Licenciatura en Física

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

Universidad Nacional de Tucumán

Tesis de Licenciatura

Teorema de Noether aplicado al problema de Störmer

Gustavo Daniel Vischi

Director: Ana Georgina Elias

Marzo de 2022

Índice

Agradecimientos

Ante todo, quiero agradecer a mi esposa Prisilla sin cuyo apoyo, aliento y comprensión no hubiera podido retomar los estudios después de tantos años y mucho menos culminar este trabajo.

Hago explicito mi reconocimiento al cuerpo Docente del Departamento de Física, de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Tucumán, a mi Directora de Tesis, Dra. Ana Georgina Elias, a los miembros de la Comisión de Seguimiento de este trabajo de Tesis, Dra. Mónica C. Tirado y Dr. Blas F. de Haro Barbas, y a la Comisión Académica de la Carrera, Dra. Gabriela Simonelli, Dra. Andrea I. Borgazzi, Dra. Marta M. Zossi, y BUF Horacio Brizuela, por sus observaciones, sugerencias y críticas que me han sido de inestimable ayuda; y por supuesto a los jóvenes estudiantes, entre ellos Tomas y Rodolfo, que me han hecho sentir uno más de ellos.

Un saludo especial al Dr. Constatino Grosse, por ser un profesor que, más allá de impartir una asignatura, ha dotado a sus alumnos de esa conciencia intelectual que se satisface tan solo cuando hay coincidencia entre el pensamiento y la realidad.

Resumen

En este trabajo se analizan los resultados que arroja el Teorema de Noether para una partícula cargada no relativística que se mueve en un campo magnético dipolar como podría ser el de la Tierra. Cuenta con tres secciones principales. La primera sección está dedicada a una revisión del problema de Störmer para una partícula relativista que se mueve en un campo dipolar de simetría axial suponiendo que no radia. Se presenta también una síntesis de dos de los conceptos de simetría: uno desde el punto de vista del Lagrangiano, y otro desde el punto de vista del Hamiltoniano, y como se relacionan con las cantidades conservadas. En la segunda sección se aplica el teorema de Noether al problema de Störmer restringiendo el análisis al caso no relativista (y sin radiación) adoptándose estos supuestos simplificadores como una primera aproximación razonable en virtud de que aun con ellos la resolución de la ecuación involucrada conlleva un trabajo algebraico considerable. En la tercera sección se analizan los resultados y las posibles líneas futuras de investigación que surgen, seguida de tres apéndices en los cuales se presentan la solución al problemay los enfoques de simetría en forma más completa y detallada, junto con una breve semblanza de Emy Noether, la matemática alemana a quien debemos la teoría de los invariantes.

Abstract

In this work the results of Noether's Theorem for a non-relativistic charged particle that moves in a dipolar magnetic field such as the Earth's field are analyzed. It has three main sections. The first section is devoted to a review of Störmer's problem for a relativistic particle moving in a dipole field of axial symmetry assuming that it does not radiate. A synthesis of two of the symmetry concepts is also presented: one from the Lagrangian point of view, and the other from the Hamiltonian point of view, and how they relate to conserved quantities. In the second section, Noether's theorem is applied to the Störmer problem, restricting the analysis to the non-relativistic case (without radiation), adopting these simplifying assumptions as a first reasonable approximation, since even with them the resolution of the equation involved entails a considerable algebraic work. In the third section the results and possible lines of research that arise are analyzed followed of three appendices in which the solution to the problem and the symmetries approaches are presented in a more completed and detailed way, together with a brief profile of Emmy Noether the German mathematician to whom we own the theory of invariants.

Introducción

El problema del movimiento de una partícula cargada en un campo magnético dipolar se denomina "problema de Störmer", y es de interés desde hace mucho tiempo en el contexto de la física de plasma, la astrofísica y en particular en el estudio de partículas energéticas cargadas atrapadas en el campo magnético de la Tierra, y de cualquier planeta con campo magnético intrínseco. Esto incluye los cinturones de radiación de Van Allen, el anillo de corriente, las auroras y los rayos cósmicos. Este problema ha sido ampliamente estudiado y se ha demostrado que no es integrable.

Se han hecho generalizaciones del problema Störmer para configuraciones más complejas, como campos cuadrupolares o configuraciones multipolares en general, que han adquirido importancia en virtud de la posibilidad de que tales configuraciones sean las características del campo magnético terrestre en épocas de transición hacia su inversión de polaridad. También es de utilidad en el estudio de la dinámica de granos de polvo cargados donde, dado que la masa se vuelve relativamente importante, además del campo magnético se debe considerar el campo gravitatorio creado por el planeta.. Este problema se suele denominar "problema generalizado de Störmer", donde se combinan la mecánica celeste con la física de plasma.

Todos estos planteos siguen el enfoque original de Störmer en el cual se aprovecha la conservación del Lagrangiano, que no depende del tiempo, y el hecho de que al elegir el sistema de coordenadas polares resulta que el ángulo acimutal es una coordenada cíclica y su momento conjugado se conserva. Es decir, se emplean dos cantidades conservadas para un problema de tres grados de libertad con lo cual, necesariamente, muchos aspectos del fenómeno quedan sin respuesta. Sin embargo, un sistema de tres grados de libertad debe poseer seis constantes de movimiento independientes. En un problema dado la elección adecuada del sistema de referencia proporciona alguna de esas cantidades conservadas a través de las variables cíclicas y una vez agotada esta vía hay que recurrir a relaciones más sofisticadas entre simetrías y cantidades conservadas si es que se quiere explorar algún camino alternativo.

En este trabajo de Tesis se aplica el Teorema de Noether al problema de Störmer para el cual, en principio, resulta un enfoque prometedor.Se demuestra una tercera cantidad conservada asociada a una simetría y durante el desarrollo quedan de manifiesto técnicas que puedan emplearse en este tipo de planteos, como así mismo las dificultades que surgen.

En la siguiente sección presenta una revisión del problema de Störmer junto con una síntesis de dos de los conceptos de simetría: uno desde el punto de vista del Lagrangiano, y otro desde el punto de vista del Hamiltoniano.

1. Problema de Störmer y los enfoques de simetrías

1.1 Introducción al problema de Störmer

El movimiento de partículas cargadas en un campo dipolar magnético ha sido objeto de estudios desde hace muchos años. A partir de los trabajos de Störmer (1907, 1930, 1955) que describe cualitativamente muchos aspectos de dicho movimiento se han llevado a cabo importantes generalizaciones para configuraciones más complejas, como campos cuadrupolares y multipolares en general (Urban, 1966; Shebalin, 2004; Tsareva, 2019; Comedi et al., 2020; Comedi, 2021) que han adquirido importancia en virtud de la posibilidad de que tales configuraciones constituyan la mejor descripción del campo magnético terrestre como consecuencia de la evolución de éste hacia su inversión de polaridad.

Todos estos trabajos siguen el enfoque original de Störmer en el cual se aprovecha la conservación del Lagrangiano (que no depende del tiempo) y el hecho de que al elegir el sistema de coordenadas polares resulta que el ángulo acimutal es una coordenada cíclica y su momento conjugado se conserva. Es decir, se emplean dos cantidades conservadas para un problema de tres grados de libertad con lo cual, necesariamente, limita su alcance.

Por otro lado, el problema es irresoluble analíticamente (Dragt & Finn, 1976) en el sentido de que no es globalmente integrable. Sin embargo, un sistema de tres grados de libertad debe poseer seis constantes de movimiento independientes. En un problema dado, la elección adecuada del sistema de referencia proporciona alguna de esas cantidades conservadas a través de las variables cíclicas y, una vez agotada esta vía, hay que recurrir a relaciones más sofisticadas entre simetrías y cantidades conservadas si es que se quiere explorar algún camino alternativo (Torres del Castillo et al., 2013; Torres del Castillo, 2018).

1.2 El Problema de Störmer

En física de la atmósfera se conoce como "problema de Störmer" al de una partícula en un campo dipolar con simetría axial (Störmer,1907). Su importancia radica en que está relacionado con las auroras polares estudiadas desde el siglo XIX con los trabajos del físico noruego Kristian Birkland que propuso por primera vez que dicho fenómeno estaba relacionado con el flujo de electrones provenientes del Sol. Este problema ha tenido un renovado interés en el ámbito de astrofísica con el estudio de granos de polvo cargados que orbitan alrededor de planetas con campo magnético donde se debe considerar también el campo gravitatorio creado por el planeta. Este problema se suele denominar "problema generalizado de Störmer" (Dullin et al., 2002; Iñarrea et al. 2012).

Con un enfoque sencillo e ingenioso Carl Störmer determinó (incluso antes del descubrimiento de los cinturones de radiación) las regiones permitidas y prohibidas alrededor de la Tierra para el ingreso de partículas cargadas desde el espacio exterior como así también el centro de guía de las partículas atrapadas. Por otra parte, en 1955 calculó numéricamente las trayectorias de las partículas bajo diversas condiciones.

A continuación, se describe la teoría que Störmer (1907, 1955) planteó para determinar que las trayectorias de las partículas en un campo dipolar están confinadas a regiones correspondientes a zonas internas y externas permitidas. Estas dos zonas permitidas están separadas por una zona prohibida cuya forma es función de constantes del movimiento de las partículas cargadas: energía, y momento canónico azimutal.

En general el planteo se reduce a reformular las constantes de movimiento que surgen de las ecuaciones de Lagrange.

Se considera que el campo geomagnético corresponde al de un dipolo de momento magnético M ubicado en el centro de la Tierra, como se muestra en la Figura 1.

Sea P la posición de una partícula cuando cruza el plano meridiano de coordenadas (r,λ,ω) y v la velocidad instantánea de la partícula en el instante t, cuando cruza ese plano meridiano en el punto P. Es importante notar que en las coordenadas esféricas polares que se usarán a continuación, se usa la latitud λ en vez de la colatitud como normalmente se hace en coordenadas esféricas.

Las coordenadas del punto P corresponden a:

r : distancia radial OP

λ : latitud de P medida desde el plano ecuatorial

ω : longitud de P medida desde el este hacia el oeste.

Y también vamos a necesitar para lo que sigue el ángulo θ entre el vector velocidad $\boldsymbol{v}$, y su proyección sobre el plano meridiano que pasa por el punto P, el cual es positivo cuando la partícula cruza el plano meridiano de este a oeste.

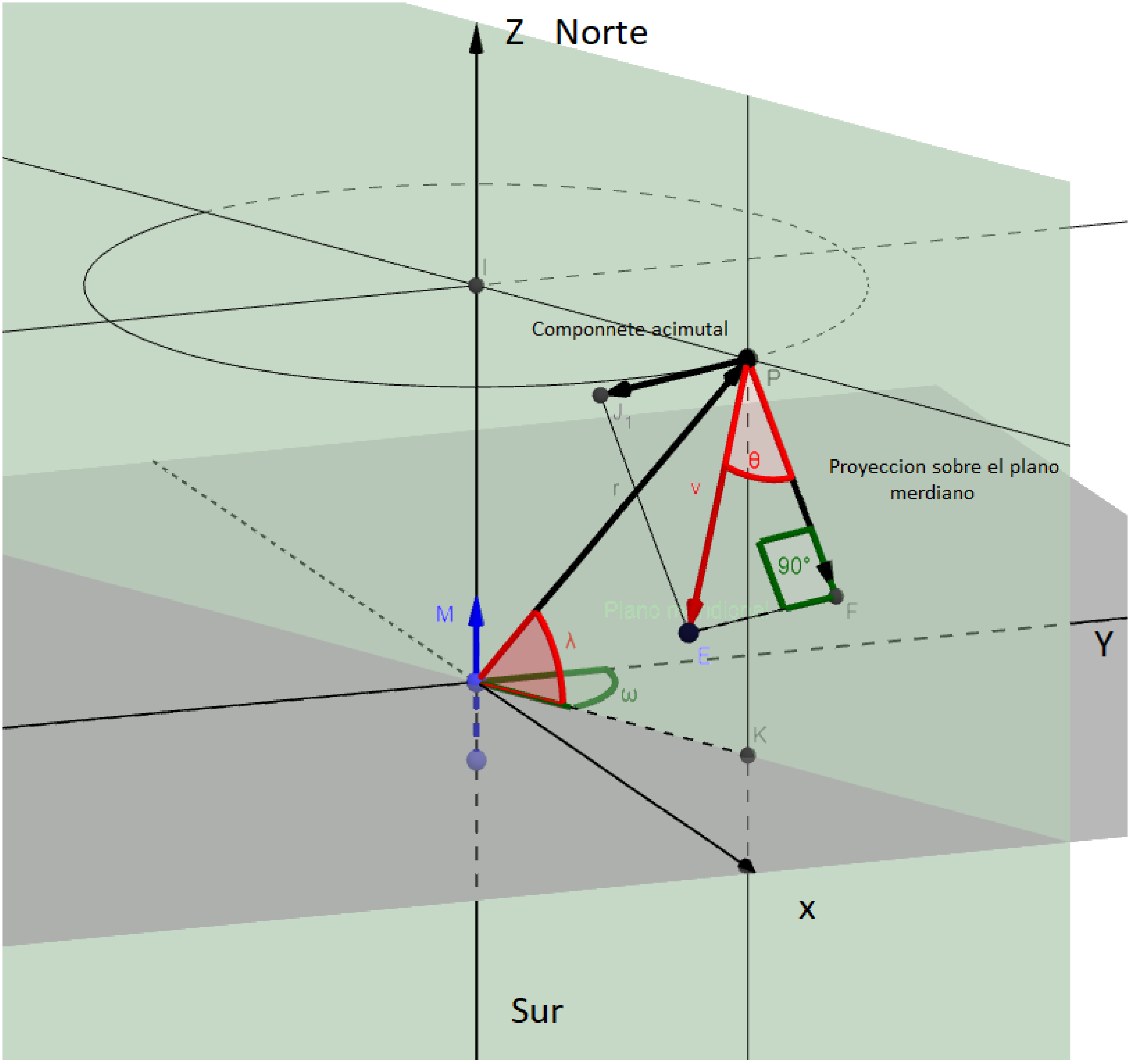


Figura 1. Esquema del sistema de coordenadas considerado en el problema de Störmer en el que se encuentra la partícula cargada en el punto P de coordenadas (r,λ,ω), y posee una velocidad v.

El planteo parte del Lagrangiano del sistema, que corresponde a una partícula relativista, de carga e (carga del electrón), en un campo electromagnético que está dado por:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + (e/c)\,.\boldsymbol{A}.\boldsymbol{v} - e\phi \qquad (1.1)$$

Donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, c la rapidez de la luz en el vacío, $\boldsymbol{A}$ el potencial vectorial magnético del campo presente y ϕ el potencial escalar eléctrico.(Goldstein,2007)

En este caso no hay campo eléctrico, con lo cual ϕ=0 y el potencial vectorial magnético corresponde al de un campo dipolar magnético que tan solo tiene una componente, la acimutal, dada por:

$$A_\omega = \frac{M\cos\lambda}{r^2} \tag{1.2}$$

donde M es el momento dipolar magnético. La Ecuación (1.1) queda entonces

$$L = -m_o c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} A_\omega v_\omega = -m_o c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\frac{M\cos\lambda}{r^2} v_\omega \tag{1.3}$$

Y dado que :

$$v_\omega = r\cos\lambda\ \dot{\omega} \tag{1.4}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 + (r\cos\lambda)^2\dot{\omega}^2 \tag{1.5}$$

la Ecuación (1.3) resulta

$$L = -m_o c^2 \sqrt{1-\frac{(\dot{r}^2+r^2\dot{\lambda}^2+(r\cos\lambda)^2\dot{\omega}^2)}{c^2}} + \frac{e}{c}\frac{M}{r}\dot{\omega}\cos^2\lambda \tag{1.6}$$

A partir de esto podemos calcular el Hamiltoniano dado por

$$H = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} + \dot{\omega}\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} - L \tag{1.7}$$

Para lo cual necesitamos los momentos conjugados:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} = m_o c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{(r\cos\lambda)^2\dot{\omega}}{c^2} + \frac{e}{c}\frac{M}{r}\cos^2\lambda \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_o c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\dot{r}}{c^2} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = m_o c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{r^2\dot{\lambda}}{c^2} \tag{1.10}$$

Reemplazando (1.8), (1.9) y (1.10) en la Ecuación (1.7) tenemos que

$$H = \left[m_o c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\dot{r}^2}{c^2} + m_o c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{r^2\dot{\lambda}^2}{c^2} + m_o c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{(r\cos\lambda)^2\dot{\omega}^2}{c^2} + \frac{e}{c}\frac{M}{r}\dot{\omega}\cos^2\lambda \right] +$$
$$m_o c^2 \sqrt{1-\frac{(\dot{r}^2+r^2\dot{\lambda}^2+(r\cos\lambda)^2\dot{\omega}^2)}{c^2}} - \frac{e}{c}\frac{M}{r}\dot{\omega}\cos^2\lambda$$

$$H = m_o c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r^2\dot{\lambda}^2}{c^2} + \frac{(r\cos\lambda)^2\dot{\omega}^2}{c^2}\right] + m_o c^2\sqrt{1 - \frac{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 + (r\cos\lambda)^2\dot{\omega}^2)}{c^2}}$$

$$H = m_o c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v^2}{c^2} + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]$$

$$H = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\frac{v^2}{c^2} + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]$$

$$H = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right]$$

$$H = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \tag{1.11}$$

Como vemos el Hamiltoniano es simplemente la energía cinética de la partícula; y como el campo magnético no depende del tiempo y no puede transferirle energía, el Hamiltoniano debe ser una constante de movimiento.

Por otra parte de las tres ecuaciones de movimiento que se obtienen del Lagrangiano, la más interesante, por ser una variable cíclica, es la que corresponde a ω para la cual se conserva el momento conjugado que ya hemos calculado en la Ecuación (1.8) por lo que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} = m_o \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(r\cos\lambda)^2\dot{\omega} + \frac{e}{c}\frac{M}{r}\cos^2\lambda = constante$$

O lo que es lo mismo:

$$m(r\cos\lambda)^2\dot{\omega} + \frac{e}{c}\frac{M}{r}\cos^2\lambda = constante \tag{1.12}$$

Se puede operar sobre esta ecuación para ponerla de una forma más útil. En primer lugar, de (1.11) sigue que al ser constante H también lo son el módulo de la velocidad v y la masa $m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ por lo cual el producto de estas dos cantidades, es decir $p = mv$ también es constante. Entonces dividiendo ambos miembros de (1.12) por $p = mv$ tenemos que:

$$r^2\frac{\dot{\omega}}{v}\cos^2\lambda + \frac{e}{c}\frac{M}{pr}\cos^2\lambda = constante \tag{1.13}$$

Todo hasta aquí es un cálculo directo; y en este punto es donde Störmer hace un pequeño e ingenioso truco que permite analizar el problema desde una perspectiva diferente. En primer lugar, reordena el primer término del miembro de la izquierda de la ecuación anterior que queda de la siguiente forma:

$$\frac{(\dot{\omega}\, r\cos\lambda)}{v} r\cos\lambda + \frac{e}{c}\frac{M}{pr}\cos^2\lambda = constante \tag{1.14}$$

Pero en esta ecuación el producto $\dot{\omega}\, r \cos\lambda$ es la componente acimutal de la velocidad, dada por la Ecuación (1.4), por lo cual la ecuación anterior queda:

$$\frac{v_\omega}{v} r \cos\lambda + \frac{e}{c}\frac{M}{pr}\cos^2\lambda \ = constante\ . \qquad (1.15)$$

El cociente $\frac{v_\omega}{v}$ es el seno del ángulo formado entre el vector velocidad y su proyección sobre sobre el plano meridional que contiene a la partícula (denominado θ en la Figura 1) es decir:

$$\frac{v_\omega}{v} = sen\ \theta\ \ . \qquad (1.16)$$

Con esto la Ecuación (1.15) queda:

$$r\cos\lambda\, sen\ \theta + \frac{e}{c}\frac{M}{pr}\cos^2\lambda \ = constante. \qquad (1.17)$$

Para que esta ecuación sea dimensionalmente correcta el factor $C_{st} = \frac{e}{c}\frac{M}{p}$ debe tener dimensiones de longitud al cuadrado, lo cual puede comprobarse en base a las dimensiones de las magnitudes que lo forman (.teniendo en cuenta que estas ecuaciones están en el sistema gaussiano de unidades) Störmer utilizó este valor como un factor de escala para simplificar la Ecuación (1.17) en la cual si dividimos ambos miembros por la $\sqrt{\frac{e}{c}\frac{M}{p}}$ queda de la siguiente forma:

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{eM}{c\,p}}}\cos\lambda\, sen\ \theta + \frac{\cos^2\lambda}{\frac{r}{\sqrt{\frac{eM}{c\,p}}}} \ = \frac{constante}{\sqrt{\frac{eM}{c\,p}}}\quad . \qquad (1.18)$$

En esta ecuación la cantidad $\frac{r}{\sqrt{\frac{eM}{c\,p}}}$ corresponde al módulo del radio vector re-escalado.

