arriba, por lo que debió ser anclado a la losa reactiva (72, 74).

El anclaje se materializó mediante una pieza transversal al diafragma que sujetaba dos cables de pretensado anclados en la losa. La pieza transversal, diseñada para resistir la flexión correspondiente a la tensión inicial, estaba compuesta por dos perfiles IPN 10 unidos entre sí por planchuelas soldadas. El anclaje de las barras a la pieza superior se realizó mediante cuñas y portacuñas similares a los usados en las vigas. Por la parte inferior de la losa se intercaló una arandela de hormigón para permitir el destesado del dispositivo de anclaje, una plancha de cartón y una chapa de acero para asegurar una buena repartición de la carga.

Sobre estas últimas se dispuso el anclaje. Ver fig. 14 y 15 y fotografías 4 y 5.

El tesado de los cables se hizo por la parte superior, en varias etapas, de uno y otro lado, para evitar el movimiento de la pieza transversal. La tensión inicial se eligió de tal manera que para la carga de rotura estimada el diafragma no se levantara del apoyo.

Para el destesado del dispositivo de anclaje se procedió al picado de la arandela de hormigón dispuesta a tal fin.

3.5. INSTRUMENTACION

3.5.1. DISPOSICION

Del análisis teórico del comportamiento tanto elástico como pos-fisuración surgió la distribución de instrumental que se indica en figs. 13 y 14 y fotografía 3.

La instrumentación general consistió en flexímetros dispuestos a lo largo de las vigas de a pares, para medir deflexiones y giros, y clinómetros en el centro y en los cuartos de la luz.

Para la distribución de las tensiones en el alma y en las alas se usaron extensómetros mecánicos desmontables (DEMEC), formando rosetas en el caso del alma.

En la primera etapa se cargó el espécimen hasta obtener un cuadro de fisuración bien definido, que permitiera disponer, en una segunda etapa hasta rotura, extensómetros adicionales entre fisuras (control de deformación en bielas de compresión) y sobre las mismas (control de ancho de fisuras).

Además se dispusieron flexímetros para controlar los desplazamientos de los diafragmas extremos con el propósito de evaluar el tipo de restricción impuesta por los mismos al comportamiento general de las vigas.

En el último ensayo se introdujeron modificaciones en la

instrumentación con el objeto de allanar el camino del análisis teórico que se encontraba con serias dificultades, sobre todo en la etapa pos-fisuración. Con este fin se intensificó el seguimiento de la viga en dicha etapa, mediante clinómetros intermedios, cada 0,50 m, que permitieron conocer la distribución de los giros a lo largo del eje longitudinal.

Para la medición de las deformaciones específicas en las alas se consideraron las mismas secciones intermedias. Dicha instrumentación permitió obtener la variación de la rigidez alabeal a lo largo de la viga.

Se controló además el ascenso del eje de la viga y el desplazamiento lateral del ala superior en el centro de la luz. Ambas determinaciones permitieron obtener la posición aproximada del centro de torsión para cada estado de carga y la posible presencia de deflexiones verticales en el ensayo a torsión.

3.5.2. INSTRUMENTAL UTILIZADO

- a) Flexímetros de 0,01 mm de sensibilidad y 25 mm de carrera para la medición de los desplazamientos de los diafragmas extremos.
- b) Flexímetros AMES de 0,001" de sensibilidad y 2" y 4" de carrera para la medición de los descensos de apoyos y desplazamientos verticales de la viga respectivamente.
- c) Clinómetros Hugenberger de 1 seg. de sensibilidad para la medición de los giros de torsión en el centro de la luz.
- d) Clinómetros Galileo de 1 seg. de sensibilidad para la determinación de los giros de torsión en los cuartos de la luz.
- e) Extensómetros mecánicos DEMEC de 4" de longitud de base para la medición de:
 - Deformaciones en el alma (rosetas).
 - Deformaciones normales en las alas.

- Apertura de fisuras.
 - Deformaciones de bielas comprimidas.
- f) En el último ensayo se construyeron, especialmente para el mismo, clinómetros para las secciones intermedias. Estaban constituidos por un nivel de burbuja adosado a un soporte que pivotaba en uno de los extremos, alrededor de un eje fijo en una plataforma y, en el otro extremo, llevaban un flexímetro que permitía leer el desplazamiento vertical necesario para nivelar el soporte.

Estos clinómetros resultaron poco precisos debido a la poca sensibilidad de los niveles de burbuja. Sin embargo, permitieron medir giros importantes y fueron, por tanto, aptos para el seguimiento de los giros en la etapa pos-fisuración, que era justamente la etapa de mayor interés.

3.6. DESARROLLO DE LOS ENSAYOS

Antes y después de realizar el tesado de los dispositivos de anclaje se procedió a la lectura de todo el instrumental dispuesto sobre la viga a los fines de evaluar su efecto sobre la misma.

Las solicitaciones se aplicaron mediante gatos hidráulicos. Se tomó una carga de fijación de 2 KN, aplicándose escalones sucesivos de 5 KN al comienzo y 2,5 KN luego, al acercarse a la carga de fisuración estimada.

Después de cada escalón de carga se volvió a la carga de fijación. En cada escalón de carga y su respectiva carga de fijación se tomaron las lecturas de todo el instrumental. Esto permitió conocer las deformaciones instantáneas y permanentes respectivamente para cada estado de carga.

De esta forma se realizaron las primeras etapas de los ensayos hasta la carga de fisuración. A partir de allí se siguió cargando hasta obtener una fisuración definida que hiciera posible la instrumentación descripta y se descargó. Ver fotografía 6.

Se procedió luego a la segunda etapa en la cual se aplicaron primero incrementos de carga hasta completar la carga alcanzada en la primera etapa y luego incrementos de deformación hasta la rotura.

En las cuatro primeras vigas los registros de deformaciones específicas del hormigón anunciaron la rotura por aplastamiento del mismo en uno de los lados del ala superior, acompañadas de un agrietamiento importante. En las cuatro últimas, en cambio, la rotura quedó definida por la pérdida total de rigidez con la aparición de grandes grietas acompañadas de desprendimientos del recubrimiento en ciertas zonas de las vigas. Estas dos formas de rotura pueden verse en fotografías 7 y 8. Debe destacarse la magnitud del giro de torsión experimentado por la sección central en la viga 7T de fotografía 9. La siguiente tabla resume las cargas de fisuración y rotura para las 8 vigas.

TABLA IV

! Viga !	! Carga de Fisuración (KN) !	! Carga de Rotura (KN) !
! 1T !	! 45,4 !	! 77,8 !
! 2T !	! 70,0 !	! 171,0 !
! 3T !	! 50,0 !	! 138,0 !
! 4T !	! 50,0 !	! 106,0 !
! 5T !	! 48,0 !	! 68,0 !
! 6T !	! 64,0 !	! 94,5 !
! 7T !	! 22,5 !	! 35,0 !
! 8T !	! 24,0 !	! 48,0 !

3.7. RESULTADOS EXPERIMENTALES

3.7.1. DETERMINACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS VERTICALES

La disposición de dos líneas de flexímetros permitió conocer, mediante el promedio de las mismas, la deformación por flexión de la línea media del modelo, ver figs. 16, 17 y 18. Estas curvas muestran un comportamiento prácticamente lineal hasta la carga de fisuración. A partir de allí se produce una disminución de la rigidez a flexión como consecuencia de la fisuración.

De estas curvas, usando la teoría de flexión de vigas, se puede obtener un módulo de elasticidad promedio de las vigas para la etapa elástica. El mismo resulta $E = 35000 \text{ MPa}$.

De la observación de los diagramas carga-flecha de las 6 vigas ensayadas a flexo-torsión se puede concluir que tanto la rigidez flexional como las cargas de fisuración y de rotura disminuyen al aumentar la relación momento torsor/momento flector. Es muy pequeña la disminución de la rigidez flexional al disminuir el ancho del alma. Las vigas con mayor cuantía de armadura transversal presentan un comportamiento mas dúctil.

En el caso de las dos vigas ensayadas a torsión simple los registros de los flexímetros mostraron la presencia de una deflexión vertical hacia arriba del eje de la viga, la cual era perceptible a simple vista. Dicho fenómeno que, podría atribuirse al pretensado excéntrico, se menciona también en Ref. (75).

Los flexímetros, dispuestos de a pares, permitieron además verificar las lecturas de los clinómetros. En la primeras etapas de los ensayos dicho objetivo se cumplió satisfactoriamente. En cambio, a partir de la fisuración, cuando los giros comenzaron a ser más importantes, los flexímetros no registraron bien los giros debido a la excesiva deformación de las vigas.

3.7.2. GIROS DE TORSION

Los giros de torsión constituyen la principal manifestación de los modelos al tipo de sollicitación impuesta a los mismos.

En figs. 19, 20 y 21 se han representado los giros de torsión de las 6 vigas ensayadas a torsión combinada con flexión y corte y en las figs. 22 a 24 los correspondientes a las dos vigas ensayadas a torsión en la primera y segunda etapa de los ensayos respectivamente.

Es claro el comportamiento lineal en la primera etapa y la caída notable de rigidez para cargas, por lo general, un poco superiores a las de fisuración. Debe notarse en los dos últimos ensayos la caída brusca de rigidez para una carga, cercana a la de rotura, que podría corresponder a la entrada en fluencia de la armadura transversal en ciertas zonas de las vigas. Es clara también la influencia de la armadura transversal en la rigidez torsional pos-fisuración. La viga 8T que tiene mayor cuantía de armadura transversal presenta una rigidez final bastante mayor que la de la viga 7T.

En general, se observa que la caída de rigidez torsional global es menor en el caso en que la flexión es pequeña, lográndose, incluso, rigideces mayores que para torsión pura. Es marcado también el aumento de la rigidez, la resistencia y los giros últimos al aumentar la armadura transversal, mucho más que en la respuesta flexional. La rigidez global a torsión decae bastante al reducir el ancho del alma.

En la mayoría de las vigas, se observa que la caída de rigidez torsional global es ligeramente mayor que la caída de rigidez flexional, siendo más marcada la diferencia en las vigas de alma delgada.

La fig.25 muestra la variación de los giros de torsión a lo largo de la viga 8T para distintos estados de carga. Debe te-

nerse en cuenta que las curvas correspondientes a cargas bajas no son muy confiables debido a la poca sensibilidad de los clinómetros usados para la determinación de los giros. Sin embargo, las curvas correspondientes a cargas más altas sí son confiables y muestran claramente la distribución de los giros a lo largo del eje de la viga. Se observa una tendencia a la reducción de las zonas de curvatura (ϕ'') importante al aumentar la carga. Para cargas elevadas el diagrama es prácticamente lineal desde A hasta E.

3.7.3. DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES EN DIAFRAGMAS EXTREMOS

El control de los desplazamientos en diafragmas extremos tuvo como principal objetivo la determinación de la mayor o menor restricción al alabeo impuesta por los mismos.

Esta determinación mostró la tendencia de los diafragmas extremos a tomar posiciones que evidenciaban una cierta posibilidad de movimiento permitiendo, de alguna forma, el alabeo de las secciones extremas. Los desplazamientos fueron mayores en el caso de las dos últimas vigas ensayadas a torsión simple.

En figs. 26 a 29 se han representado los registros correspondientes a la viga 7T.

3.7.4. DESCENSOS Y LEVANTAMIENTOS DE APOYOS

Esta determinación sirvió para la corrección de las flechas determinadas con los flexímetros y como control de la correcta marcha de los ensayos y de los dispositivos de anclaje.

En general, las deformaciones de los apoyos de neopreno fueron pequeñas y se originaron en los primeros ciclos de carga para estabilizarse luego como es normal en este tipo de apoyos.

Los levantamientos de los extremos anclados, en el caso de las vigas ensayadas a torsión simple, fueron siempre menores

que los descensos y prácticamente nulos hasta fisuración. Luego tomaron valores más importantes, mayores que los previstos. De todas formas, dicha deformación no constituyó ningún riesgo desde el punto de vista del incremento tensional de los tensores porque los mismos habían sido tesados a cargas muy inferiores a la de rotura.

Ambos movimientos, descensos de apoyos de neopreno y levantamientos de anclajes, dieron lugar a giros de las secciones extremas, que junto con el alabeo detectado deben ser tenidos en cuenta en el análisis teórico. Ver punto 4.1.2.1.

3.7.5. DEFORMACIONES NORMALES EN LA SECCION CENTRAL

Los resultados obtenidos muestran un comportamiento de las tensiones debidas al momento flector y al bimomento alabeal, similar al supuesto.

En figs. 30 a 34 se han representado las deformaciones registradas. Puede observarse un comportamiento casi lineal de las deformaciones al comienzo, con un marcado aumento de la deformación correspondiente a la zona donde se inician las primeras fisuras, a partir de la carga de fisuración. Este aumento no es tan marcado en el resto de los puntos.

En la segunda etapa de los ensayos las deformaciones fueron aún mayores, sobre todo en la zona traccionada. En las dos últimas vigas se observó un aumento brusco de deformación para la carga que, se estima, corresponde a la entrada en fluencia de la armadura transversal.

Comparando las figuras 33 y 34, se observa que en la viga 8T las deformaciones en el ala superior, después de fisuración, son mucho menores que en la viga 7T. Esta diferencia puede atribuirse a la mayor cuantía de armadura transversal.

3.7.6. MEDICION DE DEFORMACIONES EN EL ALMA MEDIANTE ROSETAS DE EXTENSOMETROS MECANICOS DEMEC

Los estados tensionales del hormigón en el alma quedaron perfectamente ilustrados por estas determinaciones experimentales, ver figs. 35 a 38 correspondientes a la viga 7T. Sobre el eje de las vigas las deformaciones en la dirección vertical y horizontal fueron prácticamente nulas, predominando las deformaciones en las direcciones inclinadas a 45° , lo cual puede asimilarse a un estado de corte puro.

Se diferenciaron dos etapas, primero un comportamiento elástico hasta cargas levemente superiores a la de fisuración, en algunos casos, y luego la pérdida de linealidad, denotando el ingreso en estado plástico del hormigón.

Nuevamente se observó un aumento importante de las deformaciones en algunos puntos en correspondencia con la supuesta carga de fluencia de la armadura transversal.

3.7.7. DEFORMACIONES EN BIELAS COMPRIMIDAS

La formación de un cuadro de fisuración bien definido permitió instrumentar los modelos a fin de conocer las manifestaciones propias del estado fisurado mismo. Una de ellas es la deformación de las bielas comprimidas.

Al igual que en las rosetas, las deformaciones medidas en las bielas evidenciaron dos situaciones: elástica y plástica. Ver fig. 39 correspondiente a la viga 7T. Es claro que las deformaciones fueron prácticamente las mismas en todas las bielas coincidiendo con una de las hipótesis básicas del modelo del reticulado espacial (32). El mismo resultado se obtuvo en todos los ensayos, incluso en los de torsión combinada con flexión y corte.

En todos los casos las deformaciones registradas alcan-

zaron valores aceptables para el tipo de hormigón empleado.

3.7.8. ANCHO DE FISURAS

La medición del ancho de las fisuras permitió investigar principalmente las deformaciones experimentadas por los estribos. Si bien resulta imposible estimar, en base a dichas mediciones, las tensiones en los estribos, la mismas tienen valor cualitativo. En las fig. 40 se han representado las deformaciones de dos fisuras típicas de la viga 7T, una en el alma y otra en la cara superior. Se observa claramente la entrada en fluencia de los estribos para una carga de aproximadamente 30 KN. En fig. 41 se han representado los resultados obtenidos para la viga 8T. Se detecta, otra vez, la entrada en fluencia de los estribos en la cara superior de la viga para una carga de aproximadamente 32,5 KN.

3.7.9. DETERMINACION DEL CUADRO DE FISURACION

Como complemento de todas las mediciones experimentales antes citadas, se determinaron en forma precisa todas las fisuras que se produjeron y, en forma especial, el camino seguido, por cada una de ellas, a lo largo de la historia de carga.

Los cuadros de fisuración, que pueden apreciarse en figs. 42 a 49, concuerdan ampliamente con el estado tensional de las vigas antes de fisuración.

Para torsión simple las fisuras tienden a inclinarse mas hacia la parte inferior en donde se localiza la armadura pretensada y menos en la parte superior, en donde se hacen verticales debido al alabeo. Las primeras fisuras son verticales, en el ala superior. Luego aparecen las fisuras diagonales en los cuartos de luz y se van extendiendo hacia los extremos y hacia el centro a medida que se incrementa la carga.

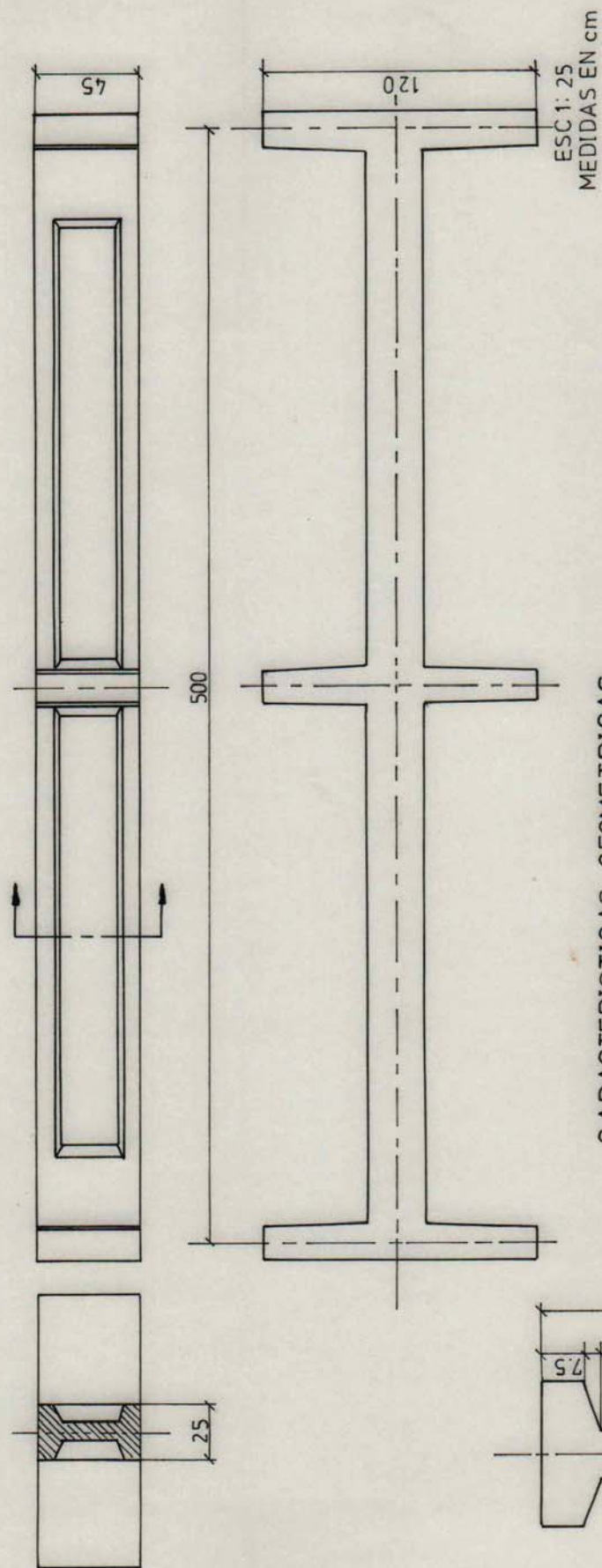
Al aumentar el momento flector las fisuras tienden a inclinarse más hacia la cara superior y menos hacia la cara inferior en donde llegan a ser verticales debido a la flexión. La fisuración diagonal es mayor en la cara en que se suman las tensiones tangenciales de torsión y corte.

3.7.10 OTRAS OBSERVACIONES

En las dos últimas vigas sometidas a torsión simple el comportamiento respondió ampliamente a lo previsto. Las primeras fisuras se originaron en la parte superior de las vigas donde las tensiones de tracción debidas al momento torsor alabeal no estaban compensadas por el esfuerzo de pretensado. Luego aparecieron las fisuras diagonales dirigidas hacia las cargas y definiendo bielas de compresión entre ellas. El esfuerzo de compresión en las bielas pudo visualizarse claramente por la rotura de la pintura sobre las mismas que funcionó como laca fragil. Fisuradas de esta forma, las vigas experimentaron deformaciones cada vez mayores. Al descargar y volver a cargar en la segunda etapa de los ensayos se obtuvieron deformaciones permanentes importantes.

En ambos casos la rotura no fue brusca sino que quedó definida por la pérdida total de rigidez, acompañada de grandes deformaciones, notables grietas y la caída del recubrimiento en algunas zonas de las vigas. Debe destacarse la magnitud de los giros últimos experimentados por las vigas, ver fotografía 9.

DIMENSIONES DE LAS VIGAS ENSAYADAS



CARACTERISTICAS GEOMETRICAS

Sección:	$A_1 = 575 \text{ cm}^2$	$I_{o_1} = 154913$
	$A_2 = 657.5 \text{ cm}^2$	$I_{o_2} = 160153$
	$g_1 = 138 \text{ Kg/m}$	$W_{o_1} = 6885$
Peso/m:	$g_2 = 157.8 \text{ Kg/m}$	$W_{o_2} = 7117.9$

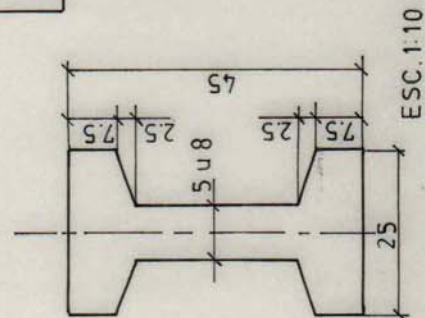
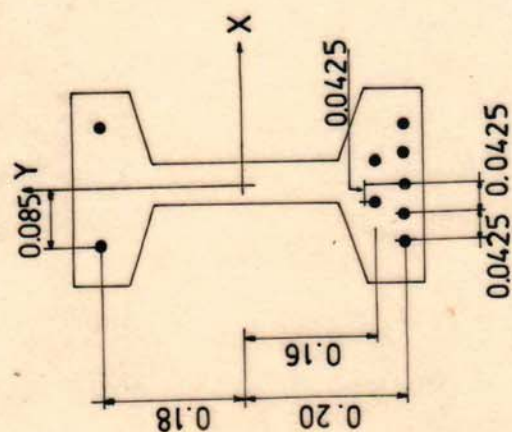
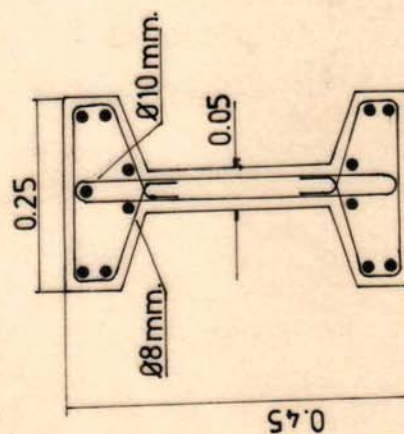
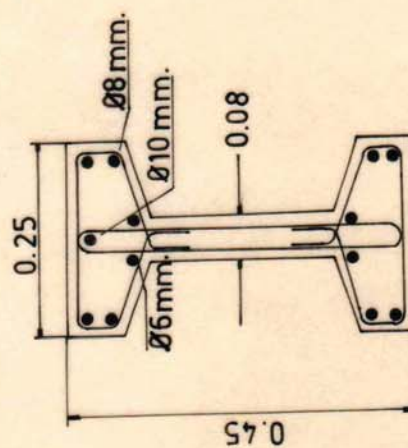


FIG. 11

VIGA SECCION DOBLE T ALMA = 5 y 8 cm.



ARMADURA TESA



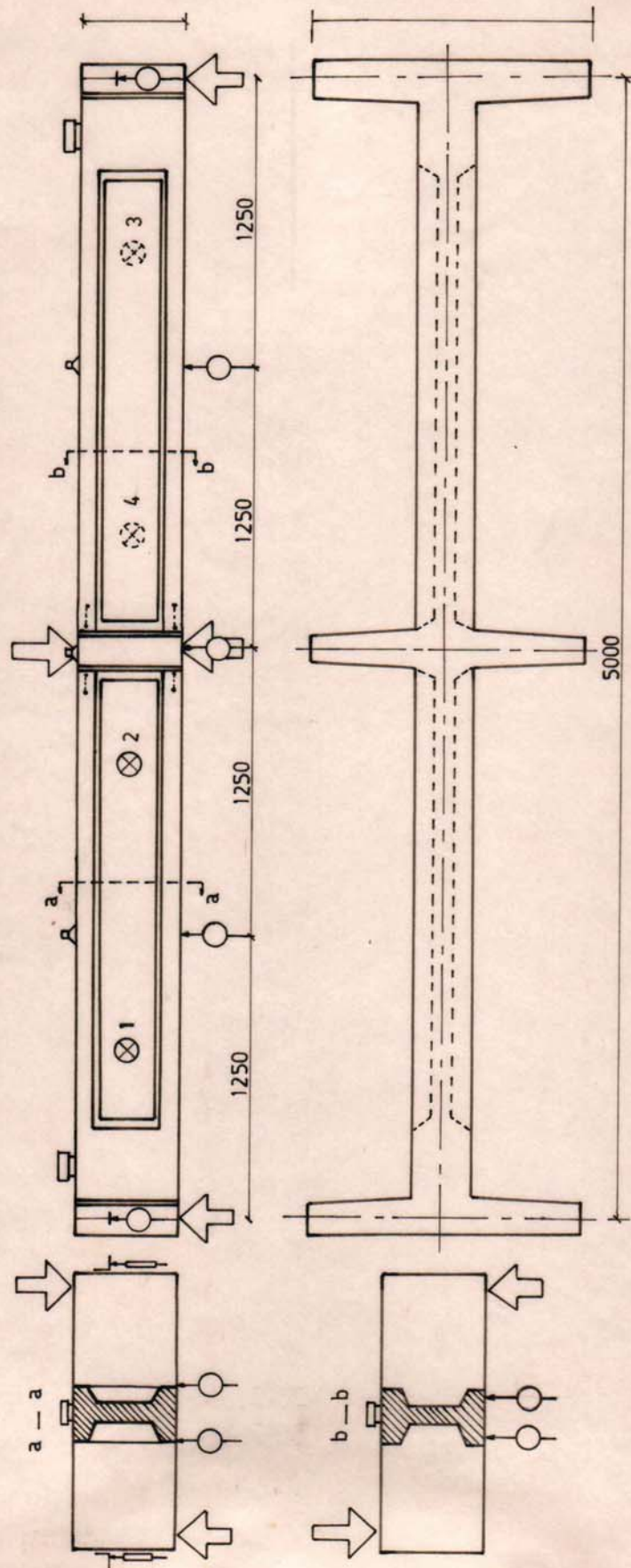
ARMADURA NO TESA

FIG. 12

FIG.14

APLICACION DE LA CARGA E INSTRUMENTACION

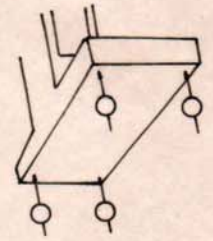
TORSION



REFERENCIAS

DETALLE

- Flexímetros
- Clinómetros
- Rosetas
- Extensómetros mecánicos (Demec)



Instrumentación de diafragmas extremos

ANCLAJE DE DIAFRAGMA EXTREMO

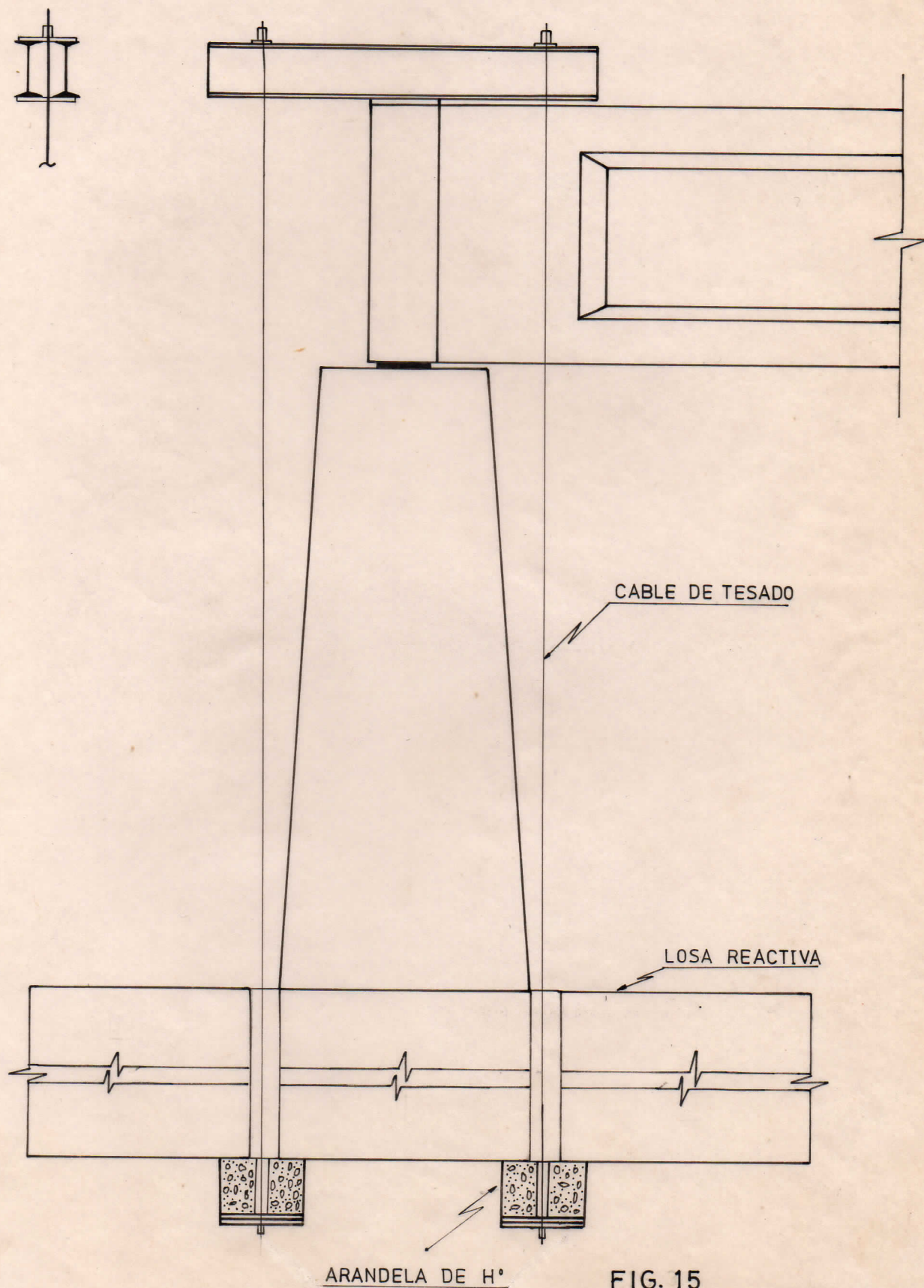


FIG. 15

FIG.16 - DIAGRAMAS CARGAS - FLECHAS CENTRALES

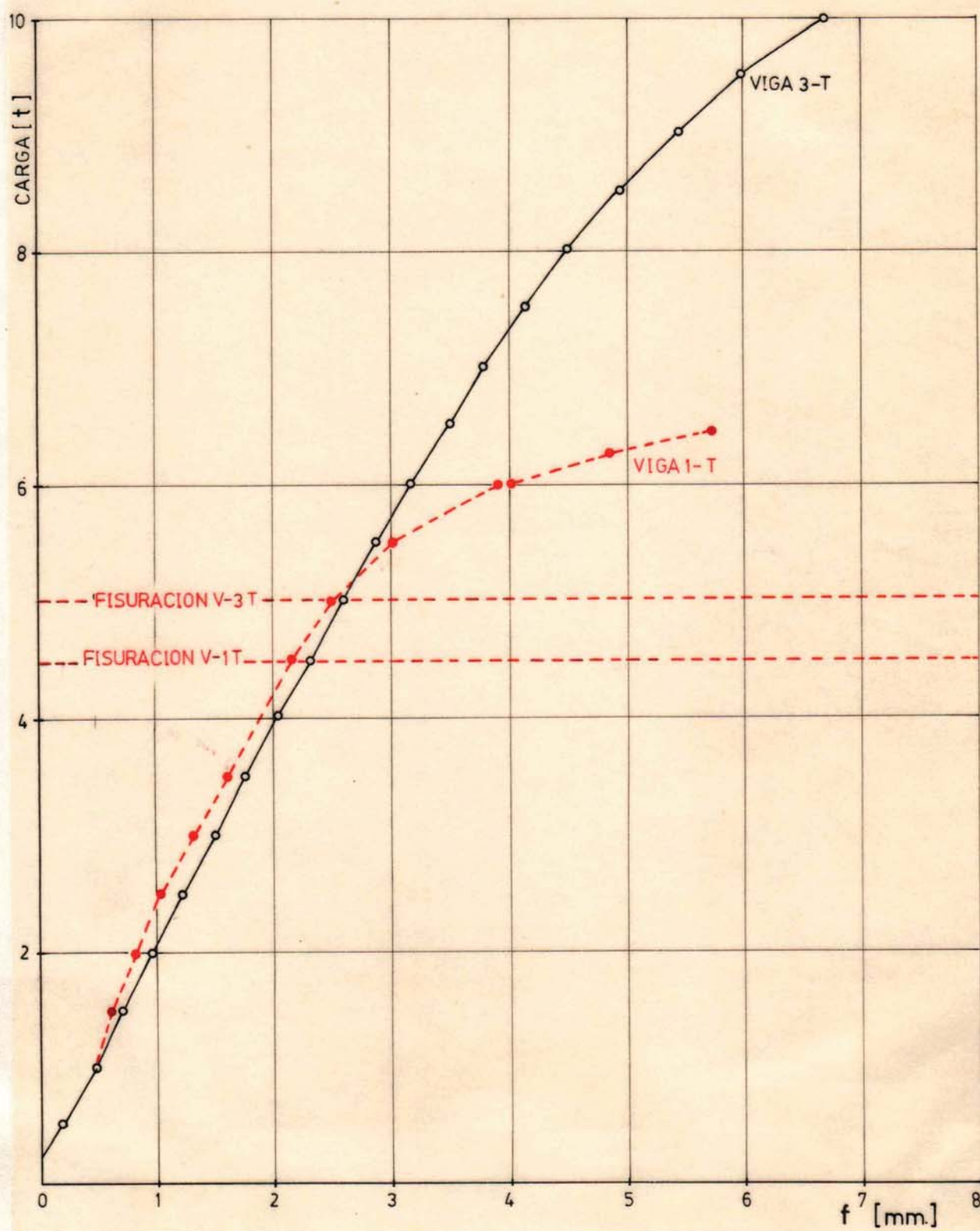


FIG.17 - DIAGRAMAS CARGAS - FLECHAS CENTRALES

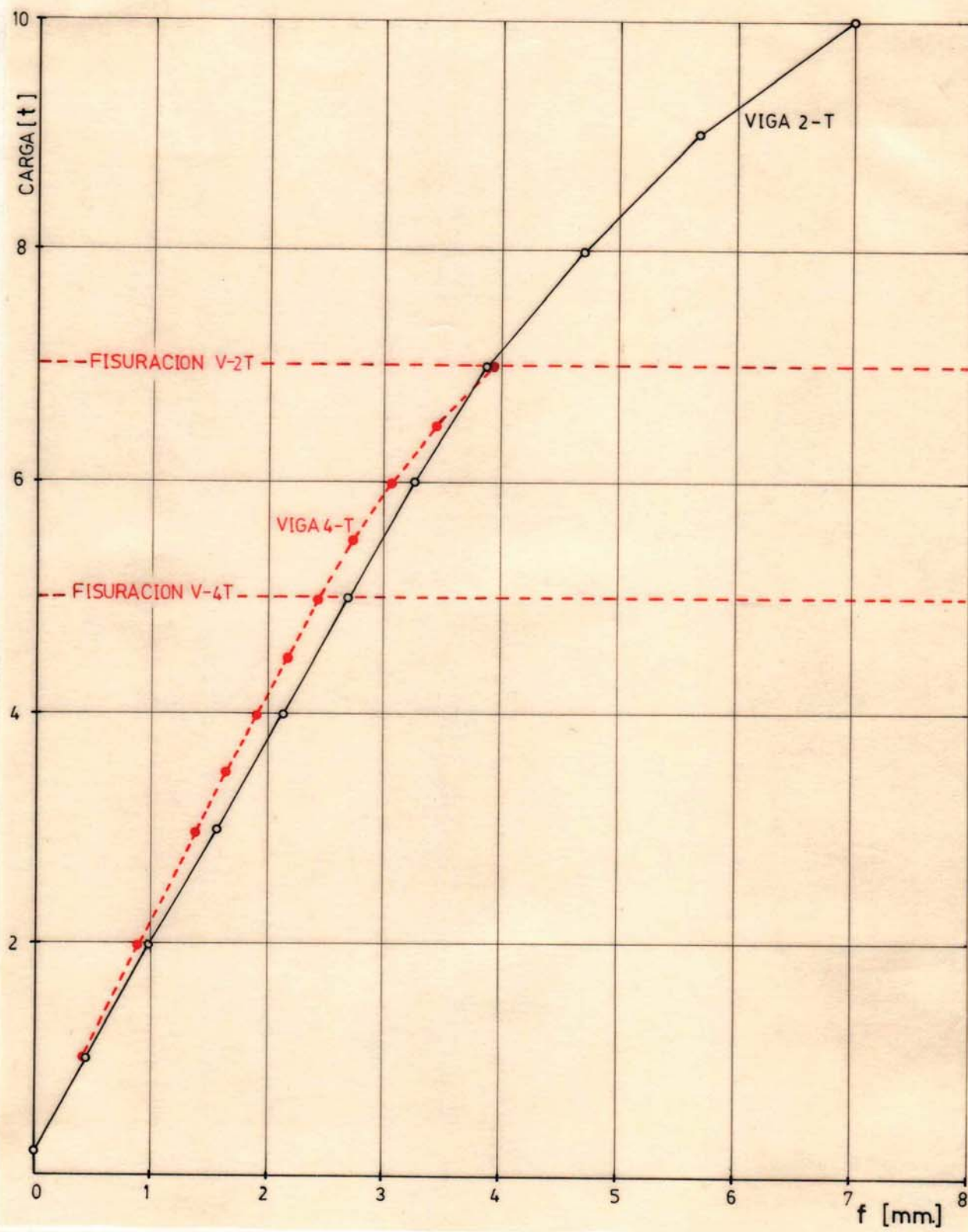


FIG.18 - DIAGRAMA CARGAS - FLECHAS CENTRALES

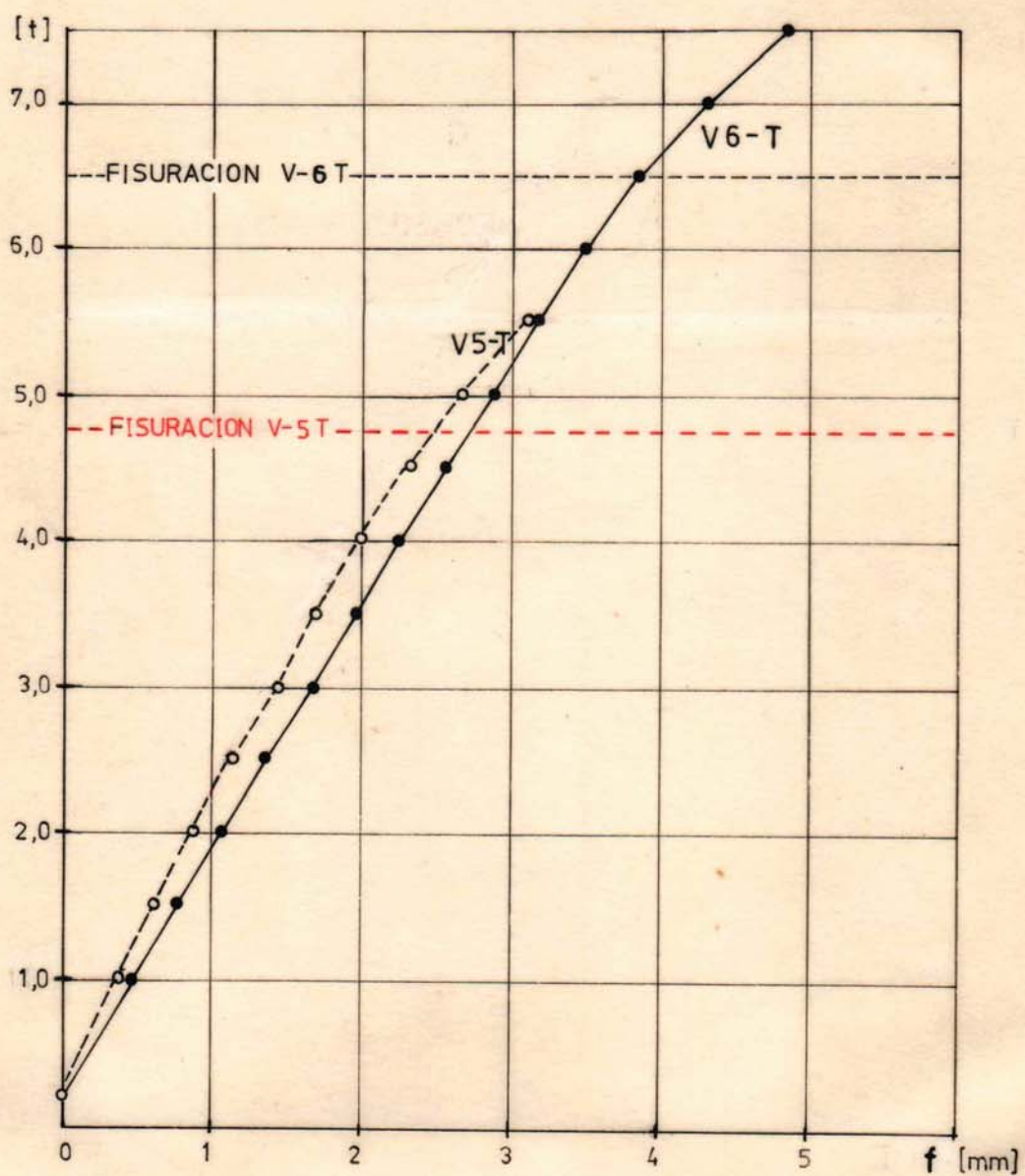


FIG. 19
COMPARACION DE GIROS TEORICOS
Y EXPERIMENTALES. VIGA 3-T, 1-T

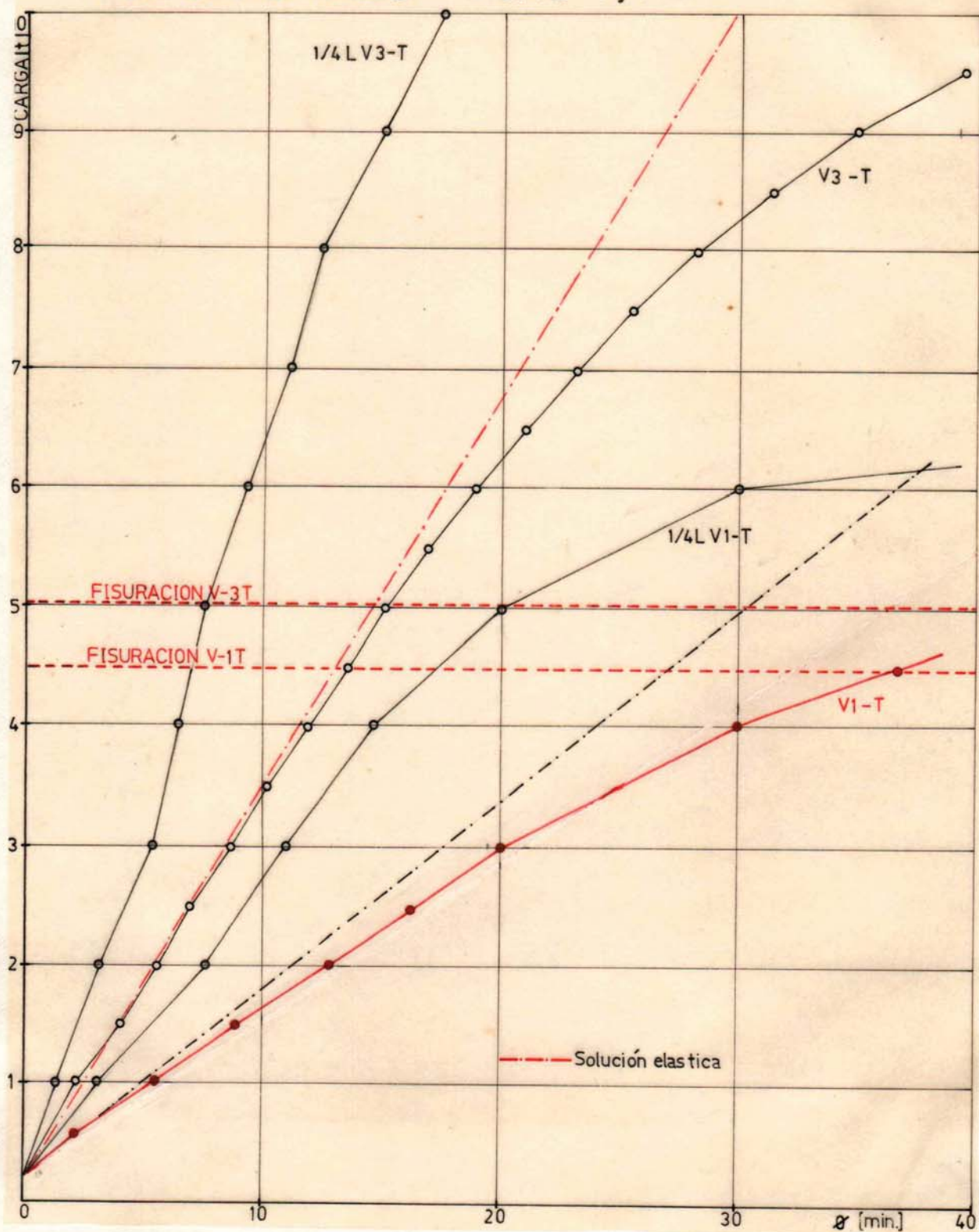
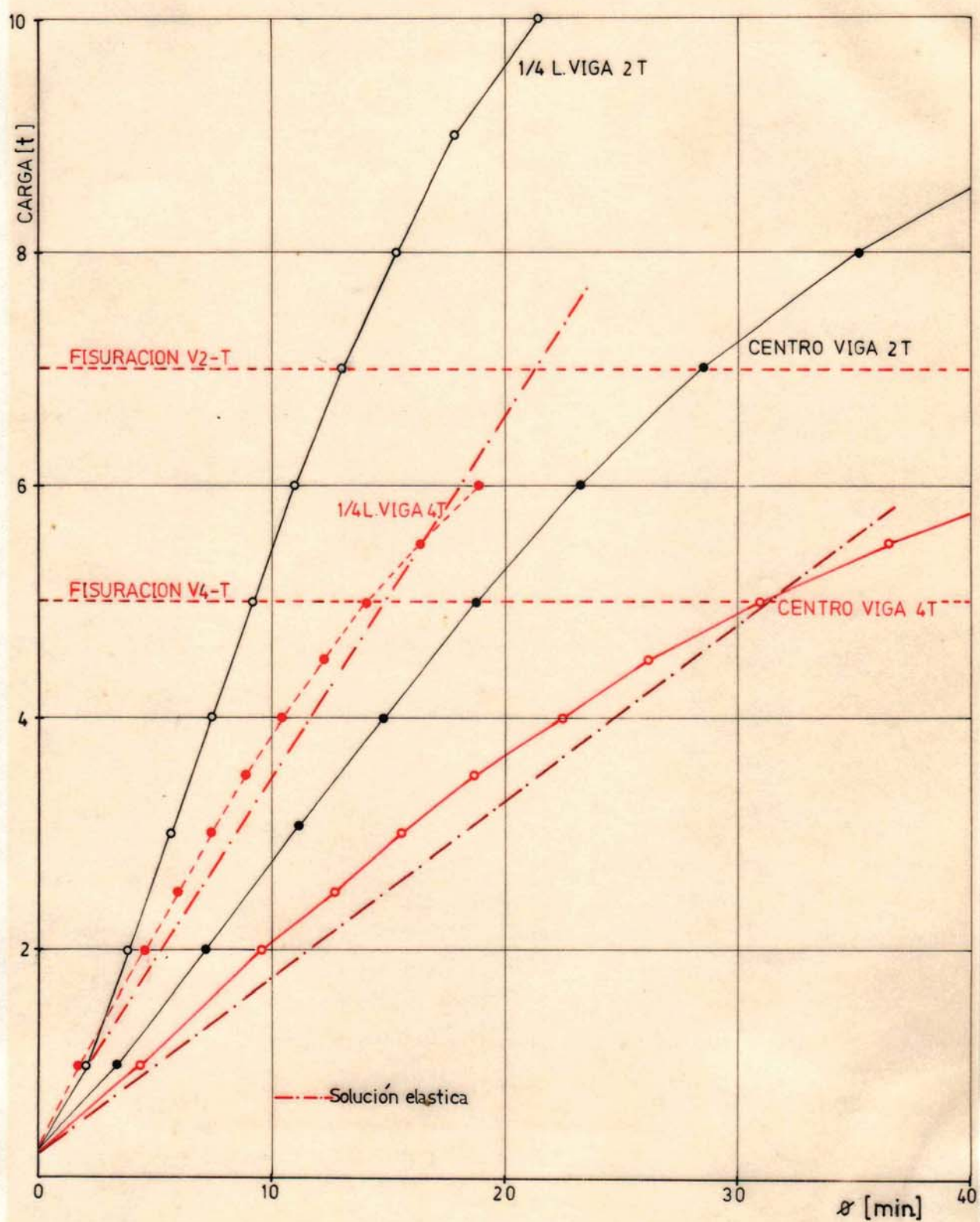
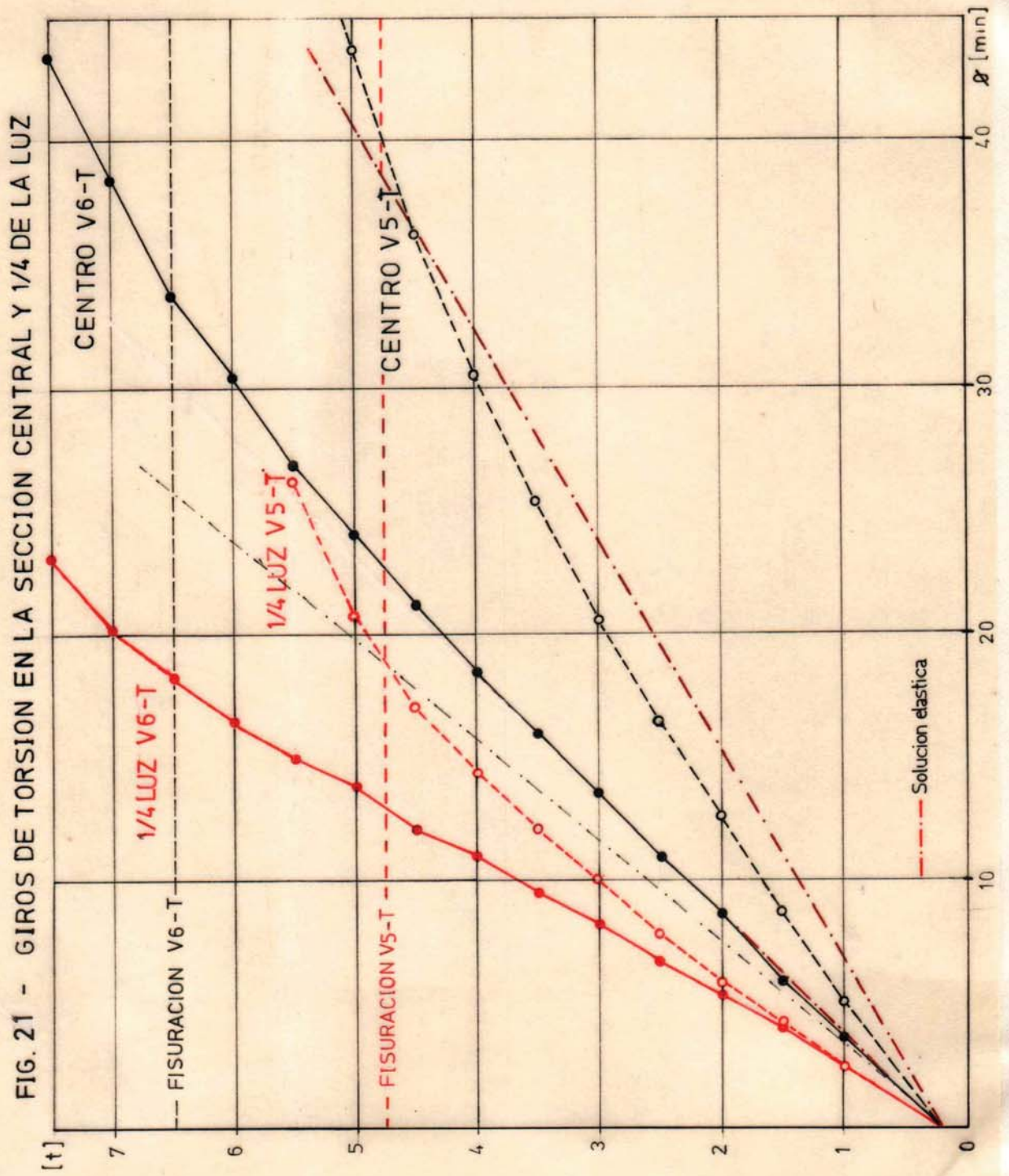


