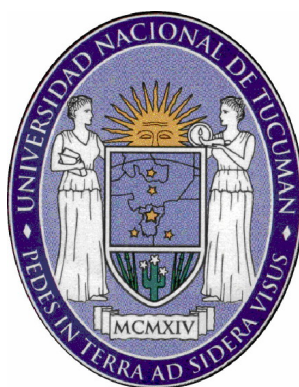


ESTUDIO DE LA INFLACIÓN COSMOLÓGICA COMO UN MECANISMO ENTRÓPICO

ABACA, FACUNDO MÁXIMO



TESIS DE LICENCIATURA
LICENCIATURA EN FÍSICA.
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA.
UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN.
TUCUMÁN, ARGENTINA.

November 2023

Supervisor: Dr. Zamora Darío Javier
Co-Supervisora: Dr. Marta Maria Zossi

A mi familia.

A mis amigos.

Agradecimientos

Esta tesis es la culminación de mis primeros cinco años de estudios en física, el cual refleja mi formación científica, que se construyó gracias a la guía, apoyo, inspiración, y contención que me brindaron muchas personas, sin las cuales no hubiera sido capaz llegar hasta aquí.

En primer lugar, quiero agradecer al Estado Argentino por la universidad pública y gratuita, en particular al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas, de la Universidad Nacional de Tucumán, por el lugar que me brindó para realizar este trabajo de Tesis, y porque me permitieron recorrer este camino y conocer a las personas que me marcaron para siempre, tanto en el ámbito personal como académico. Le deseo a todos los estudiantes de esta carrera una experiencia tan grata como la mía. Al Consejo Interuniversitario Nacional (CIN) por la Beca otorgada en el marco de las Becas de Estímulo a las Vocaciones Científicas (Becas EVC – CIN) para hacer investigación en el tema de este trabajo de Tesis.

Un agradecimiento enorme para Javier, por ser mi guía en esta primera experiencia como investigador, por la propuesta de un tema tan interesante que me atrapo desde el primer momento, también por sus enseñanzas, sus consejos y sobre todo por generar un ambiente de trabajo que me hacía sentir cómodo y en confianza.

Agradecer a todos los docentes que me brindaron su valioso tiempo en las clases, y que me enseñaron la pasión por compartir el conocimiento con paciencia y humildad. Especialmente a Georgina por ser muy influyente en mi formación, por siempre darme una mano en el desarrollo de mi vida académica y por llevarme a conocer a Javier; de igual manera a Blas por ser un gran profesor y un mejor amigo en estos últimos años, y por estar siempre dispuesto a ofrecer un lugar de trabajo y entretenimiento, muy necesario para la supervivencia en la vida universitaria.

A mis amigos que me apoyaron en mis decisiones y me acompañaron en cada momento complicado. Sobre todo agradecer a mis compañeros y amigos de la facultad, a los que estuvieron conmigo desde los primeros años; gracias por los momentos compartidos, ustedes fueron de gran ayuda para adaptarme a la vida universitaria. También agradecer a los que conocí en estos últimos dos años, siempre es lindo ser incluido en un nuevo grupo, y en especial en uno tan particular como el de ustedes; su compañía fue de gran ayuda para conseguir fuerzas para terminar con la carrera, y sus personas una gran inspiración para mejorar en lo personal y en lo académico.

En particular quiero agradecer a Juan Pablo, José, y Santiago, pasamos mas de miles de horas juntos, en las que compartimos un montón de momentos lindos, de mas esta decir lo mucho que fueron de ayuda para que llegue a esta instancia; me gustaría seguir pasando tanto tiempo con ustedes, pero la vida nos separa por el bien de la trama.

Por último agradecer a mi familia, a mis abuelos, tíos, primos y sobrinos; pero sobre todo a mi familia cercana. A mi hermanastro y mi padrastro por llegar a mi vida en estos últimos años y aportar felicidad a mi casa y a mi mamá. A mi papá por cuidarme y educarme en mi juventud, y por siempre estar para mí en la adolescencia, y adultez, guiándome desde cerca, pero a su vez dejándome espacio para crecer. A mi hermana por el apoyo y el cariño incondicional, pero sobre todo, por ser el ejemplo claro de que a pesar de las dificultades se puede formar una familia y a la vez llegar lejos como profesional.

Agradecer a mi hermano, por ser la persona más importante para el desarrollo de mis últimos cinco años; sin tus enseñanzas y tu compañía no podría haberme adaptado a la vida universitaria y sobre todo a la vida en la ciudad, con tu ayuda es todo más fácil y aunque no lo parezca muchas veces disfruto de tu compañía.

Para finalizar, obviamente agradecer a la persona mas importante de mi vida, a mi mamá. Todas las cosas que conseguí y que voy a conseguir en el transcurso de mi vida son gracias a vos, no solo por todo el tiempo y esfuerzo que dedicaste hacia mi crianza, hacia la casa, y hacia mis hermanos; sino también porque sos mi mayor ejemplo a seguir como persona. Me demostraste que cualquier dificultad queda chica cuando uno hace algo con amor, y me enseñaste que lo mas importante es ser buena persona con los demás; si hoy soy alguien en la vida es gracias a vos.

Índice general

	II
Agradecimientos	III
Abreviaturas	XI
Constantes	XII
Símbolos	XIII
Resumen	XIV
1. Introducción a la cosmología relativista	1
1.1. Relatividad General	4
1.1.1. El principio de equivalencia	4
1.1.2. Conceptos de la Relatividad	7
1.1.3. Termodinámica de agujeros negros	11
1.2. Cosmología relativista	16
1.2.1. Principios de la Cosmología Relativista	16
1.2.2. Geometría del espacio-tiempo y la métrica FRW	19
1.2.3. Ecuaciones de Friedmann	22
1.2.4. La ley de Hubble y el corrimiento al rojo	24
1.3. Modelo Λ -CDM	29
1.3.1. Predicciones del modelo Λ -CDM	30
2. Cosmología entrópica	35
2.1. Conceptos relevantes para los modelos de cosmología entrópica . .	37
2.1.1. La esfera de Hubble	37

2.1.2.	Fuerza entrópica	39
2.1.3.	Entropía no aditiva	40
2.2.	Entropía y temperatura termodinámicamente consistentes	42
2.3.	Modelos cosmológicos de entropía con escalamiento arbitrario	44
2.3.1.	Ecuaciones de Friedmann con término de fuerza entrópica	45
2.3.2.	Soluciones de las ecuaciones de Friedmann	46
2.4.	Modelos con un término subdominante y sus soluciones	48
2.4.1.	Análisis del parámetro de desaceleración dependiente de t	50
3.	Datos	52
3.1.	Distancia propia y Distancia lumínica	52
3.2.	Estrellas Cefeidas como candelas estándar	57
3.3.	Supernovas tipo Ia como candelas estándar	59
3.4.	El sistema de 'Magnitud'	61
4.	Resultados	63
4.1.	Universo compuesto solo de radiación	64
4.1.1.	Análisis de la dependencia de q con el parámetro de Hubble H	66
4.1.2.	Análisis de la dependencia de q con el tiempo	69
4.1.3.	Comparación con el modelo Λ -CDM	72
4.1.4.	Ajuste con los datos de supernovas Ia	75
4.2.	Universo compuesto de radiación y materia no relativista	80
4.2.1.	Ecuaciones de Friedmann para un universo multi-componente	80
4.2.2.	Derivación de las ecuaciones diferenciales	82
4.2.3.	Porcentaje de cada contenido.	85
4.2.4.	Comparación con el modelo Λ -CDM	86
4.2.5.	Comparación con los datos de supernovas tipo Ia	88
5.	Conclusiones	93
5.1.	Recapitulación de los objetivos	93
5.2.	Resumen de los resultados	94
5.2.1.	Universo compuesto de radiación	94
5.2.2.	Universo multicomponente	96
5.3.	Implicaciones de los resultados	98
5.4.	Limites de los resultados	100
5.5.	Futuras investigaciones	101

A. Función Hipergeométrica Gaussiana	103
B. Desarrollo de las ecuaciones	104
B.1. Entropía con escalamiento arbitrario	104
B.1.1. Parámetro de desaceleración	105
B.1.2. Ecuaciones con entropía y término subdominante	105
B.1.3. Obtención del Parámetro de desaceleración	106
C. Ecuaciones diferenciales	108
C.1. Derivación de la ecuación diferencial de $H(t)$, de $H(a)$, de $H(z)$ y $a(t)$	108
C.1.1. Ecuación diferencial de $H(t)$	108
C.1.2. Ecuación diferencial de $H(a)$	110
C.1.3. Ecuación diferencial de $a(t)$	111
C.1.4. Ecuación diferencial de $H(z)$	111

Índice de tablas

1.1. Lista de componentes	33
1.2. Épocas importantes en la evolución del universo, según el modelo Λ -CDM	34
4.1. Ajustes de $a(t)$	73
4.2. Ajuste de los parámetros	77
4.3. Primer grupo de ajustes de $H(z)$	78
4.4. Segundo grupo de ajustes de $H(z)$	78
4.5. Valores de parámetros C_d , y $D_{d,\Delta}$ para $H(z)$, con $d - \Delta = -2$. .	90
4.6. Valores de parámetros C_d , y $D_{d,\Delta}$ para $H(z)$, con $d - \Delta = 1$. . .	91
4.7. Valores de parámetros C_d y $D_{d,\Delta}$ para $H(z)$, con $d - \Delta = 2$	92

Índice de figuras

1.1. Principio de equivalencia para campos gravitatorios constantes. . .	4
1.2. Principio de equivalencia para aceleraciones constantes.	5
1.3. Principio de equivalencia	6
1.4. Diagrama de cono de luz para uno y dos eventos	10
1.5. Cono de luz en RE- Cono de luz en RG - Horizonte de la RG . .	11
1.6. Diagrama de escalas del universo.	17
1.7. Radiación de fondo cósmico de microondas, la escala de colores representa las diferentes temperaturas. Gráfica extraída de (https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/wmap/current)	18
1.8. Gráfica de la relación entre el redshift y la distancia original de Edwin Hubble, notar que el eje vertical en realidad es cz en vez de z y las unidades están escritas en km cuando deberían estar en $\frac{km}{s}$ (E.Hubble, 1929).	25
1.9. Diagrama magnitud-desplazamiento z usado por el grupo SCP para estudiar la expansión del universo (M.Tafalla, 2014).	27
1.10. Ilustración de las diferentes etapas del universo bajo el modelo Λ -CDM. (https://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html) . .	29
1.11. Etapas de expansión según el modelo Λ -CDM	34
2.1. Diagrama del universo observable con una escala logarítmica. (https://www.instagram.com/thecelestialzoo)	38
3.1. Curva de luz esquemática de una supernova tipo Ia. En la figura se muestra a que elemento corresponde la luminosidad observada. (https://es.wikipedia.org/wiki/Supernova .)	60
4.1. Parámetro de desaceleración versus parámetro de Hubble H para cuatro diferentes valores de $C_d, D_{d,\Delta} = -0,0001, d = 3, \Delta = 1$. . .	67

4.2. Parámetro de desaceleración versus parámetro de Hubble H para cuatro diferentes valores de $D_{d,\Delta}$, $C_d = 2$, $d = 3$, $\Delta = 1$	68
4.3. q vs Z para diferentes valores de $d - \Delta$, $C_d = 1,5$, $D_{d,\Delta} = -0,004$	70
4.4. q vs z para tres diferentes valores de $D_{d,\Delta}$, $C_d = 1,5$, $d - \Delta = 1$	70
4.5. a vs z para tres diferentes valores de C_d , $d - \Delta = 1$, $D_{d,\Delta} = -0,004$	71
4.6. Ajuste 4 de $(a(t))$	73
4.7. Ajuste 5 de $(a(t))$	74
4.8. Ajuste 1 de $(a(t))$	74
4.9. Gráfica de magnitud vs z . Los círculos con las barras de errores son datos de supernovas tomados de [27]	77
4.10. Parámetro de Hubble H versus redshift z para tres diferentes modelos de fuerza entrópica. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de [28]	79
4.11. Comparación 1 del modelo Λ -CDM, con $d - \Delta = -2$	87
4.12. Comparación 2 del modelo Λ -CDM, con $d - \Delta = 2$	88
4.13. Comparación 1 de $H(z)$, con $d - \Delta = -2$ y $C_d = -0,5$. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de [28]	90
4.14. comparación 2 de $H(z)$, con $d - \Delta = 1$ y $C_d = 1$. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de (A.Pradhan, 2021)	91
4.15. comparación 3 de $H(z)$, con $d - \Delta = 2$ y $C_d = 1$. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de [28]	92

Abreviaturas

- **RG:** Relatividad General (General Relativity)
- **RE:** Relatividad Especial (Special Relativity)
- **MC:** Mecánica cuántica (quantum mechanics)
- **E-T:** Espacio-Tiempo (spacetime)
- **BH:** Agujero negro (Black Hole)
- **RS:** Corrimiento al rojo (Redshift)
- **CMB:** Radiación de fondo cósmico de microondas (Cosmic background radiation)

Constantes

- Velocidad de la luz: $c = 2,99792458 \times 10^8 \frac{m}{s}$.
- Constante de gravitación universal: $G = 6,67430 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg.s}$.
- Constante de Boltzmann: $K_B = 1,38064881 \times 10^{-23}$.
- Constante de Planck: $h = 6,62606957 \times 10^{-34} J.s$.
- Constante de Planck reducida: $\hbar = 1,05457182 \times 10^{-34}$.
- Longitud de Planck: $L_P = 1,61619997 \times 10^{-35} m$.
- Temperatura de Planck: $T_P = 1,4167911 \times 10^{32} K$.
- Fuerza de Planck: $F_P = 1,210027 \times 10^{44} N$.
- Constante de Hubble: $H_0 = 67,4 \left(\frac{\frac{km}{s}}{Mpc} \right)$

Símbolos

Símbolo	Significado
$g_{\mu\nu}$	Tensor de la métrica
$G_{\mu\nu}$	Tensor métrico de Einstein
$R_{\mu\nu}$	Tensor de curvatura de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía-momento
R	Escalar de curvatura de Ricci
ds	Distancia propia
O	observador
T	Temperatura absoluta
M	Masa
S	Entropía
S_{BH}	Entropía de un agujero negro
A_{HS}	Área del horizonte de sucesos
K	Parámetro de curvatura
a	Factor de escala
Λ	Constante cosmológica
ρ	Densidad de energía
P	Presión
ω	parámetro de la función de estado
z	Parámetro del Redshift
H	Parámetro de Hubble
q	Parámetro de desaceleración
F	Fuerza entrópica
S_δ	Entropía no aditiva
E	Energía interna
G	Energía libre de Gibbs
V	Volumen
μ	Potencial químico
r_H	Radio de Hubble
${}_2F_1(a, b, c; z)$	Función Hipergeométrica Gaussiana

Resumen

El modelo predominante de la cosmología moderna es el modelo Λ -Cold Dark Matter (Λ -CDM), el mismo es el más simple que se ajusta notablemente a los datos observacionales, tales como las observaciones de supernovas tipo Ia, el fondo cósmico de microondas y los cartografiados de galaxias. Sin embargo, este modelo posee varios puntos débiles. Uno de ellos es la postulación ad-hoc de una forma de energía, conocida como energía oscura, propuesta para explicar la causa de la expansión tardía del universo, el proceso por el cual el universo se encuentra en expansión acelerada. Esta postulación aunque es útil para lograr el ajuste del modelo con los datos observacionales, lleva a problemas conceptuales, como el problema de la coincidencia cósmica, o el problema de la constante cosmológica (S.Weinberg, 1989), (S.M.Carroll, 2001). Con el objetivo de abordar estas dificultades, varios modelos alternativos fueron propuestos (G.F.R. Ellis, 2012), (N.Komatsu, 2014), (J.Sola, 2013)

En esta tesis de Licenciatura se analizó un nuevo modelo alternativo para la explicación de la expansión tardía del universo, conocido por el nombre de cosmología entrópica o modelo de energía oscura holográfica. La hipótesis principal de este tipo de modelos es que la superficie del horizonte de Hubble, también conocida como pantalla de Hubble, tiene asociada una entropía y una temperatura, análogo al horizonte de sucesos de un agujero negro, esta analogía se fundamenta en el hecho de que, aunque de diferentes naturalezas, el horizonte de Hubble y el horizonte de sucesos, son ambos horizontes del Espacio-Tiempo.

Naturalmente esta entropía posee una dependencia temporal, y es esta variación de la entropía con el tiempo la que interactúa con el espacio-tiempo, provocando una fuerza que emerge de la tendencia de la entropía a maximizarse, conocida

como fuerza entrópica, explicando de esta manera el origen de la expansión acelerada del universo. En este marco teórico no existe la necesidad de proponer una energía de naturaleza extraña, como lo es la energía oscura, ya que la expansión acelerada del universo parece ser una consecuencia de la entropía en el horizonte del mismo, la cual puede ser asociada al almacenamiento de información en el universo, utilizando el principio de holografía, que es habitualmente usado en la explicación de la entropía del agujero negro.

Las primeras versiones de este modelo (D.A.Easson, 2011), (D.A.Easson, 2012) consideraban que la entropía de la pantalla de Hubble, tiene la expresión de la entropía de Bekenstein (J.D.Bekenstein, 1973), y la temperatura de Hawking (Stephen.W.Hawking, 1974), por analogía directa con los agujeros negros. Sin embargo, las predicciones de esta versión no concuerdan con algunos de los datos observacionales mas recientes, es por esto que luego surgieron otras versiones de este modelo que utilizan una expresión diferente de la entropía, por ejemplo la entropía no aditiva $S_{\delta=\frac{1}{3}}$ presentada en (N. Komatsu, 2013a) y que también fue propuesta en el contexto de agujeros negros en (C. Tsallis, 2013). Por otro lado, en los modelos presentados en (D.A.Easson, 2011), (D.A.Easson, 2012), (N. Komatsu, 2013a) la expresión de la temperatura del horizonte de Hubble, no se obtiene de un principio físico, sino que por simplicidad se toma la temperatura de Hawking, expresado en términos de parámetros universales. Elecciones arbitrarias de la entropía y la temperatura pueden llevar a problemas con la estructura termodinámica.

Encontrar un principio físico que nos determine la expresión de entropía y temperatura que deben ser utilizadas, es un aspecto importante para considerar los modelos entrópicos como alternativas serias. Una propuesta de este principio fue presentada en (D.J. Zamora, 2022b), donde se derivó una relación que debe de cumplir, tanto la entropía como la temperatura del horizonte del universo, exigiendo que se conserve la estructura termodinámica de Legendre. Además, se realizó un análisis termodinámico de estos modelos, basado en una escala de entropía generalizada con una potencia arbitraria del radio de Hubble.

Desafortunadamente, el modelo de entropía con exponente generalizado propuesto en (D.J. Zamora, 2022b), no es capaz de predecir diferentes etapas de aceleración de la expansión del universo. Esto se espera para todos los modelos de fuerza-entrópica con resultados similares, la demostración se puede ver en (E.L.D.Perico,

2013), (N. Komatsu, 2013b), (S. Basilakos, 2012). Es por esto que en (D.J. Zamora, 2022a), se propuso una variación del modelo que incluya un término de ley de potencia subdominante, término que puede ser fundamentado por la existencia de efectos superficiales. Gracias a la influencia de este término en las soluciones, es posible explicar diferentes etapas de la expansión y utilizarlo para ajustarse a los datos observacionales y compararse con el modelo Λ -CDM.

En esta tesis se trabaja con un modelo similar al presentado en (D.J. Zamora, 2022a), para el caso de un universo mono-componente, particularmente en el que el universo solo contiene radiación y además para un universo multi-componente, compuesto tanto de radiación como de materia no relativista. En el capítulo 4, se derivan y se analizan las soluciones de las ecuaciones de Friedmann, ecuaciones fundamentales para la cosmología relativista, que relacionan el contenido del universo con la dinámica de expansión del mismo, para ambos tipos de universo. Además se compara con las predicciones del modelo Λ -CDM y se ajusta a los datos de supernovas tipo Ia.

Antes de eso, en el capítulo 1, se realiza una introducción a la cosmología relativista, haciendo un resumen de los conceptos mas importantes y se introduce al modelo Λ -CDM. En el capítulo 2 se hace una introducción a los modelos de cosmología entrópica, desde sus inicios hasta el modelo que finalmente se utiliza en el desarrollo de esta tesis. En el capítulo 3 se habla sobre los datos que se utilizan para ajustar nuestros modelos, y como es el proceso para determinarlos a partir de observaciones. Se finaliza con las conclusiones en el capítulo 5, en donde analizamos las ventajas y desventajas de utilizar este tipo de modelos para la explicación de la expansión tardía del universo.

Capítulo 1

Introducción a la cosmología relativista

Este capítulo se lo dedico a José.

Por ser el mejor compañero. Juntos codo a codo nos enfrentamos a los finales y los aprobamos a todos.

Ojalá volver a coincidir académicamente con vos.

'gracias a aquellos cuya curiosidad insaciable y coraje intelectual han forjado los cimientos de la ciencia, revelando los misterios del cosmos.'

La cosmología es una disciplina que busca comprender la naturaleza fundamental del universo, esta búsqueda se origina desde los filósofos presocráticos, con Thales de Mileto(624 a.C - 546 a.C) o Anaximandro(610 a.C - 546 a.C), y continua con el filosofo Aristóteles(384 a.C - 322 a.C), que impuso su cosmología por casi 2000 años, sin embargo dicha disciplina ha llegado a formar parte de la física no hace mas de 150 años, cuando esta ha empezado a investigar cuestiones fundamentales sobre el cosmos, como la expansión del universo, la distribución de la materia y la energía en el espacio, la formación de galaxias y estrellas, etc.

Para que la cosmología sea de interés científico, primero se necesitó un cambio de paradigma que nos permitiera comprender al universo como un sistema dinámico, regido por las mismas leyes físicas que rigen la materia dentro del universo. El

causante de este cambio de paradigma son las investigaciones de Albert Einstein publicadas en el inicio del siglo XX, las mismas provocan un cambio en los conceptos de espacio y tiempo. La relatividad especial (RE) y mas tarde la relatividad general (RG), nos enseña una manera distinta de ver a estos conceptos con respecto a la que conocemos desde la época de Newton, la idea de un espacio y tiempo absoluto e inmutable se ven cuestionadas por las hipótesis principales de estas teorías. La relatividad especial propone que la velocidad de la luz sea la misma para cualquier observador, partiendo de esta hipótesis se demuestra la no existencia de un marco de referencia absoluto en reposo, y además unifica los conceptos de espacio y tiempo en uno solo, luego conocido como espacio-tiempo. Sin embargo, la contribución principal al cambio de paradigma en la cosmología no son los aportes de la relatividad especial, sino mas bien son los aportes que realiza la relatividad general, es esta teoría la que propone una nueva descripción de la gravedad y una reinterpretación de la estructura del espacio-tiempo. Bajo el marco de esta teoría, la interacción de la gravedad en los cuerpos, se presenta como el movimiento de los cuerpos en un espacio-tiempo (E-T) curvado, la curvatura del E-T es causada por la presencia de masa y energía, dicha interacción esta detallada en la siguiente ecuación:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

- $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.
- $g_{\mu\nu}$ es la métrica, y $G_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Einstein.
- $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci y R el escalar de curvatura de Ricci.
- G es la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz.