En lo que sigue vamos a dar por sobreentendido que estamos usando las magnitudes re-escaladas y escribimos la Ecuación (1.18) de la forma:

$$r\cos\lambda\, sen\ \theta + \frac{\cos^2\lambda}{r} \ = \frac{constante}{\sqrt{\frac{eM}{c\,p}}}\quad . \qquad (1.19)$$

Aún podemos simplificar esta expresión un poco más definiendo un factor para el segundo miembro de la forma$-2\gamma = \frac{constante}{\sqrt{eM/pc}}$, con lo cual (1.19) puede escribirse entonces como :

$$r\cos\lambda\, sen\ \theta + \frac{\cos^2\lambda}{r} \ = -2\gamma \qquad (1.20)$$

la cual puede reordenarse como:

$$r^2\cos\lambda\, sen\ \theta + \cos^2\lambda \ = -2\gamma r$$

$$\cos^2\lambda + 2\gamma r = -\,r^2\cos\lambda\, sen\ \theta$$

$$\frac{\cos\lambda}{r^2}+\frac{2\gamma}{r\cos\lambda}=-sen\,\theta \qquad (1.21)$$

En esta ecuación (que no es otra cosa que la Ecuación (1.12) pero expresada de manera diferente) es donde se puede apreciar la utilidad de emplear el ángulo θ en el análisis.

En efecto; del lado izquierdo tenemos una relación entre los parámetros del problema (las coordenadas, la energía y el momento dipolar) y del otro lado una condición que nos permite establecer límites en esas relaciones, ya que el segundo miembro está acotado entre -1 y 1.

El parámetro γ es un parámetro libre, y se puede graficar r cos(λ),que denominaremos ρ, en función de r sen(λ), o sea z, para los valores límites -1 y 1 en función del valor que se elija para γ. Estas coordenadas están contenidas en un plano meridional, es decir, para un ω determinado.

Por supuesto que a causa de la simetría azimutal del campo dipolar, se tiene lo mismo para cualquier ω.

La Figura 2 muestra estas dos curvas (ρ vs. z) que verifican la Ecuación (1.16) igualada a 1 y a -1. Es decir, llamando Q a $-sen\,\theta$ la Ecuación (1.22) puede reescribirse como:

$$\frac{2\gamma}{\rho}+\frac{\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=Q \qquad (1.22)$$

Para realizar la gráfica de ρ vs. z (que se muestra en la Figura 2), se despeja z en función de ρ, con lo cual :

$$z=\pm\left[\frac{\rho^{\frac{4}{3}}}{(Q\rho-2\gamma)^{\frac{2}{3}}}-\rho^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.23)$$

Se tienen cuatro soluciones dos para Q=1 y otras dos para Q= -1.

Este conjunto de cuatro soluciones, dan lugar a cuatro líneas que dividen al espacio en zonas permitidas para la partícula y zonas prohibidas. Las regiones permitidas corresponden al conjunto de puntos (z,ρ), para los cuales Q tiene valores reales comprendidos entre -1 y 1.

Variando γ se tiene distintas formas para las zonas permitidas a la partícula, que corresponde a las regiones blancas en la Figura 2. En los casos de los paneles (a) y (b) de esta figura, la región blanca (la permitida) se abre de tal forma que las partículas que provienen del espacio exterior pueden alcanzar la Tierra.

En los casos de los paneles (d) y (e) hay dos regiones permitidas separadas entre sí, lo que indica que las partículas del espacio están en la región blanca que no contiene a la Tierra no tienen acceso a nuestro planeta. El caso límite se ilustra en la Figura 2 (c) o, a partir del cual las partículas del exterior tienen acceso a la Tierra y cuyo valor del parámetro γ se denomina “critico “ γ_c.

El punto sobre el ecuador de la curva Q=1 corresponde al valor de máximo acercamiento de una partícula cargada en ese plano, y que para γ=-1 resulta $rcos(\lambda) = \sqrt{2} - 1$ que se podría considerar como un límite interno para la trayectoria de partículas cargadas.

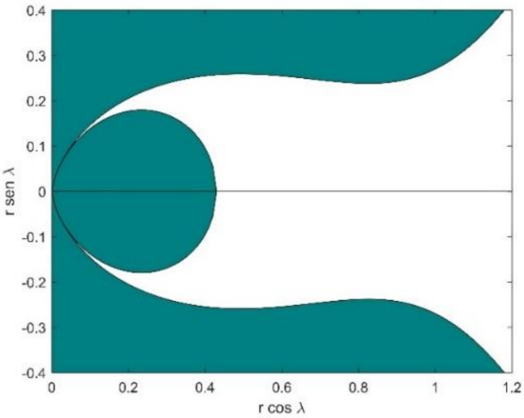
Este tipo de análisis se ha extendido para configuraciones más complejas que involucran momentos dipolares de orden superior y combinaciones de ellos (Tsareva,2019).

No obstante, todos ellos matienen el mismo enfoque; es decir, el de trabajar con dos cantidades conservadas (la energía y el momento generalizado) y delimitando las regiones permitidas.

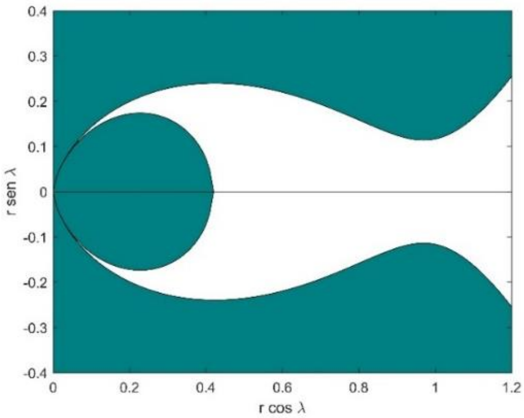
Es natural pensar que el análisis sería mucho más profundo y rico en conclusiones si se consiguiera una tercera cantidad conservada también basado en consideraciones de simetría, o bien se resolviera el problema por algún otro de los métodos que proporciona la mecánica analítica como por ejemplo la ecuación de Hamilton-Jacobi.

El punto es que este sistema no es integrable (Contopoulos & Vlahos, 1975; Dragt & Finn, 1976; Braun,1981; Almeida et al., 1992). Esto, por un lado, clausura la posibilidad de emplear la ecuación de Hamilton-Jacobi y cualquier otra transformación canónica que simplifique la resolución del problema ya que ninguna transformación lo hará integrable. Y, por otro lado, limita las posibilidades de encontrar una tercera cantidad conservada, aunque no la elimina por completo.

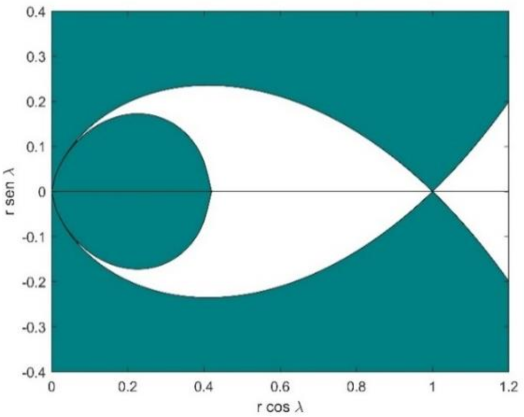
En efecto, el Teorema de Liouville-Arnold (Lemos, 2007) establece que si un sistema de tres grados de libertad como éste tuviera tres constantes de movimiento en involución entonces sería integrable. La condición de que las tres cantidades estén en involución significa que los corchetes de Poisson entre ellos sean cero y es lo suficientemente restrictiva como para dejar abierta la posibilidad de encontrar en este caso una tercera cantidad conservada que no esté en involución con las otras dos. A esto se refiere esta tesis, enfocando el problema desde la óptica de las simetrías del sistema, en particular las llamadas simetrías variacionales cristalizadas en el Teorema de Noether (Goldstein et al, 2002; Lemos,2007; Torres del Castillo,2018)) que es lo que se presenta el apartado siguiente.



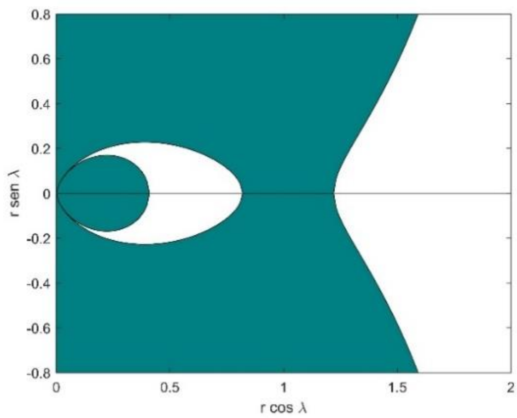
(a)



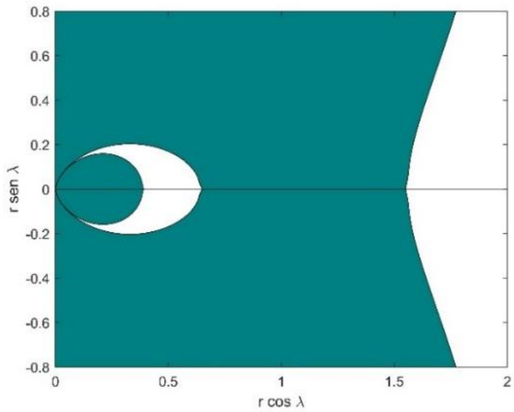
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 2. Plano meridional, con la Tierra en el centro (0,0). Las líneas negras (excepto el eje central) corresponden a r senλ vs r cosλ para Q=1 y Q=-1, y para (a) γ=-0.95, (b) γ=-0.99, (c) γ=-1, (d) γ=-1.02, y (e) γ=-1.10. Las regiones sombreadas y las blancas indican zonas del espacio prohibidas y posibles, respectivamente, para la partícula. Fuente: Comedi ,2021.

1.3 Dos conceptos de simetrías

El problema de Störmer,esbozado en el apartado anterior, trata el movimiento de partículas cargadas en campo considerando un campo magnético dipolar, haciendo uso de dos constantes del movimiento (el Lagrangiano que no depende del tiempo, y el momento canónico conjugado acimutal).O sea es un enfoque que emplea dos ecuaciones para un problema de tres grados de libertad.

Las consideraciones de simetrías (provenientes de la mecánica analítica) son una herramienta poderosa para encarar problemas desde el punto de vista de las constantes de movimiento, por lo cual, en principio, serian una vía prometedora para completar el conjunto de ecuaciones en el problema de Störmer.

Existen dos planteos para esto: el Lagrangiano y el Hamiltoniano.

Los enfoques Lagrangiano y Hamiltoniano tienen dos conceptos muy diferentes de simetría que poseen, como rasgo en común, el estar relacionados estrechamente con cantidades conservadas del sistema.

Una simetría del Hamiltoniano se basa en un tipo de trasformaciones canónicas uni-paramétricas que constituyen una simetría en el sentido de que conducen a ecuaciones de movimiento (en las nuevas variables) funcionalmente idénticas a la de las variables originales. O, lo que es equivalente, el Hamiltoniano (en las nuevas variables) es funcionalmente igual al de las variables originales a menos de una función del tiempo.

La simetría desde el punto de vista Lagrangiano es un concepto totalmente diferente. Las simetrías del Lagrangiano se traducen en el Teorema de Noether (Goldstein et al., 2002; Lemos,2007; Torres del Castillo,2018), también llamado de las simetrías variacionales. Se basa en aquellas transformaciones uni-paramétricas de coordenadas que constituyen una simetría en el sentido de que mantienen invariante la acción y a partir de las cuales se puede encontrar un cierto número de cantidades conservadas.

En los dos apartados siguientes se brinda un panorama general de ambos conceptos de simetrías y en los Apéndices A y c se hace un desarrollo más amplio y detallado.

1.3.1 Las simetrías del Hamiltoniano

Dada una transformación canónica uni-paramétrica de coordenadas

$$Q_j = Q_j(q_i, p_i, t, s) \qquad (1.24)$$

$$P_j = P_j(q_i, p_i, t, s) \qquad (1.25)$$

tal que se reduce a la identidad para $s = 0$, es decir que:

$$Q_j(q_i, p_i, t, s = 0) = q_j \qquad (1.26)$$

$$P_j(q_i, p_i, t, s = 0) = p_j \qquad (1.27)$$

se dice que es una simetría de un Hamiltoniano $H(q_j, p_j, t)$ si se cumple que el Hamiltoniano en las nuevas variables $K(Q_j, P_j, t, s)$ puede obtenerse (a menos de una función del tiempo y del parámetro s) por sustitución directa de las viejas variables por las nuevas en el Hamiltoniano dado. Es decir que se cumple que:

$$K(Q_j, P_j, t, s) = H(Q_j, P_j, t) + f(t, s) \quad (1.28)$$

Cuando esto ocurre existe una cantidad conservada G dada por

$$G(q_i, p_i, t) = \left.\frac{\partial F_1}{\partial s}\right|_{s=0} + \sum p_i \frac{\partial Q_i}{\partial s} \quad (1.29)$$

donde F_1 es la función generadora de la transformación canónica, la cual también depende del parámetro s. Y además, se cumple que :

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = -\left.\frac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{s=0} \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} \quad (1.32)$$

Ejemplo:

La transformación siguiente:

$$Q = q + s \quad (1.33)$$

$$P = p \quad (1.34)$$

es una simetría del Hamiltoniano de una partícula en caída libre en un campo gravitatorio, dado por :

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + mgq \quad (1.35)$$

Esto se puede comprobar calculando el Hamiltoniano en las nuevas variables a partir de las expresiones

$$\frac{\partial K(q,p,t,s)}{\partial q} = \{Q, P\}_{(t,q)} + \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial K(q,p,t,s)}{\partial p} = \{Q, P\}_{(t,q)} + \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p} \quad (1.37)$$

que en este caso quedan:

$$\frac{\partial K(q,p,t,s)}{\partial q} = mg \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial K(q,p,t,s)}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (1.39)$$

Integrando (1.38) tenemos que:

$$K(q,p,t,s) = mgq + f_1(p,t,s) \qquad (1.40)$$

Y llevando (1.40) a (1.39) se tiene:

$$\frac{\partial K(q,p,t,s)}{\partial p} = \frac{\partial f_1(p,t,s)}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad (1.41)$$

de donde resulta:

$$f_1(p,t,s) = \frac{p^2}{2m} + f_2(t,s) \qquad (1.42)$$

con lo cual tenemos que:

$$K(q,p,t,s) = \frac{p^2}{2m} + mgq + f_2(t,s) \qquad (1.43)$$

Esta última expresión llevada a las nuevas variables resulta:

$$K(Q,P,t,s) = \frac{P^2}{2m} + mgQ + mgs + f_2(t,s) \qquad (1.44)$$

que es de la forma $K\left(Q_j,P_j,t,s\right) = H\left(Q_j,P_j,t\right) + f(t,s)$, con $f(t,s) = mgs + f_2(t,s)$, donde $f_2(t,s)$ es una función arbitraria.

A partir de $K(Q,P,t,s)$ y de las ecuaciones (1.30) (1.31) y (1.32) que relacionan a G con las nuevas variables podemos calcular la constante de movimiento $G(q,p,t)$ sin necesidad de conocer la generadora $F_1(q,p,t,s)$.

De (1.30) tenemos que:

$$\frac{\partial G}{\partial q} = -\left.\frac{\partial P}{\partial s}\right|_{s=0} = 0 \quad \Rightarrow G(q,p,t) = a + J_1(p,t) \qquad (1.45)$$

en donde a es una constante y $J_1(p,t)$, es una función a determinar. Llevando esto a (1.31)

$$\frac{\partial J_1(p,t)}{\partial p} = 1 \;\Rightarrow J_1(p,t) = p + J_2(t) \quad . \qquad (1.46)$$

Y con (1.46) en (1.45):

$$G(q,p,t) = a + p + J_2(t). \qquad (1.47)$$

Llevando (1.47) a (1.32):

$$\frac{\partial J_2(t)}{\partial t} = mg \quad \Rightarrow \quad J_2(t) = mgt + b \qquad (1.48)$$

donde b es una constante arbitraria.

Finalmente reemplazando (1.48) en (1.47) :

$$G(q,p,t) = p + mgt + (b + a) = constante \qquad (1.49)$$

Por otro lado, de resolver este problema mediante las leyes de Newton sabemos que:

$$p = p_0 - mgt \qquad (1.50)$$

donde p_0 es el impulso inicial.

De estos dos resultados surge que :

$$G(q,p,t) = p_0 + a + b \qquad \text{(1.51)}$$

O sea que $G(q,p,t)$ es, esencialmente, la condición inicial para la magnitud con la cual está relacionada.

Se puede probar que este resultado es general (Torres del Castillo, 2017);y que hay tantas simetrías del Hamiltoniano como condiciones iniciales tiene el problema, o sea el doble de los grados de libertad.

Es decir, hay una relación biunívoca entre cantidades conservadas y simetrías del Hamiltoniano. En otras palabras, por cada simetría del hamiltoniano hay una cantidad conservada y por cada cantidad conservada hay una simetría del hamiltoniano.. El corolario de todo esto es que son las condiciones iniciales, o sea los grados de libertad, las que imponen cuántas cantidades conservadas existen en un sistema. En un sistema de n grados habrá 2n condiciones iniciales y por lo tanto 2n cantidades conservadas.

Esta definitiva, la existencia de 2n cantidades conservadas y su independencia, es quizás la conclusión más importante de este enfoque. Independientemente de cuán complicado sea calcularlas esas cantidades existen.

1.3.2 Las simetrías del Lagrangiano

Dado un determinado Lagrangiano cuya acción está dada por $I = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) dt$ y dado el cambio uni-paramétrico de coordenadas:

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(q_i, t, s) \qquad \text{(1.52)}$$

$$\bar{t} = \bar{t}(q_j, t, s) \qquad \text{(1.53)}$$

de tal forma que para $s = 0$ la transformación se reduce a la identidad, es decir :

$$\bar{q}_j(q_i, t, s = 0) = q_j \qquad \text{(1.54)}$$

$$\bar{t}(q_j, t, s = 0) = t \qquad \text{(1.55)}$$

si se cumple, a primer orden, que el cambio en la acción respecto a la variación del parámetro "s"es nulo sobre cualquier trayectoria (y no sólo sobre la real); es decir que:

$$\Delta \mathrm{I} = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) dt - \int_{\mathrm{t1}}^{\mathrm{t}_2} L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\, d\bar{t} = 0 \qquad \text{(1.56)}$$

Entonces, para la evolución real del sistema , existe una cantidad conservada dada por :

$$Q = -T(q_j, t)H(q_j, \dot{q}_j t) - G(q_j, t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} R_j(q_j, t) = constante \qquad \text{(1.57)}$$

En donde las funciones:

$$T(q_i, t) = \left.\frac{\partial t(q_i,t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} \quad (1.58)$$

$$R_j(q_i, t) = \left.\frac{\partial \bar{q}_j(q_i,t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} \quad (1.59)$$

se denominan funciones generadoras de la transformación uni-paramétrica.

Por su parte $H(q_j, \dot{q}_j t)$ es la integral de Jacobi (es decir el Hamiltoniano, pero expresado en función de las coordenadas y las velocidades, en vez de las coordenadas y los momentos) y $G(q_j, t)$ es una función denominada Gauge.

