



UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA

Tesis de grado - Licenciatura en Física

Estudio de una celda tipo Kerr como fuente de Entrelazamiento Cuántico

Alumno:

Benjamin Straube

Directora:

Dra. Magdalena Mechetti

9 de octubre de 2014

Índice general

1. Introducción	2
2. Dispersión Paramétrica	5
3. Tensor de susceptibilidad	9
3.1. Aproximación clásica	9
3.2. Aproximación Cuántica	11
4. Eficiencia	17
4.1. Límite de conversión	17
4.2. Fluctuación Cuántica	20
4.3. Niveles Virtuales	25
5. Celda tipo Kerr como fuente de fotones entrelazados	26
6. Detección	34
7. Conclusiones	41
A. Desigualdad de Bell	43
B. Constantes y conversiones	48
B.1. Constantes	48
B.2. Conversiones	48
C. Evolución temporal, ecuación (4.1.2)	49
D. Cálculo de la ecuación (2.0.4)	51

Capítulo 1

Introducción

El concepto de entrelazamiento cuántico aparece por primera vez a comienzos del siglo XIX, en las discusiones entre Erwin Schrödinger y Albert Einstein sobre la teoría cuántica, pero fue Schrödinger quien llamó *Verschränkung* (entrelazamiento) al concepto de correlación no local en sistemas mecano-cuánticos, ejemplificado en su famoso experimento del gato (gato de Schrödinger). El trabajo que desencadenó la polémica subsiguiente, fue escrito por Nathan Rosen, Albert Einstein y Boris Podolsky, titulado "*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*" [1], más conocido como la *paradoja de EPR*. En este trabajo los autores argumentaron que la Teoría Cuántica no puede considerarse completa porque ésta es incapaz de describir completamente la realidad física, es decir, no puede predecir con probabilidad igual a uno la evolución de un sistema descrito por la mecánica cuántica. Hasta entonces algunos físicos no estaban de acuerdo con una realidad no determinista y por lo tanto la solución al problema se presentaba de dos formas:

1. La teoría realmente es incompleta, lo que sugiere una teoría de variables ocultas.
2. Existe un fenómeno no-local que explicaría una interacción a distancia entre los dos sistemas.

A partir de entonces y hasta la actualidad, estos postulados han sido ampliamente discutidos y analizados por diversos autores.

A lo largo de los años surgió una gran cantidad de publicaciones de diversos autores, relacionadas con el problema propuesto por estos tres físicos, entre los cuales el más destacado es la propuesta de John Stewart Bell [2], quien en 1964 desarrolla un criterio conocido como la *desigualdad de Bell* que mide la existencia de correlaciones no-locales de la mecánica cuántica y

que no pueden ser descritas con probabilidad clásica, apéndice A. Aunque los resultados de Bell son consistentes, se buscaba un experimento de laboratorio que pudiera mostrar la violación de su desigualdad. En 1982 Alain Aspect y sus colegas [3] lograron confirmar la naturaleza no-local de sistemas cuánticos actualmente denominado *entrelazamiento* (entanglement, en inglés).

El sistema entrelazado más simple se puede describir por un par de partículas (1 y 2) con spin 1/2 y está descrito por sus funciones de estados o kets $|\textit{spin hacia arriba}\rangle$ y $|\textit{spin hacia abajo}\rangle$ que representaremos por $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$. Así un estado arbitrario de cada partícula (por ejemplo, un electrón) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \textit{Estado de } e_1 &= \alpha_1|\uparrow\rangle + \beta_1|\downarrow\rangle \\ \textit{Estado de } e_2 &= \alpha_2|\uparrow\rangle + \beta_2|\downarrow\rangle, \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

donde α y β son factores de peso y representan la probabilidad de encontrar a la partícula en el estado que acompaña al coeficiente. El estado del sistema compuesto por ambas partículas se expresa como producto de los estados individuales

$$\begin{aligned} &(\alpha_1|\uparrow\rangle + \beta_1|\downarrow\rangle)(\alpha_2|\uparrow\rangle + \beta_2|\downarrow\rangle) \\ &\alpha_1\alpha_2|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_1\beta_2|\uparrow\downarrow\rangle + \beta_1\alpha_2|\downarrow\uparrow\rangle + \beta_1\beta_2|\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

y queda expresado en una combinación lineal de todas las posibilidades de combinar el sistema. Supongamos que los estados $|\uparrow\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\downarrow\rangle$ quedan excluidos, similar a los niveles de ocupación de dos electrones en el nivel fundamental de un átomo. El sistema queda representado por

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle\}. \tag{1.0.3}$$

Si logramos realizar una medición sobre una de las partículas sin perturbar demasiado al sistema, podemos saber el estado del sistema sin hacer una medición directa sobre la otra partícula.

De la misma manera, los estados de polarización de dos fotones pueden estar entrelazados cuando éstos son creados de manera particular, como se verá en el capítulo 2. La ventaja que tiene un sistema de fotones es que estos son más sencillos de aislar y así evitar interacciones indeseadas.

En los primeros experimentos para estudiar sistemas entrelazados se utilizaron pares de fotones emitidos por cascada atómica que presentan entrelazamiento en su grado de polarización. Otra forma de obtener pares de fotones es utilizando semiconductores pero predomina el uso de cristales no lineales que producen fotones entrelazados mediante la conversión paramétrica hacia abajo (*parametric down-conversion*, en inglés), también trabajado en el capítulo 2.

Los estudios en el área no solo contribuyeron a los aspectos teóricos de la mecánica cuántica sino que además generaron importantes contribuciones en las ciencias aplicadas [4], como por ejemplo, la implementación de estados ligados o entrelazados en la transferencia de información, pero se debe tener en cuenta sus limitaciones por las pérdidas y la baja eficiencia de las fuentes de dichos fotones.

Este trabajo está dedicado al estudio de la formación de pares de fotones; la comprensión de este proceso, las condiciones óptimas de un medio dieléctrico que favorecen la eficiencia del fenómeno y también a las interacciones con otros campos para estimular la formación de estos pares.

En el capítulo 3 se presenta la formulación matemática del tensor de susceptibilidad eléctrica, mencionado en el capítulo 2, tanto su desarrollo clásico como cuántico, debido al papel que éste cumple en los procesos ópticos no-lineales.

La eficiencia de un proceso de conversión es una relación entre los fotones incidentes en un medio no-lineal y los fotones que sufrieron una conversión durante la interacción con el medio. Diferentes trabajos teóricos sobre la eficiencia son analizados y discutidos en el capítulo 4.

La propuesta es hacer uso de las propiedades no-lineales de cristales líquidos que presentan diversos cambios en sus propiedades bajo la influencia de campos aplicados, esto nos conduce al concepto de una celda tipo Kerr. El efecto Kerr describe una situación en la cual los cambios en la polarización del medio son cuadráticas respecto al campo eléctrico aplicado; cuando la respuesta es linealmente proporcional al campo eléctrico se denomina efecto Pockels. Así también, el uso de ondas ópticas puede servir para inducir la respuesta no-lineal de estos medios como se analizará en el capítulo 5.

La detección de pares de fotones es un tema importante para su aplicación en la tecnología, pero también es interesante por sus posibilidades didácticas que presenta para comprender mejor un sistema entrelazado; en el capítulo 6 se desarrolla un experimento virtual con el propósito de ejemplificar estos sistemas.

El capítulo 7 está dedicado a las conclusiones.

Capítulo 2

Dispersión Paramétrica

Un material transparente se caracteriza por permitir el paso de ondas electromagnéticas (fotones) y en general sólo a un intervalo limitado de longitudes de onda; para las demás longitudes de onda el material es opaco. A bajas temperaturas las interacciones de los fotones con los átomos del medio solamente afectan la trayectoria de los mismos, las interacciones son elásticas, y el proceso se denomina *dispersión*. A mayores temperaturas las interacciones pueden ser inelásticas y, por lo tanto, aparte de cambiar las trayectorias de los fotones, también pueden cambiar su frecuencia bajo estrictas leyes de conservación de energía, en cuyos casos hablamos de *dispersión paramétrica* (figura 2.1).

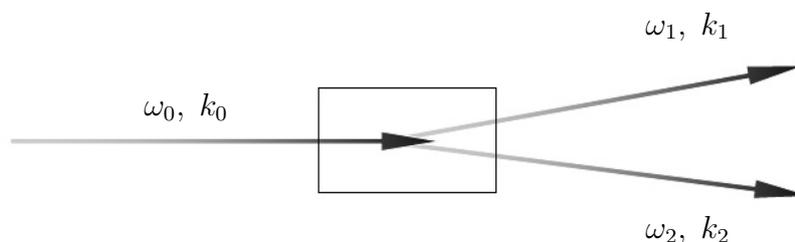


Figura 2.1: Representación esquemática de dispersión paramétrica

Bajo esta descripción existen diversas situaciones llamadas procesos ópticos no lineales, como ser la generación de segundos armónicos, la generación de suma y diferencia de frecuencia y procesos en donde intervienen tres o más frecuencias ópticas. Una descripción detallada de estos procesos la podemos encontrar en Boyd [5], mientras que aquí nos concentraremos en dos de ellos, la generación de segundos armónicos y la generación subarmónica o generación paramétrica hacia abajo.

La generación de segundos armónicos es un proceso de conversión en el cual dos fotones de frecuencia ω_1 atraviesan un medio dieléctrico generando un armónico de frecuencia $2\omega_1$ [6], a través de un intercambio de energía en un sistema de dos niveles como se muestra en la figura 2.2(a).

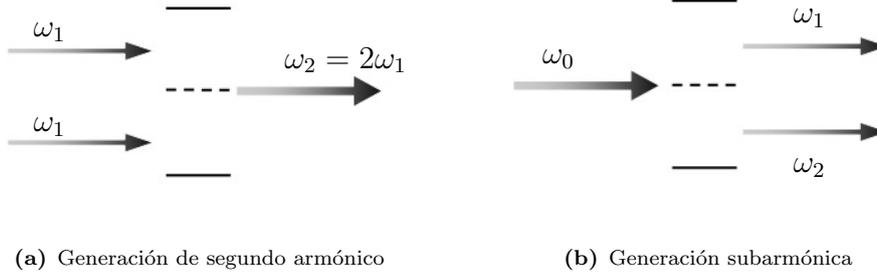


Figura 2.2: Conservación de frecuencias en procesos ópticos no lineales en un sistema de dos niveles de energía (líneas sólidas) y un nivel virtual (línea punteada).

El proceso inverso, la generación de subarmónicos, es el caso donde un fotón decae en un par de fotones con frecuencias y direcciones diferentes al fotón inicial, figura 2.1, incluso los fotones generados pueden tener diferentes frecuencias entre sí [7]. El ejemplo clave es la generación paramétrica hacia abajo o *parametric down-conversion* (PDC por sus siglas en inglés) en el que un fotón de frecuencia de bombeo ω_0 se divide en dos, con frecuencias ω_1 y ω_2 respectivamente figura 2.2(b), cumpliendo con la ley de conservación de energía

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (2.0.1)$$

y de momento aún cuando puede haber un desfase Δk , que es la diferencia entre los momentos del estado inicial y final del sistema

$$k_0 = k_1 + k_2 + \Delta k, \quad (2.0.2)$$

cuando se cumple la condición de fase $\Delta k = 0$.

En la bibliografía muchas veces se refieren a los subíndices 0, 1 y 2 como *pump*, *signal* e *idler* por una razón histórica, pero no existe una distinción entre las frecuencias ω_1 y ω_2 , sólo que en algunos casos tienen intensidades diferentes. En general utilizaremos el subíndice b para el modo bombeo o incidente y a para los fotones generados en la conversión cuando estos tienen la misma frecuencia.

Ambos procesos mencionados arriba se describen con un hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \sum_{i=0}^2 \hbar\omega_i \left(\hat{n}_i + \frac{1}{2}\right) + \hbar g[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_0^\dagger], \quad (2.0.3)$$

donde el primer término representa la energía del sistema, el segundo y tercero son los términos de interacción (o conversión) entre los modos de oscilación, \hat{a}_i y \hat{a}_i^\dagger son los operadores aniquilación y creación del modo i respectivamente, g es una constante de correlación que depende de la susceptibilidad eléctrica no lineal del medio, \hbar es la constante de Planck h dividida en 2π

Observemos por un momento el término

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0,$$

en él están presente dos operadores creación $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger$, y un operador aniquilación \hat{a}_0 pero estos no son operadores hermíticos y no representan directamente un proceso de conversión de un fotón incidente ω_0 en un par de fotones ω_1, ω_2 . Para expresar una conversión de modos es necesario utilizar los operadores números n_i correspondientes. En el apéndice D se verifica que se cumple

$$[\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0, \hat{H}] = 0, \quad (2.0.4)$$

lo cual expresa que $(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0)$ es una constante de movimiento y representa el hecho que un fotón incidente en un medio no-lineal con susceptibilidad $\chi^{(2)}$ se divide en dos fotones ω_1 y ω_2 con valores esperados $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$ y $\langle \hat{n}_2(t) \rangle$ respectivamente. El factor dos, presente en la ecuación (2.0.4), aparece al hacer $\omega_1 = \omega_2$ y teniendo en cuenta la ecuación (2.0.1) $\omega_0 = 2\omega_1$

El hamiltoniano (2.0.3) es una expresión general y en algunos casos puede simplificarse. Si por ejemplo no tenemos en cuenta el punto cero de energía, los términos de la sumatoria $\hbar\omega_i(\hat{n}_i + \frac{1}{2})$ se reemplazan por $\hbar\omega_i\hat{n}_i$ y si además, suponemos que el par de fotones (ω_1, ω_2) son de la misma frecuencia, se puede escribir $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}$ y por simplicidad expresamos a $\hat{a}_0 = \hat{b}$ y $\hbar = 1$, así el hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = 2\omega_a\hat{n}_a + \omega_b\hat{n}_b + g[\hat{a}^{\dagger 2}\hat{b} + \hat{a}^2\hat{b}^\dagger], \quad (2.0.5)$$

En el caso en que el haz incidente es muy intenso, el modo ω_0 en la ecuación (2.0.3) puede tratarse clásicamente; en ese caso sustituimos \hat{a}_0 por $a_0 e^{-i\omega_0 t}$ donde la amplitud a_0 de la onda es considerada constante. Esta suposición implica que la atenuación del modo incidente es despreciable frente a las amplitudes de los modos ω_1, ω_2 , por lo que solamente puede aplicarse en el caso $\langle \hat{n}_1(t) \rangle, \langle \hat{n}_2(t) \rangle \ll |a_0|^2$. Esta aproximación se conoce como *aproximación paramétrica*.