FIG.20 GIROS DE TORSION EN LA SECCION CENTRAL
Y 1/4 DE LA LUZ





GIROS DE TORSION (VIGA 7 T)

SECCION CENTRAL Y CUARTOS DE LUZ

1ª ETAPA

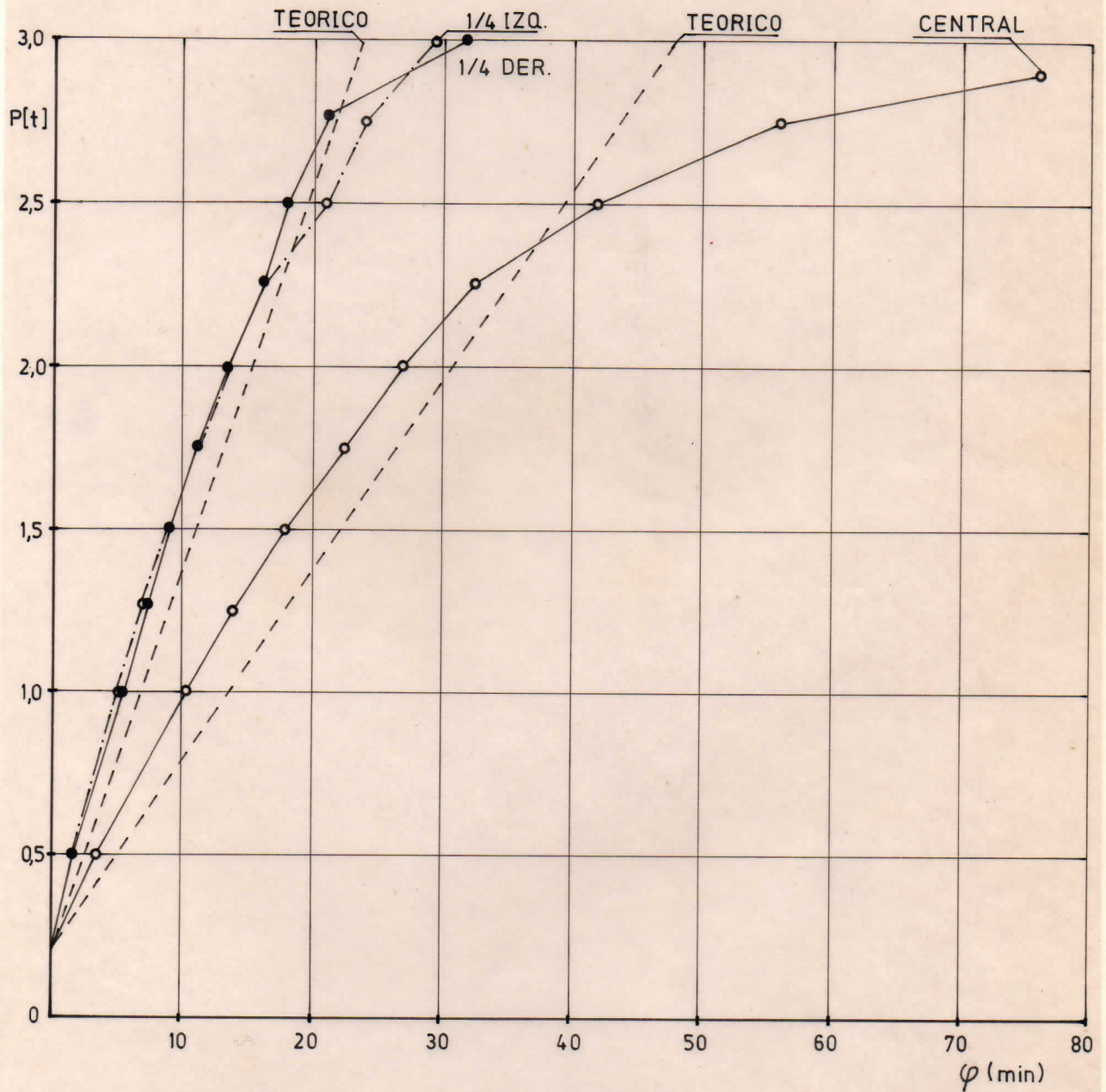
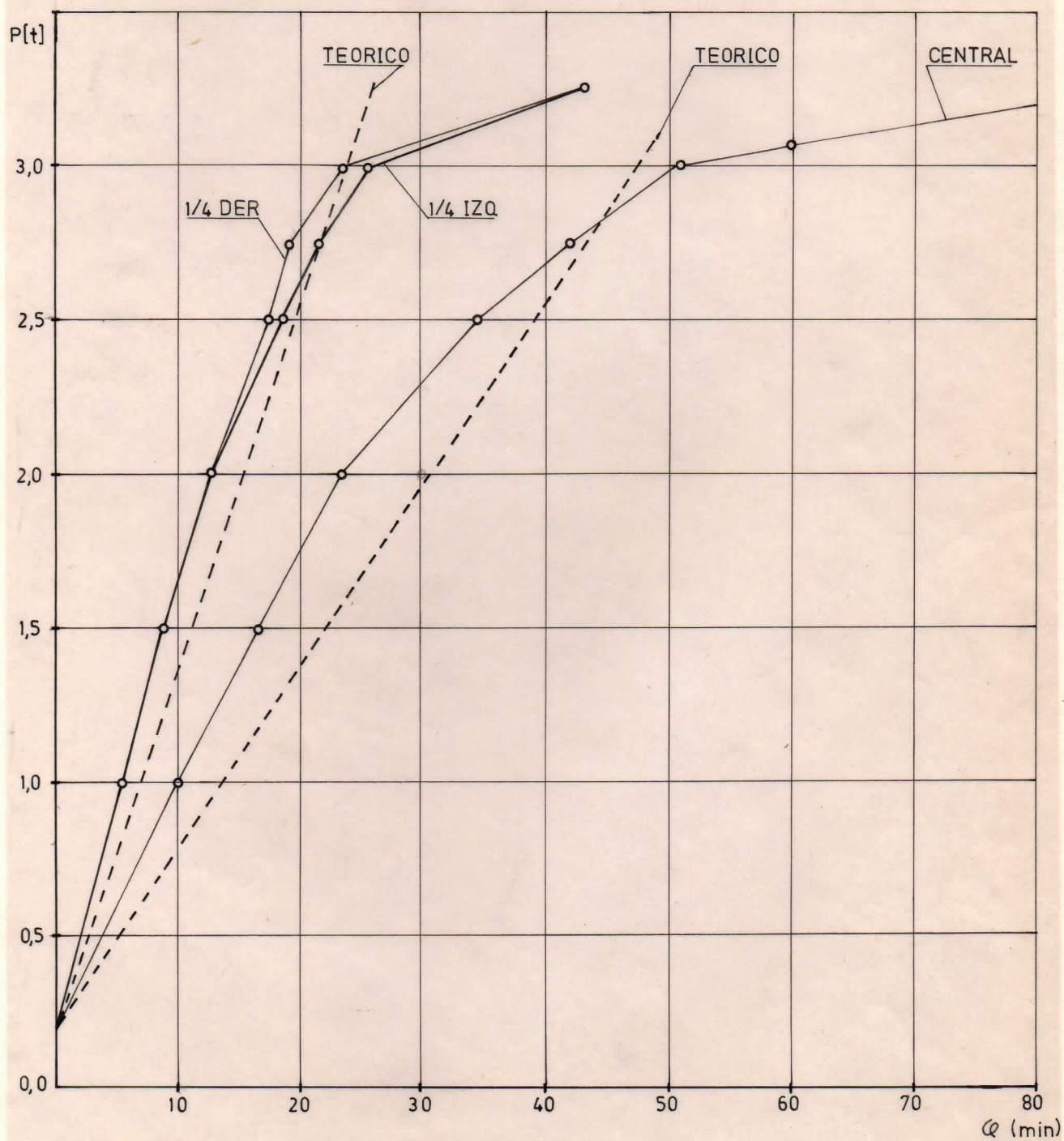


FIG. 22

FIG. 23 GIROS DE TORSION (VIGA 8 T)

SECCION CENTRAL Y CUARTOS DE LUZ

1ª ETAPA



GIROS DE TORSION
SECCION CENTRAL Y CUARTOS DE LUZ
2ª ETAPA
(VIGAS 7T y 8T)

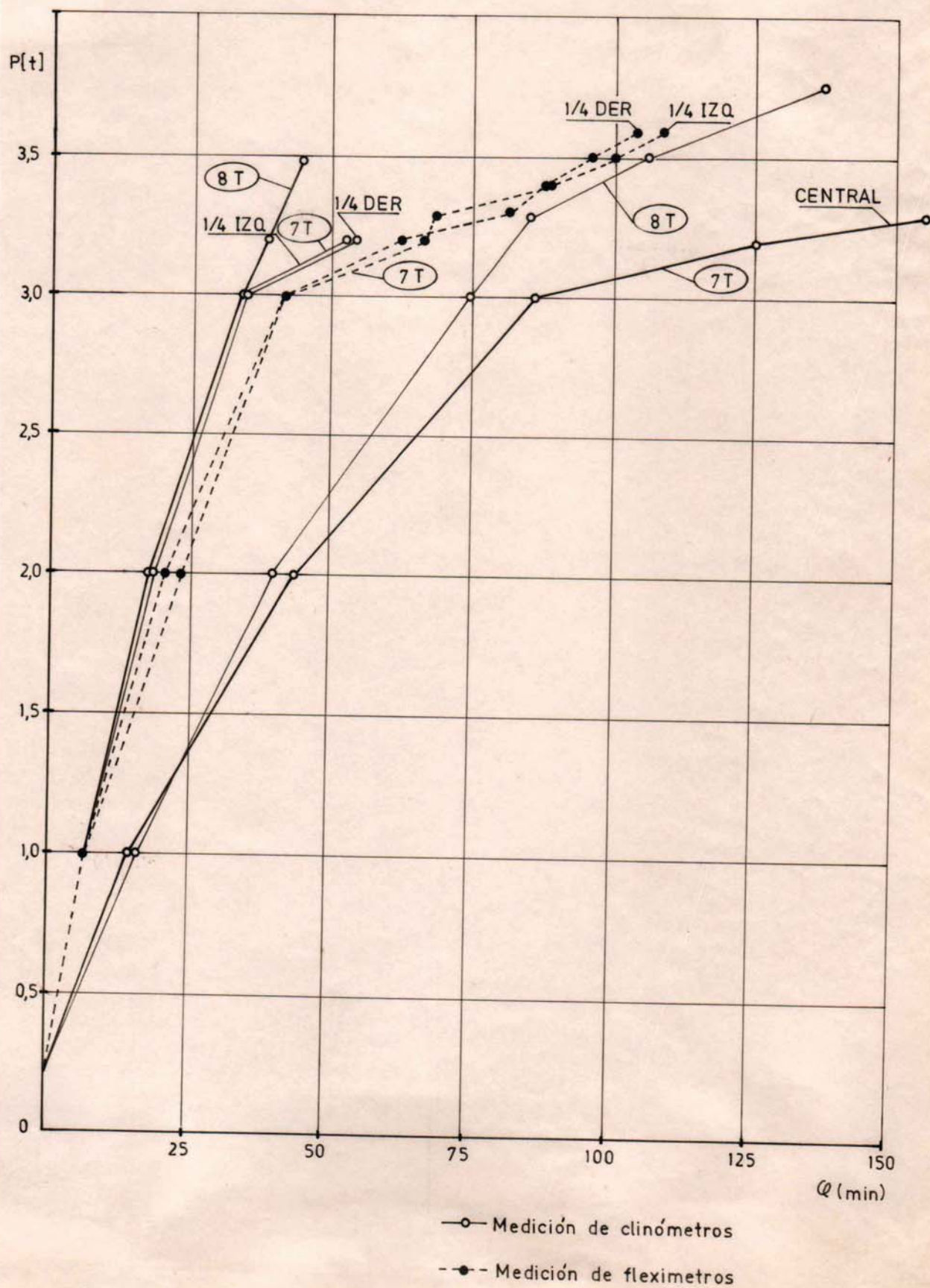


FIG. 24

DISTRIBUCION DE GIROS DE TORSION A LO LARGO DE LA VIGA 8T

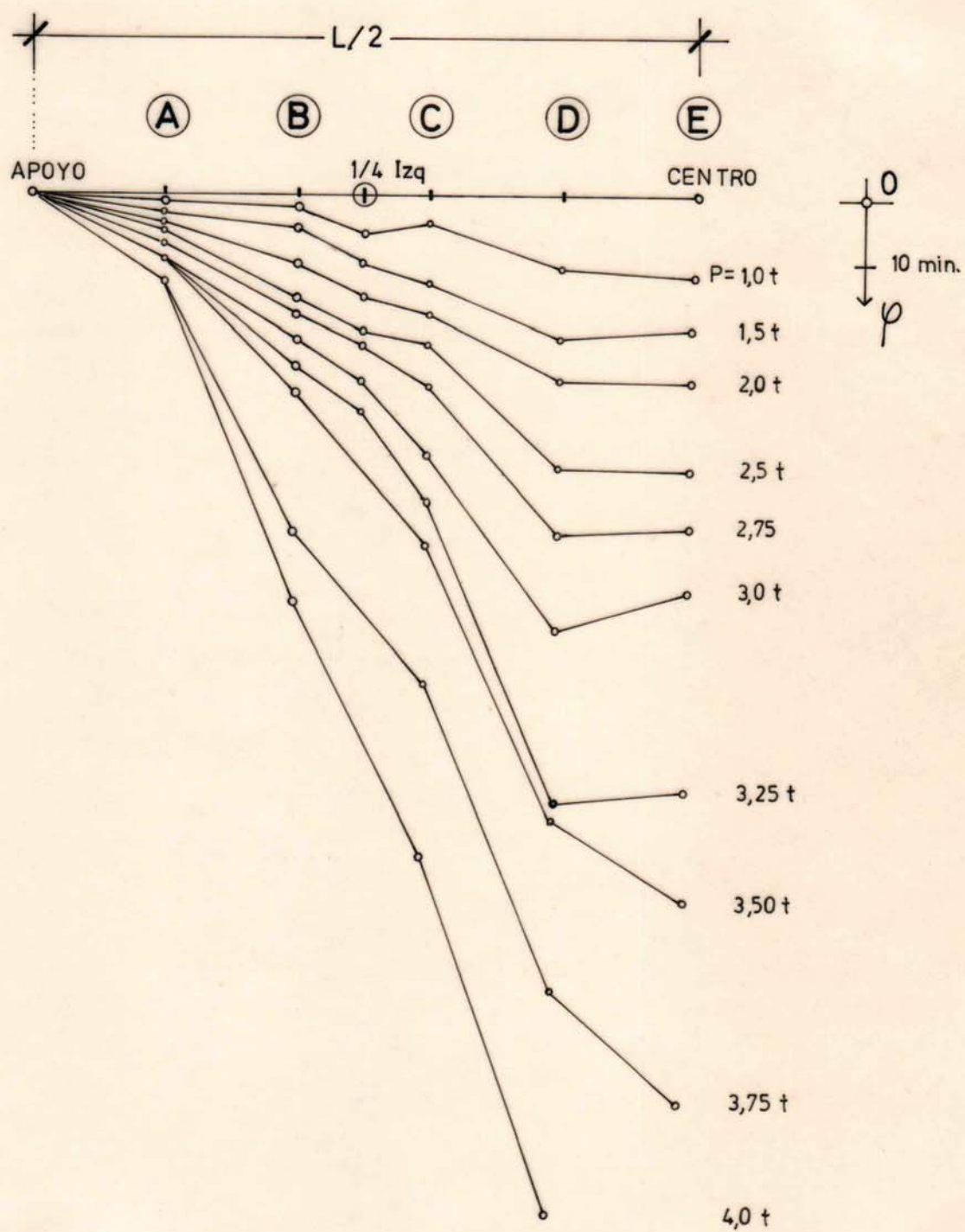


FIG.25

DESPLAZAMIENTO DIAFRAGMA IZQUIERDO
(VIGA 7 T)

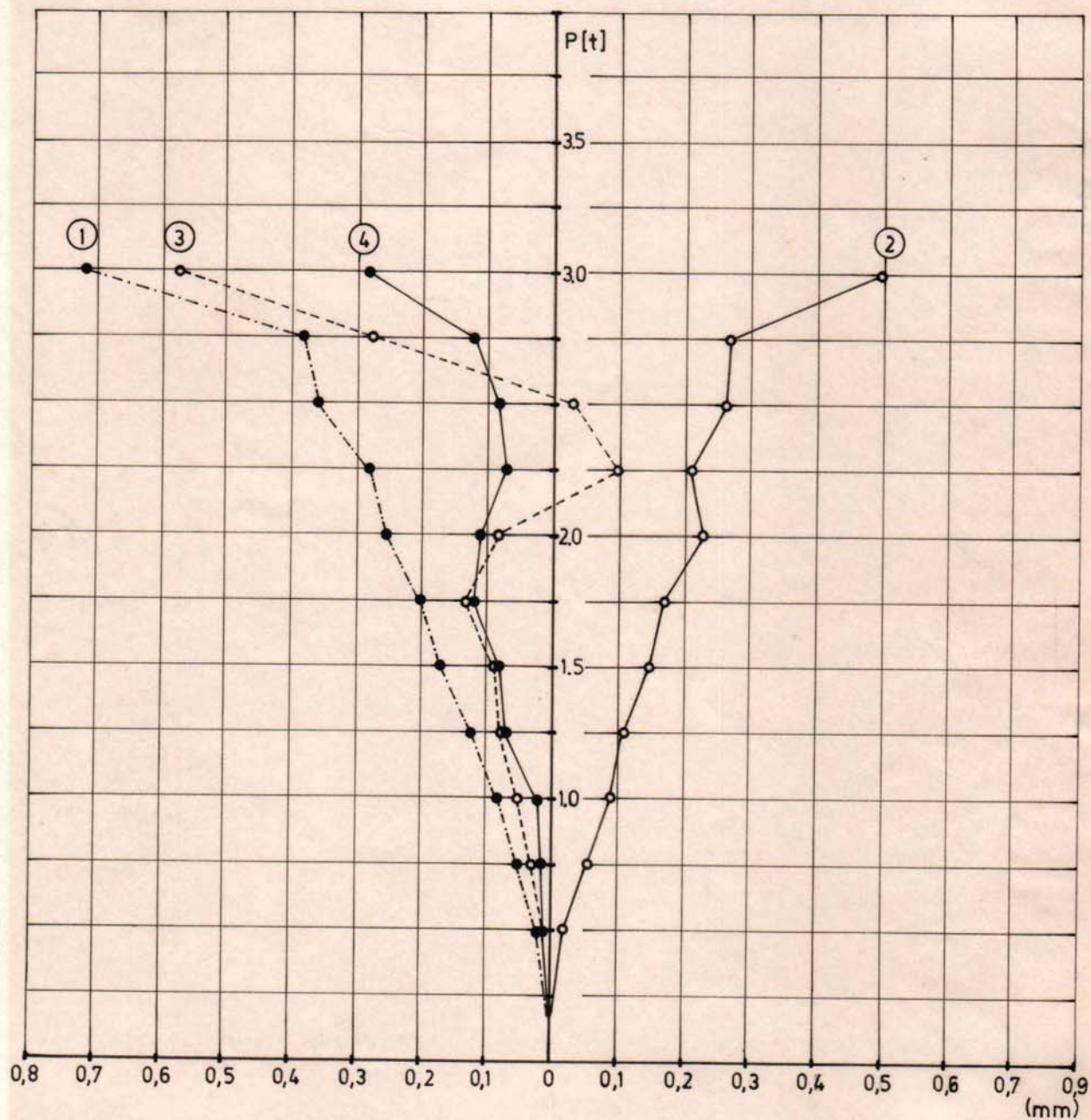


FIG. 27

DESPLAZAMIENTOS DIAFRAGMA DERECHO
(VIGA 7T)

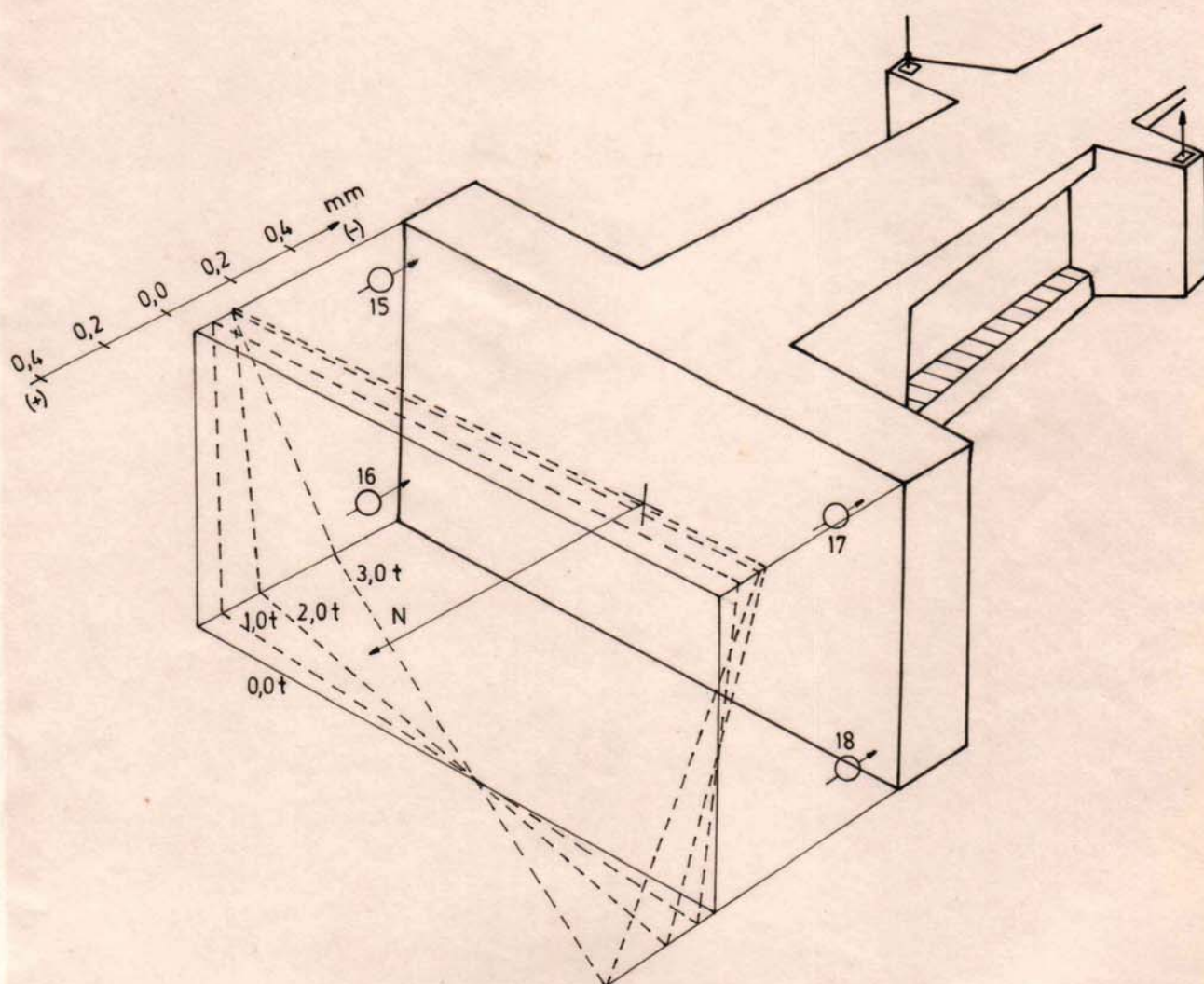


FIG. 28

DESPLAZAMIENTO DIAFRAGMA DERECHO
(VIGA 7T)

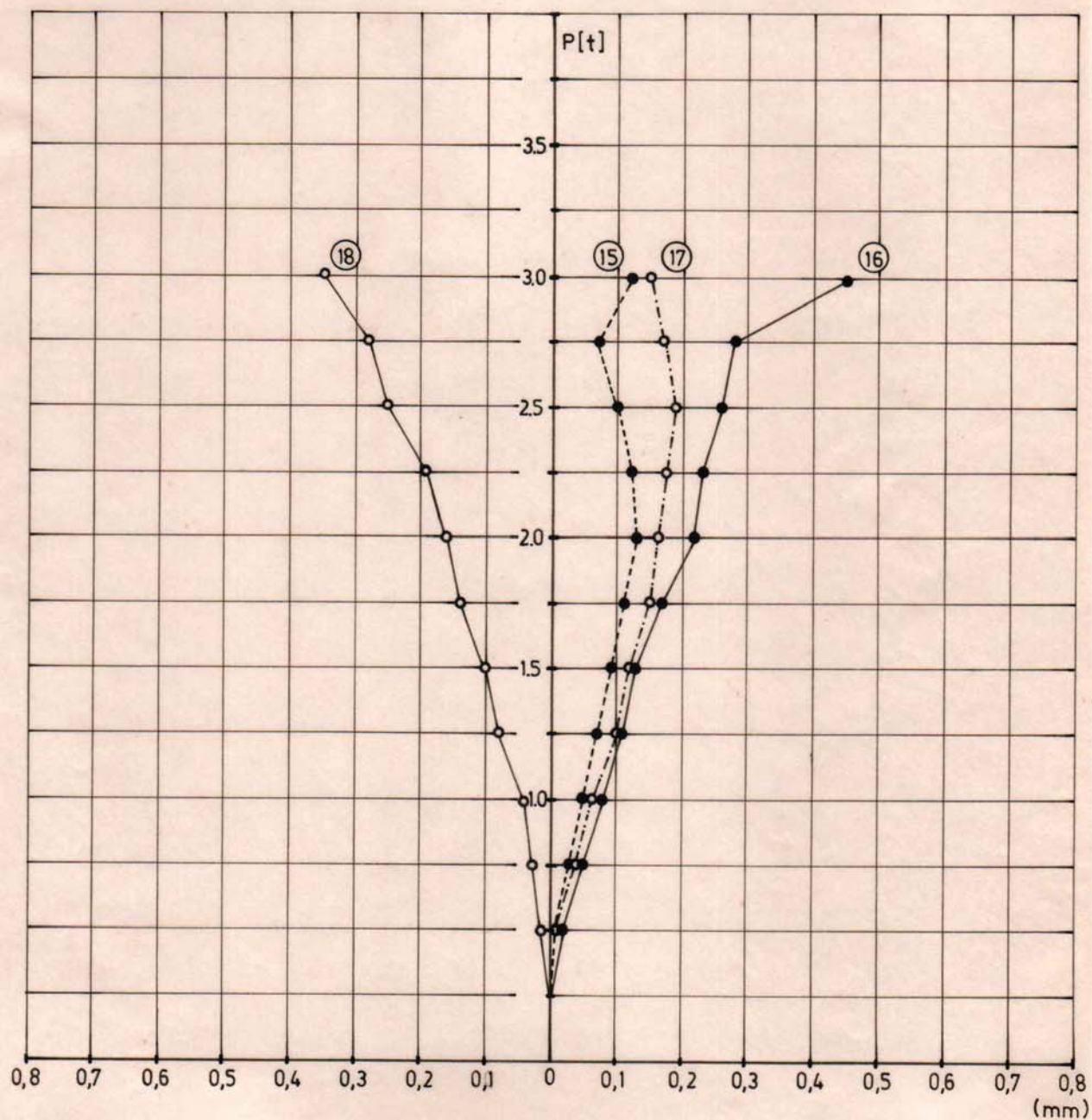
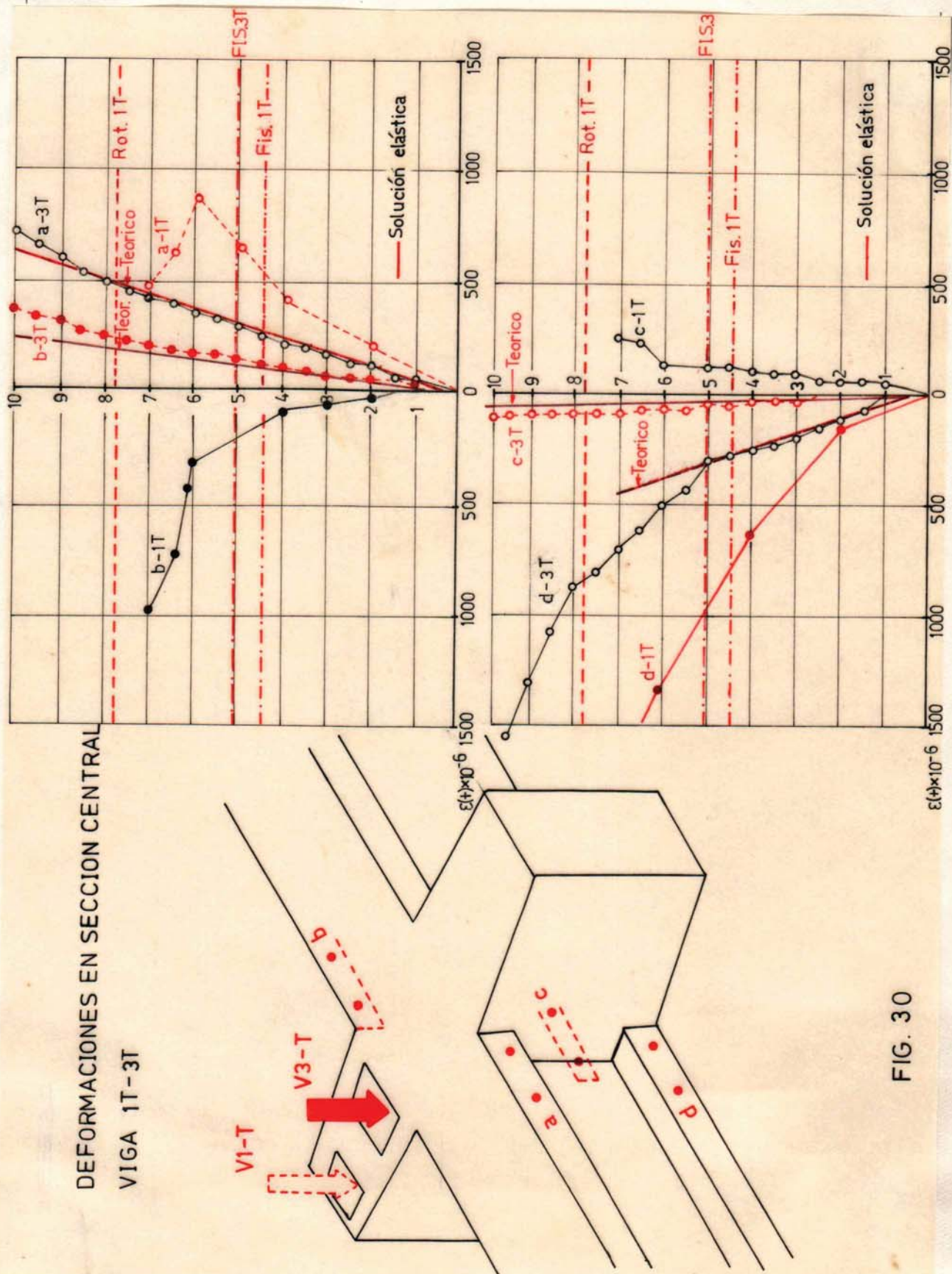


FIG. 29



DEFORMACIONES EN SECCION CENTRAL
VIGA 2T-4T

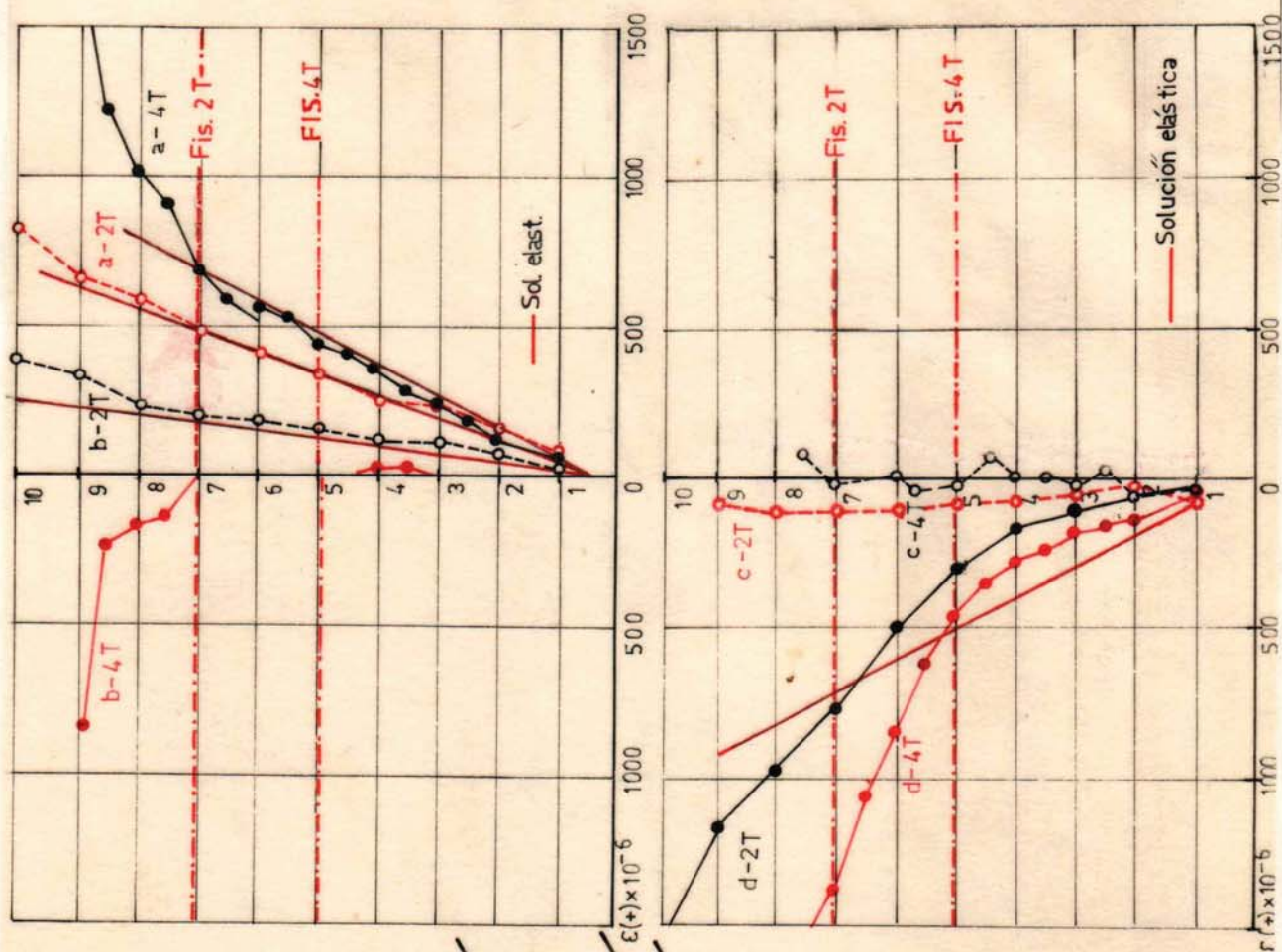
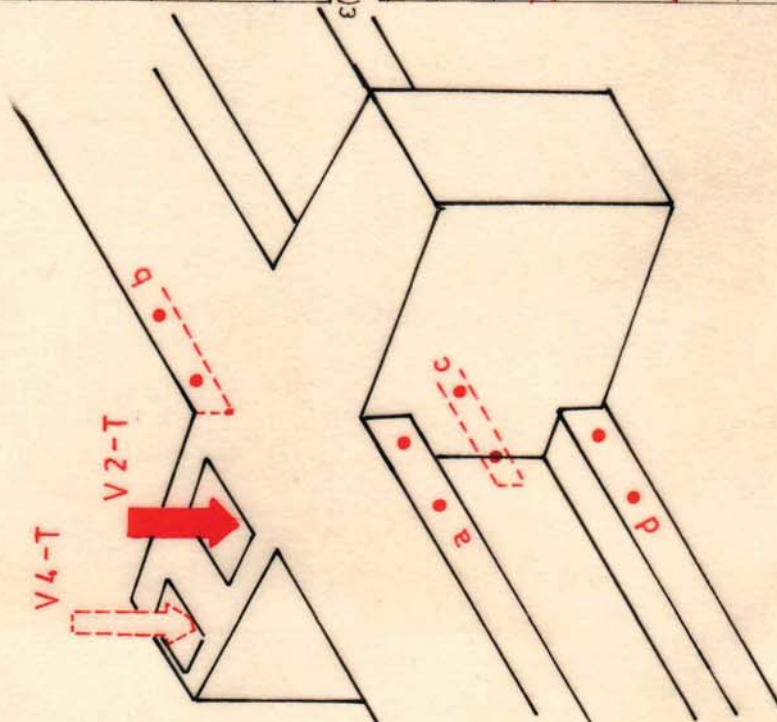


FIG. 31

DEFORMACIONES EN SECCION CENTRAL
VIGA 5T - 6T

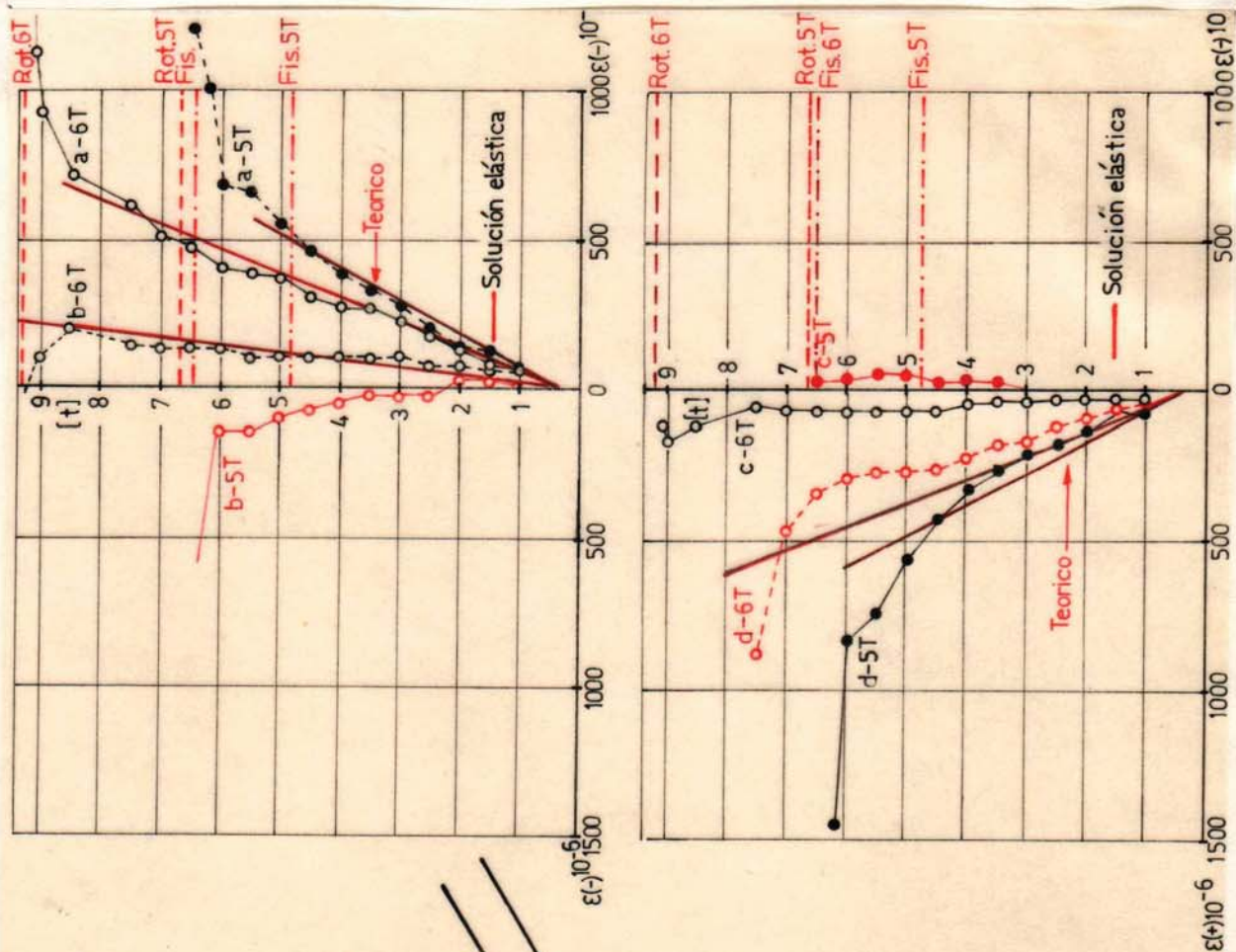
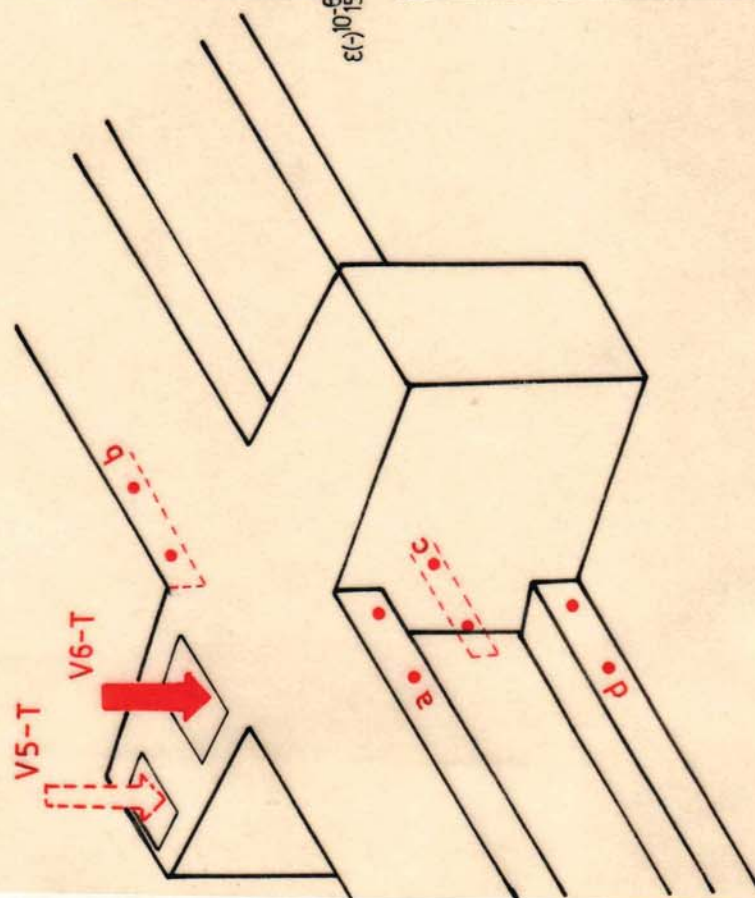


FIG. 32

DEFORMACIONES EN LA SECCION CENTRAL
(VIGA 7T)