Todas estas funciones están relacionadas a través de la siguiente ecuación diferencial que se deduce de la condición $\Delta \mathrm{I} = 0$.

$$-\dot{T}H + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ \dot{R}_j\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt} \quad (1.60)$$

Estudiar un sistema físico desde la óptica de sus simetrías variacionales consiste en resolver esta ecuación diferencial determinar las funciones generadoras y el Gauge y luego calcular Q.

Ejemplo:

Consideremos el movimiento de una carga en un campo magnético uniforme.independiente del tiempo, orientado en la dirección z suponiendo que la posición y la velocidad inicial yacen sobre el plano x, y. En tales condiciones el Lagrangiano está dado por :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\omega_c(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (1.61)$$

donde $\omega_c = \frac{e}{mc}B_0$, y la integral de Jacobi es:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad . \quad (1.62)$$

Las funciones a determinar son las generadoras y el Gauge :

$T = T(x.y.t)\ ; R_x = R_x(x,y,t); R_y = R_y\,(x,y,t); G = G(x,y,t)$

En este caso la ecuación diferencial a resolver es la siguiente

$$-\dot{T}H + \left[R_x\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{R}_x\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] + \left[R_y\frac{\partial L}{\partial y} + \dot{R}_y\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right] = \dot{G} \quad (1.63)$$

En la cual si reemplazamos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}m\omega_c\dot{y} \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m\omega_c y \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}m\omega_c\dot{x} \quad (1.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} - \frac{1}{2}m\omega_c y \qquad (1.67)$$

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\dot{y} \qquad (1.68)$$

$$\dot{R}_x = \frac{\partial R_x}{\partial t} + \frac{\partial R_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial R_x}{\partial y}\dot{y} \qquad (1.69)$$

$$\dot{R}_y = \frac{\partial R_y}{\partial t} + \frac{\partial R_y}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial R_y}{\partial y}\dot{y} \qquad (1.70)$$

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial G}{\partial y}\dot{y} \quad . \qquad (1.71)$$

Obtenemos:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\dot{y}\right)\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) + \left[R_x \frac{1}{2}m\omega_c\dot{y} + \left(\frac{\partial R_x}{\partial t} + \frac{\partial R_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial R_x}{\partial y}\dot{y}\right)\left(m\dot{x} - \frac{1}{2}m\omega_c y\right)\right] +$$
$$\left[R_y \frac{1}{2}m\omega_c\dot{x} + \left(\frac{\partial R_y}{\partial t} + \frac{\partial R_y}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial R_y}{\partial y}\dot{y}\right)\left(m\dot{y} - \frac{1}{2}m\omega_c y\right)\right] = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial G}{\partial y}\dot{y} \qquad (1.72)$$

Agrupando según los términos comunes en las velocidades tenemos que:

$$\dot{x}\left[\frac{\partial R_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega_c\left(x\frac{\partial R_y}{\partial x} - R_y - y\frac{\partial R_x}{\partial y}\right) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial x}\right] +$$
$$\dot{y}\left[\frac{\partial R_y}{\partial t} - \frac{1}{2}\omega_c\left(y\frac{\partial R_x}{\partial y} - R_x - x\frac{\partial R_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial y}\right] + \dot{x}\dot{y}\left[\frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x}\right] + \dot{x}^2\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial R_x}{\partial x}\right] +$$
$$\dot{y}^2\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial R_y}{\partial y}\right]\frac{1}{2}x\dot{y}\left[\frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x}\right] - \frac{1}{2}\dot{y}\dot{x}^2\left[\frac{\partial T}{\partial y}\right] - \frac{1}{2}\dot{x}\dot{y}^2\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] - \frac{1}{2}\dot{x}^3\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] - \frac{1}{2}\dot{y}^3\left[\frac{\partial T}{\partial y}\right] +$$
$$\left[\frac{1}{2}\omega_c\left(x\frac{\partial R_y}{\partial t} - y\frac{\partial R_x}{\partial t}\right) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial t}\right] = 0 \qquad (1.73)$$

Como esta ecuación debe valer para cualquier valor de $\dot{x}\ e\ \dot{y}$ entonces cada una de las expresiones entre corchetes debe anularse con lo cual llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

a) $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

b) $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

c) $-\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial R_x}{\partial x} = 0$

d) $-\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial R_y}{\partial y}$

e) $\frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x} = 0$

f) $\frac{\partial R_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega_c\left(x\frac{\partial R_y}{\partial x} - R_y - y\frac{\partial R_x}{\partial y}\right) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial x} = 0$

g) $\frac{\partial R_y}{\partial t} - \frac{1}{2}\omega_c\left(y\frac{\partial R_x}{\partial y} - R_x - x\frac{\partial R_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial y} = 0$

h) $\frac{1}{2}\omega_c\left(x\frac{\partial R_y}{\partial t} - y\frac{\partial R_x}{\partial t}\right) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial t}$

De (a) y (b) se deduce que T es solo función del tiempo es decir:

$$T = T(t) \tag{1.74}$$

De (c) y (d) surge inmediatamente que

$$R_x = \frac{1}{2} x \dot{T} + f_1(y,t) \tag{1.75}$$

$$R_y = \frac{1}{2} y \dot{T} + f_2(x,t) \tag{1.76}$$

En donde $f_1(y,t)$ y $f_2(x,t)$ son funciones a determinar en base a las otras ecuaciones del sistema.

Llevando las Ecuaciones (1.75) y (1.76) a la Ecuación (e) tenemos que:

$$\frac{\partial f_1(y,t)}{\partial y} = -\frac{\partial f_2(x,t)}{\partial x} \tag{1.77}$$

Como la única variable común entre los miembros de esta ecuación es el tiempo, la única forma de que se verifique es que ambos sean iguales a una función del tiempo; es decir

$$\frac{\partial f_1(y,t)}{\partial y} = -\frac{\partial f_2(x,t)}{\partial x} = f_3(t) \tag{1.78}$$

De esto surge que

$$f_1(y,t) = y\, f_3(t) + f_4(t) \tag{1.79}$$

$$f_2(x,t) = -x f_3(t) + f_5(t) \tag{1.80}$$

Reemplazando (1.79) en (1.75) y (1.80) en la (1.76) se tiene que:

$$R_x = \frac{1}{2} x \dot{T} + y\, f_3(t) + f_4(t) \tag{1.81}$$

$$R_y = \frac{1}{2} y \dot{T} - x f_3(\dot{t}) + f_5(t) \tag{1.82}$$

Con esto hemos obtenido la dependencia espacial de las funciones generadoras, y lo hicimos empleando las ecuaciones del sistema que no contienen a la función $G(x,y,t)$. A continuación, empleando (1.81) y (1.82) en las ecuaciones del sistema que si contienen al Gauge vamos a encontrar las funciones que dependen del tiempo; es decir $T = T(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ y $f_5(t)$.

Si reemplazamos las Ecuaciones (1.81) y (1.82) en la Ecuación (f), después de algunos pasos algebraicos se llega a que:

$$\frac{1}{2} x \ddot{T} + y\, \dot{f}_3(t) + \dot{f}_4(t) - \frac{1}{2} m\, y\, \omega_c \dot{T} - \frac{1}{2} m\, \omega_c\, f_5(t) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \tag{1.83}$$

Haciendo lo mismo con la Ecuación (g) lo que se obtiene es

$$\frac{1}{2} y \ddot{T} - x\, \dot{f}_3(t) + f_5(t) + \frac{1}{2} m\, y\, \omega_c \dot{T} + \frac{1}{2} m\, \omega_c\, f_5(t) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{1.84}$$

Si ahora derivamos (1.83) respecto a y y (1.84) respecto a x, y restamos (teniendo en cuenta que suponemos que las derivadas segundas de la función $G(x, y, t)$ son iguales) se llega a que:

$$\dot{f}_3(t) = \frac{1}{2}\,\omega_c \dot{T} \qquad (1.85)$$

Esta ya es una relación entre dos de las funciones del tiempo que debemos determinar, aunque aún no conocemos su forma explícita.

Si ahora reemplazamos (1.85) en (1.84), y luego de algunas simplificaciones se tiene que:

$$\frac{1}{2}\,x\,\ddot{T} + \dot{f}_4(t) - \frac{1}{2}\,\omega_c\,f_5(t) - \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad (1.86)$$

A continuación, derivamos respecto al tiempo resultando

$$\frac{1}{2}\,x\,\dddot{T} + \ddot{f}_4(t) - \frac{1}{2}\,\omega_c\,\dot{f}_5(t) - \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad (1.87)$$

Por otra parte, derivando la Ecuación (h) respecto de x se obtiene que

$$-x\omega_c \dot{f}_3(t) - \frac{1}{2}m\,\omega_c\,\dot{f}_5(t) - \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad (1.88)$$

De la resta entre las Ecuaciones (1.87) y (1.88) resulta

$$x\left[\frac{1}{2}\,\dddot{T} + \omega_c\,\dot{f}_3(t)\right] + \left[\ddot{f}_4(t) - \omega_c\,\dot{f}_5(t)\right] = 0 \qquad (1.89)$$

Esto se cumple para todo valor de x solamente si

$$\frac{1}{2}\,\dddot{T} + \omega_c\,\dot{f}_3(t) = 0 \qquad (1.90)$$

y además si:

$$\ddot{f}_4(t) - \omega_c\,\dot{f}_5(t) = 0 \qquad (1.91)$$

La Ecuación (1.90) es una segunda relación entre $T(t)$ y $f_3(t)$. La primera es la Ecuación (1.85). Luego, a partir de dichas ecuaciones (1.85) y (1.90) se llega a que:

$$\dddot{T} + \omega_c^2\,\dot{T} = 0 \qquad (1.92)$$

cuya solución es muy simple y viene dada por:

$$T(t) = a_2 \sin \omega_c t + a_3 \cos \omega_c t + a_1 \qquad (1.93)$$

donde $a_1, a_2\ y\ a_3$ son constantes arbitrarias.

Es decir que ya tenemos la primera de las funciones generadoras.

El cálculo de la función $f_3(t)$ es inmediato a partir de (1.85) y (1.93) :

$$f_3(t) = \frac{1}{2}\,\omega_c(a_2 \sin \omega_c t + a_3 \cos \omega_c t + a_1) + a_4 \qquad (1.94)$$

Para completar las expresiones de las funciones generatrices espaciales $R_x(x, y, t)$ y $R_y\,(x, y, t)$ aún nos falta calcular las funciones $f_4(t)$ y $f_5(t)$, las cuales están relacionadas mediante (1.91).

La otra relación se puede obtener con un proceso idéntico al anterior pero a partir de las Ecuaciones (g) y (h) , pero esta vez derivando la primera respecto a y y la segunda respecto al tiempo. Se obtiene entonces la siguiente ecuación:

$$\ddot{f}_5(t) + \omega_c\, \dot{f}_4(t) = 0 \tag{1.95}$$

Despejando $\dot{f}_5(t)$ de la Ecuación (1.91) y reemplazando en (1.95) tenemos que:

$$\dddot{f}_4(t) + \omega_c^2 \dot{f}_4 = 0 \tag{1.96}$$

La solución de esta ecuación está dada por

$$f_4(t) = a_5 \sin \omega_c t + a_6\ \cos \omega_c t + a_7 \tag{1.97}$$

De donde, teniendo en cuenta (1.91), se puede calcular $f_5(t)$ en forma directa:

$$f_5(t) = a_5\ \cos \omega_c t + a_6 \sin \omega_c t + a_8 \tag{1.98}$$

Esto completa todos los elementos de las funciones generadoras que quedan de la siguiente forma:

$$\boxed{T(t) = \ a_2 \sin \omega_c t + a_3\ \cos \omega_c t + a_1} \tag{1.99}$$

$$\boxed{\begin{gathered} R_x = \tfrac{1}{2} x\, \omega_c [a_2 \cos \omega_c t - a_3\ \sin \omega_c t] + y \left[\tfrac{1}{2}\ \omega_c\ (a_2 \sin \omega_c t + a_3\ \cos \omega_c t + a_1) + a_4 \right] + \cdots \\ \ldots + \ a_5 \sin \omega_c t + a_6\ \cos \omega_c t + a_7 \end{gathered}} \tag{1.100}$$

$$\boxed{\begin{gathered} R_y = \tfrac{1}{2}\ y\ \omega_c [a_2 \cos \omega_c t - a_3\ \sin \omega_c t] - x\ \left[\tfrac{1}{2}\ \omega_c\ (a_2 \sin \omega_c t + a_3\ \cos \omega_c t + a_1) + a_4 \right] + \cdots \\ \ldots\ + a_5\ \cos \omega_c t + \ a_6 \sin \omega_c t + a_8 \end{gathered}} \tag{1.101}$$

Para completar el problema falta calcular el Gauge, es decir la función G. El cálculo no es complicado, aunque si un poco largo. Comenzamos con la Ecuación (h) a partir de la cual obtenemos

$$G = \frac{1}{2}\ m\omega_C\ (xR_y - \ yR_x) + \ f_6(x,y) \tag{1.102}$$

Si ahora derivamos respecto a x se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2}\ m\omega_C \left(R_y + x \frac{\partial R_y}{\partial x} - \ y\ \frac{\partial R_x}{\partial x}\right) + \ \frac{\partial f_6}{\partial x} \tag{1.103}$$

Pero despejando $\frac{\partial G}{\partial x}$ de la ecuación (f) y reemplazando en (1.103) tenemos:

$$\frac{\partial R_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega_C\ x \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\omega_C R_y - \frac{1}{2}\omega_C y\ \frac{\partial R_x}{\partial x} = \frac{1}{2}\omega_C R_y + \frac{1}{2}\omega_C\ x \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\omega_C y\ \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{1}{m}\ \frac{\partial f_6}{\partial x}$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial t} - \ \omega_C R_y = \frac{1}{m}\ \frac{\partial f_6}{\partial x} \tag{1.104}$$

y teniendo en cuenta (1.81) y (1.82) esto queda como:

$$\frac{1}{2}\, x\ddot{T} + y\, \dot{f}_3 + \dot{f}_4 - \omega_C \left(\frac{1}{2}\, y\, \dot{T} - x\, f_3 + f_5\right) = \frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial x} \qquad (1.105)$$

$$\frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial x} = \frac{1}{2}\, x\ddot{T} + y\, \left(\dot{f}_3 - \frac{1}{2}\, \omega_C\, \dot{T}\right) + \omega_C\, (x\, f_3 - f_5) + \dot{f}_4 \qquad (1.106)$$

Pero por la Ecuación (1.85) se tiene que:

$$\left(\dot{f}_3 - \frac{1}{2}\, \omega_C\, \dot{T}\right) = 0$$

Con lo cual (1.106) queda:

$$\frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial x} = \frac{1}{2}\, x\, \ddot{T} + \omega_C\, (x\, f_3 - f_5) + \dot{f}_4 = x\, \left(\frac{1}{2}\ddot{T} + \omega_C f_3\right) + \left(\dot{f}_4 - \omega_C f_5\right)$$

$$\frac{1}{m} f_6(x, y) = \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{2}\ddot{T} + \omega_C f_3\right) + x\left(\dot{f}_4 - \omega_C f_5\right) + f_7(y) \qquad (1.107)$$

Por último derivamos (1.102) respecto a y, resultando:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2}\, m\omega_C \left(x \frac{\partial R_y}{\partial y} - R_x - y\, \frac{\partial R_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial f_6}{\partial y} \qquad (1.108)$$

Llevando esto a la Ecuación (g) y luego de algunas simplificaciones se obtiene:

$$\frac{\partial R_y}{\partial t} - \omega_C R_x = \frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial y} \qquad (1.109)$$

Teniendo en cuenta nuevamente las Ecuaciones (1.81) y (1.82) esta ecuación queda:

$$\frac{1}{2}\, y\, \ddot{T} - x\, \dot{f}_3 + \dot{f}_5 + \frac{1}{2}\, \omega_C x\, \dot{T} + \omega_C\, y\, f_3 + \omega_C\, f_4 = \frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial y} \qquad (1.110)$$

$$\frac{1}{2}\, y\, \ddot{T} + x\, \left(\frac{1}{2}\, \omega_C\, \dot{T} - \dot{f}_3\right) + \dot{f}_5 + \omega_C\, (y\, f_3 + f_4) = \frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial y} \qquad (1.111)$$

Y teniendo en cuenta (1.85) esto queda:

$$\frac{1}{2}\, y\, \ddot{T} + \dot{f}_5 + \omega_C\, (y\, f_3 + f_4) = \frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial y} \qquad (1.112)$$

$$\frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial y} = y\left(\frac{1}{2}\, \ddot{T} + \omega_C f_3\right) + \left(\dot{f}_5 + \omega_C f_4\right) \qquad (1.113)$$

Pero por otra parte si derivamos (1.107) respecto a y se tiene que:

$$\frac{1}{m}\, \frac{\partial f_6}{\partial y} = \frac{\partial f_7(y)}{\partial y} = \frac{d f_7(y)}{dy} \qquad (1.114)$$

Luego, de (1.113) y (1.114) expresiones tenemos que:

$$\frac{d f_7(y)}{dy} = y\left(\frac{1}{2}\, \ddot{T} + \omega_C f_3\right) + \left(\dot{f}_5 + \omega_C f_4\right) \qquad (1.115)$$

Con lo cual

$$f_7(y) = \frac{1}{2}\, y^2 \left(\frac{1}{2}\, \ddot{T} + \omega_C f_3\right) + y\, \left(\dot{f}_5 + \omega_C f_4\right) + a_9 \qquad (1.116)$$

Llevando (1.116) a (1.107) :

$$\frac{1}{m}f_6(x,y) = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2}\ddot{T} + \omega_C f_3\right) + x(\dot{f}_4 - \omega_C f_5) + \frac{1}{2}y^2\left(\frac{1}{2}\ddot{T} + \omega_C f_3\right) + y\left(\dot{f}_5 + \omega_C f_4\right) + a_9 \tag{1.117}$$

Y reemplazando esta ecuación en (1.102) :

$$G = \frac{1}{2}m\omega_C\left(xR_y - yR_x\right) + \frac{1}{2}m(x^2+y^2)\left(\frac{1}{2}\ddot{T} + \omega_C f_3\right) + mx(\dot{f}_4 - \omega_C f_5) + \cdots$$

$$\ldots + m\,y\left(\dot{f}_5 + \omega_C f_4\right) + a_9 \tag{1.118}$$

Pero a partir de las Ecuaciones (1.81) y (1.82) tenemos que:

$$xR_y - yR_x = \frac{1}{2}xy\dot{T} + xf_5 - x^2f_3 - \frac{1}{2}yx\dot{T} - y^2f_3 - yf_4 \tag{1.119}$$

$$xR_y - yR_x = -f_3(x^2+y^2) + xf_5 - yf_4 \tag{1.120}$$

Y llevando (1.120) a (1.102) :

$$G = -\frac{1}{2}m\omega_C f_3(x^2+y^2) + \frac{1}{2}m\omega_C xf_5 - \frac{1}{2}m\omega_C yf_4 + \frac{1}{2}m(x^2+y^2)\left(\frac{1}{2}\ddot{T} + \omega_C f_3\right) + mx\dot{f}_4$$
$$- mx\omega_C f_5 + m\,y\,\dot{f}_5 + my\omega_C f_4 + a_9$$

$$G = \frac{1}{2}m(x^2+y^2)\left(-\omega_C f_3 + \frac{1}{2}\ddot{T} + \omega_C f_3\right) - \frac{1}{2}m\omega_C xf_5 + \frac{1}{2}m\omega_C yf_4 + mx\dot{f}_4 + m\,y\,\dot{f}_5 + a_9$$

$$\boxed{G = \frac{1}{4}m(x^2+y^2)\ddot{T} + mx\left(\dot{f}_4 - \frac{1}{2}\omega_C f_5\right) + m\,y\left(\dot{f}_5 + \frac{1}{2}\omega_C f_4\right)} \tag{1.121}$$

Los elementos del segundo miembro de esta última ecuación ya han sido determinados con anterioridad, con lo cual queda determinada la función G que junto con las funciones generatrices permiten calcular las cantidades conservadas.