La evolución temporal de un sistema descrito por el hamiltoniano (2.0.3) o bien (2.0.5) se analizará en el capítulo 4 para diferentes condiciones iniciales.

Notemos que cuando g es cero, en la ecuación (2.0.3), desaparece el segundo término, es decir no existe intercambio de energía y no es posible una generación armónica o subarmónica. Como consecuencia, el valor del tensor de susceptibilidad eléctrica $\chi^{(2)}$ diferente de cero es una condición necesaria para poder generar fotones entrelazados por medio de un proceso óptico.

Capítulo 3

Tensor de susceptibilidad

El presente capítulo está focalizado en la formulación matemática del tensor de susceptibilidad mencionado en el capítulo 2. Se desarrolla tanto la aproximación clásica como la aproximación cuántica para entender el proceso de cuantización y sobre todo porque existen procesos ópticos no-lineales que requieren de un formalismo puramente cuántico, que se presentan más adelante en el trabajo.

3.1. Aproximación clásica

Cuando un campo electromagnético atraviesa un medio material, este responde debido a la interacción del campo con los niveles electrónicos, los momentos dipolares y momentos de orden mayor que componen el medio. La respuesta del medio se describe con el desplazamiento eléctrico de la forma

$$D(r, t) = \epsilon_0 E(r, t) + P(r, t),$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío y P la polarización eléctrica^a. En general, la respuesta del medio es dependiente de la dirección del campo, por lo que se debe tener en cuenta el carácter vectorial y escribir

$$\vec{D}(r, t) = \epsilon_0 \vec{E}(r, t) + \vec{P}(r, t).$$

Hasta aquí la respuesta es lineal porque es proporcionalmente dependiente con el campo. Cuando el medio es más susceptible a los campos aplicados puede mostrar respuestas de orden mayor en presencia de un campo. En

^aver apéndiceB para valores de constantes y conversiones entre sistema de unidades (*esu*) y (*SI*)

estos casos, el término de polarización debe descomponerse en una serie de potencias que permita representar esta dependencia no lineal:

$$\vec{P}(r, t) = \vec{P}^{(1)}(r, t) + \vec{P}^{(2)}(r, t) + \vec{P}^{(3)}(r, t) + \dots \quad (3.1.1)$$

El primer término describe las respuestas lineales del medio a la aplicación de un campo de la forma

$$\vec{P}^{(1)}(r, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(r - r_1, t - t_1) : \vec{E}(r_1, t_1) dr_1^3 dt_1 \quad (3.1.2)$$

donde $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad eléctrica de primer orden, representada por un tensor de segundo orden y está asociada al cambio de velocidad de la luz en el medio es decir, el índice de refracción. El producto “:” representa el producto escalar entre matrices, así, la expresión

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(2)} : \vec{E} \vec{E}$$

representa explícitamente la operación

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \cdot^b$$

De manera similar la expresión para la polarización de segundo orden es

$$\vec{P}^{(2)}(r, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(2)}(r - r_1, r - r_2, t - t_1, t - t_2) : \vec{E}(r_1, t_1) \vec{E}(r_2, t_2) dr_1^3 dr_2^3 dt_1 dt_2 \quad (3.1.3)$$

aquí $\chi^{(2)}$ es un tensor de tercer orden. A través de una transformada de Fourier podemos escribir la polarización

$$\vec{P}^{(2)}(r, t) \equiv \vec{P}^{(2)}(k, \omega)$$

$$\vec{P}^{(2)}(k, \omega) = \chi^{(2)}(k, k_1, k_2, \omega, \omega_1, \omega_2) : \vec{E}(k_1, \omega_1) \vec{E}(k_2, \omega_2) \quad (3.1.4)$$

Con el término cuadrático $\chi^{(2)}$ es posible describir fenómenos como la suma de frecuencias o generación de segundos armónicos.

^b $\chi_{ijk}^{(2)}$ es una forma redundante de expresar el tensor de susceptibilidad eléctrica de rango tres o de segundo orden, en su forma implícita es suficiente escribir χ_{ijk}

3.2. Aproximación Cuántica

En una primera aproximación podemos hacer una derivación de la susceptibilidad utilizando la teoría de perturbación sobre las funciones de ondas del sistema atómico o molecular, pero solamente para los casos de respuesta inmediata o situación estacionaria. Para tener en cuenta los tiempos de excitación y relajación debemos adoptar el formalismo de *matriz de densidad*. Este formalismo no me permite conocer el estado de energía de cada átomo que compone el sistema, en realidad describe el sistema en una manera estadística.

Si queremos medir una cantidad P de un sistema debemos calcular su valor esperado a partir de las funciones de onda $\psi(r, t)$ que describen el estado de un sistema. Estas funciones son soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(r, t),$$

donde \hat{H} es el hamiltoniano del sistema. Supongamos que $|n\rangle$ son las soluciones de la ecuación de Schrödinger estacionaria, y que los coeficientes de expansión $c_n(t)$ son las probabilidades de amplitud asociadas a esas soluciones, que en conjunto representan la probabilidad de que el sistema esté en un dado estado de energía en un tiempo t . El valor esperado del operador \hat{P} se puede calcular entonces como

$$\langle \hat{P} \rangle = \sum_{mn} c_m^* c_n \langle m | \hat{P} | n \rangle. \quad (3.2.1)$$

Definimos como p a la probabilidad de que el sistema se encuentre en ese estado de energía arbitrario, y también definimos a ρ como una matriz de la forma

$$\rho_{mn} = \sum p c_m^* c_n. \quad (3.2.2)$$

Un estado de energía del sistema es una combinación lineal de los estados $|n\rangle$ por lo que los elementos de la diagonal de ρ representan todos los estados posibles de ocupación y los elementos fuera de la diagonal, una combinación coherente entre los estados $|n\rangle$ y $|m\rangle$, que pueden en algunos casos interpretarse como el momento dipolar inducido. En equilibrio térmico, los elementos $\rho_{mn} = 0$, con $m \neq n$. Siguiendo la ecuación (3.2.1) podemos escribir por lo tanto

$$\langle \hat{P} \rangle = \sum_n \sum_m \rho_{nm} P_{mn} = \sum_n (\hat{\rho} \hat{P})_{nn} = tr(\hat{\rho} \hat{P}). \quad (3.2.3)$$

Podemos ver que es posible representar el valor esperado de un observable a través de la matriz de densidad y por lo tanto si deseamos conocer la

evolución temporal del valor esperado debemos evolucionar en el tiempo la matriz de densidad. Derivando respecto al tiempo la ecuación (3.2.2) llegamos a la ecuación de Liouville cuántica para la densidad

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (3.2.4)$$

En general se escribe $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, donde \hat{H}_0 representa la energía del sistema en reposo y \hat{V} la energía de interacción; en este caso, hablamos de la interacción de un campo eléctrico con los momentos dipolares de origen molecular o atómico.

Para una descripción completa también es necesario tener en cuenta un término de amortiguamiento o relajación. Este término de relajación representa las interacciones entre moléculas que no fueron incluidas en la expresión general del hamiltoniano.

Podemos escribir directamente a la ecuación (3.2.4) agregando

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{nm} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]_{nm} - \gamma_{nm} (\rho_{nm} - \rho_{nm}^{(0)}). \quad (3.2.5)$$

donde no expresamos el carácter de operador “ $\hat{}$ ” porque está expresado para una componente general (n, m) . El segundo término de la ecuación (3.2.5), expresa la relajación del estado ρ_{nm} a un estado de equilibrio $\rho_{nm}^{(0)}$ con una rapidez de decaimiento γ_{nm} .

Analizando la coherencia entre los diferentes niveles n y m es decir $c_n^*(t)c_m(t)$, y denotando como Γ_n y Γ_m la tasa de decaimiento de los niveles n y m respectivamente, la tasa de decaimiento γ se puede escribir como

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{2}(\Gamma_n + \Gamma_m). \quad (3.2.6)$$

Con el fin de derivar la susceptibilidad de órdenes mayores debemos hacer un expansión de perturbación de la matriz de densidad de la forma

$$\rho_{nm} = \rho_{nm}^{(0)} + \lambda \rho_{nm}^{(1)} + \lambda^2 \rho_{nm}^{(2)} + \dots \quad (3.2.7)$$

donde cada término debe satisfacer de manera independiente, para cualquier valor arbitrario de λ , la ecuación (3.2.5), pero antes veamos qué forma adopta ésta al incluir la perturbación o energía de interacción por medio del hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t), \quad (3.2.8)$$

como mencionamos anteriormente \hat{H}_0 representa la energía del átomo en reposo y $\hat{V}(t) = -\hat{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(t)$ representa la interacción del átomo con un campo

aplicado por medio de una aproximación dipolar donde $\hat{\mu} = -e\hat{r}$ es el momento dipolar eléctrico. Teniendo en cuenta que la parte no perturbada se puede resolver como

$$[\hat{H}_0, \hat{\rho}]_{nm} = (E_n - E_m)\rho_{nm}, \quad (3.2.9)$$

si asociamos la energía E con la frecuencia a través de

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}, \quad (3.2.10)$$

y reemplazando estos resultado en la ecuación (3.2.5) nos queda

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{nm} = -i\omega_{nm}\rho_{nm} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{V}, \hat{\rho}]_{nm} - \gamma_{nm}(\rho_{nm} - \rho_{nm}^{(0)}). \quad (3.2.11)$$

Si usamos (3.2.7) en (3.2.11) obtenemos un conjunto de ecuaciones

$$\left(\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}\right)_{nm} = -i\omega_{nm}\rho_{nm}^{(0)}, \quad (3.2.12)$$

$$\left(\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t}\right)_{nm} = -(i\omega_{nm} + \gamma_{nm})\rho_{nm}^{(1)} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{V}, \hat{\rho}^{(0)}]_{nm}, \quad (3.2.13)$$

$$\left(\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t}\right)_{nm} = -(i\omega_{nm} + \gamma_{nm})\rho_{nm}^{(2)} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{V}, \hat{\rho}^{(1)}]_{nm}. \quad (3.2.14)$$

El próximo paso es realizar una integración para obtener los ρ y para ello se recurre a un cambio de variable de la forma

$$\rho_{nm}^{(1)} = S_{nm}^{(1)}e^{-(i\omega_{nm} + \gamma_{nm})t} \quad (3.2.15)$$

con el cual se obtienen las siguientes expresiones para la matriz de densidad de primer y segundo orden respectivamente

$$\rho_{nm}^{(1)} = e^{-(i\omega_{nm} + \gamma_{nm})t} \int_{-\infty}^t \frac{1}{i\hbar}[\hat{V}(t'), \hat{\rho}^{(0)}]_{nm} e^{(i\omega_{nm} + \gamma_{nm})t'} dt', \quad (3.2.16)$$

$$\rho_{nm}^{(2)} = e^{-(i\omega_{nm} + \gamma_{nm})t} \int_{-\infty}^t \frac{1}{i\hbar}[\hat{V}(t'), \hat{\rho}^{(1)}]_{nm} e^{(i\omega_{nm} + \gamma_{nm})t'} dt'. \quad (3.2.17)$$

Una forma más explícita de estas ecuaciones se logra resolviendo los conmutadores y la integral que aparecen en ellas.

El objetivo es encontrar una expresión para la susceptibilidad eléctrica de la ecuación (3.1.4) a través del formalismo de matriz de densidad. En la

ecuación (3.2.7) desarrollamos la matriz de densidad en una serie de potencias y lo mismo tendremos que hacer con \hat{P} debido a (3.2.3), quedando

$$\langle \hat{P} \rangle = \langle \hat{P}^{(0)} \rangle + \langle \hat{P}^{(1)} \rangle + \langle \hat{P}^{(2)} \rangle + \dots \quad (3.2.18)$$

Si consideramos que el medio no tiene un momento dipolar permanente entonces $\langle \hat{P}^{(0)} \rangle = 0$.

Siguiendo la ecuación (3.2.3) podemos escribir para el momento dipolar atómico

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \sum_{nm} \rho_{nm} \mu_{nm}, \quad (3.2.19)$$

y teniendo en cuenta los resultados del capítulo anterior, donde la interacción era significativa para un conjunto de frecuencias ω_j , describimos la polarización eléctrica como

$$P_i^{(j)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j) = N \langle \hat{\mu}_i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j) \rangle, \quad (3.2.20)$$

donde N representa la densidad atómica e $i = x, y, z$ son las coordenadas espaciales. Para $j = 2$ la polarización de segundo orden $P_i^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ o bien $P_i^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2)$ es

$$P_i^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = N \langle \hat{\mu}_i(\omega_1, \omega_2) \rangle. \quad (3.2.21)$$

Finalmente, si reemplazamos (3.2.17) y (3.2.19) en (3.2.21) y la comparamos con (3.1.4) obtenemos la expresión para la susceptibilidad eléctrica de

segundo orden $\chi_{ijk}^{(2)}$ de forma explícita.

$$\begin{aligned}
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) = & \frac{N}{2\epsilon_0 \hbar^2} \sum_{lmn} \rho_{ll}^{(0)} \times \\
& \left\{ \frac{\mu_{ln}^i \mu_{nm}^j \mu_{ml}^k}{[(\omega_{nl} - \omega_1 - \omega_2) - i\gamma_{nl}][(\omega_{ml} - \omega_1) - i\gamma_{ml}]} \right. \\
& + \frac{\mu_{ln}^i \mu_{nm}^k \mu_{ml}^j}{[(\omega_{nl} - \omega_1 - \omega_2) - i\gamma_{nl}][(\omega_{ml} - \omega_2) - i\gamma_{ml}]} \\
& + \frac{\mu_{ln}^k \mu_{nm}^i \mu_{ml}^j}{[(\omega_{mn} - \omega_1 - \omega_2) - i\gamma_{mn}][(\omega_{nl} + \omega_1) + i\gamma_{nl}]} \\
& + \frac{\mu_{ln}^j \mu_{nm}^i \mu_{ml}^k}{[(\omega_{mn} - \omega_1 - \omega_2) - i\gamma_{mn}][(\omega_{nl} + \omega_2) + i\gamma_{nl}]} \\
& + \frac{\mu_{ln}^j \mu_{nm}^i \mu_{ml}^k}{[(\omega_{nm} + \omega_1 + \omega_2) + i\gamma_{nm}][(\omega_{ml} - \omega_1) - i\gamma_{ml}]} \\
& + \frac{\mu_{ln}^k \mu_{nm}^i \mu_{ml}^j}{[(\omega_{nm} + \omega_1 + \omega_2) + i\gamma_{nm}][(\omega_{ml} - \omega_2) - i\gamma_{ml}]} \\
& + \frac{\mu_{ln}^k \mu_{nm}^j \mu_{ml}^i}{[(\omega_{ml} + \omega_1 + \omega_2) + i\gamma_{ml}][(\omega_{nl} + \omega_1) + i\gamma_{nl}]} \\
& \left. + \frac{\mu_{ln}^j \mu_{nm}^k \mu_{ml}^i}{[(\omega_{ml} + \omega_1 + \omega_2) + i\gamma_{ml}][(\omega_{nl} + \omega_2) + i\gamma_{nl}]} \right\} \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

El tratamiento de matriz de densidad, para la respuesta no lineal de un medio óptico, se puede encontrar desarrollada por diversos autores [6, 5, 8], y todas derivan en una ecuación similar a (3.2.22) con cuatro, seis u ocho términos dependiendo de la simetría que se tenga en cuenta. De todas formas es necesario agregar una corrección de campo local a este modelo para una descripción más exacta

Por razones prácticas no es de gran utilidad el resultado de la ecuación (3.2.22), porque requiere de mucho conocimiento del sistema en cuestión, los niveles de energía y las funciones de onda. En general para un sistema de moléculas complejas es necesario hacer otro tipo de aproximaciones para estimar la susceptibilidad.