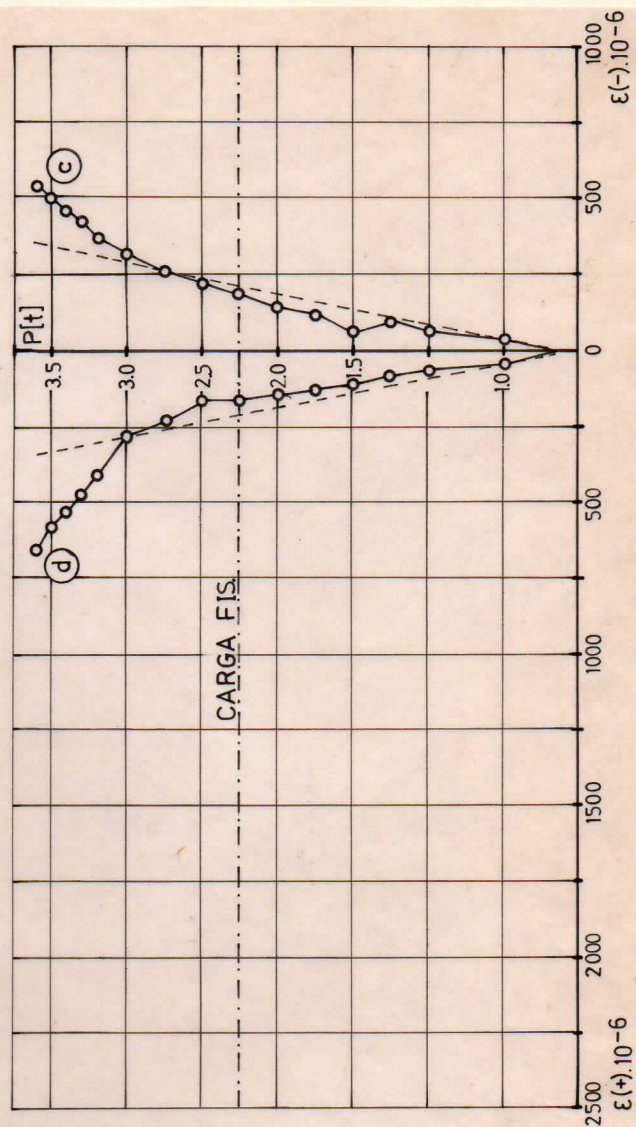
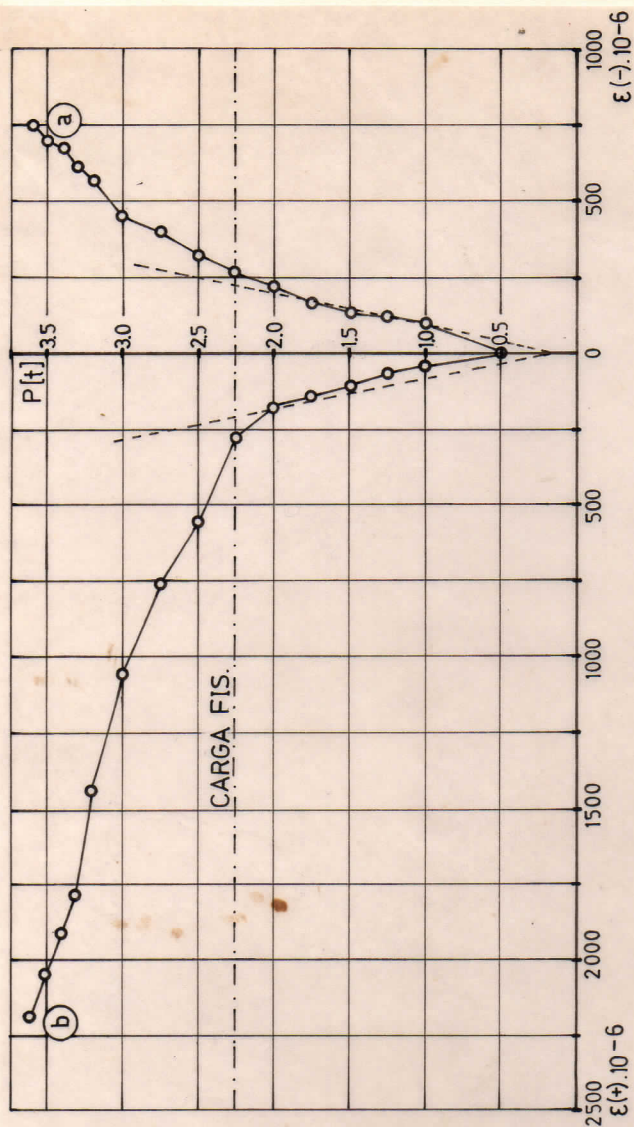
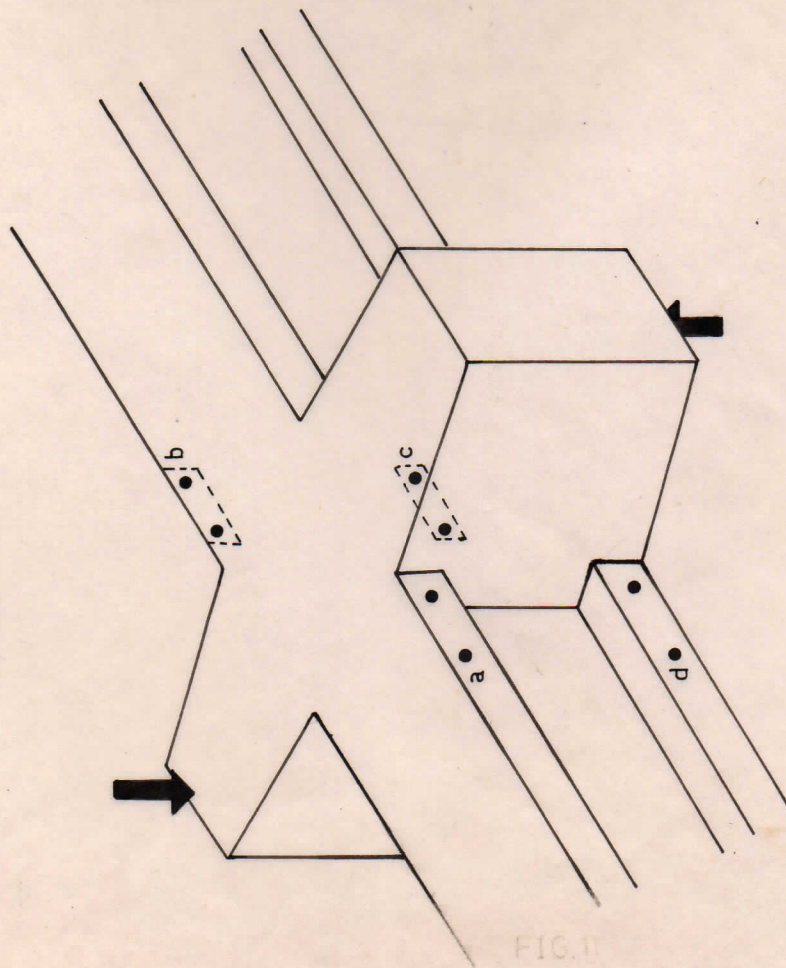


FIG. 33

DEFORMACIONES NORMALES EN LA SECCION CENTRAL

(VIGA 8 T)

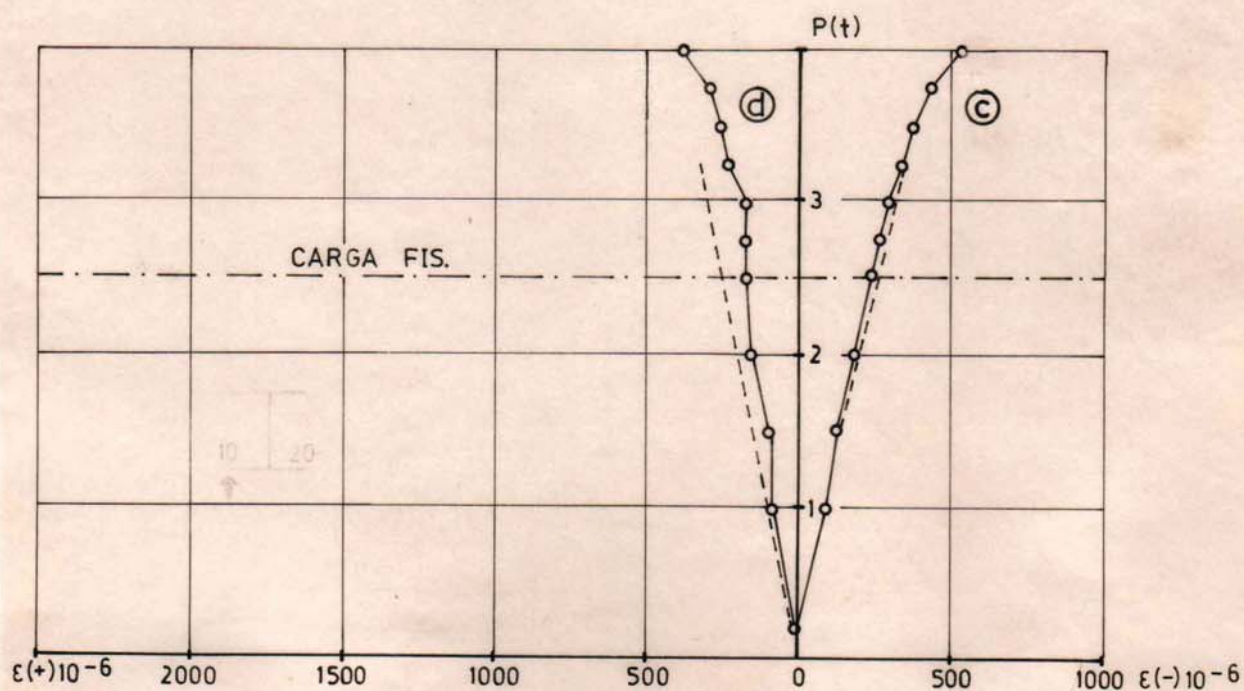
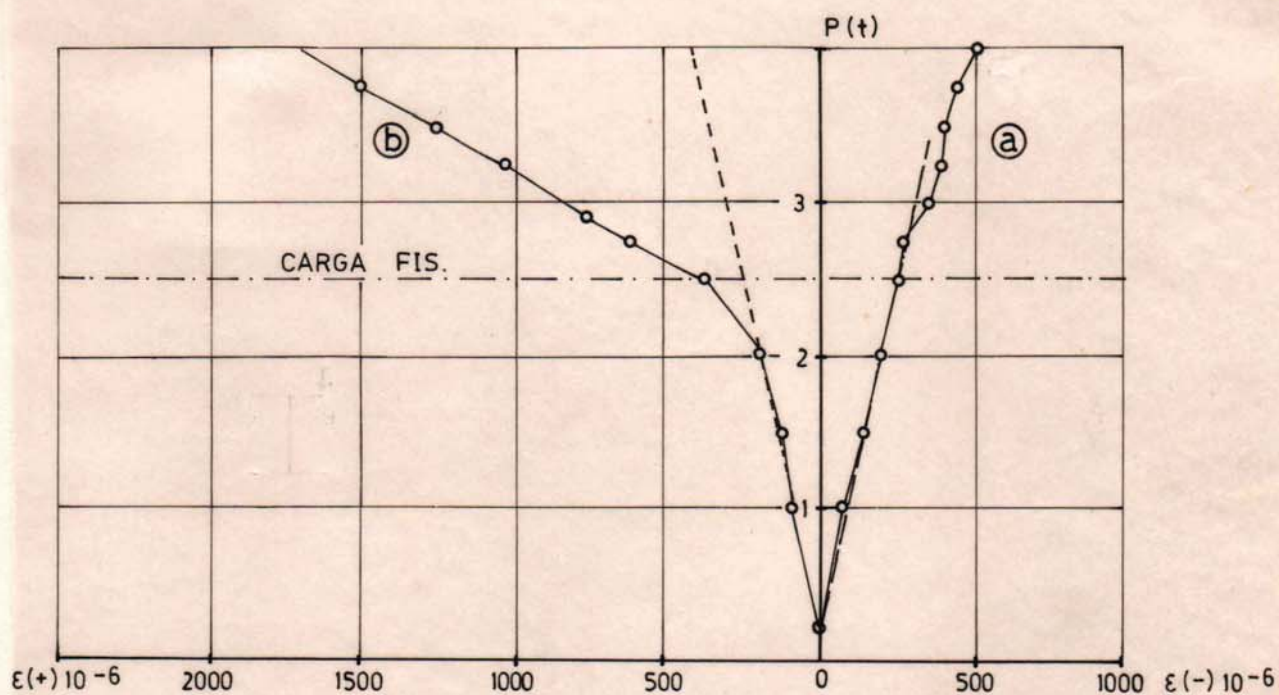


FIG. 34

DEFORMACIONES EN ROSETAS

1ª ETAPA (VIGA 7 T)

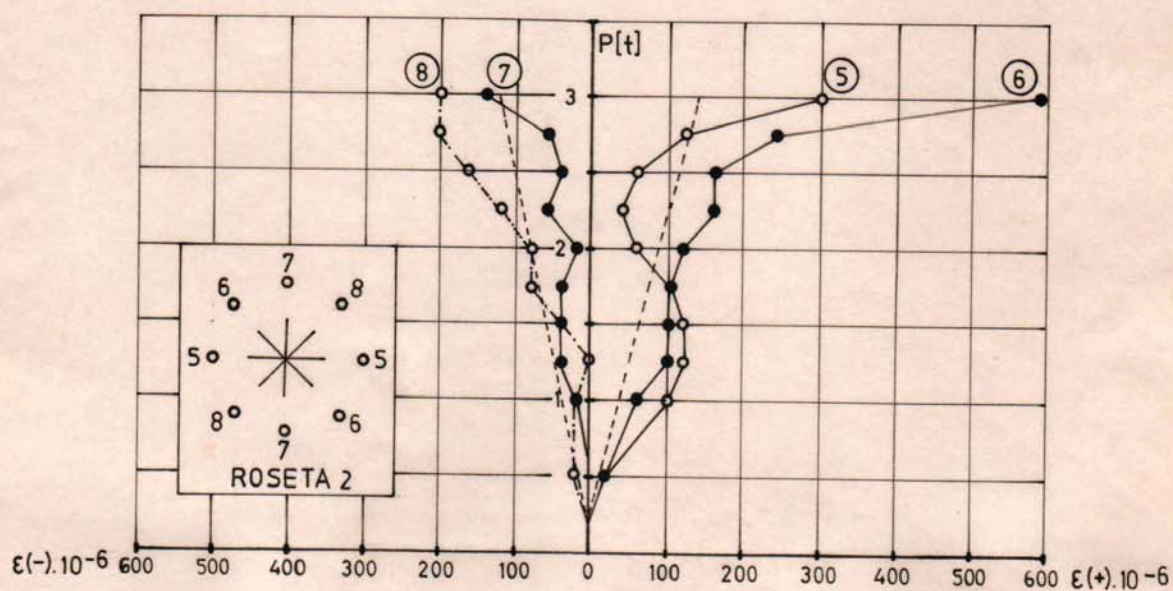
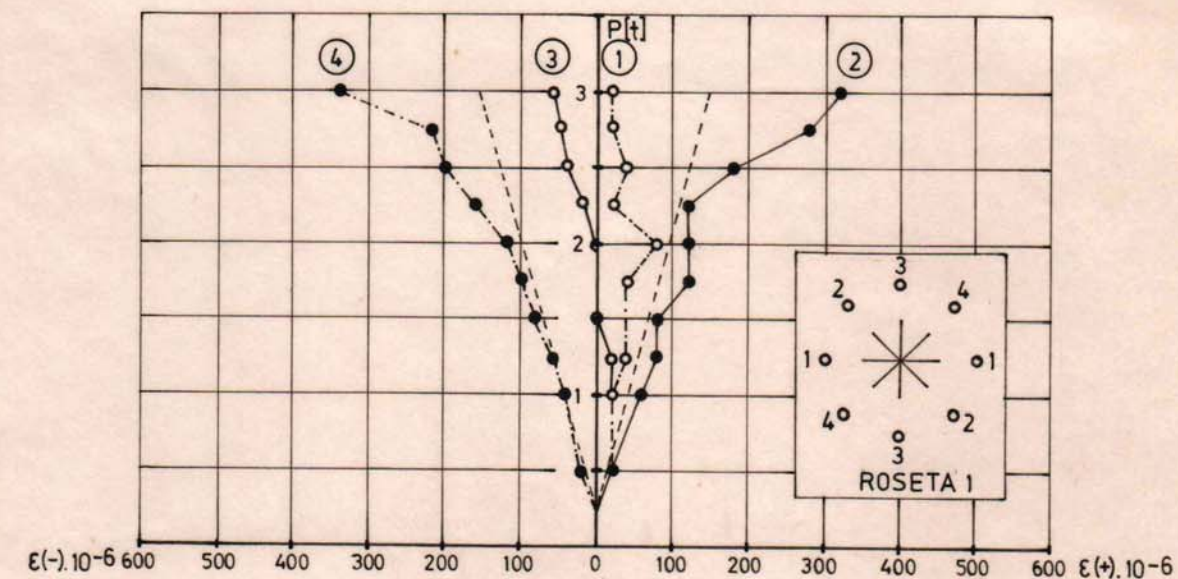


FIG. 35

DEFORMACIONES EN ROSETAS

1ª ETAPA
(VIGA 7T)

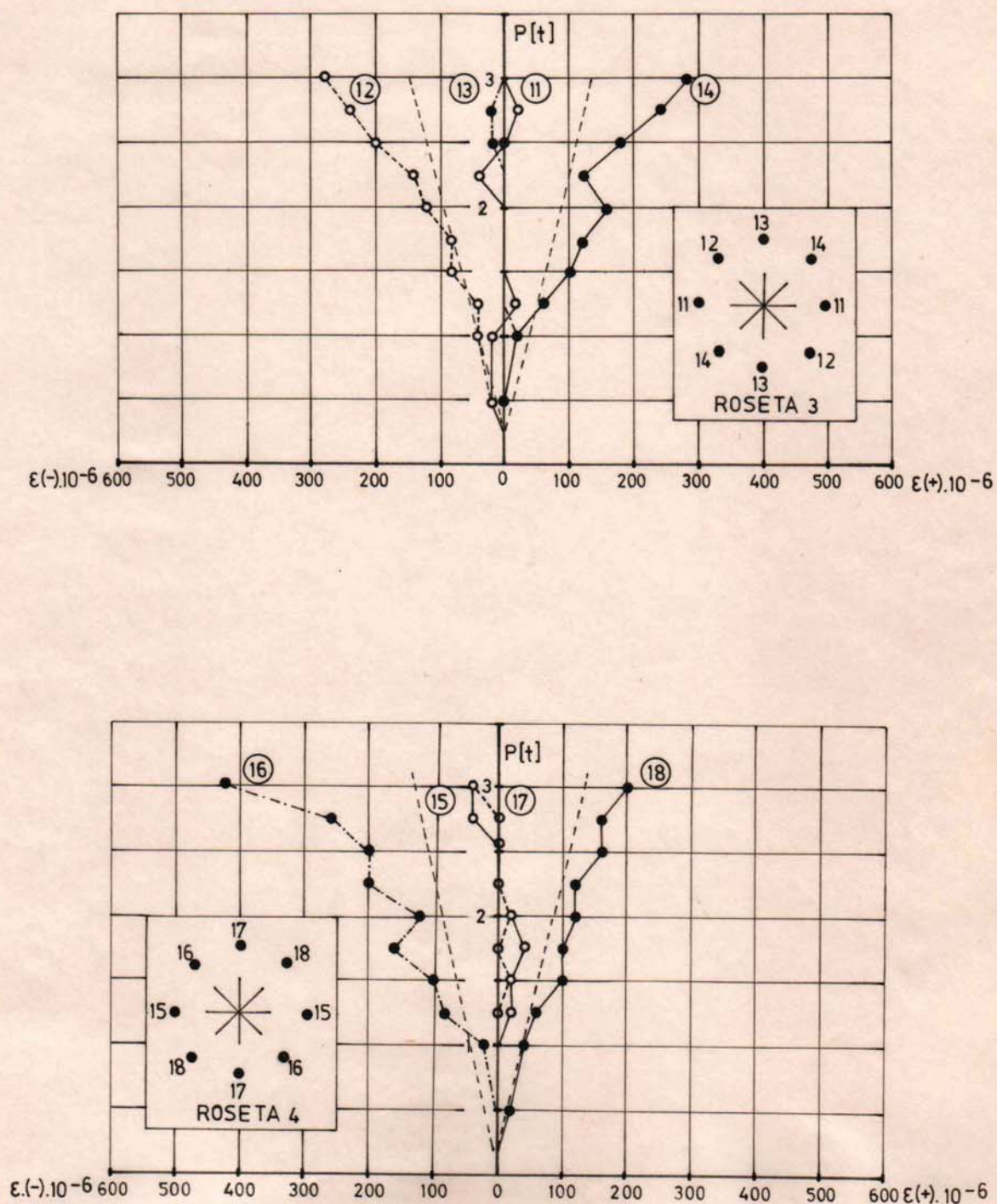


FIG. 36

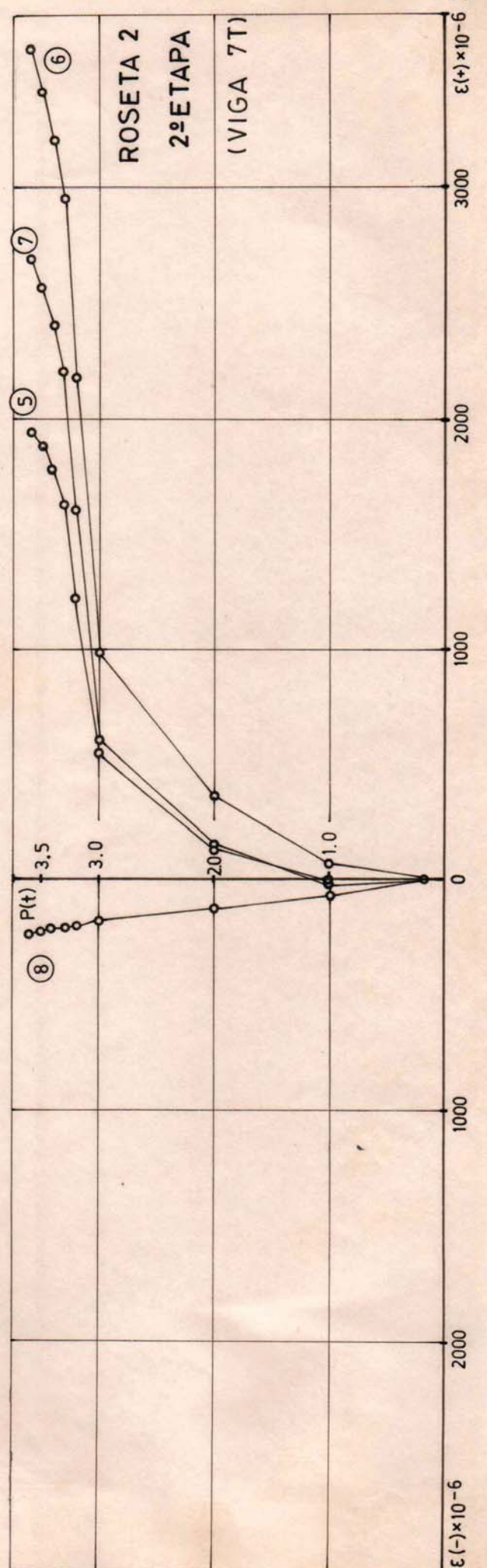
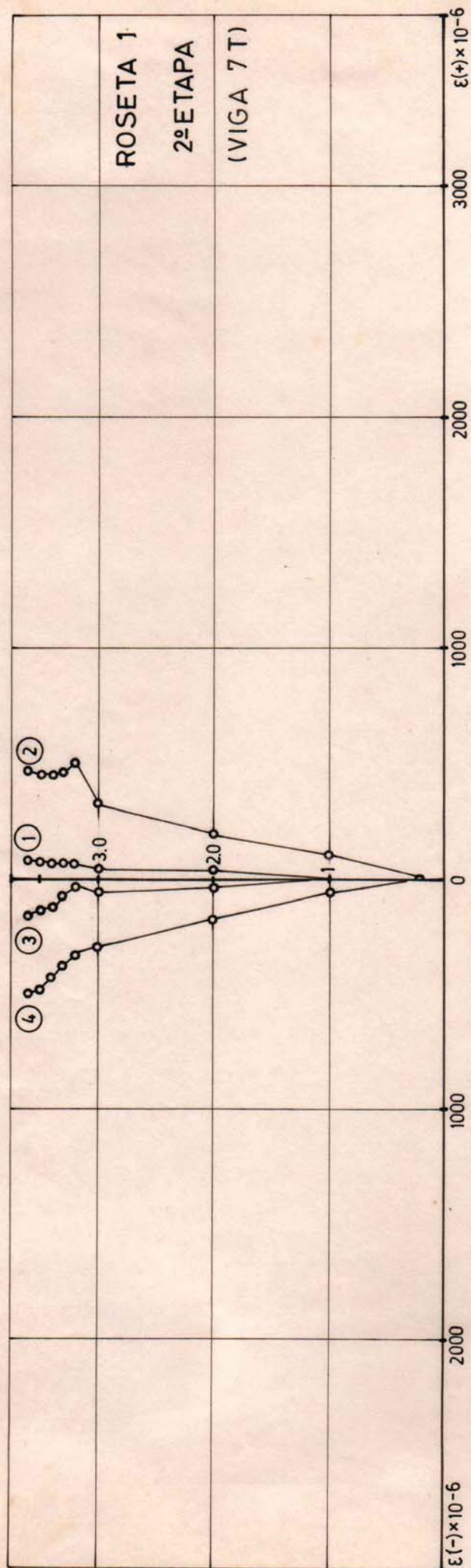


FIG. 37

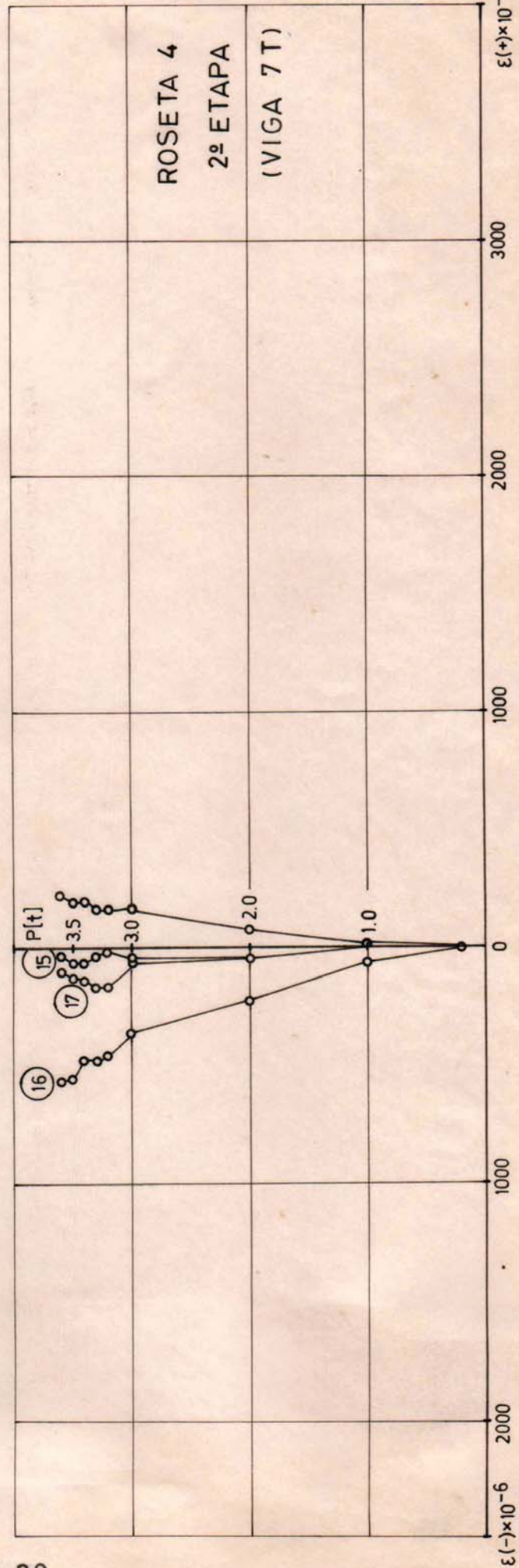
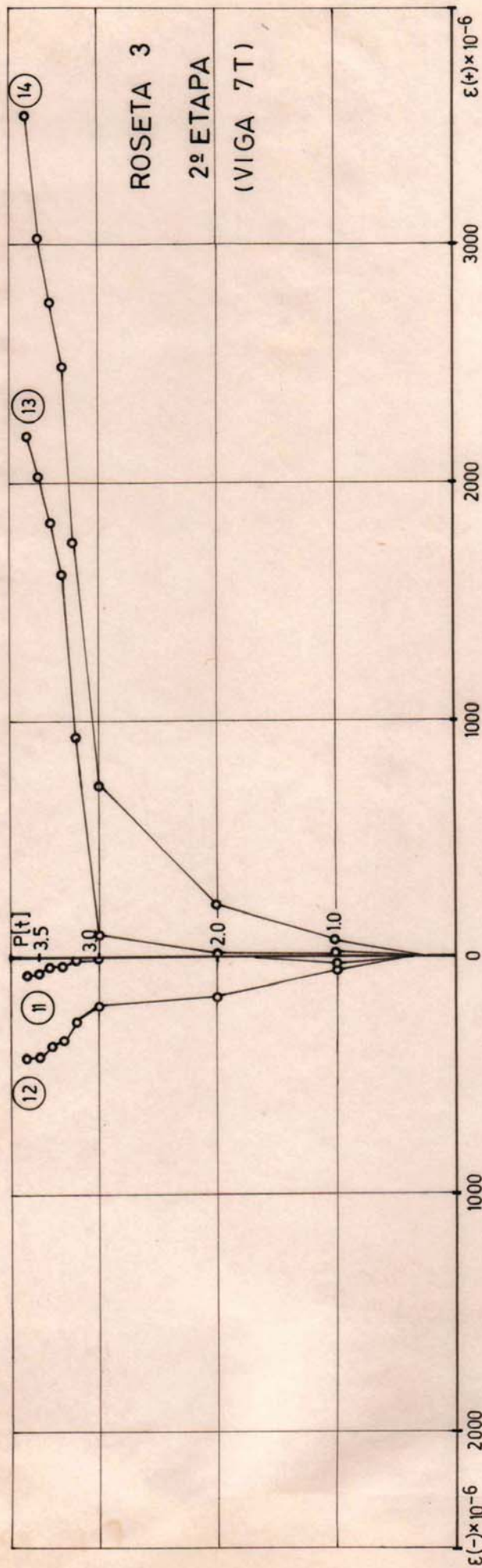


FIG. 38

DEFORMACIONES EN BIELAS COMPRIMIDAS

2ª ETAPA
(VIGA 7 T)

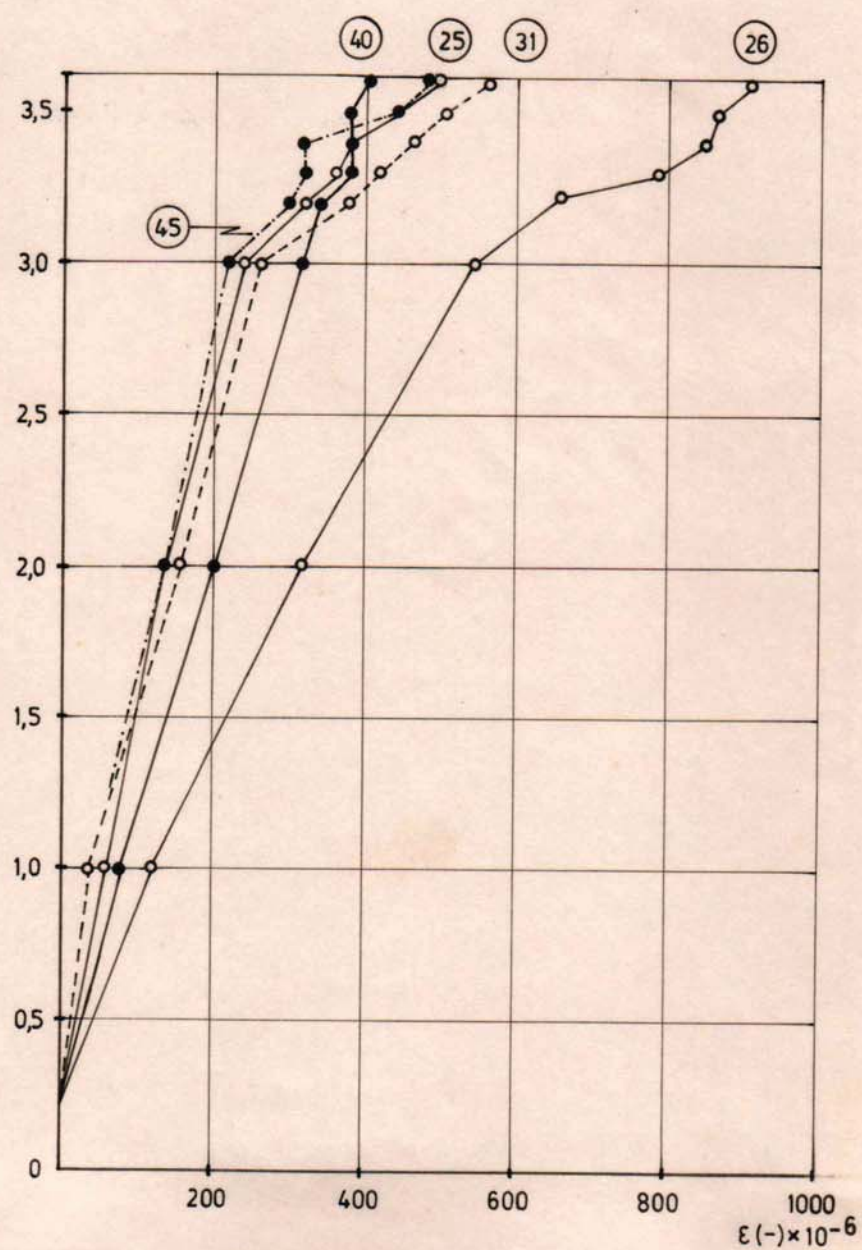


FIG. 39

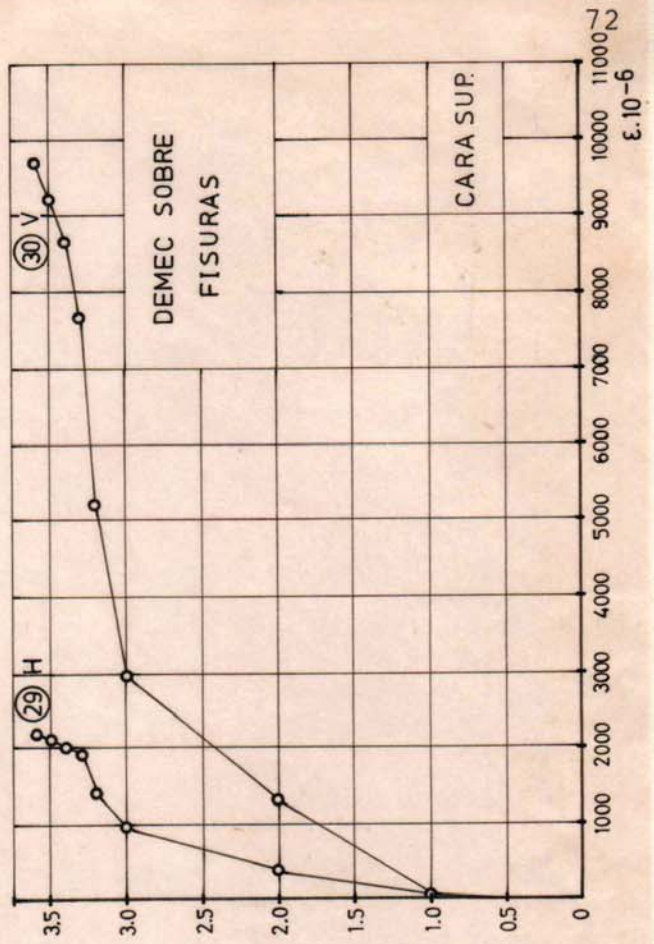
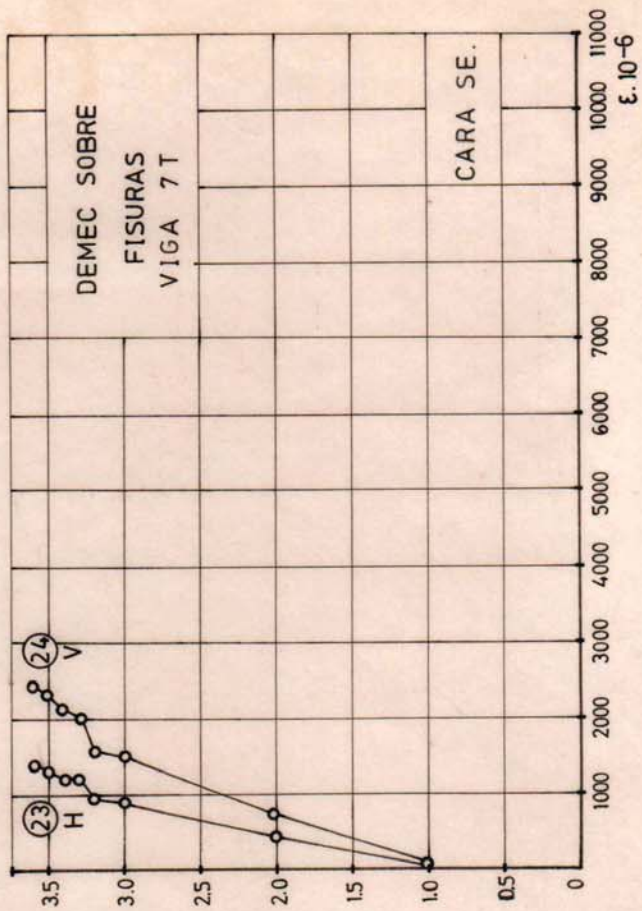
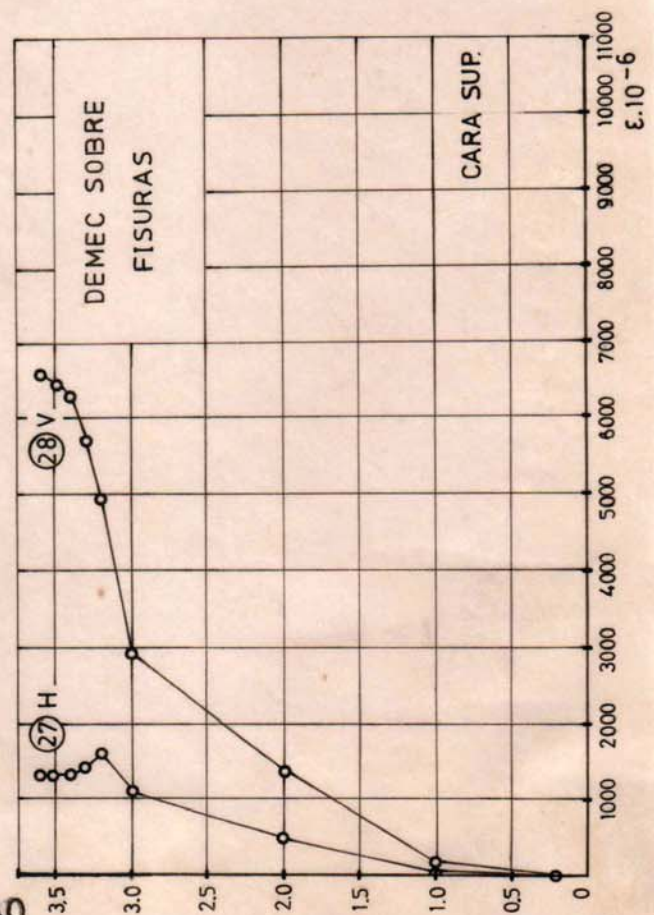
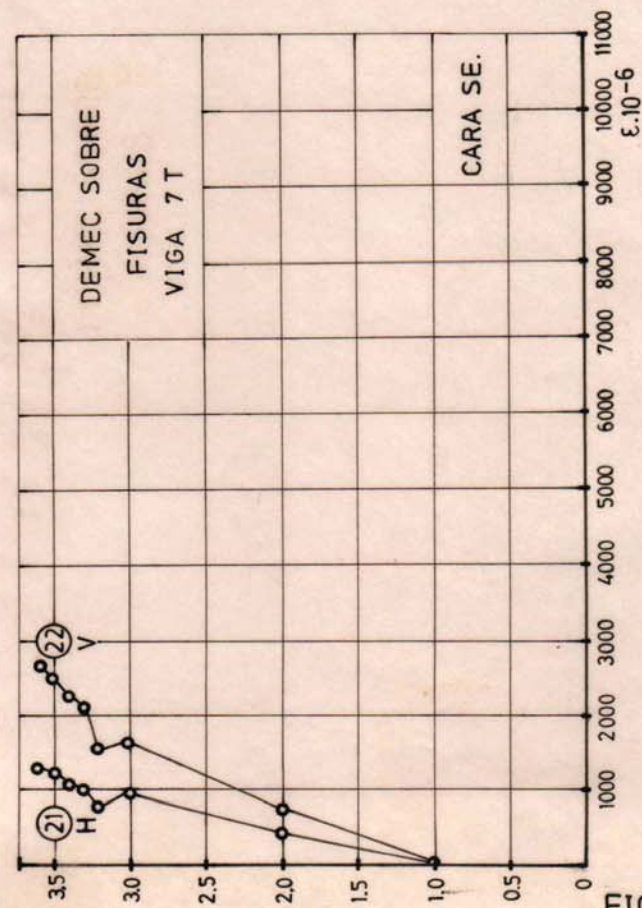


FIG.40

DEMEC SOBRE FISURAS (8 T)

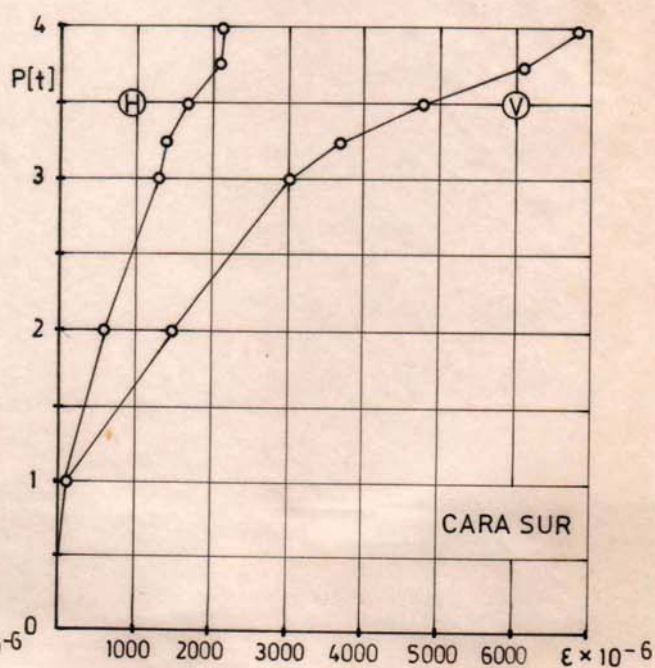
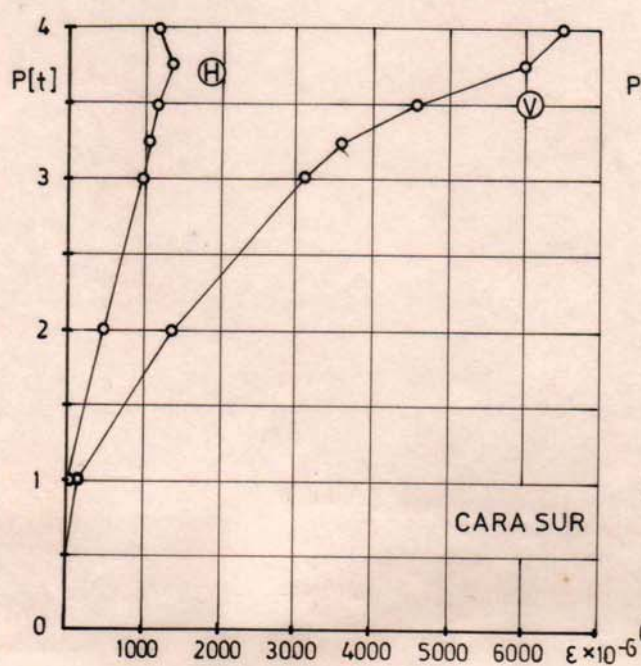
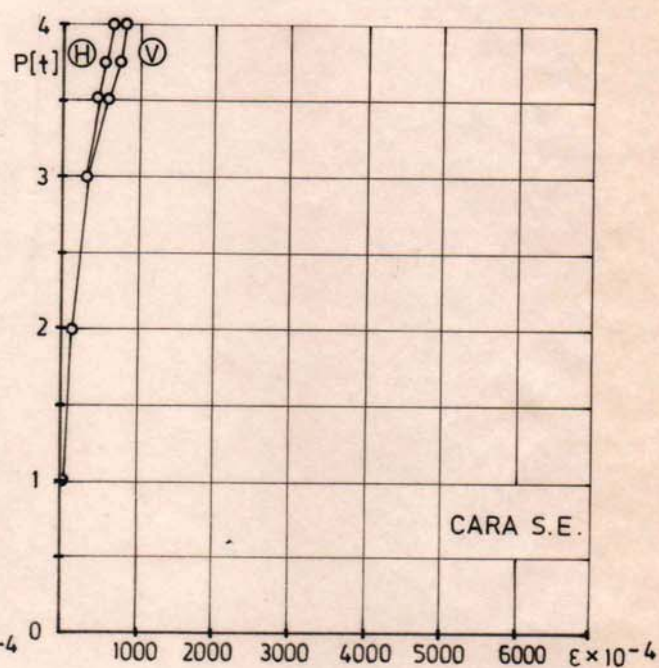
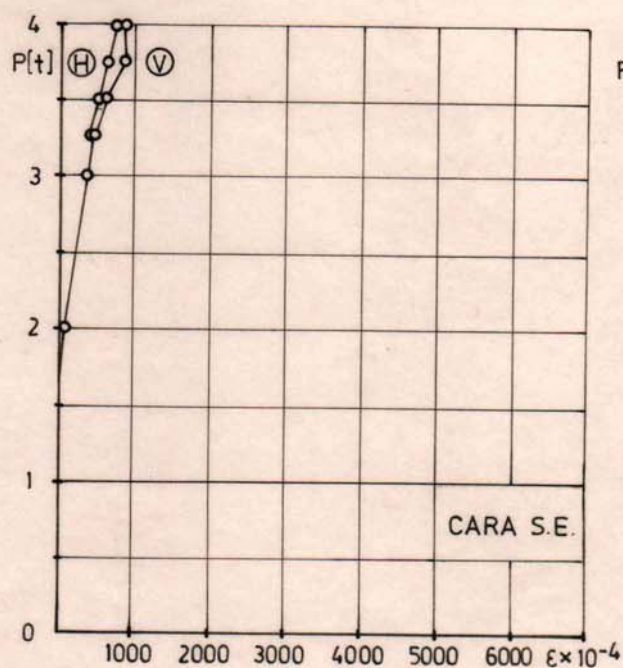
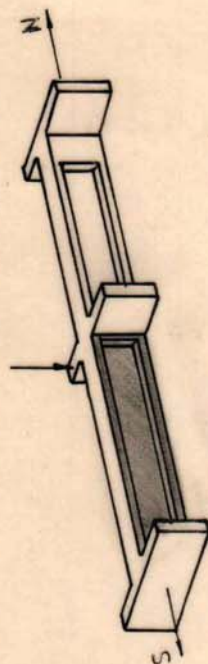


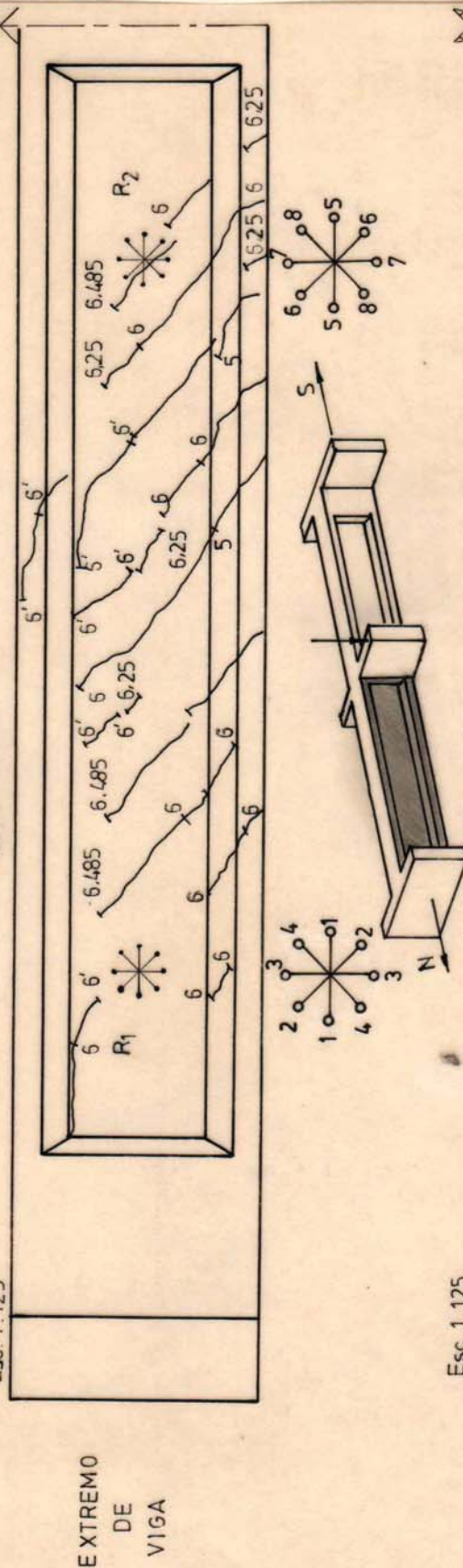
FIG. 41

FIG. 42 - UBICACION DE ROSETAS DE DEMEC. Y CUADRO DE FISURACION

VIGA N°1T



Esc. 1:125



Esc. 1:125

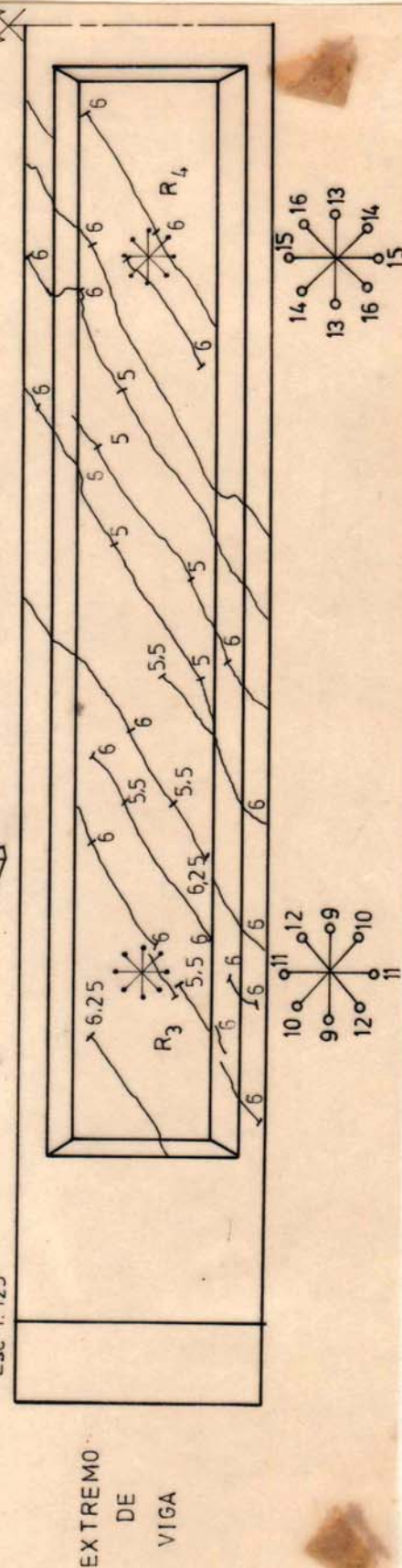
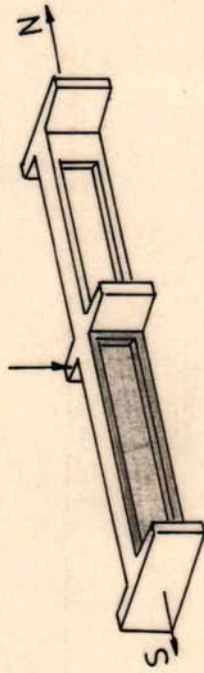
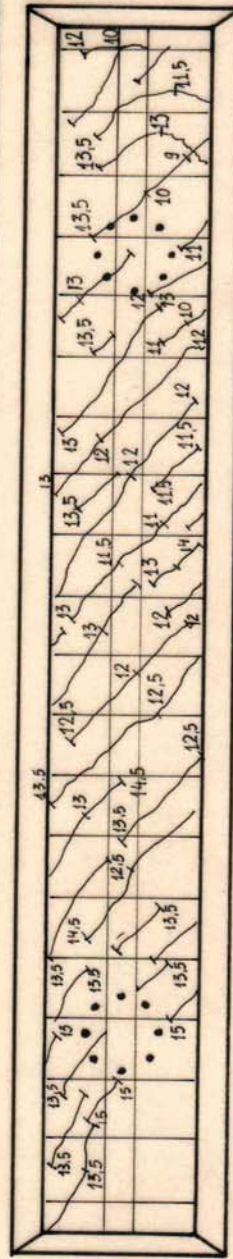