Dando valores a las diferentes constantes de integración se obtienen diferentes cantidades conservadas sobre cuya interpretación física cabe hacer algunas aclaraciones.

En primer lugar no todas son independientes. A diferencia del enfoque Hamiltoniano las simetrías del Lagrangiano pueden arrojar una cantidad indeterminada de maginitudes conservadas o incluso ninguna. Es decir, no hay, como en el caso anterior, una relación biunívoca entre las cantidades conservadas independientes que tiene el sistema y sus simetrías variacionales, porque puede ser que no exista ninguna simetría variacional.

Por supuesto que la simetría asociada a una variable cíclica es una simetría variacional, lo mismo que la simetría asociada a la independencia explícita del Hamiltoniano con el tiempo, pero no podemos asegurar mucho más que eso. Lo que se obtenga por este camino debe estar sujeto a la interpretación física que surja en cada caso y de la depuración de los resultados para comprobar cuáles son las cantidades fundamentales e independientes entre sí.

1.4 Una puesta en perspectiva.

1.4.1 Comparación entre ambos enfoques

Llegado a este punto, es útil comparar ambos enfoques y hacer algunas aclaraciones.

En primer lugar, surge nítida la diferencia en el sentido de que el enfoque Hamiltoniano tiene una relación más estrecha con las cantidades conservadas dado que hay una relación biunívoca entre simetrías y cantidades conservadas. Además siempre hay al menos el doble de simetrías y sus correspondientes cantidades conservadas que de grados de libertad del sistema. Por otro lado, el enfoque Lagrangiano es más directo ya que se plasma en una ecuación diferencial que, por complicada que pueda llegar a ser, marca un camino claro a seguir aunque el resultado no esté garantizado. No hay nada así en el enfoque Hamiltoniano donde en cada problema se deberá diseñar una estrategia para calcular la función generadora.

Por su parte el teorema de Noether se emplea en el ámbito de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. La idea es muy interesante ya que lo que se hace es, dado un sistema de ecuaciones de segundo orden, buscar un Lagrangiano que les de origen,(que no tiene por qué ser único) y después estudiar las simetrías variacionales que pueda presentar.

Asi mismo, es importante darse cuenta que una simetría variacional es una propiedad intrínseca del sistema; y que la acción debe permanecer constante ante el cambio de coordenadas cualquiera sea la trayectoria considerada (aunque no sea la real) pero que la cantidad conservada que de tal simetría se deduce está asociada tan sólo a la trayectoria real del sistema. Es como si el teorema estuviera dividido en dos partes bien definidas. Una de ellas es encontrar la simetría, o sea calcular las funciones generadoras y el Gauge, (que deben valer para cualquier trayectoria). Y la otra parte es la determinación de las cantidades conservadas en base a tales funciones generadoras y el Gauge (en donde nos restringimos a las trayectorias reales). Esto se puede apreciar claramente en la demostración del teorema propuesta en el apéndice A.

Por último cabe mencionar un tercer enfoque de simetría, no considerado aquí, basado en preservar la forma del Hamiltoniano, pero en el que las trasformaciones no tienen por qué ser canónicas (y que se denominan “canódicas”). De esto resulta un método bastante sistemático, como el de Noether, aunque como éste no garantiza ni la completitud ni la independencia de las soluciones encontradas (Torres del Castillo, 2018)

1.4.2 Vinculo de las simetrías variacionales con las cantidades conservadas obtenidas por otros métodos.

En el punto anterior se mencionó que una de las diferencias fundamentales entre las simetrías de variacionales y las de Hamiltoniano es que mientras entre éstas últimas y las cantidades conservadas hay una relación biunívoca no ocurre lo mismo con las simetrías variacionales.

En este punto analizaremos la cuestión con más detalle.

En el caso concreto de nuestro sistema, el de una carga en un campo dipolar, se puede encarar directamente a partir de la fuerza de Lorentz, obtener las ecuaciones de movimiento y tratar de resolverlas. Pero respecto a esto, y a este sistema en particular, ya sabemos que no puede hacer en forma explícita, porque éste sistema que estamos estudiando no es integrable analíticamente, aunque, por supuesto, puede recurrirse a métodos numéricos y obtener las trayectorias.

Por otro lado puede estudiarse el sistema con algunas técnicas que se emplean en física de plasma que, básicamente, consisten en analizar cómo afectan a las trayectorias de una carga diferentes configuraciones del campo. Por ejemplo, un campo magnético independiente del tiempo que tenga un gradiente en una dirección perpendicular al campo le imprimirá a la carga una velocidad de deriva perpendicular tanto al campo como al gradiente. De modo similar pueden estudiar los efectos de diferentes configuraciones y ver qué ocurre en un caso dado en las regiones donde tales configuraciones son preponderantes.

Y después están los invariantes adiabáticos.

Los invariantes adiabáticos son cantidades que se conservan siempre que el movimiento sea periódico aún cuando el campo no sea constante en el tiempo pero siempre y cuando dicha variación sea mucho más lenta que la frecuencia del fenómeno analizado.

En el caso de una carga en un campo magnético los invariantes adiabáticos son tres:

- La acción del impulso generalizado asociado a la carga.
- El flujo magnético generado por la carga.
- El momento magnético asociado a la carga.

El significado físico de estas magnitudes conservadas y su empleo,puede consultarse en cualquier libro de física de plasma como por ejemplo (Chen Francis, 1974) ó (Bitterncourt , 2004) o si se prefiere algo específicamente dirigido a una partícula en un campo dipolar puede consultarse (Ozturk,,2012)

Ahora cabe preguntarse ¿qué relación existe entre estos invariantes y las que surgen de las simetrías variacionales?

La respuesta es que no existe una respuesta general.

Esto quiere decir que dada una cantidad conservada (cualquier cantidad conservada, incluidos los invariantes adiabáticos) no hay una forma intuitiva o sencilla de decir que proviene de una simetría variacional , excepto, claro está, que se trate del momento conjugado de una variable cíclica.

En otras palabras, buscar la cantidades subyacentes desde el enfoque de las simetrías variacionales puede conducirnos a algo nuevo, a algo ya conocido o a ninguna parte. La única forma de saberlo es calcularlas. Y en el sentido contrario la respuesta también es negativa, es decir no podemos asegurar que no hay una simetría variacional, y en consecuencia una cantidad conservada, tan solo porque existen otras o porque la simetría no es evidente. Casualmente usamos este enfoque para sacar a la luz las simetrías que no son evidentes.

1.4.3 Integrabilidad de los sistemas dinámicos y las cantidades conservadas.

Tal como ocurre con las simetrías, la integrabilidad de un sistema está estrechamente vinculada con sus cantidades conservadas.

Un sistema integrable es aquel cuya evolución temporal puede expresarse mediante integrales, sean éstas resolubles o no, es decir lo esencial no es que se pueda encontrar una función del tiempo para cada coordenada sino que, al menos, se pueda obtener como una integral aunque no sea resoluble.

Las condiciones de integrabilidad se plasman en el Teorema de Lioville- Arnold que se basa, precisamente, en las cantidades conservadas.

El Teorema de Liouville- Arnold establece que si un sistema dinámico de “n” grados de libertad posee “n” cantidades conservadas en convolusión entonces es integrable. En este contexto que dos magnitudes estén en convolsión significa que son cantidades que conmutan, es decir sus corchetes de Poisson son nulos.

Como vimos al analizar las simetrías del Hamiltoniano un sistema de “n” grados de libertad tiene al menos “2n” cantidades conservadas y este hecho no se ve afectado por el Teorema de Liouville-Arnold del cual concluimos que en un sistema no integrable sus constantes de movimiento no es que no existen, sino que no están en convolución.

A un nivel elemental el teorema no es difícil de probar, y puede consultarse en Lemos (2007), pero lo importantes es el tipo de relaciones en las que está basado.

El hecho de que los conmutadores de las cantidades conservadas sean los que deban anularse y no cualquier otra relación no es una casualidad .Los conmutadores son una relación muy especial tanto en física como en matemática y dado un grupo (en el sentido algebraico del término) los conmutadores definen sobre ese grupo un algebra de Lie. En nuestro caso las cantidades conservadas forman el grupo de Lie y los conmutadores entre ellas las relaciones algebraicas que define a la correspondiente Algebra de Lie. Y en efecto, toda la teoría de la simetrías, incluido el teorema de Noether,puede estudiarse rigurosamente en ese campo del Algebra.

Lo interesante es que ahí surge otra relación entre integrabilidad y cantidades conservadas denominado “superintegrabilidad” o “integrabilidad no conmutativa” según el cual un sistema puede ser integrable aún cuando sus cantidades conservadas no estén en convolucion pero a cambio de ello se requiere que sean más de “2n” y cumplan ciertos requisitos topológicos establecidos por un teorema que, en cierta forma, subsume al de Liouville Arnold.

En ninguno de estos casos la no integrabilidad de un sistema, ni en el sentido de Liouville-Arnold, ni en el sentido no conmutativo, impide la búsqueda de cantidades conservadas en base a sus simetrías. Si el sistema no es integrable en el sentido de Lioville-Arnold dichas cantidades no estarán en convolución, y si no es integrable en el sentido no conmutatitivo entonces no cumplen con las relaciones topológicas exigidas por dicho teorema.

Por eso es que la próxima sección está dedicada a la búsqueda de las simetrías variacionales del problema de Stormer por resolución directa de la ecuación diferencial que la define pese a que es un sistema no integrable.

2. Las Simetrías Variacionales de una carga no relativística en un campo magnético dipolar

2.1 Planteo del problema

El Lagrangiano de una carga que se mueve en un campo magnético dipolar (que consideramos que no radia) está dado por

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\omega}^2 \cos^2 \lambda\right) + \frac{q}{c} A_\omega v_\omega \qquad (2.1)$$

Esta expresión se corresponde con la Figura 1, en la que el dipolo está dispuesto según el eje z siendo v_ω la componente de la velocidad según el ángulo acimutal

$$v_\omega = r\dot{\omega} \cos \lambda \qquad (2.2)$$

y A_ω es la componente azimutal del potencial vectorial magnético:

$$A_\omega = M \frac{\cos \lambda}{r^2} \qquad (2.3)$$

donde M es el momento dipolar magnético, todo expresado en el sistema gaussiano de unidades.

Reemplazando estas dos ecuaciones en la primera tenemos que

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\omega}^2 \cos^2 \lambda\right) + \frac{q}{c} M \frac{\cos \lambda}{r^2} r\dot{\omega} \cos \lambda$$

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\omega}^2 \cos^2 \lambda\right) + \frac{q}{c}\frac{M\dot{\omega}}{r} \cos^2 \lambda \qquad (2.4)$$

De donde sigue que

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\left(r\dot{\lambda}^2 + r\dot{\omega}^2 \cos^2 \lambda\right) - \frac{q}{c}\frac{M\dot{\omega}}{r^2} \cos^2 \lambda \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -mr^2\dot{\omega}^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda - 2\frac{q}{c}\frac{M\dot{\omega}}{r} \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = 0 \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = mr^2\dot{\lambda} \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} = mr^2\dot{\omega} \cos^2 \lambda + \frac{q}{c}\frac{M}{r} \cos^2 \lambda \qquad (2.10)$$

Y la integral de Jacobi es

$$H = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} + \dot{\omega}\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} - L \qquad (2.11)$$

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\omega}^2\cos^2\lambda \qquad (2.12)$$

Obsérvese que la integral de Jacobi no depende del campo magnético, pero si reemplazáramos en esta ecuación las velocidades por los momentos generalizados para obtener el Hamiltoniano a partir de las Ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) entonces en la expresión resultante aparecería de nuevo el campo magnético.

Lo que tenemos que calcular son las cuatro funciones generadoras (tres espaciales y una temporal) y el Gauge, todas ellas, en principio, dependientes de las posiciones y el tiempo. Es decir:

$$Funcion\ generadora\ de\ la\ tranformacion\ del\ tiempo: T = T(r,\omega,\lambda,t)$$

$$Funciones\ generadoras\ de\ las\ tranformaciones\ espaciales \begin{cases} Radial: R_r(r,\omega,\lambda,t) \\ Longitud: R_\omega(r,\omega,\lambda,t) \\ Latitud: R_\lambda(r,\omega,\lambda,t) \end{cases}$$

$$Gauge: G = G(r,\omega,\lambda,t)$$

Y la ecuación a resolver es

$$-\dot{T}H + T\frac{\partial L}{\partial t} + \left(R_r\frac{\partial L}{\partial r} + \dot{R}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) + \left(R_\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} + \dot{R}_\lambda\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) + \left(R_\omega\frac{\partial L}{\partial \omega} + \dot{R}_\omega\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}}\right) - \dot{G} = 0 \qquad (2.13)$$

Donde

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial T}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \qquad (2.14)$$

$$\dot{R}_r = \frac{\partial R_r}{\partial t} + \frac{\partial R_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial R_r}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial R_r}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \qquad (2.15)$$

$$\dot{R}_\lambda = \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \qquad (2.16)$$

$$\dot{R}_\omega = \frac{\partial R_\omega}{\partial t} + \frac{\partial R_\omega}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial R_\omega}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \qquad (2.17)$$

2.2 La solución

2.2.1 Obtención del sistema de ecuaciones

A continuación, reemplazando las ecuaciones (2.5) a (2.10), y (2.12) (2.14) , (2.15) , (2.16) , (2.17) en la ecuación (2.13) se obtiene una ecuación diferencial donde figuran (ya explícitamente) las funciones que queremos determinar (las generadoras y el Gauge) como así también sus derivadas parciales.

La técnica para resolver la ecuación consiste en agrupar los términos que tengan las mismas combinaciones de velocidades (en tipo y exponente) e igualar cada término resultante a cero para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Dado que la ecuación resultante es muy larga se procederá a resolver término a término para después, agrupando según las potencias de las velocidades, obtener el sistema de ecuaciones.

Por ejemplo para el primer término, $-\dot{T}H$ tenemos que :

$$-\dot{T}H = \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial T}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \lambda}\dot{\lambda}\right)\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\omega}^2\cos^2\lambda\right) \quad (2.18)$$

Que desarrollado queda

$$-\dot{T}H = -\frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial t}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial t}\dot{\lambda}^2 - \frac{m}{2}r^2\cos^2\lambda\frac{\partial T}{\partial t}\dot{\omega}^2 - \frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial r}\dot{r}^3 - \frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial r}\dot{\lambda}^2\dot{r} - \frac{m}{2}r^2\cos^2\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\dot{\omega}^2\dot{r} - \frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial \omega}\dot{\omega}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial \omega}\dot{\omega}\dot{\lambda}^2 - \frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial \omega}\cos^2\lambda\,\dot{\omega}^3 - \frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial \lambda}\dot{\lambda}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial \lambda}\dot{\lambda}^3 - \frac{m}{2}r^2\cos^2\lambda\frac{\partial T}{\partial \lambda}\dot{\omega}^2\dot{\lambda} \quad . \quad (2.19)$$

Lo mismo se hace con los otros términos de la ecuación (2.18) con lo que se obtiene:

$$R_r\frac{\partial L}{\partial r} = mrR_r\dot{\lambda}^2 + mrR_r\cos^2\lambda\,\dot{\omega}^2 - \frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\cos^2\lambda\,R_r\,\dot{\omega} \quad (2.20)$$

$$\dot{R}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\frac{\partial R_r}{\partial t}\dot{r} + m\frac{\partial R_r}{\partial r}\dot{r}^2 + m\frac{\partial R_r}{\partial \omega}\dot{r}\dot{\omega} + m\frac{\partial R_r}{\partial \lambda}\dot{\lambda}\dot{r} \quad (2.21)$$

$$R_\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -mr^2\,\mathrm{sen}\,\lambda\cos\lambda\,R_\lambda\dot{\omega}^2 - 2\frac{q}{c}\frac{M}{r}\cos\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda\,R_\lambda\,\dot{\omega} \quad (2.22)$$

$$\dot{R}_\lambda\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial t}\dot{\lambda} + mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial r}\dot{r}\dot{\lambda} + mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial \omega}\dot{\lambda}\dot{\omega} + mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda}\dot{\lambda}^2 \quad (2.23)$$

$$R_\omega\frac{\partial L}{\partial \omega} = 0 \quad (2.24)$$

$$\dot{R}_\omega\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} = \left(mr^2\frac{\partial R_\omega}{\partial t}\cos^2\lambda + \frac{q}{c}\frac{M}{r}\cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega}\right)\dot{\omega} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}\frac{\partial R_\omega}{\partial t}\cos^2\lambda + mr^2\frac{\partial R_\omega}{\partial r}\cos^2\lambda\,\dot{\omega}\dot{r} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}\cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial r}\dot{r} + mr^2\cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega}\dot{\omega}^2 + mr^2\cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda}\dot{\omega}\dot{\lambda} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}\cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \quad (2.25)$$

$$-\dot{G} = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial r}\dot{r} - \frac{\partial G}{\partial \omega}\dot{\omega} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \quad (2.26)$$

Agrupando las combinaciones que tienen las mismas potencias de las velocidades se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{r}^2: \quad -\frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial t} + m\frac{\partial R_r}{\partial r} = 0 \quad (2.27)$$

$$\dot{\lambda}^2: \quad -\frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial t} + mrR_r + mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.28)$$

$$\dot{\omega}^2: \quad -\frac{m}{2}r^2cos^2\lambda\frac{\partial T}{\partial t} + mrR_rcos^2\lambda - m\,r^2\cos\lambda\,sen\lambda\,R_\lambda + m\,r^2cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} = 0 \quad (2.29)$$

$$\dot{r}^3: \quad -\frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.30)$$

$$\dot{\lambda}^2\dot{r}: \quad -\frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.31)$$

$$\dot{\omega}^2\dot{r}: \quad -\frac{m}{2}r^2cos^2\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.32)$$

$\dot{\omega}\dot{r}^2$: $\quad -\frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial \omega} = 0 \quad$ (2.33)

$\dot{\omega}\dot{\lambda}^2$: $\quad -\frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial \omega} = 0 \quad$ (2.34)

$\dot{\omega}^3$: $\quad -\frac{m}{2}r^2cos^2\lambda\frac{\partial T}{\partial \omega} = 0 \quad$ (2.35)

$\dot{\lambda}\dot{r}^2$: $\quad -\frac{m}{2}\frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0 \quad$ (2.36)

$\dot{\lambda}^3$: $\quad -\frac{m}{2}r^2\frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0 \quad$ (2.37)

$\dot{\omega}^2\dot{\lambda}$: $\quad -\frac{m}{2}r^2cos^2\lambda\frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0 \quad$ (2.38)

$\dot{\lambda}$: $\quad mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \quad$ (2.39)

término independiente: $\frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad$ (2.40)

2.2.2 El sistema de ecuaciones depurado

Las ecuaciones obtenidas en el parágrafo anterior no son todas independientes, porque varias conducen a lo mismo.

Por ejemplo, (2.30) y (2.30) contienen la misma información, que ∂T/∂r=0. Es decir que la función $T = T(r, \omega, \lambda, t)$ no depende de r.