De todas formas es interesante analizar la situación que representa. Por ejemplo: el primer término de la ecuación (3.2.22) está representado esquemáticamente en la figura 3.1 donde es posible ver la posición de los niveles para la condición de resonancia. En el caso no-resonante, cuando las frecuencias no están cerca del valor de la diferencia de energía entre un par de niveles, se pueden eliminar los γ y aproximar los denominadores a un valor promedio

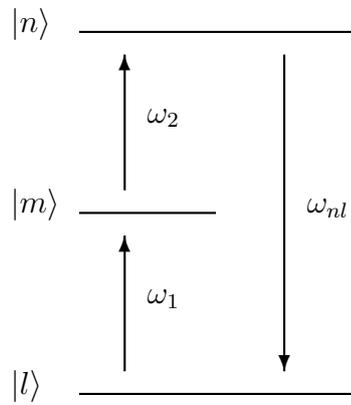


Figura 3.1: Sistema de tres niveles correspondientes al primer término de la ecuación(3.2.22)

y sacarlo de la suma en (3.2.22), así el problema se reduce a la búsqueda de las ecuaciones de onda del sistema.

Capítulo 4

Eficiencia

4.1. Límite de conversión

Cuando hablamos de eficiencia en procesos de conversión, nos referimos a la cantidad de fotones que logramos transformar durante la interacción del haz de luz con el medio no lineal.

La tarea de estudiar teóricamente el entrelazamiento y otras propiedades de los fotones durante la interacción con un sistema atómico se debe realizar utilizando una interpretación cuántica de ambas partes, el campo (fotones) y el sistema atómico. Los motivos para ello se presentarán a lo largo de este capítulo. Además de la necesidad de una interpretación cuántica de la luz y el medio, en muchos casos se parte de un hamiltoniano que deriva de una aproximación en la cual se tienen en cuenta únicamente las frecuencias resonantes con el sistema átomo, llamada *aproximación de onda rotante* (RWA, rotating wave-approximation). Esta aproximación tiene sus limitaciones y debe aplicarse con precaución cuando se trabajan con espectros continuos. Si suponemos que la onda incidente u onda de bombeo se comporta clásicamente es decir, que no sufre atenuación, se simplifica aún más el hamiltoniano; a esta aproximación se la llama *aproximación paramétrica* [9]. Esto último pone en evidencia la suposición de una baja tasa de conversión de fotones incidentes en pares de fotones. Sin embargo, hay algunos trabajos que no tienen en cuenta esta última aproximación [10], [11] y obtienen resultados interesantes sobre la eficiencia que se podría obtener en un proceso de *down-conversion*. Se incluye en este capítulo una discusión sobre algunos resultados y procedimientos de diferentes autores para dar una idea general sobre los aspectos que influyen en la eficiencia de la conversión.

En el trabajo de Drobný and Bužek [10] se analiza una conversión en un número k de fotones con valores esperados $n_k(t)$ con $k = 1, 2, 3, \dots$ a

partir de un $n_b(t)$. Los $n_a(t)$ y $n_b(t)$ representan el valor medio del número de fotones en el tiempo t con un modo de oscilación o frecuencia ω_a y ω_b , respectivamente. Para el propósito de esta tesis se tendrá en cuenta el caso $k = 2$, que representa el caso de la generación de un par de fotones ω_a a partir de un fotón incidente con frecuencia ω_b . En general, se parte de un hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda(\hat{a}^2 \hat{b}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}), \quad (4.1.1)$$

donde λ representa un parámetro de acoplamiento relacionado con la susceptibilidad eléctrica.

La conversión de fotones se obtiene a partir de la evolución temporal del operador del modo incidente o modo de bombeo \hat{n}_b ,

$$n_b(t) = \langle \psi(t) | \hat{n}_b | \psi(t) \rangle \quad (4.1.2)$$

las funciones de onda $\psi(t)$ se desarrollan en un espacio de la forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j e^{-iE_j t} |\psi_j\rangle \langle \psi_j | \psi_0 \rangle \quad (4.1.3)$$

donde los autovectores de la base, $|\psi_j\rangle$ se escriben

$$|\text{cantidad de fotones } \omega_a, \text{ cantidad de fotones } \omega_b\rangle. \quad (4.1.4)$$

De esta forma, el estado inicial del sistema que representa una situación de conversión hacia abajo, (*down-conversion*) es

$$|\psi_0\rangle = |0, N\rangle, \quad (4.1.5)$$

en donde todos los N fotones incidentes tienen frecuencia ω_b . La base para este sistema es el conjunto de autovectores que son suma sobre los posibles modos de distribuir la ocupación de modos “ b ” y “ a ” y se escribe

$$|\psi_j\rangle = \sum_{l=0}^N c_{jl} |2l, N-l\rangle \quad (4.1.6)$$

con sus correspondientes autovalores E_j . Los c_{jl} son los factores de peso de los respectivos términos. Recordemos que cada fotón, del número “ l ” de fotones de frecuencia ω_b , sufre un proceso de conversión en dos fotones de frecuencias ω_a .

Utilizando la ecuación (4.1.3) podemos calcular (4.1.2); el procedimiento se desarrolla en el apéndice C y obtenemos

$$n_b(t) = \sum_i N_{i,i}^b + 2 \sum_{i < j} N_{i,j}^b \cos((E_i - E_j)t), \quad (4.1.7)$$

donde

$$N_{i,j}^b = \langle \psi_j | \psi_0 \rangle \langle \psi_0 | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{n}_b | \psi_j \rangle. \quad (4.1.8)$$

Por el término oscilatorio en (4.1.7) podemos ver que la evolución del número de fotones en el modo “ b ” (N_b) no puede ser menor que

$$N_b = \sum_i N_{i,i}^b - 2 \sum_{i < j} |N_{i,j}^b|. \quad (4.1.9)$$

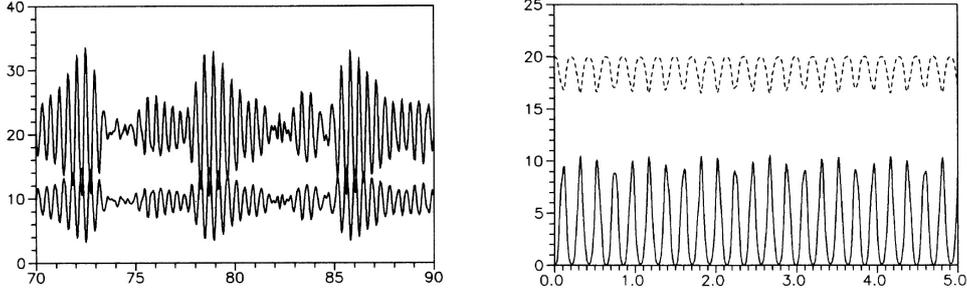
Finalmente, podemos escribir un parámetro de eficiencia o tasa de conversión R como un cociente entre el máximo número de fotones convertidos del modo “ b ” al modo “ a ” ($N_0^b - N_b$) sobre el número de fotones iniciales en el modo $b = N_0^b$

$$R = \frac{N_0^b - N_b}{N_0^b}. \quad (4.1.10)$$

El resultado de Drobný and Bužek [10] para diferentes valores de N es una curva que tiende a una asíntota de valor 0,7 para el caso ideal y menor a 2/3 si tenemos en cuenta las oscilaciones a diferentes frecuencias de (4.1.7). Sin embargo, se afirma también que la transferencia de energía de un modo a otro se puede incrementar cuando el estado inicial del sistema está en una superposición de estados es decir, que el estado inicial ya no está representado por la ecuación (4.1.5), en donde el modo a está en estado vacío. Para el caso de una superposición de estados deberíamos escribir $|\psi_0\rangle = |N^a, N^b\rangle$ aún cuando el modo a está vagamente presente en la luz de bombeo. La presencia del modo “ a ” en el haz de bombeo puede favorecer la generación de pares de fotones en estado entrelazado; este concepto significaría que a medida que la luz atraviesa el medio con susceptibilidad eléctrica χ^2 aumenta la generación de pares de fotones debido a la presencia de los pares de fotones generados un instante anterior, pero esto no es del todo cierto debido a los efectos de atenuación que veremos más adelante. Sin embargo una alternación de medios dieléctricos al paso de la luz puede incrementar la eficiencia de generación de pares de fotones [12]. Una alternación del medio puede ser un cristal compuesto por dos tipos de cristales dispuestos en placas alternadas, perpendiculares a la dirección de propagación de la luz, o bien una composición de un mismo material no-lineal pero con diferente orientación del eje óptico en cada interfase.

Durante el proceso de *down-conversion* se puede estudiar un fenómeno oscilatorio de colapso y recuperación [13], pero que no parece afectar la media de intensidad o número de fotones de los modos para tiempos grandes, figura 4.1(a), aquí el número de fotones (eje “ y ”) está en función de una escala de tiempo λt (eje “ x ”) y λ es el parámetro de acoplamiento en la ecuación

(4.1.1). No se analizarán detalles sobre este fenómeno de colapso y recuperación pero en estos trabajos son notables los intercambios de intensidades o números de fotones de manera oscilatoria entre los modos, como se pueden ver en las figuras 4.1. De ellas, es evidente que existe un tiempo en el cual



(a) colapso y recuperación para el estado inicial $|38, 1\rangle$ la curva superior (inferior) corresponde al modo “a” (“b”) (b) colapso y recuperación para el estado inicial $|0, 20\rangle$ la línea punteada (sólida) corresponde a los modos “b” (“a”)

Figura 4.1: Gráficas extraídas de [13]. En el eje “y” se representa el número de fotones, en el eje “x” una escala de tiempo λt .

hay una alta tasa de conversión seguida por una de baja tasa de conversión, que oscilan alrededor de un valor medio. Esto nos da la noción que el tiempo de interacción de los modos en el medio no-lineal es importante. Cabe mencionar que la figura 4.1(b) es para una conversión del tipo $\omega_b = 3\omega_a$.

4.2. Fluctuación Cuántica

En esta sección veremos la importancia de las fluctuaciones de los campos porque sin fluctuación la generación de sub-armónicos no es posible y por lo tanto, una cuantización de campo es necesaria para tratar la conversión hacia abajo, como mencionamos al comienzo de la sección 4.1.

Como primer paso comparemos el campo electromagnético clásico

$$E(r, t) = (E_0 e^{+i\varphi}) e^{i(k \cdot r - \omega t)} + (E_0 e^{-i\varphi}) e^{-i(k \cdot r - \omega t)} \quad (4.2.1)$$

con el campo electromagnético cuantizado que se representa por un operador que actúa en un espacio de Hilbert,

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a} e^{i(k \cdot r - \omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(k \cdot r - \omega t)}). \quad (4.2.2)$$

Las amplitudes complejas ($E_0 e^{+i\varphi}$) y ($E_0 e^{-i\varphi}$) en este caso, están representadas por los operadores aniquilación \hat{a} y creación \hat{a}^\dagger , respectivamente. La raíz cuadrada que aparece en la ecuación anterior

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \quad (4.2.3)$$

es una medida del ruido cuántico para un modo ω y está presente incluso cuando el estado del campo es el vacío, es por esto que se lo conoce como *fluctuación del vacío* y es debido a las propiedades no conmutativas de los operadores aniquilación y creación que surgen durante el proceso de cuantización de campos, [9, cap.10] o [14, cap.2].

Para ver la diferencia sustancial entre una aproximación clásica y una aproximación cuántica para la generación de segundos armónicos, seguimos los análisis de Tanas [11] en donde se comparan tres resultados; *a*) una aproximación clásica, *b*) la inclusión de un término de perturbación a la solución clásica debido a un ruido cuántico, *c*) un resultado numérico del tratamiento cuántico. Podemos observar en la figura 4.2 una comparación de estos resultados. Para el caso cuántico numérico, $n_b = 2\langle\hat{N}_b\rangle/N_a$ donde N_a representa

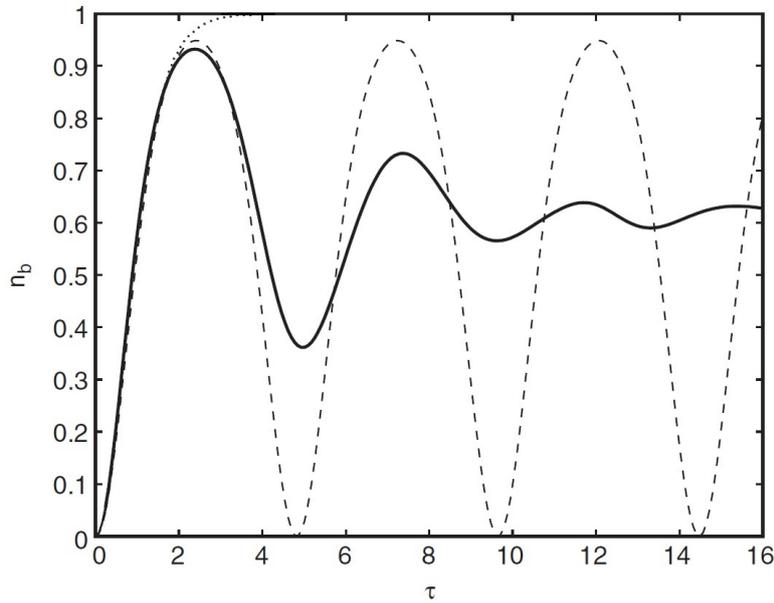


Figura 4.2: gráfica de [11]. Comparación entre los resultados, cuánticos numéricos (línea sólida), perturbación a la solución clásica (línea discontinua) y solución clásica (línea punteada). n_b es la intensidad del segundo armónico normalizado

el número inicial de fotones en el modo “ a ”, τ es un escala de tiempo similar a la utilizada anteriormente y solo difiere en una constante de normalización.