Interpretando esta ecuación, podemos ver que del lado derecho de la misma tenemos a $T_{\mu\nu}$, el tensor de energía-momento, que incluye toda la información de la materia que contiene el universo (su momento y su energía), y del lado izquierdo de la ecuación tenemos a $G_{\mu\nu}$, tensor métrico de Einstein, que comprende toda la información del espacio-tiempo, es decir que existe una estrecha relación entre estos dos conceptos, relación que se logra entender bien con la siguiente frase:

”La materia y la energía dicen al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo dice a la materia y la energía cómo moverse”

Lo importante de las conclusiones que surgen de dicha interpretación, es que bajo el marco de la teoría de la relatividad general, el E-T es una entidad física, que existe en un sentido ontológico como cualquier otra entidad física, ya que tiene energía, y además tiene la capacidad de interactuar con otras entidades físicas, como los planetas, estrellas, galaxias, materia en general. A partir de dichas hipótesis se puede afirmar, que como toda entidad física, el E-T debe de contar con propiedades físicas, ejemplo de estas propiedades son la curvatura, la energía, velocidad, aceleración, temperatura e incluso entropía.

Estos cambios conceptuales del espacio-tiempo fueron los que dieron inicio a lo que conocemos hoy en día como la cosmología moderna o cosmología relativista, disciplina que consta de carácter científico, al estar fundamentada por una teoría física de alto nivel como lo es la relatividad general y que produjo numerosas predicciones como la existencia de los agujeros negros, la expansión tardía del universo, el BigBang, la existencia de ondas gravitacionales, entre otras, que lograron ser verificadas observacionalmente con la tecnología disponible de los últimos años. En este primer capítulo hablaré sobre los principios, conceptos, observaciones, e implicaciones que engloban la cosmología relativista, el mismo constara de tres secciones principales:

1. La primera sección empezará con una breve introducción de lo que llevó a Albert Einstein a formular su teoría de la relatividad general, y también detallará algunos conceptos de dicha teoría, que serán de gran ayuda para entender las motivaciones de las hipótesis que formularé en el desarrollo de la tesis.
2. La segunda sección sera el núcleo de este capítulo, ya que en la misma se explicará con detalle los principios y conceptos fundamentales que debe tener cualquier modelo cosmológico relativista y además se hablará de las observaciones que llevaron a la conclusión de la inflación cosmológica, fenómeno cuya explicación es el objetivo principal de la tesis.
3. La ultima sección será una breve introducción del modelo dominante en la cosmología relativista, el modelo Λ -CDM, se realizará un resumen de sus hipótesis principales, sus implicaciones, sus ajustes a las observaciones y los puntos débiles del modelo, lo cual explicará la motivación de utilizar un mecanismo entrópico para la inflación cosmológica.

1.1. Relatividad General

1.1.1. El principio de equivalencia

Einstein no estaba conforme con la teoría de la relatividad especial que él mismo publicó, esto debido a que su rango de validez era bastante reducido. Ya en 1907 se dio cuenta de que esta teoría era necesariamente incompatible con la gravedad newtoniana, por ser esta última una interacción inmediata y a distancia, además la teoría de la relatividad especial no es válida para observadores acelerados. Por otro lado, Einstein quedó profundamente intrigado por la similitud entre la masa inercial y la masa gravitatoria, una relación que previamente había sido observada en la mecánica newtoniana sin una justificación aparente. Para Einstein, esta notable correspondencia en los conceptos de masa no podía ser una coincidencia, sino que debía ser el resultado de un principio fundamental de la naturaleza.

Es debido a esto que Einstein estaba en la búsqueda de una teoría más general, que pueda englobar tanto la gravedad como los observadores no inerciales, y es en esta búsqueda que se encontró con una idea trascendental, que el mismo la llamó "la idea más feliz de mi vida". Se dio cuenta de que un observador en caída libre no siente su propio peso, y por lo tanto es equivalente a pensar que estuviera en una región del espacio sin campo gravitatorio, a partir de esta idea pudo formular un principio que actualmente se conoce como principio de equivalencia para campos gravitatorios constantes.

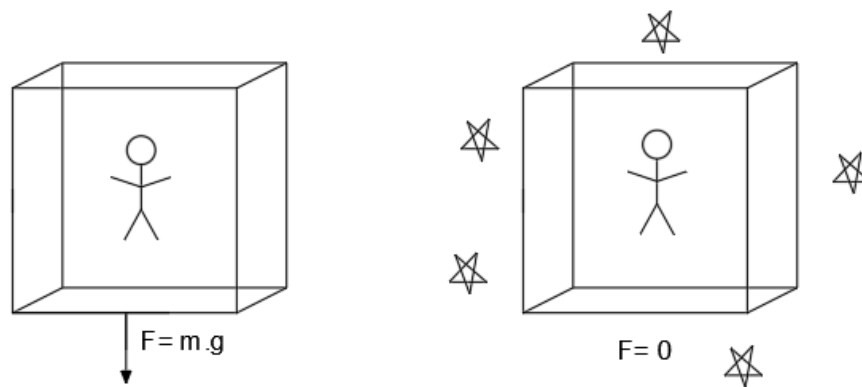


Figura 1.1: Principio de equivalencia para campos gravitatorios constantes.

” Un observador en caída libre en un campo gravitatorio constante es equivalente a un observador inercial en ausencia de gravedad. Es imposible determinar la diferencia entre estas dos situaciones a base de experimentos físicos” (Bert.Janssen, 2013).

Por otro lado, también pensó que un observador con una aceleración constante a en el espacio interestelar, es equivalente a un observador que se encuentre en un campo gravitacional constante, estos dos observadores obtendría el mismo resultado en sus mediciones, por ejemplo, si ambos se encuentran en una habitación en el espacio interestelar y sueltan un objeto, verán como dicho objeto va directamente contra el suelo de la habitación, los mismos podrían afirmar que se encuentran en una región del espacio con campo gravitatorio o que la habitación tiene una aceleración constante, ambas interpretaciones son correctas y equivalentes. Esto llevo a formular el principio que actualmente se conoce como el principio de equivalencia para aceleraciones constantes.

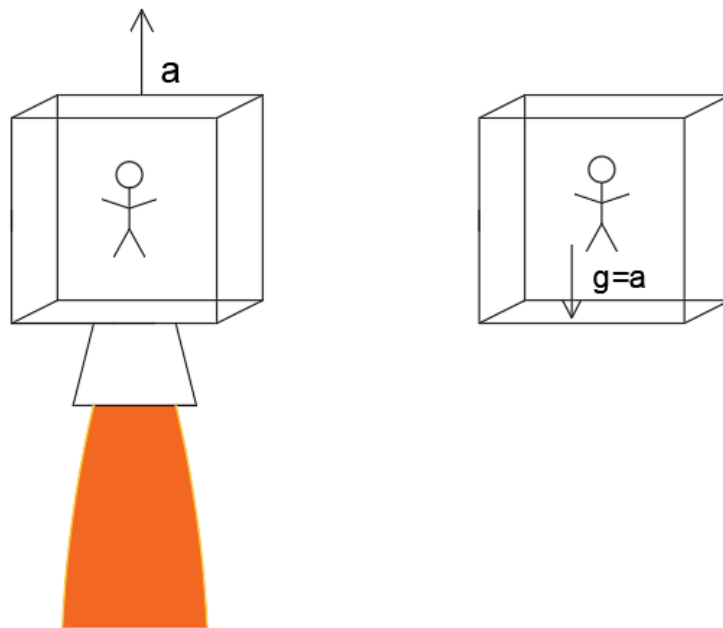


Figura 1.2: Principio de equivalencia para aceleraciones constantes.

” Un observador en movimiento uniformemente acelerado es equivalente a un observador inercial en un campo gravitatorio constante. Es imposible determinar la diferencia entre estas dos situaciones a base de experimentos físicos” (Bert.Janssen, 2013).

El hecho de que un observador que se encuentre en caída libre, en un campo gravitatorio constante, sea indistinguible de un observador inercial, es de suma importancia para compaginar la interacción de la gravedad con la relatividad especial, y el hecho de que un observador en movimiento uniformemente acelerado es equivalente a un observador en un campo gravitatorio constante, explica también la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Para un observador lo que provoca que el objeto se mueva contra el suelo de la habitación puede ser inercia, mientras que para otro observador puede ser gravedad. Sin embargo, todavía no queda claro como, a partir de estos dos principios de equivalencia, se puede llegar a explicar como la masa y la energía interactúan con el espacio-tiempo.

Para entender el procedimiento mental de Einstein que llevó del principio de equivalencia a la relatividad general, realicemos el trabajo de imaginarnos que estamos en una caja sellada, siendo acelerados a través del espacio a $9,8 \frac{m}{s^2}$, si encendemos una linterna de manera que el rayo de luz sea perpendicular al vector de aceleración, dado que la caja está acelerando hacia arriba, parecerá que la trayectoria del haz de luz se dobla hacia abajo, ya que el suelo de la caja se acerca hacia arriba para encontrarse con los fotones.

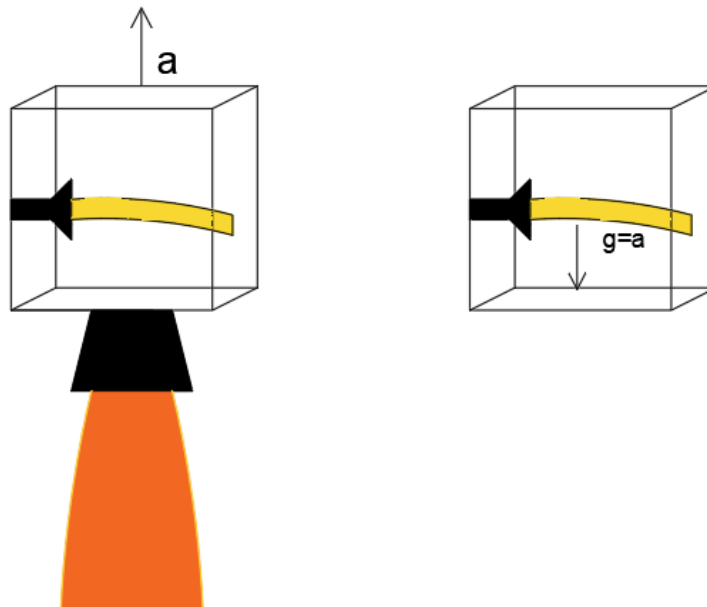


Figura 1.3: Principio de equivalencia

Gracias al principio de equivalencia, podemos remplazar la caja acelerada por una caja estacionaria que experimenta una aceleración gravitacional constante, ya que no hay manera de distinguir estos dos casos, llegamos a la conclusión de que los caminos de los fotones serán curvados hacia abajo en presencia de un campo gravitatorio (Barbara.Ryden, 2006).

Desde este punto de vista la gravedad afecta a los fotones, incluso aunque estos no tengan masa, Einstein hizo una propuesta más, teniendo en cuenta el principio de Fermat, que establece que un haz de luz que viaja a través de dos puntos, lo hace por el camino que minimiza el tiempo de viaje requerido. Si estamos en el vacío interestelar, donde la velocidad de la luz es constante, la luz toma el camino mas corto entre dos puntos, en un espacio Euclideo este camino es una línea recta entre los dos puntos. Sin embargo, en presencia de gravedad, el camino que toma la luz no es una línea recta, entonces Einstein concluyó de que el espacio no siempre es Euclideo, debido a que la presencia de masa provoca que el espacio se curve.

1.1.2. Conceptos de la Relatividad

La relatividad general (RG) es una teoría física muy completa, la misma engloba toda la mecánica newtoniana, como un caso particular de esta, y además logra ampliar su rango de aplicación a observadores no inerciales o afectados por un campo gravitatorio. De más está decir que la amplia variedad de conceptos necesarios para entender esta teoría excede la capacidad de esta tesis y es por esto que nuestro objetivo no será explicarla en su completitud. Para eso recomiendo la diversa bibliografía utilizada para el desarrollo de este trabajo. Es por esto que en esta introducción teórica, decido solo incluir los conceptos mínimos que, a mi parecer, son relevantes para entender el razonamiento que tuve al formular las hipótesis de los modelos de cosmología entrópica.

Métricas, Eventos, cono de luz y horizontes :

En la RG se conoce como **métrica** al tensor $g_{ij}(\mathbf{x})$ que lleva codificado en él toda la información de la geometría del espacio-tiempo (i y j se evalúan en todas las coordenadas) (S.Weinberg, 2008). Conocer el tensor métrico para una cierta región es de utilidad por varias razones, por ejemplo, para conocer como la materia y la luz se mueve en el E-T, la materia o radiación libre de interacciones no

gravitatorias siguen la trayectoria conocidas como geodésicas, definido como la trayectoria más corta entre dos puntos. Se sabe que para una geometría euclidiana la geodésica será una línea recta, pero el E-T suele ser no euclidiano en la mayoría de los casos. Es con esta explicación de la trayectoria que se logra explicar por qué los objetos 'caen' en una región con campo gravitatorio, en realidad están siguiendo la geodésica del E-T curvo y también solo logra explicar el efecto de lente gravitatoria, ya que los fotones también siguen geodésicas.

Otra razón fundamental por la que conocer la **métrica** es de importancia, es que se puede obtener un elemento lineal $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, con una sumatoria sobre los índices, en donde ds es conocido como la distancia propia entre un evento con coordenada $\mathbf{x}$ y otro con coordenadas $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. La distancia propia ds es de utilidad para calcular los intervalos de tiempo y distancia entre dos **eventos**. Por ejemplo, para la **métrica** de Minkowski se obtiene:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2)$$

en donde c es la velocidad de la luz y dt , dx , dy y dz son las diferencias de coordenadas temporales y espaciales respectivamente. Dado que ds^2 es una propiedad solo de los dos **eventos** y no del observador, se lo utiliza para clasificar la relación entre los **eventos**:

- Si ds^2 es positivo, se dice que los eventos están separados en el espacio.
- si ds^2 es negativo, se dice que los eventos están separados en el tiempo.
- si $ds^2 = 0$, se dice que los eventos están separados en el camino de luz o directamente que tienen separación nula.

Tanto la RG como la RE tratan de describir como los **eventos** y observaciones se relacionan entre sí en el E-T, entendiendo como evento a cualquier punto en el cual ocurre algún suceso. De esta manera, dos observadores pueden encontrar diferencias en las mediciones de las características de un evento, y la teoría de la relatividad otorga las herramientas para poder relacionar dichas observaciones y llegar a una explicación última equivalente. En el caso de la teoría de la RE las herramientas que relacionan estas dos observaciones son las transformadas de Lorentz, las mismas son solo válidas en el espacio-tiempo de Minkowski, por eso

en principio no son aplicadas en la teoría RG, en donde, por causa de la materia y la energía, el espacio-tiempo se curva y es no euclidiano. Para solucionar este problema se formuló el principio del mínimo acople, que plantea que a escalas pequeñas y con campos gravitatorios relativamente bajos se recupera las leyes de la RE. de manera más práctica se puede formular este principio como sigue:

Principio de mínimo acople: "*Las leyes de la física en espacios curvos son las mismas que las de relatividad especial, donde se sustituyen las derivadas parciales ∂_μ por covariantes ∇_μ y la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por una métrica general $g_{\mu,\nu}$* " (Bert.Janssen, [2013](#)).

Esto implica que, por lo menos localmente, la estructura del E-T en general es simétrica a la estructura de Minkowski. Es decir que aunque en la mayoría de los casos la métrica tendrá una forma más complicada, el E-T siempre será Lorentziano.

Gracias a este principio, es posible utilizar en la RG el concepto de cono de luz, que tiene origen en la clasificación de la distancia propia de los **eventos** visto anteriormente en la métrica de Minkowski y que determina la estructura causal del E-T. Este cono se lo construye con el vértice en un evento, y su generatriz esta definido por el camino de luz o separación nula, así este cono puede ser definido como la separación entre lo que esta dentro de la influencia causal de un evento, a la vez dividida entre lo que lo puede afectar (zona pasada), o lo que este puede afectar (zona futura) ambos dentro del cono de luz y caracterizado por un $ds^2 < 0$ es decir un separación temporal y lo que está fuera de la influencia causal de este evento (zona elsewhere o zona en otro lugar), fuera del cono de luz, caracterizado por una separación espacial con $ds^2 > 0$. La figura [\(1.4\)](#) sirve de ayuda para entender mejor el concepto de cono de luz donde se presenta un esquema en dos dimensiones del cono de luz de un evento, y también otro esquema de dos eventos para entender como se puede relacionar el cono de luz de dos **eventos**, y así entender mejor la estructura causal del E-T.

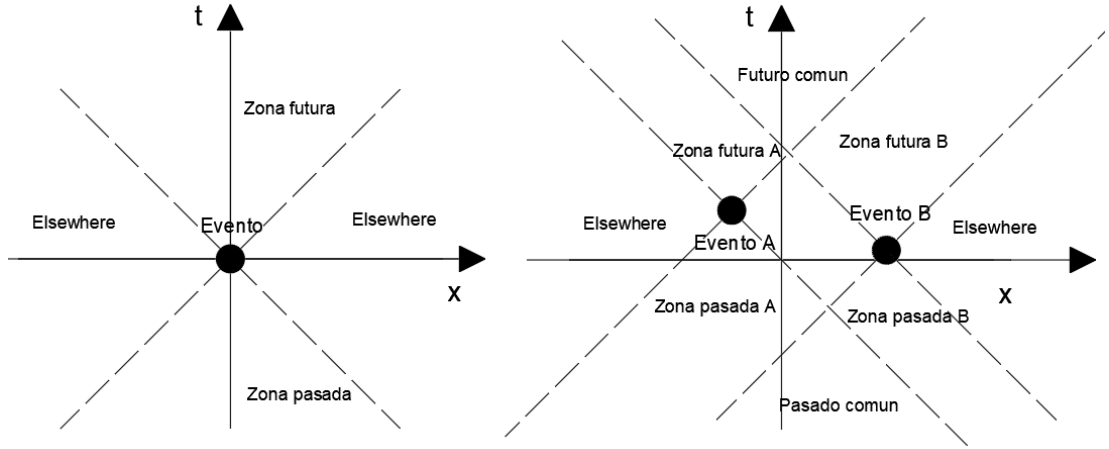


Figura 1.4: Diagrama de cono de luz para uno y dos eventos

Una partícula masiva seguirá una trayectoria temporal, de la misma manera una partícula sin masa seguirá una curva nula. Dos **eventos** A y B están en contacto causal si están conectados a través de una curva temporal o nula. Por lo tanto los **eventos** A y B no están en contacto causal. Sin embargo, si el evento A es parte de la historia de un observador O existe una posibilidad de que, tarde o temprano, este evento pueda influenciar los hechos de un observador O' que vivió el evento B, ya que el cono de luz crece con el tiempo, y en algún momento el observador O' estará dentro del cono de luz del evento A en la línea del universo de O , se dice que los observadores están en contacto causal y entonces solo se puede compartir información del evento A con la del evento B, si en algún momento estos conos de luz tienen un pasado y/o futuro común.

Aunque es cierto que es posible utilizar el concepto del cono de luz en la RG, es importante remarcar la gran diferencia con el espacio de Minkowski. Esta diferencia es que, debido a la curvatura del E-T, la orientación del cono de luz no es la misma, sino que varía de punto en punto, esto puede causar que dos observadores inicialmente en contacto causal, dejen de estarlo después de un cierto tiempo. Si un observador O esta en una región del espacio desde la cual ya no es capaz de mandar señales de luz a un observador O' fuera de esta región, decimos que el espacio tiempo tiene un **horizonte**.

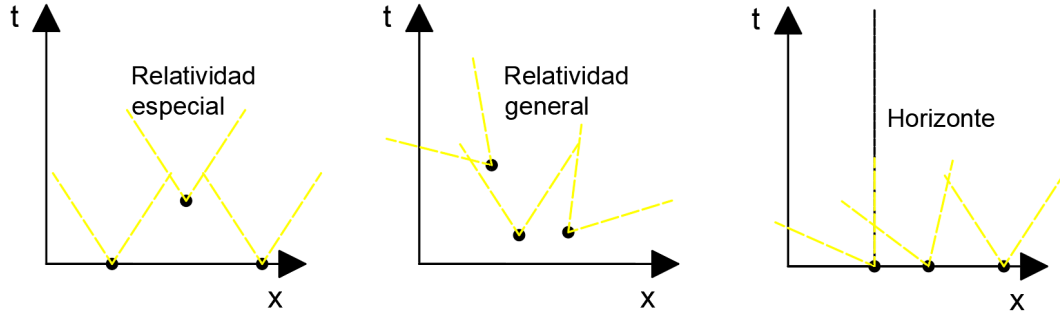


Figura 1.5: Cono de luz en RE- Cono de luz en RG - Horizonte de la RG

Existen varios tipos de **horizontes**, de los cuales solo vamos a detallar los tres mas relevantes para nuestra tesis. El mas conocido de ellos es el que surge cuando el campo gravitatorio es tan fuerte que la luz queda atrapada, este es llamado horizonte de sucesos y aparece en la formación de los agujeros negros, además tiene la característica de ser un **horizonte** absoluto, ya que es la misma para todos los observadores. El segundo tipo de **horizonte** es el que surge cuando se trabaja con un universo en expansión acelerada, la expansión puede ser tan rápida que, la distancia entre dos observadores, aumente a tal velocidad que ni la luz emitida por un observador llegue al otro, este es conocido como el horizonte cósmico. El ultimo que vamos a mencionar es debido a la edad finita del universo, ningún observador puede ver mas allá de la distancia que ha recorrido la luz desde el origen del universo, simplemente la luz no ha tenido tiempo de llegar, pero si llegará con el paso del tiempo, este es conocido como el **horizonte** de partículas. Los últimos dos son surgen en el contexto de la cosmología.

1.1.3. Termodinámica de agujeros negros

Como mencionamos al inicio de este capítulo la RG provocó un cambio de paradigma en la cosmología, y la razón principal de esto radica en entender al E-T como una entidad, que posea características físicas como cualquier otra entidad física. Si el E-T contiene energía y además interactúa con otras entidades con energía, debe respetar las leyes de la termodinámica, otra de las teorías físicas más importantes, el tratamiento termodinámico de la RG está bastante estudiado actualmente (Carmen.A.Núñez, 2006), (MichaelC.LoPresto., 2003), (David.Wakeham, 2015) y

conlleva una gran cantidad de conceptos que nuevamente exceden el objetivo de esta tesis, sin embargo es importante mencionar al menos la termodinámica de los agujeros negros (BH), principalmente la asociada con el horizonte de sucesos, ya que mucho del desarrollo de los modelos de cosmología entrópica está basado en los descubrimientos termodinámicos desarrollados en el contexto de los BH.

Paradoja de la pérdida de la información, radiación de Hawking, entropía de Bekenstein y el principio holográfico:

La paradoja de la pérdida de la información es un problema que se origina en el contexto de la física de agujeros negros, surge de una contradicción entre principios fundamentales de las dos teorías más importantes de la física moderna, un principio de la RG y otro de la mecánica cuántica (MC).

El principio de la MC es conocido como conservación de la información. El mismo dice que la información siempre se conserva, es decir, que luego de un proceso, no puede haber una pérdida de información, o que esta puede ser recuperada en cualquier momento futuro a partir de leyes físicas. Esto implica que la información acerca de la composición y el estado cuántico de la materia que cae en un BH no debería perderse, sino que debería quedar codificada en alguna forma en la estructura del BH, para luego ser recuperada de alguna manera. Por otro lado, el principio de la RG que entra en conflicto con esto es conocido por el nombre del teorema de no-pelo, el mismo postula que una vez que un BH alcanza una condición estable después de su formación, éste tiene solo tres propiedades físicas independientes: masa, carga eléctrica y momento angular; por lo demás, el BH carece de características distintivas. Si esto es cierto, cualquier par de BH, que compartan los mismos valores para estas propiedades, son indistinguibles entre sí.