Depurando el sistema anterior de esas redundancias llegamos a la conclusión de que T es sólo función del tiempo, es decir T=T(t), y al siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$(a)\ \frac{\partial R_r}{\partial r} - \frac{1}{2}\dot{T} = 0$

$(b)\ R_r + r\frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda} - r\dot{T} = 0$

$(c)\ 2rcos\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} - r\,\dot{T}cos\lambda + 2R_r cos\lambda - 2\,rsen\lambda\,R_\lambda = 0$

$(d)\ mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0$

$(e) -\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}cos^2\lambda\,R_r - 2\frac{q}{c}\frac{M}{r}\cos\lambda\,sen\lambda\,R_\lambda\dot{\omega} + m\,r^2cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} - \frac{\partial G}{\partial \omega} = 0$

$(f)\ \ m\frac{\partial R_r}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r} = 0$

$(g)\ \frac{\partial R_r}{\partial \omega} + r^2cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial r} = 0$

$(h)\ \frac{\partial R_r}{\partial \lambda} + r^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial r} = 0$

$(i) \quad cos^2\lambda \frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial \omega} = 0$

$(j) \ \frac{q}{c}\frac{M}{r} cos^2\lambda \frac{\partial R_\omega}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0$

2.2.3 Resolución del sistema de ecuaciones

No hay una sola estrategia para resolver este sistema de ecuaciones. La forma en que se proceda, es decir el orden en que se vayan empleando o vinculando las ecuaciones, incidirá mucho en la utilidad de la información que se vaya obteniendo y en lo complejo que resulte el proceso.

Sin embargo, surge a la vista que hay dos tipos claramente diferentes de ecuaciones. Por un lado están las que contienen al Gauge y por otro lado las que no lo tienen. Relacionando estas últimas, o sea las ecuaciones que no contienen al Gauge se puede, como veremos, encontrar la dependencia explicita de las funciones generadoras con las coordenadas de un modo relativamente sencillo.

Una vez hecho esto se procede a relacionar las funciones que contienen al Gauge para determinar la dependencia explicita de las funciones generadoras con el tiempo y a su vez el Gauge.

De la ecuación (a) surge que:

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} = \frac{1}{2}\dot{T} \Rightarrow R_r = \frac{1}{2} r\,\dot{T}(t) + f_1(\omega, \lambda, t) \qquad (2.41)$$

donde $f_1(\omega, \lambda, t)$ es una función a determinar en base a las otras ecuaciones.

Se observa que de esta primera ecuación ya hemos obtenido la dependencia explicita de la función generadora R_r con la variable r trasladandose el problema (en lo que a esta función generadora se refiere) a determinar la función $f_1(\omega, \lambda, t)$ que ya no depende de r.

Esto es característico en todo el proceso, en el que en cada paso se obtiene la dependencia explícita de alguna de las funciones generadoras con alguna de las coordenadas mutando el problema hacia el cálculo de nuevas funciones que dependen de una coordenada menos y así hasta que tales funciones solo dependan del tiempo, las cuales se calcularán relacionando las ecuaciones que contienen al Gauge.

Por ejemplo, podemos avanzar un poco más considerando la Ecuación (2.41) de la que surge que:

$$\frac{\partial R_r}{\partial \omega} = \frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} \qquad (2.42)$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \lambda} = \frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} \quad . \qquad (2.43)$$

Reemplazando (2.42) en (g) se obtiene:

$$r^2 cos^2\lambda \frac{\partial R_\omega}{\partial r} = -\frac{\partial R_r}{\partial \omega} = -\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} \quad . \qquad (2.44)$$

Con lo que:

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial r} = -\frac{1}{r^2 cos^2\lambda}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} \qquad (2.45)$$

$$R_\omega = \frac{1}{r\, cos^2\lambda}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} + f_2(\omega,\lambda,t) \qquad (2.46)$$

Con esto hemos obtenido la dependencia explicita de la función generadora R_ω con la variable r. En forma análoga reemplazando (2.43) en (h) se tiene :

$$r^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial r} = -\frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda} = -\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} \qquad (2.47)$$

$$\frac{\partial R_\lambda}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} \qquad (2.48)$$

$$R_\lambda = \frac{1}{r}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} + f_3(\omega,\lambda,t)\ . \qquad (2.49)$$

Esta ecuación contiene la dependencia explicita de la función R_λ con la variable r.

Lo que sigue hasta obtener la dependencia explicita con las variables espaciales de todas las funciones generadoras es un cálculo bastante largo que se detalla en el apéndice D.

El resultado es el siguiente:

$$R_r = \frac{1}{2} r\,\dot{T}(t) + [h_1(t)cos\omega + h_2(t)sen\omega]cos\lambda + g_2(t)sen\lambda \qquad (2.50)$$

$$R_\omega = \frac{1}{rcos\lambda}[(-h_1(t)cos\omega + h_2(t)sen\omega)] + \frac{sen\lambda}{cos\lambda}[-h_3(t)sen\omega + h_4(t)cos\omega] + h_5(t) \qquad (2.51)$$

$$R_\lambda = \frac{1}{r}[-(h_1(t)cos\omega + h_2(t)sen\omega)sen\lambda + g_2(t)\, cos\lambda\,] + (h_3(t)cos\omega + h_4(t)sen\omega) \qquad (2.52)$$

Y por supuesto, como se demostró al principio, que la generadora de la trasformación del tiempo no depende las variables espaciales:

T=T(t) (2.53)

Obsérvese que en estas ecuaciones las incógnitas son tan sólo funciones del tiempo. No hay nada desconocido que dependa de las coordenadas espaciales.

Para verificar que son soluciones basta con reemplazarlas en el sistema, más precisamente en las ecuaciones del sistema que no contienen al Gauge, ya que fueron obtenidas a partir de dichas ecuaciones. Pero que las ecuaciones verifiquen al sistema no basta para decir que son completas, es decir que no se hayan perdido partes de las soluciones en el camino. Para constatar que son completas hay que seguir la solución paso a paso, lo que se puede hacer en el apéndice B.

La dependencia con el tiempo de las funciones generadoras se obtiene relacionando las ecuaciones que contienen el Gauge.

El proceso se basa en eliminar el Gauge trabajando no con las ecuaciones directamente, sino con las derivadas de las ecuaciones y suponiendo que nuestras funciones son "bien comportadas" en el sentido de que sus derivadas cruzadas segundas son iguales son iguales cualquiera sea el par de variables consideradas.

Por ejemplo si comenzamos derivando la ecuación (f) respecto del tiempo obtenemos que:

$$m\frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} + + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t\partial r} = \frac{\partial^2 G}{\partial t\partial r} \qquad (2.54)$$

derivando la Ecuación (j) respecto de r :

$$-\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\frac{\partial R_\omega}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial r\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial r\partial t} \qquad . \qquad (2.55)$$

Restando (2.54) y (2.55) y suponiendo $\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial r} = \frac{\partial^2 G}{\partial r\partial t}$ que se tiene:

$$m\frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t\partial r} + \frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\frac{\partial R_\omega}{\partial t} - \frac{q}{c}\frac{M}{r}\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial r\partial t} = 0 \qquad (2.56)$$

Y ahora suponiendo que $\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t\partial r} = \frac{\partial^2 R_\omega}{\partial r\partial t}$ se obtiene:

$$m\frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}(cos^2\lambda - 1)\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t\partial r} + \frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\frac{\partial R_\omega}{\partial t} = 0 \qquad . \qquad (2.57)$$

Por otro lado, derivando la Ecuación (2.50) dos veces respecto al tiempo resulta:

$$\frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} = \frac{1}{2}r\dddot{T}(t) + \left[\left(\ddot{h}_1(t)cos\omega + \ddot{h}_2(t)sen\omega\right)cos\lambda + \ddot{g}_2(t)sen\lambda\right] \qquad (2.58)$$

Y derivando (2.51) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial t} = \frac{1}{r\,cos\lambda}\left(-\dot{h}_1(t)sen\omega + \dot{h}_2(t)cos\omega\right) + \frac{sen\lambda}{cos\lambda}\left[\dot{h}_3(t)sen\omega - \dot{h}_4(t)cos\omega\right] + \dot{h}_5(t) \qquad (2.59)$$

A continuación derivamos respecto a r

$$\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t\partial r} = -\frac{1}{r^2\,cos\lambda}\left(-\dot{h}_1(t)sen\omega + \dot{h}_2(t)cos\omega\right) \qquad (2.60)$$

Reemplazando (2.58), (2.59) y (2.60) en la Ecuación (2.57) y después de algunas simplificaciones y de agrupar según las potencias de r, se llega a lo siguiente

$$mr\dddot{T}(t) + m\left[\left(\ddot{h}_1(t)cos\omega + \ddot{h}_2(t)sen\omega\right)cos\lambda + \ddot{g}_2(t)sen\lambda\right] + \frac{q}{c}\frac{M}{r^3}\frac{(sen^2\lambda+1)}{cos\lambda}\left(-\dot{h}_1(t)sen\omega + \dot{h}_2(t)cos\omega\right) + \frac{q}{c}\frac{M}{r^2cos\lambda}\left[sen\lambda\left[\dot{h}_3(t)sen\omega - \dot{h}_4(t)cos\omega\right] + \dot{h}_5(t)cos\lambda\right] = 0 \qquad (2.61)$$

Y de nuevo, como ocurrió con las velocidades cuando obtuvimos el sistema de ecuaciones, esta expresión debe valer para todo r .

¿Y por qué debe valer para todo r ?

Porque la simetría es una propiedad del sistema, y no de una trayectoria particular.

En la ecuación que estamos tratando de resolver las incógnitas son las funciones generadoras y el Gauge, pero las variables r, λ, ω, t son independientes entre sí, es decir no fijan ninguna trayectoria.

Esto es determinante y se hace alusión a ello permanentemente en toda la resolución del problema.

Pues bien si la única forma ecuación (2.61) sea válida para todo r es que los factores que acompañan a las diferentes potencias de esta variable sea nulo se tiene que:

$$\dddot{T}(t) = 0 \Rightarrow T = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \qquad (2.62)$$

$$-\dot{h}_1(t) sen\omega + \dot{h}_2(t) cos\omega = 0 \qquad (2.63)$$

$$\left(\ddot{h}_1(t) cos\omega + \ddot{h}_2(t) sen\omega\right) cos\lambda + \ddot{g}_2(t) sen\lambda = 0 \qquad (2.64)$$

$$sen\lambda\left[\dot{h}_3(t) sen\omega - \dot{h}_4(t) cos\omega\right] + \dot{h}_5(t)\ cos\lambda = 0 \qquad (2.65)$$

Como $sen\omega$ y $cos\omega$ son funciones linealmente independientes (2.63) solo se puede cumplir si

$$\dot{h}_1(t) = \dot{h}_2(t) = 0 \Rightarrow h_1\ y\ h_2\ son\ constantes \qquad (2.66)$$

Con lo que (2.64) queda:

$$\ddot{g}_2(t) = 0 \qquad (2.67)$$

Es decir que:

$$g_2(t) = b_1 t + b_0 \qquad (2.68)$$

Y, de nuevo, como $sen\lambda$ y $cos\lambda$ son linealmente independientes de (2.65) sigue que:

$$\dot{h}_3(t) sen\omega - \dot{h}_4(t) cos\omega = 0 \qquad (2.69)$$

$$\dot{h}_5(t) = 0 \qquad (2.70)$$

De donde sigue que h_3, h_4 y h_5 también son constantes. O sea que todas las h son constantes.

Con esto las ecuaciones de las funciones generatrices quedan:

$$R_r = \frac{1}{2} r\,(2a_2 t + a_1) + [h_1 cos\omega + h_2 sen\omega] cos\lambda + (b_1 t + b_0) sen\lambda \qquad (2.71)$$

$$R_\omega = \frac{1}{r cos\lambda}[(-h_1 cos\omega + h_2 sen\omega)] + \frac{sen\lambda}{cos\lambda}[-h_3 sen\omega + h_4 cos\omega] + h_5 \qquad (2.72)$$

$$R_\lambda = \frac{1}{r}[-(h_1 cos\omega + h_2 sen\omega) sen\lambda + (b_1 t + b_0)\ cos\lambda] + (h_3 cos\omega + h_4 sen\omega) \qquad (2.73)$$

Lo que sigue a partir de aquí son una serie de cálculos similares a los anteriores (que se pueden consultar en el apéndice B en cual se encuentra la solución detallada.) en los emplean las ecuaciones del sistema que aún no se han considerado.

El resultado es una sistemática simplificación de las expresiones anteriores hasta llegar a que:

$$T = a_0 \qquad (2.74)$$

$$R_r = 0 \qquad (2.75)$$

$$R_\omega = h_5 \qquad (2.76)$$

$$R_\lambda = 0 \qquad (2.77)$$

$G = constante = G_0$ (2.78)

Con estos resultados, la cantidad conservada que arroja el Teorema de Noether es:

$$Q = -TH - G + \sum R_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -a_0 H - G_0 + h_5 \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} = cte\ . \qquad (2.79)$$

Donde $a_0, G_0\ y\ h_5$ son constantes de integración arbitrarias a los que podemos asignar distintos valores.

Si $a_0 = -1\ ;\ h_5 = 0\ y\ G_0 = 0 \Rightarrow\ Q = H$ (2.80)

y si $a_0 = 0\ ;\ h_5 = 1\ y\ G_0 = 0\ \Rightarrow Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}}$. (2.81)

Por lo que las cantidades conservadas resultan ser el Hamiltoniano y el impulso generalizado acimutal.

Es decir que este sistema no tiene otras simetrías variacionales aparte de las triviales.

3. Conclusiones

En el caso analizado el resultado es que el Teorema de Noether no proporciona nuevas cantidades conservadas más allá de la ya evidentes, o sea la correspondiente a la traslación en el tiempo, cuya cantidad conservada es la integral de Jacobi y una traslación según el ángulo acimutal cuya cantidad conservada es el momento conjugado correspondiente a dicha coordenada.

En consecuencia, es muy probable que configuraciones más complejas del campo magnético, (como la cuadripolar) tampoco tengan simetrías variacionales porque, en general, la complejidad del sistema va en sentido inverso a las posibilidades de encontrar simetrías de este tipo.

Lo anterior no debe considerarse como una clausura del teorema de Noether como alternativa para analizar tales configuraciones más complejas, pero si como un indicio de lo que puede ocurrir.

Esto deja a las simetrías del Hamiltoniano como la vía a explorar en futuras investigaciones habida cuenta de que, en contraste con las simetrías del Lagrangiano, todas las cantidades conservadas deben estar asociadas a una simetría del Hamiltoniano (Torres del Castillo, G.F. and Herrera Flores, J.E. (2016)). En ese sentido el enfoque Hamiltoniano es más fundamental que el Lagrangiano aunque también más complejo.

Existe una tercera posibilidad, no desarrollada en esta tesis pero que resulta muy interesante en relación con el problema de Störmer.

Se basa en las llamadas "transformaciones Canódicas" (Torres del Castillo 2018) que con la única condición de preservar la forma del Hamiltoniano (sin que la trasformación sea canónica) proporcionan cantidades conservadas del sistema.

Por otro lado está el campo que abarca la integralidad de los sistemas dinámicos y su relación con las simetrías y que es enorme, aunque con escasa presencia en la física de la atmosfera.

En parte esto se debe a que los recursos matemáticos que se necesitan (tales como topología, geometría diferencial, algebra de Lie, etc.) están bastante alejados de las técnicas (principalmente estadísticas y de simulación por computadoras), que se emplean en ella.

Sin embargo, y dado el nivel fundamental al que están orientados, su incorporación a la física de la atmosfera puede resultar una línea interesante de investigación.

Apéndice A: El Teorema de Noether o de las Simetrías Variacionales

A1. Las simetrías Variacionales

Una simetría variacional se define como: Una transformación uni-paramétricas de coordenadas dada por:

$$\begin{cases} \bar{q}_j = \bar{q}_j(q_i, t, s) \\ \bar{t} = \bar{t}(q_j, t, s) \end{cases} \quad \text{(A. 1)}$$

que se reduce a la identidad cuando $s = 0$ es decir que:

$$\bar{q}_j(q_i, t, s = 0) = q_j \quad \text{(A.2)}$$

$$\bar{t}(q_j, t, s = 0) = t \quad \text{(A.3)}$$

es una simetría variacional si se se cumple que:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) + \frac{dF(q_i,t,s)}{dt} \quad \text{(A.4)}$$

donde la función $F(q_i, t, s)$ es una función tan solo de la posición y del parámetro s.

Bajo estas condiciones es fácil verificar que la trasformación constituye una simetría del Lagrangiano en el sentido que mantiene inalterada la acción.Tan solo hay que integrar ambos miembros, es decir:

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q_i,t,s)}{dt}dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)d\bar{t} = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_j, \frac{dq_j}{dt}, t\right)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q_j,t,s)}{dt}dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)d\bar{t} = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_j, \frac{dq_j}{dt}, t\right)dt + F(q_j, t, s)\Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{(A.5)}$$

Pero como sobre cualquier trayectoria las q_j son las mismas en t_1 y t_2 nos queda que

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)d\bar{t} = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_j, \frac{dq_j}{dt}, t\right)dt \quad \text{(A.6)}$$

O sea que la acción permanece invariante.

Ejemplo:

La transformación uni-paramétrica de coordenadas:

$$\begin{cases} \bar{q} = q + st \\ \bar{t} = t \end{cases} \quad \text{(A.7)}$$

es una simetria variacional del Lagrangiano :

$$L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq \quad \text{(A.8)}$$

Porque si calculamos:

$$\frac{d\bar{q}_i}{d\bar{t}} = \dot{q} + s \qquad \text{(A.9)}$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = 1 \qquad \text{(A.10)}$$

Nos queda que:

$$L\left(\bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}, t\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}\right)^2 - mg\bar{q}\right]1 \qquad \text{(A.11)}$$

Reemplazando (A.7) y (A.9) en (A.11):

$$L\left(\bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}, t\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = \left[\frac{1}{2}m(\dot{q} + s)^2 - mg(q + st)\right]$$

$$L\left(\bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}, t\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + m\dot{q}s + \frac{1}{2}ms^2 - mgq - mgst$$

$$L\left(\bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}, t\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq + \left(m\dot{q}s + \frac{1}{2}ms^2 - mgst\right) \qquad \text{(A.12)}$$

Pero como:

$$m\dot{q}s + \frac{1}{2}ms^2 - mgst = \frac{d}{dt}\left[msq + \frac{1}{2}ms^2t - \frac{1}{2}mgst^2\right] \qquad \text{(A.13)}$$

La ecuación (A.12) queda finalmente :

$$L\left(\bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}, t\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq + \frac{d}{dt}\left[msq + \frac{1}{2}ms^2t - \frac{1}{2}mgst^2\right] \qquad \text{(A.14)}$$

Que es de la forma (A.4) :

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) + \frac{dF(q_i, t, s)}{dt}$$

Con $F(q, t, s) = msq + \frac{1}{2}ms^2t - \frac{1}{2}mgst^2$ (A.15)

A2. Teorema de Noether:

El concepto de simetría variacional, tal y como ha sido planteado hasta ahora, es decir en forma integral no es útil desde el punto de vista operativo.

En efecto, tal como está planteado, si bien el significado físico del concepto es claro (la invariancia de la acción bajo una transformación de coordenadas) lo que no queda muy claro es como encontrar las transformaciones que constituyen una simetría.

En lo que sigue se transformará la condición integral de la simetría en una condición diferencial, operativa en el sentido de que mediante la resolución de una ecuación diferencial se pueden encontrar todos los elementos de la transformación asociada a la simetría.

Para ello vamos a considerar ahora aquellas transformaciones que cumplen la definición de simetrías variacionales a primer orden en el parámetro s.