Cabe mencionar que la solución clásica es de la forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}u_a &= -u_a u_b \sin\vartheta \\ \frac{d}{d\tau}u_b &= u_a^2 \sin\vartheta,\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

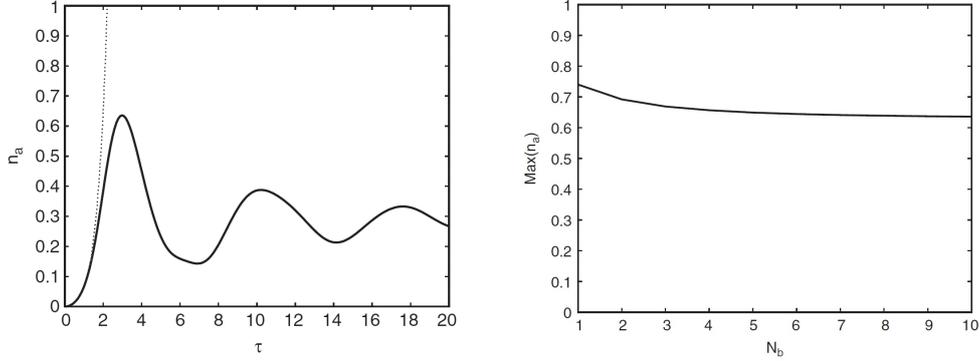
y no permite la generación de subarmónicos estando estos inicialmente en estado vacío, por lo que es necesario recurrir a una solución cuántica para la evolución del sistema en el tiempo y es a través de la fluctuación del vacío que se da la aparición de un modo “ b ” debido a la conversión hacia abajo.

La generación de subarmónicos o conversión hacia abajo es el proceso inverso a la generación de segundos armónicos es decir, que las condiciones iniciales son diferentes: el modo “ a ” en estado vacío y el modo “ b ”, en un estado de energía distinta de cero. El hamiltoniano que describe la generación de segundos armónicos, ecuación (4.1.1), también es el hamiltoniano para la generación de subarmónicos, la diferencia radica en que el estado inicial está representado por la ecuación (4.1.5).

Al igual que en la generación de segundos armónicos no existe una solución analítica para la generación de subarmónicos y en general, se utiliza la aproximación paramétrica o un cálculo numérico para resolver el sistema. En la figura 4.3(a) podemos observar claramente las diferencias entre ambos métodos. A partir de la gráfica, se puede observar que la *aproximación paramétrica*, (línea de puntos) es válida sólo para el intervalo $\tau \leq 1$. Al igual que en los estudios citados a lo largo del presente capítulo, los resultados de Tanas [11] muestran un límite de conversión máximo; en este caso, está alrededor del 70 % y depende del número inicial de fotones en el modo “ b ”, como se puede apreciar en la figura 4.3(b).

Es notable entre los resultados de Drobný and Bužek [10] y a diferencia de los resultados de figura 4.3(b)[11], presentan la posibilidad de transferir toda la energía del modo de bombeo “ b ” al modo “ a ”, pero solo en el caso trivial de $n_{b0} = 1$, es decir que existe un solo fotón en el modo “ b ”. La situación particular de la interacción de un único fotón con un sistema de tres niveles, como dinámica de una conversión hacia abajo, está estudiada teóricamente por Koshino [15], donde además se presentan las condiciones necesarias para una eficiencia igual a la unidad, desarrolladas a continuación.

Un sistema de tres niveles es la representación más simple para un sistema de un medio no-lineal caracterizado por $\chi^{(2)}$. En el trabajo de Koshino [15] se parte de un hamiltoniano H obtenido bajo la aproximación de onda



(a) La línea sólida es el resultado del cálculo numérico para $N_b = 10$, la línea de puntos es la aproximación paramétrica. (b) Tendencia de máxima conversión en función el número de fotones iniciales en el modo “b”.

Figura 4.3: gráficas de [11].

rotante, (aproximación realizada por los demás trabajos mencionados en este capítulo). El vector de estado de la onda entrante

$$|\psi_{in}\rangle = \int f(r)\hat{a}_r^\dagger dr|0\rangle, \quad (4.2.5)$$

interacciona con el medio no-lineal, y a través de la ecuación de Schrödinger el vector de estado de salida resulta

$$|\psi_{sa}\rangle = e^{-iHt}|\psi_{in}\rangle. \quad (4.2.6)$$

Teniendo en cuenta que el modo de bombeo o entrante está en resonancia con la transición $|g\rangle \mapsto |e\rangle$ (ver figura 4.4), el cual tiene una forma gaussiana con un largo de pulso d y suponiendo que el fotón está a una distancia a , con $|a| \gg d$, anterior al medio no-lineal descrito por el sistema de tres niveles, la función de onda que lo representa es de la forma

$$f(r) = \left(\frac{2}{\pi d^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{r-a}{d}\right)^2 + i\omega_e(r-a)\right]. \quad (4.2.7)$$

Si además, la longitud coherente d cumple con la condición

$$d \gg \Gamma^{-1}, \quad (4.2.8)$$

donde Γ_{ij} representa la probabilidad de una transición genérica $|i\rangle \mapsto |j\rangle$ es posible aproximar la onda incidente a una onda estacionaria $f(r) \sim Ee^{i\omega_e(r)}$.

Después de la interacción con el sistema de tres niveles de energía en $t = t_0$ figura 4.4 obtenemos, una función de onda de un fotón $(-\frac{2\Gamma_{ge}}{\Gamma_{ge}+\Gamma_{em}})Ee^{i\omega_e(r-t_0)}$, resultado de la transición $|e\rangle \mapsto |g\rangle$; una función de onda de un par de fotones resultado de la conversión hacia abajo por medio de las transiciones $|e\rangle \mapsto |m\rangle$ y $|m\rangle \mapsto |g\rangle$, donde $|m\rangle$ representa un nivel virtual (sección 4.3) y además tenemos presente la función de onda entrante para un tiempo posterior a la interacción $Ee^{i\omega_e(r-t_0)}$ (onda transmitida). Es posible darse cuenta en la figura 4.4 que la función de onda de un fotón $f(r)$ para un tiempo posterior a t_0 y la onda transmitida, interfieren destructivamente y se anulan por completo cuando se cumple la condición $\Gamma_{ge} = \Gamma_{em}$. De esta manera toda

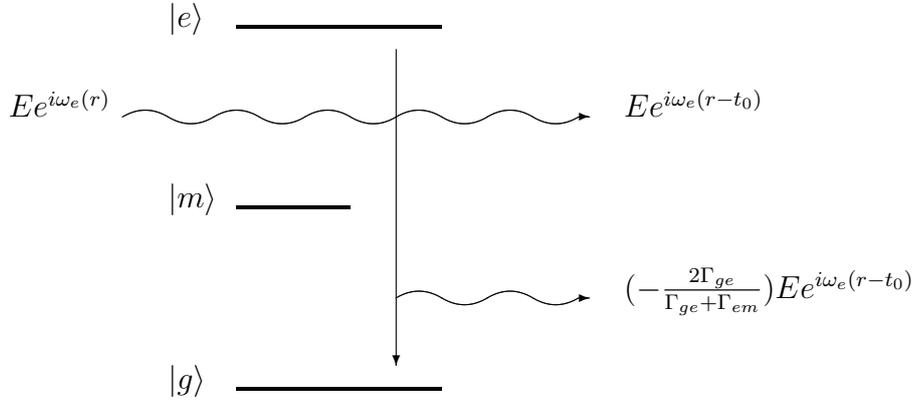


Figura 4.4: Esquema de la condición para una eficiencia unidad, $f(r) \sim Ee^{i\omega_e(r)}$ esta aproximación se puede hacer cuando el largo de coherencia $d \gg \Gamma^{-1}$

la energía del modo de bombeo será transferida a la generación del par de fotones.

Así completamos las condiciones que son necesarias para lograr una conversión con eficiencia igual a la unidad. Por un lado, la relación entre las probabilidades de decaimiento de dos de las transiciones de energía ($\Gamma_{g \rightarrow e}$ y $\Gamma_{e \rightarrow m}$) y por otro la condición entre el largo de coherencia “ d ” en relación a la inversa de la probabilidad de decaimiento Γ^{-1} ; esta condición, ecuación(4.2.8), está directamente relacionada con el tiempo de interacción del fotón con el medio de susceptibilidad eléctrica $\chi^{(2)}$, representado en este caso con un sistema de tres niveles. El último resultado mencionado puede estar directamente relacionado con el incremento en la susceptibilidad eléctrica por medio de la alternación de placas de medios dieléctricos presentado por Fischer et al. [12], mencionado en la sección 4.2, página 19.

En relación a los tiempos de decaimiento y a los tiempos de población de los niveles de energía, debemos diferenciar entre niveles reales y niveles virtuales de energía que a su vez están relacionados con la denominación de procesos paramétricos y no-paramétricos.

4.3. Niveles Virtuales

Cuando hablamos de niveles de energía (niveles reales), por ejemplo niveles atómicos de energía, son las soluciones del hamiltoniano del sistema en cuestión o bien son los autovalores de energía del sistema. Su característica es que pueden ser ocupados por los electrones y así el nivel está poblado. Los tiempos de población pueden variar según la interacción a la que esté sometido el sistema. Un nivel virtual, o estado virtual, es aquel que no forma parte de la solución del sistema, sin embargo, puede formar parte de una transición entre niveles reales. Tal es el caso de una generación de segundos armónicos y la generación paramétrica hacia abajo. Según Boyd[5] y Klyshko[7], los procesos paramétricos son aquellos en los cuales no hay pérdida, es decir, se conserva la energía entre los modos, en consecuencia, la población del estado fundamental sólo puede abandonar el nivel para intervalos de tiempo $\hbar/\Delta E$ y permanecer en un nivel virtual de energía ΔE , respetando el principio de incertidumbre entre energía y tiempo, figura 4.5.

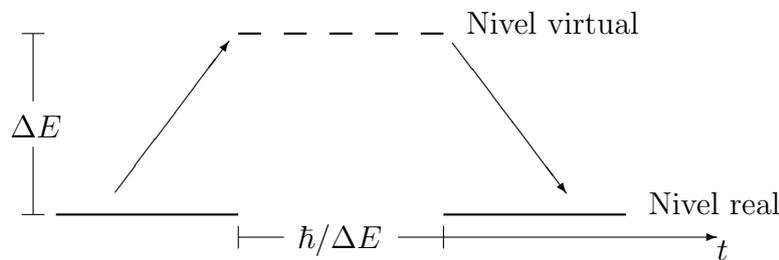


Figura 4.5: Tiempo de permanencia en un nivel virtual, con una diferencia energética ΔE respecto el próximo nivel real

Debido a la transición entre niveles, la onda del modo “b” queda ligeramente retrasada respecto de la onda entrante transmitida.

Los procesos en los cuales las transiciones retornan al sistema en su estado original son llamados procesos paramétricos o coherentes, en otras palabras, son aquellos procesos donde los estados iniciales y finales del sistema son idénticos.

Capítulo 5

Celda tipo Kerr como fuente de fotones entrelazados

En los trabajos experimentales que podemos encontrar en la literatura científica relacionados con sistemas entrelazados y estudios a partir de éstos, son los cristales sólidos no-lineales como el BBO (beta Bario Borato) o LiNbO₃ (Niobato de Litio) los más utilizados, casi exclusivamente, como fuente de pares de fotones para estos fines. Pero debemos recalcar que comúnmente la eficiencia está en el orden de $10^{-12}m/V$ a $10^{-10}m/V$, esto concuerda con la ecuación (3.1.4) donde se puede apreciar que la polarización es proporcional al campo en un factor $\chi^{(2)}$ que se encuentra en estos órdenes de magnitud. En los trabajos teóricos la constante de correlación λ que aparece en el hamiltoniano (4.1.1) está relacionada con la susceptibilidad eléctrica e influye en la probabilidad de conversión que el hamiltoniano representa. A lo largo de este capítulo analizamos brevemente las posibilidades de incrementar la respuesta no lineal, en particular, de medios líquidos. Con lo analizado en los capítulos anteriores y el presente se quiere mostrar que, al menos en teoría, es factible el uso de un medio líquido en una celda con campos aplicados (*celda tipo Kerr*) para la generación de pares de fotones entrelazados. En el presente capítulo presentamos la manera en que se puede incrementar la respuesta no-lineal en líquido cristalinos y analizamos las posibilidades de obtener fotones entrelazados utilizando campos aplicados sobre medios líquidos. Por lo tanto, el primer paso es estudiar los tipos de polarización que son significativos en estos medios.

Aunque ya describimos y analizamos el concepto de polarización en el capítulo 3, vamos a detenernos en dos tipos de polarización que son significativos en medios líquidos.

La **polarización molecular** describe la situación en la cual la respuesta del medio a la interacción un campo eléctrico es debido a los efectos que

éste tiene sobre los momentos dipolares de las moléculas que componen el medio. De forma general, podemos asociar a una molécula tres momentos dipolares permanentes, uno por cada grado de libertad. En muchos casos, uno de los momentos dipolares predomina sobre los otros. Cuando aplicamos un campo sobre un medio, las moléculas que componen el medio tienden a alinearse en la dirección del campo, así el campo neto confinado en el medio es la suma del campo aplicado y el campo que resulta de las contribuciones de los momentos dipolares permanentes de las moléculas; sin embargo, no olvidemos que también existe una interacción entre las moléculas, por lo que es necesario hacer correcciones de campo local para una buena descripción de la respuesta del medio. Debemos tener presente que la respuesta al campo depende, entonces, de propiedades macroscópicas como densidad, viscosidad (en medios líquidos) y temperatura. Esto se hace evidente cuando aplicamos campos variables y medimos los tiempos de respuesta del medio. El tiempo de respuesta dependerá de la fuerza del campo y la inercia de las moléculas debido a las interacciones entre ellas. La polarización también puede surgir por cambios en la distribución de carga eléctrica por efectos de un campo aplicado, lo que se conoce como **polarización electrónica** es decir, que si el medio material no tiene momento dipolar permanente, los efectos de polarización son debido a los momentos dipolares inducidos por el campo aplicado. Cuando aplicamos un campo eléctrico sobre un material, en algunos casos puede inducir una redistribución de las cargas eléctricas, una distorsión entre las cargas negativas (electrones) y positivas (núcleos) generando así momentos dipolares. La respuesta del medio es proporcional al campo y está descrito por la polarización

$$P = \alpha E, \quad (5.0.1)$$

donde no tuvimos en cuenta el carácter vectorial. Teniendo en cuenta órdenes de perturbaciones mayores y además el carácter vectorial de los campos, escribimos

$$\vec{P} = \epsilon_0 \{ \chi^{(1)} : \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E}\vec{E}\vec{E} \}, \quad (5.0.2)$$

que es una forma compacta de escribir las ecuaciones (3.1.1), (3.1.2) y (3.1.3). A partir de estas expresiones observamos que el fenómeno puede describirse con el formalismo de matriz de densidad desarrollado en la sección 3.2, sobre todo cuando queremos tener en cuenta órdenes de polarización mayores.