FIG.43 UBICACION DE ROSETAS DE DEMEC. Y CUADRO DE FISURACION

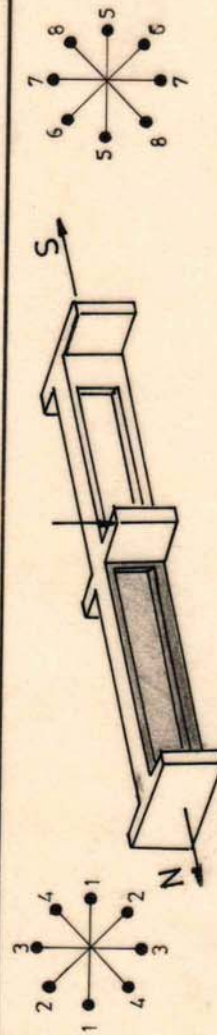
VIGA Nº 2T



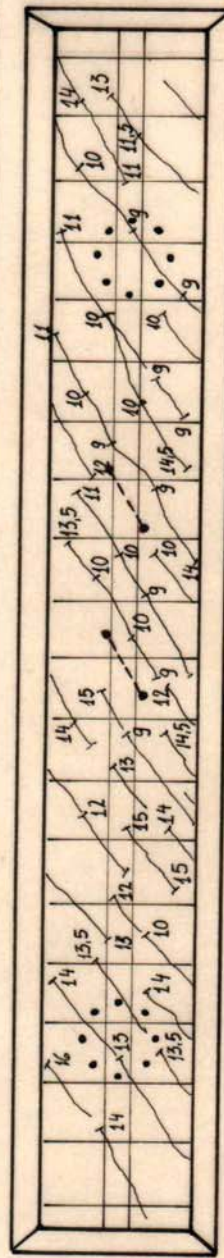
ESCALA 1-125



EXTREMO
DE
VIGA



ESCALA 1-125



EXTREMO
DE
VIGA

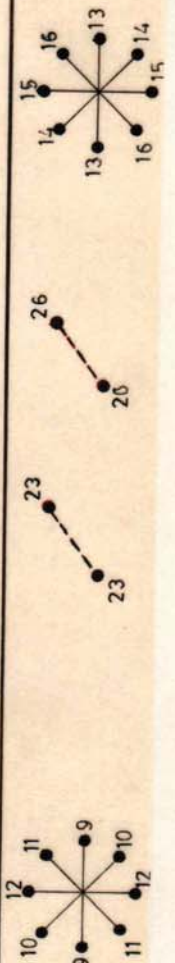
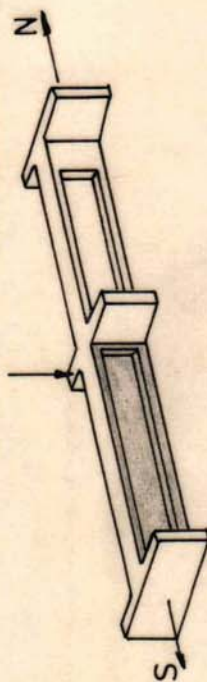
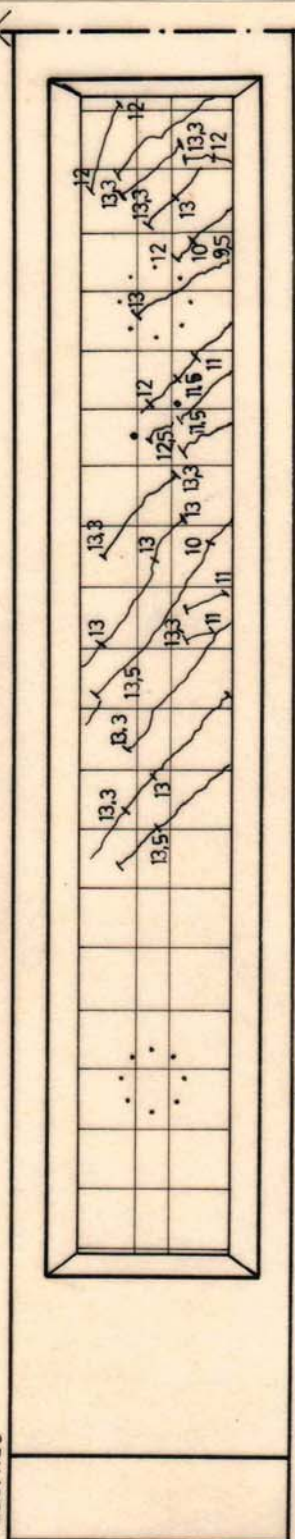


FIG. 44- UBICACION DE ROSETAS DE DEMEC Y CUADRO DE FISURACION

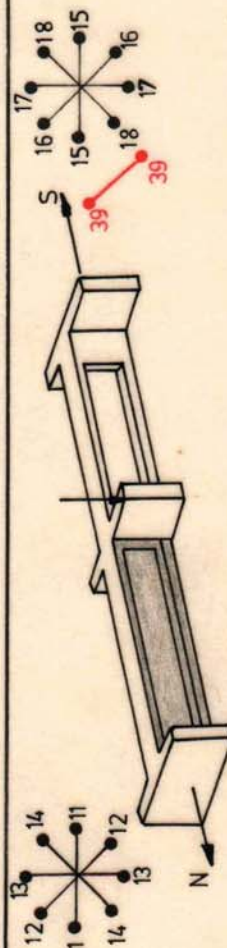
VIGA N°3T



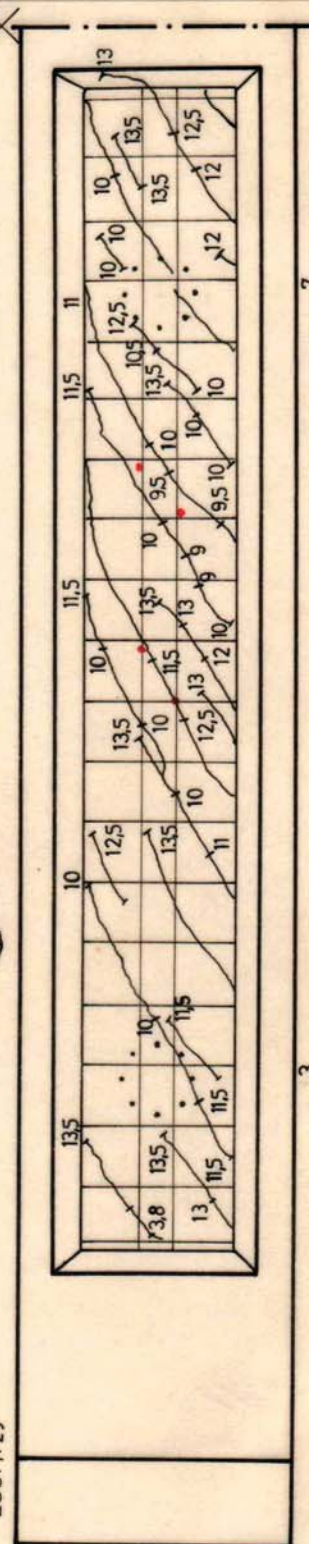
ESC. 1:25



EXTREMO
DE
VIGA



ESC. 1:25



EXTREMO
DE
VIGA

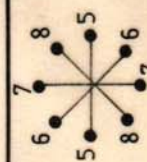
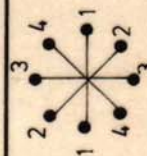
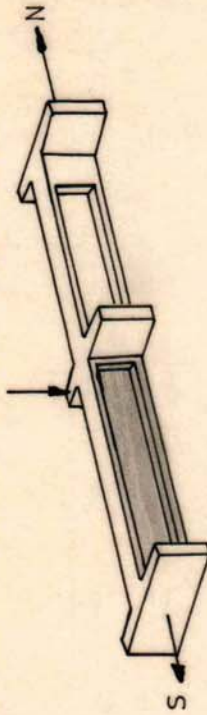


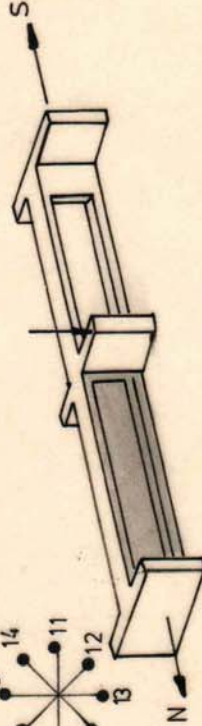
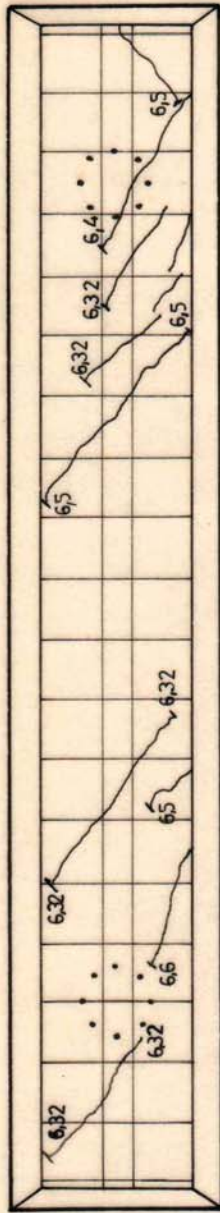
FIG.46- UBICACION DE ROSETAS DE DEMEC Y CUADRO DE FISURACION

VIGA Nº 5 T



ESC. 1:125

EXTREMO
DE
VIGA



ESC. 1:125

EXTREMO
DE
VIGA

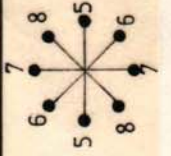
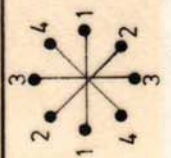
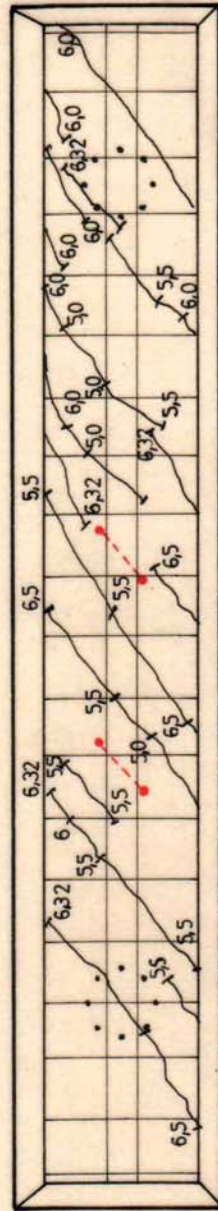
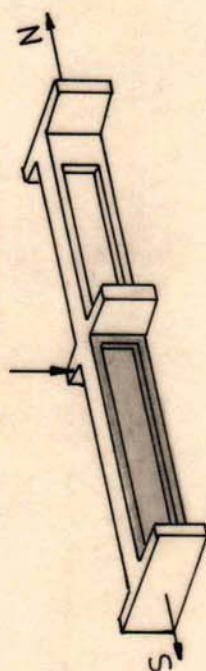
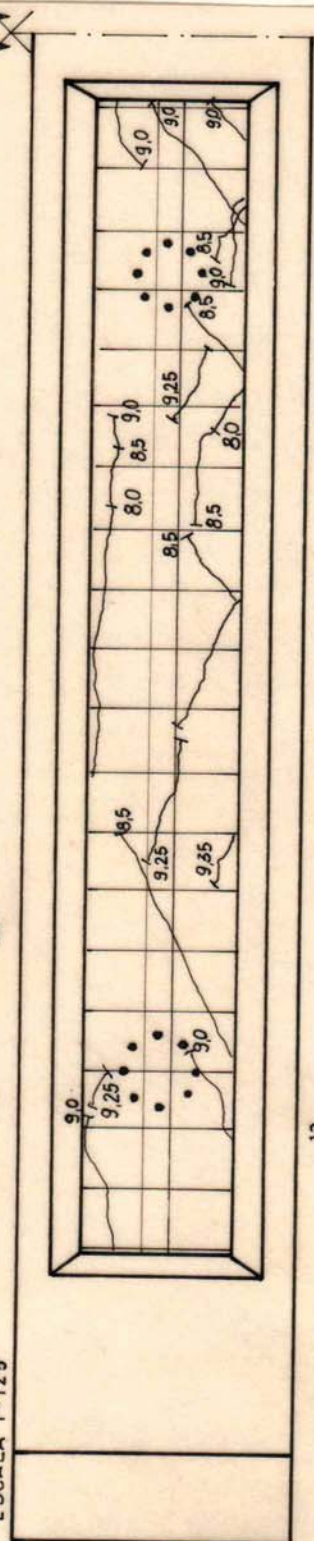


FIG.47 - UBICACION DE ROSETAS DE DEMEC. Y CUADRO DE FISURACION

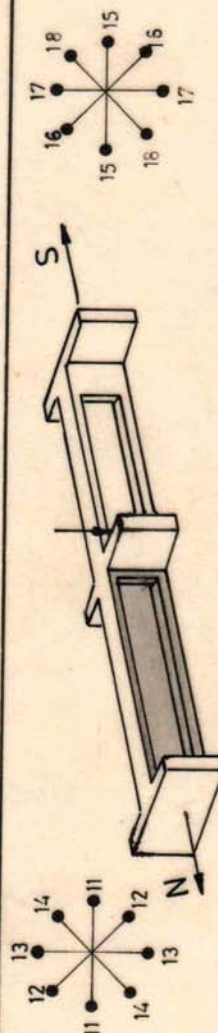


VIGA Nº 6T

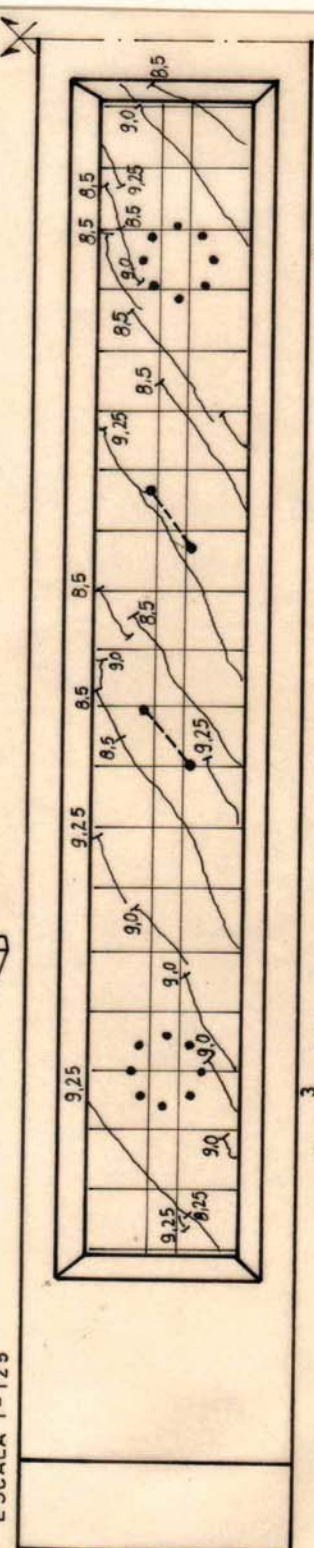
ESCALA 1-125



EXTREMO
DE
VIGA



ESCALA 1-125



EXTREMO
DE
VIGA

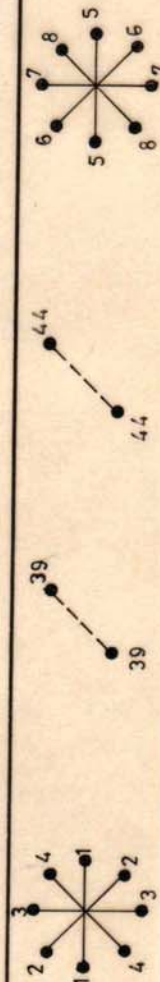


FIG. 48 UBICACION DE ROSETAS DE DEMEC Y CUADRO DE FISURACION

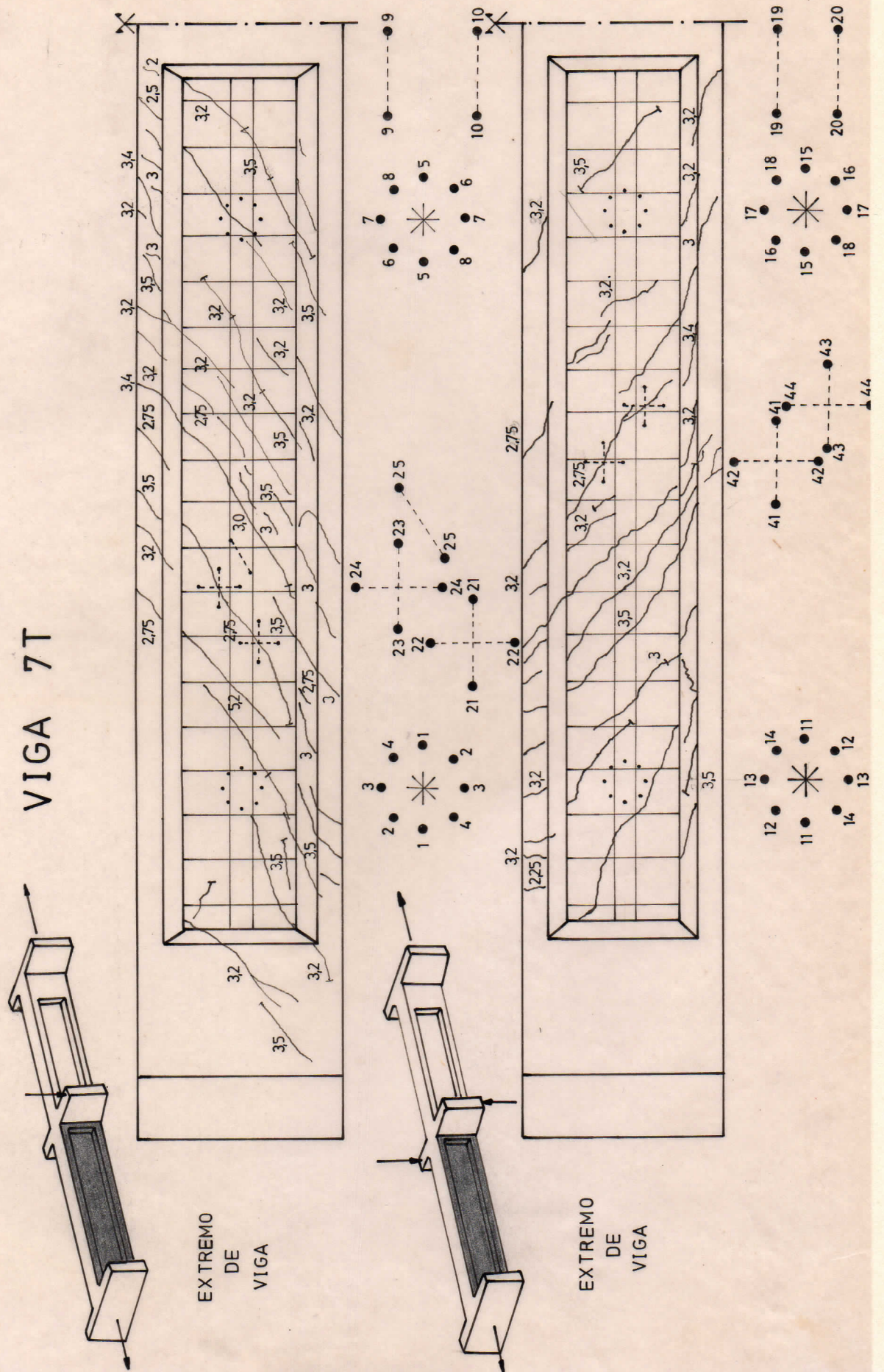
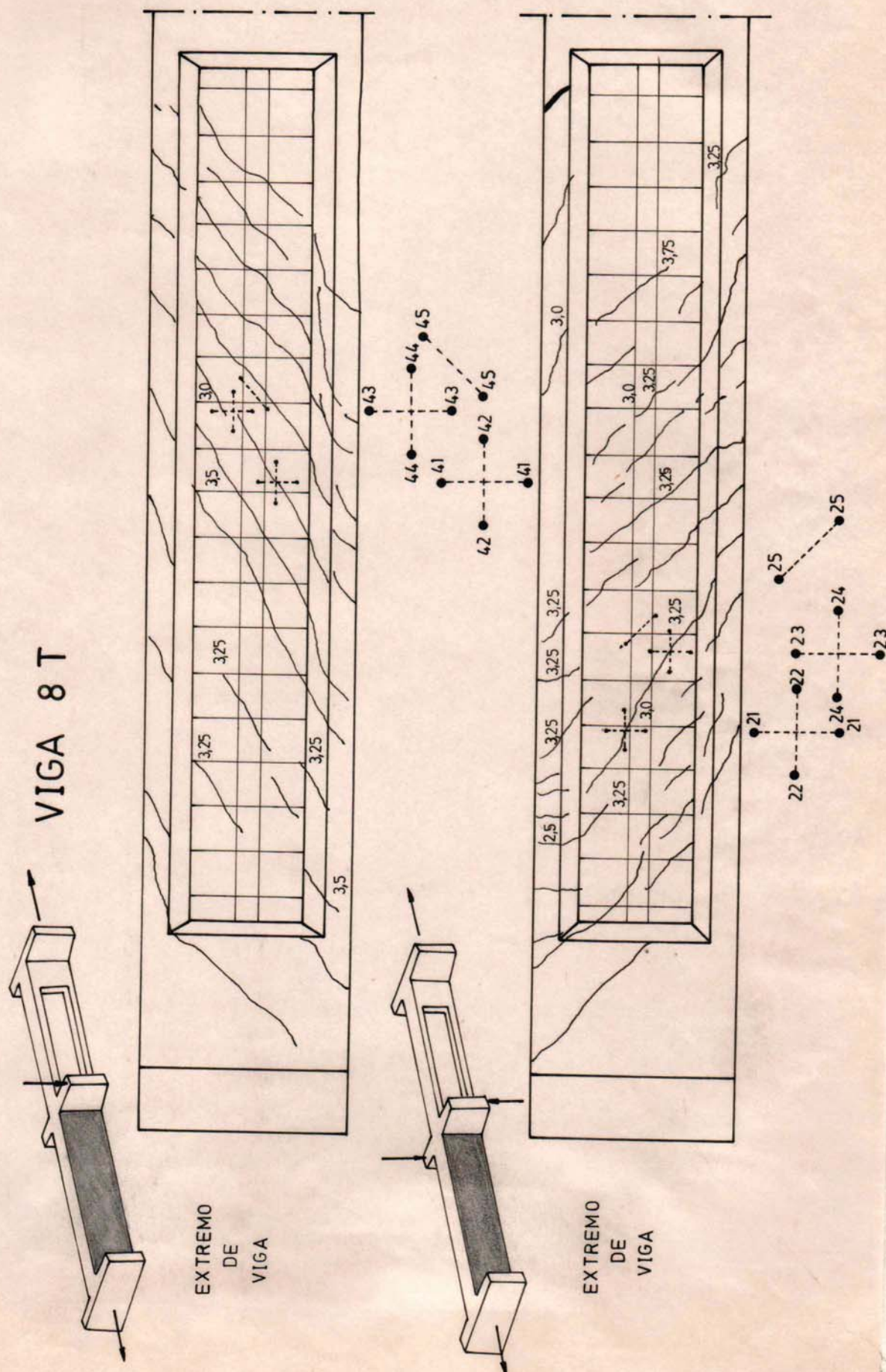
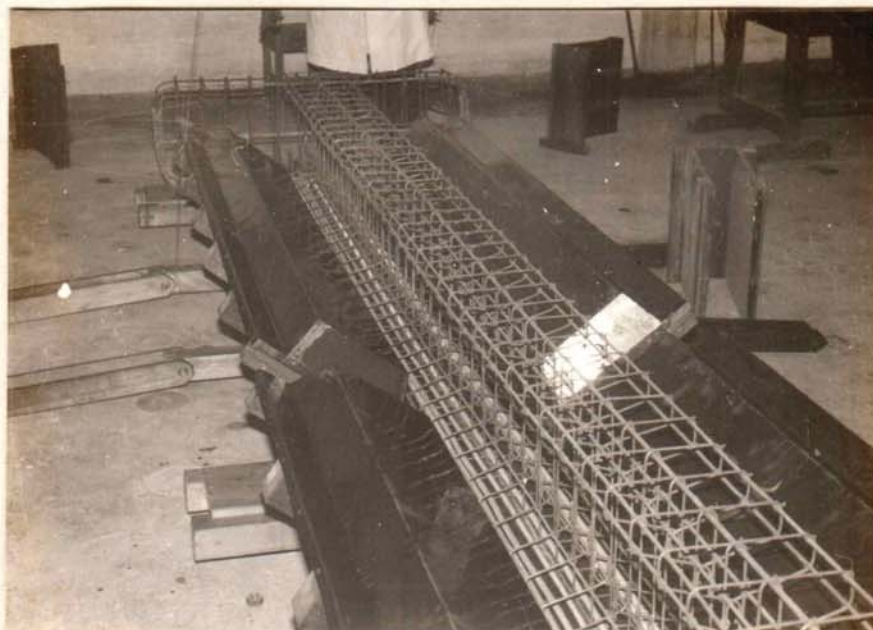


FIG. 49 UBICACION DE ROSETAS DE DEMEC Y CUADRO DE FISURACION

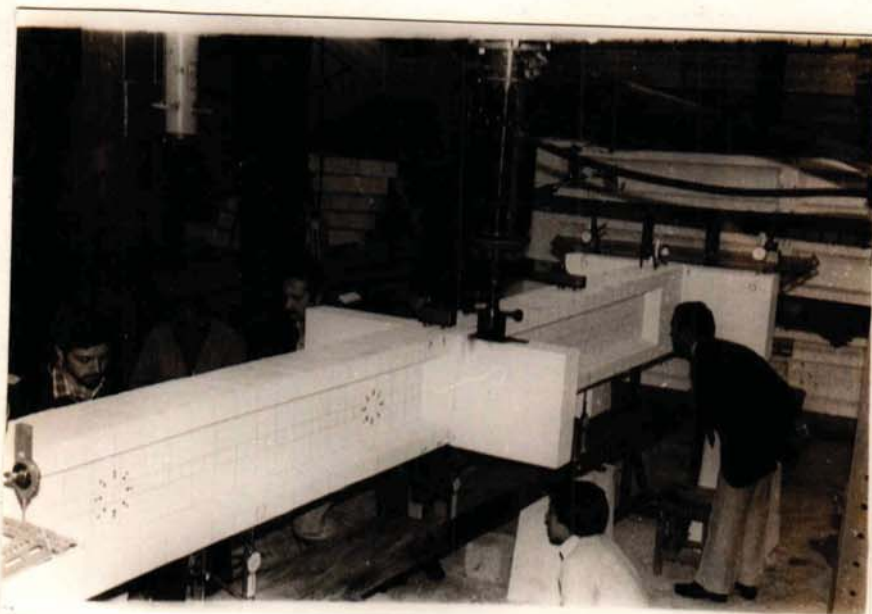




FOT. 1 DISPOSICION DE LA ARMADURA



FOT. 2 ENCOFRADO



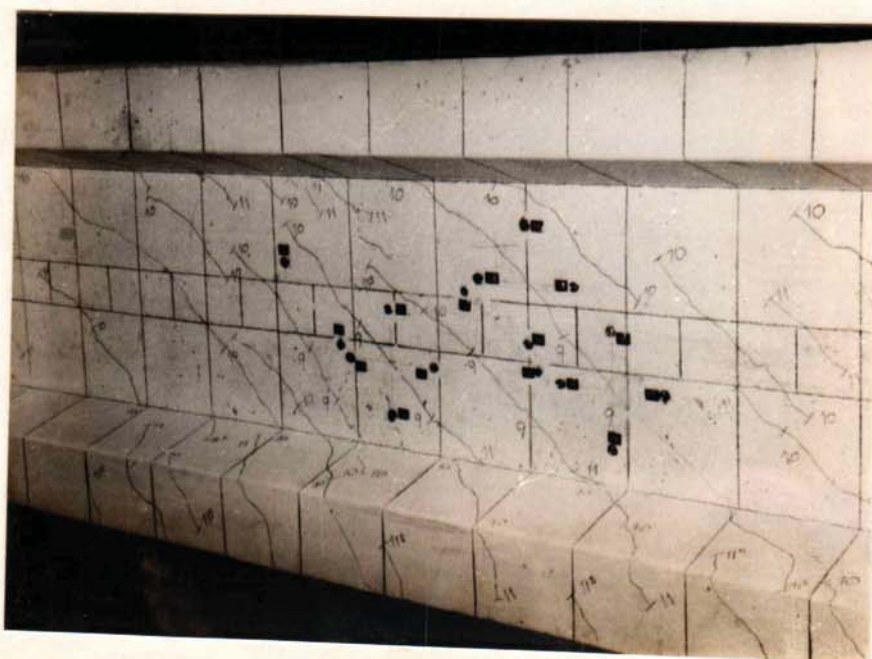
FOT. 3 ENSAYO A TORSION COMBINADA CON FLEXION Y CORTE



FOT. 4 ENSAYO A TORSION SIMPLE



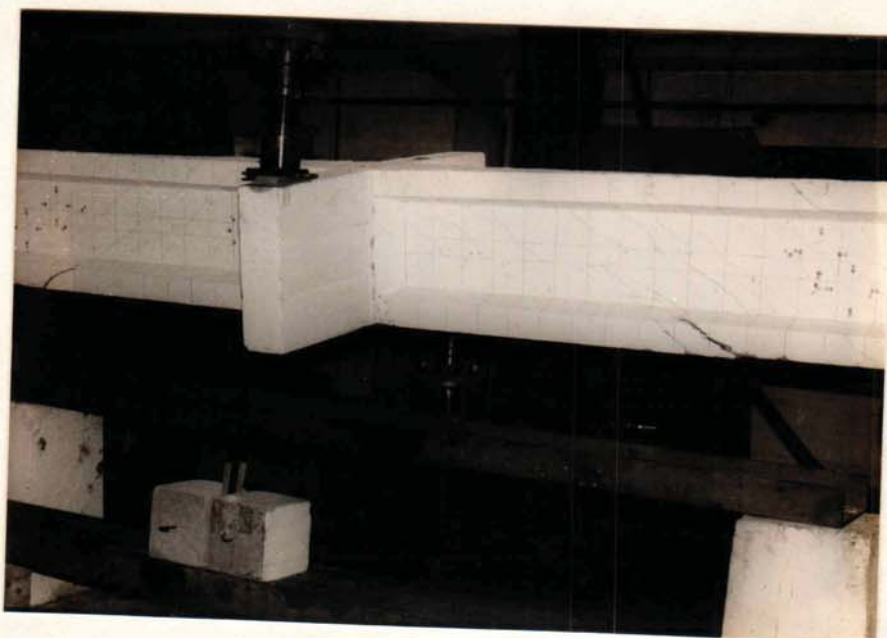
FOT. 5 DISPOSITIVO DE ANCLAJE



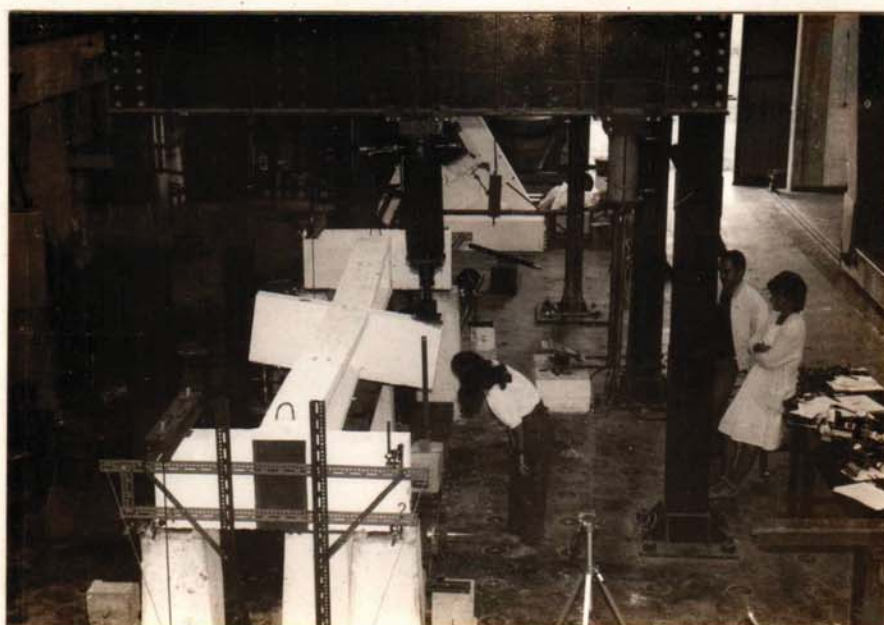
FOT. 6 FISURACION DIAGONAL



FOT. 7 ROTURA VIGA 1T



FOT. 8 ROTURA VIGA 7T



FOT. 9 ROTURA VIGA 7T

4. MODELOS TEORICOS DESARROLLADOS Y SU COMPARACION CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.1. COMPORTAMIENTO BAJO CARGA

4.1.1. INTRODUCCION

En este punto se presenta un análisis del comportamiento de vigas de hormigón pretensado de sección abierta y paredes delgadas tomando como punto de partida las hipótesis de la teoría de Vlasov.

Los resultados experimentales muestran que el comportamiento de las vigas puede dividirse en dos etapas: una etapa elástica hasta la carga de fisuración y una etapa marcadamente no lineal después de la misma. El estudio teórico de dicho comportamiento se divide también en esas dos etapas con la aclaración de que el análisis no lineal incluye como caso particular al análisis lineal. Se presenta en forma separada el análisis lineal porque su naturaleza simple permite visualizar algunos puntos importantes a tener en cuenta.

4.1.2. ANALISIS LINEAL

El análisis lineal consiste simplemente en la aplicación de la teoría elástica de torsión mixta (1) a la resolución del problema particular de las vigas ensayadas.

La solución general de la ecuación diferencial (2.27) es del tipo (2):

$$\vartheta = C1 + C2 \cdot z/l + C3 \cdot \sinh \beta z + C4 \cdot \cosh \beta z + \bar{\vartheta} \quad (4.1)$$

Donde:

l : Longitud de la viga.

$$\beta = \sqrt{G \cdot J / E \cdot J_{\Omega}} \quad (4.2)$$

$\bar{\phi}$: Solución particular de la ecuación diferencial (2.27)
(término de carga)

En el caso de un momento torsor concentrado aplicado
en el centro de la luz:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= 0 \quad , \text{ para } z < l/2 \\ \bar{\phi} &= (T \cdot l / G \cdot J) \cdot \left[(1/\beta \cdot l) \cdot \sinh \beta \cdot (z - l/2) - (z/l - 0,5) \right] \quad , \\ &\quad \text{para } z > l/2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes de integración.

El momento de inercia sectorial principal J_{Ω} se calcula de acuerdo a la expresión (2.28) para la sección de hormigón simple. En la sección estudiada el polo y el origen de las coordenadas sectoriales normalizadas (que cumplen con las condiciones (2.29)) coinciden con el centro de gravedad de la sección. Los valores obtenidos son los siguientes:

$$J_{\Omega} = 6,70 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \quad \text{para } b_0 = 5 \text{ cm}$$

$$J_{\Omega} = 7,36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \quad \text{para } b_0 = 8 \text{ cm}$$

La constante de torsión J de una sección compuesta por rectángulos se calcula aproximadamente mediante la expresión:

$$J = \sum_{i=1}^n b_i \cdot t_i^3 / 3 \quad (4.4)$$

La constante de torsión es igual al doble del volumen debajo de la superficie de la función de tensiones dividida en $G \cdot \theta'$. La forma de dicha superficie puede visualizarse mediante la analogía de la membrana de Prandtl (10). Lejos de los extremos de un rectángulo delgado, una sección transversal de esta superficie, perpendicular al borde, tiene forma parabólica. La ec. (4.4) sería exacta si esta forma se mantuviera en los extremos, pero no ocurre así. Por otro lado, en la unión entre varios rectángulos existe una discontinuidad en la función de tensiones que no está tomada en cuenta en la expresión (4.4).

Para el cálculo de la constante de torsión de la sección doble T ensayada se recurre a Ref. (2) en la que se presenta fórmulas para el cálculo de las constantes de torsión de secciones estructurales. Las mismas fueron obtenidas mediante la solución de la ecuación diferencial (2.10) y corroboradas experimentalmente.

Para el caso de la sección doble T, se tiene la siguiente expresión:

$$J = (b_j - w_j) \cdot (t_1 + t_2) \cdot (t_1^2 + t_2^2) / 6 + (2/3) \cdot w_j \cdot t_2^3 + (1/3) \cdot (d_j - 2 \cdot t_2) \cdot w_j^3 + 2 \cdot \alpha_2 \cdot D_2^4 - 4 \cdot V_s \cdot t_1^4 \quad (4.5)$$

Donde:

$$\alpha_2 = -0,0836 + 0,2536 \cdot w_j / t_2 + 0,1268 \cdot r_j / t_2 - 0,0806 \cdot w_j \cdot r_j / t_2^2 - 0,0858 \cdot (w_j / t_2)^2 \quad (4.6)$$

$$D_2 = [(F_j + t_3)^2 + w_j \cdot (r_j + w_j / 4)] / (F_j + r_j + t_3) \quad (4.7)$$

$$F_j = r_j \cdot S_j \cdot (\sqrt{1/S_j^2 + 1} - 1 - w_j/2r_j) \quad (4.8)$$

S_j : Pendiente de las alas

$$V_s = 0,10504 + 0,10000 \cdot S_j + 0,08480 \cdot S_j^2 + 0,06746 \cdot S_j^3 + 0,05153 \cdot S_j^4 \quad (4.9)$$

Las dimensiones $b_j, d_j, t_1, t_2, w_j, D_2$ y r_j se han indicado en fig. 50.

Se obtienen de esta forma los siguientes valores:

$$J = 1,78 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad \text{para } b_o = 8 \text{ cm}$$

$$J = 1,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad \text{para } b_o = 5 \text{ cm}$$

4.1.2.1. CONDICIONES DE BORDE

Para el cálculo de las constantes de integración se plantean las condiciones de borde. En los ensayos se intentó materializar empotramientos perfectos en los apoyos (giros y alabeo totalmente impedidos).

Sin embargo, los resultados muestran una cierta tendencia al alabeo y giro de los diafragmas extremos. Se debe evaluar en qué medida dichos movimientos invalidan las condiciones de alabeo y giro totalmente impedidos y afectan el comportamiento general de las vigas. Para ello se encuentra primero la solución elástica del problema para alabeo y giro totalmente impedidos y luego para las condiciones reales de apoyo.

1) Alabeo y Giro Totalmente Impedidos

Condiciones de borde:

a) $\phi(z=0) = 0$

b) $\phi(z=1) = 0$

c) $\phi'(z=0) = 0$

d) $\phi'(z=1) = 0$

La solución de la ecuación diferencial conduce a la siguiente tabla de valores para las vigas de 5 cm de ancho de alma:

TABLA V

! Z/l !	! (G.J/T.l). ϕ !	! Ts / T !	! Tw / T !
! 0,00 !	! 0,0000 !	! 0,0000 !	! 0,5000 !
! 0,10 !	! 0,0233 !	! 0,3780 !	! 0,1220 !
! 0,25 !	! 0,0899 !	! 0,4716 !	! 0,0284 !
! 0,40 !	! 0,1566 !	! 0,3780 !	! 0,1220 !
! 0,50 !	! 0,1799 !	! 0,0000 !	! 0,5000 !

2) Alabeo y giro parcialmente impedidos

En este caso, como se dispone de ciertos valores del alabeo y del giro y no de una expresión que relacione los mismos con la carga aplicada, sólo puede encontrarse la solución de la ecuación diferencial (2.27) para cada estado de carga.

Como punto de análisis se elige el último escalón de carga antes de fisuración. Suponiendo un comportamiento simétrico de la viga las condiciones de apoyo son:

a) $\phi(z=0) = \phi_0$

b) $\phi(z=1) = \phi_0$

c) $\phi'(z=0) = \phi'_0$

d) $\phi'(z=1) = -\phi'_0$

ϕ_0 es el promedio de los giros registrados en los apoyos:

$$\phi_0 = 4,5 \cdot 10^{-4}$$

ϕ'_0 es la derivada del giro en los extremos y puede obtenerse a partir de los desplazamientos axiales de las secciones extremas, utilizando la ecuación (2.20). Resulta:

$$\phi'_0 = 150 \text{ 1/m}$$

La solución de la ecuación diferencial (2.27) para estas particulares condiciones de borde conduce a los siguientes resultados:

TABLA VI

! Z/l !	! (G.J/T.l). ϕ'_0 !	! Ts / T !	! Tw / T !
! 0,00 !	! 0,0082 !	! 0,0003 !	! 0,4997 !
! 0,10 !	! 0,0315 !	! 0,3781 !	! 0,1219 !
! 0,25 !	! 0,0982 !	! 0,4716 !	! 0,0284 !
! 0,40 !	! 0,1647 !	! 0,3780 !	! 0,1220 !
! 0,50 !	! 0,1881 !	! 0,0000 !	! 0,5000 !

De los resultados se concluye, que si bien hay un pequeño movimiento de los apoyos, éste no influye en el comportamiento general de las vigas.

4.1.2.2. RESULTADOS OBTENIDOS CON LA TEORIA ELASTICA

La solución del problema elástico conduce a deformaciones y giros que varían linealmente con la carga aplicada. Para el caso de flexo-torsión se puede recurrir al principio de superposición.

Los resultados obtenidos reproducen acertadamente el comportamiento de las vigas ensayadas hasta cargas algunas veces superiores a la de fisuración. Las rectas obtenidas se han representado en superposición con los resultados experimentales para su

comparación en figs. 19 a 23 y 30 a 36 del Capítulo 3, y se presentarán nuevamente más adelante para ser comparadas con los resultados arrojados por el análisis no lineal.

4.1.2.3. CARGA DE FISURACION

Otro punto que merece atención y que puede ser estudiado mediante la teoría elástica es la definición de la carga de fisuración.

En las vigas estudiadas la fisuración puede producirse cuando la tensión normal en los extremos de las alas alcanza la resistencia a tracción por flexión del hormigón (fisuración por flexión) o porque la tensión principal en el alma o en las alas alcanza dicha resistencia (fisuración por corte).

La resistencia a tracción por flexión del hormigón puede evaluarse a través del concepto de módulo de ruptura (76):

$$\beta_{bz} = 0,859 \cdot \sqrt{f'c} \quad (\pm 25\%) \quad (4.10)$$

Donde:

$f'c$: Resistencia cilíndrica a la compresión del hormigón (MPa)

β_{bz} : Módulo de ruptura del hormigón (MPa)

La expresión general para el cálculo de la carga de fisuración es entonces:

$$\sigma/2 + \sqrt{\sigma^2/4 + \tau^2} = \beta_{bz} \quad (4.11)$$

Donde:

σ : Tensión normal

τ : Tensión tangencial

Se analizan dos puntos críticos:

- 1) Fisuración por flexión: Ocurre en las secciones extremas y la sección central, en los bordes de las alas, y, en el caso de las vigas estudiadas, es más importante en el caso de torsión simple.
- 2) Fisuración por corte: Ocurre en los cuartos de la luz en el alma o en el ala superior, de acuerdo a la importancia del momento flector. Aparece como consecuencia de las tensiones tangenciales por torsión circulatoria, ya que la torsión alabeal es prácticamente nula en esos puntos (ver Tabla V)

Los resultados obtenidos para las cargas de fisuración de las 8 vigas ensayadas y su comparación con los experimentales son los siguientes:

TABLA VII

!Viga!	Pt	! Pt/Pex !
! !	(KN)	! !
! 1T !	44,0	! 0,98 !
! 2T !	65,5	! 0,93 !
! 3T !	62,8	! 1,25 !
! 4T !	45,3	! 0,90 !
! 5T !	40,1	! 0,84 !
! 6T !	57,9	! 0,90 !
! 7T !	18,1	! 0,80 !
! 8T !	21,0	! 0,93 !

En general se observa que los valores experimentales son mayores que los teóricos. Aparentemente la resistencia a tracción del hormigón utilizado es mayor que la que predice la fórmula empírica empleada.

Este es un punto importante, en futuras investigaciones debe prestarse especial atención al estudio del comportamiento de los materiales.

4.1.3. ANALISIS NO LINEAL

4.1.3.1. INTRODUCCION

La no linealidad en el comportamiento de vigas de hormigón pretensado sometidas a torsión proviene principalmente de la no linealidad de la curva tensión-deformación del hormigón y del fenómeno de fisuración que experimenta el mismo bajo tensiones de tracción. Una vez fisurada, la sección de hormigón se modifica, no puede transmitir tensiones de tracción y el mecanismo de transmisión de tensiones tangenciales es también distinto.

En un primer intento se trató de modelar el comportamiento no lineal considerando que el hormigón y el acero se comportaban elásticamente con la única variante respecto a la teoría elástica que el hormigón no resistía tensiones de tracción. Dicha simplificación permitía usar el principio de superposición para tener en cuenta el efecto del pretensado que se introducía como una fuerza exterior constante.

El procedimiento consistía en eliminar las partes de la sección que estuvieran traccionadas y encontrar las posiciones de los puntos de tensión o deformación nula a partir de tres ecuaciones de equilibrio ($N=0$, $M_x=0$ y $M_y=0$). La solución de ese problema no quedaba determinada y se obtenían valores de las posiciones mencionadas, por ejemplo, en función de la tensión en uno de los extremos de las alas. Por otro lado, en el caso mas general, la solución se hallaba a partir de la resolución de una ecuación algebraica de séptimo grado y las simplificaciones introducidas hacían que la misma no tuviera solución coherente en algunos casos.

El planteo que se presenta a continuación es más general y no ofrece ese tipo de problemas.

4.1.3.2. HIPOTESIS

1. El hormigón no colabora en la resistencia de esfuerzos de tracción.
2. Se adoptan para el hormigón y el acero los diagramas tensión-deformación convencionales que se han representado en fig.51.
3. Se supone adherencia perfecta entre acero y hormigón.
4. Las deformaciones en la armadura de pretensado se obtienen sumando la deformación relativa inicial a la del hormigón. Esta diferencia de deformación se mantiene constante durante toda la historia de carga (88) y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\xi_o = \xi_{eo} - \xi_{bo} \quad (4.12)$$

Donde:

ξ_{eo} : Deformación inicial de las barras de pretensado

ξ_{bo} : Deformación inicial del hormigón

5. Se desprecian las pérdidas en el esfuerzo de pretensado durante la historia de carga.
6. No se tiene en cuenta la interacción entre la torsión alabeal y la torsión circulatoria en lo que hace a la degradación de las rigideces correspondientes.
7. El problema no lineal se estudia como una sucesión de problemas lineales usando el concepto de módulo de elasticidad secante (3). Cualquier curva tensión-deformación puede ser expresada en la forma:

$$\sigma = k_{sec}(\xi) \cdot \xi \quad (4.13)$$

Donde:

σ : Tensión

K_{sec} : Módulo de elasticidad secante

ϵ : Deformación específica

Mediante este módulo secante cada porción de hormigón o área de armadura puede ser transformada en un área equivalente de hormigón con un módulo de elasticidad igual al módulo de elasticidad tangente al origen del hormigón. En el tipo de secciones estudiadas esa reducción de áreas puede imaginarse como una reducción del espesor (77).

Sobre la sección ideal obtenida de esta forma se calculan las rigideces. La solución del problema se encuentra entonces mediante un proceso iterativo en el que, en cada iteración, se resuelve un problema lineal con una sección distinta a la de la iteración anterior.

8. Se supone válida la teoría de Vlasov en cada iteración.

4.1.3.3. ANALISIS SECCIONAL

Para no recurrir al principio de superposición, que no es válido cuando el comportamiento es no lineal, es conveniente, en el caso de hormigón pretensado, trabajar con un planteo similar al usado en el cálculo a flexión de elementos de hormigón pretensado. Se supone un estado de deformación para la sección que respete, en este caso, las hipótesis cinemáticas de la teoría de Vlasov (1) y, teniendo en cuenta la hipótesis 4 del punto 4.1.3.2., se calculan las solicitaciones mediante ecuaciones de equilibrio.

4.1.3.3.1. FORMULACION MATRICIAL

Para el análisis no lineal, resulta apropiado expresar la teoría de Vlasov en forma matricial. Se definen entonces los si-

guientes vectores:

$$\tilde{D} = \begin{Bmatrix} W' \\ -U'' \\ -V'' \\ -\phi'' \end{Bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{Bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

La ecuación (2.23) puede ser expresada entonces como:

$$\xi_z(s, z) = \tilde{B}^T(s) \cdot \tilde{D}(z) \quad (4.15)$$

Para una sección $z = \text{constante}$, en lugar de definir las deformaciones a partir de los desplazamientos, se pueden usar como datos las deformaciones de cuatro puntos de la sección:

$$\xi_z(s) = \tilde{B}^T(s) \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{E} \quad (4.16)$$

Donde:

$$\tilde{C} = \begin{Bmatrix} \tilde{B}_1^T \\ \tilde{B}_2^T \\ \tilde{B}_3^T \\ \tilde{B}_4^T \end{Bmatrix} \quad \tilde{E} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{z1} \\ \epsilon_{z2} \\ \epsilon_{z3} \\ \epsilon_{z4} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Los puntos 1, 2, 3 y 4 son cuatro puntos arbitrarios de la sección pero tales que:

$$\text{Det}(\tilde{C}) \neq 0 \quad (4.18)$$

Se puede demostrar que la condición (4.18) no se cumple, si, por ejemplo, tres o más de los cuatro puntos están alineados.