Esto quiere decir que si bien la trasformación misma ,o sea en la forma (A. 1) puede no cumplir con la condición (A.4); si lo hace la trasformación siguiente:

$$\begin{cases} \bar{q}_j(q_i,t,s) = \bar{q}_j(q_i,t,s=0) + s\,\frac{\partial \bar{q}_j(q_i,t,s=0)}{\partial s} \\ \bar{t}(q_j,t,s) = \bar{t}(q_j,t,s=0) + s\,\frac{\partial \bar{t}(q_i,t,s=0)}{\partial s} \end{cases} \qquad \text{(A.16)}$$

Que no es otra cosa que la aproximación a primer orden de las ecuaciones del sistema (A. 1) en el parámetro s. Pero dado que la transformación se reduce a la identidad para $s=0$ tenemos que:

$$\bar{q}_j(q_i,t,s=0) = q_j \qquad \text{(A.17)}$$

$$\bar{t}(q_j,t,s=0) = t \qquad \text{(A.18)}$$

Por lo cual, reemplazando (A.17) y (A.18) en (A.17) la trasformación queda:

$$\begin{cases} \bar{q}_j(q_i,t,s) = q_j + s\,\frac{\partial \bar{q}_j(q_i,t,s=0)}{\partial s} \\ \bar{t}(q_j,t,s) = t + s\,\frac{\partial \bar{t}(q_i,t,s=0)}{\partial s} \end{cases} \qquad \text{(A.19)}$$

Para simplificar los cálculos introduciremos la siguiente notación

$$R_j(q_i,t) = \frac{\partial \bar{q}_j(q_i,t,s=0)}{\partial s} \qquad \text{(A.20)}$$

$$T(q_i,t) = \frac{\partial \bar{t}(q_i,t,s=0)}{\partial s} \qquad \text{(A.21)}$$

Con lo cual la trasformación queda:

$$\begin{cases} \bar{q}_j(q_i, t, s) = q_j + s\, R_j(q_i, t) \\ \bar{t}\big(q_j, t, s\big) = t + s\, T(q_i, t) \end{cases} \qquad \text{(A.22)}$$

A menudo a una transformación como ésta se le suele llamar "transformación diferencial".

Asimismo, las funciones $R_j(q_i, t)$ (una para cada grado de libertad del problema) y la $T(q_i, t)$ reciben el nombre de "funciones generatrices de la transformación diferencial".

Obsérvese que estas funciones generatrices tan solo dependen de las coordenadas generalizadas y del tiempo. No dependen ni de las velocidades ni del parámetro s.

A continuación, trataremos de poner (A.4) , es decir la ecuación:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) + \frac{dF(q_i,t,s)}{dt}$$

Tan solo en función de las variables originales $q_i, \dot{q}_i$ y el tiempo t.

Para ello de la última ecuación del sistema (A.22) tenemos que:

$$d\bar{t} = dt + s\,\dot{T}(q_i, T)dt$$

$$d\bar{t} = \big(1 + s\,\dot{T}\big)dt$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = 1 + s\,\dot{T} \qquad \text{(A.23)}$$

Con esto ya tenemos el cociente de diferenciales del primer miembro de la Ecuación (A.4).

Por otro lado, tenemos que:

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{q}}{dt}\frac{dt}{d\bar{t}} \qquad \text{(A.24)}$$

Y teniendo de (A.23):

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{1}{1+s\,\dot{T}} \qquad \text{(A25)}$$

Que, a primer orden en s es lo mismo que:

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = 1 - s\,\dot{T} \qquad \text{(A26)}$$

Llevando esto a la Ecuación (A.24) nos queda:

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{q}}{dt}\big(1 - s\,\dot{T}\big) \qquad \text{(A.27)}$$

Pero de acuerdo al sistema (A.22) :

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} = \dot{q}_j + s\,\dot{R}_j(q_i, t) \qquad \text{(A.28)}$$

Llevando esto a (A.27) tenemos que:

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} = \big(\dot{q}_j + s\,\dot{R}_j\big)\big(1 - s\,\dot{T}\big) = \dot{q}_j - \dot{q}_j s\,\dot{T} + s\,\dot{R}_j + s^2\,\dot{R}_j\,\dot{T} \qquad \text{(A.29)}$$

Que a primer orden queda:

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} = \dot{q}_j + \left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T} \right)s \qquad (A.30)$$

Entonces ,teniendo en cuenta (A.22) y (A.30) tenemos que :

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right) = L\left[\left(q_j + s\, R_j\right), \left(\dot{q}_j + \left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T}\right)s\right), \left(t + s\, T(q_i, t)\right)\right] \qquad (A.31)$$

Esta ecuación (que surge de simplemente de sustituir $\bar{q}_j; \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}\, y\ \bar{t}$ por sus transformaciones a primer orden) nos dice que el Lagrangiano en las nuevas variables no es más que el Lagrangiano en las viejas variables incrementadas en las cantidades :

$$\Delta t = sT \qquad (A.35)$$

$$\Delta q_j = sR_j \qquad (A.33)$$

$$\Delta \dot{q}_j = \left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T} \right)s \qquad (A.34)$$

O lo que es lo mismo, que a primer orden:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right) = L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \Delta L \qquad (A.35)$$

Donde:

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\Delta q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Delta \dot{q}_j \qquad (A.36)$$

O sea que teniendo en cuenta (A.35), (A.33), (A.34) y (A.36) la ecuación (A.35) se puede poner como:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right) = L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \frac{\partial L}{\partial t}sT + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}sR_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T}\right)s \qquad (A.37)$$

Y después de agrupar y sacar factor común s queda:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right) = L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \frac{\partial L}{\partial t}sT + s\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T}\right)\right] \qquad (A.38)$$

Y multiplicando ambos miembros por $\frac{d\bar{t}}{dt}$ tenemos que:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = \left\{L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \frac{\partial L}{\partial t}sT + s\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T}\right)\right]\right\}\frac{d\bar{t}}{dt} \qquad (A.39)$$

Y teniendo en cuenta (A25) el segundo miembro de (A.39)se puede poner como:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = \left\{L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \frac{\partial L}{\partial t}sT + s\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T}\right)\right]\right\}(1 + s\, \dot{T}) \qquad (A.40)$$

Distribuyendo:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = (1 + s\, \dot{T})L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \frac{\partial L}{\partial t}sT\left(1 + s\, \dot{T}\right) + s(1 + s\, \dot{T})\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{R}_j - \dot{q}_j\, \dot{T}\right)\right] \qquad (A.41)$$

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = L(q_j, \dot{q}_j, t) + s\,\dot{T}L(q_j, \dot{q}_j, t) + sT\frac{\partial L}{\partial t} + s^2T\frac{\partial L}{\partial t}\dot{T} \; + s\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right] + s^2T\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right] \quad \text{(A.42)}$$

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = L(q_j, \dot{q}_j, t) + s\,\left[\dot{T}L(q_j, \dot{q}_j, t) + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right]\right] + s^2T\left[\frac{\partial L}{\partial t}\dot{T} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right]\right] \quad \text{(A.43)}$$

Como estamos interesados tan solo en lo que ocurre a primer orden el término en s^2 se elimina y nos queda que:

$$L\left(\bar{q}_j, \frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}}, \bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} = L(q_j, \dot{q}_j, t) + s\,\left[\dot{T}L(q_j, \dot{q}_j, t) + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right]\right] \quad \text{(A.44)}$$

Con esto tenemos expresado el primer miembro de la Ecuación (A.4) en términos de los elementos de la trasformación y de las viejas variables. Igualando (A.4) y (A.44) nos queda:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) + s\,\left[\dot{T}L(q_j, \dot{q}_j, t) + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right]\right] = L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) + \frac{dF(q_i,t,s)}{dt} \quad \text{(A.45)}$$

Como es evidente que el subíndice empleado para designar a las variables originales no es algo relevante tenemos que :

$$L\left(q_j, \frac{dq_j}{dt}, t\right) = L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) \quad \text{(A.46)}$$

$$\frac{dF(q_j,t,s)}{dt} = \frac{dF(q_i,t,s)}{dt} \quad \text{(A.47)}$$

Por lo cual la Ecuación (A.45) se reduce a:

$$s\,\left[\dot{T}L(q_j, \dot{q}_j, t) + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right]\right] = \frac{dF(q_j,t,s)}{dt} \quad \text{(A.48)}$$

Esta es una forma equivalente de expresar que la transformación uni-paramétrica es, a primer orden, una simetría variacional .Pero aún depende del parámetro s lo cual se soluciona fácilmente derivando parcialmente respecto a dicho parámetro:

$$\dot{T}L(q_j, \dot{q}_j, t) + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\,\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right] = \frac{\partial}{\partial s}\frac{dF(q_j,t,s)}{dt} \quad \text{(A.49)}$$

Si el primer miembro no depende explícitamente del parámetro s el segundo tampoco ha de hacerlo, por lo que para dejar claro este hecho podemos definir una nueva función que solo depende de las q_j y del tiempo, que por razones que veremos más adelante definimos a través de una derivada temporal de la forma:

$$\frac{dG(q_j,t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{dF(q_j,t,s)}{dt} \quad \text{(A.50)}$$

Con esto la ecuación (A.49) queda:

$$\boxed{\dot{T}L(q_j,\dot{q}_j,t) + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\dot{R}_j - \dot{q}_j\,\dot{T})\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt}} \qquad \text{(A.51)}$$

Esta ecuacion diferencial es equivalente a la ecuación (A.4) que estableces la condición para que una trasformación constituya una simetría variacional porque fue deducida directamente de ella incorporándoles los elementos de la transformación

Entonces encontrar una transformación uni-paramétrica que constituya una simetría variacional de un dado Lagrangiano significa resolver ésta ecuación diferencial con el propósito de encontrar las funciones generatrices $R_j(q_i,t), T(q_i,t)$ y la función $G(q_j,t)$ denominada "Gauge".

Si distribuimos la sumatoria del primer miembro de (A.44) se puede poner de una forma que simplifica un poco los cálculos al ser algo más compacta:

$$\dot{T}L(q_j,\dot{q}_j,t) + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{R}_j\right] - \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\,\dot{T}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{dG(q_j,t)}{dt}$$

$$\dot{T}L(q_j,\dot{q}_j,t) - \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\,\dot{T}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{R}_j\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt}$$

$$\dot{T}L(q_j,\dot{q}_j,t) - \dot{T}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{R}_j\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt}$$

$$\dot{T}\left[L(q_j,\dot{q}_j,t) - \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{R}_j\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt} \qquad \text{(A.52)}$$

Y lo que tenemos en el primer corchete es "la integral de Jacobi",es decir el Hamiltoniano pero expresado en función de las coordenadas y las velocidades en vez de las coordenadas y los momentos.

$$L(q_j,\dot{q}_j,t) - \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H(q_j,\dot{q}_j,t) \qquad \text{(A.53)}$$

Con lo cual llegamos a que:

$$\boxed{-\dot{T}H + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{R}_j\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt}} \qquad \text{(A.54)}$$

La simetría que estamos tratando, representada por ésta ecuación, o por la Ecuación (A.51) es una propiedad del Lagrangiano y vale para cualquier trayectoria, que consideremos.

En todas ellas la acción permanecerá invariante ante el cambio de coordenadas y eso es todo lo que podemos decir para las trayectorias en general lo cual no es de gran interés.

Sin embargo, si tan solo consideramos la trayectoria real, es decir la que cumple con las ecuaciones de Euler-Lagrange surge algo muy interesante que es la existencia de una cantidad conservada.

En efecto si si la trayectoria considerada es la real, se cumplen que

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \qquad \textit{Ecuaciones de Euler Lagrange} \qquad \text{(A.55)}$$

que llevadas a (A.54) :

$$-\dot{T}H + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ \dot{R}_j\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt} \qquad \text{(A.56)}$$

Pero lo que está dentro del corchete del primer miembro de (A.56) puede interpretarse de como la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)R_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ \dot{R}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}R_j\right) \qquad \text{(A.57)}$$

Por lo que (A.56) queda:

$$-\dot{T}H + T\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}R_j\right)\right] = \frac{dG(q_j,t)}{dt} \qquad \text{(A.58)}$$

y sacando la derivada fuera de la suma esto se puede expresar como:

$$-\dot{T}H + T\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}R_j = \frac{dG(q_j,t)}{dt} \qquad \text{(A.59)}$$

Por otra parte tenemos que la derivada parcial del Lagragiano respecto al tiempo se relaciona con la derivada total del Hamiltoniano en la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dH}{dt} \qquad \text{(A.60)}$$

Con lo que, reemplazando (A.60) en (A.59) queda:

$$-\dot{T}H - T\frac{dH}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}R_j = \frac{dG(q_j,t)}{dt} \qquad \text{(A.59)}$$

Y a su vez, en esta ecuación los dos primeros términos del lado izquierdo también pueden interpretarse como la derivada de un producto:

$$-\dot{T}H - T\frac{dH}{dt} = \frac{d(-TH)}{dt} \qquad \text{(A.62)}$$

Con lo que la ecuación (A.59) queda:

$$\frac{d(-TH)}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}R_j = \frac{dG(q_j,t)}{dt} \qquad \text{(A.63)}$$

Y finalmente:

$$\frac{d}{dt}\left[-TH - G(q_j,t) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}R_j\right] = 0 \qquad \text{(A.64)}$$

De donde surge que la cantidad que está entre corchete es una constante.

$$\boxed{Q = -TH - G(q_j,t) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}R_j = constante} \qquad \text{(A.65)}$$

Que en función del Lagrangiano puede expresarse como :

$$\boxed{Q = TL - G(q_j, t) + \sum_{j=1}^{n}(R_j - \dot{q}_j T)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = constante} \qquad (A.66)$$

Ésta es una cantidad conservada asociada una simetría variacional, y depende de los elementos de la trasformación (o sea su funciones generadoras) y del Gauge.

Y todas estas funciones se pueden calcular a partir de la ecuación (A.51).

A3. Quien fue Amalie Emmy Noether

Una persona a la que un científico de la talla de Albert Einstein consulta asiduamente y de la cual se sorprende por sus enfoques profundos y generales es ciertamente una persona poco común. Pero a una persona a la que le suceda lo mismo con Einstein y además con David Hilbert es realmente excepcional.

Amalie Emy Noether era realmente excepcional.

Nacida en 1882 en Earlangen,Alemania, tuvo una vida relativamente breve a lo largo de la cual hizo aportes decisivos que configuraron tanto el Algebra en el sentido moderno como en la Fisica.

Tuvo grandes maestros, empezando por su padre Max Nother, también matemático y por Paul Gordan quien la introdujo en el problema de los invariantes.

Como toda persona inteligente Emmy Noether buscaba el saber y asistió como oyente a clases impartidas por figuras de la talla de Karl Schwarzschild, Hermann Minkowski, Felix Klein y el ya citado David Hilbert, su gran mentor. De esta forma pudo cultivar y desplegar su enorme talento incluso antes de ser aceptada como alumna regular en la Universidad de su ciudad natal.

Empleada, a instancias de Hilbert, por la Universidad de Gotinga, Noether trabajo en ella desde 1915 hasta comienzos década del 30 en que las sombras de la intolerancia y la persecución la obligaron a exiliarse en Estados Unidos donde murió de cáncer en 1935.

Apéndice B: La solución detallada

En este apéndice se muestra la la resolución detallada del sistema de ecuaciones obtenido en la sección 2.2.

Partimos del sistema:

$$(a)\ \frac{\partial R_r}{\partial r} - \frac{1}{2}\,\dot{T} = 0$$

$$(b)\ R_r + r\frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda} - r\dot{T} = 0$$

$$(c)\ 2rcos\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} - r\,\dot{T}cos\lambda + 2R_r cos\lambda - 2\,rsen\lambda\,R_\lambda = 0$$

$$(d)\ mr^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0$$

$$(e)\ -\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}cos^2\lambda\,R_r - 2\frac{q}{c}\,\frac{M}{r}\,\cos\lambda\,sen\lambda\,R_\lambda\dot{\omega} + m\,r^2cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} - \frac{\partial G}{\partial \omega} = 0$$

$$(f)\ \ m\frac{\partial R_r}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r} = 0$$

$$(g)\ \frac{\partial R_r}{\partial \omega} + r^2cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial r} = 0$$

$$(h)\ \frac{\partial R_r}{\partial \lambda} + r^2\frac{\partial R_\lambda}{\partial r} = 0$$

$$(i)\ \ cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial \omega} = 0$$

$$(j)\ \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

No hay una sola estrategia para resolver este sistema de ecuaciones. La forma en que se proceda, es decir el orden en que se vayan empleando o vinculando las ecuaciones, incidirá mucho en la utilidad de la información que se vaya obteniendo y en lo complejo que resulte el proceso.

Sin embargo, surge a la vista que hay dos tipos claramente diferentes de ecuaciones. Por un lado están las que contienen al Gauge y por otro lado las que no lo tienen. Relacionando estas últimas, (o sea las ecuaciones que no contienen al Gauge) se puede, como veremos, encontrar la dependencia explicita de las funciones generadoras con las coordenadas de un modo relativamente sencillo.Una vez hecho esto se procede a relacionar las funciones que contienen al Gauge para determinar la dependencia explicita de las funciones generadoras con el tiempo y a su vez el Gauge.

De la ecuación (a) surge que:

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} = \frac{1}{2}\,\dot{T} \;\Rightarrow\; R_r = \frac{1}{2} r\,\dot{T}(t) + f_1(\omega,\lambda,t) \qquad \text{(B.1)}$$

donde $f_1(\omega,\lambda,t)$ es una función a determinar en base a las otras ecuaciones.

Se observa que de esta primera ecuación ya hemos obtenido la dependencia explicita de la función generadora R_r con la variable r trasladandose el problema (en lo que a esta función generadora se refiere) a determinar la función $f_1(\omega,\lambda,t)$ que ya no depende de r.

Esto es característico en todo el proceso, en el que, en cada paso,se obtiene la dependencia explícita de alguna de las funciones generadoras con alguna de las coordenadas mutando el problema hacia el cálculo de nuevas funciones que dependen de una coordenada menos y así hasta que tales funciones solo dependan del tiempo, las cuales se calcularán relacionando las ecuaciones que contienen al Gauge.

De la Ecuación (B.1) surge que:

$$\frac{\partial R_r}{\partial \omega} = \frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} \qquad \text{(B.2)}$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \lambda} = \frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} \qquad \text{(B.3)}$$

Reemplazando (B.2) en (g) :

$$r^2 cos^2\lambda \frac{\partial R_\omega}{\partial r} = -\frac{\partial R_r}{\partial \omega} = -\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} \qquad \text{(B.4)}$$

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial r} = -\frac{1}{r^2 cos^2\lambda}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} \qquad \text{(B.5)}$$

De donde sigue que:

$$R_\omega = \frac{1}{r\,cos^2\lambda}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} + f_2(\omega,\lambda,t) \qquad \text{(B.6)}$$

Con esto hemos obtenido la dependencia explicita de la función generadora R_ω con la variable r. En forma análoga reemplazando (B.3) en (h) se tiene:

$$\frac{\partial R_\lambda}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} \qquad \text{(B.7)}$$

De la cual:

$$R_\lambda = \frac{1}{r}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} + f_3(\omega,\lambda,t) \qquad \text{(B.8)}$$

Esta ecuación ya contiene la dependencia explicita de la función R_λ con la variable r.

Una vez obtenida la dependencia explícita de las tres funciones generadoras con la variable r debemos emplear alguna de las otras ecuaciones del sistema para encontrar la dependencia explícita con alguna de las otras variables, o sea, ir encontrando la forma de las funciones $f_1(\omega,\lambda,t)$, $f_2(\omega,\lambda,t)$ y $f_3(\omega,\lambda,t)$ que aparecieron en los cálculos anteriores.

Para ello derivamos la Ecuación (B.8) respecto a λ y se obtiene:

$$\frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial f_3(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} \quad \text{(B.9)}$$

Y reemplazando (B.1) y (B.9) en (b) se tiene que:

$$f_1(\omega,\lambda,t) + \frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda^2} + r\frac{\partial f_3(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} = 0. \quad \text{(B.10)}$$

Como esta ecuación debe cumplirse para todo valor de r tenemos que:

$$\frac{\partial f_3(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{(B.11)}$$

$$\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda^2} + f_1(\omega,\lambda,t) = 0. \quad \text{(B.12)}$$

De (B.11) se concluye que f_3 no depende de explícitamente de λ, es decir:

$$f_3(\omega,\lambda,t) = f_3(\omega,t). \quad \text{(B.13)}$$

Y la solución de (B.12) es la de un oscilador armónico en la variable λ, es decir:

$$f_1(\omega,\lambda,t) = g_1(\omega,t)cos\lambda + g_2(\omega,t)sen\lambda\ . \quad \text{(B.14)}$$

Donde g_1 y g_2 son funciones a determinar, pero que ya no dependen de λ, ni de r, sino tan solo de ω y del tiempo.