Esto nos lleva directamente a la paradoja, que plantea que, si un objeto cae dentro de un BH, cualquier información acerca de la forma del objeto o distribución de carga es eventualmente distribuido alrededor del horizonte del agujero negro, y es perdido para observadores externos, ya que nada puede salir de un BH, y la única información externa que se tiene de este son los tres parámetros mencionados anteriormente, que quedan definidos cuando el BH llega a un estado estacionario. Es decir que, no hay forma de evitar la pérdida de información de las condiciones iniciales, y, por lo tanto, uno de los dos principios tiene que estar equivocado.

Los conflictos entre la RG y la MC son muy comunes en la física moderna, son contadas las situaciones en donde es necesario considerar ambas teorías, los BH son uno de esos escenarios. Afortunadamente, intentos de solucionar esta paradoja llevaron a descubrimientos sobre la termodinámica de BH muy relevantes, el científico que realizó los primeros aportes en este campo es Hawking y sorprendentemente hizo uso de conceptos cuánticos en su desarrollo.

La radiación de Hawking fue propuesta en 1974, inicialmente con la intención de solucionar la paradoja de la pérdida de información en un BH, esta radiación es producida gracias a los efectos cuánticos en el vacío cerca del horizonte de sucesos. En MC el concepto de vacío es muy poco intuitivo, continuamente se están generando pares de partículas-antipartículas que luego se aniquilan mutuamente, por ejemplo, un fotón puede decaer en un par electrón-positrón y luego el electrón y el positrón se aniquilan creando un nuevo fotón. Aunque no podemos verlas, sabemos que estas partículas virtuales están realmente en el espacio vacío porque dejan algunas trazas detectables. En ciertas circunstancias, una de estas partículas podría caer dentro del BH mientras que la otra escapa al espacio exterior, así el observador que está afuera del BH no puede ver la aniquilación del par y debe interpretar que ve una partícula real. Hawking considera que parte de la información que se perdió dentro del agujero negro se la recupera con las partículas que salen del BH mediante este proceso.

Cada partícula percibida por un observador externo al BH muestra una correlación con su correspondiente antipartícula situada del lado opuesto del horizonte de sucesos. Es decir que, parte de la información requerida, para elaborar una descripción total de las partículas que conforman la radiación emitida por los agujeros negros, es inaccesible. Por consiguiente, lo que se puede observar presenta una naturaleza intrínsecamente aleatoria, por lo que la paradoja de la pérdida de la información estrictamente no se soluciona, aún no tenemos toda la información de lo que está dentro del BH. Sin embargo, este comportamiento aleatorio equivale, por definición, a calor.

De esta manera Hawking comprendió que los agujeros negros tienen temperatura y emiten radiación térmica, con un espectro de cuerpo negro característico a su respectiva temperatura. Además, derivó una expresión matemática para esta

temperatura, que muestra que la misma es inversamente proporcional a su masa,

$$k_B T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M},$$

la constante de proporcionalidad es muy pequeña y en consecuencia los agujeros negros de masas estelares tienen temperaturas de unas pocas fracciones de grado.

El BH va perdiendo masa, a medida que emite radiación, debido a las partículas que abandonan el horizonte de sucesos. Como su temperatura es inversamente proporcional a su masa, la temperatura del BH aumenta con el tiempo, y a su vez también aumenta la radiación emitida. El BH se va evaporando hasta llegar a un momento en que no le quedará más masa y desaparecerá. Y esto nos coloca nuevamente frente a la paradoja de la pérdida de información. La pregunta sobre qué sucede con la información que contenía al final de la evaporación del agujero negro. La posible solución está en otro concepto termodinámico, en este caso estamos hablando de la entropía del BH, también conocida como la entropía de Bekenstein.

La entropía de Bekenstein fue propuesta en 1970, la misma representa la cantidad de entropía que se le debe asignar a un BH, de manera que cumpla con las leyes de la termodinámica, tal como son interpretadas por observadores externos a ese BH. Bekenstein propuso que la entropía de un BH debería estar relacionada con el área de su horizonte de sucesos. La propuesta de Bekenstein inicialmente enfrentó cierta resistencia, ya que se pensaba que la entropía era una propiedad exclusiva de sistemas termodinámicos y mecánicos cuánticos. Sin embargo, esta idea ganó más aceptación con los aportes de Hawking sobre la temperatura y radiación del agujero negro. Esto debido a que se puede interpretar a la entropía como la medida de la aleatoriedad del movimiento de los átomos de un sistema caliente, y como esta aleatoriedad es causada por la existencia de una región oculta, la entropía debería tener alguna relación con el tamaño de esta región, y es así como se puede explicar que dependa del área del horizonte de sucesos.

La fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de un BH es:

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3 A_{HS}}{4\hbar G}.$$

Siendo A_{HS} el área del horizonte de sucesos del BH. Teniendo en cuenta que $\hbar G$ es del orden de $10^{-66}cm^2$, la entropía de un BH es muy grande. Para un BH de la masa del sol, la entropía es aproximadamente del orden de $10^{78}cm^2$. Esto representa una gran contradicción, ya que para la RG los BH son objetos muy simples, con muy poca información en su estructura, es decir que un BH se puede describir completamente especificando solo 3 características físicas, estas características son su masa, su carga y momento angular. Por otro lado, la fórmula de Bekenstein-Hawking asigna un valor de entropía alto, y una gran entropía indica que el BH contiene mucha desinformación y su estructura gran aleatoriedad.

Esta entropía alta sugiere de alguna manera que la información que se consideraba perdida al entrar al BH en realidad no se perdió, sino que quedó inscripta en la superficie del horizonte de sucesos, y es esta información la que probé al BH de una entropía grande. Esta hipótesis se formaliza matemáticamente bajo el uso del principio holográfico, que surgió en las últimas décadas, originalmente es utilizado en el contexto de la teoría de cuerdas, pero también puede aplicarse al concepto de la entropía de Bekenstein-Hawking y explicar la paradoja de la pérdida de la información.

El principio holográfico es un principio de las teorías de supercuerdas, acerca de las teorías de gravedad cuántica, propuesta en 1993 por Gerald't Hooft y mejorado y promovido por Leonard Susskind en 1995, y postula que la información contenida en un sistema tridimensional puede estar codificada en una descripción en una dimensión inferior, como si estuviera proyectada en una superficie. Esto nos sugiere que la entropía del BH, que está relacionada con la cantidad de información oculta en él, podría estar conectada de alguna manera con las propiedades geométricas de su horizonte de sucesos, la región límite desde la cual ni la materia ni la luz pueden escapar.

1.2. Cosmología relativista

1.2.1. Principios de la Cosmología Relativista

Como mencionamos anteriormente, la integración de la cosmología en el ámbito de la física solo se logró con la aparición de la teoría de la relatividad general. Esta teoría concibió al espacio-tiempo como un sistema dinámico, sujeto a las mismas leyes físicas que regulan la materia contenida en él. Es de esperarse que se utilizaran las ecuaciones de campo de Einstein para intentar analizar la dinámica global del universo, su conformación, su contenido y su evolución. Sin embargo, es imposible hallar soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que describan el universo en su totalidad, considerando con todo detalle su contenido material y energético (estrellas, galaxias, ondas gravitatorias, campos eléctricos y magnéticos, etc.).

Obviamente, encontrar una solución completa del universo, de manera exacta, no es la intención de la cosmología actual. En esencia, la cosmología aborda la dinámica a escalas sumamente amplias, donde la influencia de galaxias individuales e inclusive cúmulos galácticos se torna prácticamente despreciable. A pesar de esto, se puede obtener modelos altamente realistas, con información detallada acerca de la distribución de la materia y su evolución, y también acerca de diferentes etapas del universo e incluso de sus inicios, en donde se obtienen conclusiones más o menos razonables. Esto es posible principalmente gracias a dos principios fundamentales, para cualquier modelo cosmológico, que simplifican considerablemente el problema. El primero de ellos es el que se conoce como el principio cosmológico.

Principio cosmológico: *'En cualquier momento y en cualquier lugar, el universo es homogéneo e isótropo a muy grandes escalas'.*

Afirmar que el universo es isotrópico implica que no existen direcciones preferenciales en el cosmos; por ejemplo, si se observa con un telescopio, el universo tiene el mismo aspecto, sin importar en qué dirección se apunte el telescopio. Por otro lado, decir que el universo es homogéneo, significa que no hay ubicaciones preferidas en el universo; su apariencia es la misma, sin importar dónde se instale el telescopio. Cabe recalcar la importancia que tiene en la hipótesis la condición de escalas grandes. Con esta condición queremos decir que el universo es isotrópico

y homogéneo en escalas de aproximadamente 600 millones de años luz o más.

La idea de un universo isotrópico parece ser contra intuitivo, esto es debido a que a pequeñas escalas el universo es evidentemente anisotrópico; por ejemplo, si observamos una esfera con un radio de unos 10 minutos luz centrada en la Tierra, evidentemente la dirección que apunte hacia el sol será la preferencial (tanto en cantidad de materia como de radiación); si ahora aumentamos la esfera a 9 millones de años luz, dentro de esta esfera tendríamos al grupo local de galaxias (aproximadamente unas 40 galaxias). De lejos, las galaxias más masivas y luminosas en el Grupo Local son nuestra propia Galaxia y M31, que juntas contribuyen con aproximadamente el 86 % de la luminosidad total. Recién cuando el radio de la esfera es de unos 600 millones de años luz, es considerablemente isotrópico, cuando en el interior de la misma se observan los supercúmulos de galaxias; el supercúmulo Perseo-Piscis está a la derecha, el supercúmulo Hidra-Centauro está a la izquierda, y el borde del supercúmulo Coma es apenas visible en la parte superior.

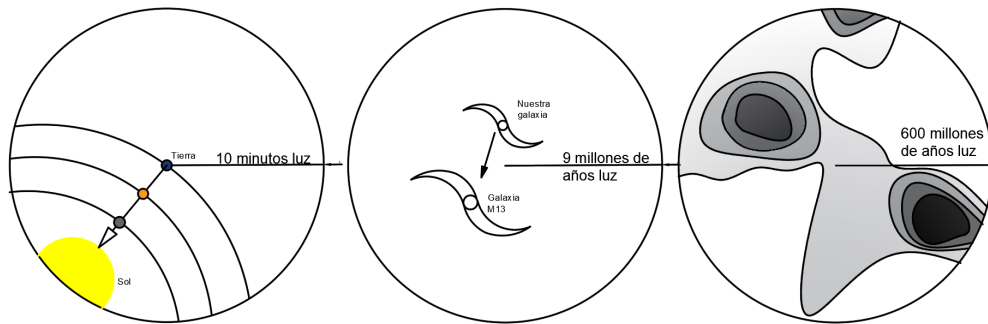


Figura 1.6: Diagrama de escalas del universo.

El mismo análisis se puede realizar con respecto a la homogeneidad del universo, en principio una esfera de 10 minutos luz de radio, tiene una densidad de 28 órdenes mayor a la densidad teórica del universo, con una esfera de 9 millones de años luz, aún tenemos 22 órdenes de magnitud más, es nuevamente con un radio de aproximadamente 600 millones de años luz, que la densidad de la esfera coincide con la densidad esperada del universo.

Una de las mejores contrastaciones observacionales del principio cosmológico, es la radiación de fondo cósmico de microondas (CMB), que fue detectada en 1965, la

misma tiene la característica de una radiación de cuerpo negro a una temperatura de 2,725K y se mantiene isótropo en uno entre 10^5 , la hipótesis es que el CMB se originó aproximadamente 380,000 años después del Big Bang. En ese momento, el universo estaba caliente y denso, lleno de partículas cargadas, como electrones y protones, que interactuaban fuertemente con la radiación electromagnética. Cuando el universo se enfrió lo suficiente, estas partículas pudieron combinarse para formar átomos neutros, principalmente hidrógeno. Esto permitió que la luz y otras formas de radiación electromagnética viajaran libremente a través del espacio sin ser dispersadas continuamente por las interacciones con partículas cargadas.

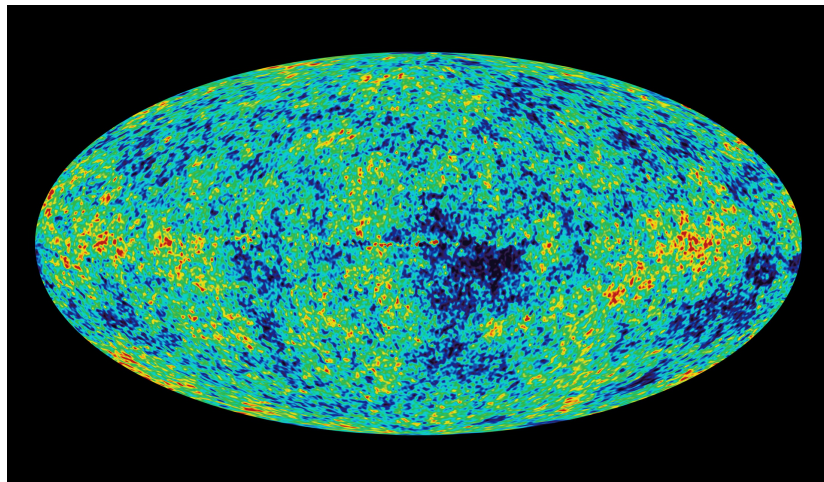


Figura 1.7: Radiación de fondo cósmico de microondas, la escala de colores representa las diferentes temperaturas. Gráfica extraída de (<https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/wmap/current>)

Como veremos en la siguiente parte de esta sección, el principio cosmológico es de gran utilidad para determinar la expresión de la métrica, debido a que un universo isotrópico y homogéneo, necesariamente debe estar contenido en un E-T con curvatura constante. Sin el Principio Cosmológico, encontrar soluciones de las ecuaciones de Einstein para la cosmología relativista es mucho más difícil.

El segundo principio fundamental de la cosmología relativista es conocido como el postulado de Weyl, el cual busca modelar el contenido material del universo. Este principio postula que las velocidades intrínsecas de la materia son despreciables en comparación con el movimiento cósmico, de esta manera se puede imaginar este contenido como un fluido ideal, conocido como fluido cósmico. Utilizando dicho

modelo, la metería se movería a través del E-T, siguiendo geodésicas temporales.

Postulado de Weyl: *"La materia a escalas cosmológicas exhibe el comportamiento de un fluido ideal, cuyas componentes se desplazan siguiendo geodésicas temporales que no se cruzan, excepto (posiblemente) en un punto en el pasado"*.

Al igual que el principio cosmológico, el postulado de Weyl, es de gran utilidad para poder determinar la métrica del E-T, además este postulado implica la existencia de un grupo particular de observadores privilegiados en el universo, aquellos que se encuentran en reposo con respecto al fluido ideal, y cuyo movimiento está exclusivamente determinado por la evolución cósmica. A estos observadores se les denomina usualmente observadores comóviles, además, es posible definir un tiempo cósmico, el cual coincide con la dirección temporal de un observador comóvil. Este tiempo cósmico resultará valioso para describir la evolución del universo y calcular su edad.

1.2.2. Geometría del espacio-tiempo y la métrica FRW

Para modelar nuestro universo es necesario encontrar una métrica que modele el E-T, esta misma métrica debe de tener una curvatura uniforme, ya que el universo se muestra homogénea e isotrópica, por ejemplo podríamos trabajar con la métrica de un espacio plano cuyo elemento de línea es:

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2$$

en donde $\mathbf{x}$ es un vector de 4 dimensiones.

Otra posibilidad de métrica conocida es la de una superficie esférica en un espacio euclidiano de cuatro dimensiones con radio r_a , su elemento de línea sería el siguiente:

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 + dz^2,$$
$$z^2 + \mathbf{x}^2 = r_a^2,$$

en donde $\mathbf{x}$ es un vector de 3 dimensiones.

Por ultimo se puede demostrar que solo existe una única posibilidad más. Esta es la de una superficie hipersférica en un espacio pseudo-euclidiano de cuatro

dimensiones, con un elemento de linea como el siguiente:

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 - dz^2$$

$$z^2 - \mathbf{x}^2 = r_a^2$$

Podemos extender estas tres posibilidades al caso de un espacio euclidiano escribiéndolos de la siguiente manera:

$$ds^2 = r_a^2 \left(d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right)$$

$$K = \begin{cases} +1 & \text{esférico} \\ 0 & \text{Euclidiano} \\ -1 & \text{hiperesférico} \end{cases}$$

Hasta ahora solo hemos considerado las métricas del espacio; sin embargo, la relatividad general nos enseña que el espacio y el tiempo juntos conforman un solo sistema físico, el E-T de cuatro dimensiones. Así como podemos calcular la distancia entre dos puntos en el espacio utilizando la métrica adecuada para ese espacio, de la misma manera podemos calcular la distancia en cuatro dimensiones entre dos eventos en el E-T.

Considerando dos eventos, uno que esta ocurriendo en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) y el otro ocurriendo en punto con coordenadas $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$. De acuerdo con las leyes de la relatividad general, la separación de espacio-tiempo entre estos dos eventos es:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Esta métrica es conocida como la métrica de Minkowski, la cual ya mencionamos anteriormente que se utiliza en la RE. La misma aplica solo en un contexto en donde el E-T no está curvado por la presencia de masa o energía. Sin ningún efecto gravitacional, el E-T de Minkowski es plano y estático.

Los físicos Howard Robertson y Arthur Walker buscaban que forma tendría la métrica del E-T si se consideraba que el universo es espacialmente homogéneo e

isotrópico en todo momento, además permitiendo que las distancias se puedan alargar o comprimir como una función del tiempo. La métrica que derivaron se conoce hoy en día como la métrica de Robertson-Walker y de forma general se pueden escribir como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - \frac{Kx^2}{R_0^2}} + x^2 d\Omega^2 \right]$$

Existiendo solo tres posibles valores para K , como ya mencionamos anteriormente, estos son $K = \pm 1$ y $K = 0$.

Se puede observar que, la parte espacial de la métrica de Robertson-Walker, consiste en una métrica para un espacio uniformemente curvo de radio R_0 , es decir, que cumple con el requerimiento de un universo homogéneo e isotrópico, pero multiplicado por el cuadrado de lo que llamaremos el factor de escala $a(t)$. El significado de este factor se puede entender mejor si calculamos la distancia propia, en el tiempo t , entre un objeto en el origen y otro que no tenga velocidad relativa respecto al primero, es decir, según la definición que se deduce del postulado de Weyl, un objeto comóvil, y qué esté ubicado a una distancia r :

$$d(r, t) = a(t) \left[\int_0^r \frac{1}{(1 - Kr^2)^{\frac{1}{2}}} dr \right] = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1}(r) & K = +1 \\ \sinh^{-1}(r) & K = -1 \\ r & K = 0 \end{cases} .$$

En esta situación r es independiente del tiempo, ya que no existe velocidad relativa entre los objetos, entonces la distancia propia incrementa o disminuye dependiendo de $a(t)$. Es importante remarcar que no existe ninguna posición privilegiada, cualquiera sean los dos objetos que no tengan velocidad relativa entre sí en cualquier parte del universo debe tener una variación de la distancia propia proporcional a $a(t)$. La variación de cualquier distancia propia debe ser:

$$\dot{d} = d \frac{\dot{a}}{a}$$

de aquí se puede entender el parámetro $a(t)$, como el factor de escala del universo, en donde $a(0)$ es el tamaño actual del universo, y $\dot{a}$ es la velocidad con la que

se está expandiendo el universo, y por lo tanto la velocidad a la que se están alejando dos observadores comóviles (P.Olesen, 2005).

1.2.3. Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de campo de Einstein fueron utilizadas para encontrar una solución cosmológica, el primero en hacerlo fue el mismo Albert Einstein en 1917, sus soluciones predecían un universo dinámico, pero esto no le parecía una descripción correcta del universo, por lo que decidió modificar sus ecuaciones de campo, agregando una constante Λ , actualmente conocida como constante cosmológica,

$$R_{uv} - \frac{1}{2}Rg_{uv} + \Lambda g_{uv} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{uv}. \quad (1.3)$$

Einstein interpretó este término extra como la posibilidad de que la interacción gravitatoria sea repulsiva a ciertas escalas espaciales, y de esta manera las soluciones que obtuvo representaban un universo estacionario, como él consideraba que debería de ser el universo. Lamentablemente, contrastaciones observacionales que se presentaron unos pocos años después, terminaron por afectar negativamente esta visión del universo y consecuentemente la existencia de la constante cosmológica.

Si quisiéramos una solución precisa de un universo en expansión, esta debe de explicar la conexión entre $a(t)$, K y R_0 , en un contexto cosmológico. Existe una solución analítica de estas ecuaciones que describen la curvatura del universo, la densidad de energía $\rho(t)$ y la presión $P(t)$ de los contenidos del universo. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Friedmann, después de que Alexander Alexandrovich Friedmann, sea el primero en derivarla en 1922:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t) - \frac{Kc^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2}.$$

Aunque la ecuación de Friedmann es indudablemente crucial, por sí sola no puede proporcionarnos información sobre cómo evoluciona el factor de escala $a(t)$ a lo largo del tiempo. Incluso si contáramos con condiciones iniciales precisas (valores exactos para ρ_0 y $a(0)$, por ejemplo), seguiría siendo una única ecuación con dos incógnitas, $a(t)$ y $\rho(t)$.

Ahora, si consideramos el contenido del universo como un fluido ideal, tal cual se plantea en el principio de Weyl, es posible encontrar otra ecuación que relacione estos parámetros. La primera ley de la termodinámica en un universo en expansión o contracción toma la forma:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0.$$

En donde ρ es la densidad de materia que contiene el universo, $\dot{\rho}$ es la derivada de esta densidad con respecto al tiempo, y P es la presión que ejerce dicha materia al universo.

Esta ecuación es llamada la ecuación de continuidad y es la segunda de las ecuaciones claves para la descripción de un universo en expansión. La ecuación de Friedmann y la de continuidad son ambas postuladas desde la conservación de la energía. Si combinamos las dos podemos derivar la ecuación de aceleración que nos dice como la expansión del universo acelera o desacelera con el tiempo:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3P). \quad (1.4)$$

Tenemos tres ecuaciones diferenciales que describen los regímenes de expansión del universo, estas son conocidas como las ecuaciones de Friedmann, de las cuales solo dos son independientes, ya que la de aceleración fue derivada de las otras dos. Por lo tanto, tenemos un sistema con dos ecuaciones independientes y 3 incógnitas (las funciones $a(t)$, $\rho(t)$ y $P(t)$). Para resolver este sistema necesitamos una ecuación más.

Lo que necesitamos es la ecuación de estado, es decir, una relación matemática entre la presión y la densidad de energía de las cosas que llenan el universo. Usualmente en cosmología se realiza un nuevo supuesto, el cual nos permite trabajar con gases diluidos, para los cuales la ecuación de estados es simple (S.Weinberg, 2008), y se puede escribir de la siguiente forma lineal:

$$P = \omega\rho, \quad (1.5)$$

donde ω es un número adimensional, que depende del contenido del universo.

Con este sistema de tres ecuaciones y 3 incógnitas, debería ser posible, encontrar

alguna expresión, que relacione todas las variables que se necesitan para describir la evolución del universo, el objetivo de esta tesis consiste en encontrar estas expresiones, principalmente para el caso de aceleración tardía.

1.2.4. La ley de Hubble y el corrimiento al rojo

Sabemos entonces que existen soluciones, tanto para un universo estático (las soluciones de Einstein), como también para un universo dinámico (las ecuaciones de Friedmann). Como mencionamos anteriormente, se realizaron observaciones que parecían indicar un universo en expansión, esto termino por decantar que las soluciones correctas eran las de Friedmann, y por un tiempo se dejó de tener en cuenta la constante cosmológica. Luego veremos que aparecerá nuevamente, pero con una nueva interpretación. En esta parte explicaremos como se llevaron a cabo dichas observaciones y también como se llegó a la interpretación de un universo en expansión.