La elección de las deformaciones de puntos característicos de la sección como grados de libertad generalizados resulta útil cuando se desea hacer verificaciones de resultados experimentales. En dicho caso, se eligen los puntos 1, 2, 3 y 4 en coincidencia con los puntos de medición siempre que se cumpla la condición (4.18).

La tensión en la dirección axial se calcula con la siguiente expresión:

$$\sigma_z(s) = K \sec(\mathcal{E}(s)) \cdot \tilde{B}^T(s) \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{E} \quad (4.19)$$

La tensión en la armadura i resulta:

$$\sigma_{zi} = K \sec(\mathcal{E}(s_i) + \mathcal{E}_{oi}) \cdot (\tilde{B}^T(s_i) \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{E} + \mathcal{E}_{oi}) \quad (4.20)$$

4.1.3.3.2. EQUILIBRIO SECCIONAL

A través del principio de trabajos virtuales o de la minimización de la energía de deformación se puede hallar las siguientes fuerzas de barras (12), resultantes de tensiones en la sección transversal:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \cdot dA \\ M_y &= - \int_A \sigma \cdot x \cdot dA \\ M_x &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \\ M_w &= \int_A \sigma \cdot \omega \cdot dA \end{aligned} \quad (4.21)$$

Donde M_w es el bimomento alabeal

Se define entonces un vector de sollicitaciones:

$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} N \\ -My \\ Mx \\ M_w \end{Bmatrix} \quad \text{Ver fig. 52} \quad (4.22)$$

De acuerdo a las expresiones (4.21), este vector se puede obtener como:

$$\tilde{F} = \int_A \tilde{B} \cdot \tilde{\sigma}_z \cdot dA + \sum_{i=1}^n \tilde{B} \cdot \tilde{\sigma}_{zi} \cdot a_i + \sum_{i=1}^n \tilde{B} \cdot K \sec(\epsilon(s_i) + \epsilon_{oi}) \cdot \epsilon_{oi} \cdot a_i \quad (4.23)$$

Donde:

n : Número de barras longitudinales en la sección.

ϵ_{oi} : Deformación inicial en la armadura i

a_i : Area de la armadura i .

Desarrollando se llega a una expresión del tipo:

$$\tilde{F}(\tilde{E}) = \tilde{A}(\tilde{E}) \cdot \tilde{E} + \tilde{F}_o(\tilde{E}) \quad (4.24)$$

Donde:

$$\tilde{A} = \int_{\text{Contorno}} K \sec(\epsilon(s)) \cdot \tilde{B}(s) \cdot \tilde{B}^T(s) \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot t(s) \cdot ds + \sum_{i=1}^n K \sec(\epsilon(s_i) + \epsilon_{oi}) \cdot \tilde{B}(s_i) \cdot \tilde{B}^T(s_i) \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot a_i \quad (4.25)$$

$t(s)$: Espesor de la sección

$\tilde{F}_o$: Vector que representa el aporte de las deformaciones iniciales a las sollicitaciones componentes del vector $\tilde{F}$.

$$\tilde{F}_0 = \sum_{i=1}^n K_{sec}(\mathcal{E}(s_i) + \mathcal{E}_{oi}) \cdot \tilde{B}(s_i) \cdot \mathcal{E}_{oi} \cdot a_i \quad (4.26)$$

El problema se reduce ahora a encontrar el vector de deformaciones $\tilde{E}$ para un estado arbitrario de solicitaciones a partir de la ecuación (4.24).

En dicha ecuación la matriz $\tilde{A}$ y el vector $\tilde{F}_0$ son funciones del vector $\tilde{E}$. Para resolverla se usa un método mixto: incremental e iterativo.

Se divide primero la carga (vector de solicitaciones) en intervalos y se va aplicando la misma por partes, en forma creciente. Para cada escalón de carga se encuentra el vector de deformaciones mediante el método de Newton Raphson modificado. Se obtiene de esta forma la respuesta durante toda la historia de carga.

Para aplicar el método de Newton Raphson, se supone que el vector $\tilde{F}_0$ es independiente del vector $\tilde{E}$, lo cual se cumple mientras la tensión en la armadura tesa no alcance la tensión de fluencia. Esta simplificación se realiza sólo a los fines de facilitar la obtención de la matriz tangente. La solución del problema sí tiene en cuenta la variabilidad del vector $\tilde{F}_0$.

El vector $\tilde{E}$ en la iteración i se calcula entonces como:

$$\tilde{E}_i = \Delta \tilde{E}_i + \tilde{E}_{i-1} \quad (4.27)$$

$$\Delta \tilde{E}_i = (\tilde{A}_{\tau}^j)^{-1} \cdot (\tilde{F} - \tilde{A}(\tilde{E}_{i-1}) \cdot \tilde{E}_{i-1} - \tilde{F}_0(\tilde{E}_{i-1})) \quad (4.28)$$

Donde:

$\tilde{A}_{\tau}^j$: Es aproximadamente la matriz tangente en el comienzo de la etapa de carga j .

$$\underline{dF} = \underline{A}_T \cdot \underline{dE} \quad (4.29)$$

$$\underline{A}_T(k, l) = - \partial F_k / \partial E_l \quad (4.30)$$

$$\underline{A}_T = \int_C K_t(\xi(s)) \cdot \underline{B}(s) \cdot \underline{B}^T(s) \cdot \underline{C}^{-1} \cdot t(s) \cdot dS + \sum_{i=1}^n K_t(\xi(s_i)) \cdot \underline{B}(s_i) \cdot \underline{B}^T(s_i) \cdot \underline{C}^{-1} \cdot a_i \quad (4.31)$$

Donde:

$$K_t(\xi) = \bar{\alpha}(\sigma) / \bar{\alpha}\epsilon \quad (4.32)$$

Se calcula entonces el vector de deformaciones mediante la expresión (4.27), hasta lograr convergencia. Puede usarse como medida de la convergencia la norma Euclidiana del vector. Esto es:

$$d_i = ||\Delta \underline{E}_i|| / ||\underline{E}_i|| \quad (4.33)$$

Donde:

d_i : Error en la iteración i

$$||\underline{E}_i|| = \underline{E}_i^T \cdot \underline{E}_i \quad (4.34)$$

Con estas ideas se desarrolló un programa de computación que permite encontrar las deformaciones para un estado cualquiera de solicitaciones en una sección doble T de hormigón armado o pretensado. El programa permite variar las dimensiones de las alas y del alma. La armadura puede localizarse en forma arbitraria y tener las deformaciones iniciales que se desee. Los parámetros que definen el comportamiento de los materiales también pueden ser fi-

jados en cada caso particular. Para la extensión del programa a secciones de forma cualquiera se debe utilizar los conceptos verificados en ecs. (4.14) a (4.18) y elegir adecuadamente los puntos de referencia.

El programa desarrollado calcula los coeficientes de la matriz $\tilde{A}$ sumando la contribución de cada uno de los elementos de la sección que se evalúa mediante integración numérica con un punto de Gauss.

Como primera medida se utiliza este programa para la verificación de las deformaciones normales en los extremos de las alas de la sección central de las vigas ensayadas a torsión (7T y 8T). Se considera que en esta sección el comportamiento debe responder aproximadamente al descripto ya que la influencia de la torsión de Saint Venant es nula. Como puntos de referencia se eligen los extremos de las alas que son justamente los puntos en que se midieron deformaciones específicas. El programa permite obtener entonces el vector de deformaciones $\tilde{E}$ para cualquier valor del vector de solicitaciones $\tilde{F}$ que en este caso tiene la forma:

$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_w \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

A través del vector $\tilde{E}$ queda definido el estado de deformación de la sección, ec.(4.16).

Durante la corrida el programa muestra la conveniencia de trabajar con intervalos de carga para reducir el número de iteraciones, sobre todo cuando se alcanzan deformaciones elevadas en algunas zonas de la sección.

Como no se conocen los valores de bimomento en la sección central en función de la carga, la única forma de comparación posible con los resultados experimentales es graficar las deformaciones en función de una de ellas elegida como parámetro. En las figs. 53 y 54 se representan los resultados obtenidos para las vigas 7T y 8T en función de ξ_1 . Se han dibujado también las rectas correspondientes al comportamiento elástico y los puntos obtenidos experimentalmente durante la primera y segunda etapa de los ensayos.

Puede observarse que se reproduce bastante bien la tendencia de las deformaciones. Al comienzo la curva correspondiente al análisis no lineal coincide prácticamente con la recta elástica. En el caso de la deformación ξ_2 , que es una extensión, debe notarse que los registros experimentales incluyen la deformación localizada correspondiente a una fisura que se interpuso entre los puntos de medición. Es por esto que la deformación crece bastante más rápido que en el modelo teórico.

Se obtuvieron también resultados utilizando otras relaciones constitutivas para el hormigón, siempre despreciando la resistencia a tracción y con una primera etapa parabólica hasta una deformación específica del 2‰. Estas modificaciones se realizan en forma sencilla ya que basta con cambiar la subrutina correspondiente al hormigón. La sensibilidad de los resultados, al menos en lo que hace a las deformaciones, es muy pequeña. Lo mismo se observa frente a pequeños cambios en las propiedades mecánicas de los aceros.

4.1.3.3.3. RIGIDEZ ALABEAL

Una vez obtenido el estado de deformación de la sección, se puede definir una sección ideal de acuerdo al concepto de módulo secante presentado en el punto 2.2.1. Para dicha sección se calculan las propiedades geométricas y sectoriales y se encuentran los momentos de inercia principales de acuerdo a las ecs. (2.28) y (2.29), que permiten desacoplar las ecuaciones diferenciales (2.24) a (2.27). Al respecto, cabe hacer notar que la primera etapa del programa, ya descripta, trabaja con sistemas de referencia cualesquiera. En la aplicación de las ecuaciones diferenciales (2.24) a (2.27) se debe tener en cuenta el cambio de coordenadas al sistema principal, lo cual modifica los valores de las sollicitaciones. A modo de ejemplo la rigidez alabeal se calcula como:

$$\text{Rigidez alabeal} = E_{bo} \cdot J_{nid} \quad (4.36)$$

Donde:

E_{bo} : Módulo de elasticidad tangente al origen del hormigón.

J_{nid} : Momento de inercia sectorial principal de la sección ideal.

Conocida la rigidez alabeal, se puede calcular lo que se denomina, siguiendo la analogía con flexión, curvatura de torsión. De acuerdo a las ecs. (2.23) y (4.21) resulta:

$$\phi'' = -M_{\Omega} / E \cdot J_{nid} + F_{\phi} (4) / E \cdot J_{nid} \quad (4.37)$$

En figs.55 y 56 se han representado la variación de la rigidez alabeal en función del bimomento y las curvas bimomento-curvatura para las vigas 7T y 8T. Es claro que la influencia en el

comportamiento alabeal de la resistencia a compresión del hormigón es mínima ya que prácticamente no hay diferencia en las curvas obtenidas para las dos vigas que corresponden a hormigones de resistencias bastante distintas.

La curva de variación de rigidez muestra una caída abrupta para aquel bimomento para el cual se alcanzan deformaciones de tracción en el ala superior y luego una tendencia a un valor prácticamente constante, con alguno que otro salto correspondiente a la aparición de fisuras en algún punto de la sección. La gráfica bimomento-curvatura resume el comportamiento y es similar a las obtenidas para flexión. Presenta una primera etapa lineal y luego una caída abrupta de la rigidez, pudiendo idealizarse mediante un diagrama bilineal.

Como parte del estudio de la influencia del grado de pretensado en la respuesta torsional se obtuvieron las curvas de variación de la rigidez alabeal en función del bimomento para vigas de características similares a las ensayadas pero haciendo variar el grado de pretensado mediante un cambio en la deformación inicial de los cables. Los resultados se han representado en fig.57. En la misma se observa que el pretensado permite mantener la rigidez alabeal más elevada y la caída de rigidez es mucho menos abrupta cuanto mayor es el grado de pretensado.

La influencia favorable del esfuerzo de pretensado va desapareciendo al aumentar el bimomento. Cuando el bimomento es alto, la rigidez alabeal tiende a un valor que es independiente del grado de pretensado, prácticamente igual al de hormigón armado.

Para el caso de hormigón armado la rigidez alabeal cae inmediatamente al cargar y tiene un valor prácticamente constante. Ese valor sería constante si el hormigón tuviera un comportamiento lineal elástico.

Siguiendo con el mismo tipo de análisis se estudia ahora la influencia de momento flector en la rigidez alabeal. En la fig. 58 se han representado las curvas de rigidez alabeal para distintos valores del momento flector. De la observación de la misma, se concluye que el momento flector es favorable dentro de un cierto rango que va desde cero a un dado valor. Por ejemplo, para $M_n=0$ ese valor es el momento flector que anula la tensión de pretensado en el ala inferior y depende por tanto del grado de pretensado. A partir de ese límite la influencia del momento flector comienza a ser negativa. Este mismo fenómeno se mencionará más adelante en lo que hace a la resistencia última y es consecuencia de la asimetría de la armadura longitudinal y del pretensado.

La influencia favorable o desfavorable del momento flector es importante para bimomentos pequeños, pero a partir de un dado bimomento, la rigidez alabeal es prácticamente independiente del momento flector.

La influencia favorable inicial del momento flector se reduce a medida que disminuye el grado de pretensado.

Debe destacarse que, aunque aquí se puso énfasis en el comportamiento torsional, este mismo tipo de análisis puede realizarse para las rigideces flexionales utilizando el modelo descripto y el programa desarrollado.

4.1.3.4. INTEGRACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

Hasta ahora sólo se analizó el equilibrio de una sección de la viga. Aparecen allí algunas acciones internas, como el bimomento, que todavía no se vincularon con las sollicitaciones externas. La idea es usar los resultados obtenidos para encontrar el estado de tensión y deformación en cada sección de un elemento estructural sometido a torsión. El problema se reduce ahora a re-

solver las ecuaciones diferenciales (2.24) a (2.27) o simplemente la ecuación diferencial (2.27) en el caso de torsión simple, pero con rigideces variables.

Debe aclararse que la solución del problema pudo encontrarse con un método de elementos finitos sin necesidad de recurrir a los dos pasos mencionados. Sin embargo, se consideró más manejable e ilustrativo el tipo de procedimiento empleado.

Para la solución de la ecuación diferencial se pueden aplicar distintas técnicas. En este trabajo se desarrollaron el método de diferencias finitas y el método de matrices de transferencia, pero sólo se obtuvieron resultados satisfactorios mediante el último.

A continuación se describe como tener en cuenta la variación de rigideces y las dos técnicas de solución empleadas.

4.1.3.4.1. RIGIDECES

4.1.3.4.1.1. RIGIDEZ ALABEAL

El estudio de la variación de la rigidez alabeal como función del bimomento o de la curvatura ya se presentó en un punto anterior, sólo cabe acotar que la rigidez alabeal puede obtenerse en función del bimomento interpolando entre un conjunto de pares de valores generados de la forma descripta.

4.1.3.4.1.2. RIGIDEZ A TORSION CIRCULATORIA

Para la respuesta a torsión circulatoria se adopta el modelo bilineal simple propuesto por Hsu (69). La rigidez es función de la derivada primera del ángulo de giro. Ver fig.59.

La rigidez inicial se calcula de la manera tradicional para la sección de hormigón simple (ver punto 4.1.2). Para definir la rigidez torsional después de fisuración se usa el modelo de re-

ticulado espacial desarrollado por Hsu (34) en su forma simplificada:

$$(G.J)_{fis} = 4 \cdot E_s \cdot A_l^2 / p \cdot [(p/AL + S/At)] \quad (4.38)$$

Donde:

E_s : Módulo de elasticidad del acero

A_l : Area encerrada por la línea perimetral que une los centros de las barras de la armadura longitudinal

p : Perímetro

AL : Area de armadura longitudinal

At : Area de estribos

S : Separación entre estribos

Esta es la rigidez tangente. En realidad para trabajar conviene definir la rigidez secante:

$$\begin{aligned} G.J_{sec} &= G.J && \text{para } \phi' \leq \phi'_{fis} \\ G.J_{sec} &= G.J \cdot \phi'_{fis}/\phi' + (G.J)_{fis} \cdot (1 - \phi'_{fis}/\phi') && \text{para } \phi' > \phi'_{fis} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Donde:

ϕ'_{fis} : Es la derivada del ángulo de giro correspondiente a fisuración

$$\phi'_{fis} = T_{fis}/G.J \quad (4.40)$$

T_{fis} : Momento torsor de Saint Venant que produce la fisuración y que se calcula como se indicó en el

punto 4.1.2.3.

4.1.3.4.2. SOLUCION MEDIANTE EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Un método bastante versátil para la solución de la ecuación diferencial de torsión es el método de diferencias finitas. Este método fue usado para el análisis de núcleos estructurales de sección no uniforme bajo cargas torsionales con muy buenos resultados (18) y (19). Sin embargo, en la solución del problema aquí planteado el método presentó algunos inconvenientes que se detallarán más adelante.

El método de diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas en la ecuación diferencial. En primer lugar entonces, se debe plantear la ecuación diferencial del problema. Al respecto, conviene hacer la siguiente aclaración: la teoría de Vlasov se refiere a vigas de sección prismática. El empleo de las ecuaciones que de ella se deducen a la solución de problemas con sección variable, ya sea debido a cambios en las dimensiones de la sección o debido a la degradación de la rigidez bajo carga, constituye una extrapolación de la misma cuya validez no está probada.

Como ecuación diferencial del problema se toma la siguiente ecuación, que es mas completa que las ecuaciones empleadas en refs.(18) y (19):

$$(E \cdot J_{\Omega} \cdot \phi'')'' - (G \cdot J \cdot \phi')' = - T' \quad (4.41)$$

Se utilizan diferencias finitas centrales, de 5 puntos en el caso de las derivadas tercera y cuarta, y de 3 puntos en el caso de las derivadas primera y segunda, de manera de tener siempre un error del orden de h^2 , donde h es la longitud de los intervalos.

los en que se divide la viga.

Planteando la ecuación diferencial en cada uno de los N nodos y además las condiciones de borde en los nodos extremos (78), se obtiene un sistema de $N+4$ ecuaciones con $N+4$ incógnitas que son los giros de los nodos y que puede escribirse en la forma:

$$\underline{M} = \underline{L}(\underline{G}) \cdot \underline{G} \quad (4.42)$$

Se resolvió este sistema mediante el método de Newton Raphson pero no se obtuvieron resultados satisfactorios. Aparecen problemas, no de convergencia, sino aparentemente de errores en las derivadas, al despreciar términos de orden superior. El error tiende a suavizarse y los resultados tienden a estabilizarse al aumentar el número de puntos de la malla, pero esto hace muy pesado el trabajo computacional y la convergencia se vuelve más lenta.

En conclusión, el método de diferencias finitas no resulta adecuado para la solución del problema en estudio, al menos en la forma planteada. Por otro lado, para su aplicación se debe realizar una extrapolación de la teoría de Vlasov al caso de elementos no prismáticos.

4.1.3.4.3. MATRICES DE TRANSFERENCIA

Este método ha sido usado con buenos resultados también en el análisis de núcleos estructurales bajo flexión y corte (79) y bajo torsión (25).

Se supone la viga como formada por segmentos de rigidez constante y con cambios bruscos de rigidez entre segmentos. En cada segmento es válida la teoría de Vlasov con todas sus hipótesis.

El procedimiento consiste en definir un vector de estado que contenga aquellos parámetros que sean esenciales para la solución de la ecuación diferencial y el planteo de las condiciones de borde y encontrar una relación de tipo matricial entre los vectores de estado en el comienzo y fin de cada segmento y de un lado y otro de cada nodo.

El siguiente vector de estado permite resolver un problema con condiciones de apoyo y carga genéricas:

$$\underline{y} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \phi' \\ -M_{\Omega} \\ T \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

La relación entre $\underline{y}_{i+1}$ e $\underline{y}_i$ se obtiene mediante la solución exacta de la ecuación diferencial (2.27) que tiene la forma:

$$\begin{aligned} \phi(z) = & C1 + C2.z + C3.\cosh\beta.z + C4.\sinh\beta.z \\ & - m_0.z^2 / (2.\beta^2.E.J_{\Omega}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Donde:

$$\beta = \sqrt{G.J/E.J_{\Omega}} \quad (4.45)$$

m_0 : carga torsional uniformemente distribuida

Con las condiciones de borde

$$\phi(0) = \phi_i$$

$$\phi'(0) = \phi'_i$$

$$-M_{\Omega}(0) = -M_{\Omega i}$$

$$T(0) = T_i$$

Y puede ser expresada en la forma:

$$\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{A}_{i+1} \cdot \tilde{Y}_i + \tilde{C}_{i1} \quad (4.46)$$

Donde los elementos no nulos de la matriz $\tilde{A}$ son:

$$\begin{aligned} A_{i(1,1)} &= 1 \\ A_{i(1,2)} &= \sinh \beta H / \beta \\ A_{i(1,3)} &= (\cosh \beta H - 1) / E \cdot J_{\Omega} \cdot \beta^2 \\ A_{i(1,4)} &= (H - \sinh \beta H / \beta) / E \cdot J_{\Omega} \cdot \beta^2 \\ A_{i(2,2)} &= \cosh \beta H \\ A_{i(2,3)} &= \sinh \beta H / E \cdot J_{\Omega} \cdot \beta \\ A_{i(2,4)} &= -(\cosh \beta H - 1) / E \cdot J_{\Omega} \cdot \beta^2 \\ A_{i(3,2)} &= E \cdot J_{\Omega} \cdot \beta \cdot \sinh \beta H \\ A_{i(3,3)} &= \cosh \beta H \\ A_{i(3,4)} &= -\sinh \beta H / \beta \\ A_{i(4,4)} &= 1 \end{aligned} \quad (4.47)$$

y

$$\begin{aligned} C_{i1}(1) &= m_0 \cdot [(\cosh \beta H - 1) / \beta^4 - H^2 / 2 \cdot \beta^2] / E \cdot J_{\Omega} \\ C_{i1}(2) &= m_0 \cdot (\sinh \beta H / \beta^3 - H / \beta^2) / E \cdot J_{\Omega} \\ C_{i1}(3) &= (m_0 / \beta^2) \cdot (\cosh \beta H - 1) \\ C_{i1}(4) &= 1 \end{aligned} \quad (4.48)$$

En el caso de cargas concentradas se debe sumar además un vector de nudo, esto es:

$$\tilde{Y}_i^{der} = \tilde{Y}_i^{izq} + \tilde{C}_{i2} \quad (4.49)$$

Si se llama :

$$\tilde{C}_i^* = \tilde{C}_{i1} + \tilde{C}_{i2} \quad (4.50)$$

Se tiene:

$$\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{A}_{i+1} \cdot \tilde{Y}_0 + \tilde{C}_{i+1}^* \quad (4.51)$$

$$\tilde{A}_{i+1} = \tilde{A}_{i+1} \cdot \tilde{A}_i \cdot \dots \cdot \tilde{A}_2 \cdot \tilde{A}_1 \quad (4.52)$$

$$\tilde{C}_{i+1}^* = \tilde{C}_{i+1}^* + \tilde{A}_{i+1} \cdot \tilde{C}_i^* \quad (4.53)$$

En el punto final se tiene entonces:

$$\tilde{Y}_n = \tilde{A}_n \cdot \tilde{Y}_0 + \tilde{C}_n^* \quad (4.54)$$

En esta última ecuación se plantean las condiciones de borde que, en el caso de torsión pueden ser esencialmente de tres tipos:

Empotramiento: $\phi = 0$
 $\phi' = 0$

Apoyo simple: $\phi = 0$
 $M_n = 0$

Borde libre: $M_n = 0$
 $T = 0$

La introducción de esas condiciones en la ecuación (4.54) permite encontrar los elementos del vector de estado inicial $\tilde{Y}_0$ y,

a partir del mismo, calcular los vectores de estado en toda la viga. Este procedimiento exige la obtención previa de la matriz $\bar{A}_n$ y del vector $\bar{C}_n^*$ y la posterior multiplicación para obtener los vectores $\tilde{y}_i$.

Una alternativa más versátil para el planteo de condiciones de borde es la siguiente (80): Se elimina el término independiente de la ecuación (4.46) y se expresa en la forma:

$$\tilde{z}_{i+1} = \tilde{B}_{i+1} \cdot \tilde{z}_i \quad (4.55)$$

Donde:

$$\tilde{z}_i = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{y}_i \\ \hline 1 \end{array} \right\} \quad \tilde{B}_i = \left[\begin{array}{cccc|c} \tilde{A}_i & & & & \tilde{C}_i^* \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.56)$$

El vector inicial se expresa, además en la forma:

$$\tilde{z}_0 = \tilde{L}_0 \cdot \tilde{x}_0 \quad (4.57)$$

Donde:

$\tilde{x}_0$: es un vector que tiene m filas, donde m es el número de incógnitas de borde más uno.

$\tilde{L}_0$: Es una matriz de 5xm que está formada por ceros en todos los elementos, y unos en aquellos en correspondencia con las incógnitas de borde.

A modo de ejemplo, para un borde empotrado, se tiene:

$$\underset{\sim}{X}_0 = \begin{Bmatrix} -M_{\Omega 0} \\ T_0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \underset{\sim}{L}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

La ec. (4.54) se escribe entonces:

$$\underset{\sim}{Z}_n = \underset{\sim}{L}_n \cdot \underset{\sim}{X}_0 \quad (4.59)$$

$$\underset{\sim}{L}_n = \underset{\sim}{B}_n \cdot \underset{\sim}{B}_{n-1} \cdot \dots \cdot \underset{\sim}{B}_1 \cdot \underset{\sim}{L}_0 \quad (4.60)$$

A partir del vector de estado en cada sección se pueden actualizar las rigideces. La rigidez alabeal en el punto i se calcula como función de M_{wi} y la rigidez torsional de Saint Venant como función de $\phi' i$. Se toma para el intervalo el promedio de las rigideces nodales.

El procedimiento descripto se repite hasta lograr convergencia en las rigideces. Dicha convergencia se puede medir mediante la norma Euclidiana.

Con el procedimiento expuesto se desarrolló un programa para el análisis de elementos de hormigón armado o pretensado de sección doble T bajo torsión mixta que usa las rutinas del programa antes descripto en la generación de la curva de rigidez alabeal. Dicho programa permite resolver estructuras con dos apoyos de cualquier tipo y bajo condiciones de carga arbitrarias. Con el mismo se resolvieron los casos de las dos vigas ensayadas a torsión (7T y 8T). En las figs. 60 y 61 se han representado los giros de la sección central y su comparación con los resultados experi-

mentales. Es notable la aproximación de las curvas teóricas a las experimentales a pesar de las simplificaciones que se hicieron.

En la fig.62 se han representado nuevamente los resultados obtenidos para la viga 8T con rigidez a torsión circulatoria constante y variable. Debe notarse que la no linealidad de la curva carga-giro se debe casi totalmente a la no linealidad en la respuesta a torsión circulatoria. La caída de rigidez alabeal no tiene prácticamente ninguna influencia en la curva carga-giro. La curva correspondiente a rigidez torsional de Saint Venant constante prácticamente coincide con la recta correspondiente a la teoría elástica. Esto puede atribuirse a que la colaboración importante de la torsión alabeal se restringe a una zona limitada de la viga, que se reduce a medida que aumenta la carga, ver fig 64 . Por otro lado, los resultados muestran que la degradación de la rigidez alabeal es mucho menor que la de la rigidez a torsión circulatoria

En la fig.63 se han representado las repuestas de dos vigas idénticas, una de hormigón armado y otra de hormigón pretensado. Se observa una rigidez global ligeramente menor en la viga de hormigón armado, debido a la rigidez alabeal menor de la misma. Donde aparece una diferencia marcada es en la carga de fisuración.

En la fig.64 se ha representado la variación de los elementos del vector $\underline{Y}$ para dos estados de carga marcadamente diferentes: un primer estado correspondiente a un comportamiento lineal elástico y un segundo correspondiente a un comportamiento no lineal. En la parte b de la figura se observa la distribución de los momentos torsores alabeal y circulatorio a lo largo de la viga. Es clara la redistribución de los momentos torsores debida a la pérdida de rigidez frente a ambas formas de torsión en distintas zonas de la viga. Aparece además una tendencia a la reducción de las zonas de importancia de la torsión alabeal la cual se restringe a las zonas de alabeo impedido. Esto se observó ya en los resultados experimentales, fig.25.

4.2. MODELOS DE ROTURA

4.2.1. INTRODUCCION

Los ensayos de las 8 vigas pusieron en evidencia la importancia de la componente alabeal de la torsión en el comportamiento de las mismas. Esta influencia es generalmente ignorada en los mecanismos de falla encontrados en bibliografía los cuales están dirigidos especialmente a elementos macizos, generalmente rectangulares.

En lo que sigue se sugieren algunas modificaciones a modelos existentes tendientes a mejorar el ajuste con los resultados experimentales.

4.2.2. METODO DEL EQUILIBRIO Y DE LAS DEFORMACIONES ULTIMAS

Este modelo es una modificación del modelo propuesto en Ref. (70) y (71) siguiendo las especificaciones del CEB-FIP (39), para secciones compuestas por tres paredes no concurrentes.

Las componentes de esfuerzo tangencial en cada una de las paredes se determinan mediante ecuaciones de equilibrio. Estas, sumadas a las cargas axiales debidas a flexión, caracterizan el estado de sollicitación de cada uno de los elementos componentes de la sección. El estado límite último de la sección queda definido por el estado límite último de la parte más solicitada, en este caso una de las alas, y puede sobrevenir por flexión o corte.

Por consideraciones de equilibrio en el centro de las vigas se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$T_u = P_u \cdot e/2 = H_u \cdot d + T_{sup} + T_{inf} \quad (4.61)$$

$$M_{fu} = P_u \cdot l/4 = N_{ua} \cdot d \quad (4.62)$$

$$Q_u = P_u/2 \quad (4.63)$$

Donde:

Tu : Momento torsor último

Pu : Carga última

e : Excentricidad de la carga

Mfu: Momento flector último

l : Luz de la viga

Qu : Esfuerzo de corte último

Ver fig.65

En la ecuación (4.61) el primer término representa el aporte de la torsión alabeal y los dos restantes corresponden a la torsión de Saint Venant en las alas.

a) Agotamiento por flexión

Considerando las alas perfectamente empotradas en los diafragmas extremos, la fuerza H_u genera un momento:

$$M_u = H_u \cdot l / 4 \quad (4.64)$$

en las alas en correspondencia con el centro de la luz. Estas están sometidas además a un esfuerzo normal:

$$N_u = M_{fu} / d \quad (4.65)$$

De acuerdo a la teoría de los planos límites, las sollicitaciones normales últimas se obtienen a partir de un estado límite de deformación de -3,5% en la fibra extrema del hormigón. Ver fig.66.

Se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio de fuerzas externas e internas.

$$Nua = Pu.l / (4.d) = Dbu + Z'eu - Zeu \quad (4.66)$$

$$Mua = Hu.l / 4 = Dbu.[z - (h - h') / 2] + (Zeu + Z'eu).(h - h') / 2 \quad (4.67)$$

Para las componentes de torsión de Saint Venant se considera la resistencia última a la torsión de las alas de acuerdo al procedimiento propuesto por Bishara (61), que contempla la influencia del pretensado y del esfuerzo normal.

$$Tsu = 838,5.Kp.Vp. \sqrt{f'c + 12.\bar{f}} + 1600.X1.Y1.At.fsy/S \quad (4.68)$$

Donde:

Tsu : Resistencia última a torsión de los cordones en KN.m.

Kp : Factor de plasticidad dependiente de la resistencia a la compresión del hormigón. $Kp = 0,85$ para resistencias de hasta 28 MPa y se reduce uniformemente a razón de 0,05 por cada 7 MPa de aumento en dicha resistencia.

Vp : Volumen del montículo de arena sobre la sección del ala en m^3 .

$f'c$: Resistencia cilíndrica a la compresión del hormigón en MPa.

$\bar{f}$: Tensión axial en el centro de la sección del ala debida al esfuerzo normal y al pretensado en MPa (positiva para tensiones de compresión)

$X1$ e $Y1$: Distancias entre centros de estribos según los lados del ala en m.

S : Separación entre estribos en m.

At : Sección transversal de los estribos en m^2 .

fsy : Tensión de fluencia de los estribos en MPa.

El primer término de la ecuación (4.68) representa el aporte del hormigón y el segundo el aporte de los estribos. Si $f < 0$ (cordón traccionado) la contribución del hormigón se anula.

Las ecuaciones (4.61), (4.62), (4.66) y (4.67) permiten calcular la carga P_u mediante un procedimiento iterativo. En la primera iteración se desprecia la contribución de la torsión de las alas (T_{sup} y T_{inf}).

Debe notarse que se suman directamente las resistencias a torsión y flexión de las alas en vez de tener en cuenta la interacción torsión-flexión en las mismas. En este caso, puede aceptarse dicha simplificación si se tiene en cuenta que la consideración de la sección como formada por rectángulos independientes constituye un planteo altamente conservador.

b) Agotamiento por Corte

La fuerza H_u se define como aquella que produce el agotamiento de la sección por un mecanismo de tensiones tangenciales. Para ello se procede según Ref. (71) en forma inversa al dimensionado al corte propuesto por la norma CIRSOC 201 (73) ya que se conocen las características de la sección del ala superior en estudio.

En base a la armadura transversal disponible, se obtiene el valor ζ de que les dio origen, y de él se desprende en qué zona de estudio de corte se debe situar el análisis para obtener ζ_o , con el cual se calcula el valor de la fuerza horizontal H_u que solicita al ala superior, para un coeficiente de mayoración constante en todos los casos $\gamma = 1,75$.

El aporte de la torsión de Saint Venant se calcula como se describió anteriormente, sin tener en cuenta la influencia favorable del esfuerzo normal en el cordón superior, para compensar, en cierta forma, la omisión de la interacción torsión-corte que es más estricta que la interacción torsión-flexión.

Con estas consideraciones se tienen ya los datos para calcular la carga última mediante la ec. (4.61).

Los resultados de ambas formas de agotamiento se resumen en tabla VIII donde se adjuntan además comparaciones con resultados experimentales.

TABLA VIII

Viga	Agot. flexión		Agot. Corte	
	Pu teor	Pu teor	Pu teor	Pu teor
	(KN)	/Puexp.	(KN)	/Puexp.
1T	70,2	0,90	81,2	1,04
2T	152,1	0,89	200,0	1,17
3T	119,1	0,86	144,5	1,05
4T	80,0	0,76	102,9	0,97
5T	72,5	1,07	67,3	0,99
6T	121,5	1,28	107,6	1,14
7T	37,8	1,08	41,5	1,18
8T	49,7	1,02	53,8	1,10

De este cuadro se deduce claramente que, teóricamente, las cuatro primeras vigas fallan por flexión en el cordón superior, las dos siguientes por corte en el mismo y las dos últimas por flexión en el cordón superior, hecho que concuerda con los resultados experimentales en los cuatro primeros casos.

La fig.67 muestra un diagrama de interacción torsión-flexión adimensional trazado mediante el mismo procedimiento. La resistencia última a torsión, T_{uo} , constituye el caso límite en que la fuerza normal en los cordones se anula. La resistencia última a flexión, M_{fuo} , corresponde a la fluencia de la armadura

en el cordón inferior. En la misma figura se representan además los puntos correspondientes a los resultados experimentales. Si bien esta figura indica que se trata de un enfoque conservador, evidencia que, en este caso, al igual que en las vigas de hormigón pretensado de sección rectangular con pretensión excéntrica, la resistencia torsional de la sección experimenta un incremento para valores reducidos del momento flector y decae luego notablemente al crecer este último.

4.2.3. MODELO DEL EQUILIBRIO ULTIMO

Siguiendo la teoría de Lessig (40), cuando una viga de hormigón pretensado es sometida a torsión combinada con flexión, aparecen fisuras en una de las caras que luego se extienden a las restantes al incrementar la carga. Las fisuras alrededor de la viga unidas por una zona comprimida definen la superficie de falla.

En base a observaciones experimentales y un análisis simple de tensiones se proponen dos tipos de superficies de falla para las vigas en estudio, figs 68 y 69. La primera, con la zona comprimida en la parte superior, corresponde a relaciones momento torsor/momento flector bajas, incluyendo la flexión simple como caso límite. La segunda, con la zona comprimida en la parte inferior corresponde a relaciones momento torsor/momento flector altas, incluyendo la torsión simple como caso límite.

Para simplificar el problema se hacen las siguientes hipótesis:

1. Las cuantías de armadura longitudinal tesa y no tesa y transversal son tales que toda la armadura alcanza la fluencia antes de la rotura.
2. No se producen fallas por causas secundarias. Esto signi-

fica, por ejemplo, que la armadura se encuentra adecuadamente anclada.

3. Se desprecia la resistencia a la tracción del hormigón.
4. Los esfuerzos de la armadura longitudinal y transversal en la zona comprimida del hormigón son despreciables.
5. Como la altura de la zona comprimida es habitualmente muy reducida, el centro de la misma puede localizarse aproximadamente al nivel de la rama horizontal de los estribos.

La superficie de falla está formada por tres planos que forman un ángulo α con el eje longitudinal de la viga. Si se reemplazan las líneas quebradas por líneas rectas se obtienen las superficies alabeadas de figs. 68 y 69 .

De acuerdo a Elfgren, Karlson y Losberg (49), el ángulo α corresponde a la inclinación de las bielas comprimidas entre fisuras y cambia a medida que se incrementa la carga y los distintos tipos de armadura van entrando en fluencia. Sin embargo, las fisuras originales no modifican su inclinación porque resulta difícil que se formen nuevas fisuras cuando ya se han producido otras. La superficie de falla queda definida entonces por las tensiones en el momento de la rotura y no por el cuadro de fisuración original.

La carga última puede evaluarse mediante dos ecuaciones de equilibrio de momentos según dos ejes perpendiculares en el centro de la zona comprimida. El primero de los ejes es paralelo al eje de la viga y la ecuación correspondiente establece la igualdad entre el momento de las fuerzas internas y el momento torsor aplicado. El segundo es un eje horizontal, perpendicular al eje de la viga y en este caso debe verificarse la igualdad entre el momento flector aplicado y el momento de las fuerzas internas. En ambos casos se toma el eje de momentos coincidente con el cen-

tro de la viga de manera que el momento flector es $Pu.l/4$ y el corte no interviene porque corta dichos ejes.

Las ecuaciones resultantes son:

Esquema de falla 1

$$Tu = Pu.e/2 = At.fsy.X1.Y1/S.cotg\alpha \quad (4.69)$$

$$Mfu = Pu.l/4 = MI - At.fsy.Y1^2/S.cotg^2\alpha \quad (4.70)$$

Esquema de falla 2

$$Tu = Pu.e/2 = At.fsy.X1.Y1/S.cotg\alpha \quad (4.71)$$

$$Mfu = Pu.l/4 = -MII + At.fsy.Y1^2/S.cotg^2\alpha \quad (4.72)$$

Donde MI y MII son los momentos de la armadura longitudinal en fluencia respecto de los ejes considerados en cada caso.

Los casos extremos de sollicitaciones se obtienen también a partir de estas ecuaciones, haciendo $Tu=0$ en el primer esquema para flexión simple y $Mfu=0$ en el segundo esquema para torsión simple. Así resultan:

$$Mfu0 = MI \quad (4.73)$$

$$Tuo = X1. \sqrt{MII.fsy.At/S} \quad (4.74)$$

La Tabla IX muestra los resultados obtenidos para las 8 vigas ensayadas y una comparación con los resultados experimentales. Debe señalarse que para las 6 primeras vigas la falla queda definida por el primer esquema que proporciona cargas menores que

el segundo, en cambio en la 7 y 8 corresponden al tipo de falla 2. Esto concuerda con la naturaleza de las solicitaciones aplicadas a los modelos: flexión dominante en los seis primeros casos y torsión simple en los últimos casos.

TABLA IX

! Viga !	Pu teor. !	Pu teor/Puexp !
! (KN) !	! !	! !
! 1T !	77,4 !	0,99 !
! 2T !	150,0 !	0,88 !
! 3T !	127,0 !	0,92 !
! 4T !	103,9 !	0,98 !
! 5T !	66,7 !	0,98 !
! 6T !	103,6 !	1,09 !
! 7T !	31,6 !	0,90 !
! 8T !	46,0 !	0,95 !

Con este procedimiento se puede trazar también una curva de interacción torsión-flexión adimensional, que presenta dos ramas: la primera ascendente, corresponde a la zona de compresión en la parte inferior y la segunda, descendente, a la zona de compresión en la parte superior. La curva resultante puede reemplazarse por una parábola cuadrática invertida que aparece representada en fig. 70 y cuya ecuación es la siguiente:

$$T_u/T_{uo} = -(1+k) \cdot (M_{fu}/M_{fuo})^2 + k \cdot (M_{fu}/M_{fuo}) + 1 \quad (4.75)$$

Donde k es un coeficiente que para el tipo de vigas en estudio vale 1,61.

En la misma figura se han representado además los puntos correspondientes a cada una de las 8 vigas ensayadas a la vez que una alternativa de representación de la curva real mediante rectas. Aparecen también allí conjuntos de puntos correspondientes a resultados experimentales de vigas de hormigón pretensado de sec-

ción doble T, obtenidos por otros autores que pueden encontrarse en Refs. (59) y (61), y un punto perteneciente a una viga similar a las vigas en estudio, perteneciente a una serie de vigas ensayadas al corte, que falló por flexión, (viga 2C). Los puntos, en general, se encuentran próximos a la curva trazada. Respecto a la viga 2, cabe señalar que tiene una carga de rotura alta en comparación con los resultados teóricos, lo cual puede atribuirse a la elevada resistencia a la compresión del hormigón correspondiente.

La curva aquí propuesta se asemeja mucho a la obtenida en el primer modelo pero resulta menos conservadora.

4.2.4. METODO DE LAS DEFORMACIONES LIMITES

El diseño eficiente de vigas sometidas a cuplas triaxiales, fuerzas cortantes verticales y horizontales y fuerzas normales, como las usadas en puentes curvos, requiere un claro conocimiento de la interacción entre dichas solicitaciones.

4.2.4.1. CONSTRUCCION DE SUPERFICIES DE INTERACCION

Para una viga de paredes delgadas pueden existir 7 tipos de solicitaciones: momentos flectores y cortes según dos planos, momento torsor, bimomento y esfuerzo normal. Se requiere entonces una superficie de interacción en siete dimensiones para predecir la falla de la misma bajo todas las solicitaciones actuando simultáneamente.

La intersección de la superficie con cada uno de los ejes coordenados corresponde a la falla de la viga para cada una de las solicitaciones actuando independientemente.

Para el estado general de solicitaciones podemos definir un coeficiente de falla de la siguiente manera (81):

$$f = \left| M_x/M_{xuo} \right| + \left| M_y/M_{yuo} \right| + \left| N/N_{uo} \right| + \left| Q_x/Q_{xuo} \right| + \\ + \left| Q_y/Q_{yuo} \right| + \left| T/T_{uo} \right| + \left| M_w/M_{wuo} \right| \quad (4.76)$$

Donde todas las solicitaciones se han representado en la fig. 71 y el subíndice o indica la resistencia a cada solicitación actuando independientemente.

La ecuación (4.76) representa una interacción lineal entre las siete solicitaciones actuantes. En el estado combinado de tensiones la falla se produce cuando $f \geq 1$. Resulta difícil visualizar gráficamente una superficie en siete dimensiones. Por tal motivo, en la fig. 72 se ha representado la interacción lineal para tres de las solicitaciones en cuestión.

Según los postulados de Drucker (82), las superficies de fluencia o falla deben ser convexas. Por esta razón la interacción propuesta en ecuación (4.76) representa siempre un límite inferior para la superficie de falla.

Es evidente que, en general, la interacción lineal conduce a resultados muy conservadores cuando se trata de predecir la falla de una viga. Sin embargo, el criterio antes descrito resulta útil en aquellos casos en que sólo se conoce la respuesta de la viga a cada solicitación actuando aisladamente. Cuando se dispone sólo de algunas curvas de interacción entre las solicitaciones actuantes, la superficie de interacción total puede ser completada con este principio de linealidad. Se obtiene siempre un límite inferior para la falla de la viga. Es importante, entonces, tratar de definir la mayor parte de las interacciones posibles con el objeto de lograr una mejor aproximación a la superficie de interacción real. Por otro lado, la generalización de la extensión semi-lineal de superficies a un espacio n-dimensional no es trivial. La

ecuación de partida, que define la curva de interacción conocida, debe reunir ciertas condiciones además de la convexidad (81). Por ello, es siempre conveniente verificar las intersecciones de la superficie final con los planos coordenados.

4.2.4.2 METODO DE LAS DEFORMACIONES

En general, los modelos utilizados para definir la interacción torsión-flexión-corte, han sido desarrollados para secciones rectangulares y torsión circulatoria y no son aplicables, al menos en forma directa, a secciones doble T con alabeo impedido. El método de las deformaciones, aquí propuesto, está realizado exclusivamente para este tipo de secciones e incluye el alabeo de la sección transversal en la definición de los criterios de falla. La superficie de interacción generada permite incluso analizar, como caso particular, el de elementos estructurales sometidos a flexión biaxial y esfuerzo normal. Al respecto, en un trabajo reciente (83), Hsu señaló la necesidad de construir superficies de interacción para secciones distintas de la rectangular.

El método de las deformaciones consiste en la generación de una superficie de interacción tomando como base la teoría de los planos límites. Las cuatro dimensiones están constituidas por los momentos flectores según dos direcciones perpendiculares, ambas normales al eje de la viga, un bimomento alabeal y una fuerza axial.

Los puntos de la superficie se obtienen asignando deformaciones a cada uno de los extremos de las alas con la condición de que, por lo menos en uno de ellos, se alcance una deformación límite. En el cálculo de las solicitaciones se utiliza la ecuación (4.24) correspondiente al modelo para el análisis no lineal propuesto.

Para poder escribir las ecuaciones de la hipersuperficie y visualizar su forma es conveniente obtener intersecciones de la misma con distintos hiperplanos. Dichas intersecciones conducen a curvas de interacción entre distintos pares de las solicitaciones en estudio.

Para trazar directamente curvas de interacción entre pares de las cuatro solicitaciones en cuestión se deben fijar dos solicitaciones iguales a cero, dar distintos valores a una tercera solicitación y calcular los valores de la cuarta que hacen que la deformación, por lo menos en uno de los puntos de la sección, alcance un valor límite. En el caso particular de la sección en estudio los puntos de deformación máxima coinciden con los puntos usados como referencia, lo cual simplifica bastante el problema. Debe observarse, además, que las deformaciones no fijadas de antemano deben tener valores comprendidos dentro de los planos límites. Es por esto que puede ocurrir que para ciertos valores de la solicitación que se está haciendo variar no exista un valor de la solicitación incógnita.

En resumen, el problema se reduce a fijar tres solicitaciones (dos de ellas nulas) y una deformación y encontrar la cuarta solicitación, siempre que las deformaciones restantes no superen los valores límites. Es conveniente, entonces, escribir la ecuación (4.24) en la forma:

$$\tilde{F}_j = A_{ij} \cdot \tilde{E}_i + A^*_{ij} \cdot E(i) + F_{0j} \quad (4.77)$$

Donde:

i : Numero de la deformacion dato

j : Numero de la solicitacion incognita

$\tilde{F}_j$: Vector $\tilde{F}$ sin la fila j

$\tilde{A}_{ij}$: Matriz $\tilde{A}$ sin la fila j y sin la columna i
 $\tilde{E}_i$: Vector $\tilde{E}$ sin la fila i
 $\tilde{A}^*_{ij}$: Columna i de la matriz $\tilde{A}$ sin la fila j
 $E(i)$: Deformacion dato, elemento i del vector $\tilde{E}$
 $\tilde{F}_{oj}$: Vector $\tilde{F}_o$ sin la fila j

La ecuación (4.77) es una ecuación no lineal en donde la incógnita es el vector $\tilde{E}_i$ y las matriz $\tilde{A}_{ij}$ y los vectores $\tilde{A}^*_{ij}$ y $\tilde{F}_{oj}$ son funciones de $\tilde{E}_i$ y de $E(i)$. Resolviendo esa ecuación se pueden hallar los valores de las otras deformaciones. Si están comprendidas dentro de los planos límites, se calcula la sollicitacion incógnita con la siguiente expresion:

$$F(j) = \sum_{k=1}^4 A(j,k) \cdot E(k) + F_o(j) \quad (4.78)$$

Se intentó resolver la ecuación (4.77) pero hubo problemas con la convergencia del proceso iterativo. Para poder trazar las curvas de interacción hubo que generar la superficie de interacción completa y luego buscar las intersecciones con distintos hiperplanos. Este último procedimiento resultó muy lento por lo que sería conveniente estudiar un poco más la solución de la ecuación no lineal (4.77).

Las curvas de interacción obtenidas se representan en forma adimensional en figs. 73 a 78. Puede observarse que la curva bimomento-momento flector x tiene una forma similar a la curva de interacción torsión-flexión obtenida mediante otros métodos, presentando un incremento de la resistencia al bimomento para valores pequeños del momento flector. Esta curva puede ser representada también mediante una parábola cuadrática invertida cuya ecuación es similar a la ecuación (4.75) sólo que, en este

caso el coeficiente k vale 0,89.