Ahora bien, para la generación de segundos armónicos y conversión hacia abajo, vamos a tener en cuenta las propiedades no lineales de algunos medios líquidos, así es el caso de los cristales líquidos, considerados medios ópticos de gran respuesta no-lineal. Los cristales líquidos son materiales en estado líquido en los que sus moléculas constituyentes presentan cierto grado de ordenamiento. Debido a ello, ocupan una posición intermedia entre los sólidos

monocristalinos (anisótropos) y los líquidos comunes (isótropos). Los cristales líquidos son fluidos como los líquidos y a su vez, exhiben propiedades anisótropas como los cristales.

Existe una gran variedad de estudios de óptica no lineal en cristales líquidos [16, 17, 18, 19] que, en algunos casos, presentan significativas respuestas del medio líquido a los campos. A diferencia de otros materiales no lineales, los cristales líquidos permiten una gran eficiencia de conversión en los procesos de mezclado de ondas ópticas en zonas del espectro visible e infrarrojo. No se realizará una descripción completa de las características y aplicaciones de cristales líquidos en general porque escapa al propósito de este capítulo. Centraremos la atención en las experiencias relacionadas con la generación de armónicos, uno de los primeros fenómenos no-lineales observados en estos fluidos. Este comportamiento no lineal de algunos medios líquidos es de particular interés para su aplicación en lograr una conversión hacia abajo, tema central de este trabajo.

Como se mencionó anteriormente, la susceptibilidad de segundo orden $\chi^{(2)}$ es la característica de un medio que permite una generación de armónicos de segundo orden o una conversión hacia abajo. En el caso de materiales isotrópicos, o en otras palabras centro-métricos, el valor de $\chi^{(2)}$ es cero debido a la condición de simetría

Simplificando ligeramente la (3.1.3) tenemos que ^a

$$P_i = \chi_{ijk} E_j E_k, \quad (5.0.3)$$

si invertimos el sistema de coordenadas la polarización es

$$P'_i = \chi_{ijk} E'_j E'_k, \quad (5.0.4)$$

debido a que P_i , E_j y E_k son vectores; al invertir el sistema de coordenadas, éstos simplemente cambian de signo, así

$$P'_i = -P_i, \quad E'_j = -E_j, \quad E'_k = -E_k. \quad (5.0.5)$$

reemplazando estos resultados en la ecuación (5.0.4) obtenemos

$$\begin{aligned} -P_i &= \chi_{ijk} - E_j - E_k, \\ P_i &= -\chi_{ijk} E_j E_k. \end{aligned} \quad (5.0.6)$$

Las ecuaciones (5.0.3) y (5.0.6) son simultáneamente válidas y la única solución posible es si $\chi_{ijk} = 0$.

Pero es posible inducir la pérdida de centro de simetría en cristales líquidos aplicando un campo eléctrico para inducir la reorientación de las moléculas figura 5.1.

^a χ_{ijk} es la forma de expresar en componentes del tensor de segundo orden $\chi^{(2)}$

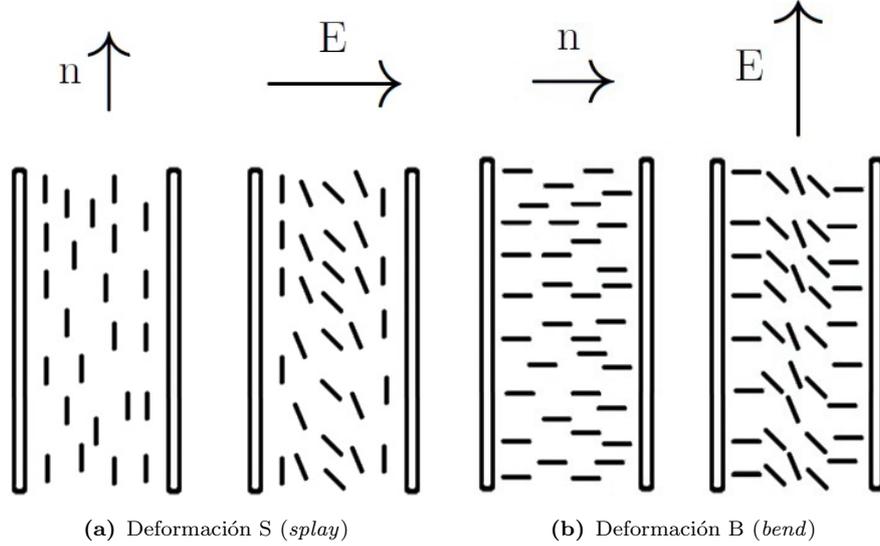


Figura 5.1: Tipos de deformaciones en cristales líquidos

El campo aplicado tiene una dirección perpendicular a la orientación natural del cristal líquido. Es posible realizar una amplia clasificación de cristales líquidos, dependiendo del tipo de moléculas que lo componen, de las superficies de contacto y de la interacción con otros materiales, como ser las tinturas. Los efectos de teñir un cristal líquido con tintas son interesantes en lo que respecta al comportamiento no-lineal.

En los trabajos de Sukhov and Timashev [16] la deformación B periódica es inducida por medio de un haz laser de rubí polarizado (E_p) con una energía de aproximadamente $0,5 J$. Los segundos armónicos (E_H) fueron generados a partir de un haz laser de neodimio (E_N) con una energía aproximada de $10 mJ$. La amplitud del segundo armónico depende del ángulo de incidencia de E_p como muestra la figura 5.2

El incremento en un factor de aproximadamente 50 en la señal del segundo armónico con la presencia del pulso E_p , es un resultado interesante y contribuye fuertemente a la idea principal del uso de una celda tipo Kerr para inducir una respuesta no-lineal en medios líquidos. La relación absoluta de conversión es de $R = Q_H/Q_N \approx 5 \times 10^{-12}$, donde Q_H es la energía del campo del segundo armónico y Q_N la energía del haz laser incidente. Esta razón de conversión es considerablemente menor a la eficiencia de generación de segundos armónicos utilizando cristales sólidos que, en algunos casos, es mayor al 50%.

Otra forma de inducir un aumento en la respuesta no-lineal en cristales

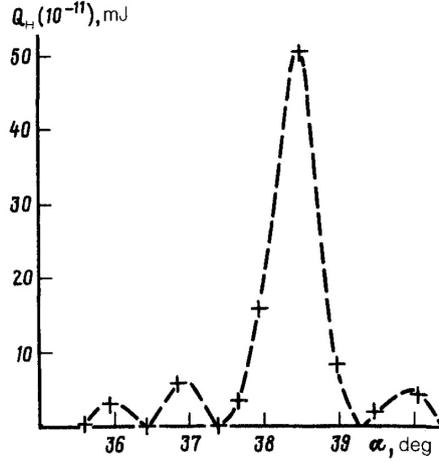


Figura 5.2: Dependencia de la energía del segundo armónico (Q_H) con respecto al ángulo de incidencia del haz E_p

líquidos es utilizando un campo eléctrico constante o pulsado. Así es el caso de los estudios realizados por Barnik et al. [17], cuyos resultados están representados en la figura 5.3 la cual muestra la relación entre la amplitud o intensidad del segundo armónico $I_{2\omega}$ en función de los campos aplicados. El conjunto de puntos de la curva 1 figura 5.3 corresponde a la situación en la que se aplica un campo constante a la celda que lleva a un valor de saturación cuando el voltaje sobre la misma supera los 200 V. En la curva 2 de la figura 5.3 se observa un crecimiento lineal con respecto a un campo pulsado aplicado sobre la celda.

El largo del pulso t_{pulso} es de 20 μs y su amplitud tiene un máximo de 4 kV, que corresponde en su disposición experimental a un campo en la celda de 20 kV/cm o 2 GV/m. Cabe destacar el criterio para determinar el largo del pulso t_{pulso} , que está acotado entre dos valores $t_1 < t_{pulso} < t_2$, donde t_1 corresponde al tiempo de relajación de polarización dipolar y t_2 es el tiempo de relajación de la orientación de las moléculas. Las limitaciones para incrementar la intensidad $I_{2\omega}$ del segundo armónico con un campo constante se deben a la presencia de impurezas ajenas al material que provocan ciertas deformaciones en las fases del cristal líquido. En ambos casos mencionados arriba, se utilizó un laser de neodimio que emite una frecuencia típica de 1064 nm (infrarrojo).

Teniendo en cuenta los resultados de Sukhov and Timashev [16] y Barnik et al. [17] es evidente que la respuesta no lineal en cristales líquidos puede alterarse por campos externos de diferentes características, campos ópticos o campos eléctricos, provocando cambios en la estructura del medio, princi-

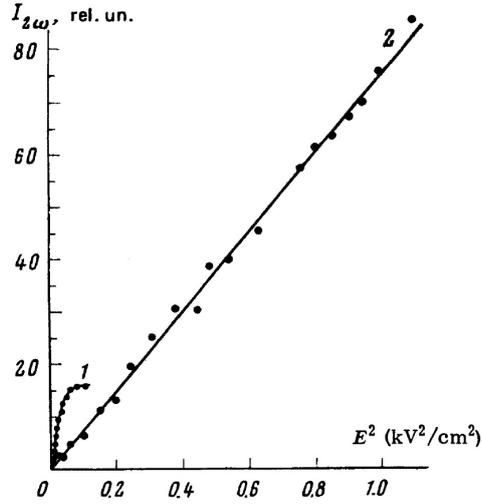


Figura 5.3: Intensidad del segundo armónico $I_{2\omega}$ en función de la intensidad de campo inducido E_{in}^2 , la curva (1) corresponde a voltaje constante, y la curva (2) a voltaje pulsado

palmente la reorientación de moléculas y los momentos dipolares.

La velocidad de orientación y polarización en cristales líquidos depende de varios factores. La rapidez de orientación está limitada principalmente por la inercia de las moléculas a alinearse con el campo, la velocidad de polarización depende mucho de la amplitud del campo aplicado, ya sea un campo constante o un campo pulsado.

Otro punto importante y que requiere de mayor atención, es la geometría de la celda, en particular, el ancho de la misma y de las superficies de contacto, sobre todo en el uso de cristales líquidos. En el trabajo de Lucchetti et al. [18], los autores obtienen que la respuesta no-lineal en cristales líquidos incrementa notablemente con las muestras más delgadas de $3\mu m$. Estos resultados evidencian que no son, únicamente, las propiedades de volumen las que contribuyen a la no-linealidad del medio.

Teniendo en cuenta los resultados de este capítulo, las conclusiones de Lucchetti et al. [18] y los experimentos de Fischer et al. [12] discutidos en el capítulo 4, es válido suponer que las propiedades de superficies son de gran importancia en el comportamiento no lineal de medios líquidos y sólidos. En el caso de Fischer et al. [12] usaron una alternación de cristales sólidos, obteniendo un incremento en la susceptibilidad eléctrica. Los resultados de Barnik et al. [17] muestran también un aumento en el comportamiento no lineal de cristales líquidos utilizando un campo pulsado y finalmente Lucchetti et al. [18] mostraron un aumento en la no-linealidad de cristales líquidos en

celdas delgadas.

A partir de estos resultados, inferimos que es factible la propuesta de utilizar un medio líquido en una celda con posibilidades de aplicar campos eléctricos para la generación de pares de fotones. Los campos cumplen la función de inducir las condiciones para incrementar (generar, en casos de medios isotrópicos) la susceptibilidad de segundo orden.

El largo del medio con susceptibilidad eléctrica $\chi^{(2)}$, que atraviesa la onda, se relaciona directamente con el tiempo de interacción de la onda con dicho medio. Una alternación de medios proporciona un incremento en la susceptibilidad absoluta al igual que un campo pulsado. En concepto de esto, un campo pulsado es una interacción externa que modifica el medio a lo largo del tiempo. De esta manera, una alternación de medios es equivalente a la aplicación de un campo pulsado a un medio susceptible al mismo. Por otro lado, el tiempo de respuesta y sobre todo el tiempo de relajación, son las limitaciones en la aplicación de campos pulsados. Si en vez de utilizar un campo pulsado se utiliza una combinación de campos para no depender de los tiempos de relajación, por ejemplo, dos campos eléctricos pulsados dispuestos en direcciones diferentes, supongamos por simplicidad, dos campos perpendiculares orientados en direcciones x e y respectivamente, y además sincronizados de manera que las fases entre los campos E_x y E_y tiene un ángulo de 90° , en la figura 5.4 se representa una posible disposición simplificada de lo propuesto. Los ángulos, respecto a la celda, de los campos

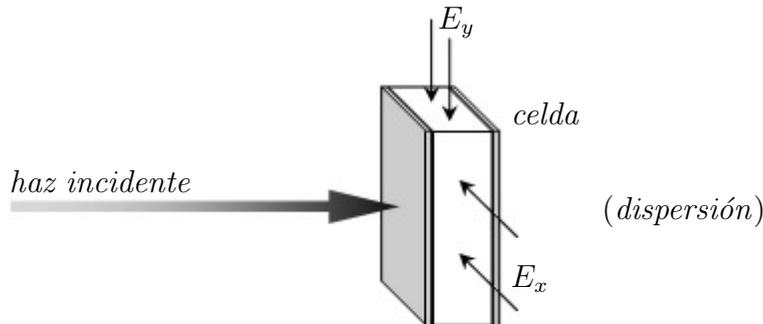


Figura 5.4: Esquema de una disposición simplificada de una celda tipo Kerr

aplicados son solamente representativos, ya que existe una importante relación entre éstos y el comportamiento no-lineal del medio (figura 5.2). Así también, el largo de los pulsos y su sincronismo dependerán del medio y el haz incidente que se utilice en el experimento. En la figura 5.5 se representa un sincronismo en el cual se destaca que las amplitudes de los campos no se

superponen; la amplitud cero del campo en dirección, x por ejemplo, coincide con el máximo de amplitud del campo E_y . Si el largo de los pulsos de los campos aplicados está en el orden de la longitud de onda del haz incidente, este último atravesará un medio con propiedades que van variando a medida que avanza por el mismo; las variaciones dependerán de las características de los campos aplicados, como por ejemplo, la amplitud y forma de los pulsos y sobre todo el tipo de medio utilizado.