Suponiendo que consideramos una línea de absorción con una longitud de onda particular, si la medimos en un laboratorio aquí en la tierra, su longitud de onda será λ y si la medimos del espectro de una galaxia lejana λ' , en general no serán las mismas. Si esto ocurre, entonces diremos que la galaxia tiene un corrimiento al rojo (RS), dado por la fórmula:

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}, \quad (1.6)$$

si se da el caso en el que $z < 0$, estrictamente sería un corrimiento al azul, pero la gran mayoría de las galaxias tienen un $z > 0$.

El hecho de que la luz proveniente de galaxias en general presente un corrimiento hacia longitudes de onda más largas, en lugar de un corrimiento hacia longitudes de onda más cortas, no se conocía hasta el siglo XX. En 1925, Vesto Slipher, en el Observatorio Lowell, había medido los desplazamientos en las líneas espectrales de aproximadamente 40 galaxias, encontrando que la gran mayoría presentaba corrimientos hacia el rojo; las excepciones eran todas galaxias cercanas dentro del Grupo Local. Hacia 1929, se habían medido suficientes corrimientos al rojo en galaxias para que el cosmólogo Edwin Hubble realizara un estudio sobre si el RS de una galaxia depende de su distancia con respecto a nosotros.

Aunque medir el RS de una galaxia es relativamente sencillo y se puede hacer con alta precisión, medir su distancia es complicado. Hubble conocía z para casi 50 galaxias, pero solo había estimado las distancias para 20 de ellas. No obstante, a partir de un gráfico de RS (z) vs distancia (r), encontró la famosa relación lineal ahora conocida como la Ley de Hubble:

$$z = \frac{H_0}{c} r \quad (1.7)$$

donde H_0 es una constante, actualmente conocida como la constante de Hubble.

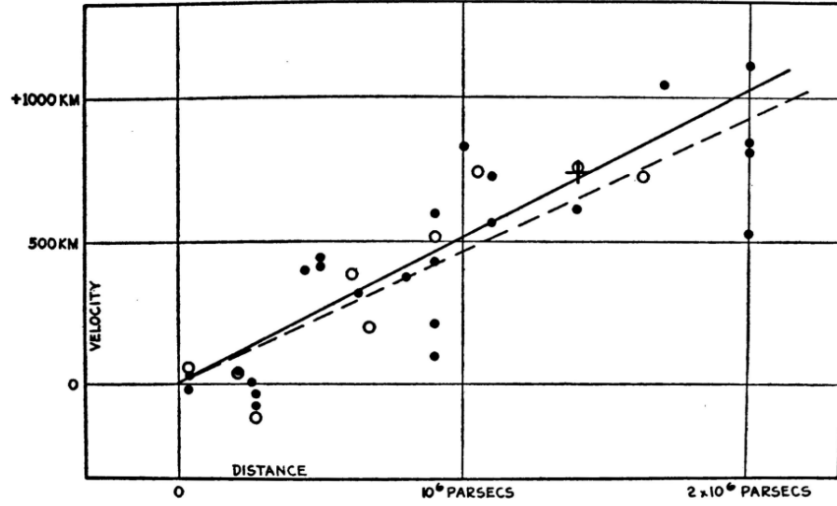


Figura 1.8: Gráfica de la relación entre el redshift y la distancia original de Edwin Hubble, notar que el eje vertical en realidad es cz en vez de z y las unidades están escritas en km cuando deberían estar en $\frac{km}{s}$ (E.Hubble, 1929).

Hubble interpretó el RS observado como el corrimiento Doppler, debido a la velocidad radial de las galaxias con respecto a la tierra. Es por esto que utilizó la relación clásica para el corrimiento Doppler $z = \frac{v}{c}$. La misma no era una mala aproximación, debido a que los valores de z analizados por él eran todos pequeños ($z < 0,04$), aunque actualmente se sabe que la explicación del RS es diferente. De esta forma Hubble presenta su ley como:

$$v = H_0 r \quad (1.8)$$

Lamentablemente, resultó que Hubble subestimó gravemente las distancias de las galaxias y determinó que la constante de Hubble tenía el valor de $H_0 = 500 \frac{km}{s.Mpc}$.

Sin embargo, lo importante es lo que se observa en nuestra galaxia, el hecho de que todas las galaxias presenten un corrimiento hacia el rojo y no así hacia el azul, sin importar en que dirección observemos, es exactamente lo que esperaríamos ver en un universo con una expansión, homogéneo, e isotrópico. Vemos diferentes galaxias alejarse de nosotros, pero observadores en cualquier otra galaxia también deberían ver galaxias distantes alejarse de ellos.

Uno de los problemas que planteaba la interpretación de la relación velocidad-distancia en términos de un universo en expansión era que, de acuerdo con la teoría de la Relatividad General, el inverso de la constante de Hubble representa la edad del universo si la constante cosmológica es nula (aceptado por los principales teóricos). Al valor de $H_0 = 500 \frac{km}{s.Mpc}$ derivado por Hubble y otros, le corresponde una edad del universo de unos 2 mil millones de años, lo que ya se sabía, que era muy pequeña, ni siquiera superaba la edad estimada de la tierra. Un universo más viejo requiere una constante de Hubble más pequeña, y afortunadamente, la medida de la constante de Hubble ha sufrido con el tiempo una serie de correcciones a la baja.

Mejores versiones de las observaciones que realizó Hubble se fueron realizando a lo largo del siglo XX, más tarde con la ayuda del telescopio Hubble lanzado en 1994 y los avances conceptuales de las supernovas tipo Ia, dos agrupaciones de científicos astronómicos se dispusieron a proyectar la ley de Hubble hacia magnitudes espaciales previamente inaccesibles.

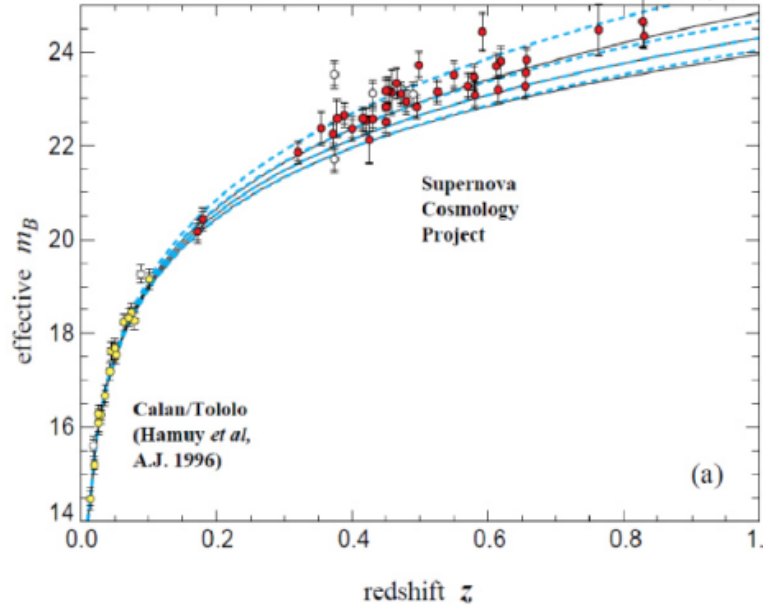


Figura 1.9: Diagrama magnitud-desplazamiento z usado por el grupo SCP para estudiar la expansión del universo (M.Tafalla, 2014).

Ambos grupos esperaban encontrar, de sus observaciones, que el universo muestre una expansión desacelerada a lo largo del tiempo, esto debido a la atracción gravitatoria de diferentes agregaciones de materia; sin embargo, los datos de ambos grupos mostraban que supernovas más distantes tenían sistemáticamente una magnitud menor de lo esperado, es decir, eran más débiles de lo predicho si el universo estuviera decelerando su expansión. Si las supernovas más lejanas eran más débiles de lo esperado, es porque estaban más lejos de lo previsto. La única manera de explicar esta discrepancia es concluir que la expansión del universo se ha ido acelerando con el tiempo, lo contrario de lo inicialmente esperado, este resultado inesperado provocó de nuevo la aparición de la constante cosmológica Λ en los modelos de cosmología relativista (PlanckCollaboration, 2018).

La mejor estimación actual de la constante de Hubble, combinando el resultado de diferentes grupos, es $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \frac{km}{s.Mpc}$, es importante mencionar que, en un universo en expansión, la constante de Hubble es solo el valor particular, en el tiempo actual, de una variable conocida como el parámetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.9)$$

así también es necesario, para explicar más fácilmente un universo en expansión acelerada, definir el parámetro de desaceleración:

$$q = - \left(\frac{\ddot{a}}{aH^2} \right) = - \left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right). \quad (1.10)$$

Notar que se optó por una convención de signos un poco confusa, un valor positivo de q , corresponde a un universo en desaceleración $\ddot{a} < 0$, y viceversa. La elección del signo de q y la razón de su nombre 'parámetro de desaceleración', se debe a que fue definido por primera vez, durante mediados de la década del 1950, cuando la información limitada disponible favorecía un universo dominado por la materia con $\ddot{a} < 0$.

1.3. Modelo Λ -CDM

El modelo Λ -Cold Dark Matter(Λ -CDM), es un modelo cosmológico de un universo dinámico, es el más simple que puede explicar los diferentes períodos de aceleración y desaceleración, además está en concordancia con el Big Bang, las observaciones de la radiación de fondo de microondas, las observaciones realizadas de supernovas y la estructura a gran escala del universo.

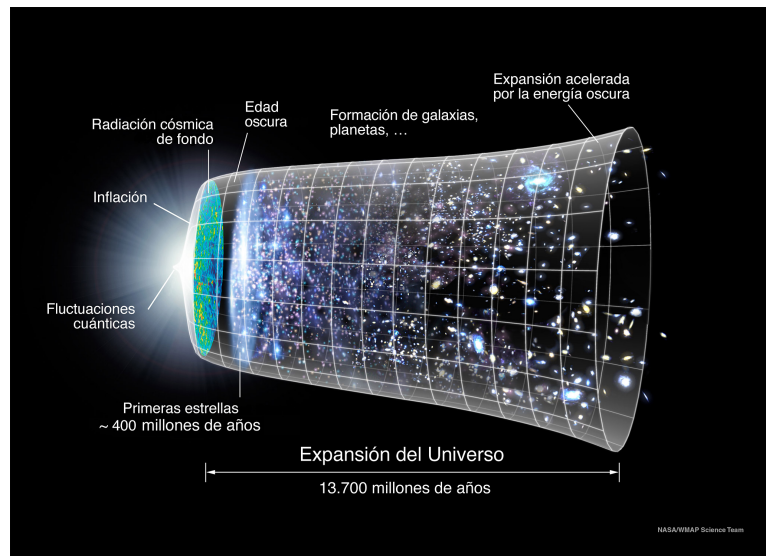


Figura 1.10: Ilustración de las diferentes etapas del universo bajo el modelo Λ -CDM. (<https://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html>)

Ese modelo se logra introduciendo las modificaciones mínimas a las teorías vigentes tanto para la gravitación como para la física de partículas; es un modelo que incorpora la Relatividad General como teoría de la gravitación, la Teoría Cuántica de Campos como teoría de la materia, con las modificaciones mínimas necesarias para dar cuenta del estado observacional que se descubrió a partir de 1997.

Una de estas modificaciones, es el uso de la constante cosmológica Λ , de ahí el nombre del modelo, introduciendo en las ecuaciones de campo un nuevo término. La diferencia entre estas dos modificaciones es la interpretación que se le da al nuevo término. El modelo Λ -CDM, introduce la existencia de una energía extraña, conocida como energía oscura, la misma es la responsable de la expansión tardía del universo. Entonces, cuando el Universo es pequeño en etapas tempranas de su evolución, domina la fuerza atractiva de la gravedad y en etapas posteriores,

cuando la densidad de energía del Universo cae significativamente, domina la acción repulsiva de la energía oscura, lo cual da lugar a una aceleración en la expansión del universo:

$$R_{uv} - \frac{1}{2}Rg_{uv} + \Lambda g_{uv} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{uv}. \quad (1.11)$$

La otra modificación es la existencia de una materia extraña, conocida como materia oscura. Todavía se desconoce la constitución de esta materia, aunque se sabe de su existencia por su interacción gravitatoria con el resto de la materia (curva de la rotación de galaxias, lentes gravitacionales en cúmulos de galaxias, etc.). En este marco cosmológico la materia oscura se denomina fría por estar compuesta de partículas de baja dispersión de velocidades, de ahí la segunda parte del nombre del modelo, 'Cold Dark Matter'. Notar que en ambas propuestas se utiliza el calificativo 'oscuro', esto se debe a que no se tiene fundamentos de la existencia de dichos elementos, sino que más bien son postulados Ad Hoc, que ayudan a que el modelo ajuste muy bien con las observaciones.

El modelo Λ -CDM actualmente tiene estimado el contenido de materia del Universo, gracias a una amplia y diversa cantidad de mediciones, la misma propone que el 70 % de la densidad de energía presente en el universo es energía oscura, que es representada en las ecuaciones por la constante cosmológica. Un 26 % es materia oscura, un tipo de materia que solo interactúa con la gravedad, es decir, no radia electromagnéticamente, y el 4 % restante es materia bariónica, es decir los átomos y los fotones.

1.3.1. Predicciones del modelo Λ -CDM

En la realidad, la evolución del universo es complicada, por el hecho de que contiene diferentes componentes con diferentes ecuaciones de estados; posiblemente sea debido a los diferentes tipos de comportamientos de la materia, que la expansión del universo presenta diferentes etapas de aceleración. El modelo Λ -CDM, como mencionamos al inicio de esta sección, busca coincidir con todas las propiedades observadas del universo, para eso propone la existencia de la energía oscura, con un parámetro de la ecuación de estado de $\omega = -1$, además de la radiación con $\omega = \frac{1}{3}$ y la materia no relativista con $\omega = 0$.

Afortunadamente, la densidad de energía y la presión de los diferentes componentes del universo son aditivas. Podemos expresar la densidad de energía total ρ , como la suma de las densidades de energía de los diferentes componentes:

$$\rho = \sum_{\omega} \rho_{\omega}, \quad (1.12)$$

la presión total P es la suma de las presiones de los diferentes componentes:

$$P = \sum_{\omega} P_{\omega} = c^2 \sum_{\omega} \epsilon_{\omega} \omega. \quad (1.13)$$

Con esta simplificación, es posible encontrar una ecuación general de la evolución de la densidad de energía en el universo, para derivar dicha ecuación partimos de la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho}_{\omega} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_{\omega} + \frac{P_{\omega}}{c^2} \right) = 0, \quad (1.14)$$

$$\dot{\rho}_{\omega} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(1 + \frac{\omega}{c^2} \right) \rho_{\omega} = 0. \quad (1.15)$$

Suponiendo que ω es constante, es posible encontrar la siguiente solución de la ecuación diferencial:

$$\rho_{\omega}(a) = \rho_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}, \quad (1.16)$$

en donde utilizamos las condiciones iniciales $a_0 = 1$, para el presente, en donde la densidad de energía para la componente ω es $\rho_{\omega,0}$. Con la expresión de la evolución de la densidad de energía y adicionalmente la ecuación de Friedmann, es posible encontrar la siguiente ecuación diferencial general para el factor de escala a :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \rho_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{Kc^2}{R_0^2}. \quad (1.17)$$

Notar que esta ecuación está escrita para un K general, si suponemos que es

espacialmente plano entonces, $K = 0$.

Cada término del lado derecho de la ecuación, tiene una dependencia diferente con el factor de escala, resolver esta ecuación para todos sus componentes no nos lleva a formas analíticas simples de a . Es debido a esto que el modelo Λ -CDM, utiliza un método aproximado, hace uso de diferentes etapas de expansión, teniendo en cuenta qué tipo de materia es dominante en cada etapa, y de esta manera trabajando con un universo con un único componente.

Para esta aproximación, como ya mencionamos anteriormente, primero se realiza una estimación del porcentaje de cada tipo de materia y energía contenida en el universo, basado en diferentes observaciones, como el CMB, el contenido de las galaxias, etc. obteniendo que el contenido de radiación es de $\Omega_{r,0} = 8,4 \times 10^{-5}$, la de materia no relativista es de $\Omega_{m,0} = 0,3$ y $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} \approx 0,7$. Con estos valores del contenido del universo y las ecuaciones de estados de los mismos, es posible estimar a partir de que valores de a , empieza y termina cada etapa del universo:

$$\frac{\rho_{\Lambda}(a)}{\rho_m(a)} = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{m,0}} a^3, \quad (1.18)$$

$$\frac{\rho_m(a)}{\rho_r(a)} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{r,0}} a. \quad (1.19)$$

Si el universo ha estado expandiéndose desde un estado inicial muy denso, en algún momento en el pasado, la densidad de energía de la materia no relativista y de energía oscura Λ deben haber sido iguales. Este momento de igualdad entre la materia y Λ ocurrió cuando el factor de escala estaba en un valor específico,

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,75. \quad (1.20)$$

Similarmente, debió existir un momento en donde la densidad de radiación y la de materia no relativista eran iguales, dicho momento ocurrió cuando el factor de escala tomaba el siguiente valor:

$$a_{rm} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{r,0}} \approx 2,8 \times 10^{-4}. \quad (1.21)$$

Por lo tanto, el modelo Λ -CDM concluye que para valores del factor de escala $a \ll 2,8 \times 10^{-4}$, el universo se encontraba en una etapa en donde la radiación dominaba, luego a medida que se fue expandiendo, pasó por la siguiente etapa, en donde la radiación y la materia no relativista son ambas apreciables, por lo tanto, es necesario encontrar soluciones para un universo de múltiples componentes, al menos para un pequeño intervalo cercano al factor de escala $a = 2,8 \times 10^{-4}$.

La evolución continúa con una transición, a una etapa dominada por la materia no relativista, las predicciones indican que esta es la etapa más larga de todas, hasta que la densidad de energía oscura empieza a tomar valores apreciables, cerca de un factor de escala de $a = 0,75$. Aquí nuevamente es necesario encontrar una solución de múltiples componentes, pero esta vez para una combinación entre la densidad de materia no relativista y la energía oscura, mientras que para valores con $a \gg 0,75$, es la energía oscura la que domina, esta es la etapa actual, y la que se espera que sea la última de todas las etapas, según el modelo Λ -CDM.

Se resume las predicciones de este modelo, tanto de la cantidad de materia como de las diferentes etapas del universo y la duración estimada de cada una, en los siguientes cuadros:

Fotones:	$\Omega_{\gamma,0} = 5,0 \times 10^{-5}$
Neutrinos:	$\Omega_{\nu,0} = 3,4 \times 10^{-5}$
Radiación total:	$\Omega_{r,0} = 8,4 \times 10^{-5}$
Materia barionica:	$\Omega_{bary,0} = 0,04$
Materia oscura:	$\Omega_{dm,0} = 0,26$
Materia no relativista:	$\Omega_{m,0} = 0,30$
Energía oscura:	$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0,7$

Tabla 1.1: Lista de componentes

$a_{rm} = 2,8 \times 10^{-4}$	$t_{rm} = 4,7 \times 10^4 \text{ años}$
$a_{m\Lambda} = 0,75$	$t_{m\Lambda} = 9,8 \times 10^9 \text{ años}$
$a_0 = 1$	$t_0 = 13,5 \times 10^9 \text{ años}$

Tabla 1.2: Épocas importantes en la evolución del universo, según el modelo Λ -CDM

Por ultimo se muestra una gráfica en escala log-log, de las predicciones de las diferentes etapas que realiza este modelo (Barbara.Ryden, [2006](#)):

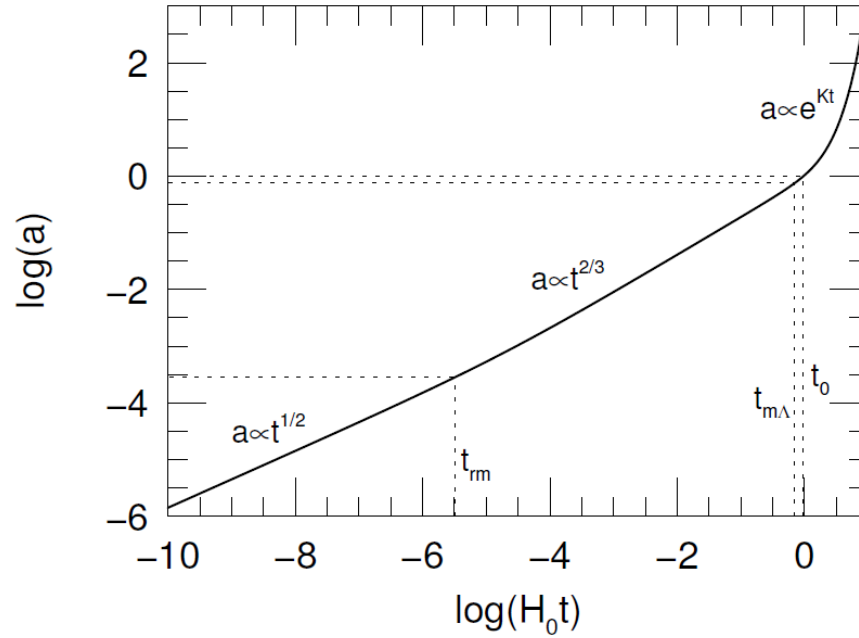


Figura 1.11: Etapas de expansión según el modelo Λ -CDM

Capítulo 2

Cosmología entrópica

Este capítulo se lo dedico a Santi.

Por ser mi amigo piedra, sé que nunca podre devolverte todo lo que hiciste por mí, pero espero algún día tener la oportunidad de hacerlo.

Ojalá que las hipótesis no te hagan sufrir.

'Cada conjetura audaz en la física teórica es un paso hacia la comprensión más profunda, una apuesta por la belleza intrínseca de las leyes naturales.'

En este capítulo vamos a hablar sobre los modelos de cosmología entrópica (J.Sola, 2013), (D.A.Easson, 2011), (Stephen.W.Hawking, 1974), (N. Komatsu, 2013a), (C. Tsallis, 2013), estos se presentan como una alternativa, de la explicación de la expansión acelerada del universo tardío, bajo los efectos de la energía oscura. Los modelos de cosmología entrópica, tienen como hipótesis principal que el horizonte del universo, tiene asociado una temperatura y una entropía, de la misma manera que la tiene el horizonte de sucesos de un agujero negro. Bajo este supuesto, no es necesario la postulación ad-hoc de la existencia de la energía oscura, en cambio, el remplazo es esta entropía asociada al horizonte del universo, la que provee una fuerza entrópica, que provoca la expansión acelerada del universo.

De igual manera que se adopta el principio holográfico para explicar como la información de un BH está contenida en la superficie del horizonte de sucesos, es estos modelos se utiliza el principio holográfico como el motivo de que la información del universo esté codificada en la superficie de su horizonte, a este

horizonte lo llamaremos la pantalla de Hubble. Aunque estos dos horizontes no son realmente análogos, ya que el horizonte del BH es absoluto y separa causalmente dos regiones, debido a una gran curvatura en el espacio provocado por la alta densidad de materia del BH, mientras que la pantalla de Hubble, como se verá más adelante, es relativa al observador y en realidad no es un horizonte que separe causalmente dos regiones del espacio. Sin embargo, en un universo con expansión acelerada, surge la existencia del horizonte cósmico, que si deja incomunicado dos regiones del espacio, provocando un aislamiento causal, el cual en algún tiempo, que depende de la tasa de expansión, coincidirá con la pantalla de Hubble.