En base a estas curvas de interacción se pueden construir superficies de interacción en tres dimensiones, tomando como parámetro la cuarta variable. En figs.79 y 80 se representan aproximadamente las superficies de interacción $M_w-M_x-M_y$ para $N=0$ y M_w-M_x-N para $M_y=0$ ambas adimensionalizadas. El trazado de las mismas se completa con criterios de simetría y antimetría.

Aplicando los principios de construcción de superficies de interacción antes descriptos, pueden escribirse ecuaciones que definan la falla para las cuatro sollicitaciones. Para ello es conveniente trabajar en forma adimensional con los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} m_x &= M_{xu}/M_{xuo} \\ m_y &= M_{yu}/M_{yuo} \\ m_w &= M_{wu}/M_{wuo} \\ n &= N_u / N_{uo} \end{aligned} \quad (4.79)$$

De la observación de la fig.79 y siguiendo la referencia (81) se pueden definir las siguientes curvas de interacción:

$$|m_w| = - (1+k) \cdot m_x^2 + k \cdot m_x + 1 \quad \text{para } n=m_y=0 \quad (4.80)$$

$$|m_y| = - (1+k) \cdot m_x^2 + k \cdot m_x + 1 \quad \text{para } n=m_w=0 \quad (4.81)$$

Donde k es un coeficiente que varía según el tipo de sección y puede tomarse igual a 0,89 para la sección en estudio.

Las ecs. (4.80) y (4.81) representan las intersecciones de la superficie de fig.79 con los planos $m_y=0$ y $m_w=0$ respectivamente. Considerando, como simplificación, que la interacción m_w-m_y

es lineal, entonces la intersección de la superficie con el plano $m_x=0$ esta dada por:

$$|m_y| + |m_w| = 1 \quad (4.82)$$

Combinando las tres últimas ecuaciones se puede obtener la ecuación de la superficie:

$$|m_y| + |m_w| = - (1+k) \cdot m_x^2 + k \cdot m_x + 1 \quad (4.83)$$

Para obtener la ecuación de la superficie de interacción en cuatro dimensiones se debe introducir el esfuerzo normal. Suponemos nuevamente que la interacción es de tipo lineal. Resulta entonces:

$$(|m_y| + |m_w|) \cdot (1-n) = -(1+k) \cdot m_x^2 + k \cdot (1-n) \cdot m_x + (1-n)^2$$

$$\text{para } n \geq 0 \text{ (compresión)} \quad (4.84)$$

$$(|m_y| + |m_w|) \cdot \frac{(1+n)}{\delta} = -(1+k) \cdot m_x^2 + k \cdot \frac{(1+n)}{\delta} \cdot m_x + \left(\frac{1+n}{\delta}\right)^2$$

$$\text{para } n < 0 \text{ (tracción)} \quad (4.85)$$

δ = Resistencia a tracción/resistencia a compresión

Como verificación se buscan las intersecciones de la superficie representada por la ec. (4.84) con los distintos planos coordenados:

$$\begin{aligned}
my=0 \quad mw=0 \quad (mx+n-1) \cdot [1+(k+1) \cdot mx-n] &= 0 \\
my=0 \quad n=0 \quad |mw| &= -(1+k) \cdot mx^2 + k \cdot mx + 1 \\
my=0 \quad mx=0 \quad |mw| + n &= 1 \\
mx=0 \quad mw=0 \quad |my| + n &= 1 \\
mx=0 \quad n=0 \quad |my| + |mw| &= 1 \\
mw=0 \quad n=0 \quad |my| &= -(1+k) \cdot mx^2 + k \cdot mx + 1
\end{aligned} \tag{4.86}$$

De esto se deduce que las ecs. (4.84) y (4.85) representan, aproximadamente, la superficie generada por este método.

Para analizar la influencia del pretensado en la resistencia de las vigas en estudio, en las figs. 73 a 78 se han representado además las curvas de interacción correspondientes a una sección idéntica pero de hormigón armado. Es claro la notable disminución de la resistencia torsional respecto a las curvas correspondientes a hormigón pretensado.

4.2.4.4. COMENTARIOS

Los criterios utilizados para definir la superficie de interacción solo permiten incluir solicitaciones que produzcan deformaciones normales. Es por esto que no se mencionan el corte y la torsión de Saint Venant. Sin embargo, en la mayoría de las secciones la torsión de Saint Venant tiene cierta importancia. En estos casos, si se quiere obtener una mejor aproximación de la superficie de interacción, se debe incluir la torsión de Saint Venant. Con ese fin, podría considerarse la interacción torsión-flexión-corte en las alas, siendo estas dos últimas solicitaciones producidas por el bimomento que puede considerarse como el producto de un momento por la altura del alma. Ese momento, variable a lo largo de la viga, actúa en las alas en sentidos opuestos y da

lugar a un par de fuerzas horizontales opuestas en las mismas. El principal inconveniente es que esas solicitaciones no son independientes y su relación depende de las particulares condiciones de apoyo y carga.

La superficie de interacción resulta conservadora si se compara con valores experimentales, aún cuando se consideren todas las solicitaciones intervinientes. Ello se debe a que dicha superficie se obtiene a partir de deformaciones límites convencionales, mientras que experimentalmente la falla queda definida por el agotamiento de la capacidad portante con deformaciones que superan ampliamente las deformaciones límites.

FIG.50 DIMENSIONES PARA EL CALCULO DE LA CONSTANTE DE TORSION

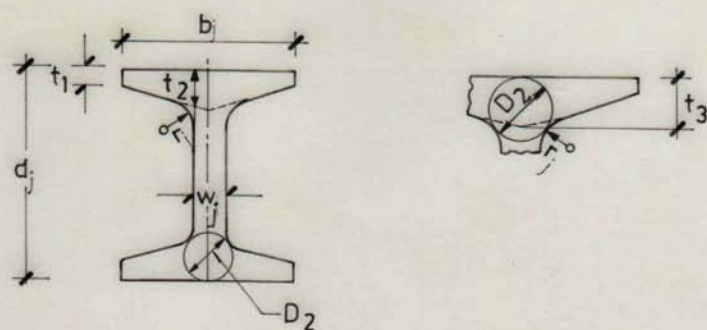


FIG.51 DIAGRAMAS TENSION DEFORMACION

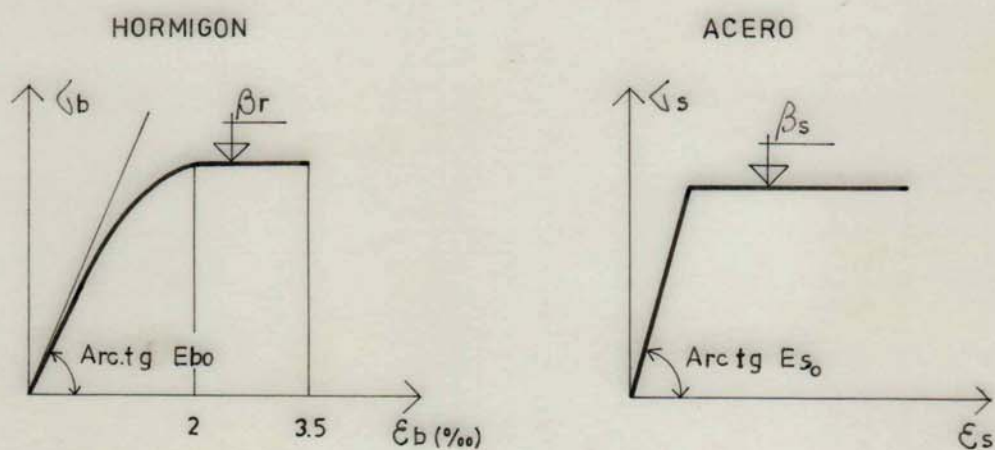


FIG.52 SOLICITACIONES

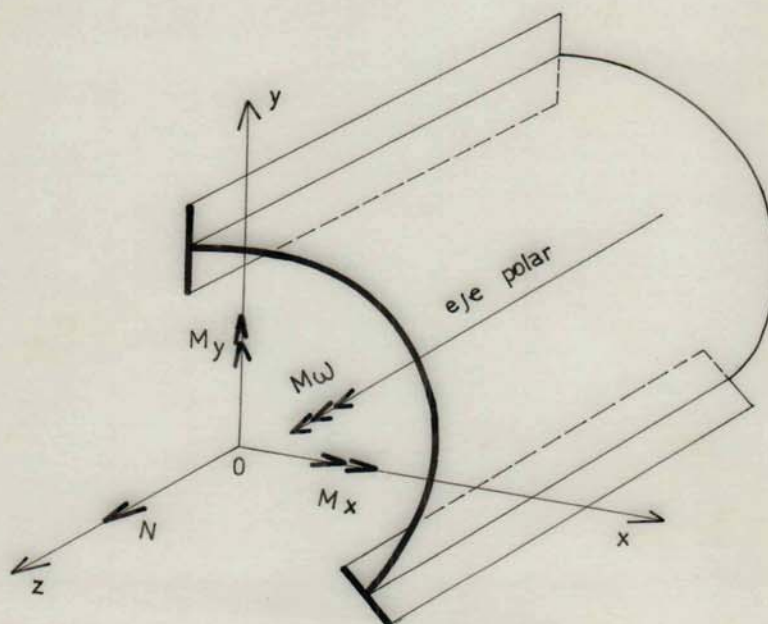


FIG. 53

DEFORMACIONES EN LA SECCION CENTRAL VIGA 7T

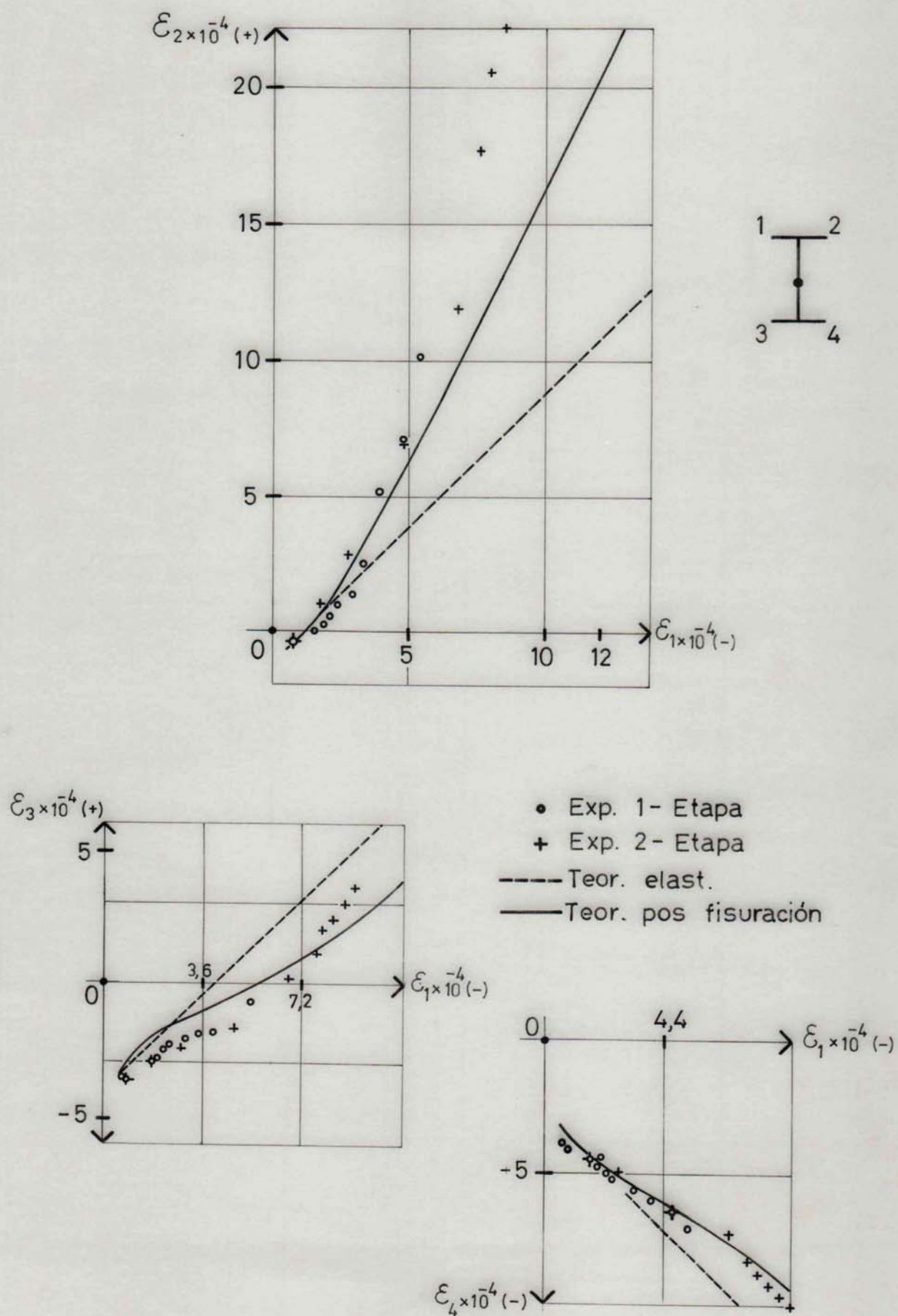
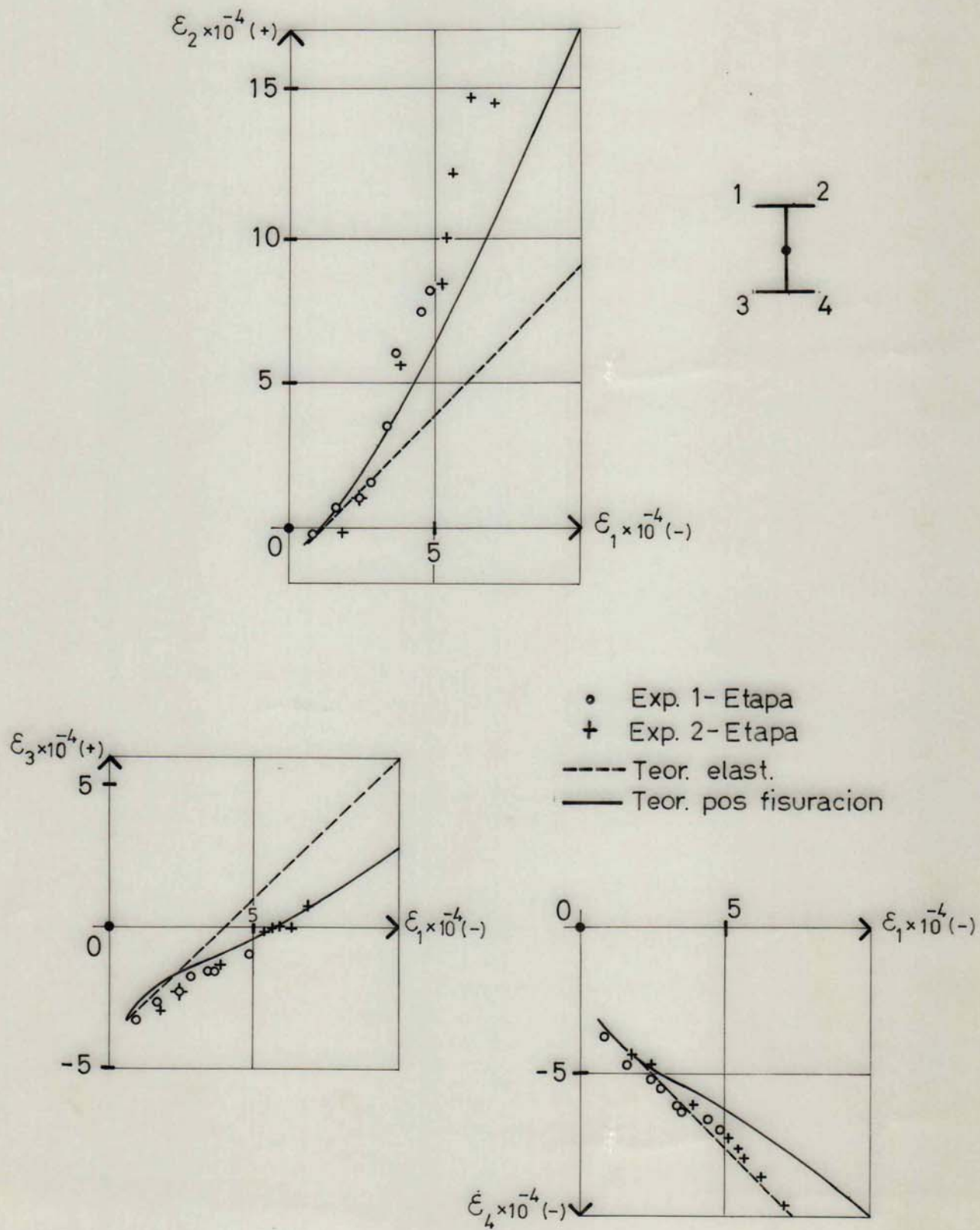


FIG. 54

DEFORMACIONES EN LA SECCION CENTRAL

VIGA 8 T



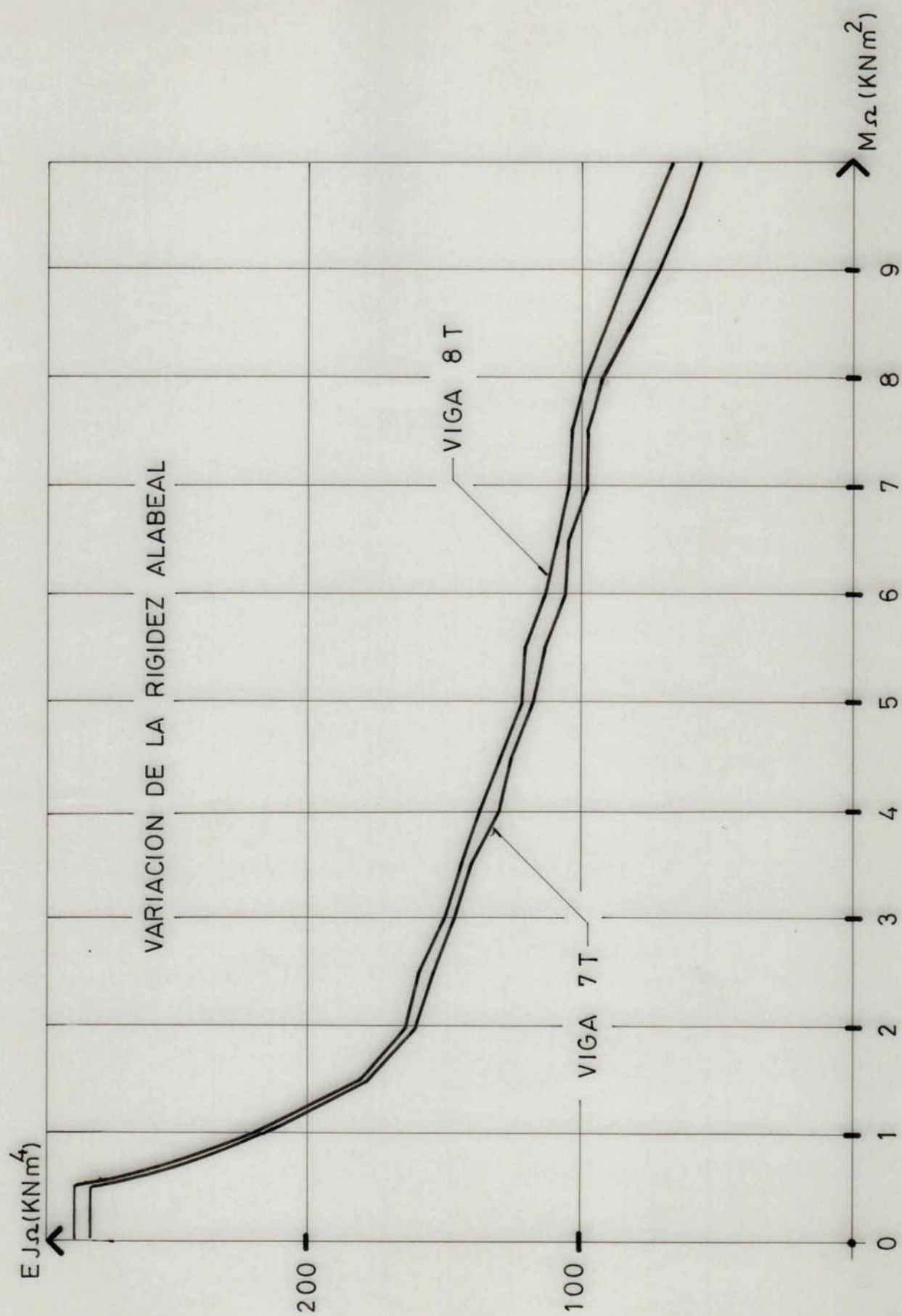
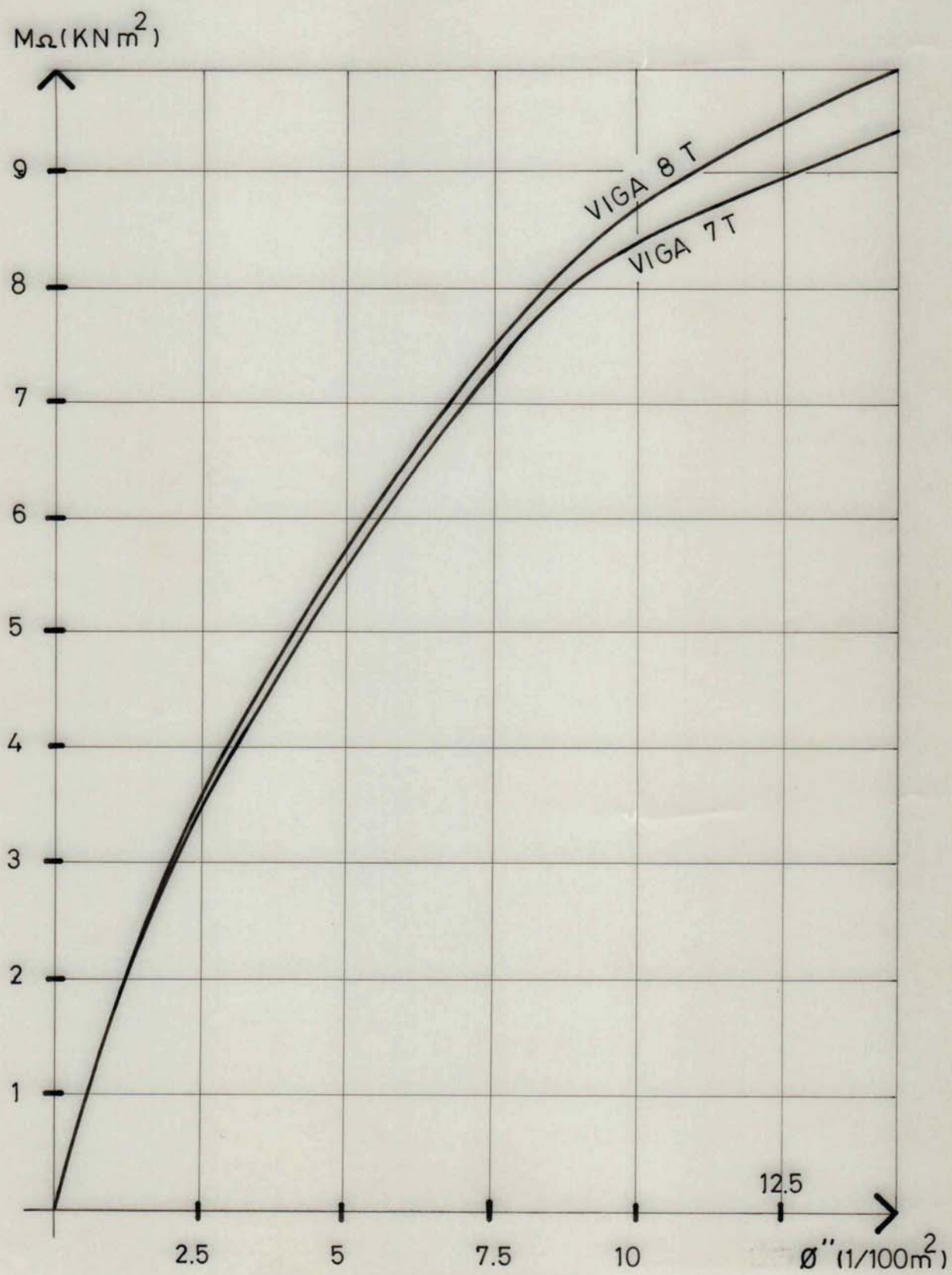
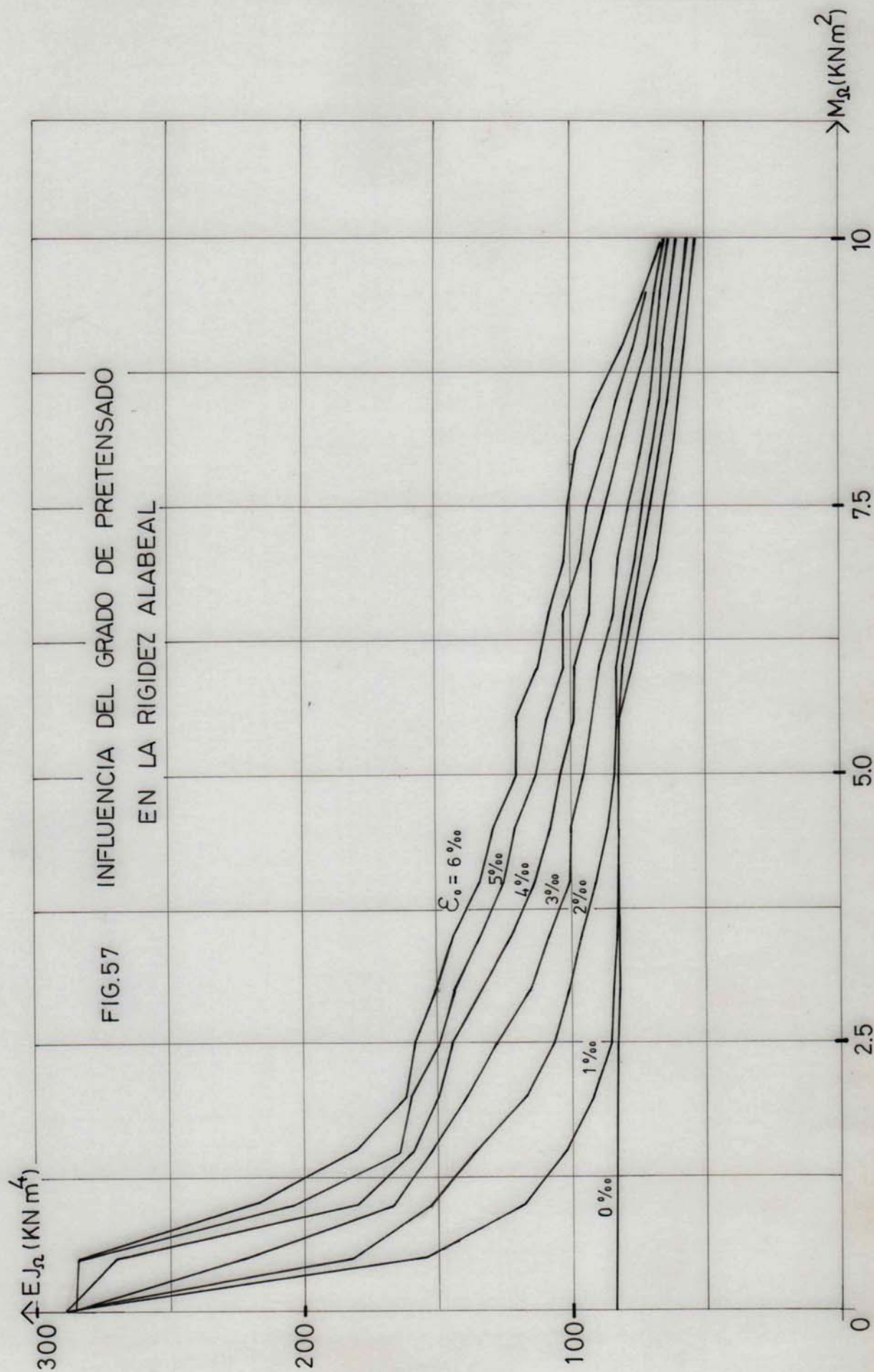


FIG.55

FIG.56 BIMOMENTO - CURVATURA DE TORSION





INFLUENCIA DEL MOMENTO
FLECTOR EN LA RIGIDEZ ALABEAL

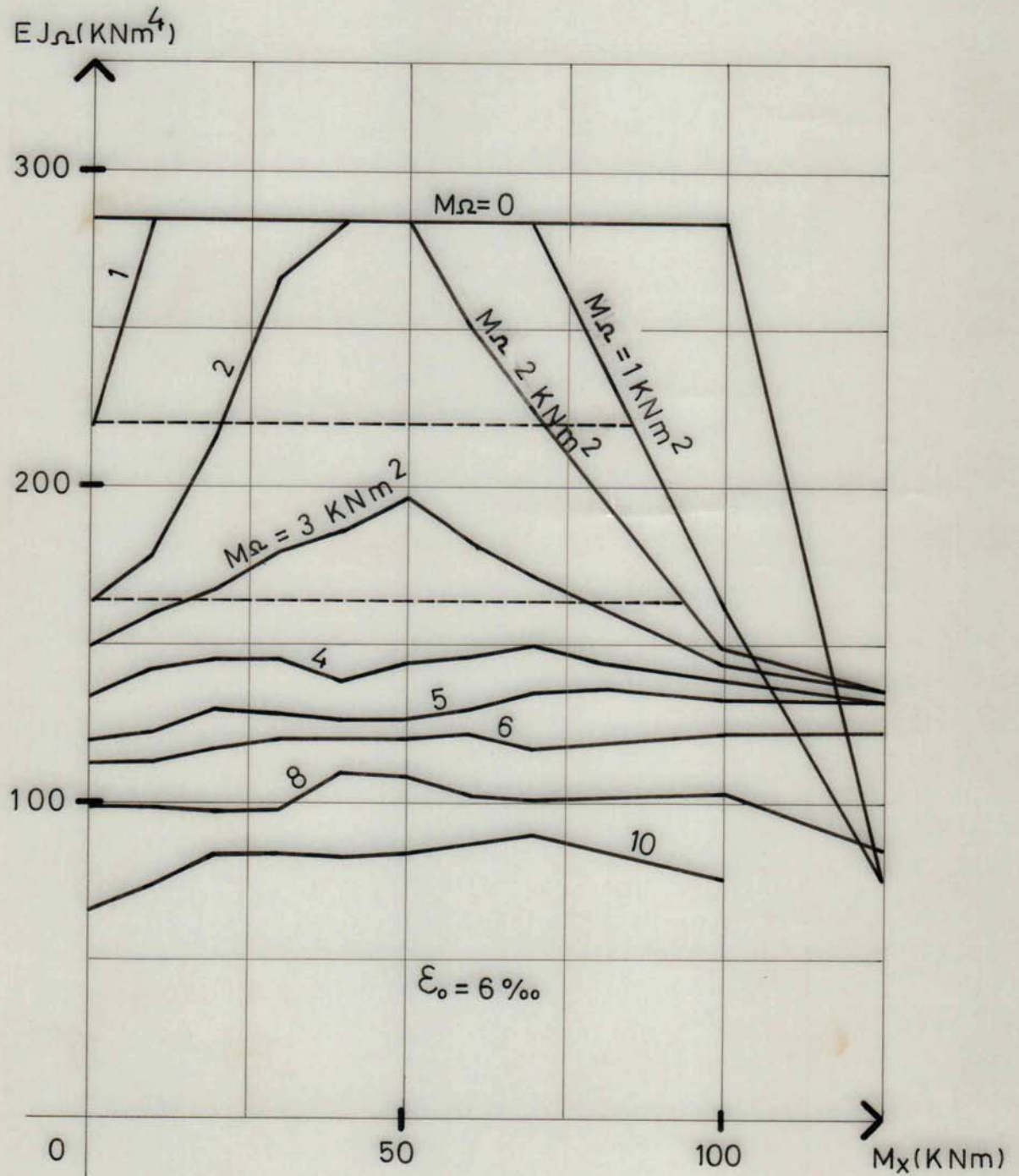


FIG. 58

RESPUESTA A TORSION CIRCULATORIA

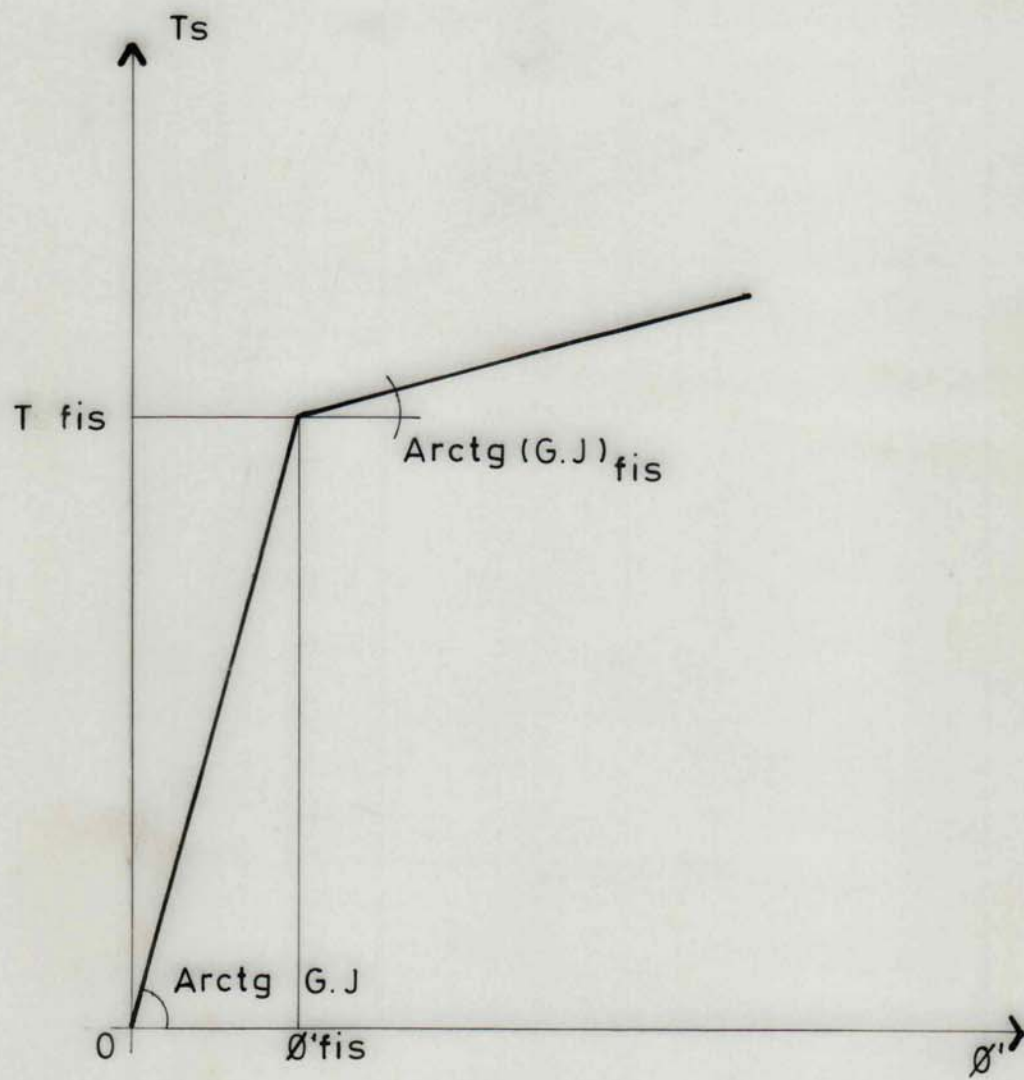


FIG. 59

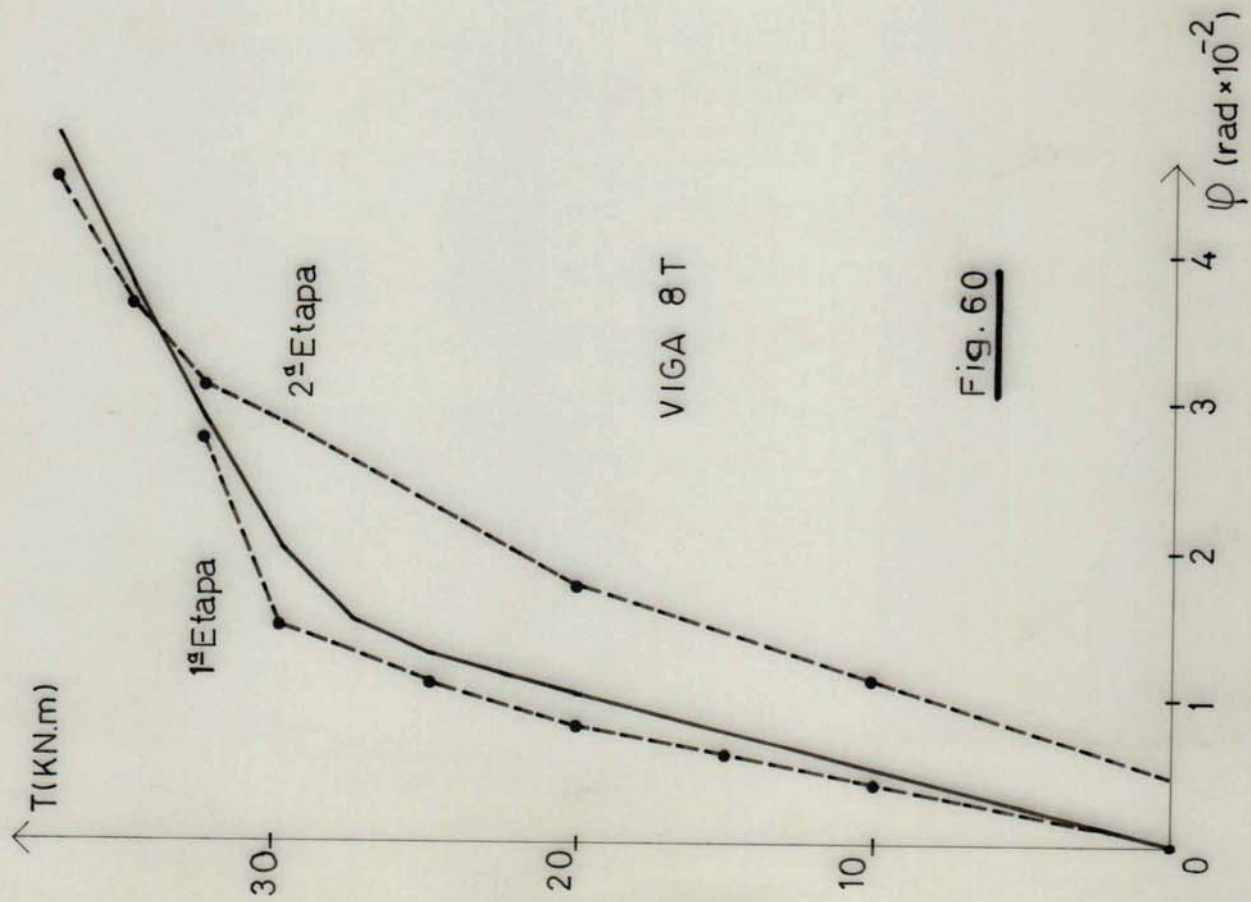


Fig. 60

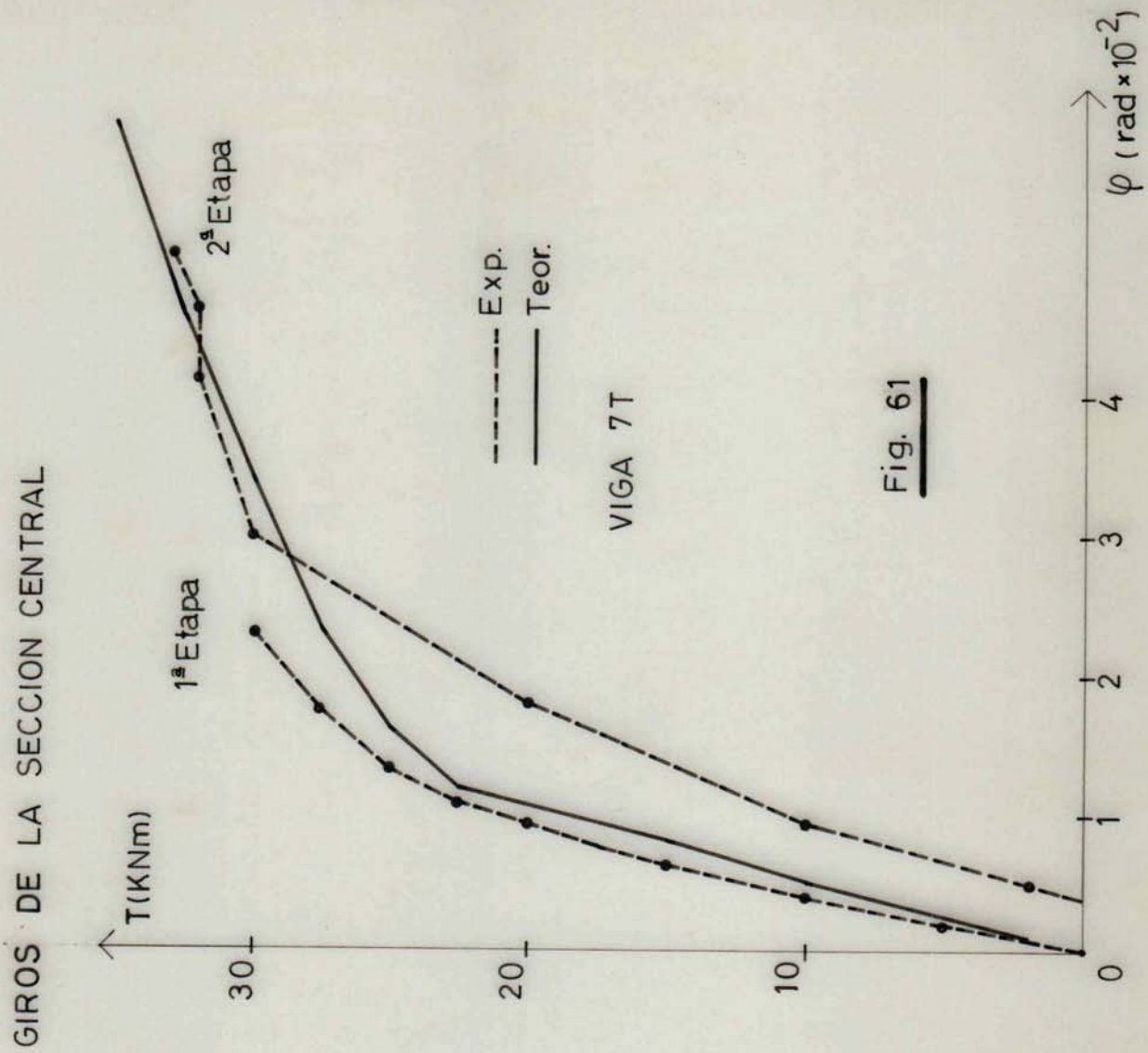


Fig. 61

INFLUENCIA DE LA CONSIDERACION DE LA
DEGRADACION DE LA RIGIDEZ TORSIONAL
DE SAINT VENAT EN LA REPUESTA TORSIONAL

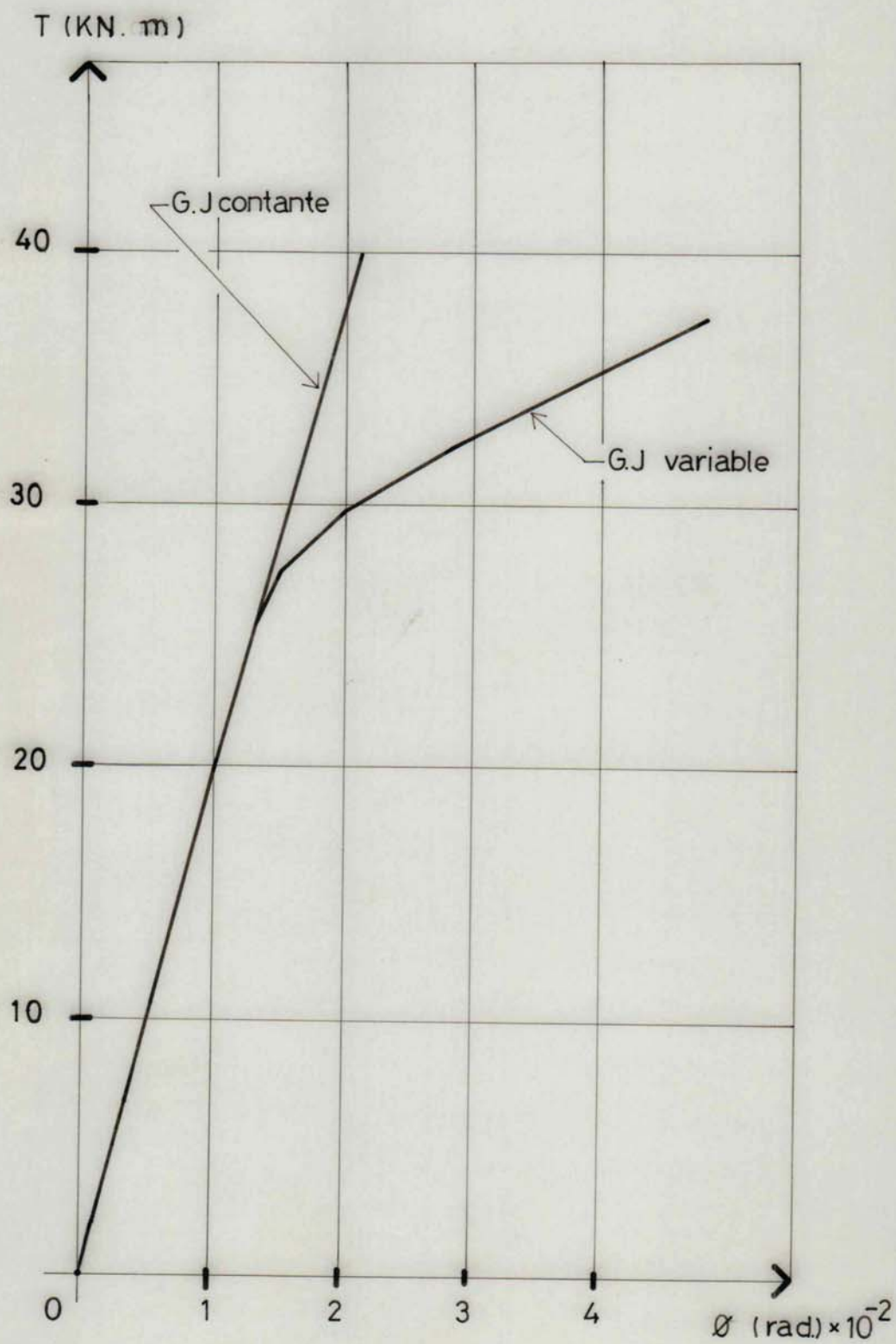


FIG. 62

INFLUENCIA DEL PRETENSADO EN LA RESPUESTA TORSIONAL

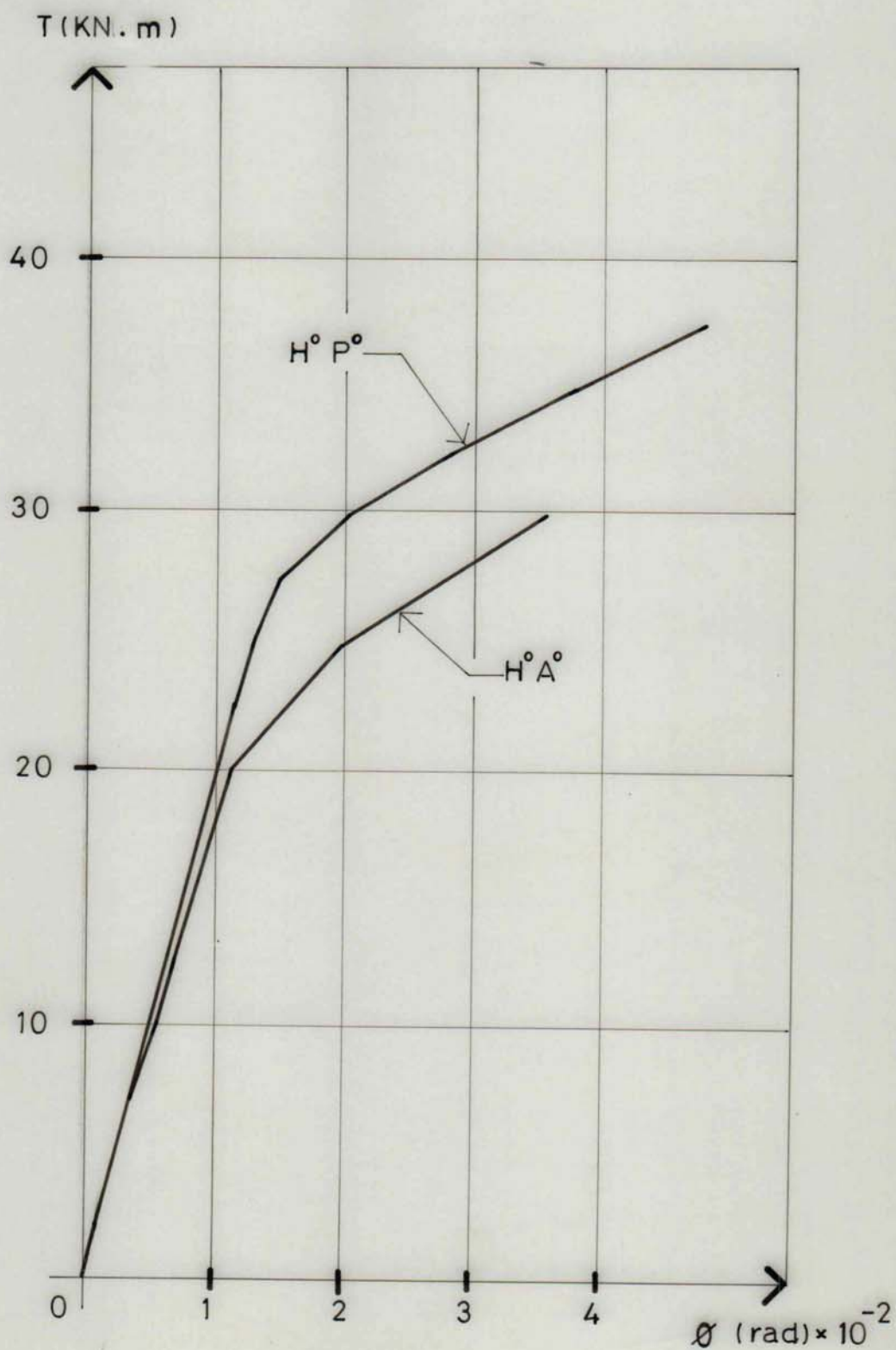


FIG. 63

VARIACION DE LOS PARAMETROS
DEL VECTOR ESTADO

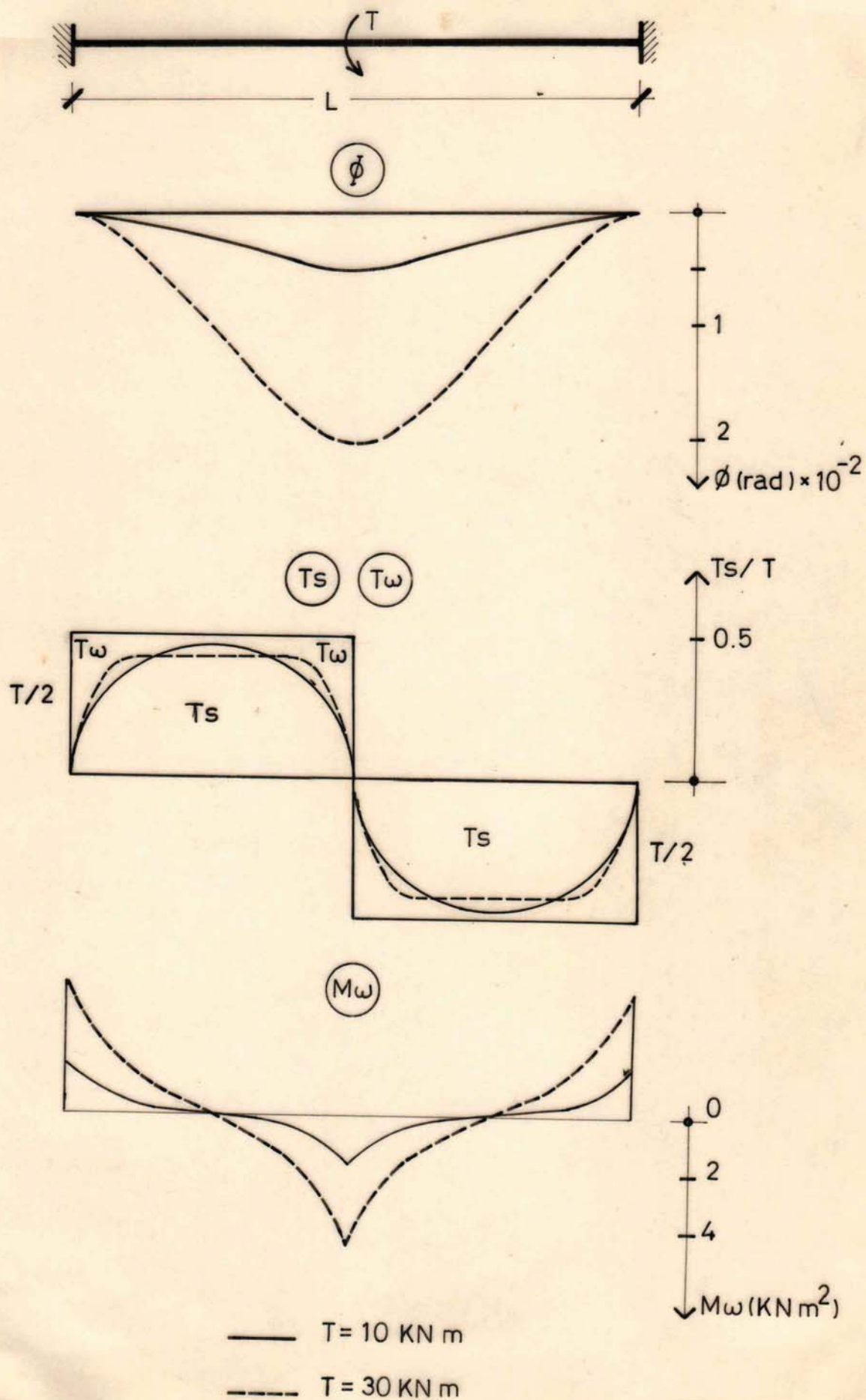


FIG. 64

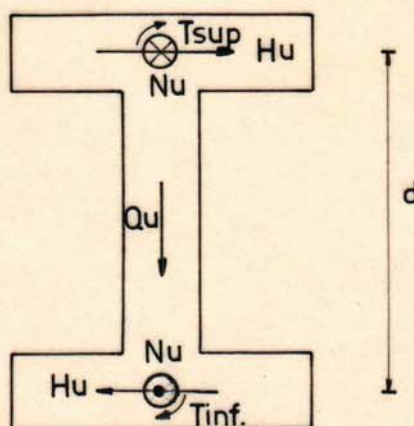
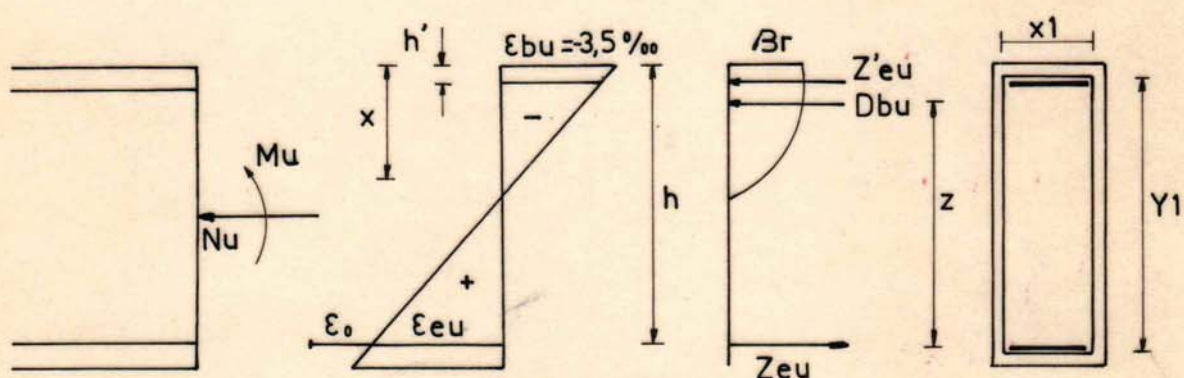