Derivando (B.14) tenemos:

$$\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} = -g_1(\omega,t)sen\lambda + g_2(\omega,t)cos\lambda \quad \text{(B.15)}$$

$$\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda^2} = -g_1(\omega,t)cos\lambda - g_2(\omega,t)sen\lambda \quad \text{(B.16)}$$

Con (B.14) en (B.1),en (B.6) y en (B.8) las funciones generadoras espaciales quedan:

$$R_r = \frac{1}{2}r\,\dot{T}(t) + g_1(\omega,t)cos\lambda + g_2(\omega,t)sen\lambda \quad \text{(B.17)}$$

$$R_\omega = \frac{1}{rcos^2\lambda}\left(\frac{\partial g_1(\omega,t)}{\partial \omega}cos\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}sen\lambda\right) + f_2(\omega,\lambda,t) \quad \text{(B.18)}$$

$$R_\lambda = \frac{1}{r}(-g_1(\omega,t)sen\lambda + g_2(\omega,t)cos\lambda) + f_3(\omega,t). \quad \text{(B.19)}$$

Es decir que ya hemos obtenido la dependencia explicita con λ de dos de las funciones generadoras: $R_r\ y\ R_\lambda$.

De R_ω todavía no tenemos la dependencia completa con λ, pues f_2 aún podría depender de esta variable. Para ello debemos buscar otra ecuación del sistema original (la más sencilla de las que aún no hemos empleado) que vincule a R_ω con las otras. Una buena elección es la Ecuación (*i*) dada por:

$$(i)\ \ cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial \omega} = 0$$

Las derivadas que figuran en esta ecuación las obtenemos de (B.18) y de (B.19).

De (B.18) tenemos que:

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} = \frac{1}{rcos^3\lambda}\left[\frac{\partial g_1(\omega,t)}{\partial \omega}sen\lambda cos\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega} + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}sen^2\lambda\right] + \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} \qquad (B.20)$$

Y de (B.19) :

$$\frac{\partial R_\lambda}{\partial \omega} = \frac{1}{r}\left[-\frac{\partial g_1(\omega,t)}{\partial \omega}sen\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}cos\lambda\right] + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial \omega} \qquad (B.21)$$

Reemplazando (B.20) y (B.20) en (i) tenemos:

$$cos^2\lambda\frac{1}{rcos^3\lambda}\left[\frac{\partial g_1(\omega,t)}{\partial \omega}sen\lambda cos\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega} + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}sen^2\lambda\right] + cos^2\lambda\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} +$$
$$+\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial g_1(\omega,t)}{\partial \omega}sen\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}cos\lambda\right] + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial \omega} = 0 \qquad (B.22)$$

Que agrupando según la variable r queda:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial g_1(\omega,t)}{\partial \omega}sen\lambda cos\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega} + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}sen^2\lambda - \frac{\partial g_1(\omega,t)}{\partial \omega}sen\lambda cos\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}cos^2\lambda\right] +$$
$$+\left[cos^2\lambda\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial \omega}\right]cos\lambda = 0$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega} + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}sen^2\lambda + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}cos^2\lambda\right] + \left[cos^2\lambda\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial \omega}\right]cos\lambda = 0$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega} + \frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega}(sen^2\lambda + cos^2\lambda)\right] + \left[cos^2\lambda\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial \omega}\right]cos\lambda = 0$$

$$\frac{2}{r}\frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega} + \left[cos^2\lambda\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial \omega}\right]cos\lambda = 0 \qquad (B.23)$$

De nuevo, esto debe valer para todo r lo cual es posible solo si se cumple que:

$$\frac{\partial g_2(\omega,t)}{\partial \omega} = 0 \qquad (B.24)$$

$$cos^2\lambda\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial \omega} = 0 \qquad (B.25)$$

De la Ecuación (B.24) concluimos que $g_2(\omega,t)$ no depende de ω , es decir que

$$g_2 = g_2(t) \qquad (B.26)$$

Por su parte la Ecuación (B.25) ya es una relación entre dos de las funciones que estamos tratando de encontrar $f_2(\omega,\lambda,t)$ y $f_3(\omega,t)$.

Para seguir avanzando y encontrar otra relación entre $f_2(\omega,\lambda,t)$ y $f_3(\omega,t)$ debemos recurrir a otra de las ecuaciones del sistema para ver que podemos obtener de ella si empleamos todo lo que conocemos hasta ahora. Dicha ecuación es la (c).

$$(c)\ 2rcos\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} - r\dot{T}cos\lambda + 2R_r cos\lambda - 2\,rsen\lambda\,R_\lambda = 0$$

R_λ se obtiene de (B.19) , R_r de (B.1) y la derivada $\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega}$ se obtiene de (B.18) :

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} = \frac{1}{r\,cos^2\lambda}\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega^2} + \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial \omega} \qquad (B.27)$$

Entonces, reemplazando (B.1) y (B.19) y (B.27) en (c) tenemos:

$$2rcos\lambda\left[\frac{1}{r\,cos^2\lambda}\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega^2}+\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega}\right]-r\,\dot{T}cos\lambda+2cos\lambda\left[\frac{1}{2}r\,\dot{T}(t)+\ f_1(\omega,\lambda,t)\ \right]-$$
$$-2\ rsen\lambda\ \left[\frac{1}{r}\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda}+f_3(\omega,t)\ \right]=0 \quad \text{(B.28)}$$

$$\frac{2}{cos\lambda}\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega^2}+2rcos\lambda\ \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega}-r\,\dot{T}cos\lambda+cos\lambda\,r\,\dot{T}(t)+2cos\lambda f_1(\omega,\lambda,t)-$$
$$-2\ sen\lambda\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda}-2\ rsen\lambda f_3(\omega,t)=0 \quad \text{(B.29)}$$

Y agrupando los términos que contienen r obtenemos:

$$r\left[2cos\lambda\ \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega}-2\ sen\lambda f_3(\omega,t)\right]+\left[\frac{2}{cos\lambda}\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega^2}+2cos\lambda f_1(\omega,\lambda,t)-\right.$$
$$\left.-2\ sen\lambda\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda}\right]=0 \quad \text{(B.30)}$$

La cual solo se puede verificar solo si:

$$cos\lambda\ \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega}-\ sen\lambda f_3(\omega,t)=0 \quad \text{(B.31)}$$

$$\frac{1}{cos\lambda}\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega^2}+cos\lambda f_1(\omega,\lambda,t)-\ sen\lambda\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda}=0 \quad \text{(B.32)}$$

Esta última ecuación solo involucra a la función $f_1(\omega,\lambda,t)$ que por (B.14) vale:

$$f_1(\omega,\lambda,t)=g_1(\omega,t)cos\lambda+g_2(\omega,t)sen\lambda$$

Pero como según hemos calculado antes de (B.26) , g_2 no depende de ω y nos queda que f_1 está dada por:

$$f_1(\omega,\lambda,t)=g_1(\omega,t)cos\lambda+g_2(t)sen\lambda \quad \text{(B.33)}$$

Cuyas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega^2}=\frac{\partial^2 g_1(\omega,t)}{\partial\omega^2}cos\lambda \quad \text{(B.34)}$$

$$\frac{\partial f_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda}=-g_1(\omega,t)sen\lambda+g_2(t)\ cos\lambda \quad \text{(B.35)}$$

Y reemplazando (B.33), (B.34) y (B.35) en (B.32) se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 g_1(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega^2}+g_1(\omega,t)=0 \quad \text{(B.36)}$$

Esta última es la ecuación de un oscilador armónico cuya solución es:

$$g_1(\omega,t)=h_1(t)cos\omega+h_2(t)sen\omega \quad \text{(B.37)}$$

Por su parte la Ecuación (B.31) es otra relación entre f_2 y f_3 que, junto a la Ecuación (B.25), forman el siguiente sistema:

$$\begin{cases} cos^2\lambda \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda} + \frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial\omega} = 0 \\ cos\lambda\ \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega} - \ sen\lambda\ f_3(\omega,t) = 0 \end{cases} \quad (B.38)$$

Este sistema de dos ecuaciones puede reescribirse como:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda} = -\frac{1}{cos^2\lambda}\frac{\partial f_3(\omega,t)}{\partial\omega} \\ \frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega} = \frac{sen\lambda}{cos\lambda}\ f_3(\omega,t) \end{cases} \quad (B.39)$$

derivando la primera ecuación del sistema (B.39) respecto a ω y la segunda respecto a λ se tiene

$$\frac{\partial^2 f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega\partial\lambda} = -\frac{1}{cos^2\lambda}\ \frac{\partial^2 f_3(\omega,t)}{\partial\omega^2} \quad (B.40)$$

$$\frac{\partial^2 f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda\partial\omega} = \frac{1}{cos^2\lambda}\ f_3(\omega,t)\ . \quad (B.41)$$

Y como suponemos que nuestras funciones son todas “bien comportadas” las derivadas cruzadas deben ser iguales por lo que, de (B.40) y (B.41) se llega a:

$$\frac{\partial^2 f_3(\omega,t)}{\partial\omega^2} + \ f_3(\omega,t) = 0\ \ . \quad (B.42)$$

O sea que f_3 resulta también una función armónica en la variable ω.

$$f_3(\omega,t) = h_3(t)cos\omega + h_4(t)sen\omega \quad (B.43)$$

en donde $h_3(t)$ y $h_4(t)$ son funciones del tiempo a determinar.

Si ahora reemplazamos (B.43) en la segunda ecuación del sistema (B.39) se tiene:

$$\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\omega} = \frac{sen\lambda}{cos\lambda}[h_3(t)cos\omega + h_4(t)sen\omega] \quad (B.44)$$

de donde sigue que:

$$f_2(\omega,\lambda,t) = \frac{sen\lambda}{cos\lambda}[-h_3(t)sen\omega + h_4(t)cos\omega] + h_5(\lambda,t) \quad (B.45)$$

A continuación hay que determinar la dependencia explicita de h_5 con la variable λ .

Para ello se deriva (B.45) respecto a λ :

$$\frac{\partial f_2(\omega,\lambda,t)}{\partial\lambda} = \frac{1}{cos^2\lambda}(h_3(t)sen\omega - h_4(t)cos\omega) + \frac{\partial h_5(\lambda,t)}{\partial\lambda} \quad (B.46)$$

Y reemplazando (B.43) y (B.46) en la primera ecuación del sistema (B.38) :

$$cos^2\lambda\frac{1}{cos^2\lambda}(h_3(t)sen\omega - h_4(t)cos\omega) + cos^2\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}h_5(\lambda,t) + (-h_3(t)sen\omega + h_4(t)\ cos\omega) = 0$$

$$h_3(t)sen\omega - h_4(t)cos\omega + cos^2\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}h_5(\lambda,t) - h_3(t)sen\omega + h_4(t)\ cos\omega = 0$$

$$cos^2\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}h_5(\lambda,t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}h_5(\lambda,t) = 0 \quad (B.47)$$

es decir sea que h_5 es tan solo función del tiempo: $h_5 = h_5(t)$, con lo cual (B.45) queda:

$$f_2(\omega, \lambda, t) = \frac{sen\lambda}{cos\lambda}[-h_3(t)sen\omega + h_4(t)cos\omega] + h_5(t) \tag{B.48}$$

Con esto tenemos todo lo necesario para determinar la dependencia explicita de las funciones generadoras con las coordenadas, pues:

reemplazando (B.26) y (B.37) en (B.17) resulta:

$$R_r = \frac{1}{2}r\,\dot{T}(t) + [h_1(t)cos\omega + h_2(t)sen\omega]cos\lambda + g_2(t)sen\lambda \tag{B.49}$$

reemplazando (B.24) , (B.37) y (B.48) en (B.18) se obtiene:

$$R_\omega = \frac{1}{rcos\lambda}[(-h_1(t)cos\omega + h_2(t)sen\omega)\,] + \frac{sen\lambda}{cos\lambda}[-h_3(t)sen\omega + h_4(t)cos\omega] + h_5(t) \tag{B.50}$$

Y reemplazando (B.26), (B.37) y (B.43) en (B.19) se obtiene que:

$$R_\lambda = \frac{1}{r}[-(h_1(t)cos\omega + h_2(t)sen\omega)sen\lambda + g_2(t)\,cos\lambda\,] + (h_3(t)cos\omega + h_4(t)sen\omega) \tag{B.51}$$

Esto completa la dependencia explicita de las funciones generadoras con las coordenadas espaciales.

Para verificar que son soluciones basta con reemplazarlas en el sistema, más precisamente en las ecuaciones del sistema que no contienen al Gauge, ya que fueron obtenidas a partir de dichas ecuaciones.

La dependencia con el tiempo se obtiene relacionando las ecuaciones que contienen el Gauge a través de las derivadas segundas cruzadas de esta función, que suponemos que son iguales cualquiera sea el par de variables consideradas.

Por ejemplo si comenzamos derivando la ecuación (f) respecto del tiempo obtenemos que:

$$m\frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} + + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t\partial r} = \frac{\partial^2 G}{\partial t\partial r} \tag{B.52}$$

Y derivando la Ecuación (j) respecto de r :

$$-\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\frac{\partial R_\omega}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial r\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial r\partial t} \quad . \tag{B.53}$$

Restando las Ecuaciones (B.52) y (B.53) se tiene:

$$m\frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} + \frac{q}{c}\frac{M}{r}(cos^2\lambda - 1)\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t\partial r} + \frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\frac{\partial R_\omega}{\partial t} = 0 \tag{B.54}$$

Por otro lado, derivando (B.49) dos veces respecto al tiempo resulta:

$$\frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} = \frac{1}{2}r\dddot{T}(t) + \left[\left(\ddot{h}_1(t)cos\omega + \ddot{h}_2(t)sen\omega\right)cos\lambda + \ddot{g}_2(t)sen\lambda\right] \tag{B.55}$$

Y derivando (B.50) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial t} = \frac{1}{r\,cos\lambda}\left(-\dot{h}_1(t)sen\omega + \dot{h}_2(t)cos\omega\right) + \frac{sen\lambda}{cos\lambda}\left[\dot{h}_3(t)sen\omega - \dot{h}_4(t)cos\omega\right] + \dot{h}_5(t) \tag{B.56}$$

A continuación derivamos respecto a r:

$$\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial t \partial r} = -\frac{1}{r^2\, cos\lambda}\left(-\dot{h}_1(t)sen\omega + \dot{h}_2(t)cos\omega\right) \qquad \text{(B.57)}$$

Reemplazando (B.55), (B.56) y (B.57) en (B.54) y después de algunas simplificaciones y de agrupar según las potencias de r, se llega a lo siguiente:

$$mr\dddot{T}(t) + m\left[\left(\ddot{h}_1(t)cos\omega + \ddot{h}_2(t)sen\omega\right)cos\lambda + \ddot{g}_2(t)sen\lambda\right] + \frac{q}{c}\frac{M}{r^3}\frac{(sen^2\lambda+1)}{cos\lambda}\left(-\dot{h}_1(t)sen\omega + \dot{h}_2(t)cos\omega\right) + \frac{q}{c}\frac{M}{r^2 cos\lambda}\left[sen\lambda\left[\dot{h}_3(t)sen\omega - \dot{h}_4(t)cos\omega\right] + \dot{h}_5(t)cos\lambda\right] = 0 \qquad \text{(B.58)}$$

Y de nuevo, como ocurrió con las velocidades cuando obtuvimos el sistema de ecuaciones, esta expresión debe valer para todo r y por lo tanto se debe cumplir que:

$$\dddot{T}(t) = 0 \Rightarrow T = a_2t^2 + a_1t + a_0 \qquad \text{(B.59)}$$

$$-\dot{h}_1(t)sen\omega + \dot{h}_2(t)cos\omega = 0 \qquad \text{(B.60)}$$

$$\left(\ddot{h}_1(t)cos\omega + \ddot{h}_2(t)sen\omega\right)cos\lambda + \ddot{g}_2(t)sen\lambda = 0 \qquad \text{(B.61)}$$

$$sen\lambda\left[\dot{h}_3(t)sen\omega - \dot{h}_4(t)cos\omega\right] + \dot{h}_5(t)cos\lambda = 0\ . \qquad \text{(B.62)}$$

Como $sen\omega$ y $cos\omega$ son funciones linealmente independientes (B.60) solo se puede cumplir si:

$$\dot{h}_1(t) = \dot{h}_2(t) = 0 \Rightarrow h_1\ y\ h_2\ son\ constantes \qquad \text{(B.63)}$$

Con lo que (B.61) queda :

$$\ddot{g}_2(t) = 0 \qquad \text{(B.64)}$$

Es decir que:

$$g_2(t) = b_1t + b_0 \quad . \qquad \text{(B.65)}$$

Y como $sen\lambda$ y $cos\lambda$ son linealmente independientes de (B.62) sigue que:

$$\dot{h}_3(t)sen\omega - \dot{h}_4(t)cos\omega = 0 \qquad \text{(B.66)}$$

$$\dot{h}_5(t) = 0\ . \qquad \text{(B.67)}$$

De donde sigue que h_3, h_4 y h_5 también son constantes. O sea que todas las h son constantes.

Entonces con (B.59) y (B.65) en (B.49) la función generatriz radial queda:

$$R_r = \frac{1}{2}r\,(2a_2t + a_1) + \left[(h_1cos\omega + h_2sen\omega)cos\lambda + (b_1t + b_0)sen\lambda\right]\ . \qquad \text{(B.68)}$$

Y por otra parte teniendo en cuenta que todas las h son constantes, las expresiones de las funciones generatrices angulares (B.50) y (B.51) toman la forma siguiente:

$$R_\omega = \frac{1}{rcos\lambda}(-h_1sen\omega + h_2cos\omega) + \frac{sen\lambda}{cos\lambda}\left[h_3sen\omega - h_4cos\omega\right] + h_5 \qquad \text{(B.69)}$$

$$R_\lambda = \frac{1}{r}\left[-(h_1cos\omega + h_2sen\omega)sen\lambda + (b_1t + b_0)\,cos\lambda\,\right] + (h_3cos\omega + h_4sen\omega). \qquad \text{(B.70)}$$

Como se puede apreciar $\partial R_\omega/\partial$t=0, con lo cual de la ecuación (j) se obtiene:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0\,. \qquad \text{(B.71)}$$

O sea que el Gauge tampoco depende del tiempo, y además la ecuación (e) se reduce a:

$$-\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}cos^2\lambda\, R_r + \frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} - 2\frac{q}{c}\frac{M}{r}\cos\lambda\, sen\lambda\, R_\lambda - \frac{\partial G}{\partial \omega} = 0 \quad . \qquad \text{(B.72)}$$

Y ahora derivamos esta ecuación (B.72) respecto al tiempo (teniendo en cuenta lo anterior, es decir que ni R_ω ni G dependen del tiempo). Esto resulta en:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial R_r}{\partial t}\cos\lambda - 2\frac{\partial R_\lambda}{\partial t}sen\lambda = 0 \qquad \text{(B.73)}$$

Pero de (B.68) y (B.70) tenemos que:

$$\frac{\partial R_r}{\partial t} = a_2 r + b_1 sen\lambda \qquad \text{(B.74)}$$

$$\frac{\partial R_\lambda}{\partial t} = \frac{1}{r}b_1 cos\lambda \qquad . \qquad \text{(B.75)}$$

Reemplazando (B.74) y (B.75) en (B.73) se tiene:

$$\frac{1}{r}(a_2 r + b_1 sen\lambda)\cos\lambda + 2\frac{1}{r}b_1 cos\lambda sen\lambda = 0$$

$$a_2 + 3b_1\frac{1}{r}sen\lambda = 0\ . \qquad \text{(B.76)}$$

Ésta última ecuación se puede verificar para cualquier r y cualquier λ solo si se cumple que:

$$a_2 = b_1 = 0 \qquad \text{(B.77)}$$

Por esto la función generatriz del tiempo (B.59) se reduce a:

$$T = a_1 t + a_0 \qquad \text{(B.78)}$$

Y las funciones generatrices espaciales (B.68), (B.69) y (B.69) quedan:

$$R_r = \frac{1}{2}r\, a_1 + [(h_1 cos\omega + h_2 sen\omega)cos\lambda + b_0 sen\lambda] \qquad \text{(B.79)}$$

$$R_\omega = \frac{1}{rcos\lambda}(-h_1 sen\omega + h_2 cos\omega) + \frac{sen\lambda}{cos\lambda}[h_3 sen\omega - h_4 cos\omega] + h_5 \qquad \text{(B.80)}$$

$$R_\lambda = \frac{1}{r}[-(h_1 cos\omega + h_2 sen\omega)sen\lambda + b_0\, cos\lambda\,] + (h_3 cos\omega + h_4 sen\omega) \qquad \text{(B.81)}$$