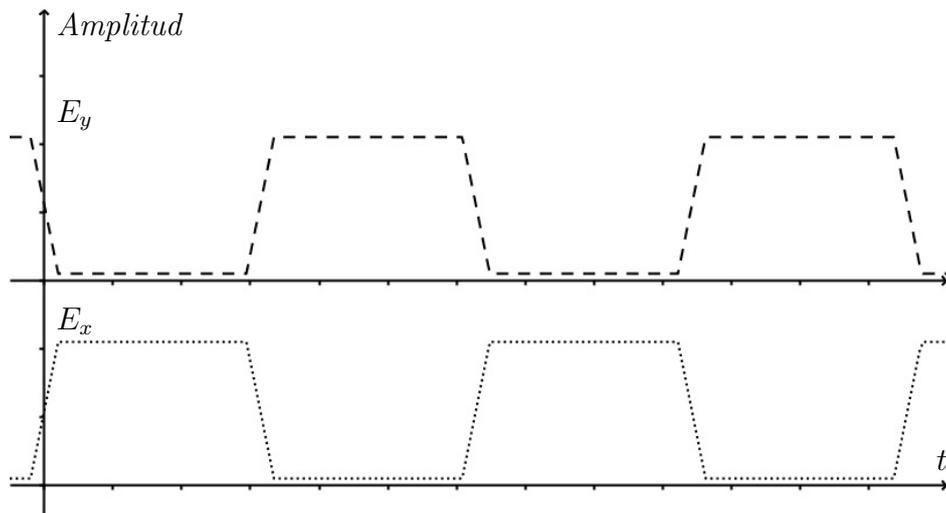


Figura 5.5: Sincronización entre los campos E_x y E_y

Como consecuencia de la propuesta realizada arriba, surge la tarea de modelar un sistema que represente un medio que cambia periódicamente, espacial o temporalmente, a medida que una onda atraviesa el mismo. Analizar en detalle las interacciones entre medios líquido y ondas electromagnéticas y también entre medios líquidos y campos eléctricos. Estas son tareas que escapan a los propósitos y posibilidades de este trabajo y se espera completar las consignas en etapas subsiguientes.

Capítulo 6

Detección

Para familiarizarnos con el significado de sistemas entrelazados y así entender un poco más las posibles aplicaciones tecnológicas, vamos a llevar este fenómeno a una experiencia de laboratorio virtual que nos permita "visualizar" sus efectos. Nos referimos al conocido experimento de interferencia de doble ranura, que ha dado lugar a muchos debates a lo largo de la historia.

La disposición más sencilla del experimento es una fuente de luz, una pantalla con doble ranura y una pantalla donde se colecta la luz emitida por la fuente atravesando la doble ranura. Clásicamente es posible determinar las

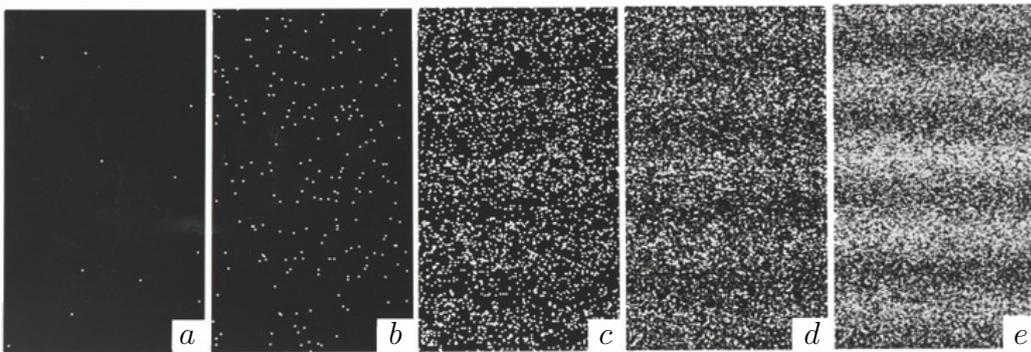


Figura 6.1: Patrón de interferencia obtenido por Tonomura et al. [20] utilizando electrones individuales. El número de recolecciones que se muestran son, 10 (a), 200 (b), 6000 (c), 40000 (d), 140000 (e).

relaciones entre la geometría de las ranuras y la luz utilizada en el experimento para observar un patrón de interferencia en la pantalla. En un análisis cuántico, la presencia o ausencia del patrón de interferencia, ver figura 6.1, está relacionado a la información disponible sobre los fotones cuando atraviesan la doble ranura. Si de alguna forma es posible conocer por cuál de las

dos ranura pasó cada fotón, el patrón de interferencia desaparece. El párrafo anterior lleva muchas veces a una interpretación errónea y en algunos casos se llegó a creer que los resultados del experimento dependían del observador y su conocimiento sobre el sistema. Pero eso no es así, sólo basta con que la información esté de alguna manera disponible para perder el patrón de interferencia, independientemente de la capacidad del observador de conocer esa información. Por ejemplo, la presencia de la atmósfera (gas) en el experimento puede reducir en parte la nitidez del patrón de interferencia, no todos los fotones interactúan con las moléculas de aire, así el patrón de interferencia no se pierde por completo y los máximos aparecen difusos. En este caso, la información podría recuperarse de las moléculas de aire que se encuentran en las ranuras.

A continuación, mostraremos cómo la disponibilidad de información puede afectar los resultados de un experimento de doble ranura utilizando fotones entrelazados.

Representemos con $|\psi\rangle$ un haz laser que incide sobre una doble ranura, llamemos A y B a las diferentes ranuras, rotulemos con subíndices A y B a la función de onda cuando ésta pasa por la respectiva ranura. Ahora, la función de onda puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_A\rangle + |\psi_B\rangle), \quad (6.0.1)$$

y el patrón de interferencia se obtiene al calcular la distribución de probabilidades en función de la posición r sobre la pantalla utilizando la fórmula $|\langle r|\psi\rangle|^2$ o bien en función del ángulo de fase entre $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$, calculando entonces $\langle\psi|\psi\rangle^2 = |\psi_A + \psi_B|^2$.

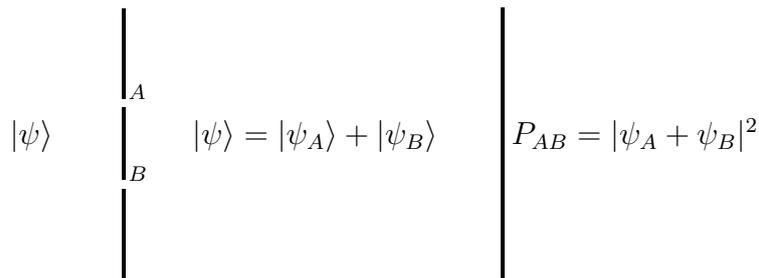


Figura 6.2: Evolución de la función de onda en un experimento de doble ranura. P_{AB} es la probabilidad de distribución de fases entre $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$ en la pantalla.

Para realizar el cálculo de la distribución de probabilidad es necesario

conocer las funciones ψ_A y ψ_B , que en general pueden escribirse de la forma,

$$\begin{aligned}\psi_A &= |A|e^{i\phi_A} \\ \psi_B &= |B|e^{i\phi_B}.\end{aligned}\tag{6.0.2}$$

La probabilidad de distribución P_{AB} se puede calcular como sigue.

$$\begin{aligned}P_{AB} &= |\psi_A + \psi_B|^2 = (\psi_A^* + \psi_B^*)(\psi_A + \psi_B) \\ &= \psi_A^*\psi_A + \psi_B^*\psi_B + \psi_A^*\psi_B + \psi_B^*\psi_A\end{aligned}\tag{6.0.3}$$

donde los dos primeros términos de la suma son las probabilidades correspondientes a los casos en donde bloqueamos una de las ranuras y sólo registramos los impactos provenientes de la otra ranura. Así, si tapamos la ranura B

$$\psi_A^*\psi_A = |A|^2e^{-i\phi_A}e^{i\phi_A} = |A|^2 = P_A\tag{6.0.4}$$

y viceversa. Los términos cruzados de la ecuación (6.0.3)

$$\begin{aligned}\psi_A^*\psi_B &= |A||B|e^{-i(\phi_A - \phi_B)} \\ \psi_B^*\psi_A &= |A||B|e^{i(\phi_A - \phi_B)},\end{aligned}\tag{6.0.5}$$

son responsables del patrón de interferencia. Finalmente, podemos escribir la probabilidad de distribución como

$$P_{AB} = P_A + P_B + 2|A||B|\cos(\phi_A - \phi_B).\tag{6.0.6}$$

Si realizamos una modificación al sistema propuesto y agregamos un filtro de cuarto de onda en frente de cada ranura, orientados de tal forma que ahora ψ_A y ψ_B son ortogonales, ésto implica que el tercer término de la ecuación (6.0.6) es cero para todos los valores de ϕ_A y ϕ_B ; por lo tanto, no hay patrón de interferencia. Esta es la situación descrita arriba, determinar por cuál ranura pasó del fotón, elimina el patrón de interferencia.

Ahora confeccionemos un experimento similar pero utilizando fotones entrelazados para recuperar el patrón de interferencia siguiendo el procedimiento realizado por Walborn et al. [21]. En la figura 6.3 se observa un esquema de la disposición experimental. Con un laser de Argón se ilumina un cristal *BBO* produciendo pares de fotones entrelazados ‘*p*’ (superior) y ‘*s*’ (inferior). La propuesta de una celda tipo Kerr, mencionada en el capítulo 5, reemplazaría al cristal en este experimento. En la trayectoria del haz ‘*s*’ se interpone una doble ranura. Analicemos la evolución de onda en esta configuración.

Los fotones entrelazados se forman a partir de una generación paramétrica espontánea hacia abajo del tipo II, cuya característica es la formación

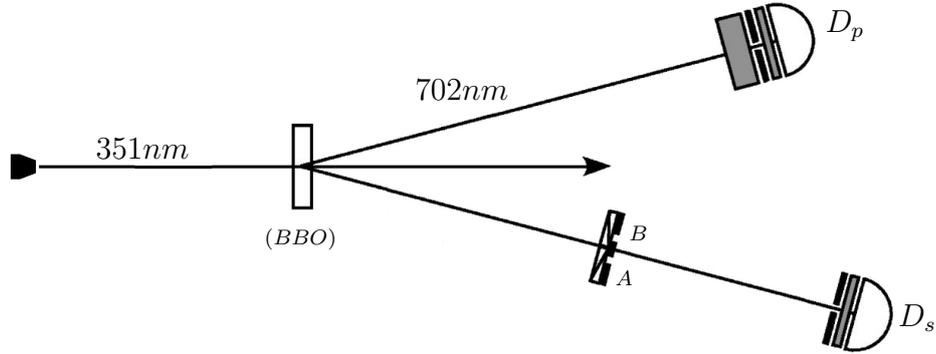


Figura 6.3: experimento de doble ranura utilizando fotones entrelazados, ver descripción en el texto.

de pares de fotones con grados de polarización ortogonales entre sí. Ahora escribimos la función de onda $|\psi\rangle$ en función de estos estados ortogonales $|x\rangle$ y $|y\rangle$ como,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle_s|y\rangle_p + |y\rangle_s|x\rangle_p) \quad (6.0.7)$$

que al pasar por la doble ranura debe escribirse como una suma de funciones, como en el caso anterior, pero ahora

$$\begin{aligned} |\psi_A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_A\rangle_s|y\rangle_p + |y_A\rangle_s|x\rangle_p) \\ |\psi_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_B\rangle_s|y\rangle_p + |y_B\rangle_s|x\rangle_p). \end{aligned} \quad (6.0.8)$$

A pesar que las funciones son diferentes a las usadas anteriormente en el caso de fotones no entrelazados, el patrón de interferencia aparece debido a los términos cruzados entre $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$, figura 6.4.

El próximo paso es colocar los filtros de cuarto de onda en frente de cada ranura provocando un desfase entre diferentes direcciones de polarización, por ejemplo 45° y -45° respecto de la dirección x ^a, quedando la función de onda

$$\begin{aligned} |\psi_A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|I_A\rangle_s|y\rangle_p + i|D_A\rangle_s|x\rangle_p) \\ |\psi_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|D_B\rangle_s|y\rangle_p - i|I_B\rangle_s|x\rangle_p). \end{aligned} \quad (6.0.9)$$

donde D y I corresponden a polarización derecha e izquierda respectivamente. Ahora $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$ son ortogonales entre ellos, en consecuencia no hay un patrón de interferencia, como se desprende de la figura 6.5.

^acon x se denota la dirección del estado ortogonal $|x\rangle$ de la ecuación (6.0.7)

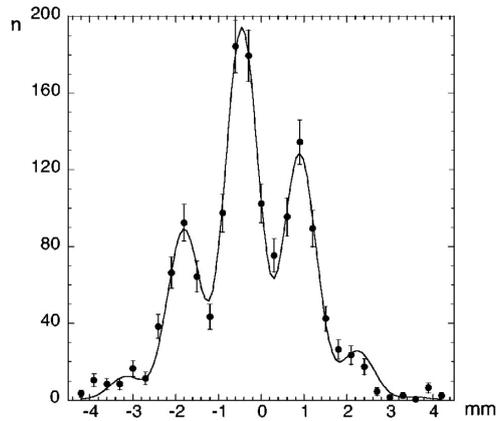


Figura 6.4: Esta gráfica representa la detección de fotones en función de la posición en mm del detector D_s . Se observa un patrón de interferencia por la presencia de la doble ranura.

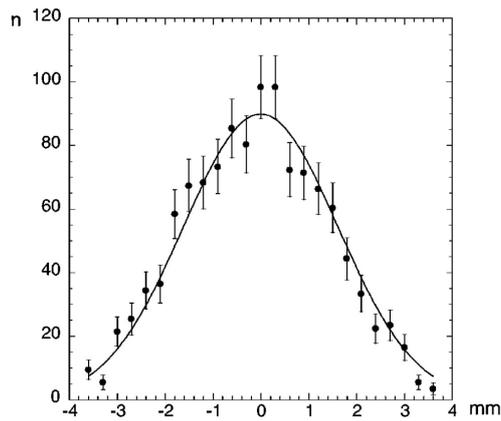


Figura 6.5: Los filtros de cuarto de onda están presentes, es posible conocer la trayectoria de fotones, en consecuencia, no hay patrón de interferencia.