FIG.65 DISTRIBUCION DE ESFUERZOS
EN LA SECCION TRANSVERSAL



ϵ_0 : Deformación inicial debida al pretensado

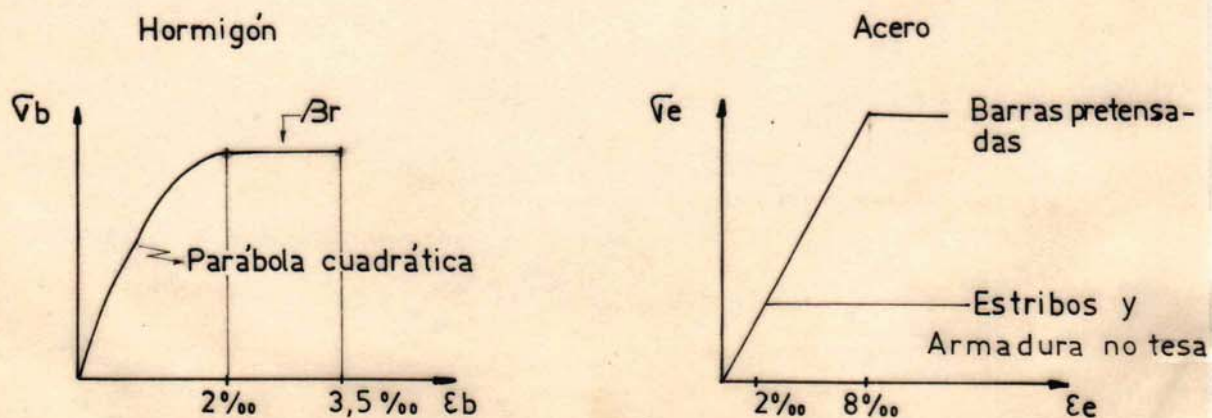


FIG. 66

DIAGRAMA DE INTERACCION TORSION - FLEXION

METODO DE EQUILIBRIO Y DEFORMACIONES LIMITES

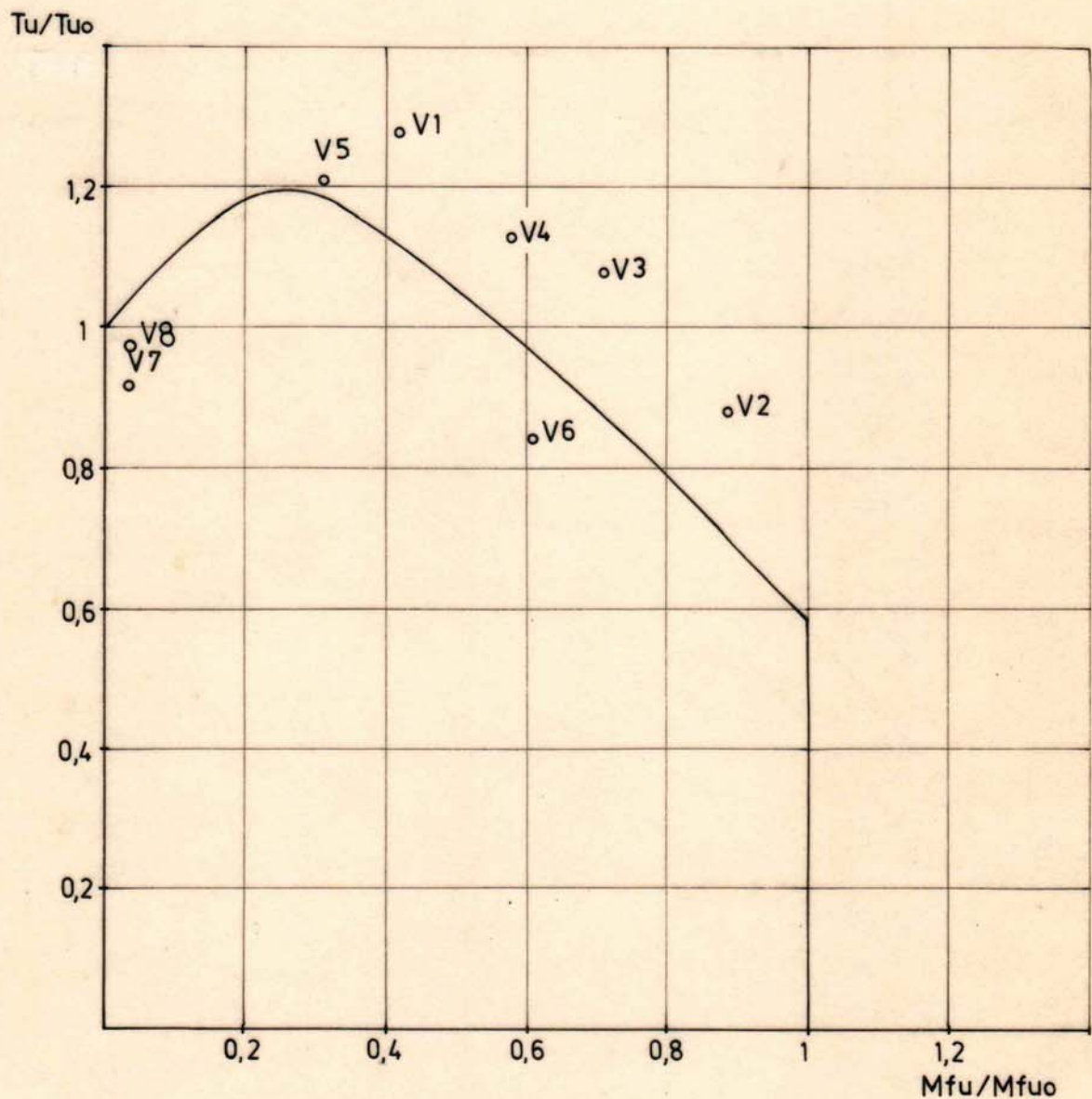
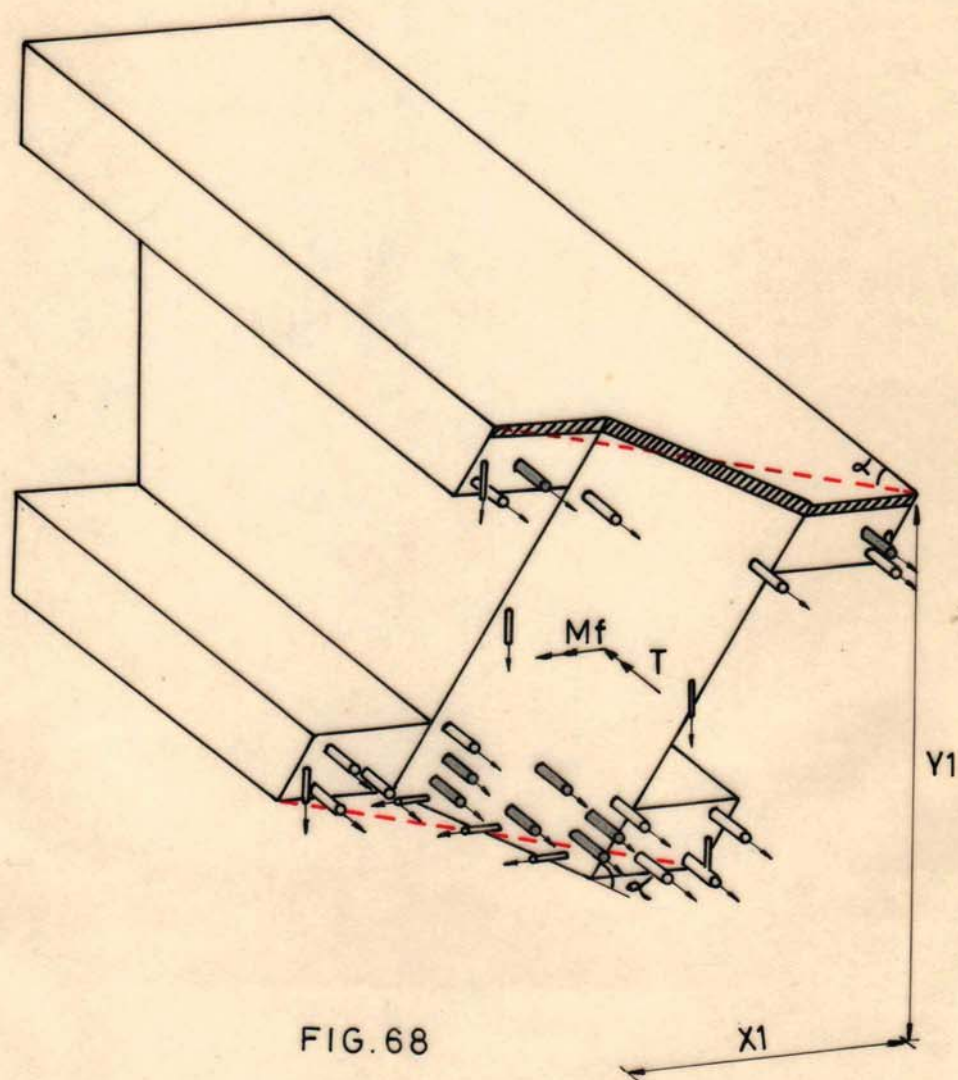


FIG. 67

ESQUEMA DE FALLA 1



ESQUEMA DE FALLA 2

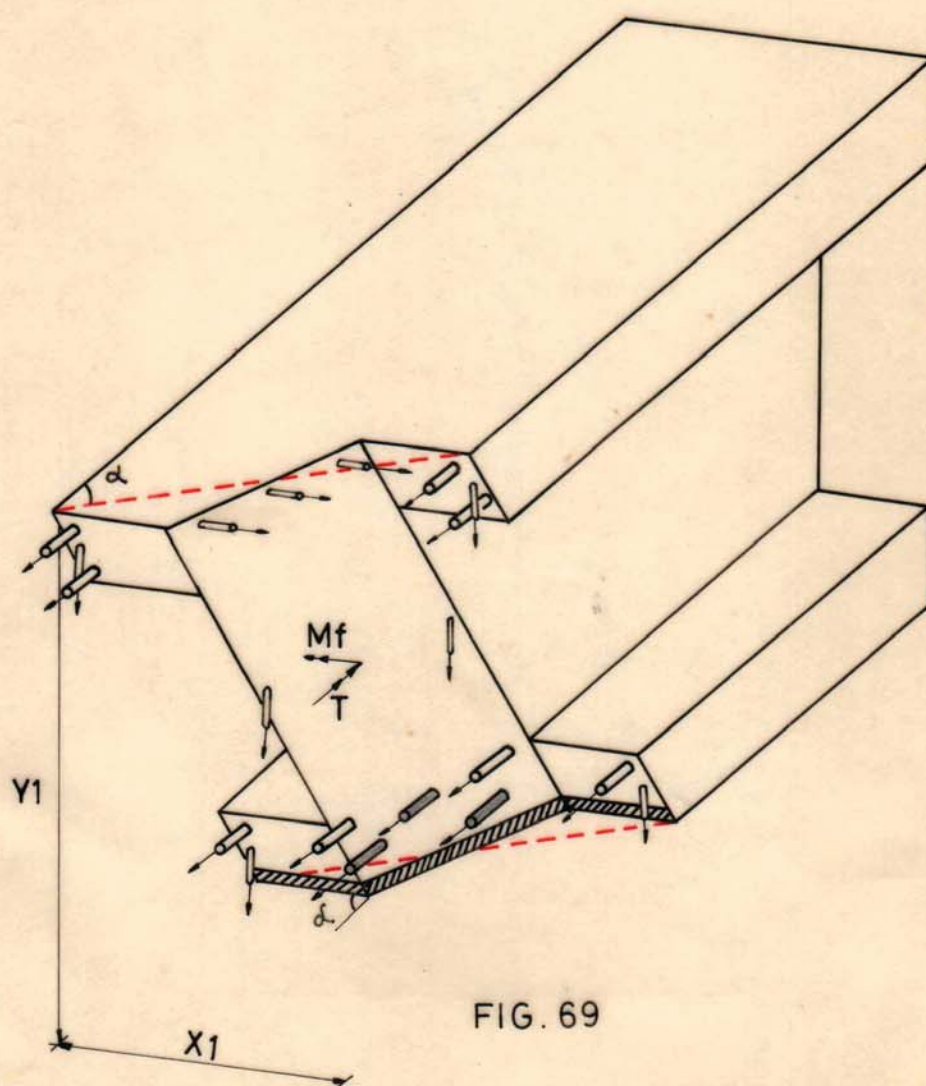
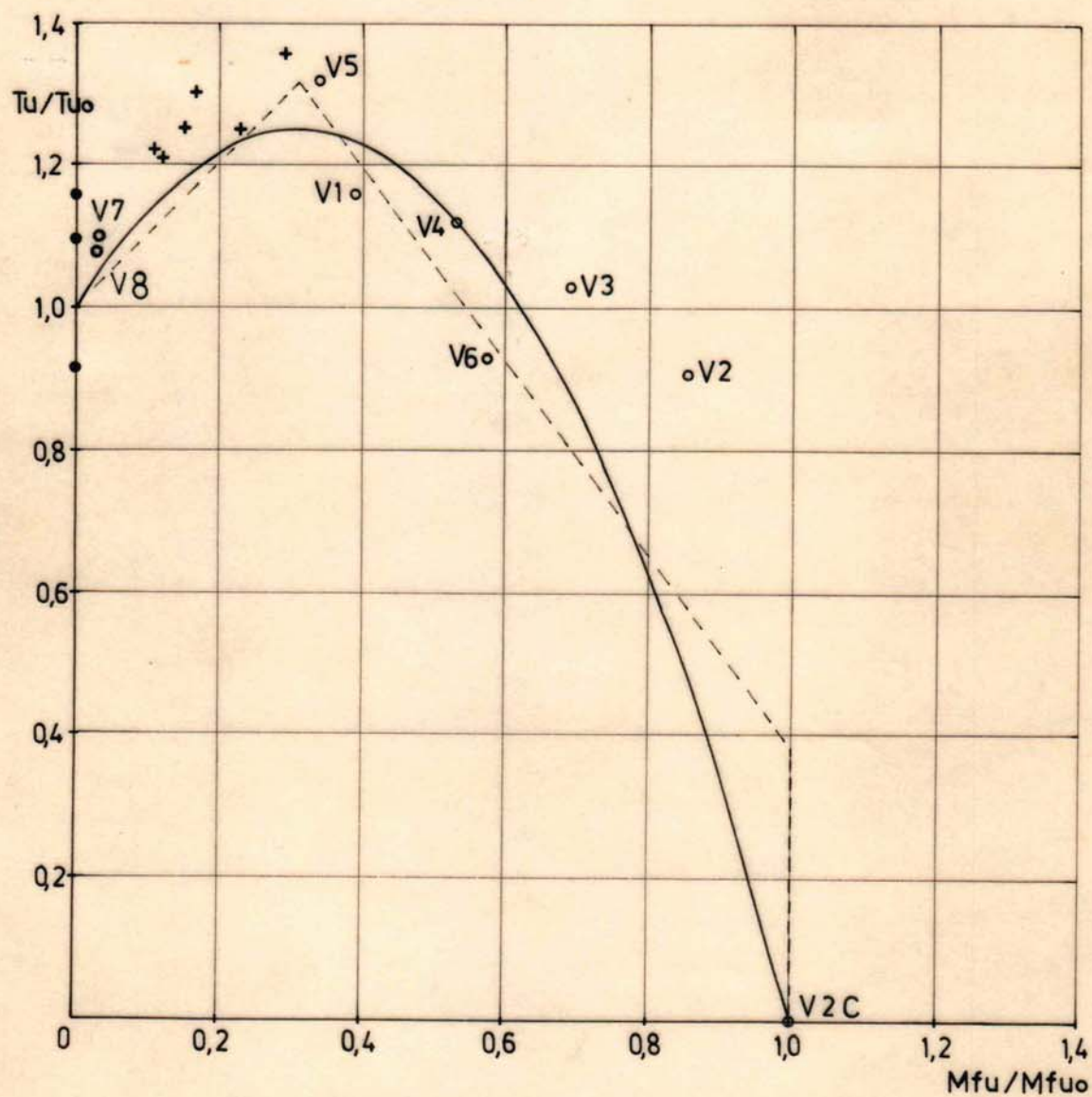


FIG. 69

DIAGRAMA DE INTERACCION TORSION - FLEXION

METODO DEL EQUILIBRIO ULTIMO



- Laboratorio Estructuras
- + Alfred Bishara
- Paul Zia

FIG. 70

METODO DE LAS DEFORMACIONES LIMITES
SOLICITACIONES

FIG. 71

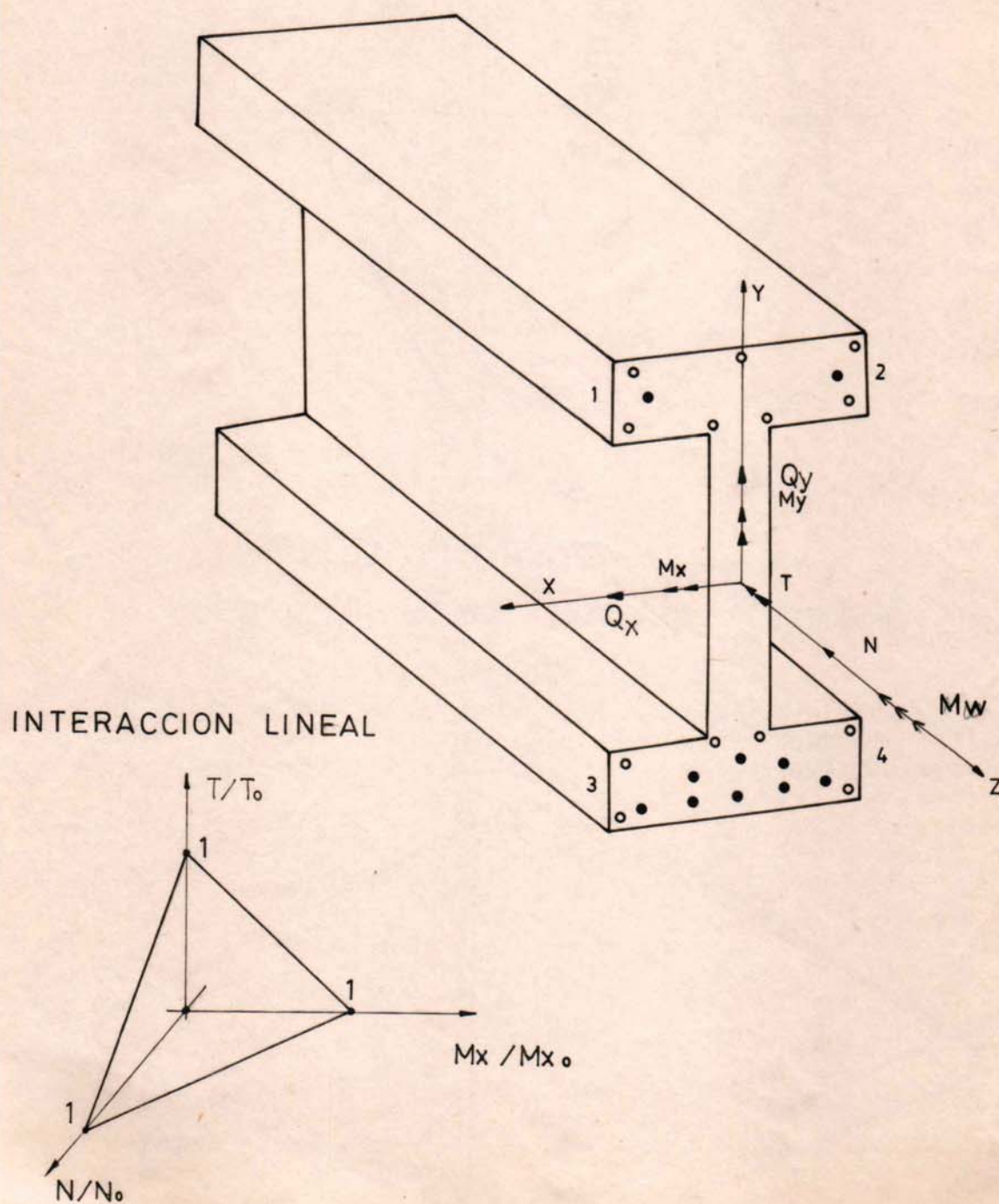
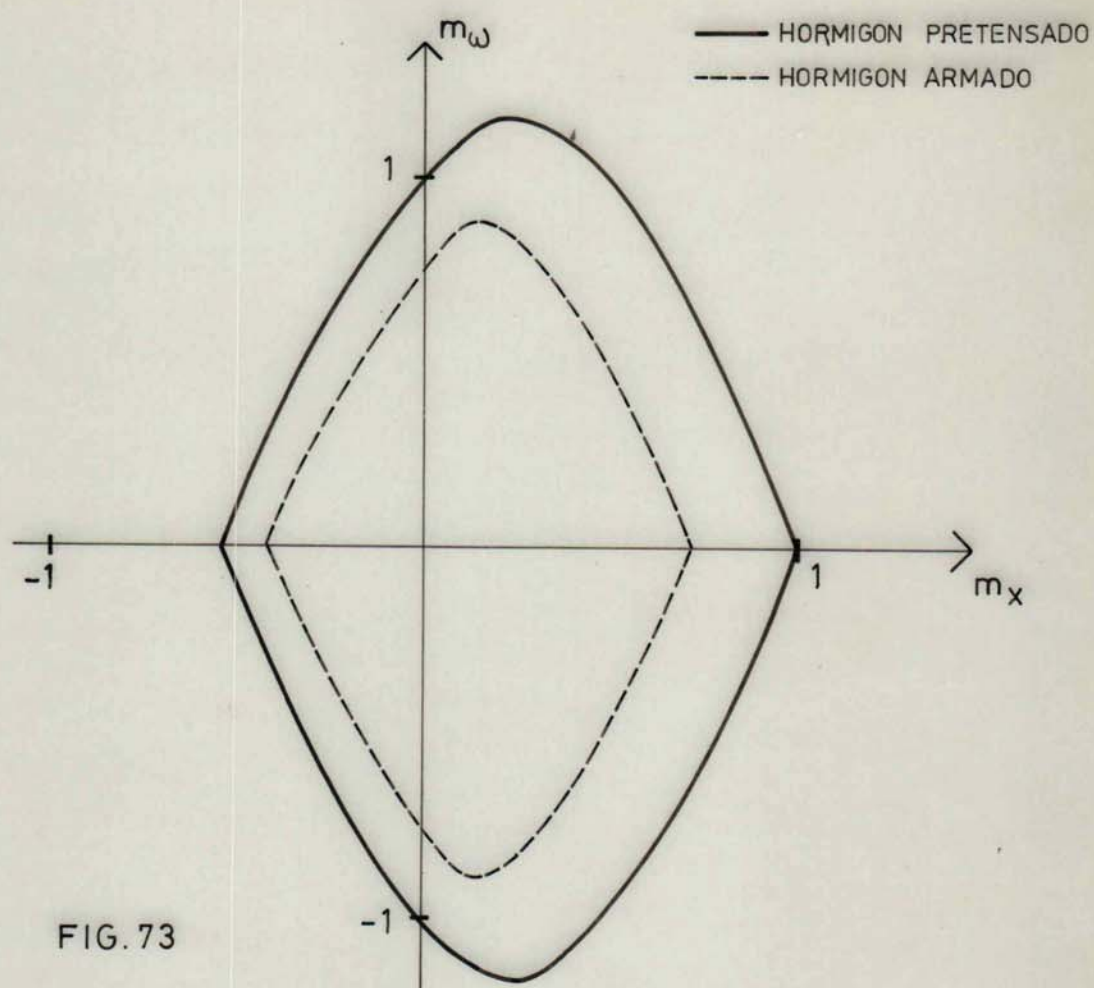
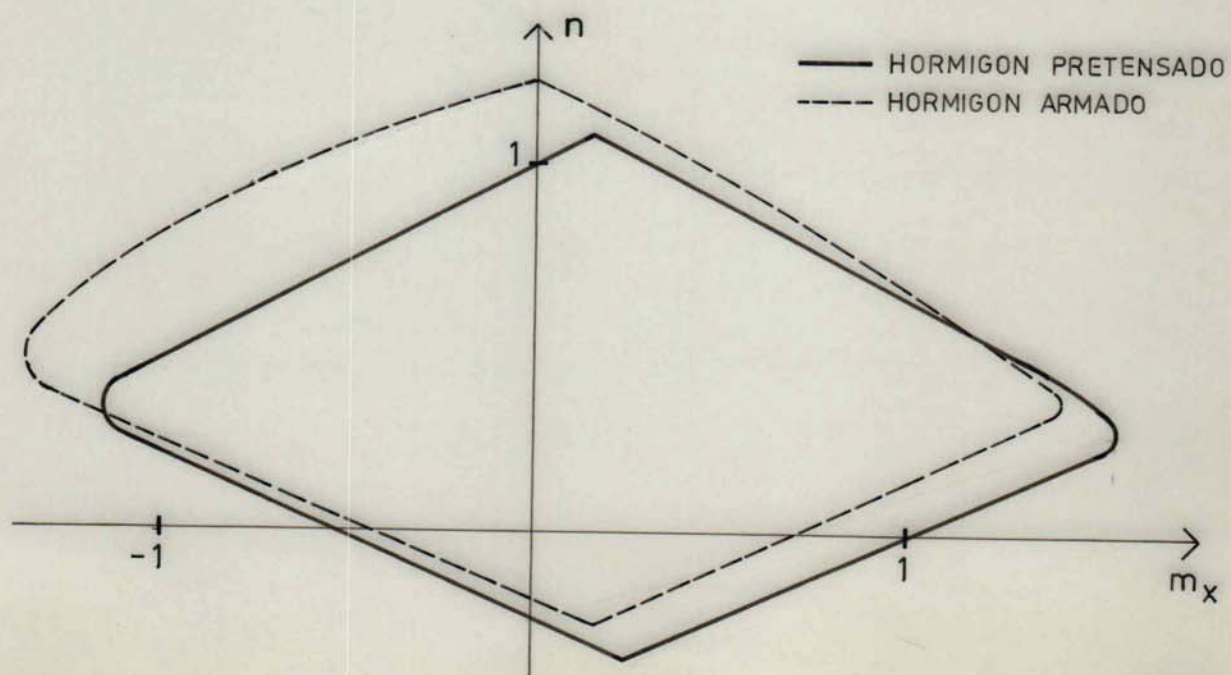


FIG. 72

CURVA DE INTERACCION
BIMOMENTO - MOMENTO FLECTOR x



CURVA DE INTERACCION
ESFUERZO NORMAL - MOMENTO FLECTOR x



CURVA DE INTERACCION
ESFUERZO NORMAL - MOMENTO FLECTOR y

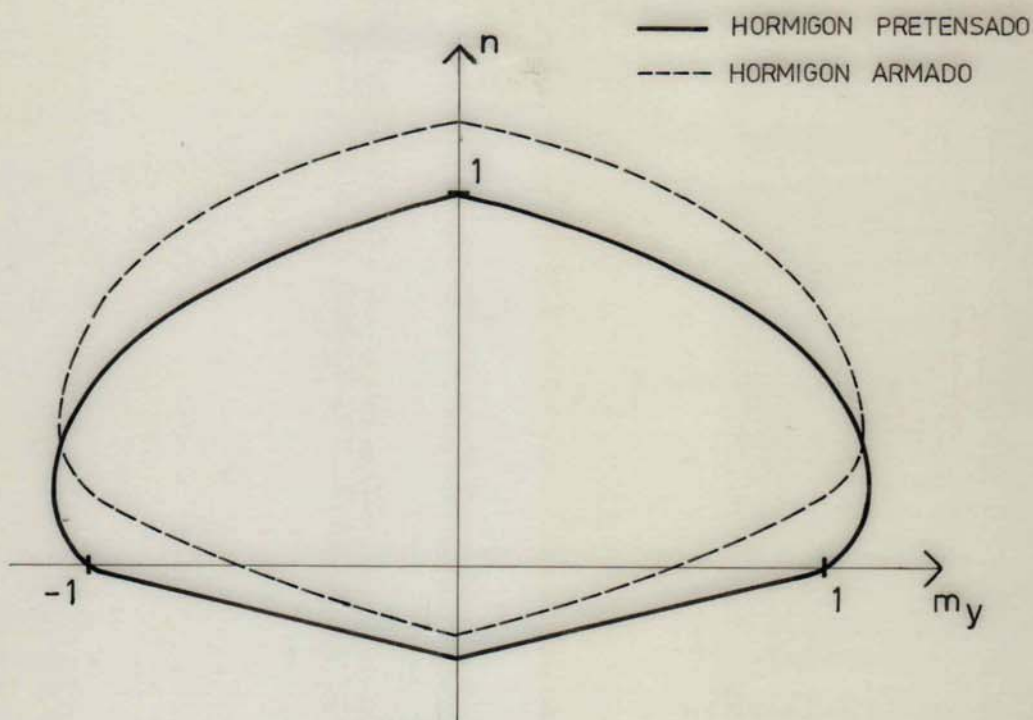


FIG. 75

CURVA DE INTERACCION
ESFUERZO NORMAL - BIMOMENTO

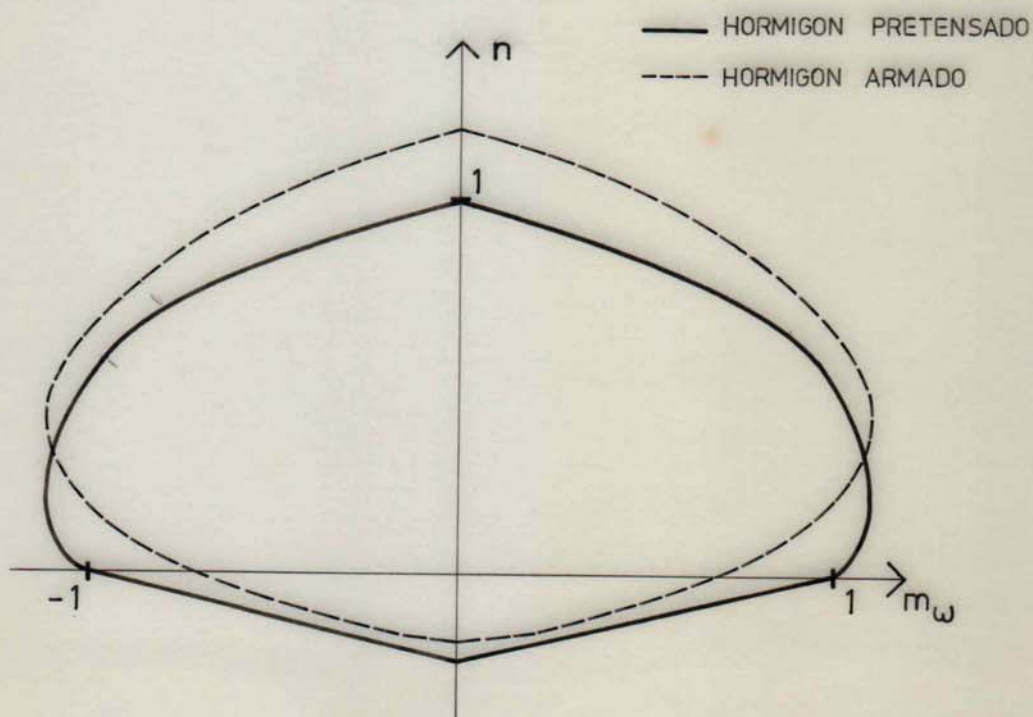


FIG. 76

CURVA DE INTERACCION
BIMOMENTO-MOMENTO FLECTOR x

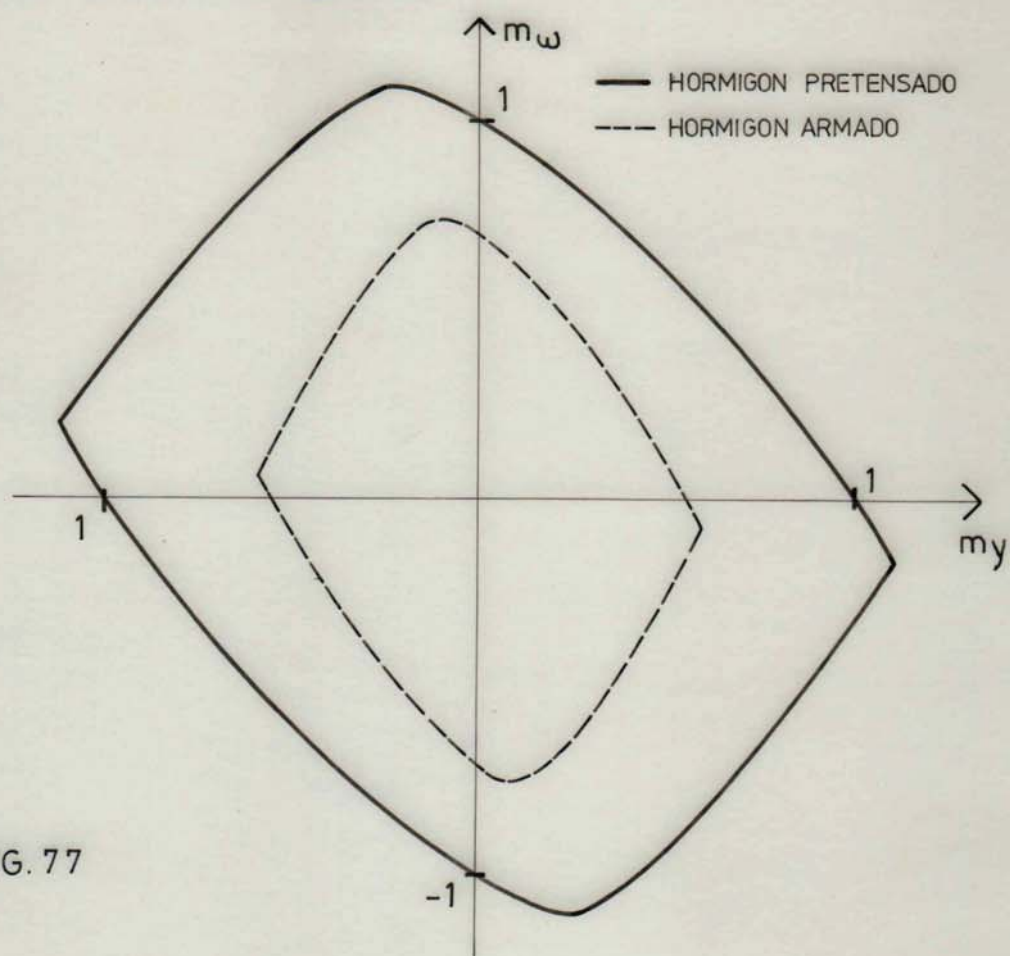


FIG. 77

CURVA DE INTERACCION
MOMENTO FLECTOR y - MOMENTO FLECTOR x

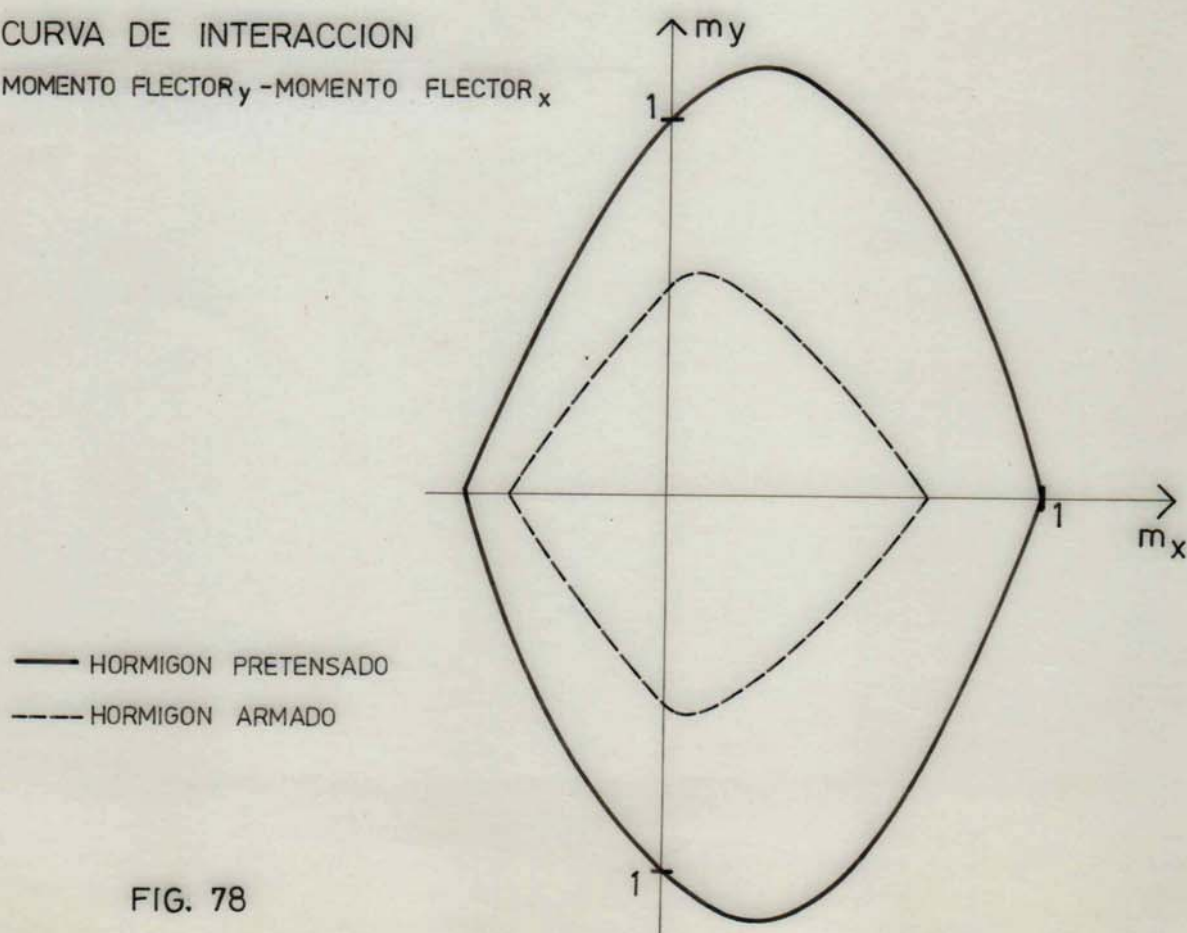


FIG. 78

SUPERFICIE DE INTERACCION

$$N=0$$

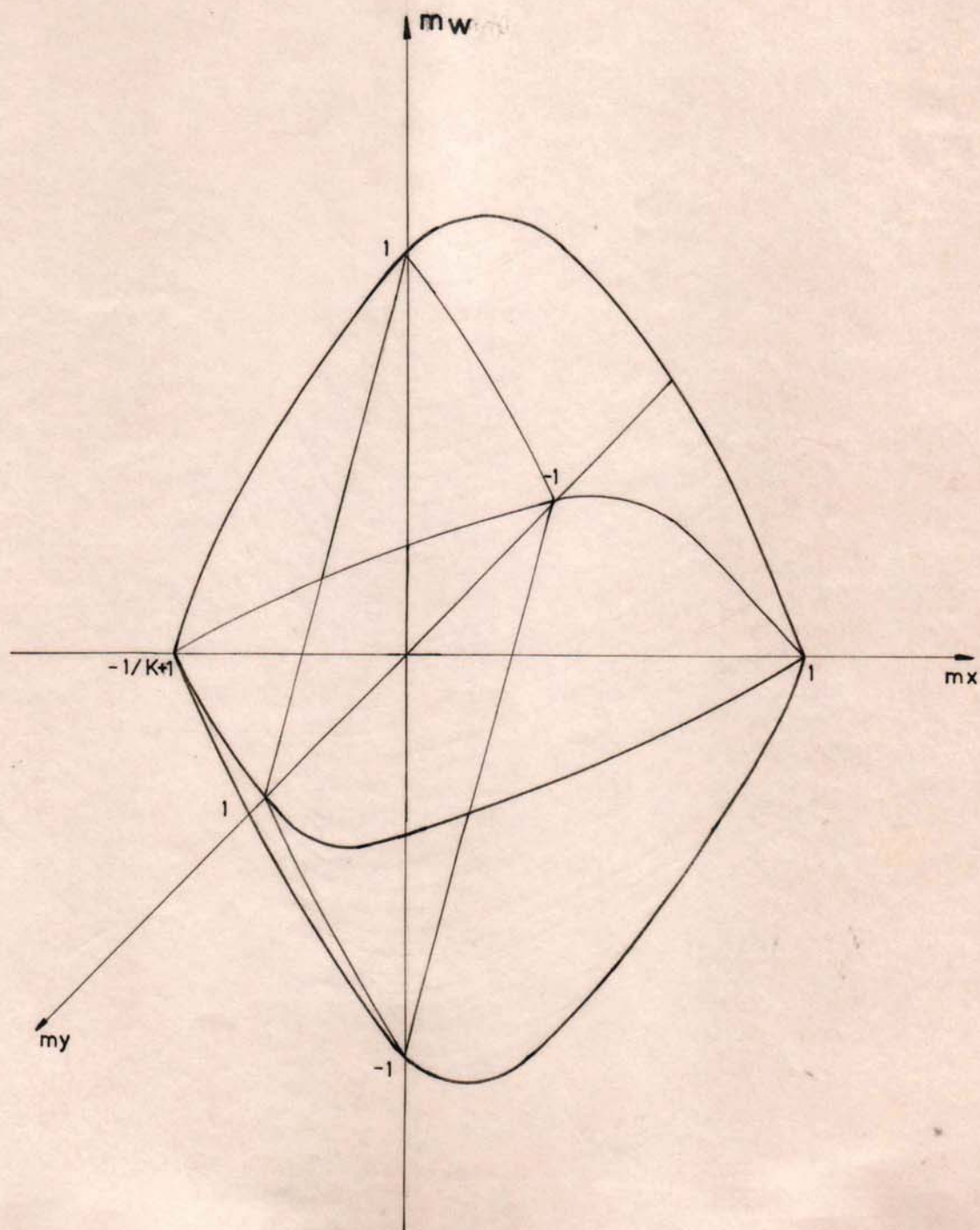


FIG. 79

SUPERFICIE DE INTERACCION

$$m_y = 0$$

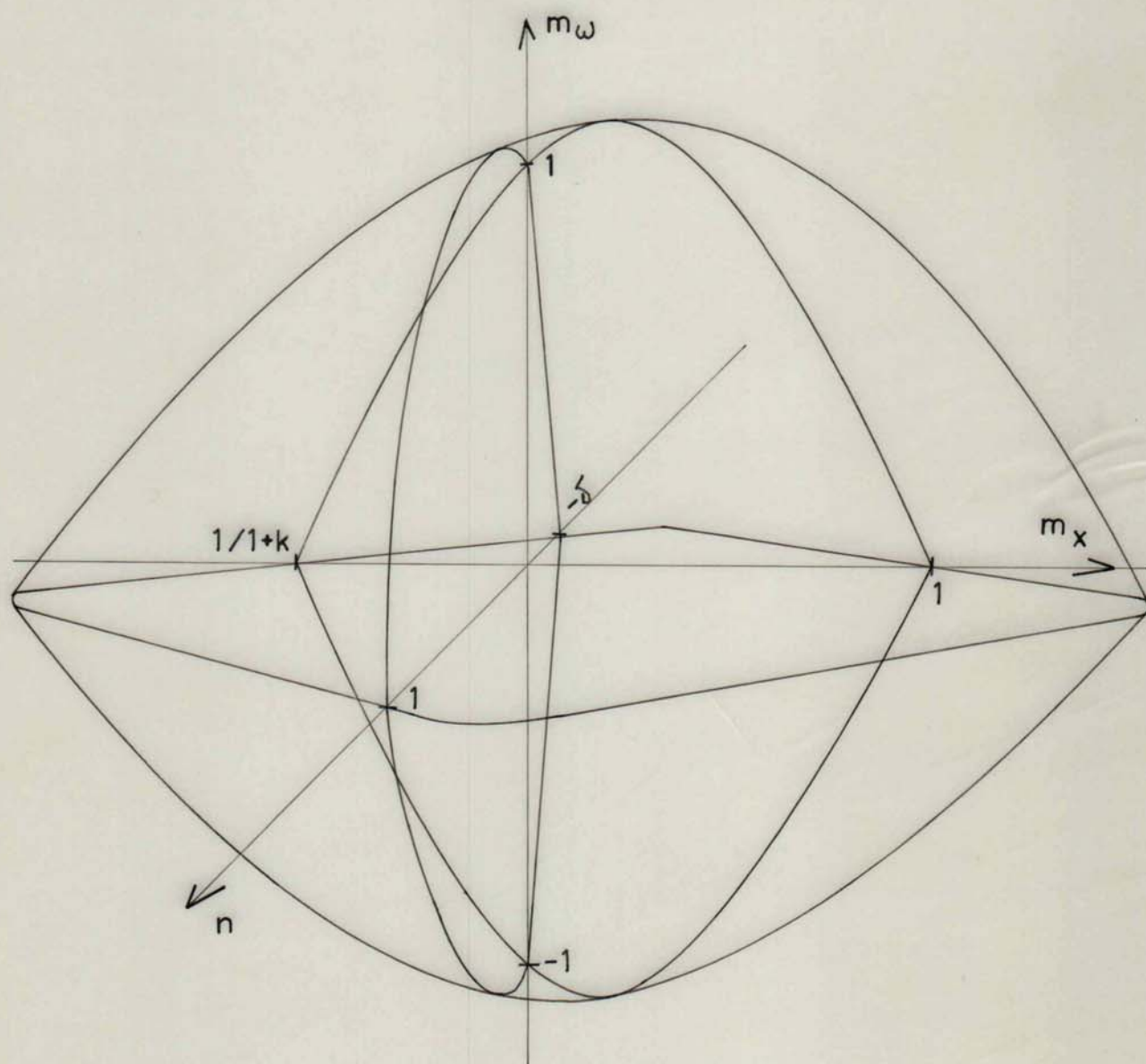


FIG. 80

5. ANALISIS DE NORMAS

5.1. INTRODUCCION

Las observaciones experimentales pusieron de manifiesto la importancia de la torsión alabeal en este tipo de secciones. Las características geométricas de las secciones ensayadas son muy similares a las comunmente empleadas en puentes de hormigón pretensado. En la práctica, para el diseño de las mismas, se recurre a reglamentos en los cuales, en general, se distinguen entre secciones macizas y secciones de paredes delgadas. Generalmente, las secciones en estudio son consideradas como tres rectángulos independientes bajo torsión circulatoria. El uso de esta hipótesis conduce a un sobredimensionamiento ya que está probado experimentalmente que la consideración de la sección como formada por tres rectángulos independientes es una hipótesis sumamente conservadora, agregándose, en el mismo sentido, la no inclusión del aporte de la torsión alabeal.