Es decir que ninguna de las tres funciones generatrices espaciales depende del tiempo. Esto implica que las Ecuaciones (d) y (f) del sistema a resolver se reducen a:

$$\frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{(B.82)}$$

$$\frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial R_\omega}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \qquad \text{(B.83)}$$

Si derivamos (B.82) respecto a r y (B.83) respecto a λ, y luego restamos (teniendo en cuenta que las derivadas segundas cruzadas de G son iguales) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda}cos^2\lambda+\frac{q}{c}\frac{M}{r}\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial r\partial \lambda}cos^2\lambda+\frac{q}{c}\frac{M}{r}\frac{\partial R_\omega}{\partial r}2\cos\lambda\, sen\lambda\ -\frac{q}{c}\frac{M}{r}cos^2\lambda\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial r\partial \lambda}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda}\cos\lambda\ +2\frac{\partial R_\omega}{\partial r}\ sen\lambda\ =0\ . \tag{B.84}$$

Por otro lado, de (B.80) y (B.81) se tiene que:

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial \lambda}=\frac{sen\lambda}{rcos^2\lambda}(-h_1 sen\omega+h_2 cos\omega)+\frac{1}{cos^2\lambda}[h_3 sen\omega-h_4 cos\omega] \tag{B.85}$$

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial r}=-\frac{1}{r^2\, cos\lambda}(-h_1(t)sen\omega+h_2(t)cos\omega). \tag{B.86}$$

Reemplazando (B.85) y (B.86) en (B.84) se tiene que:

$$\frac{1}{r^2}\frac{sen\lambda}{cos\lambda}(-h_1 sen\omega+h_2 cos\omega)+\frac{1}{rcos\lambda}(h_3 sen\omega-h_4 cos\omega)-\frac{2sen\lambda}{r^2\, cos\lambda}(-h_1(t)sen\omega+h_2(t)cos\omega)\ \ =0$$

$$-\frac{1}{r}sen\lambda(-h_1 sen\omega+h_2 cos\omega)+(h_3 sen\omega-h_4 cos\omega)=0. \tag{B.87}$$

Como esta ecuación debe valer para todo r y todo λ la única posibilidad es que:

$$-h_1 sen\omega+h_2 cos\omega=0 \tag{B.88}$$

$$h_3 sen\omega-h_4 cos\omega=0 \tag{B.89}$$

De donde sigue que:

$$h_1=h_2=h_3=h_4=0. \tag{B.90}$$

Con lo cual las ecuaciones (B.79), (B.80) y (B.81) de las funciones generatrices se reducen a:

$$R_r=\frac{1}{2}r\, a_1+b_0\, sen\lambda \tag{B.91}$$

$$R_\omega=h_5 \tag{B.92}$$

$$R_\lambda=\frac{1}{r}b_0\, cos\lambda\ . \tag{B.93}$$

Y con (B.91), (B.92) y (B.93) en (e) sigue que:

$$-\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}cos^2\lambda\left(\frac{1}{2}r\, a_1+b_0 sen\lambda\right)-2\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\, b_0\cos^2\lambda\, sen\lambda\ -\frac{\partial G}{\partial\omega}=0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{q}{c}\frac{M}{r}\, a_1 cos^2\lambda-\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}b_0 sen\lambda cos^2\lambda-2\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\, b_0\cos^2\lambda\, sen\lambda\ -\frac{\partial G}{\partial\omega}=0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{q}{c}\frac{M}{r}\, a_1 cos^2\lambda-3\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\, b_0\cos^2\lambda\, sen\lambda\ -\frac{\partial G}{\partial\omega}=0\ . \tag{B.94}$$

Y si ahora derivamos respecto a r resulta:

$$\frac{1}{2}\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\, a_1 cos^2\lambda+6\frac{q}{c}\frac{M}{r^3}\, b_0\cos^2\lambda\, sen\lambda\ -\frac{\partial^2 G}{\partial r\partial\omega}=0\ . \tag{B.95}$$

Pero por otra parte como de (B.91) y (B.92) se tiene $\frac{\partial R_r}{\partial t} = 0\ \ y\ \frac{\partial R_\omega}{\partial r} = 0$, de la ecuación (f) sigue que $\frac{\partial G}{\partial r} = 0$. Entonces $\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \omega} = 0$, por lo que la ecuación (B.95) queda:

$$\frac{1}{2}\frac{q}{c}\frac{M}{r^2}\ a_1 cos^2\lambda + 6\frac{q}{c}\ \frac{M}{r^3}\ b_0 \cos^2\lambda\ sen\lambda\ = 0$$

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{6}{r}b_0\ sen\lambda\ = 0 \quad . \tag{B.96}$$

Y, de nuevo, como esto debe valer para todo r y para todo λ tenemos que:

$$a_1 = b_0 = 0 \tag{B.97}$$

Con lo que las ecuaciones(B.78) , (B.91) , (B.92) y (B.93) de las funciones generatrices se reducen a:

$$T = a_0 \tag{B.98}$$

$$R_r = 0 \tag{B.99}$$

$$R_\omega = h_5 \tag{B.100}$$

$$R_\lambda = 0 \quad . \tag{B.101}$$

Con esto las ecuaciones (d), (e), y (f) se reducen entonces a:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial \omega} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial r} = 0\ .$$

O sea que el Gauge no depende de ninguna variable espacial, y como se demostró antes que G tampoco depende del tiempo, entonces G es una constante:

$$G = constante = G_0 \tag{B.102}$$

Apéndice C: Las simetrías del Hamiltoniano

En general cuando tenemos una transformación canónica el nuevo Hamiltoniano,que usualmente se designa con la letra K, no se obtiene por sustitución directa de la viejas variables por las nuevas; es decir que en general

$$K(Q_j, P_j, t) \neq H(Q_j, P_j, t) \qquad \text{(C.1)}$$

Sin embargo, como veremos a continuación, cuando sí se puede obtener el nuevo Hamiltoniano por sustitución directa de las nuevas variables por las viejas variables, *hay una relación muy importante entre la función generatriz de la transformación canónica y las cantidades conservadas del sistema.*

En forma más precisa tenemos que, dada la transformación Canónica:

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q_i, p_i, t) \\ P_j = P_j(q_i, p_i, t) \end{cases} \qquad \text{(C.2)}$$

se dice que es una simetría del Hamiltoniano si el Hamiltoniano en las nuevas variables $K(Q_j, P_j, t)$ mantiene la misma relación funcional que en las viejas variables, a menos de una función del tiempo, es decir que :

$$K(Q_j, P_j, t) = H(Q_j, P_j, t) + f(t) \qquad \text{(C.3)}$$

Ejemplo:

El Hamiltoniano de un oscilador armónico:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \qquad \text{(C.4)}$$

Es invariante , en el sentido antes mencionado, bajo la transformación canónica que intercambia momentos por velocidades:

$$Q = \frac{p}{m\omega} \qquad \text{(C.5)}$$

$$P = -m\omega q \qquad \text{(C.6)}$$

En efecto si tenemos en cuenta que la relación entre $K \; y \; H$ es tal que:

$$\frac{\partial K(q,p,t)}{\partial q} = \{Q, P\}_{(t,q)} + \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \qquad \text{(C.7)}$$

$$\frac{\partial K(q,p,t)}{\partial p} = \{Q, P\}_{(t,q)} + \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p} \qquad \text{(C.8)}$$

Se deduce en forma inmediata que si en las ecuaciones de la transformación canónica no interviene el tiempo (como ocurre en este caso) y, por lo tanto $\{Q, P\}_{(t,q)} = 0$, se tiene que:

$$K(q, p, t) = H(q, p, t) + f(t) \qquad \text{(C.9)}$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo.

Por lo tanto de (C.4) y (C.9) sigue que:

$$K(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + f(t) \qquad \text{(C.10)}$$

Reemplazando (C.5) y (C.6) en (C.10) se llega a:

$$K(Q,P,t) = \frac{(m\omega Q)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(-\frac{P}{m\omega}\right)^2 + f(t)$$

$$K(Q,P,t) = \frac{1}{2}\omega^2 Q^2 + \frac{P^2}{2m} + f(t)$$

$$K(Q,P,t) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2 + f(t) \qquad \text{(C11)}$$

Es decir que se cumple que:

$$K(Q,P,t) = H(Q,P,t) + f(t)$$

que es la condición dada por (C.3) para una simetría del Hamiltoniano.

También podríamos imaginar un conjunto de transformaciones canónicas que dependan de un parámetro.Por ejemplo, la siguiente transformación:

$$Q = qe^s - \frac{p}{m}t(e^s - e^{-s}) \qquad \text{(C.12)}$$

$$P = pe^{-s} \qquad \text{(C.13)}$$

es una trasformación canónica (como se puede comprobar calculando los corchetes de Poisson) cuyo Hamiltoniano en las nuevas variables es:

$$K = H - \frac{P^2}{2m}(e^{2s} - 1) + f(t,s) \quad . \qquad \text{(C.14)}$$

Naturalmente que el nuevo Hamiltoniano también depende del parámetro s.

En términos generales una transformación canónica uni-paramétrica vendrá dada por un conjunto de ecuaciones del tipo:

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q_i, p_i, t, s) \\ P_j = P_j(q_i, p_i, t, s) \end{cases} \qquad \text{(C.15)}$$

las cuales se reducne a la identidad para $s = 0$. Es decir que:

$$\begin{cases} Q_j(q_i, p_i, t, s = 0) = q_j \\ P_j(q_i, p_i, t, s = 0) = p_j \end{cases} \qquad \text{(C.16)}$$

Por otro parte toda transformación canónica implica la existencia de una función generatriz, que en el caso de ser una función de tipo 1 cumple con la siguiente ecuación diferencial:

$$(-Hdt + \sum p_i dq_i) - (-Kdt + \sum P_i dQ_i) = dF_1 \qquad \text{(C17)}$$

En la ecuación diferencial dada por (C17) resulta que K, P_i, Q_i como así también F_1 dependerán del parámetro s lo que no ocurre con H ni con las p_i y las q_i. Entonces si derivamos (C17) respecto a s tenemos que:

$$\frac{\partial K}{\partial s}dt + \sum\left(-\frac{\partial P_i}{\partial s}dQ_i - P_i\frac{\partial(dQ_i)}{\partial s}\right) = \frac{\partial(dF_1)}{\partial s} \quad . \tag{C.18}$$

Como para $s = 0$ transformación se reduce a la identidad resulta que, bajo ese supuesto se verifica que:

$$dQ_i = dq_i \tag{C.19}$$

$$P_i = p_i \tag{C.20}$$

con lo cual (C.18) queda:

$$\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} dt + \sum\left(-\left.\frac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{s=0} dq_i - p_i d\left(\left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0}\right)\right) = d\left(\left.\frac{\partial F_1}{\partial s}\right|_{s=0}\right). \tag{C.21}$$

Sumando y restando en el primer término de ésta ecuación la cantidad $\left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} dp_i$:

$$\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} dt + \sum\left(-\left.\frac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{s=0} dq_i + \left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} dp_i - p_i d\left(\left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0}\right) - \left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} dp_i\right) = d\left(\left.\frac{\partial F_1}{\partial s}\right|_{s=0}\right)$$

$$\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} dt + \sum\left(-\left.\frac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{s=0} dq_i + \left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} dp_i - d\left(p_i\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right)\right) = d\left(\left.\frac{\partial F_1}{\partial s}\right|_{s=0}\right)$$

Y reagrupando:

$$\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} dt + \sum\left(-\left.\frac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{s=0} dq_i + \left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} dp_i\right) = d\left(\left.\frac{\partial F_1}{\partial s}\right|_{s=0} + \sum p_i\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right) \tag{C.22}$$

Esto significa que existe una función cuyo diferencial está en el segundo miembro de esta ecuación:

$$G = \left.\frac{\partial F_1}{\partial s}\right|_{s=0} + \sum p_i\frac{\partial Q_i}{\partial s} \tag{C.23}$$

y que se relaciona con las transformaciones uni-paramétricas a través de las derivadas respecto al parámetro s en la forma :

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = -\left.\frac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{s=0} \tag{C.24}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} \tag{C.25}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} \quad . \tag{C.26}$$

Lo interesante de esta función G radica en su derivada total, dada por:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) \quad . \tag{C.27}$$

Ésta ecuación se pude reformular teniendo en cuenta las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{C.28}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}\,. \tag{C.29}$$

Con lo cual, reemplazando (C.28) y (C.29) en (C.27) :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right). \tag{C.30}$$

Si ahora empleamos las relaciones,entre las derivadas parciales de G y las ecuaciones de transformación , es decir (C.24) , (C.25) y (C.26) , en (C.30) se tiene que :

$$\frac{dG}{dt} = \left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} - \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\left.\frac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{s=0} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\left.\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0}\right)\ . \tag{C.31}$$

Por otro lado si en la expresión del Hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$ reemplazamos directamente las viejas variables por las nuevas obtenemos la función tenemos:

$$H = H\left[Q_j(q_i, p_i, t, s), P_j(q_i, p_i, t, s), t\right]\ . \tag{C.32}$$

Ésta función en general **<u>no es el Hamiltoniano</u>**, <u>ni en las viejas ni en las nuevas variables</u>, pues el Hamiltoniano en las viejas variables ni siquiera depende de s.

Pero de todos modos es una función implícita del parámetro s cuya derivada parcial respecto a dicho parámetro es :

$$\frac{\partial H[Q_j(q_i,p_i,t,s),P_j(q_i,p_i,t,s),t]}{\partial s} = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial P_i}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right). \tag{C.33}$$

Que, particularizada para $s = 0$, es justamente la sumatoria del segundo miembro de la ecuación (C.31) , la cual queda:

$$\frac{dG}{dt} = \left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} - \left.\frac{\partial H[Q_j(q_i,p_i,t,s),P_j(q_i,p_i,t,s),t]}{\partial s}\right|_{s=0} \tag{C.34}$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial}{\partial s}\left[K - H\left[Q_j(q_i, p_i, t, s), P_j(q_i, p_i, t, s), t\right]\right]\Big|_{s=0}. \tag{C.35}$$

Esto en general no es cero, porque en general $K \neq H\left[Q_j(q_i, p_i, t, s), P_j(q_i, p_i, t, s), t\right]$.

<u>Pero en el caso de que la trasformación sea una simetría del Hamiltoniano en el sentido en que la hemos definido aquí sí que es cero.</u>

Por lo tanto, cuando hay una simetría (y solo en ese caso) tenemos que:

$$\frac{dG}{dt} = 0\ . \tag{C.36}$$

<u>Es decir que cuando la trasformación es una simetría, entonces la función G es una constante de movimiento.</u>

La función G suele denominarse "función generatriz" de la transformación canónica uni-paramétrica lo cual puede inducir a confusiones con la función F_1 que también recibe el nombre generatriz o generadora. Sin embargo, son conceptos totalmente distintos aunque relacionados entre sí por el hecho de que en la definición de G figura F_1 (ver ecuación(C.23))

En un análisis más profundo y detallado se puede demostrar que para cada simetría del hamiltoniano hay una cantidad conservada del sistema, y recíprocamente para cada cantidad conservada del sistema hay una simetría del Hamiltoniano (Torres del Castillo, 2018).

Esto hace que el enfoque Hamiltoniano sea más "prolijo" que el enfoque Lagrangiano en el cual se pueden obtener cantidades conservadas que no son independientes entre sí, lo cual es redundante, o que el Lagrangiano no tenga simetrías a pesar de que existan cantidades conservadas.

Bibliografia y Referencias

Almeida, M.A., C. Moreira & H. Yoshida (1992). On the non-integrability of the Stormer problem, Journal of Physics A: Mathematical and General, 25, 227-230.

Biswas, S. (2000). Cosmic Perspectives in Space Physics, Springer, Netherlands.

Bittencourt, J. A. (2004) Fundamentals of Plasma Physics Third ed. Springer Science.

Braun, M. (1981). Mathematical Remarks on the Van Allen Radiation Belt: A Survey of Old and New Results, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) Review, 23, 61.

Bozidar, J. (2008). Symmetries and Integrability, Publications de l'Institut Mathematique

Nouvelle Serie, tome 84(98) (2008), 1–36

Chen, F.F. (1974) Introduction to Plasma Physics, 1st Edition, Plenum Press New York

Comedi, E.S. (2021), Efecto de las variaciones seculares del campo geomagnético en el ingreso de partículas cargadas a la atmósfera, Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán, Marzo 2021.

Comedi, E.S., A.G. Elias & B.S. Zossi (2020). Spatial features of geomagnetic cutoff rigidity secular variation using analytical approaches, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 211, 105475.

Contopoulos, G. & L. Vlahos (1975). Integrals of motion and resonances in a dipole magnetic field, Journal of Mathematical Physics, 16, 1469-1474.

Dragt, A. J. & Finn, J. M. (1976). Insolubility of trapped particle motion in a magnetic dipole field, Journal of Geophysical Research, 81, 2327– 2340.

Dullin, H.R., M. Horanyi & J.E. Howard (2002). Generalizations of the Störmer Problem for Dust Grain Orbits, Physica D: Nonlinear Phenomena, 171, 178–195.

Goldstein, H., C.P. Poole & J.L. Safko (2002). Classical Mechanics, 3era Edición, Pearson Education, Inc., Addison-Wesley, Estados Unidos.

Iñarrea, M., V. Lanchares, J.F. Palacian, A.I. Pascual, J.P. Salas, & P. Yanguas (2012). Influence of planetary oblateness on Keplerian dynamics in magnetospheres and existence of invariant tori, Physica D: Nonlinear Phenomena, 241, 1026-1042.

Kallinikos, N. (2016). Dynamics of Charged Particles in Electromagnetic Fields with Applications in Fusion Devices, PhD Thesis. https://www.astro.auth.gr/documents/diplomas_PhD/Kallinikos-PhD-Thesis.pdf

Kordon, F. (2014). Sistemas Hamiltonianos: Integrabilidad y Simetrías Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Matemática.

Lemos, N.A. (2007). Mecanica Analitica, 2da Edición. Livraria da Fisica Editora, Brasil.

Ozturk, M.A. (2012). Trajectories of charged particles trapped in Earth's magnetic field, American Journal of Physics 80, 420.

Rowe, D.E. (2021). Emmy Noether – Mathematician Extraordinaire

Shebalin, J.V. (2004). Störmer regions for axisymmetric magnetic multipole fields, Physics of Plasmas 11, 3472-3482.

Störmer, C. (1907). Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales, Archives des Sciences Physiques et Naturelles, 24, 5– 18, 113–158, 221–247, 317–364.

Störmer, C. (1930). Twenty-five years' work on the polar aurora, Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, 35, 193– 208.

Störmer, C. (1955). The polar aurora, Oxford Clarendon Press, London.

Torres del Castillo, G.F., C. Andrade Mirón & R.I. Bravo Rojas (2013). Variational symmetries of Lagrangians, Revista Mexicana de Física E, 59, 140-147.

Torres del Castillo, G.F. & A. Moreno-Ruiz (2017). Symmetries of the equations of motion that are not shared by the Lagrangian. arXiv:1705.08446.

Torres del Castillo, G.F. (2018). An Introduction to Hamiltonian Mechanics, Springer International Publishing,

Tsareva, O.O. (2019). Generalization of Störmer theory for an axisymmetric superposition of dipole and quadrupole fields. Journal of Geophysical Research, 124, 2844– 2853.

Urban, E.W. (1965). Critical Störmer conditions in quadrupole and double ring-current fields, Journal of Mathematical Physics, 6, 1966-1975.

(1.2)