La proyección del estado de polarización sobre un conjunto de estados simétrico y antisimétrico puede recuperar el patrón de interferencia, por ejemplo, es posible proyectar sobre los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ que representan

la polarización de $+45^\circ$ y -45° con respecto de x quedando

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \\ |y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle), \\ |D\rangle &= \frac{1-i}{2}(|+\rangle + i|-\rangle), \\ |I\rangle &= \frac{1-i}{2}(i|+\rangle + |-\rangle). \end{aligned} \quad (6.0.10)$$

Finalmente, el estado $|\psi\rangle$ se puede reescribir de la forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} [(|+A\rangle_s - i|+B\rangle_s)|+\rangle_p + i(|-A\rangle_s + i|-B\rangle_s)|-\rangle_p]. \quad (6.0.11)$$

Observando la ecuación (6.0.11) es posible recuperar el patrón de interferencia proyectando los fotones ‘ p ’ sobre los estados $|+\rangle_p$ o $|-\rangle_p$. Esto significa que es necesario realizar una medición de la polarización sobre el haz ‘ p ’. Al computar las detecciones de coincidencias entre los fotones ‘ s ’ y ‘ p ’, se reconstruye un patrón de interferencia constructivo cuando medimos $|+\rangle_p$ figura 6.6(a) o destructivo cuando medimos $|-\rangle_p$ figura 6.6(b).

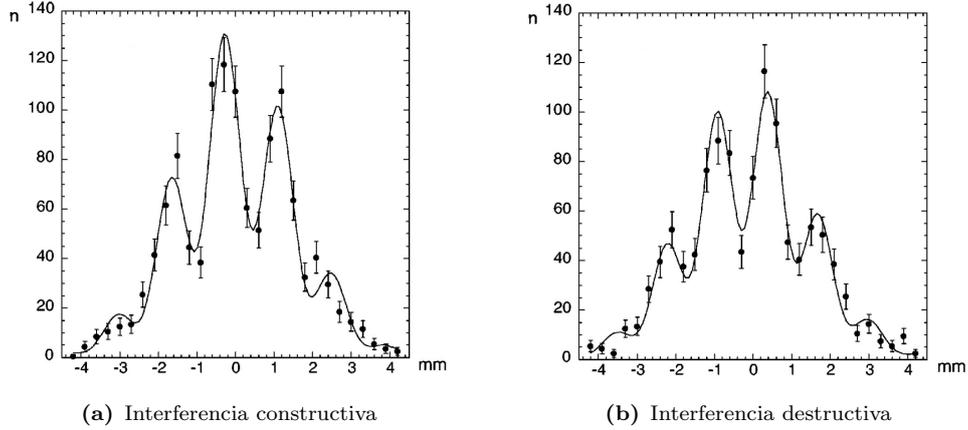


Figura 6.6: Detección de la coincidencia entre fotones ‘ s ’ y ‘ p ’, (a) midiendo $|+\rangle$, (b) midiendo $|-\rangle$.

Si promediamos las curvas de las figuras 6.6(a) y 6.6(b) obtenemos aproximadamente la curva de distribución de la figura 6.5. Una importante observación es que los resultados de la medición son independientes del orden en que se detectan los fotones ‘ s ’ y ‘ p ’. También es posible reconstruir el patrón de interferencia cuando el detector D_p se encuentra a una distancia mayor que D_s .

Los resultados anteriores son la clave para entender el comportamiento de sistemas entrelazados y a su vez es el principio de funcionamiento de

una transferencia de información cuántica, aunque está claro que siempre es necesario un canal clásico para completar la información. En este caso, el canal clásico está representado por la detección de coincidencia entre las partes entrelazadas cuánticamente, el fotón que llega al detector D_s no se entera de nada de lo que le sucede a su pareja en el canal ' p ' al menos que, a través de algún canal clásico, se realice un intercambio de información. Este mismo experimento se puede utilizar para determinar el grado de correlación entre los fotones generados a partir de otras fuentes, diferentes a la utilizada por Walborn et al. [21]. La nitidez del patrón de interferencia, que se recupera después de analizar los fotones de los canales ' s ' y ' p ', podría utilizarse para una medida más cuantitativa del entrelazamiento.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se presentaron las pautas necesarias para entender el concepto de sistemas entrelazados, particularmente de fotones, capítulos 2 y 6. Los fotones que atraviesan un medio, que posee un tensor de susceptibilidad $\chi^{(2)}$, bajo determinadas condiciones, sufren un proceso de dispersión paramétrica en el cual los fotones cambian de dirección y también de frecuencia. En el caso particular en el que un fotón incidente se divide en dos, cada uno con la mitad de la frecuencia inicial, el proceso se denomina generación paramétrica hacia abajo y los fotones resultantes se encuentran entrelazados en su grado de polarización. Para determinar el entrelazamiento, se puede utilizar un experimento de interferencia de doble ranura, los patrones de interferencia que se obtienen dependen de las mediciones relativas que se realizan sobre cada uno de los fotones del par entrelazado, (ver capítulo 6 para mayores detalles). Se mencionan también las limitaciones a las que se enfrenta la generación de pares de fotones entrelazado para una aplicación práctica (capítulos 4 y 5). Aumentar la tasa de conversión de pares de fotones permitiría la implementación de dispositivos de baja potencia, más apropiados para la construcción de circuitos lógicos. Es posible incrementar la respuesta no-lineal de un medio sólido con una alternación de diferentes medios ópticos; o en el caso de medios líquidos, por medio de la aplicación de campos eléctricos a una muestra contenida en una celda.

El conjunto de factores mencionados anteriormente muestran que es necesario comprender el comportamiento del medio y las propiedades de la fuente de fotones para una completa descripción del fenómeno. La descripción de un medio con tensor de susceptibilidad eléctrica de segundo orden, en general, es compleja y se requiere del conocimiento de muchos parámetros del sistema en cuestión, (capítulo 3). Un sistema con estas características se describe, en un modelo cuántico, como un sistema de tres niveles de energía, luego la interacción con los fotones se hace por medio de la evolución temporal del

hamiltoniano. Se plantea que existen condiciones, al menos en teoría, bajo las cuales la probabilidad de una conversión paramétrica hacia abajo es igual a uno.

Como resultado de lo analizado a lo largo del trabajo, se plantea el uso de campos eléctricos aplicados sobre una celda para inducir una mayor respuesta no-lineal en un medio líquido, contenido en la celda y susceptible a estos campos. Existen dos formas principales para continuar la propuesta y llevar este trabajo a la próxima instancia en su desarrollo teórico y experimental. En primer lugar, es necesario profundizar los estudios teóricos sobre cristales líquidos, o líquidos en general y cómo se modifican sus propiedades no-lineales en presencia de diferentes campos y fuentes de luz para poder modelizar el sistema; así también, los fenómenos de colapso y recuperación o atenuación mencionados brevemente en el capítulo 4. En segundo lugar, desde un punto de vista experimental, se puede proceder partiendo desde un sistema conocido, susceptible a campos eléctricos externos y analizar los cambios que éste experimenta en presencia de uno o varios campos variables en el tiempo (campos pulsados).

Apéndice A

Desigualdad de Bell

Suponemos tres proposiciones **A**, **B** y **C** que forman subconjuntos de un conjunto arbitrario N , en un caso general se puede representar esta situación por diagrama de conjuntos como muestra la figura A.1.

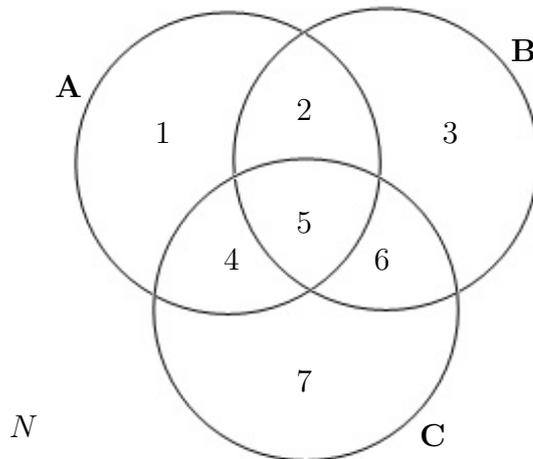


Figura A.1: **A**, **B** y **C** son proposiciones que definen subconjuntos de un conjunto arbitrario N . N_1 representa los elementos del área etiquetada con 1

Los elementos de conjunto **A** son en esta representación $N_1 + N_2 + N_4 + N_5$. Definamos a continuación nuevas proposiciones de la forma $N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{B})$ que son los elementos de **A** menos los elementos de **B**, así

$$N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}) = N_1 + N_4, \quad (\text{A.0.1})$$

si las probabilidades son clásicas es correcta la desigualdad que afirma que;

$$N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}) + N(\mathbf{B}, \neg\mathbf{C}) \geq N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{C}) \quad (\text{A.0.2})$$

que siguiendo la notación de (A.0.1) es

$$N_1 + N_4 + N_2 + N_3 \geq N_1 + N_2 \quad (\text{A.0.3})$$

como N_3 y N_4 son cero o positivos la desigualdad siempre se cumple independiente del conjunto N .

Construyamos a continuación un sistema cuántico para ejemplificar qué sucede con el cálculo probabilístico cuando el sistema está entrelazado.

El sistema está compuesto por dos partículas con spin 1/2 figura A.2 en un estado singlete $|\psi\rangle$ que se representa comúnmente por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle \}. \quad (\text{A.0.4})$$

A partir de aquí, obviamos los subíndices 1 y 2 respetando que el primer lugar corresponde a la primera partícula y el segundo a la segunda partícula.

La ecuación (A.0.4) representa un estado en el cual no es posible obtener el valor $+1 = \uparrow$ midiendo el estado de spin sobre la misma dirección arbitraria en ambas partículas. Las mediciones sobre la partícula e_1 las denotaremos con $\sigma_{1,2,3}$ y sobre la partícula e_2 con $\tau_{1,2,3}$ como muestra la figura A.2

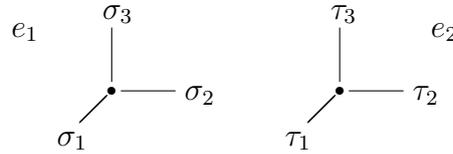


Figura A.2: Sistema de dos partículas e_1 y e_2 con posibilidad de medir tres orientaciones de spin ortogonales, σ_i y τ_i corresponde a las mediciones sobre e_1 y e_2 respectivamente.

Los σ_i y τ_i son las conocidas matrices de Pauli (A.0.5)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.5})$$

A continuación definamos las proposiciones **A**, **B** y **C**. Por ejemplo, **A** es la probabilidad de que la partícula e_1 tenga spin $+1$ o \uparrow cuando medimos en dirección 0° , así $\mathbf{A} = 1 \uparrow (0^\circ)$. De la misma forma definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 1 \uparrow (0^\circ) \\ \mathbf{B} &= 1 \uparrow (45^\circ) \\ \mathbf{C} &= 1 \uparrow (90^\circ) \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

inmediatamente se puede escribir las negaciones de \mathbf{B} y \mathbf{C} . $\neg\mathbf{B}$ significa que se obtiene el valor \downarrow cuando se mide a 45° sobre la partícula e_1 y es equivalente a decir que se obtiene el valor \uparrow cuando se mide a 45° sobre la partícula e_2

$$\begin{aligned}\neg\mathbf{B} &= 1 \downarrow (45^\circ) \sim 2 \uparrow (45^\circ) \\ \neg\mathbf{C} &= 1 \downarrow (90^\circ) \sim 2 \uparrow (90^\circ)\end{aligned}\tag{A.0.7}$$

Ahora tenemos las herramientas para escribir lo que son las proposiciones de la desigualdad (A.0.2),

$$\begin{aligned}N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}) &= N[1 \uparrow (0^\circ), 2 \uparrow (45^\circ)] \\ N(\mathbf{B}, \neg\mathbf{C}) &= N[1 \uparrow (45^\circ), 2 \uparrow (90^\circ)] \\ N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{C}) &= N[1 \uparrow (0^\circ), 2 \uparrow (90^\circ)]\end{aligned}\tag{A.0.8}$$

se definen los operadores proyección \hat{P} tal que nos permita medir el estado $\sigma_3 = 1$ sobre un estado arbitrario $|\alpha, \beta\rangle$

$$\hat{P}_{(\sigma_3=1)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\tag{A.0.9}$$

El operador se escribe de forma matricial

$$\hat{P}_{(\sigma_3=1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{A.0.10}$$

Recordemos que existen seis operadores proyección, los relacionados a la partícula e_1 (σ_i) y los relacionados a la partícula e_2 (τ_i). Para operar de manera más sencilla expresamos los operadores proyección en función de los σ_i y τ_i , así por ejemplo

$$\hat{P}_{(\sigma_3=1)} = \mathbf{A} = \frac{\sigma_3 + I}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{A.0.11}$$

y de manera similar $\neg\mathbf{B}$

$$\neg\mathbf{B} = \frac{\tau_1 + \tau_3}{2\sqrt{2}} + \frac{I}{2},\tag{A.0.12}$$

la raíz cuadrada en el denominador aparece por condiciones de normalización e I es la matriz unidad de 2×2 .