A continuación se describen las normas más importantes sobre el tema, con el objeto de mostrar cuales son las dificultades que debe enfrentar el usuario al procurar su aplicación. Las resistencias últimas evaluadas según cada una de las normas se comparan con los resultados experimentales. Dicha comparación permite ver en qué medida se aprovechan, en la determinación de las armaduras necesarias, las características de la sección como un factor de economía. Finalmente se sugiere un procedimiento práctico para el dimensionado de este tipo de secciones.

5.2. ACI COMMITTEE 318, "BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR REINFORCED CONCRETE" (ACI 318-83) (85)

Este código no incluye el tratamiento de hormigón pretensado bajo torsión y, en el desarrollo de los criterios de diseño,

no tiene en cuenta el efecto de un posible alabeo impedido, aclarando que se deberá contemplar dicho efecto en el caso de secciones abiertas de paredes delgadas.

La ecuación fundamental para la resistencia torsional de miembros de hormigón armado esta basada en los ensayos de 55 vigas subarmadas de sección rectangular (47).

$$T_n = 83,85 \cdot 0,8 \cdot (\sum x^2 \cdot y) \cdot \sqrt{f'_c} + 1000 \cdot \sum (\alpha_t \cdot X_1 \cdot Y_1 \cdot A_t \cdot f_{sy} / S) \quad (5.1)$$

$$\alpha_t = 0,66 + 0,33 \cdot Y_1 / X_1 \leq 1,5 \quad (5.2)$$

Donde:

T_n : Resistencia torsional nominal (KN.m)

X : Menor dimensión de la sección de hormigón (m)

Y : Mayor dimensión de la sección de hormigón (m)

f'_c : Resistencia a la compresión del hormigón (MPa)

X_1 : Menor longitud de la rama rectangular de estribos (m)

Y_1 : Mayor longitud de la rama rectangular de estribos (m)

A_t : Sección transversal de una rama de estribos (m²)

f_{sy} : Tensión de fluencia de la armadura longitudinal y transversal (MPa)

S : Separación entre estribos (m)

La ecuación (5.1) establece que la resistencia torsional está formada por dos partes. Una primera parte T_c provista por el hormigón, que es aproximadamente un 40% de la resistencia torsional de la sección de hormigón simple calculada por la teoría de flexión oblicua, y otra parte T_t provista por la armadura trans-

versal y calculada en base a la teoría del reticulado espacial.

Las sumas indicadas se extienden a todos los rectángulos componentes de la sección y representan una manera simplificada y conservadora de evaluar la resistencia torsional de secciones abiertas.

En el diseño se debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$T_u \leq \phi \cdot (T_c + T_t) \quad (5.3)$$

Donde:

ϕ : Factor de minoración de resistencia.

En torsión combinada con corte se acepta una curva de interacción circular para las tensiones tangenciales. En base a esta hipótesis y suponiendo que las relaciones entre tensiones tangenciales debidas a corte y torsión se mantienen constantes durante la historia de carga, la resistencia provista por el hormigón se expresa:

$$T_c = 83,85 \cdot 0,8 \cdot \sqrt{f'c} \cdot (\sum x^2 \cdot y) / \sqrt{1 + (0,4 \cdot Q_u / C_t \cdot T_u)^2} \quad (5.4)$$

Donde:

Q_u : Corte último

C_t : Factor que relaciona las tensiones tangenciales por corte y torsión.

$$C_t = b_w \cdot d_w / \sum x^2 \cdot y \quad (5.5)$$

b_w : Menor ancho de la sección

dw : Distancia de la fibra más alejada al baricentro de la armadura traccionada.

La armadura transversal calculada para resistir la torsión debe sumarse a la necesaria para corte.

La armadura longitudinal se calcula por el principio de la igualdad de volumen:

$$AL = At.2.(X1+Y1)/S \quad (5.6)$$

Donde:

AL: Area de armadura longitudinal.

Esta debe sumarse a la necesaria para resistir la flexión.

El efecto de la flexión en la resistencia a torsión del hormigón no se tiene en cuenta ya que la adopción de una resistencia al corte minorada permite cubrir dicha influencia.

La Tabla X resume los resultados encontrados para la resistencia torsional de las 8 vigas ensayadas y su comparación con la resistencia real. Debe aclararse que en los cálculos se dejó de lado el factor de minoración de resistencia ϕ para poder comparar entre sí valores últimos. Es claro que los resultados son altamente conservadores y las principales causas son:

- No consideración del aporte de la torsión alabeal.
- No consideración del esfuerzo de pretensado.
- Consideración de la sección como formada por rectángulos independientes.

TABLA X

!Viga!	!Qu/Tu!	Tc	Tt	Tu	Tu/Tuexp.
!	!	! (KN.m) !	! (KN.m) !	! (KN.m) !	!
! 1T !	2	1,82	4,41	6,23	0,32
! 2T !	4	2,19	8,82	11,01	0,51
! 3T !	4	1,87	4,41	6,28	0,36
! 4T !	2	1,96	8,82	10,78	0,41
! 5T !	2	1,63	2,09	3,72	0,22
! 6T !	4	1,54	2,09	3,63	0,31
! 7T !	0	1,48	2,09	3,57	0,20
! 8T !	0	1,76	4,31	6,08	0,25

Zia y Hsu (54) y (55) proponen una recomendación tentativa para el diseño de elementos pretensados sometidos a torsión que es una generalización del método de cálculo del ACI 318-83. Introducen un factor λ_t para tener en cuenta el efecto del pretensado en la resistencia torsional del hormigón.

$$T_n = \lambda_t \cdot T_c + T_t \quad (5.7)$$

$$\lambda_t = 2,5 \cdot \sqrt{1 + 10 \cdot \bar{f} / f'_c} - 1,5 \quad (5.8)$$

Donde:

$\bar{f}$: Tensión media de pretensado.

Este factor se obtiene a través de resultados experimentales y teniendo en cuenta que el pretensado incrementa en un factor $\sqrt{1 + 10 \cdot \bar{f} / f'_c}$ la resistencia torsional de la sección de hormigón simple.

La Tabla XI resume los valores de la resistencia torsional calculados con esta modificación y su comparación con los resultados experimentales. Es claro que la consideración del esfuerzo de pretensado conduce a una mejor estimación de la resistencia

torsional.

TABLA XI

!Viga!	δ_t	$\delta_t.T_c$	T_t	T_u	$T_u/T_{uexp.}$
!	!	! (KN.m) !	! (KN.m) !	! (KN.m) !	!
! 1T !	3,1	5,64	4,41	10,05	0,52
! 2T !	2,6	5,64	8,82	14,46	0,68
! 3T !	2,9	5,52	4,41	9,93	0,58
! 4T !	2,9	5,64	8,82	14,46	0,55
! 5T !	3,0	4,88	2,09	6,97	0,41
! 6T !	3,0	4,71	2,09	6,80	0,58
! 7T !	3,1	4,52	2,09	6,61	0,38
! 8T !	2,5	4,50	4,31	8,81	0,36

5.3. PCI DESIGN HANDBOOK. PRECAST PRESTRESSED CONCRETE (1978)
(56)

Este manual, a diferencia del ACI 318-83, tiene en cuenta el efecto del pretensado pero no menciona la posibilidad de considerar el aporte de la torsión alabeal.

El procedimiento de diseño es similar al del ACI sólo que trabaja con tensiones en lugar de resultantes.

$$v_{tu} = 3.T_u / (\bar{\phi} \cdot \sum x^2.y) \quad (5.9)$$

Donde:

v_{tu} : Tensión tangencial última debida a torsión.

$$v_{tu} = v_{tc} + v_{ts} \quad (5.10)$$

Donde:

v_{tc} : Resistencia provista por el hormigón

v_{ts} : Resistencia provista por los estribos

$$v_{tc} = R_t \cdot v'_{tc} \quad (5.11)$$

$$R_t = 1 / \sqrt{1 + (v_u / \beta_t \cdot v_{tu})^2} \quad (5.12)$$

$$v'_{tc} = 0,0838 \cdot 0,6 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot (\lambda_p - 0,60) \quad (5.13)$$

$$\lambda_p = \sqrt{1 + 10 \cdot \bar{f} / f_c} \quad (5.14)$$

$$\beta_t = v'_c / (2 \cdot v'_{tc}) \quad (5.15)$$

Donde:

v'_{tc} : Tensión tangencial provista por el hormigón en torsión pura (MPa)

v'_c : Tensión tangencial provista por el hormigón bajo corte puro (MPa)

v_u : Tensión tangencial última por corte (MPa)

$$v_{ts} = \alpha_t \cdot A_t \cdot X_1 \cdot Y_1 \cdot f_{sy} / (S \cdot \sum x^2 \cdot y) \quad (5.16)$$

$$\alpha_t = 2 + Y_1 / X_1 \leq 4,5 \quad (5.17)$$

La única diferencia con la propuesta de Zia y Hsu para la modificación del ACI 318-83 es un factor en la interacción torsión-corte.

La Tabla XII resume los resultados encontrados para las 8 vigas ensayadas y su comparación con los experimentales. De la observación de la misma se desprende que el procedimiento de cálculo es menos conservador, para este tipo de vigas que el del ACI 318-83.

TABLA XII

!Viga!	Tc	Tt	Tu	Tu/Tuexp.
! (KN.m) !	! (KN.m) !	! (KN.m) !	! (KN.m) !	! !
! 1T !	5,72	4,41	10,13	0,52
! 2T !	5,26	8,82	14,08	0,66
! 3T !	5,08	4,41	9,49	0,55
! 4T !	5,69	8,82	14,51	0,55
! 5T !	4,33	2,09	6,42	0,38
! 6T !	3,78	2,09	5,87	0,49
! 7T !	4,54	2,09	6,63	0,38
! 8T !	4,54	4,31	8,85	0,36

5.4. CEB-FIP MODEL CODE FOR CONCRETE STRUCTURES (CEB) 1978
(39)

Este código distingue dos tipos de torsión: torsión circulatoria y torsión alabeal, con la aclaración de que esta última predomina en secciones abiertas de paredes delgadas y debe ser tenida en cuenta en el diseño.

5.4.1. TORSION DE SAINT VENANT

El cálculo a torsión se basa en el modelo de reticulado espacial de ángulo variable (35). El estado límite último se caracteriza por la compresión de las bielas de hormigón o por tracción de la armadura transversal o longitudinal.

El momento de cálculo debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$T_{sd} \leq T_{rd1} \quad (5.18)$$

$$T_{sd} \leq T_{rd2} \quad (5.19)$$

$$T_{sd} \leq T_{rd3} \quad (5.20)$$

Donde:

Tsd : Momento torsor actuante

Trd1: Resistencia a torsión por compresión de las bielas de hormigón.

Trd2: Resistencia a torsión por tracción de la armadura transversal.

Trd3: Resistencia a torsión por tracción de la armadura longitudinal.

$$1) \quad \text{Trd1} = 0,50 \cdot f'c \cdot A1 \cdot \text{hef} \cdot \text{sen} 2\xi \quad (5.21)$$

p : Perímetro de la línea que une los centros de la armadura longitudinal.

A1 : Área encerrada por p

def: Diámetro del mayor círculo inscripto en el contorno p.

hef: Espesor efectivo de la pared de hormigón

$$\text{hef} = \text{def}/6 \quad (5.22)$$

ξ : Inclinação de las bielas de hormigón sobre la línea media del elemento que debe elegirse de tal manera que tanto la armadura transversal como la armadura longitudinal entren en fluencia, limitando, de esta forma el ancho de fisuras para cargas de servicio. (69). Se aconseja tomar:

$$3/5 < \cotg \xi < 5/3 \quad (5.23)$$

$$2) \quad \text{Trd2} = T_t + T_{cd} \quad (5.24)$$

Donde:

T_t : Cupla transmitida por el reticulado espacial.

T_{cd} : Colaboración del hormigón que, en realidad, incluye todos los efectos no tenidos en cuenta en el modelo del reticulado espacial (69).

$$T_s = A_t \cdot 2 \cdot A_l \cdot f_{sy} \cdot \cotg \xi / S \quad (5.25)$$

$$T_{cd} = T_c \quad \text{si} \quad T_{sd} \leq \underline{\phi} \cdot T_c \quad (5.26)$$

$$T_{cd} = 0 \quad \text{si} \quad T_{sd} \geq 3 \cdot \underline{\phi} \cdot T_c$$

$$\underline{\phi} = 1/1,5$$

T_c : Resistencia empírica dada por:

$$T_c = 2,5 \cdot \zeta_{rd} \cdot h_{ef} \cdot 2 \cdot A_l \quad (5.27)$$

ζ_{rd} : Resistencia al corte del hormigón

$$\zeta_{rd} = f'_t / 4 \quad (5.28)$$

f'_t : Resistencia a la tracción del hormigón

$$f'_t = 0,214 \cdot (f'_c)^{2/3} \quad (5.29)$$

f'_c y f'_t en MPa

$$3) \quad T_{rd3} = A_L \cdot 2 \cdot A_l \cdot f_{ly} \cdot \tg \xi / p \quad (5.30)$$

Donde:

fly: Tensión de fluencia de la armadura longitudinal

Para armadura de pretensado el área AL se toma como la menor de:

$$AL = (f_{plyk}/flyk) \cdot A_{pl}$$

(5.31)

$$AL = [(\sigma_{pl} + flyk)/flyk] \cdot A_{pl}$$

Donde:

A_{pl} : Área de armadura tesa

σ_{pl} : Tensión de pretensado

flyk y f_{plyk} : Tensiones características de fluencia de las armaduras no tesa y tesa respectivamente.

En el caso de torsión combinada con corte se debe sumar las armaduras transversales y verificar la compresión del alma mediante la ecuación:

$$T_{sd}/T_{rd1} + Q_{sd}/Q_{rd2} \leq 1$$

(5.32)

Q_{sd} : Esfuerzo de corte actuante

Q_{rd2} : Resistencia al corte teniendo en cuenta a la compresión de las bielas de hormigón.

En el caso de torsión combinada con flexión se debe sumar las armaduras longitudinales necesarias para cada solicitación en la zona traccionada por la flexión y verificar que la tensión de

compresión resultante no exceda $0,85.f'c$.

5.4.2. TORSION ALABEAL

Para elementos compuestos por tres paredes no concurrentes se aplica el siguiente procedimiento:

Las componentes de corte debidas a torsión y corte sobre cada uno de los elementos se determinan mediante ecuaciones de equilibrio estático. Estas, unidas a las fuerzas axiales debidas a flexión o esfuerzo normal, caracterizan las sollicitaciones en cada pared.

El estado límite último de la sección está caracterizado por el estado límite último de la parte más solicitada y puede ocurrir por flexión o por corte.

No resulta simple un cálculo directo mediante esta recomendación. En la fig.65 del Cap.4 se ilustra la distribución de esfuerzos en las componentes de la sección. La Tabla XIII resume los resultados para la falla por flexión y corte de las alas. En ambos casos se sumó la resistencia a torsión pura de las alas teniendo en cuenta la armadura transversal. Esta simplificación es necesaria al no conocerse de antemano cual es la parte de torsión resistida por torsión de Saint Venant y cual por torsión alabeal. Según la Tabla XIII la falla queda siempre definida por flexión.

Este Código es el único que menciona cómo tratar el caso en que exista torsión alabeal. Si bien el procedimiento de cálculo resulta algo complicado, permite determinar una carga última que representa una mejor aproximación al comportamiento real.

TABLA XIII

! Viga !	Flexion		! Tu/Tuexp. !	Corte		! Tu/Tuexp. !
	Tu (KN.m)			Tu (KN.m)		
! 1T !	11,65	!	0,60	!	17,40	!
! 2T !	17,89	!	0,84	!	27,93	!
! 3T !	12,21	!	0,70	!	18,04	!
! 4T !	14,85	!	0,56	!	25,85	!
! 5T !	13,00	!	0,76	!	16,34	!
! 6T !	12,11	!	1,02	!	16,09	!
! 7T !	13,34	!	0,76	!	14,76	!
! 8T !	20,22	!	0,83	!	22,07	!

5. CIRSOC 201. PROYECTO, CALCULO Y EJECUCION DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO (73)

La recomendación CIRSOC 201, basada en las normas alemanas DIN 1045, utiliza también el modelo del reticulado espacial con bielas de hormigón inclinadas a 45° respecto al eje longitudinal para el caso de torsión.

No menciona en ningún momento el tratamiento de secciones abiertas en las que pudiera existir alabeo impedido.

El esfuerzo de pretensado se tiene en cuenta en los valores límite para las tensiones.

En el caso de torsión combinada con flexión y corte se debe verificar la compresión de las bielas de hormigón y las tensiones tangenciales. Si estas últimas exceden ciertos valores consignados en tablas se debe verificar la armadura transversal de torsión y corte. Las armaduras transversales se dimensionan por separado para los esfuerzos de tracción en los montantes de una viga reticulada ideal y luego se suman.

En la Tabla XIV se resumen los resultados encontrados para la resistencia torsional de las 8 vigas ensayadas en base a la armadura transversal. Se sumó la contribución de los rectángulos componentes a falta de otra aclaración al respecto. Es claro

que se trata de un procedimiento muy conservador al no tener en cuenta la resistencia a torsión del hormigón en el dimensionado de la armadura transversal.

TABLA XIV

!Viga!	Tu	!Tu/Tuexp.!
! ! (KN.m) !		!
! 1T !	4,02	! 0,21 !
! 2T !	6,11	! 0,29 !
! 3T !	3,06	! 0,18 !
! 4T !	8,04	! 0,30 !
! 5T !	2,04	! 0,12 !
! 6T !	1,60	! 0,14 !
! 7T !	2,79	! 0,16 !
! 8T !	5,75	! 0,24 !

5.6. NORMA NEOZELANDESA (86)

En general adopta las recomendaciones del Código canadiense (87). Para el tratamiento del hormigón pretensado remite a Ref. (59) y no menciona la torsión alabeal.

El diseño se basa en la expresión:

$$T_u < \phi \cdot T_i \quad (5.33)$$

Donde:

T_i es la resistencia torsional ideal de la sección

En el estado fisurado la viga se idealiza como un tubo de paredes delgadas cuyo espesor es:

$$t_o = 0,75 \cdot A_1/p \quad (5.34)$$

Para verificar la compresión de las bielas de hormigón se usa la siguiente expresión:

$$v_{ti} = T_i / (2 \cdot A_l \cdot t_o) \quad (5.35)$$

Esta tensión tangencial debe ser menor que la menor de $0,2 \cdot f'_c$ y 6 MPa. El valor $0,2 \cdot f'_c$ es una aproximación conservativa a los valores previstos por la teoría del campo de compresión diagonal (37), (88).

Para el dimensionado de la armadura transversal se emplea nuevamente el concepto del tubo delgado pero con un espesor:

$$t_s = \sqrt{(A_t \cdot A_l) / (S \cdot p)} \quad (5.36)$$

La resistencia torsional se calcula como:

$$T_i = 2 \cdot A_l \cdot f_{ys} \cdot \sqrt{(A_t \cdot A_l / S \cdot p)} = 2 \cdot A_l \cdot t_s \cdot f_{sy} \quad (5.37)$$

Es conveniente tomar para la armadura longitudinal:

$$A_l / p = A_t / S \quad (5.38)$$

En este procedimiento se acepta que no hay interacción entre la torsión y la flexión o el corte o esfuerzos normales. En consecuencia, las armaduras transversal y longitudinal, simplemente se suman a las necesarias para resistir otras sollicitaciones.

En la Tabla XV se resumen los resultados encontrados para las 8 vigas ensayadas y su comparación con los resultados experimentales. No se tuvo en cuenta el efecto del pretensado ya que su tratamiento no está especificado en la norma misma. Los resultados son bastante conservadores pero mucho menos que los obtenidos, por ejemplo, con el CIRSOC 201, aún cuando en este caso no se tiene en

cuenta tampoco la resistencia a la torsión del hormigón. La mejora se atribuye a que el modelo del campo de compresión diagonal es un modelo mucho más elaborado que el modelo de reticulado ideal y está probado experimentalmente, que predice adecuadamente el comportamiento bajo cargas de elementos de sección rectangular.

TABLA XV

!Viga!	Tu	!Tu/Tuexp!
! (KN.M) !		
! 1T !	19,45	! 0,55 !
! 2T !	21,38	! 0,71 !
! 3T !	17,25	! 0,62 !
! 4T !	26,50	! 0,58 !
! 5T !	17,00	! 0,37 !
! 6T !	11,81	! 0,54 !
! 7T !	17,50	! 0,36 !
! 8T !	24,25	! 0,38 !

5.7. MODELO PROPUESTO

En el punto 4.2.3. se incluye un modelo de rotura denominado "Método del Equilibrio Ultimo". Con este metodo se ha determinado la curva de la fig.70 del Cap.4 cuya ecuación es la (4.75).

La curva propuesta conduce a un procedimiento práctico para el dimensionado de la armadura transversal. Conocidas las solicitaciones últimas y definida la sección transversal y las armaduras longitudinales, se puede calcular la armadura transversal. Para ello se calcula M_{fuo} y se obtiene T_{uo} de la ecuación (4.75), con T_{uo} y la ecuación (4.74) se calcula A_t .

Como limitación debe señalarse que se trata de modelos de falla para un tipo particular de sección ya que el coeficiente k toma diferentes valores segun las características de la misma (61).

Como comparación se han representado en la fig.81 las

curvas correspondientes a momento torsor último para torsión simple en función de la armadura transversal según los distintos reglamentos y el método mencionado para un hormigón de resistencia a la compresión 34,8 MPa. Puede observarse que la curva propuesta es menos conservadora que todos los reglamentos a partir de una cierta cuantía de armadura transversal. La parte correspondiente a pequeñas cuantías no es válida porque conduce a una resistencia torsional nula para la sección de hormigón simple. Esto se debe a que el modelo está basado en observaciones del comportamiento de vigas con armadura transversal. Este tipo de limitación aparece también en los reglamentos. La armadura mínima definida en el ACI 318-83 corresponde a aquella para la cual se tiene la resistencia torsional de la sección de hormigón simple. De hecho, debe existir también un límite superior para la armadura transversal para asegurar que la misma entre en fluencia antes de la falla y evitar que se produzca una rotura brusca del hormigón. Este límite no aparece en el modelo propuesto y debe ser calculado de acuerdo a otra teoría.

RESISTENCIA TORSIONAL EN FUNCION DE LA ARMADURA TRANSVERSAL

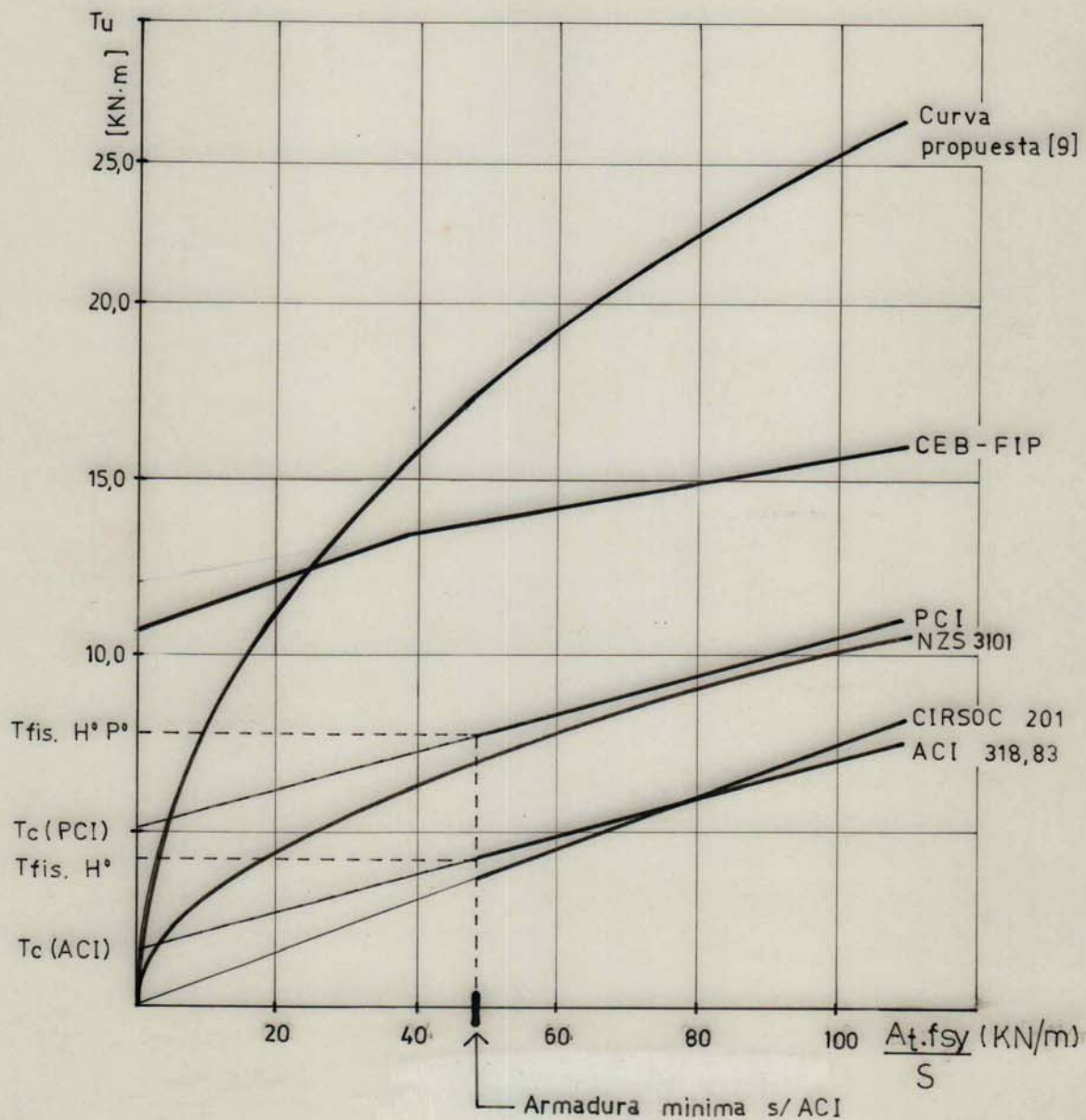


FIG. 81

6. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

6.1. CONCLUSIONES

1. Los resultados experimentales demuestran que en las vigas doble T, comunmente usadas en puentes, son importantes tanto la torsión de Saint Venant como la torsión alabeal y ninguna de las dos formas de torsión puede ser dejada de lado.
2. La restricción al alabeo impuesta por los diafragmas extremos, que puede asimilarse al efecto de las vigas transversales en los puentes, es casi total.
3. En el comportamiento general de las vigas se distinguen claramente dos etapas: una primera etapa lineal elástica y una segunda etapa marcadamente no lineal que se inicia en correspondencia con la carga de fisuración.
4. La influencia de las dos formas de torsión es muy clara en los cuadros de fisuración y en las formas de rotura.
5. La fisuración comienza generalmente en las alas debido a la torsión alabeal y se extiende luego al alma con fisuras inclinadas debidas a la torsión circulatoria.
6. La rotura queda definida por aplastamiento del hormigón en el ala más comprimida o por la entrada en fluencia de la armadura transversal.
7. En los ensayos se alcanzan deformaciones máximas en el hormigón mucho mayores que las fijadas por los planos límites.

8. Debe notarse que la carga última determinada experimentalmente significa deformaciones (giros) de gran magnitud acompañadas de enormes grietas, inadmisibles desde todo punto de vista. Por tal motivo, a los fines de la fijación de una carga admisible, habría que considerar valores menores. La carga límite podría estar dada por aquella para la cual la armadura transversal alcanza la fluencia
9. La teoría de Vlasov reproduce adecuadamente el comportamiento de las vigas en estudio antes de fisuración y puede ser extendida al análisis de todo el comportamiento.
10. El modelo para la respuesta no lineal, aunque simplificado, predice adecuadamente la degradación de la rigidez bajo carga.
11. El procedimiento propuesto para la solución de la ecuación diferencial de torsión mixta resulta simple, converge rápidamente y puede ser extendido a la solución de problemas de flexo-torsión. Es aplicable al análisis tanto de vigas de hormigón armado o pretensado como al caso de núcleos de edificios de hormigón armado que son elementos estructurales que presentan este tipo de solicitaciones. Por otro lado, el vector de estado elegido permite disponer de los parametros esenciales en el análisis.
12. La rigidez torsional de Saint Venant obtenida a partir del modelo de reticulado espacial representa adecuadamente la rigidez pos-fisuración de secciones que difieren bastante de la sección cajón ideal usada como base en la deducción de dicho modelo.

13. En las vigas ensayadas la torsión alabeal es importante desde el punto de vista de la resistencia última. Sin embargo, la caída de rigidez alabeal no influye en la pérdida de rigidez torsional global de las mismas.
14. La curva propuesta para la interacción torsión flexión tiene la misma forma que la curva de interacción correspondiente a vigas de sección rectangular de hormigón armado o pretensado con armadura asimétrica.
15. Para una flexión moderada se produce un incremento en la resistencia torsional de las vigas en estudio.
16. El esfuerzo de pretensado permite obtener cargas de fisuración más elevadas y aumenta la resistencia y la rigidez general de las vigas.
17. El método propuesto para la generación de superficies de interacción es muy simple conceptualmente y sumamente adecuado para elementos de sección abierta y paredes delgadas donde cobra importancia la torsión alabeal.
18. El tratamiento de la torsión con alabeo impedido en elementos de hormigón pretensado es generalmente poco claro o incluso ignorado en la mayoría de los reglamentos. Sin embargo, es necesaria su consideración, sobre todo en elementos de sección abierta y paredes delgadas en los que la aplicación estricta de las normas conduce a una subestimación de la resistencia torsional, ya sea por la omisión del aporte de la torsión alabeal o de la fuerza de pretensado o debido a la consideración de la sección como formada

por rectángulos independientes.

En este tipo de secciones se debe hacer un análisis completo de los mecanismos de falla que revele el comportamiento real del miembro torsionado. Es por esto que se sugiere el procedimiento de cálculo descrito en el punto 5.7. que a su vez resulta de simple aplicación.

6.2. SUGERENCIAS PARA PROXIMOS TRABAJOS

1. Se puede demostrar que, una vez fisuradas las vigas, la caída de rigidez torsional global depende casi exclusivamente de la rigidez a torsión circulatoria. Es por esto que cobra especial importancia la determinación de la misma. Hasta el momento no se conocen fórmulas para el cálculo de la rigidez pos-fisuración a torsión circulatoria para secciones de forma cualquiera. Su tratamiento resulta bastante arduo, por ello se sugiere, en proximos ensayos, la instrumentación de la armadura transversal y longitudinal con el objeto de lograr una idea más clara de los mecanismos reales de resistencia a esta forma de torsión.

2. Otro aspecto importante a estudiar es la respuesta del hormigón bajo estados combinados de tensiones. En este trabajo se supuso, como simplificación, que las tensiones tangenciales y normales no interactúan en lo que hace a la degradación de las rigideces. Sin embargo, dicha interacción existe y su consideración en un análisis estricto del problema es necesaria, sobre todo si se trata de torsión combinada con flexión y corte.

El conocimiento de dicha interacción, en lo que hace a los valores límites de las deformaciones, permitiría completar la superficie de interacción obtenida, incluyendo solicitaciones que

produzcan tensiones tangenciales.

3. Para lograr un mejor ajuste de los modelos teóricos, es necesario disponer de resultados experimentales de todo el comportamiento de los materiales que eviten la utilización de diagramas convencionales.

REFERENCIAS

- (1) Vlasov V.Z., "Thin-Walled Elastic Beams", Translated from Russian by the Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel, 1961.
- (2) Kollbrunner, C.F. y Basler K., "Torsion in Structures-An Engineering Approach", Springer Verlag, Berlin 1969.
- (3) Krpan P., "The Behaviour of Open, Thin-Walled, Restrained, Reinforced Concrete Members in Torsion", Thesis submitted in conformity with the requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in the University of Toronto, Canada, 1974.
- (4) Krpan P. and Collins M.P., "Predicting Torsional Response of Thin-Walled Open R.C. Members", ASCE Journal of the Structural Division, Vol 107, N ST6, June 1981.
- (5) Krpan P. and Collins M.P., "Testing Thin Walled Open RC Structures in Torsion", ASCE Journal of the Structural Division, Vol 107, N ST6, June 1981.
- (6) Bredt R., "Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizitat", Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Band 40, No 28, July 11, 1896, pp.785-790, No. 29, July 18, 1896, pp.813-817.
- (7) Coulomb C.A., "Recherches Théoriques et experimentales sur la Force de Torsion et sur l'Élasticité des Fils de Métal", Histoire de l'Academie Royal des Sciences, L'Imprimerie Royale, Paris, 1787, pp.229-269.
- (8) Navier C.L., "Résumé de Leçons Données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Établissement des Constructions et des Machines", Première Partie, Firmin Didet, Paris 1826.
- (9) Saint Venant, B. "Mémoire sur la Torsion de Prismes", Mémoires des Savants Etrangers, Imprimerie Impériale, Paris 1856.
- (10) Prandtl, L., "Zur Torsion von Prismatischen Staben", Physik Zeitschrift 4, 1903.
- (11) Bach B., "Elasticitat und Festigkeit, 6th ed., 1911.
- (12) Gjelsvik A., "The Theory of Thin Walled Bars", Wiley Interscience Publications, USA 1981.
- (13) Tso W.K., Biswas, J.K., "General Analysis of Nonplanar Coupled Shear Walls", ASCE Journal of the Structural Division, Vol.99, ST 3, March 1973.
- (14) Biswas J.K., Tso W., "Three Dimensional Analysis of Shear Wall Buildings to Lateral Load, ASCE Journal of the Struc.Div., Vol.100, No. ST5, May 1974.
- (15) Rutenberg A.V., Tso W., "Torsional Analysis of Perforated Core Structures", ASCE Journal of the Struc.Div., Vol.101, No.ST3, March 1975.

- (16) Heidebrecht A.C., Swift R., "Analysis of Asymmetrical Coupled Shear Walls", ASCE Journal of the Struc.Div., Vol.97, No.ST5, May 1971.
- (17) Chaudhary A., "Generalized Stiffness Matrix for Thin Walled Beams", ASCE Journal of the Struc Div., Vol.108, No.ST3, March 1982.
- (18) Evick D.R., Heins C.P., "Torsion of Nonprismatic Beams of Open Section" ASCE Journal of the Struc. Div., Vol.98, No.St12, Dec. 1972.
- (19) Liauw T., Luk W., "Torsion of Core Walls of Nonuniform Section", ASCE Journal of the Struc.Div., Vol 106, No. ST9, Sept. 1980.
- (20) Taranath B.S., "Analysis of Interconnected Open Section Shear Wall Structures", ASCE Journal of the Struc.Div., Vol.101, No.ST11, Nov. 1975.
- (21) Chang P., Thasanatorn C., Pilkey W., "Restrained Warping Stresses in Thin-Walled Open Sections", ASCE Journal of the Struc.Div., Vol.101, No. ST11, Nov. 1975.
- (22) Meek J.L., Ho P.T.S., "A Simple Finite Element for the Warping Torsion Problem", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 37, (1983), 25-36.
- (23) Medwadowski S., "Warping Moment Distribution", ASCE Journal of The Struc.Div., Vol.111, No.ST2, Feb. 1985.
- (24) Tralli A., "A Simple Hybrid Model for Torsion and Flexure of Thin-Walled Beams", Computers and Structures, Vol.22, No.4, 1986.
- (25) Heidebrecht A.C., Smith B.S., "Approximate Analysis of Open-Section Shear Walls Subject to Torsional Loading", ASCE Journal of the Struc.Div., Vol.9, No.ST12, Dec 1973.
- (26) Yoo C.H., Acra S.V., "Cross-Sectional Properties of Thin-Walled Multi-Cellular Section", Computers and Structures Vol.22, No.1, 1986.
- (27) Waldron P., "Sectorial Properties of Straight Thin-Walled Beams", Computers and Structures Vol.24, No1, 1986.
- (28) Nadai A., "Theory of Flow and Fracture of Solids", Vol 1, McGraw-Hill Book Co., New York, 1950, Chapter 35.
- (29) Yang F.B., Fan H.T., "Yield Surface Modeling of I-Sections with Nonuniform Torsion", ASCE Journal of the Engineering Mechanics", Vol.114, No.6, June 1988.
- (30) Ritter W., "Die Bauweise Hennebique", Schweizerische Bauzeitung, Zurich, Feb. 1899.
- (31) Morsch, E., "Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie", 1st ed., Wayss and Freytag, A.G., Im Selbstverlag der Firma, Neustadt a.d. Haardt, May 1902.

- (32) Rausch E., "Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung und Abscheren", Dissertation presented to the Technische Hochschule, Berlin 1929. Printed by Julius Springer, Berlin 1929.
- (33) Cowan H.J., "Elastic Theory for Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams", Magazine of Concrete Research (London), Vol2, No.4, July 1950.
- (34) Hsu T., "Post-Cracking Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Sections", Journal of the ACI, Proc, Vol.70, No.5, May 1973.
- (35) Lampert P. and Thurlimann B., "Torsionversuche an Stahlbetonbalken", Bericht Nr.6506-2, Jan. 1969.
- (36) Elfgrén L., "Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear", Publication 71:3, Div. of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1972.
- (37) Collins M., "Torque-Twist Characteristics of Reinforced Concrete Beams", Inelasticity and Non-Linearity in Structural Concrete, University of Waterloo Press, Waterloo, Ontario, 1973.
- (38) Hsu T., Mo Y.L., "Softening of Concrete in Torsional Members", Research Report No. ST-TH-001-83, Dept. of Civ. Eng. Univers. of Houston, Houston, Texas.
- (39) CEB-FIB, "Model Code for Concrete Structures", CEB=FIP International Recommendations, 3rd. Edition, Comité Euro-International du Béton (CEB), 1978.
- (40) Lessig N.N., "Determination of Load-Carrying Capacity of Rectangular Reinforced Concrete Elements Subjected to Flexure and Torsion", Trudy No.5, Institut Betona i Zhelezobetona, Moscow 1959.
- (41) Lessig N.N., "Studies of Cases of Concrete Failure In Rectangular Reinforced Concrete Elements Subjected to Combined Flexure and Torsion", Translated by the Portland Cement Association, Foreign Literature Study No. 398.
- (42) State Committee on Construction of the USSR Council Ministers, "Structural Standards Regulations", SNiP II-B, 1-62, State Publishing Offices for Literature on Structural Engineering, Architecture and Structural Materials, Moscow 1962.
- (43) Collins M.P., Walsh P., Archer F.E., "Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Torsion, Bending and Shear, UNICIV Report No.R-14, Univ. of New South Wales, Oct.1965.
- (44) Collins M.P., "Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Bending", Torsion of Structural Concrete, SP-18 ACI, Detroit 1968.
- (45) Standards Association of Australia, "SAA Concrete Structures Code", A.S. CA2-1973; AS 1480-1974 (Metric).

- (46) Yudin V.K., "Determination of Load-Carrying Capacity of Rectangular Reinforced Concrete Elements Subjected to Combined Torsion and Bending", *Beton i Zhelezobeton*, Moscow No.6, June 1962.
- (47) Hsu T., "Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams", *ASCE Journal of the Struc.Div.*, Vol.96, No.ST2, Feb. 1968.
- (48) Hsu T., "Torsion of Structural Concrete Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members", *Torsion of Structural Concrete*, SP-18 ACI, Detroit 1968.
- (49) Elfgren L., Karlsson I. and Losberg A., "Torsion-Bending-Shear Interaction for Concrete Beams", *ASCE Journal of the Struc. Div.*, Vol.100, No.ST8, Aug. 1974.
- (50) Elfgren L., "Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear", Pub 71:3, Div. of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1972.
- (51) Muller P., "Failure Mechanism for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending", *International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, Vol. 36-II, 1976.
- (52) Diaz Molina I., Bartó C., "Análisis no Lineal de Estructuras Sometidas a Flexo Torsión con Restricción al Alabeo", *Memorias de Colloquia 87*, Porto Alegre R.S., Brasil, Julio 1987.
- (53) Cowan H.J., "Strength of Reinforced Concrete Under the Action of Combined Stresses at the Representation of the Criterion of Failure by Space Model", *Nature (London)*, Vol.169, 1952.
- (54) Zia P., McGee W., "Torsion Design of Prestressed Concrete", *PCI Journal*, Vol.19, No.2, March-Apr 1974.
- (55) Zia P., Hsu T., "Design for Torsion and Shear in Prestressed Concrete", *Proceedings Symposium on Shear and Torsion*, Fall Convention of the ASCE, Chicago, Oct. 1978.
- (56) *PCI Design Handbook, Precast Prestressed Concrete*, Second Edition, PCI, Chicago 1978.
- (57) Ewida A.A., "Torsion-Shear-Flexure Interaction in Reinforced and Prestressed Concrete Members", PhD Thesis, Department of Civil Engineering, University of Calgary, Calgary, Alberta, Apr. 1979.
- (58) Ewida A.A., McMullen A.E., "Concrete Members under Combined Torsion and Shear", *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol.108, No.ST4, Apr. 1978.
- (59) Zia P., "Torsional Strength of Prestressed Concrete Members", *Journal of the ACI*, *Proceedings*, V.57, No.4, Apr. 1961.
- (60) Gersch, Moore, "Flexure, Shear, Torsion Tests on Prestressed Concrete I Beams", Texas Highway Department.

- (61) Bishara A., "Prestressed Concrete under Combined Torsion Bending and Shear", Journal of the ACI, Proceedings V.66, No.7, July 1969.
- (62) Pandit G.S., "Torsion Tests and Code Requirements", Indian Concrete Journal, Jan. 1970.
- (63) Evans R.H., Khalil M.G.A., "The Behaviour and Strength of Prestressed Concrete and Rectangular Beams Subjected to Combined Bending and Torsion", The Structural Engineer, No.2, Vol48, Feb. 1970.
- (64) Gaussel E., "Ultimate Strength of Prestressed I-Beams under Combined Torsion, Bending and Shear", Journal of the ACI, Sept. 1970.
- (65) McMullen A.E., Woodhead H.R., "Experimental Study of Prestressed Concrete under Combined Torsion, Bending and Shear", Journal of the PCI, Sept.-Oct. 1973.
- (66) Allos A.E., Martin L.H., "Longitudinally Prestressed Concrete T-Beams Subjected to Torsion, Bending and Shear", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 1978.
- (67) Mitchell D., Collins M.P., "Influence of Prestressing on Torsional Response of Concrete Beams", PCI Journal, May-June 1978.
- (68) Mc Mullen A., El-Degwy W.M., "Prestressed Concrete Tests Compared with Torsion Theories", Journal of the PCI, Sept-Oct. 1985.
- (69) Hsu T., "Torsion of Reinforced Concrete", Van Nostrand Reinhold Company, New York 1984.
- (70) Pascual P.A., Benito R.D., Reimundín J.C., Cudmani R.O., Danesi R.F., "Flexión, Torsión y Corte en Vigas de Hormigón Pretensado", Memorias de las V Jornadas Argentinas del Hormigón Pretensado, Tucumán 1982.
- (71) Pascual P.A., Benito R.D., Etse J.G., Reimundín J.C., Cudmani R.O., Danesi R.F., "Torsión Combinada en Vigas Doble T de Hormigón Pretensado", Memorias de las VI Jornadas Argentinas del Hormigón Pretensado, Mendoza 1984.
- (72) Luccioni B.M., Reimundín J.C., Danesi R.F., "Ensayo a Torsión de una Viga de Hormigón Pretensado de Sección Doble T", Memorias de las VI Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Buenos Aires 1986.
- (73) "CIRSOC 201, Proyecto, Cálculo y Ejecución de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado", Julio 1982.
- (74) Leonhardt F., Walther R., "Torsion and Shear Tests on Prestressed Concrete Box Girders", Translation made by C.Van Amerongen, Cement and Concrete Association, 1963-64.
- (75) Ramakrishnan V., "Recent Advances in Shear, Torsion and Bond in Prestressed Concrete", Indian Concrete Journal, Dec. 1970.

- (76) Leonhardt F., "Estructuras de Hormigón Armado", Tomo I, Segunda Edición, Edit. El Ateneo, Buenos Aires 1985.
- (77) Obste y Schafer H.G., "Nonlinear Analysis of Spatial Panel Structures for Tall Buildings", Computers and Structures 1975.
- (78) Luccioni B.M., Godoy L.A., "Condiciones de Contorno en el Método de Diferencias Finitas con Mallas Irregulares", Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol.4, 1, 31-40, (1988).
- (79) Heidebrech A.C. and Stafford Smith B., "Aproximate Analysis of Tall Wall-Frame Building Structures", ASCE Journal of the Structural Division, Vol.99, No.ST2, Proc.Paper 9550, Feb. 1973.
- (80) Kersten R., "Reduktionsverfahren der Baustatik", Edit. Springer Verlag, Berlin, 1962.
- (81) Duffey T.A. and Schreyer H.L., "Simplified N-Dimensional Interaction Surfaces", ASCE Journal of the Structural Division, Vol.102, No.7, July 1976.
- (82) Kachanov L.M., "Fundamentals of the Theory of Plasticity", Translated from Russian by Konyaeva, Mir Publishers, Moscow 1974.
- (83) Hsu T., "Reinforced Concrete Members Subjected to Combined Biaxial Bending and Tension", ACI Journal, Jan-Feb. 1986.
- (84) Luccioni B.M., Reimundín J.C., Danesi R.F., "Modelos de Rotura en Vigas de Hormigón Pretensado de Sección Doble T bajo Torsión Combinada", Memorias de Colloquia'85, Buenos Aires 1985.
- (85) ACI Committee 318, Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-83).
- (86) New Zeland Standards, "Code of Practice for the Design of Concrete Structures", Nzs 3101, Parts 1 and 2, 1982.
- (87) "Code for the Design of Concrete Structures for Buildings", CAN-A 23.3-M77, National Standard of Canada, Canadian Standards Association, 1977.
- (88) Mitchell D., Collins M.P., "Diagonal Compression Field Theory-A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion", ACI Journal, Aug. 1974.