En este trabajo, para explicar la analogía de la pantalla de Hubble con el horizonte de sucesos, suponemos que esta y la superficie del horizonte cósmico coinciden desde un inicio, y le asignamos una entropía relacionada con el contenido del universo, dicha entropía al tender a incrementar produce una fuerza entrópica que interactúa con el E-T, provocando la expansión acelerada del mismo, matemáticamente esta propuesta lleva a un término adicional en las ecuaciones de Friedmann, este término es el que nos habilita a poder explicar las diferentes etapas de expansión aceleradas, que experimentó nuestro universo según las observaciones. Esto significa que el tipo de entropía a utilizar toma un papel importante en el análisis de estos modelos, se ha demostrado que los sistemas auto-gravitatorios no pueden analizarse con la mecánica estadística de Gibbs-Boltzmann. En este campo, la estadística de Tsallis ha demostrado ser de gran ayuda, aportando interesantes herramientas para el estudio de este tipo de sistemas. Un BH presenta una estadística muy particular, en la que la entropía es no extensiva, es decir, no depende del volumen, sino del área (entropía de Bekenstein).

Desde la primera propuesta (D.A.Easson, [2012](#)) donde la entropía de Bekenstein fue utilizada por analogía con un BH, varias formas entrópicas fueron propuestas. Sin embargo, es relevante analizar la consistencia termodinámica de los modelos cosmológicos de fuerza entrópica. Se verá en este capítulo que, uno de los puntos que debe resolver la cosmología de fuerza entrópica, para ser tomada como una alternativa seria, es proporcionar un principio físico que señale qué entropía y qué temperatura hay que utilizar en la pantalla de Hubble. Un principio fue propuesto en (D.J. Zamora, [2022b](#)) donde se determinó la temperatura del horizonte del universo exigiendo que se conserve la estructura Legendre de la termodinámica, sin embargo, los modelos encontrados en este paper no concuerdan con los datos

observacionales, a menos que se incluya un término de ley de potencia subdominante.

El término de corrección subdominante se introduce para explicar los diferentes períodos de aceleración y desaceleración en el universo reciente. En (D.J. Zamora, 2022a) se analizaron los distintos tipos de comportamientos y fueron comparados satisfactoriamente con las dependencias observacionales del desplazamiento al rojo del parámetro de Hubble y de los datos de distancia de luminosidad disponibles a partir de supernovas, en la última parte de este capítulo analizaremos las hipótesis, derivaciones y conclusiones de estos trabajos y a partir de ellos propondremos modificaciones, las cuales serán desarrolladas en el capítulo 4.

2.1. Conceptos relevantes para los modelos de cosmología entrópica

Para empezar con este capítulo vamos a definir algunos conceptos de gran relevancia en estos tipos de modelos, que no fueron incluidos en la introducción.

2.1.1. La esfera de Hubble

La esfera de Hubble es una región del universo observable más allá de la cual, debido a la expansión del universo, los objetos parecen alejarse del observador a una velocidad mayor que la velocidad de la luz, esta región del universo existe en todo tipo de expansión, ya sea constante, acelerada o desacelerada. El radio de esta esfera es la conocida como radio de Hubble, y se lo puede obtener a partir de la ecuación (1.8) como.

$$r_H = \frac{c}{H_0}$$

Si bien en el capítulo de introducción habíamos definido anteriormente el horizonte cósmico y el horizonte de partículas, existe una diferencia entre estos dos y la esfera de Hubble. El horizonte de partículas, por ejemplo, se define por la distancia que pudo recorrer la luz desde el BigBang, eventualmente este horizonte está aumentando con el tiempo, y en la actualidad se estima que tiene un valor de aproximadamente 45×10^9 años luz, y no 14×10^9 años luz, como se esperaría por la edad del universo, esto debido a la expansión del universo.

La esfera de Hubble, es la separación entre una zona en el que el E-T se expande más rápido que la velocidad de la luz, y una zona en la que no; sin embargo, esto no significa que las estrellas que se encuentren más allá de la esfera de Hubble se encuentren desconectadas causalmente de nosotros, en parte porque la esfera de Hubble también se está expandiendo y por otro lado porque la luz que recibimos de las estrellas en realidad son del pasado de la misma, en un momento en donde estas no estaban tan alejadas. También es posible definir el universo observable como la región del universo desde la cual hemos tenido tiempo de recibir información en forma de luz.

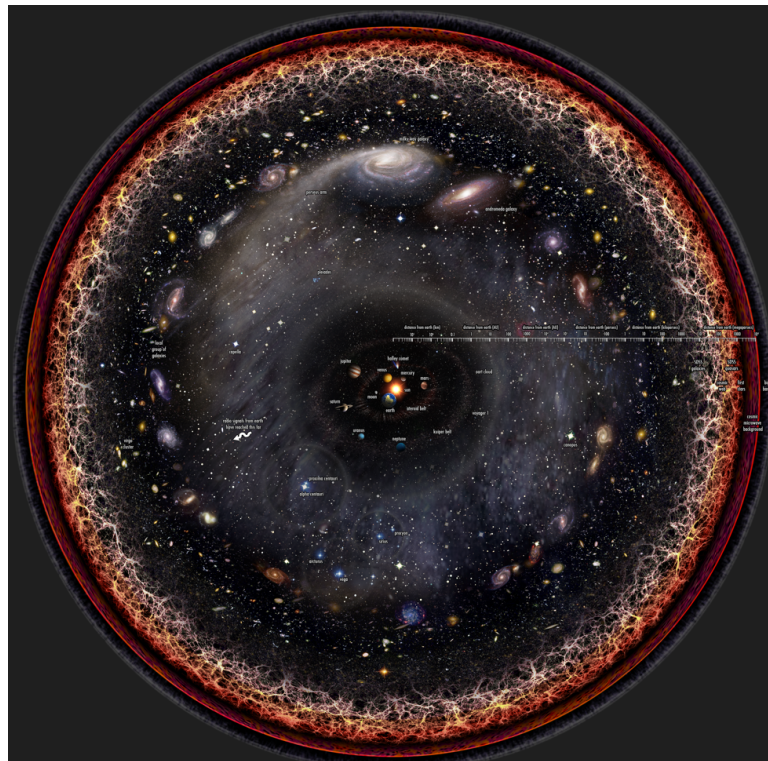


Figura 2.1: Diagrama del universo observable con una escala logarítmica. (<https://www.instagram.com/thecelestialzoo>)

Por último el horizonte cósmico es el que aparece debido a la expansión acelerada del universo y separa causalmente dos observadores, si dos observadores se están alejando a una velocidad tal que, por culpa de la expansión del universo, no puedan interactuar entre sí, existe una separación causal entre estos, análogo a un horizonte de eventos. En la actualidad se estima que este horizonte se encuentra a unos 16×10^9 años luz, mientras que en la actualidad el radio de Hubble está a aproximadamente 15×10^9 años luz.

Uno de los supuestos más importante de estos modelos, que ya mencionamos anteriormente, es la coincidencia de estos dos últimos horizontes, es decir, la superficie de Hubble coincidiría con el horizonte cósmico. Según las predicciones del modelo Λ -CDM se piensa que estos dos horizontes en realidad están muy próximos entre sí, y que en alguno momento deberían de coincidir. Por lo tanto, desde este punto de la tesis, vamos a tratar al horizonte cósmico como si fuera la esfera de Hubble y vamos a asociar una entropía a la superficie de Hubble, análogamente a la forma de trabajar la entropía de Bekenstein-Hawking de los BH, y usaremos el nombre de pantalla de Hubble para entender que se está trabajando con un sistema físico y no con una superficie matemática.

2.1.2. Fuerza entrópica

Una fuerza entrópica es un fenómeno emergente que resulta de la tendencia a aumentar la entropía de un sistema entero, y, por lo tanto, no es una fuerza fundamental, es decir no tiene un campo asociado, como lo son por ejemplo la gravedad o electromagnetismo. Este fenómeno se observa con mayor frecuencia en sistemas que involucran polímeros, macromoléculas u otros sistemas complejos.

La expresión de la fuerza entrópica, para el colectivo canónico, de un macroestado con partición X , siendo esta una coordenada característica del sistema. Esta fuerza se obtiene como el negativo del producto entre su temperatura absoluta T y el gradiente de la entropía:

$$F(X_0) = -T \nabla_X S(X)|_{X_0}. \quad (2.1)$$

Si trabajamos en coordenadas esféricas, para un universo isótropo y homogéneo, condiciones que coinciden con la entropía de la pantalla de Hubble, nos queda:

$$F = -T \frac{dS}{dr}. \quad (2.2)$$

El ejemplo más habitual que podemos mencionar es la presión de un gas ideal, Cuando un gas está contenido en un recipiente, este aplica una presión a las paredes del recipiente que lo contiene, y, por lo tanto, se efectúa una fuerza que tiende a aumentar el volumen del gas. Sabemos que la energía interna de un gas

solo depende de su temperatura y no de su volumen, por lo que se concluye que no es un efecto de energía interna que tienda a aumentar el volumen de la caja. Esto implica que la presión de un gas ideal tiene un origen entrópico, la respuesta es que el efecto de las fluctuaciones térmicas, tiende a llevar al sistema termodinámico, hacia un estado macroscópico que corresponde a un máximo en el número de estados microscópicos, que son compatibles con este estado macroscópico y esto es lo que provoca que el gas quiera aumentar su volumen. En otras palabras, las fluctuaciones térmicas tienden a llevar a un sistema hacia su estado de máxima entropía.

2.1.3. Entropía no aditiva

La entropía no aditiva es un concepto que se refiere a una forma particular de la entropía, que se presenta cuando el sistema analizado no cumple con la propiedad de aditividad. Este tipo de entropía es bastante recurrente para sistemas complejos, con interacciones de largo alcance, y fuera del equilibrio. Esto significa que la entropía total de un sistema compuesto por dos o más subsistemas independientes, no es igual a la suma de las entropías individuales de esos subsistemas. Por ejemplo, en el ámbito de la biología, la entropía de un organismo completo no se puede descomponer simplemente en la entropía de sus partes individuales, ya que las interacciones entre las partes son fundamentales para el funcionamiento del organismo.

Es importante no confundir aditividad con extensividad. Una magnitud es aditiva, si es la suma de la magnitud de sus partes. Mientras que una magnitud es extensiva si, en el límite termodinámico, dicha magnitud es directamente proporcional a su tamaño.

Existen muchas entropías no aditivas, la que vamos a utilizar en esta tesis se define como:

$$S_\delta = K_B \sum_i^w p_i \left(\ln \frac{1}{p_i} \right)^\delta. \quad (2.3)$$

Si $\delta = 1$, entonces esta entropía se convierte en la entropía de Boltzmann-Gibbs.

Suponiendo que las distribuciones son equiprobables, se puede llegar a la siguiente

expresión que conecta con la conocida entropía de Bekenstein-Hawking:

$$\frac{S_{\delta=\frac{d}{d-1}}}{k_B} \propto \left(\frac{S_{BH}}{K_B} \right)^{\frac{d}{d-1}}. \quad (2.4)$$

donde d es la dimensión geométrica del sistema con la que escala la entropía.

Hasta ahora, no se usó ningún principio de deducción de la forma de la entropía cosmológica, encontrarlo es uno de los objetivos más importantes para desarrollar una expresión correcta de la fuerza entrópica. Los primeros modelos usan, razonablemente, la entropía de Bekenstein-Hawking, pero no logran explicar correctamente la expansión del universo, es por esto que empezaron a considerar otras entropías, pero al continuar utilizando la temperatura de Hawking, se dejaba de respetar ciertos principios de la termodinámica. Encontrar una relación entre la entropía y la temperatura, para que la elección de las mismas asegure la consistencia termodinámica, es un objetivo relevante de estos modelos, en la siguiente sección de este capítulo se mostrará una posibilidad para dicha relación.

2.2. Entropía y temperatura termodinámicamente consistentes

Desde la primera propuesta en donde se consideraba que la entropía y la temperatura de la pantalla de Hubble eran similar a la entropía de Bekenstein-Hawking y la temperatura de Hawking, varios modelos que proponían una diferente entropía fueron propuestos, estos mismos no cumplen con la estructura termodinámica de Legendre, lo que significa contradecir las leyes de una de las teorías físicas más fundamentales, como lo es la termodinámica, por esto se propuso en (D.J. Zamora, 2022b) un principio que permita encontrar la temperatura de la pantalla de Hubble exigiendo que se conserve esta estructura.

La misma se deduce partiendo de la ecuación de la energía libre de Gibbs para un sistema de dimensión arbitraria:

$$G(V, T, p, \mu, \dots) = U(V, T, p, \mu, \dots) - TS(V, T, p, \mu, \dots) + pV - \mu N(V, T, p, \mu, \dots) - \dots, \quad (2.5)$$

se puede distinguir en esta transformación de Legendre tres tipos de variables:

1. Aquellos que se suponen que siempre son extensivos, como la entropía, el volumen y el número de moles, que por ejemplo pueden escalar con L^d donde L es una dimensión lineal característica del sistema d -dimensional.
2. Aquellos que caracterizan las condiciones externas bajo las cuales se encuentra el sistema, como la temperatura la presión y el potencial químico, los mismos escalan con L^θ .
3. Aquellos que representan energía, como la energía interna o la energía libre de Gibbs, los mismos escalan con L^ϵ

Entonces de la ecuación de energía libre de Gibbs podemos deducir la siguiente relación simple,

$$\epsilon = \theta + d. \quad (2.6)$$

En el caso en el que estemos trabajando con fuerzas de corto alcance, la termodinámica estándar sí es aplicable en dicho sistema, por lo que $\theta = 0$ representa esta situación específica. Sin embargo, esto no ocurre con las fuerzas auto-gravitatorias, La expresión de la energía según la RG es:

$$E = Mc^2. \quad (2.7)$$

De aquí se puede ver que la energía de un BH escala con su masa M_{BH} , y teniendo en cuenta la expresión del radio de Schwarzschild,

$$r_{BH} = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2.8)$$

se puede deducir directamente la relación entre la energía y el radio del horizonte de sucesos, la misma muestra una relación de proporcionalidad directa $E_{BH} \propto r_{BH}$, entonces $\epsilon = 1$. Por lo tanto, la entropía y la temperatura de un BH debe respetar la siguiente relación,

$$\theta = 1 - d. \quad (2.9)$$

Si además identificamos a la información del BH como codificada en la superficie del horizonte de sucesos, entonces se lo debe considerar como un sistema con $d = 2$ y, por lo tanto, $\theta = -1$. Entonces se verifica que el conjunto de la entropía de Bekenstein-Hawking y la temperatura de Hawking no violan la estructura termodinámica de Legendre, los mismos escalan con $S \propto L^2$ y $T \propto \frac{1}{L} \propto \frac{1}{M_{bh}}$ respectivamente. Es por esto que si queremos proponer un conjunto de entropía y temperatura para nuestra pantalla de Hubble que sea consistente con la termodinámica debemos respetar este principio básico, no podemos cambiar como escala la entropía si no lo hacemos también con su respectiva temperatura, por ejemplo si tomáramos un sistema con $d = 3$, se utiliza la entropía $S_{\delta=\frac{3}{2}}$, entonces $\theta = -2$, es decir que nuestra temperatura escalaría con $\frac{1}{L^2} \propto \frac{1}{M_{bh}^2}$.

2.3. Modelos cosmológicos de entropía con escalamiento arbitrario

En esta sección vamos a analizar la primera propuesta hecha sobre las formas de la entropía y la temperatura, con un escalamiento arbitrario de ambas variables y consistentes con la estructura termodinámica de Legendre, realizada en (D.J. Zamora, [2022b](#)).

Considerando una entropía que escale con la longitud elevada a una potencia arbitraria $d \in \mathbb{R}^+$. Asegurando que la misma sea consistente con la estructura termodinámica de Legendre, para esto vamos a suponer que la energía relacionada con la pantalla de Hubble también escala directamente con r_H , como es de esperarse de cualquier sistema con interacción gravitatoria, es decir que $\epsilon = 1$.

Definiremos la forma de esta entropía, basándonos en la entropía de Bekenstein-Hawking,

$$S_{BH} = k_B \pi \left(\frac{r_H}{L_P} \right), \quad (2.10)$$

y deduciendo de la relación encontrada en la ecuación (1.4). Vamos a proponer que la entropía generalizada es de la forma:

$$S = k_B A_d \left(\frac{r_H}{L_P} \right)^d \quad (2.11)$$

Donde A_d es un factor adimensional.

Lo mismo haremos para la expresión de la temperatura, en este caso haciendo analogía a la temperatura de Hawking y exigiendo que $\theta = 1 - d$.

$$T = \frac{T_P L_P}{2\pi r_H} \quad (2.12)$$

Siendo $L_P = \left(\frac{\hbar G}{c} \right)^{\frac{1}{2}}$ y $T_P = \left(\frac{\hbar c^5}{G k_B^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, la longitud y temperatura de Planck respectivamente.

Entonces la temperatura generalizada sera de la forma:

$$T = \frac{T_P}{B_d} \left(\frac{r_H}{L_P} \right)^{1-d}. \quad (2.13)$$

Donde B_d es un factor adimensional.

Para verificar si estas propuestas, de entropía y temperatura, son adecuadas para explicar la expansión tardía del universo, es necesario analizar las ecuaciones de Friedmann con una variación en la presión del universo, provocada por la fuerza entrópica de la pantalla de Hubble.

2.3.1. Ecuaciones de Friedmann con término de fuerza entrópica

En esta sección vamos a analizar las soluciones a las ecuaciones de Friedmann, utilizando los modelos de fuerza-entrópica termodinamicamente consistente con un escalamiento arbitrario. Vimos al inicio de este capítulo que la fuerza entrópica está dada por:

$$F = -T \frac{dS}{dr_H} = -k_B \frac{dA_d}{B_d} \frac{T_P}{L_P} = -C_d F_P, \quad (2.14)$$

donde $F_P = k_B \frac{T_P}{L_P} = \frac{c^4}{G}$ es la fuerza de Planck, y $C_d = d \frac{A_d}{B_d}$.

Por lo tanto, al dividir esta fuerza sobre el área de la superficie de Hubble, obtenemos la expresión para la presión entrópica, esto lo podemos hacer con seguridad al suponer un universo isotrópico,

$$p_F = \frac{F}{4\pi r_H^2} = -\frac{C_d F_P}{4\pi r_H^2} = -\frac{C_d c^2}{4\pi G} H^2. \quad (2.15)$$

Para obtener las ecuaciones de Friedmann modificadas por p_F , remplazamos la presión efectiva $p' = p + p_F$ en la ecuación de aceleración:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p'}{c^2} \right). \quad (2.16)$$

Al remplazar la presión, obtenemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + C_d H^2, \quad (2.17)$$

donde ρ es la densidad de energía total del universo, la cual es constante bajo el supuesto de un universo homogéneo.

Ahora remplazando p' en la ecuación de continuidad,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p'}{c^2} \right) = 0. \quad (2.18)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = \frac{3C_d}{4\pi G} H^3. \quad (2.19)$$

Finalmente se puede deducir la ecuación de Friedmann a partir de las dos ecuaciones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3}. \quad (2.20)$$

Estas son las tres ecuaciones principales del modelo de fuerza-entrópica genérica, pero solo 2 de estas son independientes.

2.3.2. Soluciones de las ecuaciones de Friedmann

Obtenemos la solución del modelo bajo el supuesto de un universo homogéneo, isótropo y aparte vamos a considerar un universo plano, es decir, con $K = 0$ (se puede ver la obtención, paso a paso, de todas las soluciones obtenidas en este capítulo, en el apéndice B). Esta solución describe la evolución del parámetro de Hubble con el factor de escala a :

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2C_d - 3(1+\omega)}{2}}, \quad (2.21)$$

donde a_0 y H_0 siendo los valores de a y H en el presente.

Se puede obtener la siguiente solución explícita dependiente del tiempo si se resuelve esa ecuación ordinaria de primer orden,

$$\frac{a}{a_0} = \left[\frac{3 + 3\omega - 2C_d}{2} H_0(t - t_0) + 1 \right]^{\frac{2}{3+3\omega-2C_d}}. \quad (2.22)$$

El parámetro de desaceleración $q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$ esta dado por la siguiente constante:

$$q = \frac{2 - 3(1 + \omega) + 2C_d}{2}, \quad (2.23)$$

en donde $\omega = \frac{p}{\rho c^2}$ es el parámetro que determina el tipo de contenido del universo, el mismo se obtiene de la ecuación de estado de cada tipo de materia, respectivamente, bajo el supuesto de un gas diluido e ideal.

De esta solución se puede llegar a la conclusión de que el modelo es incapaz de explicar periodos de aceleración y desaceleración al mismo tiempo, sin importar que contenido sea el dominante en el universo, esto debido a que el parámetro de desaceleración es constante, es decir no depende del tiempo, ni con respecto a H ni a . Esto claramente es una limitación del modelo, ya que se observaron periodos de desaceleración, que lograron ser predecidos por el modelo Λ -CDM, en donde la materia bariónica es la dominante, y el parámetro de desaceleración toma un valor aproximado a $q = +0,5$, y también periodos de aceleración como en el que nos encontramos actualmente, es por esto que necesitamos que el parámetro de desaceleración dependa del tiempo y sea capaz de explicar ambos periodos.

En la siguiente sección vamos a analizar una de las propuestas para resolver este inconveniente, el mismo consiste en agregar un término extra, de corrección, en la expresión de la entropía, que represente los aportes de superficie.

2.4. Modelos con un término subdominante y sus soluciones

Como lo hicimos en la sección anterior, vamos a considerar una entropía que escale con la longitud elevada a una potencia arbitraria $d \in \mathbb{R}^+$, pero ahora vamos a agregar un término que depende de una potencia menor $0 < \Delta < d$:

$$\frac{S}{k_B} = A \left(\frac{r_H}{L_P} \right)^d + E \frac{\left(\frac{r_H}{L_P} \right)^\Delta - 1}{\Delta}, \quad (2.24)$$

donde A y E son constantes adimensionales.

La fuerza entrópica entonces será:

$$F = -k_B \frac{dA}{B} \frac{T_P}{L_P} \left[1 + \frac{E}{dA} \left(\frac{r_H}{L_P} \right)^{\Delta-d} \right] = C_d F_P (1 + D_{d,\Delta} H^{\Delta-d}), \quad (2.25)$$

donde $C_d = d \frac{A}{B}$, y $D_{d,\Delta} = \frac{E}{dA} \left(\frac{L_P}{c} \right)^{d-\Delta}$.

Por lo tanto, la presión entrópica en la pantalla de Hubble es:

$$p_F = \frac{F}{4\pi r_H^2} = -\frac{C_d c^2}{4\pi G} H^2 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}). \quad (2.26)$$

Siguiendo el mismo procedimiento realizado en la sección (2.3.1), se puede obtener las tres ecuaciones de Friedmann, las cuales quedarían como:

- Ecuación de aceleración:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + C_d H^2 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) \quad (2.27)$$

- Ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = \frac{3C_d}{4\pi G} H^3 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) \quad (2.28)$$

■ Ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (2.29)$$

Obtenemos las soluciones de dichas ecuaciones, bajo el supuesto de un universo homogéneo, isotrópico y completamente plano, al igual que hicimos anteriormente:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}[2C_d-3(1+\omega)]} = \frac{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + [2C_d - 3(1+\omega)] \left(\frac{H_0}{H}\right)^{d-\Delta}}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + [2C_d - 3(1+\omega)]}. \quad (2.30)$$

Es posible, partiendo de la ecuación anterior, obtener la siguiente solución explícita con el tiempo:

$$\begin{aligned} (1+d-\Delta)C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} H_0(t-t_0) &= [(2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} - 2C_d - 3(1+\omega)) \times \\ &\quad \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}[2C_d-3(1+\omega)]} - 2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}]^{1+\frac{1}{d-\Delta}} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(1, 1+\frac{1}{d-\Delta}; 2+\frac{1}{d-\Delta}; 1-\frac{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} - 2C_d - 3(1+\omega)}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}}\right) \\ &\quad - {}_2F_1\left(1, 1+\frac{1}{d-\Delta}; 2+\frac{1}{d-\Delta}; \frac{2C_d - 3(1+\omega)}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}}\right) B^{(1+\frac{1}{d-\Delta})}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

En donde ${}_2F_1(a, b, c; z)$ es la función hipergeométrica Gaussiana, que se muestra en el apéndice A. También podemos encontrar el parámetro de desaceleración $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$, utilizando la ecuación (2.30), para la cual encontramos la siguiente expresión;

$$q = -1 - \frac{[2C_d - 3(1+\omega)]}{2} - C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}. \quad (2.32)$$

Como se puede ver, este parámetro de desaceleración sí es capaz de explicar periodos de aceleración y desaceleración de la expansión del universo, ambos con

una única expresión de q dependiente del tiempo.