La probabilidad de la proposición o amplitud $N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{B})$ es el valor esperado $\langle \psi | (\mathbf{A} \neg\mathbf{B}) | \psi \rangle$ donde \mathbf{A} y $\neg\mathbf{B}$ ahora son proyecciones sobre un subespacio, representado por los operadores proyección en función de las matrices de Pauli. Así $N(\mathbf{A}, \neg\mathbf{B})$ resulta

$$\left\{ \frac{\langle \uparrow\downarrow | - \langle \downarrow\uparrow |}{\sqrt{2}} \right\} \left(\frac{\sigma_3 + I}{2} \right) \left(\frac{\tau_1 + \tau_3}{2\sqrt{2}} + \frac{I}{2} \right) \left\{ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right\}\tag{A.0.13}$$

observemos que cuando el operador entre paréntesis a la izquierda opera sobre $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_3 + I}{2} \right) \left\{ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right\} \\ & \left(\frac{1 + I}{2} \right) \left\{ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.0.14})$$

el segundo ket es un estado no ortogonal y no contribuye porque todos los términos de la forma

$$\langle\uparrow\downarrow| \left(\frac{\sigma_3 + I}{2} \right) |\downarrow\uparrow\rangle = 0 \quad (\text{A.0.15})$$

y por lo tanto queda

$$\left\{ \frac{\langle\uparrow\downarrow|}{\sqrt{2}} \right\} \left(\frac{\tau_1 + \tau_3}{2\sqrt{2}} + \frac{I}{2} \right) \left\{ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (\text{A.0.16})$$

De manera similar cuando τ_1 actúa sobre $|\uparrow\downarrow\rangle$ obtenemos $|\uparrow\uparrow\rangle$ que actúa sobre el bra $\langle\uparrow\downarrow|$

$$\langle\uparrow\downarrow|\uparrow\uparrow\rangle = (1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad (\text{A.0.17})$$

y tampoco contribuye a la probabilidad. Solamente queda

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\langle\uparrow\downarrow|}{\sqrt{2}} \right\} \left(\frac{\tau_3}{2\sqrt{2}} + \frac{I}{2} \right) \left\{ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \right\} \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \\ & \approx 0,073. \end{aligned}$$

observemos que $N(\mathbf{A}, -\mathbf{B})$ y $N(\mathbf{B}, -\mathbf{C})$ en (A.0.8) son idénticas y podemos escribir directamente la primera parte de la desigualdad de Bell en (A.0.2) como $2 * 0,073 = 0,15$. Ahora calculamos $N(\mathbf{A}, -\mathbf{C})$

$$\left\{ \frac{\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}} \right\} \left(\frac{\sigma_3 + I}{2} \right) \left(\frac{\tau_1 + I}{2} \right) \left\{ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right\} \quad (\text{A.0.18})$$

siguiendo el mismo procedimiento anterior nos queda

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\langle\uparrow\downarrow|}{\sqrt{2}} \right\} \left(\frac{\tau_1}{2} + \frac{I}{2} \right) \left\{ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \right\} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & = 0,25. \end{aligned}$$

Reemplazamos estos resultados en (A.0.2)

$$0,15 \geq 0,25 \tag{A.0.19}$$

Observamos que el comportamiento probabilístico de un estado cuántico singlete de un par de partículas viola la desigualdad de Bell. Esto significa que no existe una descripción clásica oculta que de alguna manera pueda explicar el comportamiento cuántico.

Apéndice B

B.1. Constantes

$$\begin{aligned}h &= 6,62606957 \times 10^{-34} J \cdot s \\ \hbar &= 1,054571726 \times 10^{-34} J \cdot s \\ \epsilon_0 &= 8,854187817 \times 10^{-12} C \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}\end{aligned}$$

B.2. Conversiones

El tensor de primer orden $\chi^{(1)}$ de la ecuación (5.0.2) está directamente relacionado con el índice de refracción “ n ” y por lo tanto es adimensional. El tensor de segundo orden $\chi^{(2)}$ tiene unidades m/V y el tensor de tercer orden $\chi^{(3)}$ m^2/V^2 , así sucesivamente.

La relación entre las unidades (*esu*) (de su nombre en inglés *Electrostatic units*) y las unidades del sistema internacional (*SI*) para $\chi^{(2)}$ se puede calcular de la siguiente forma. Partimos de

$$P_{(esu/SI)} = \frac{P_{(esu)}}{P_{(SI)}} = 3 \times 10^5$$

y

$$E_{(esu/SI)} = \frac{E_{(esu)}}{E_{(SI)}} = 3 \times 10^{-4}.$$

Así $\chi_{(esu/SI)}^{(2)} = \frac{\chi_{(esu)}^{(2)}}{\chi_{(SI)}^{(2)}}$ se puede calcular a partir de

$$P_{(esu/SI)} = \chi_{(esu/SI)}^{(2)} \cdot E_{(esu/SI)}^2,$$

obteniendo finalmente

$$\chi_{(esu/SI)}^{(2)} = 3^3 \times 10^{13}$$

Apéndice C

Evolución temporal, ecuación (4.1.2)

Se reemplaza la ecuación (4.1.3) en (4.1.2) obteniendo

$$n_b(t) = \sum_i \sum_j \langle \psi_0 | \psi_i \rangle \langle \psi_i | (e^{-iE_i t}) \hat{n}_b (e^{-iE_j t}) | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \psi_0 \rangle$$

A continuación resolvemos para los tres casos; $i = j$, $i < j$ e $i > j$.

$$i = j \quad \sum_i N_{i,i}^b, \quad (\text{C.0.1})$$

$$i < j \quad \sum_{i < j} N_{i,j}^b \cdot e^{i(E_i - E_j)t}, \quad (\text{C.0.2})$$

$$i > j \quad \sum_{i > j} N_{i,j}^b \cdot e^{i(E_i - E_j)t}, \quad (\text{C.0.3})$$

donde

$$N_{i,j}^b = \langle \psi_0 | \psi_i \rangle \langle \psi_j | \psi_0 \rangle \langle \psi_i | \hat{n}_b | \psi_j \rangle$$

Teniendo en mente que la suma se realiza sobre los elementos $i > j$, la ecuación (C.0.3) puede reemplazarse por

$$\sum_{i > j} N_{i,j}^b \cdot e^{i(E_i - E_j)t} = \sum_{i < j} N_{i,j}^b \cdot e^{-i(E_i - E_j)t}.$$

Combinando ésto con la ecuación (C.0.2), la suma para $i < j$ resulta

$$i < j \quad \sum_{i < j} N_{i,j}^b \cdot [e^{i(E_i - E_j)t} + e^{-i(E_i - E_j)t}]$$

$$i < j \quad \sum_{i < j} N_{i,j}^b 2 \cos((E_i - E_j)t).$$

Utilizando estos resultados llegamos a la ecuación (4.1.7)

$$n_b(t) = \sum_i N_{i,i}^b + 2 \sum_{i < j} N_{i,j}^b \cos((E_i - E_j)t).$$

Apéndice D

Cálculo de la ecuación (2.0.4)

Para desarrollar el conmutador $[\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0, \hat{H}]$ escribamos a \hat{H} siguiendo la ecuación (2.0.3) de la forma

$$\hat{H} = (\hat{n}_0 + \frac{1}{2}) + (\hat{n}_1 + \frac{1}{2}) + (\hat{n}_2 + \frac{1}{2}) + [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2]$$

donde suprimimos los ω_i y las demás constantes para simplificar la expresión. De forma explícita el conmutador se escribe,

$$(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0)\hat{H} - \hat{H}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0)$$

distribuyendo llegamos a

$$\begin{aligned} & (\hat{n}_1\hat{n}_0 + \frac{1}{2}\hat{n}_1) + (\hat{n}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{n}_1) + (\hat{n}_1\hat{n}_2 + \frac{1}{2}\hat{n}_1) + \hat{n}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0 + \hat{n}_1\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 + \\ & (\hat{n}_2\hat{n}_0 + \frac{1}{2}\hat{n}_2) + (\hat{n}_2\hat{n}_1 + \frac{1}{2}\hat{n}_2) + (\hat{n}_2^2 + \frac{1}{2}\hat{n}_2) + \hat{n}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0 + \hat{n}_2\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 + \\ & (2\hat{n}_0^2 + \hat{n}_0) + (2\hat{n}_0\hat{n}_1 + \hat{n}_0) + (2\hat{n}_0\hat{n}_2 + \hat{n}_0) + 2\hat{n}_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0 + 2\hat{n}_0\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 \\ & - (\hat{n}_0\hat{n}_1 + \frac{1}{2}\hat{n}_1) - (\hat{n}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{n}_1) - (\hat{n}_2\hat{n}_1 + \frac{1}{2}\hat{n}_1) - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0\hat{n}_1 - \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{n}_1 \\ & - (\hat{n}_0\hat{n}_2 + \frac{1}{2}\hat{n}_2) - (\hat{n}_1\hat{n}_2 + \frac{1}{2}\hat{n}_2) - (\hat{n}_2^2 + \frac{1}{2}\hat{n}_2) - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0\hat{n}_2 - \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{n}_2 \\ & - (2\hat{n}_0^2 + \hat{n}_0) - (2\hat{n}_1\hat{n}_0 + \hat{n}_0) - (2\hat{n}_2\hat{n}_0 + \hat{n}_0) - 2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0\hat{n}_0 - 2\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{n}_0 \end{aligned}$$

Como los operadores \hat{n}_i son hermíticos, todos los términos que dependen únicamente de los \hat{n}_i se anulan entre sí, quedando por resolver entonces,

$$\begin{aligned} & \hat{n}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0 + \hat{n}_1\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{n}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0 + \hat{n}_2\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 + 2\hat{n}_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0 + 2\hat{n}_0\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 \\ & - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0\hat{n}_1 - \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{n}_1 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0\hat{n}_2 - \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{n}_2 - 2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0\hat{n}_0 - 2\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{n}_0 \end{aligned}$$

Observemos que podemos agrupar el primer término de la primera línea con el primer término de la segunda línea para formar un conmutador...

$$[\hat{n}_1, \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0]$$

utilizando la propiedad distributiva $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ llegamos a

$$= [\hat{n}_1, \hat{a}_1^\dagger](\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0) + \hat{a}_1^\dagger [\hat{n}_1, (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0)]$$

teniendo en cuenta las propiedades de los conmutadores \hat{a} y \hat{n}

$$\begin{aligned} [\hat{a}_k, \hat{n}_j] &= \hat{a}_k \delta_{kj} \\ [\hat{a}_k^\dagger, \hat{n}_j] &= -\hat{a}_k^\dagger \delta_{kj} \end{aligned}$$

el conmutador nos queda de la forma

$$= \underbrace{[\hat{n}_1, \hat{a}_1^\dagger]}_{=\hat{a}_1^\dagger} (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0) + \hat{a}_1^\dagger \underbrace{[\hat{n}_1, (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0)]}_{=0} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0$$

de manera similar procedemos con los demás términos quedando solamente seis

$$= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 - 2\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 + 2\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2.$$

En esta última ecuación es evidente que el conmutador de la ecuación (2.0.4) es igual a cero.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47(10): 777–780, May 1935. doi: 10.1103/PhysRev.47.777. **2**
- [2] J.S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964. **2**
- [3] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time- varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49 (25):1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. **3**
- [4] Th. Zoller, P. et.alland Beth, D. Binosi, R. Blatt, H. Briegel, D. Bruss, T. Calarco, J. I. Cirac, D. Deutsch, J. Eisert, A. Ekert, C. Fabre, N. Gisin, P. Grangiere, M. Grassl, S. Haroche, A. Imamoglu, A. Karlson, J. Kempe, L. Kouwenhoven, S. Kröll, G. Leuchs, M. Lewenstein, D. Loss, N. Lütkenhaus, S. Massar, J. E. Mooij, M. B. Plenio, E. Polzik, S. Popescu, G. Rempe, A. Sergienko, D. Suter, J. Twamley, G. Wendin, R. Werner, A. Winter, J. Wrachtrup, and A. Zeilinger. Quantum information processing and communication. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 36:203–228, 2005. ISSN 1434-6060. URL <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2005-00251-1>. 10.1140/epjd/e2005-00251-1. **4**
- [5] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Third Edition*. Academic Press, 3 edition, April 2008. ISBN 0123694701. **5, 15, 25**
- [6] Y. R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley-Interscience, November 2002. ISBN 0471430803. **6, 15**
- [7] D.N. Klyshko. *Photons Nonlinear Optics*. CRC Press, rev enl edition, January 1988. ISBN 2881246699. **6, 25**
- [8] Amnon Yariv. *Quantum Electronics*. Wiley, 3 edition, January 1989. ISBN 0471609978. **15**

- [9] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1 edition, September 1995. ISBN 0521417112. 17, 21
- [10] G. Drobný and V. Bužek. Fundamental limit on energy transfer in k-photon down-conversion. *Phys. Rev. A*, 50(4):3492–3499, Oct 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.50.3492. 17, 19, 22
- [11] Ryszard Tanas. *Quantum Noise in Nonlinear Optical Phenomena*, pages 1–77. John Wiley and Sons, Inc., 2002. ISBN 9780471231479. doi: 10.1002/0471231479.ch1. URL <http://dx.doi.org/10.1002/0471231479.ch1>. 17, 21, 22, 23
- [12] George L. Fischer, Robert W. Boyd, Russell J. Gehr, Samson A. Jenekhe, John A. Osaheni, J. E. Sipe, and Laura A. Weller-Brophy. Enhanced nonlinear optical response of composite materials. *Phys. Rev. Lett.*, 74(10):1871–1874, Mar 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.74.1871. 19, 24, 31
- [13] Gabriel Drobný and Igor Jex. Collapses and revivals in the energy exchange in the process of k-photon down-conversion with quantized pump. *Physical Review A*, 45(3):1816, February 1992. doi: 10.1103/PhysRevA.45.1816. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.1816>. 19, 20
- [14] Christopher C. Gerry and Peter L. Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521527354. 21
- [15] Kazuki Koshino. Down-conversion of a single photon with unit efficiency. *Physical Review A*, 79(1):013804, January 2009. doi: 10.1103/PhysRevA.79.013804. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.013804>. 22
- [16] A.V. Sukhov and R.V. Timashev. Optical induced deviation from central symmetry; lattices of quadratic nonlinear susceptibility in a nematic liquid crystal. *JETP lett.*, 51(7):415, 1990. URL http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1141/article_17275.shtml. 28, 29, 30
- [17] M.I. Barnik, L.M. Blinov, A.M. Dorozhkin, and N.M. Shtykov. Generation of the second optical harmonic induced by an electric field in nematic and smectic liquid crystals. *JETP lett.*, 54(5):935, 1981. URL <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/54/5/p935?a=list>. 28, 30, 31

- [18] L. Lucchetti, M. Di Fabrizio, O. Francescangeli, and F. Simoni. Colossal optical nonlinearity in dye doped liquid crystals. *Optics Communications*, 233(4-6):417 – 424, 2004. ISSN 0030-4018. doi: 10.1016/j.optcom.2004.01.057. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401804001002>. 28, 31
- [19] Iam-Choon Khoo. *Liquid crystals*. Wiley-Interscience, 2007. ISBN 9780471751533. 28
- [20] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa. Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. *American Journal of Physics*, 57:117–120, February 1989. doi: 10.1119/1.16104. 34
- [21] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua, and C. H. Monken. Double-slit quantum eraser. *Phys. Rev. A*, 65:033818, Feb 2002. doi: 10.1103/PhysRevA.65.033818. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.033818>. 36, 40