2.4.1. Análisis del parámetro de desaceleración dependiente de t

En esta sección estudiaremos como el término subdominante, que se agregó a la expresión de la entropía generalizada, influye en el comportamiento del parámetro de desaceleración, $q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$. El parámetro de desaceleración depende de H , y, por lo tanto, del tiempo, de aquí se puede encontrar una dependencia con el RS, utilizando la definición, $1 + z = \frac{a_0}{a}$, entonces escribiendo $H(z)$, el parámetro de desaceleración nos queda:

$$q = -1 - \frac{[2C_d - 3(1 + \omega)]}{2} - \frac{C_d D_{d,\Delta}}{(z + 1)^{\frac{1}{2}(d-\Delta)(2C_d-3(1+\omega))} \left(H_0^{-(d-\Delta)} + \frac{2C_d D_{d,\Delta}}{2C_d-3(1+\omega)} \right) - \frac{2C_d D_{d,\Delta}}{2C_d-3(1+\omega)}}.$$

Para simplificar la notación, haremos uso de dos constantes, $A = 2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}$ y $B = 2C_d - 3(1 + \omega)$, se hará uso de las mismas constantes en el desarrollo paso a paso que se presenta en el apéndice B,

$$q = -1 - \frac{B}{2} - \left[\frac{1}{(z + 1)^{\frac{1}{2}(d-\Delta)A} \left(1 + \frac{A}{B} \right) - \frac{A}{B}} \right] \frac{A}{2}. \quad (2.33)$$

Dependiendo de la combinación de los parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$ y Δ , el parámetro de desaceleración puede tomar valores positivos o negativos y, por lo tanto, es capaz de explicar tanto periodos de aceleración ($q < 0$) como periodos de desaceleración ($q > 0$). No solo eso, sino que también diferentes combinaciones de estos parámetros nos dan diferentes comportamientos de la función $q(z)$, por lo que es de esperarse que esta expresión pueda ajustarse, tanto a las predicciones del modelo Λ -CDM, como a los diferentes datos observacionales que sirve de contrastación empírica de los modelos de cosmología relativista.

Los diferentes métodos de verificación del modelo serán tratados en el siguiente capítulo. Pero antes de eso, es importante mencionar que las soluciones obtenidas hasta ahora, son solo aplicables para universos con un único componente, es decir, ya sea radiación, materia no relativista o algún otro tipo de materia (como

posiblemente la materia oscura) respectivamente, y no son utilizables para un universo con múltiples componentes. Está más que verificada la existencia de, al menos, dos tipos de materia, la radiación y la materia no relativista, por lo tanto, es de esperarse que las soluciones obtenidas hasta ahora, no sean las que verdaderamente expliquen la realidad de la expansión tardía del universo.

Sin embargo, analizar estas soluciones sí es de gran valor teórico, ya que sirven de testeo para la verificabilidad de los modelos de cosmología entrópica, además de que proporciona diversas conclusiones que son de ayuda para futuros modelos del universo con múltiples componentes.

Capítulo 3

Datos

Este capítulo se lo dedico a Lourdes.

Por ayudarme en un momento difícil. Me hace feliz verte triunfar porque en tu luz veo reflejado algunos momentos de mi pasado.

Ojalá que tengas éxito en tu vida académica.

'Cada observación de luz en la cosmología es una ventana hacia el pasado, una mirada a las eras que precedieron nuestra existencia.'

En este capítulo se hablará de los datos observacionales que utilizaremos para verificar la validez de nuestros modelos (PlanckCollaboration, [2018](#)), (D.M.Scolnic, [2018](#)), (A.Pradhan, [2021](#)). Primero describiremos las observaciones que normalmente se utilizan para la contrastación de modelos cosmológicos, y mencionaremos los últimos datos que se obtuvieron de los mismos.

3.1. Distancia propia y Distancia lumínica

Para poder determinar la velocidad de expansión del universo, es necesario medir la distancia y el RS de un objeto astronómico, y cuanto más lejos esté dicho objeto, más del pasado es la información que obtenemos. En un principio determinar estos valores parece un trabajo simple, pero, sin embargo, no es así, las observaciones presentan grandes problemas, tanto técnicos como teóricos.

Medir el redshift (RS) de una galaxia es relativamente fácil, con la automatización

que se tiene hoy en día en los estudios de las galaxias, es posible encontrar cientos de RS en un solo día. Lo difícil es medir la distancia de una galaxia, aún más si el universo está en expansión, en principio se podría definir esta distancia como la longitud de la geodésica espacial entre dos puntos, donde el factor de escala está fijado en el valor $a(t)$. Si suponemos que se observa, en el tiempo t_0 , una luz que fue emitida por una galaxia lejana en el tiempo t_e , la distancia propia a la galaxia es:

$$d_p(t_0) = c \left[\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right]. \quad (3.1)$$

Sin embargo, la distancia propia actual hacia una galaxia, $d_p(t_0)$, no es una propiedad medible si se trata de distancias cosmológicas. Si intentaras medir la distancia a una galaxia con una cinta métrica, por ejemplo, la distancia estaría aumentando. Sin embargo, la distancia propia actual hacia una galaxia, $d_p(t_0)$, no es una propiedad medible si se trata de distancias cosmológicas. Si se intentara medir la distancia a una galaxia con una cinta métrica, por ejemplo, la distancia estaría aumentando continuamente a medida que se extendiera la cinta. Para medir la distancia propia en el momento t_0 , sería necesario una cinta métrica que pudiera extenderse a una velocidad infinita; alternatively, sería necesario detener la expansión del universo en su factor de escala actual mientras se midiera la distancia a tu ritmo. Ninguna de estas alternativas es físicamente posible.

Es por esto que debemos buscar otras propiedades, que sí sean físicamente medibles para objetos a distancias cosmológicas. Por ejemplo, es posible medir el flujo de luz f proveniente del objeto, expresado en $\frac{Watts}{m^2}$. Por lo tanto, solo hace falta una ecuación que relacione la luminosidad de un objeto con su distancia.

Es así como se define la distancia lumínica d_L para poder medir objetos a distancias cosmológicas, la cual relaciona el flujo medido f (luminosidad medida en la tierra) con la luminosidad absoluta o intrínseca L (la luminosidad real del objeto) de un objeto brillante en el espacio:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Si el universo fuera estático y plano, la distancia lumínica es igual a la distancia

propia, ya que en un universo euclidiano estático, la propagación de la luz sigue la ley del inverso al cuadrado,

$$f = \frac{L}{4\pi d_p^2}. \quad (3.3)$$

Suponiendo que estamos en un universo descrito por la métrica de Robertson-Walker, los fotones que son emitidos en el tiempo t_e son, en el momento presente, expandidos sobre una esfera de radio $d_p(t_0) = r$ y una superficie con área propia $A_p(t_0)$. Si el espacio es plano $k = 0$, entonces el área propia de la esfera esta dada por $A_p(t_0) = 4\pi r^2$, para una curvatura diferente de cero, seria $A_p(t_0) = 4\pi G_k(r)^2$. Siendo $G_k(r)$ un función que depende de la distancia y que toma diferentes formas según la curvatura del E-T.

Adicionalmente a estos efectos geométricos, que se aplicarían incluso en un universo estático, la expansión del universo, hace que el flujo observado de luz de un objeto luminoso, con desplazamiento al rojo z , se reduzca por un factor de $(1+z)^{-2}$. Esto debido a la combinación de dos efectos:

- El primero de estos es debido a que la expansión del universo hace que la energía de cada fotón de la candela estándar disminuya. Si un fotón comienza con una energía $E_e = \frac{hc}{\lambda_e}$ cuando el factor de escala es $a(t_e)$, cuando lo observamos, con un factor de escala $a(t_0) = 1$, la longitud de onda habrá aumentado con la siguiente expresión:

$$\lambda_0 = \lambda_e(1+z).$$

Por lo tanto la energía se verá reducida por el siguiente factor:

$$E_0 = \frac{E_e}{1+z}.$$

- En segundo lugar, gracias a la expansión del universo, el tiempo entre las detecciones de fotones será mayor. Si dos fotones son emitidos en la misma dirección separados por un intervalo de tiempo δt_e , la distancia propia entre ellos inicialmente será $c\delta t_e$; cuando detectemos los fotones en el tiempo t_0 , la distancia propia entre ellos se habrá estirado a $c\delta t_e(1+z)$, y los detectaremos

separados por un intervalo de tiempo $\delta t_0 = \delta t_e(1 + z)$.

El resultado final, debido a la combinación de estos dos efectos, es que en un universo en expansión y curvado espacialmente, la relación entre el flujo lumínico medido f y la luminosidad absoluta L de una fuente de luz distante es:

$$f = \frac{L}{4\pi G_k(r)^2(1 + z)^2}.$$

Por lo tanto la distancia lumínica sería:

$$d_L = G_k(r)(1 + z)$$

Los valores posibles para $G_k(r)$, si suponemos que el E-T está descrito por la métrica FRW, son:

$$G_k(r) = \begin{cases} R_0 \sin^{-1}\left(\frac{r}{R_0}\right) & K = +1 \\ R_0 \sinh^{-1}\left(\frac{r}{R_0}\right) & K = -1 \\ r & K = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Basándonos en la evidencia disponible, que parece indicar que estamos en un universo plano, o casi plano, con un radio de curvatura R_0 más grande que la distancia actual del horizonte cosmológico. Esto implica que para nuestro universo $G_k(r) = r$, por lo tanto, la relación entre la distancia propia y la distancia lumínica se vuelve muy simple,

$$d_L = r(1 + z) = d_p(t_0)(1 + z). \quad (3.5)$$

Es decir que para poder medir grandes distancias solo nos hace falta conocer los parámetros z , f , y L . Los primeros dos son fáciles de obtener, ya que se puede observar desde la tierra, como ya mencionamos anteriormente; sin embargo, la determinación de la luminosidad absoluta o intrínseca de un objeto a distancias

cosmológicas es un trabajo más difícil de realizar. Para esto es necesario el uso de 'candelas estándar', objetos astronómicos cuya luminosidad intrínseca se conoce con alta precisión, gracias a alguna propiedad conocida de la misma, y que se utilizan como una referencia para calibrar la luminosidad de otros objetos.

3.2. Estrellas Cefeidas como candelas estándar

En cosmología se utilizó las estrellas Cefeidas como candelas estándar por un largo periodo de tiempo. Esto debido a que son estrellas gigantes con alta luminosidad, con una luminosidad promedio en el rango de 40000 veces la luminosidad del sol; sin embargo, son inestables, ya que su luminosidad varía, parcialmente debido al cambio en su área superficial y parcialmente debido a las variaciones en la temperatura superficial a medida que la estrella pulsa, sus luminosidades promedio varían aproximadamente en dos órdenes de magnitud.

A primera vista, las Cefeidas no parecen estar suficientemente estandarizadas para ser consideradas velas estándar, pero Henrietta Leavitt descubrió la clave para calibrar estas estrellas. Para cada Cefeida en la Pequeña Nube de Magallanes, ella midió el periodo P , encontrando el tiempo entre los máximos en el brillo observado, y encontró el flujo promedio $\bar{f}$, promediado durante un período completo. Leavitt descubrió una relación período-luminosidad para las estrellas Cefeidas variables. Si la misma relación período-luminosidad es válida para todas las Cefeidas, en todas las galaxias, entonces las Cefeidas pueden actuar como una vela estándar.

Supongamos, por ejemplo, que encontramos una estrella Cefeida en la Gran Nube de Magallanes (LMC), y otra en M31. Ambas tienen un período de pulsación de 10 días, por lo que asumimos, a partir de la relación período-luminosidad, que tienen la misma luminosidad promedio $\bar{L}$. Si medimos cuidadosamente el flujo que se recibe en la tierra, obtendríamos aproximadamente:

$$\frac{\bar{f}_{LMC}}{\bar{f}_{M31}} = 230.$$

Por lo tanto concluimos que la distancia lumínica de M31 es mayor que la de LMC por un factor:

$$\frac{d_L(M31)}{d_L(LMC)} = \left(\frac{\bar{f}_{LMC}}{\bar{f}_{M31}} \right)^{\frac{1}{2}} = 15,2.$$

De esta manera, si conocemos la distancia lumínica de las estrellas Cefeidas,

podríamos conseguir la de otros objetos utilizando estas como referencia, desafortunadamente, las Cefeidas son estrellas raras; solo las Cefeidas más cercanas en nuestra Galaxia tienen sus distancias medidas con una precisión aceptable. Esto presenta la dificultad principal de utilizar las estrellas cefeidas como candelas estándar, en el contexto cosmológico, ya que con ellas solo podemos llegar a medir distancias de máximo 20 megapársecs (Mpc)¹; a esta escala, no se puede asumir que el universo sea homogéneo e isotrópico, y es por esto que no puede ser utilizado en nuestro contexto, ya que viola un supuesto de gran importancia para los modelos cosmológicos.

¹Un megapársec equivale a un millón de pársecs o a 3,09 millones de años luz. Un pársec es la distancia a la cual una estrella muestra un paralaje de un segundo de arco cuando se observa desde la Tierra.

3.3. Supernovas tipo Ia como candelas estándar

Una supernova es una explosión estelar de gran energía que suceden en las últimas fases de la vida de una estrella masiva o de un sistema binario, desde el punto de vista observacional las mismas tienen una clasificación en base al análisis de las líneas de absorción del espectro electromagnético. Se dividen en tipo I y II dependiendo respectivamente de la ausencia o presencia de líneas de hidrógeno en el espectro. Cada uno de estos tipos se subdivide a su vez en subtipos según características adicionales del espectro, que se denotan con una letra. Actualmente, se conocen las supernovas de tipo Ia, Ib, Ic y II; para la determinación de distancias cosmológicas, las supernovas de mayor interés son las de tipo Ia debido a que son del tipo más luminoso, incluso llegan a ser más brillantes que la galaxia en la que se encuentran y también porque tanto las propiedades espectrales como las magnitudes absolutas y la forma de las curvas de luz de las Ia son increíblemente homogéneas. Gracias a estas propiedades de las supernovas tipo Ia se puede conocer su brillo intrínseco y se las puede identificar a grandes distancias, de ahí que se las considere candelas estándar.

Desde un punto de vista físico, las supernovas tipo Ia (abreviadas SNIa) corresponden a explosiones termonucleares en un sistema binario en el que una de las componentes es una enana blanca. Este tipo de sistemas binarios resulta de la evolución de dos estrellas de distinta masa ligadas gravitacionalmente y orbitando una alrededor de la otra. La estrella más masiva agota su combustible nuclear primero, pues su producción de energía es desproporcionadamente más rápida.

En 1931, el físico indio Subrahmanyam Chandrasekhar (1910-1995) demostró que existe un valor máximo para la masa de una enana blanca que puede estabilizarse mediante el mecanismo de la presión de degeneración de sus electrones. Este valor, denominado ahora “límite de Chandrasekhar”, corresponde a aproximadamente 1,4 veces la masa del Sol, y es un parámetro crítico en la evolución estelar.

Para producir una supernova Ia se tiene que dar una serie de coincidencias en el sistema binario, principalmente que en las primeras fases la enana blanca tenga una masa inferior al límite de Chandrasekhar, ya que esta situación de estabilidad permitirá a la estrella compañera evolucionar con normalidad. Cuando esta segunda estrella empieza a agotar el combustible nuclear de su centro, su estructura interna cambia, y se convierte en lo que llamamos una gigante roja, estas

estrellas tienen la característica de tener su capa más externa débilmente ligada a su núcleo central. Aprovechándose de esto, la enana blanca empieza a aumentar su masa por el fenómeno de transferencia de materia de la gigante roja hasta acercarse al valor límite de Chandrasekhar.

La explicación más aceptada actualmente de lo que ocurre con la enana blanca al llegar a este límite, es un proceso de reacción nuclear que transforma el carbono y el oxígeno en níquel, y que libera suficiente energía como para destruir completamente la estrella. Esta explosión nuclear a escala estelar es lo que observamos como una supernova, y su brillo visual absoluto puede superar el del Sol por un factor de varios miles de millones. Este enorme brillo resulta de una combinación de la energía de la propia explosión y, en las semanas posteriores a ella, de la energía de la desintegración de níquel y cobalto radiactivos producidos en la explosión, que calientan el material eyectado y mantienen un brillo que disminuye gradualmente.

Se puede inferir que el brillo máximo de las SnIa es bastante uniforme. Además, se ha encontrado que existe una relación entre el pico máximo de luminosidad de la SnIa y la tasa de decrecimiento de la luminosidad luego de ese máximo.

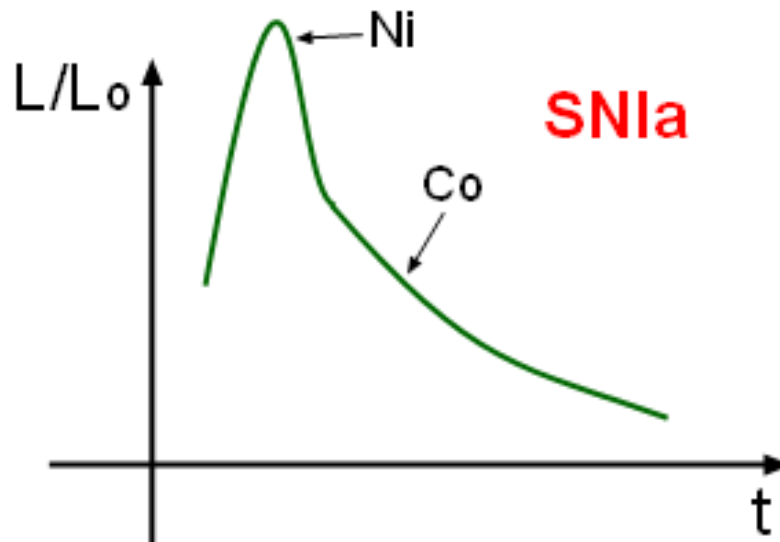


Figura 3.1: Curva de luz esquemática de una supernova tipo Ia. En la figura se muestra a qué elemento corresponde la luminosidad observada. (<https://es.wikipedia.org/wiki/Supernova>.)

3.4. El sistema de 'Magnitud'

Para presentar los resultados más recientes de las supernovas, es importante introducir el concepto de 'magnitud' utilizado por los astrónomos para expresar flujos y luminosidades.

El astrónomo griego Hiparco, en el siglo *II* a.C., dividió las estrellas en seis clases según su brillo aparente. Las estrellas más brillantes se clasificaron como de 'primera magnitud', las estrellas más tenues visibles a simple vista se consideraron de 'sexta magnitud', y las estrellas intermedias se clasificaron como de segunda, tercera, cuarta y quinta magnitud. Tiempo después se comprendió que la respuesta del ojo humano es aproximadamente logarítmica y que las estrellas de primera magnitud tienen flujos (en longitudes de onda visibles) aproximadamente 100 veces mayores que las estrellas de sexta magnitud. Sobre la base de esta comprensión, el sistema de magnitudes se estableció sobre una base matemática más rigurosa. En la actualidad la magnitud aparente de una fuente de luz se define como:

$$m = -2,5 \log_{10} \frac{f}{f_x}. \quad (3.6)$$

En donde f_x es el flujo de referencia, que equivale a $f_x = 2,53 \times 10^{-8} \frac{Watts}{m^2}$. La elección del flujo de referencia f_x constituye un homenaje a Hiparco (Barbara.Ryden, 2006).

La magnitud absoluta de una fuente de luz se define como, la magnitud aparente que tendría si estuviera a una distancia de luminosidad de $d_L = 10pc$:

$$M = -2,5 \log_{10} \frac{L}{L_x}. \quad (3.7)$$

Donde la luminosidad de referencia L_x es 78,7 la luminosidad del sol.

Aunque el sistema de magnitudes aparentes y absolutas puede parecer extraño para quienes no están familiarizados, la magnitud aparente no es más que una medida logarítmica del flujo luminoso, y la magnitud absoluta es una medida logarítmica de la luminosidad.

Dadas las definiciones de magnitud aparente y magnitud absoluta, la relación entre la magnitud aparente de un objeto y su magnitud absoluta se puede expresar de la siguiente manera:

$$M = m - 5 \log_{10} \frac{d_L}{10}. \quad (3.8)$$

Debido a al signo negativo en la definición, un valor pequeño de la magnitud corresponde a un valor alto de flujo.

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo y esta frase se la dedico a mi hermano.

Por compartir conmigo estos últimos años y enseñarme a sobrevivir en el camino. Seguí esforzándote que los resultados están muy cerca.

'No importa cuántos errores cometas o cuán lento sea tu progreso, todavía estás por delante de todos los que ni siquiera lo intentan.'

En la primera sección de este capítulo se presentan y se analizan, los resultados obtenidos de las soluciones de las ecuaciones de Friedmann con una entropía de la pantalla de Hubble de exponente arbitrario, con corrección logarítmica y con el supuesto de que todo el contenido del universo es radiación, además se realiza los ajustes necesarios para contrastar estos resultados con los datos de supernova.

Luego, en la segunda sección, se deducen las ecuaciones de Friedmann para un universo con componentes múltiples, en este caso suponiendo que existe tanto materia bariónica como radiación. Además, se encuentra una solución aproximada de las ecuaciones de Friedmann, utilizando métodos numéricos y a partir de esta se estima los porcentajes de contenidos del universo, bajo este modelo simplificado de dos componentes.

4.1. Universo compuesto solo de radiación

Partiendo de las soluciones realizadas en el capítulo 2, con las suposiciones de un universo homogéneo, isotópico y completamente plano, obtuvimos que el parámetro a , dependía del tiempo, y verificaba las ecuaciones (2.30) y (2.31), que se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}[2C_d-3(1+\omega)]} = \frac{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + [2C_d - 3(1+\omega)] \left(\frac{H_0}{H}\right)^{d-\Delta}}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + [2C_d - 3(1+\omega)]} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} (1+d-\Delta)C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} H_0(t-t_0) &= [(2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} - 2C_d - 3(1+\omega)) \times \\ &\quad \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}[2C_d-3(1+\omega)]} - 2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}]^{1+\frac{1}{d-\Delta}} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(1, 1+\frac{1}{d-\Delta}, 2+\frac{1}{d-\Delta}; 1 - \frac{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} - 2C_d - 3(1+\omega)}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}}\right) \\ &\quad - B_2^{(1+\frac{1}{d-\Delta})} F_1\left(1, 1+\frac{1}{d-\Delta}, 2+\frac{1}{d-\Delta}; \frac{2C_d - 3(1+\omega)}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como mencionamos anteriormente, esta ecuación es aplicable en un universo con un componente único arbitrario, es decir que, la solución nos es útil tanto para un universo compuesto de materia bariónica, como para uno compuesto de radiación, la diferencia entre estos dos universos se ve reflejado en la constante ω .

La misma se deduce de la ecuación de estado, la ecuación que relaciona la presión con la densidad de energía. Si suponemos que el contenido del universo se comporta como un gas diluido, entonces tendríamos la siguiente relación:

$$\frac{P}{c^2} = \omega \rho.$$

Entonces se puede deducir el valor de ω para los diferentes posibles componentes,

en el caso de la materia bariónica el valor que toma el parámetro de la ecuación de estados es $\omega = 0$ y para el caso de radiación es $\omega = \frac{1}{3}$.

Como el objetivo en esta sección es analizar las soluciones obtenidas para un universo compuesto solo de radiación, remplazamos el valor $\omega = \frac{1}{3}$ en las ecuaciones (4.1) y (4.2),

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}(C_d-2)} = \frac{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + (C_d - 2) \left(\frac{H_0}{H}\right)^{d-\Delta}}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + (C_d - 2)}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} (1+d-\Delta)C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} H_0(t-t_0) &= \left[(2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} - 2C_d - 4) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-(d-\Delta)(C_d-2)} \right. \\ &\quad \left. - 2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} \right]^{1+\frac{1}{d-\Delta}} X_2 F_1 \left(1, 1 + \frac{1}{d-\Delta}, 2 + \frac{1}{d-\Delta}; 1 - \frac{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} - C_d - 2}{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}} \right) \\ &\quad - B^{(1+\frac{1}{d-\Delta})} X_2 F_1 \left(1, 1 + \frac{1}{d-\Delta}, 2 + \frac{1}{d-\Delta}; \frac{C_d - 2}{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Partiendo de las ecuaciones (4.3) y (4.4) se realizó una serie de análisis y verificaciones de las soluciones del modelo, con el motivo de encontrar información sobre las mismas, y de esta manera se concluyó sobre la utilidad de este tipo de modelos. También se obtuvo los primeros ajustes a los datos observacionales de supernovas actuales, dichos ajustes nos proporcionan algunos valores tentativos de los parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$, d y Δ , los mismos se verificaron que estén en concordancia con los supuestos del modelo, y fueron analizados sistemáticamente.

Es importante recalcar que no espero que esta solución sea la mejor versión para modelar el universo real, ya que es conocido que el universo está compuesto no solo de radiación, además de esta tenemos la materia bariónica. Un análisis de la combinación de estas dos será llevado a cabo en la siguiente sección.

4.1.1. Análisis de la dependencia de q con el parámetro de Hubble H

Es posible calcular el parámetro de desaceleración $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$, a partir de la ecuación (4.3). Para simplificar la notación, utilizamos las constantes $A = 2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}$ y $B = 2C_d - 4$:

$$\frac{A + B \left(\frac{H_0}{H}\right)^{d-\Delta}}{A + B} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B}. \quad (4.5)$$

De esta ecuación despejamos el parámetro de Hubble H ,

$$H = \left[\frac{(A + B) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A}{B} \right]^{-\frac{1}{(d-\Delta)}} H_0. \quad (4.6)$$

Encontramos que el parámetro de desaceleración para un universo con las condiciones planteadas es el siguiente (el desarrollo paso a paso de la derivación de esta expresión se encuentra en el apéndice B):

$$q = -1 - \frac{[2C_d - 3(1 + \omega)]}{2} - C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}. \quad (4.7)$$

Remplazamos el valor de $\omega = \frac{1}{3}$, ya que como mencionamos anteriormente, este es el valor que se deduce de la ecuación de estados si suponemos que todo el contenido del universo es sólo radiación:

$$q = 1 - C_d (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}), \quad (4.8)$$

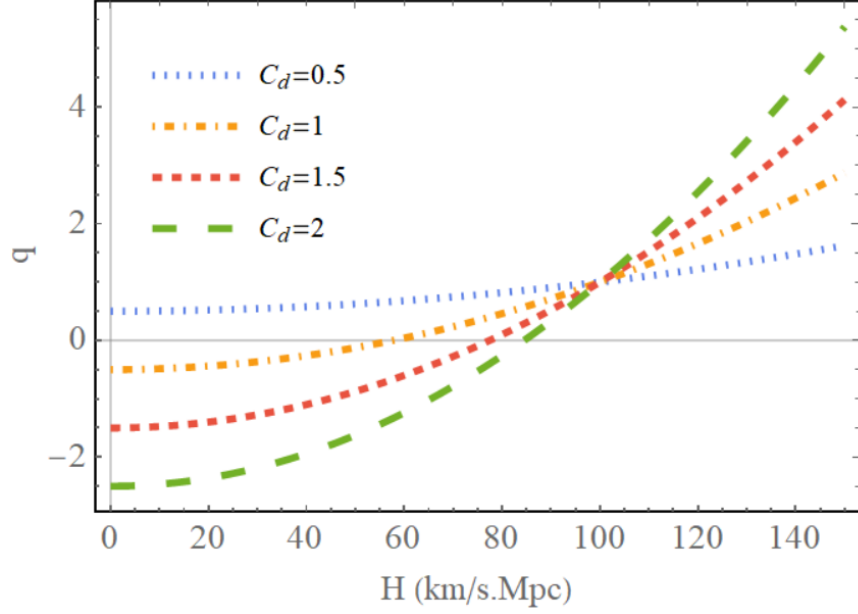


Figura 4.1: Parámetro de desaceleración versus parámetro de Hubble H para cuatro diferentes valores de $C_d, D_{d,\Delta} = -0,0001, d = 3, \Delta = 1$

En la figura 4.1, se grafica el parámetro de desaceleración como una función del parámetro de Hubble para 4 valores diferentes de C_d . Estos presentan una intersección en el punto $q = 1$ y $H = -(D_{d,\Delta})^{\frac{1}{d-\Delta}}$, en general cualquier combinación de los parámetros C_d, d y Δ pasarán por el mismo punto en la gráfica del parámetro de desaceleración si se mantiene constante al parámetro $D_{d,\Delta}$.

De esta gráfica podemos concluir que el parámetro C_d , tiene gran importancia en el comportamiento de la expansión del universo, notamos una fuerte dependencia tanto de la ordenada al origen como de la velocidad de crecimiento del parámetro de desaceleración.

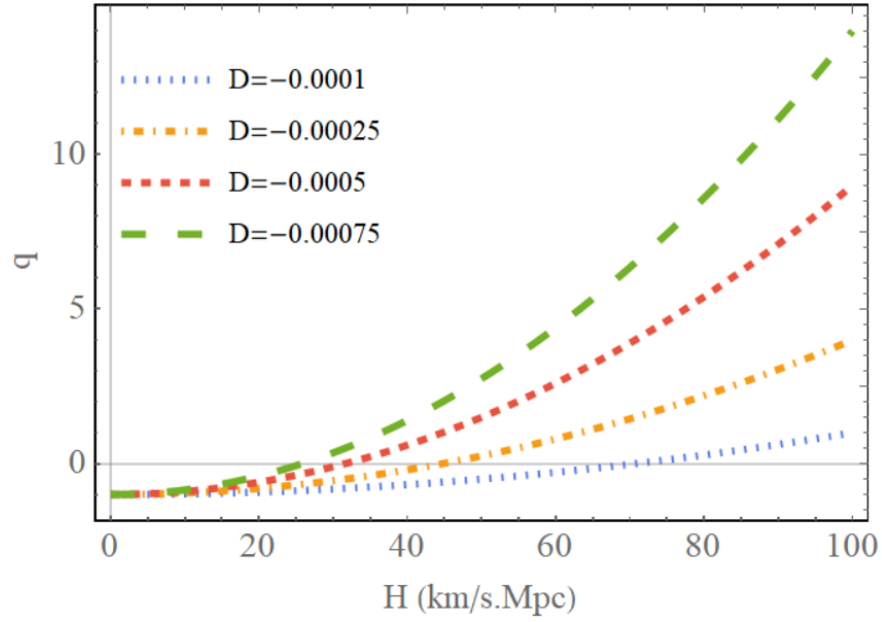


Figura 4.2: Parámetro de desaceleración versus parámetro de Hubble H para cuatro diferentes valores de $D_{d,\Delta}$, $C_d = 2$, $d = 3$, $\Delta = 1$

En la figura 4.2, se graficó el parámetro de desaceleración como una función del parámetro de Hubble, para 4 diferentes valores de $D_{d,\Delta}$, estos gráficos varían su tasa de crecimiento con el valor del parámetro $D_{d,\Delta}$ y, por lo tanto, varían el punto de intersección con el eje de las abscisas.

Se observa de las gráficas que el modelo es capaz de explicar diferentes etapas del universo. Para ciertas combinaciones de los parámetros, el parámetro de desaceleración q toma, tanto valores positivos como negativos, esto quiere decir que el modelo explica tanto periodos de expansión desacelerada como acelerada respectivamente, y los parámetros C_d y $D_{d,\Delta}$, influyen en la duración de estas etapas de manera directa, ya que al modificarlos se modifica la intersección con el eje de las abscisas, punto en donde el universo cambia el signo de la aceleración de la expansión.

En la siguiente sección de este capítulo realizo un análisis más detallado del comportamiento de este parámetro q , para eso primero se encontró la relación que tiene este con el parámetro del corrimiento al rojo z .

4.1.2. Análisis de la dependencia de q con el tiempo

Al haber incluido una corrección de primer orden en la entropía generalizada de la pantalla de Hubble, el parámetro de desaceleración depende del parámetro de Hubble H , y, por lo tanto, se encuentra una relación natural entre el parámetro de desaceleración y el tiempo. Como ya mencionamos en el capítulo anterior, en cosmología se suele usar el RS como medida del tiempo, es por esto que decidimos encontrar una ecuación $q(z)$.

Para eso primero debemos encontrar $H(z)$, la ecuación que describe la dependencia del parámetro de Hubble con el RS. Ecuación que se encuentra al remplazar la relación $1 + z = \frac{a_0}{a}$ en la ecuación (4.6),

$$H = \left[\frac{(A + B)(1 + z)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A}{B} \right]^{-\frac{1}{(d-\Delta)}} H_0. \quad (4.9)$$

Ahora remplazando esta expresión en la ecuación (4.8), adquirimos la dependencia del parámetro de desaceleración de nuestro universo con el RS, y podremos analizar más detalladamente las diferentes etapas de expansión;

$$q = 1 - C_d - \frac{C_d D_{d,\Delta}}{(z + 1)^{(d-\Delta)(C_d-2)} \left(H_0^{-(d-\Delta)} + \frac{C_d D_{d,\Delta}}{C_d-2} \right) - \frac{C_d D_{d,\Delta}}{C_d-2}}. \quad (4.10)$$

Los valores de $q < 0$ corresponden a un universo en aceleración y los de $q > 0$ a uno en desaceleración. Dependiendo de la combinación de los parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$, d y Δ , el parámetro de desaceleración es positivo o negativo, y es capaz de explicar períodos de aceleración y desaceleración.

En primera instancia se modifica uno de los parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$, o $d - \Delta$, y se elige los otros dos de manera arbitraria, pero siempre considerando de que sean consistentes con las hipótesis del modelo, de esta manera analizo que ocurre con la función dependiendo de qué parámetro es modificado:

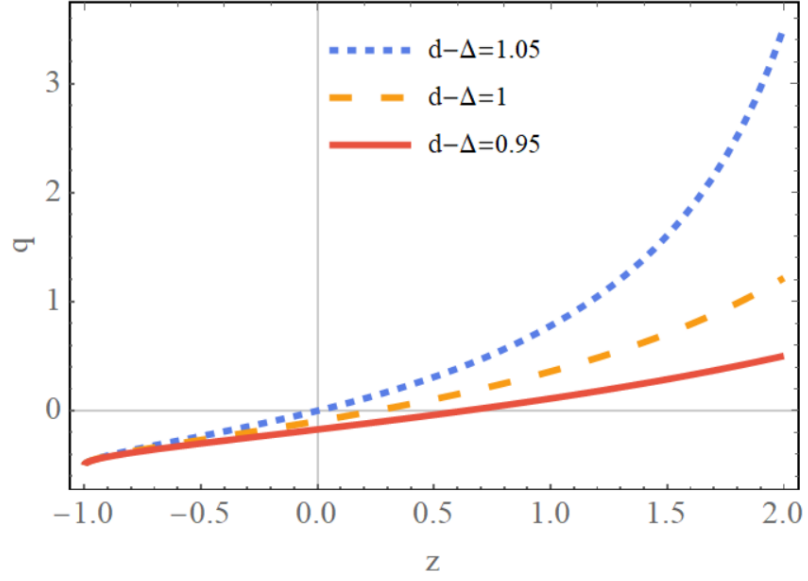


Figura 4.3: q vs z para diferentes valores de $d - \Delta$, $C_d = 1,5$, $D_{d,\Delta} = -0,004$

En la figura (4.3), analizo que ocurre con el comportamiento de la función a medida que cambio la diferencia $d - \Delta$, en la misma dibujo 3 funciones con diferentes valores de este parámetro y observo que a medida que la diferencia aumenta, q crece más rápidamente, sin embargo, las tres gráficas son cóncavas hacia arriba, con una tendencia a cambiar de concavidad para valores menores de $d - \Delta$.

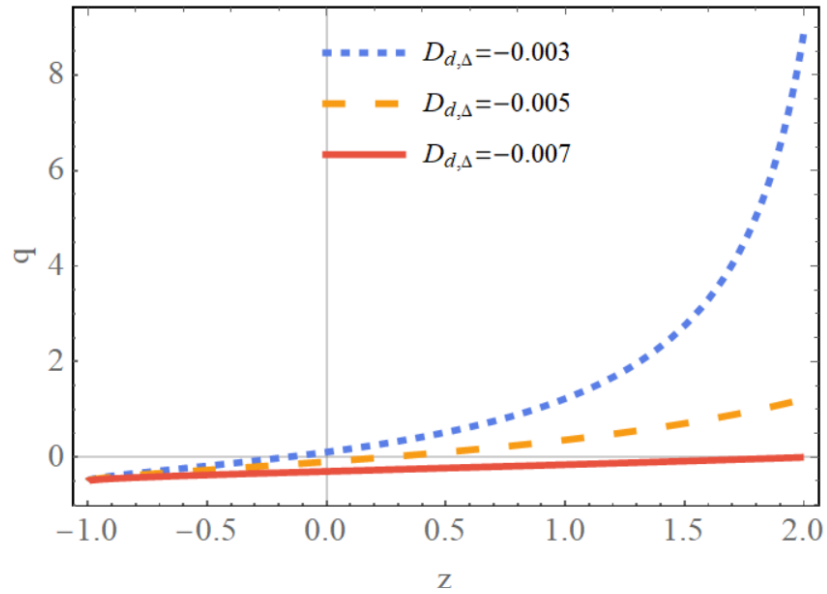


Figura 4.4: q vs z para tres diferentes valores de $D_{d,\Delta}$, $C_d = 1,5$, $d - \Delta = 1$

En la figura (4.4) analizo que ocurre con el comportamiento de la función a medida que cambio el parámetro $D_{d,\Delta}$, en la misma dibujo 3 funciones con diferentes valores, a medida que $D_{d,\Delta}$ toma valores más negativos la función empieza a crecer más lentamente, nuevamente notamos que la concavidad no presenta cambios.

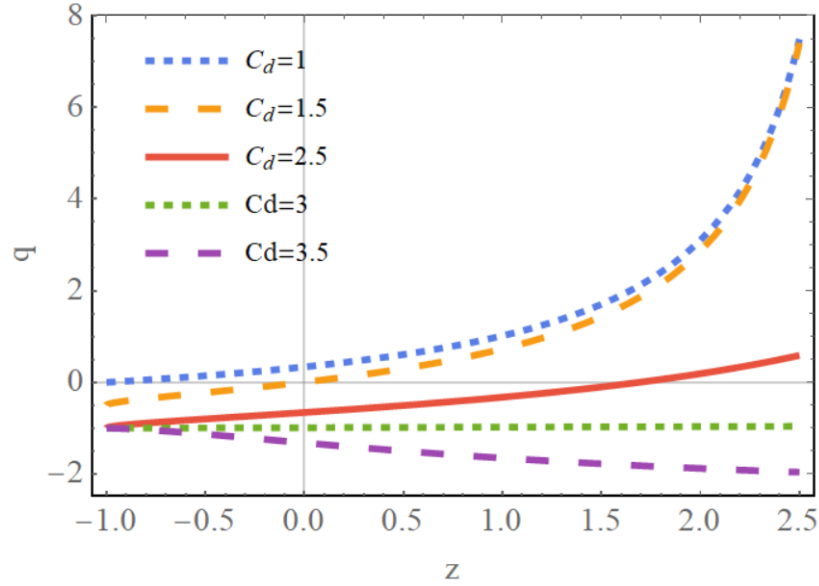


Figura 4.5: q vs z para tres diferentes valores de C_d , $d - \Delta = 1$, $D_{d,\Delta} = -0,004$

Por último en la figura (4.5) analizo que ocurre con el comportamiento de la función a medida que cambio el parámetro C_d , en este caso dibujo 5 funciones para 5 diferentes valores de C_d , elegimos hacer más gráficas para la variación de este parámetro, debido a que, el comportamiento de las mismas tiene una fuerte dependencia con el valor de este parámetro, hecho que se puede observar en las diferentes gráficas que se muestran en la figura.

En este caso se notó diferentes comportamientos de las funciones y algunas características interesantes de analizar, por su posible significado físico.

Una de ellas es lo que ocurre cuando $z = -1$, por una parte, si utilizamos valores que cumplan la condición $C_d < 2$, el valor de dicho parámetro afecta el valor de q en el punto $z = -1$, pero si, en cambio, tenemos $C_d > 2$ todas las funciones se intersectan en el punto $q = -1$, $z = -1$, valor que predice el modelo Λ -CDM. Para entender el significado de este punto, es de utilidad recordar la relación $1 + z = \frac{a_0}{a}$, de aquí se puede ver claramente que cuando $z = -1$, a tiende a infinito, y, por

lo tanto, podemos interpretar, que estamos hablando de un tiempo muy alejado en el futuro, en donde el universo se expande con una aceleración constante. El valor último de aceleración depende del parámetro C_d , y, por lo tanto, en busca de coincidir con el modelo Λ -CDM, podría ser interesante restringir dicho parámetro para valores que cumplan $C_d > 2$.

Además, es interesante observar como cambian los comportamientos de crecimiento, a medida que aumenta C_d el parámetro de desaceleración crece cada vez más lento, hasta que en cierto valor, $C_d > 3$, empieza a decrecer, este comportamiento no es el deseable, ya que no es capaz de explicar un periodo de expansión desacelerada, al nunca poder tomar valores positivos de q . Por último también se puede notar diferentes intervalos de concavidad, en resumen el valor de la constante C_d , afecta de muchas maneras diferentes el comportamiento del parámetro de desaceleración y sin duda juega el papel más importante en nuestro modelo.

4.1.3. Comparación con el modelo Λ -CDM

Ahora que se tiene en claro que la solución obtenida para nuestro universo compuesto de solo radiación, bajo el modelo de una entropía con exponente orbitaria y además con la presencia del término de corrección de primer orden, es capaz de explicar diferentes periodos de la expansión del universo, sería de gran utilidad verificar si existe alguna combinación de los parámetros que caracterizan a nuestro modelo que se ajusten con las etapas predichas por el modelo Λ -CDM. En esta sección vamos a mostrar las comparaciones realizadas, a partir de las soluciones obtenidas que se mostraron al inicio de esta sección, en este caso vamos a ajustar con la expresión de $a(t)$ del modelo Λ -CDM:

$$H_0(t - t_0) = \frac{2(a^3L + M)^{\frac{1}{2}} \operatorname{artanh} \left[\frac{a^{\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{(a^3L + M)^{\frac{1}{2}}} \right]}{3a^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^3L + M}{a} \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2(L + M)^{\frac{1}{2}} \operatorname{artanh} \left[\frac{L^{\frac{1}{2}}}{(L + M)^{\frac{1}{2}}} \right]}{3L^{\frac{1}{2}}(L + M)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.11)$$

La función que vamos a comparar es la forma explícita de a con el tiempo, para nuestro modelo está expresado en la ecuación (4.4). Realicé una serie de ajustes, los mismos están detallados en la siguiente tabla:

Parámetros:	$d - \Delta$	C_d	$D_{d,\Delta}$
Comparación 1	-2	0.5	2
Comparación 2	-0.999	1.8	-0.03
Comparación 3	2	1.7	-0.04
Comparación 4	2	1.99	-0.1
Comparación 5	0.3	3.5	-0.5
Comparación 6	0.1	8.5	-0.8

Tabla 4.1: Ajustes de $a(t)$

La mayoría de estas funciones presentan un comportamiento similar, los mismos son adecuados para explicar las fases futuras con facilidad, sin embargo presentan dificultades para explicar las etapas iniciales pasadas, aproximadamente a partir de $t = 0,5t_0$.

No sería muy útil para el análisis mostrar todas las gráficas de los ajustes, ya que estas no presentan grandes diferencias en sus comportamientos; sin embargo, a continuación, se muestran dos gráficas con comportamientos ligeramente diferentes a t pequeños, a modo de ejemplo.

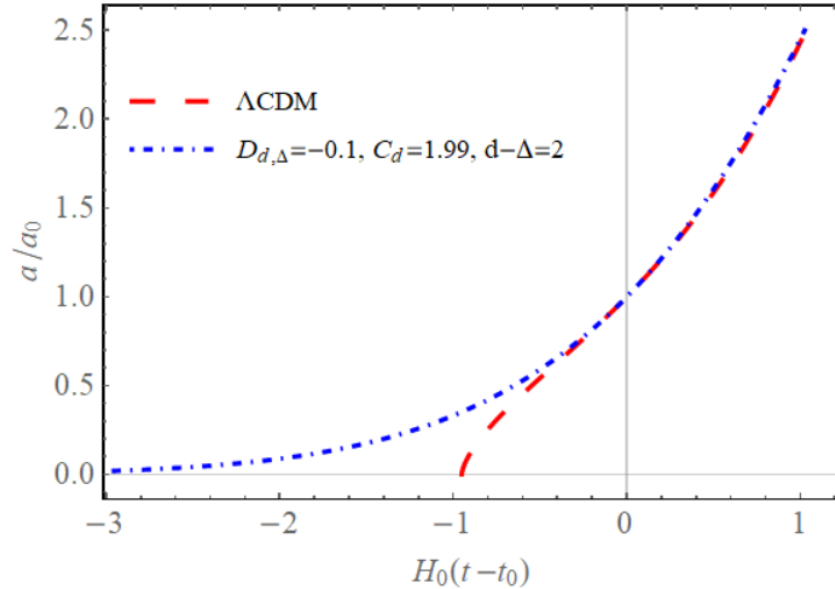


Figura 4.6: Ajuste 4 de $(a(t))$

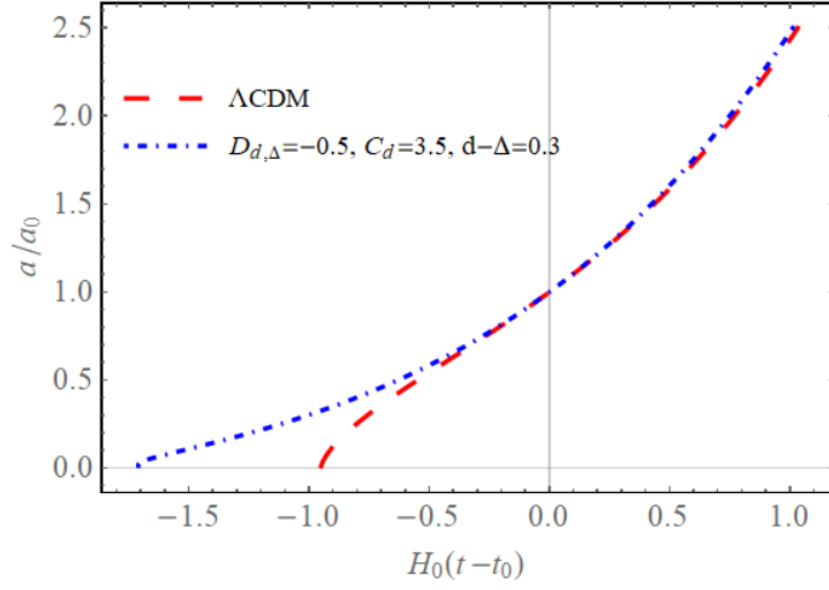


Figura 4.7: Ajuste 5 de $(a(t))$

El único ajuste que no presente esta dificultad, para valores pequeños de t , y, por lo tanto, logra ajustarse perfectamente con las predicciones del modelo Λ -CDM, es el ajuste 1.

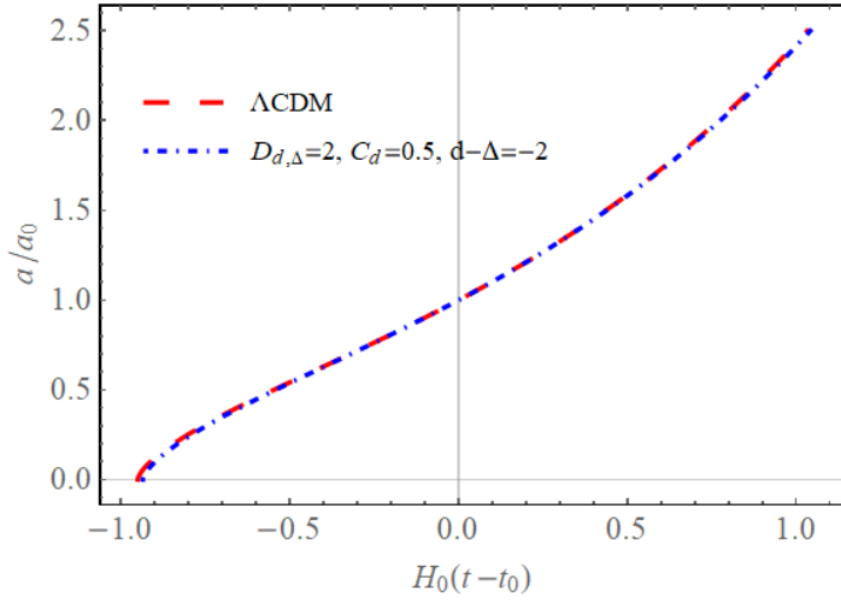


Figura 4.8: Ajuste 1 de $(a(t))$

Sin embargo, los valores de los parámetros Δ y d , entran en contradicción con una de las hipótesis de nuestro modelo, recordemos que definimos la entropía de nuestro sistema, agregando el término subdominante, de la siguiente manera.

$$\frac{S}{k_B} = A \left(\frac{r_H}{L_P} \right)^d + E \frac{\left(\frac{r_H}{L_P} \right)^\Delta - 1}{\Delta} \quad (4.12)$$

A esta ecuación la habíamos propuesto, con la condición de que $0 < \Delta < d$, debido a que el término de corrección no puede escalar más rápido que el término principal de la entropía, y, sin embargo, nuestra comparación nos devuelve la relación $\Delta = 2 + d$, por lo tanto, no cumple con esta condición. Dichos valores no pueden ser considerados, al menos que se modifique la interpretación del término subdominante o que se modifique la condición de escalamiento del mismo.

4.1.4. Ajuste con los datos de supernovas Ia

Los datos de supernovas son la principal fuente de observaciones disponibles para comparar modelos cosmológicos. Constituyen en la actualidad una de las mejores herramientas observacionales, que nos serán de utilidad para comparar varios modelos de fuerza entrópica con el nuestro.

En esta sección presentamos una serie de ajustes de nuestro modelo, para diferentes combinaciones de parámetros, con los datos actualizados disponibles de luminosidad de supernovas tipo Ia, estos datos los sacamos de la 'compilación Pantheon' (D.M.Scolnic, 2018), mencionado en el capítulo anterior. Para realizar estos ajustes, primero debemos encontrar la expresión analítica de la distancia lumínica, derivada de las soluciones obtenidas con nuestro modelo.

Utilizando la expresión (3.5) de la distancia lumínica d_L :

$$d_L = c(1 + z) \left[\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right], \quad (4.13)$$

realizando un cambio de variables a partir de la definición del parámetro de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, podemos escribir la integral de la siguiente manera:

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0} \left[\int_1^{1+z} \frac{H_0 d\left(\frac{a_0}{a}\right)}{H\left(\frac{a_0}{a}\right)} \right] \quad (4.14)$$

En donde un z positivo representa un tiempo pasado, de tal manera que el presente t_0 , cuando se toma la medición de la fuente de luz, se representa con $z = 0$, y el pasado t_e cuando la luz fue emitida, se representa con un valor positivo de z .

Podemos encontrar una expresión de $H(\frac{a_0}{a})$, a partir de la ecuación (4.3) y con esta, resolver la integral. La solución de esta integral es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{H_0}{c} d_L = & \frac{(1+z)(C_d-2)}{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}} \times \left[{}_2F_1 \left(1, 1 + \frac{C_d-1}{(C_d-2)(d-\Delta)}, 1 + \frac{1}{(C_d-2)(d-\Delta)} \right. \right. \\ & \left. \left. ; 1 + \frac{C_d-2}{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}} \right) \right] - (1+z) \left[\frac{(C_d-2) + C_d D_{d,\Delta} H_0^{d,\Delta} (1+z)^{(d-\Delta)(C_d-2)}}{C_d-2} \right. \\ & \left. - \frac{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}}{C_d-2} \right] \times {}_2F_1 \left(1, 1 + \frac{C_d-1}{(C_d-2)(d-\Delta)}, 1 + \frac{1}{(C_d-2)(d-\Delta)} \right. \\ & \left. ; \frac{(C_d-2 + C_d D_{d,\Delta} H_0^{d,\Delta})(1+z)^{(d-\Delta)(C_d-2)}}{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para poder comparar con los datos, debemos utilizar la unidad 'Magnitud', explicada en el capítulo 3, en vez de la distancia lumínica. Utilizamos una expresión similar a la (3.7), para hacer la conversión de unidades:

$$\mu = 5 \log_{10} d_L - 5, \quad (4.16)$$

con d_L en unidades pársec, y con la magnitud de referencia $M_0 = -19,36$. Realizamos una gráfica magnitud versus RS, tanto de los datos extraídos de la compilación Pantheon (D.M.Scolnic, 2018), y de la solución de los modelos.

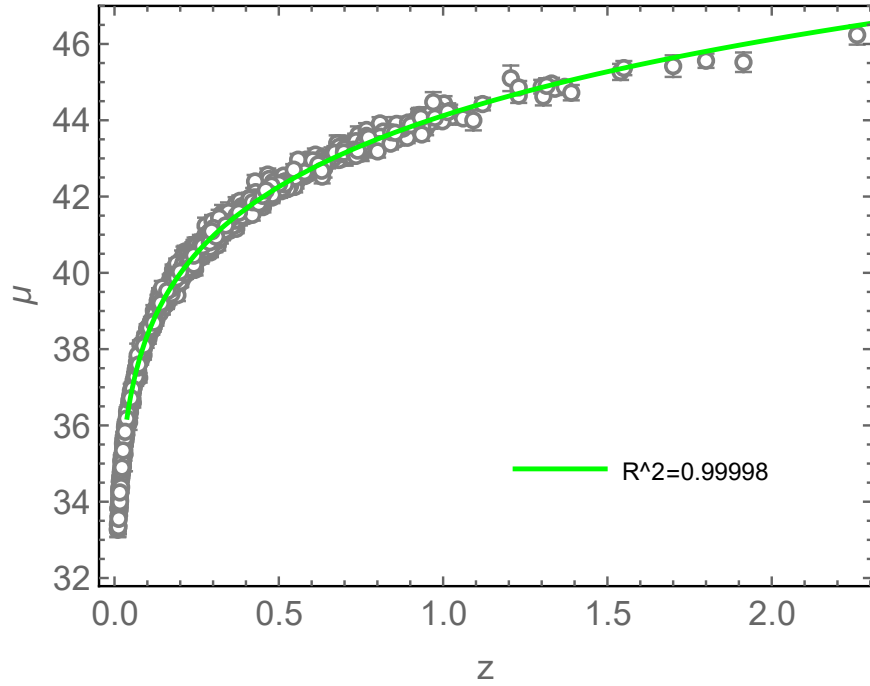


Figura 4.9: Gráfica de magnitud vs z . Los círculos con las barras de errores son datos de supernovas tomados de [27]

El mejor de estos ajustes se lo consigue, fijando el valor del parámetro $d - \Delta = 2$, asegurándonos de esta manera que cumpla la condición $0 < \Delta < d$, y a los otros dos parámetros se los determina con el método de cuadrados mínimos.

	Valor estimado	Error
C_d	1.2	0.1
$D_{d,\Delta}$	6×10^{-6}	1×10^{-6}

Tabla 4.2: Ajuste de los parámetros

El factor de correlación encontrado para el ajuste de nuestro modelo con los parámetros encontrados, con los datos disponibles de supernovas tipo Ia, es de $R^2 = 0,999988$, el mismo se puede observar en la figura 4.9. Es importante mencionar que aunque se consiguió un muy buen ajuste, la realidad es que existen diversos modelos cosmológicos que muestra una concordancia similar con dichos datos (N.Komatsu, 2014), (A.Tartaglia, 2009), (R.A.Knop, 2003), (S.Jana, 2014), (T.Zhang, 2018).

Por último analizamos la dependencia del parámetro de Hubble H con el RS z , de la ecuación (4.10). Para esto volvemos a hacer una serie de ajustes del modelo con los datos de supernovas tipo Ia, pero esta vez con los que se presentan en la tabla 1 de (A.Pradhan, 2021) y además comparamos con los ajustes de otros modelos anteriores. En todos los casos el valor de la constante de Hubble es $H_0 = 67,4(\frac{km/s}{Mpc})$, basado en los resultados de (PlanckCollaboration, 2018).

Los ajustes realizados lo separamos en dos grupos:

- En el primer grupo, proponemos inicialmente los valores de los parámetros C_d y $d - \Delta$, y sólo encontramos el valor de $D_{d,\Delta}$, con el método de cuadrados mínimos. Los ajustes obtenidos son los siguientes:

Valor estimado ($D_{d,\Delta}$)	Error ($D_{d,\Delta}$)	R^2	$d - \Delta$	C_d
$9,5 \times 10^3$	$0,2 \times 10^3$	0,9943262	-2	0,5
$-4,2 \times 10^{-5}$	$0,1 \times 10^{-5}$	0,982213	2	1,99
$-3,7 \times 10^{-5}$	$0,1 \times 10^{-5}$	0,989904	2	1,7

Tabla 4.3: Primer grupo de ajustes de $H(z)$

- Para el segundo grupo, partimos inicialmente del valor $d - \Delta$ y encontramos los valores de los parámetros C_d y $D_{d,\Delta}$ con el método de cuadrados mínimos:

Valor est(C_d)	Error(C_d)	Valor est ($D_{d,\Delta}$)	Error($D_{d,\Delta}$)	R^2	$d - \Delta$
8	1	-0,54	0,01	0,994317	0,1
3,3	0,5	-0,17	0,01	0,994271	0,3

Tabla 4.4: Segundo grupo de ajustes de $H(z)$

En ambos grupos elegí los parámetros iniciales de tal manera que coincidan con los obtenidos en la comparación con el modelo Λ -CDM, realizado en una sección anterior. De esta manera puedo analizar si los valores, de los parámetros, que se obtienen del método de cuadrados mínimos, son similares a los parámetros que se compararon anteriormente con el modelo Λ -CDM.

Encontramos que son aproximadamente iguales en todos los casos, excepto para $d - \Delta = -2$ y $C_d = 0,5$, aquí se encuentra un valor de $D_{d,\Delta} = 9510$, mucho

más grande que lo esperado. Sin embargo, para los demás ajustes se encuentran parámetros bastante similares, es de destacar sobre todo los del segundo grupo, que a pesar de tener solo una condición inicial, los valores obtenidos de los parámetros, son iguales dentro del error para C_d y bastante similares los de $D_{d,\Delta}$, a los que obtenemos con el ajuste al modelo Λ -CDM.

Para finalizar, se muestra el mejor ajuste de los obtenidos, y además se compara con los ajustes de otros modelos de cosmología entrópica, diferente al nuestro. Como el modelo EFS (líneas de trazo negro) que se deduce en (D.A.Easson, 2012) y que utiliza la entropía de Bekenstein y la temperatura de Hawking para la pantalla de Hubble. El modelo log-correction, que corresponde al segundo modelo de EFS (J.D.Bekenstein, 1973) (línea de trazo azul), que modifica el anterior, agregando el término subdominante. El modelo ZT, que se deduce en (E.L.D.Perico, 2013) (línea de trazo rojo) y que corresponde a una entropía con exponente arbitrario de un universo compuesto únicamente por materia no relativista.

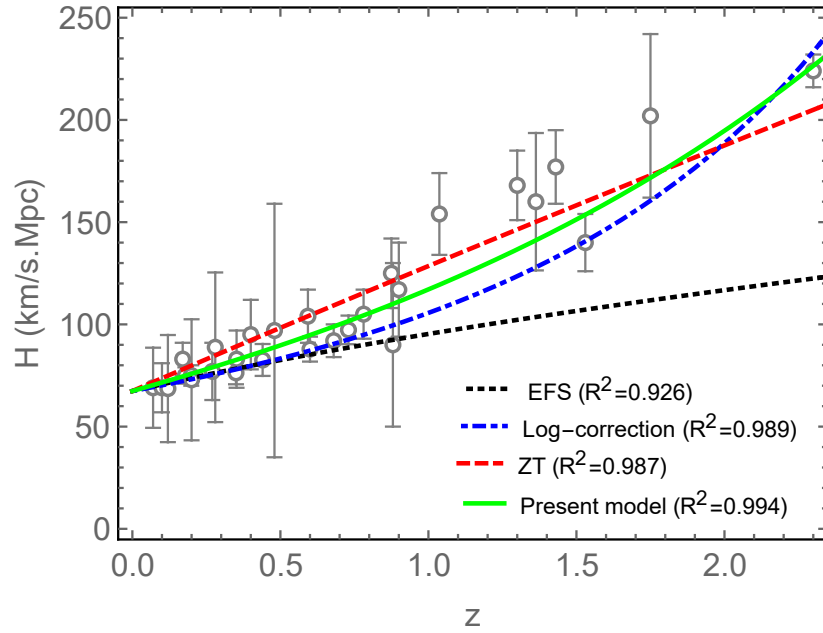


Figura 4.10: Parámetro de Hubble H versus redshift z para tres diferentes modelos de fuerza entrópica. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de [28]

Se encuentra que nuestro modelo es el que mejor se ajusta a los datos experimentales de la tabla 1 presentada en (A.Pradhan, 2021), en comparación a los demás.

4.2. Universo compuesto de radiación y materia no relativista

4.2.1. Ecuaciones de Friedmann para un universo multi-componente

La ecuación de Friedmann puede escribirse de manera general como:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t), \quad (4.17)$$

donde $\rho(t)$ es la densidad de energía, contribuida por todos los componentes del universo.

Sabemos que nuestro universo contiene materia no relativista, para la cual la densidad de energía tiene la dependencia:

$$\rho_m = \frac{3H_0^2\Omega_m}{8\pi G} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \quad (4.18)$$

Además sabemos que contiene radiación, para la cual la densidad de energía tiene la dependencia:

$$\rho_r = \frac{3H_0^2\Omega_r}{8\pi G} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}. \quad (4.19)$$

Es cierto que el universo pueda llegar a contener otro tipo de materia, pero por ahora nos quedaremos con solo estas dos. Las constantes Ω_m y Ω_r son el porcentaje del tipo de materia con respecto al total, por lo tanto, ambos son un número entre 0 y 1, que verifican la siguiente relación $\Omega_m + \Omega_r = 1$. Si remplazamos estas expresiones, la ecuación de Friedmann queda:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4}. \quad (4.20)$$

Analizando esta ecuación se puede llegar a la siguiente conclusión, si el parámetro $a \rightarrow 0$, es decir, si estamos trabajando con una etapa temprana del universo, el término de la radiación es dominante en la expansión, mientras que si trabajamos cuando $a \rightarrow \infty$, es decir expansión tardía, es la componente de materia no relativista la que domina en el fenómeno de expansión. Sin embargo, solo en estos casos límites es posible trabajar con un universo de un solo componente, es necesario poder deducir una expresión con múltiples componentes, al menos aproximada, para las etapas intermedias, en donde no se puede suponer ninguna de estas dos condiciones.

En un universo que está compuesto por más de un componente, no solo la densidad de energía será una composición de estos, sino también la presión. Para encontrar la expresión de la presión de cada uno de estos componentes, es necesario utilizar una ecuación de estados, esto lo hacemos bajo el supuesto de que los componentes se comporten como un gas diluido,

$$P = \sum_{\omega} P_{\omega} = c^2 \sum_{\omega} \omega \rho_{\omega}. \quad (4.21)$$

Siendo ω el parámetro de la ecuación de estados, ya mencionado anteriormente, que toma diferentes valores según el tipo de materia, siendo $\omega = \frac{1}{3}$, para la radiación, y $\omega = 0$, para la materia no relativista.

Con la expresión tanto de la densidad de energía, como de la presión, para un universo con múltiple componente, es posible encontrar la forma de las tres ecuaciones de Friedmann.

■ **Ecuación de Friedmann:**

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4}$$

■ **Ecuación de aceleración:**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m + \rho_r + \frac{3p_m}{c^2} + \frac{3p_r}{c^2} \right) + C_d H^2 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) \quad (4.22)$$

■ **Ecuación de continuidad:**

$$\dot{\rho}_r + \dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_r + \rho_m + \frac{p_r}{c^2} + \frac{p_m}{c^2} \right) = \frac{2C_d}{4\pi G} H^3 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) \quad (4.23)$$

Partiendo de estas ecuaciones y de las ecuaciones de estado, es posible encontrar las ecuaciones diferenciales que relacionen las variables $a(t)$, $\rho(t)$, y $p(t)$, de ambos componentes.

4.2.2. Derivación de las ecuaciones diferenciales

En esta sección vamos a utilizar las ecuaciones de Friedmann y las ecuaciones de estado, de un universo de múltiples componentes, nuevamente con nuestro modelo de fuerza entrópica con exponente arbitrario, y con el término subdominante, para derivar las ecuaciones diferenciales, que nos relacionan $\rho(t)$, $a(t)$ y $p(t)$. Luego vamos a analizar sus posibles soluciones, si es que las tiene, y vamos a comparar tanto con el modelo $\Lambda - CDM$ y las observaciones de supernovas.

La deducción la vamos a realizar a partir de la ecuación de continuidad, aunque también se lo podría hacer utilizando la ecuación de aceleración. Escribimos nuevamente la ecuación (4.22), pero multiplicado por 2 en ambos lados de la ecuación:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \left(\rho_m + \rho_r + \frac{3p_m}{c^2} + \frac{3p_r}{c^2} \right) + 2C_d H^2 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}). \quad (4.24)$$

Remplazamos ρ_m , ρ_r , p_m , y p_r , utilizando las expresiones (4.18), (4.19), y (4.21):

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -H_0^2 [\Omega_r a^{-4}(1 + 3\omega_r) + \Omega_m a^{-3}(1 + 3\omega_m)] + 2C_d H^2 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}). \quad (4.25)$$

Es posible encontrar una ecuación diferencial cuya solución sea $H(t)$, para eso utilizamos la definición del parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y la derivamos con respecto al tiempo:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}. \quad (4.26)$$

Remplazando en (4.25), tenemos la ecuación que buscábamos:

$$2(\dot{H} + H^2) = -H_0^2 [\Omega_r a^{-4}(1 + 3\omega_r) + \Omega_m a^{-3}(1 + 3\omega_m)] + 2C_d H^2 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}). \quad (4.27)$$

Combinando esta ecuación, con la ecuación de Friedmann (4.20), es posible encontrar la ecuación diferencial de una manera mas simplificada:

$$\dot{H} = \frac{H^2}{2} [2C_d - 3(\omega_m + 1)] + C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta+2} - \frac{3}{2} \frac{H_0^2 \Omega_r}{a^4} (\omega_r - \omega_m). \quad (4.28)$$

También podemos encontrar la ecuación diferencial para $H(a)$, simplemente multiplicando $\frac{1}{H}$ en ambos miembros de (4.28):

$$\frac{dH}{da} = \frac{H}{2a} [2C_d - 3(\omega_m + 1)] + C_d D_{d,\Delta} \frac{H^{d-\Delta+1}}{a} - \frac{3}{2} \frac{H_0^2 \Omega_r}{H a^5} (\omega_r - \omega_m). \quad (4.29)$$

La derivación detallada, tanto de $H(t)$ como de $H(a)$, sin saltarse ningún paso, se realizara en el apéndice C.

Una vez obtenida la ecuación diferencial, analizamos si posee alguna solución analítica, para esto primero simplificamos la notación, definiendo las constantes $A = C_d D_{d,\Delta}$, $B = \frac{2C_d - 3(\omega_m + 1)}{2}$, y $C = \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_r (\omega_r - \omega_m)$:

$$\frac{dH}{da} = \frac{A}{a} H^{d-\Delta+1} + \frac{B}{a} H - \frac{C}{a^5} H^{-1}. \quad (4.30)$$

Se puede observar que la ecuación diferencial es ordinaria de primer orden, conocida como ecuación diferencial de Chini; no es una ecuación diferencial lineal,

por lo que no es fácil de encontrar su solución. Además, no existe una solución para todas las ecuaciones de Chini, es decir que es necesario que los parámetros cumplan ciertas condiciones para encontrar su solución, y además es necesario conocer al menos una solución particular por la cual derivar la solución general. Por lo tanto, debido a estas dos condiciones no es posible encontrar una solución general para nuestro modelo a esta ecuación diferencial, y encontrar una solución con ciertas condiciones en nuestros parámetros no nos permitiría hacer el análisis correctamente, por lo que descartamos esta opción.

Es posible que la ecuación diferencial sea lineal, al menos para los casos particulares en que $d - \Delta = 0$ ó $d - \Delta = -2$, en ambos casos es posible encontrar una solución analítica simple de la ecuación diferencial. Sin embargo, estas dos soluciones no son de nuestro interés, en primer lugar porque buscamos una solución general, en donde los parámetros d y Δ se obtengan mediante ajustes de los datos, o bajo otros criterios. En segundo lugar, tampoco nos interesa estas posibles dos soluciones, dado que ninguna de las dos cumple con la condición $d > \Delta$, la cual es parte importante de una de nuestras hipótesis, que ya mencionamos en la sección anterior. Por lo tanto, en vista de que no existe una solución analítica de la ecuación general, o al menos no parece tener una forma conocida, se va a optar por conseguir una solución aproximada, con el uso de métodos numéricos.

Para hacer esto, utilizo el programa Wolfram Mathematica, que nos provee de la función NDSolve, la misma nos permite que ingresemos nuestra ecuación diferencial, además de una condición inicial, la cual en nuestro caso pueden ser H_0 o a_0 , dependiendo de las variables de la ecuación diferencial, y nos devuelve una gráfica que represente a la solución aproximada de la ecuación diferencial. Desafortunadamente, al devolvernos sólo la gráfica, no podemos saber la ecuación de la solución que representa a dicha gráfica, y, por lo tanto, no se puede encontrar ajustes de los parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$, y $d - \Delta$, con los datos de supernovas tipo Ia.

De todas formas, todavía tenemos la posibilidad de analizar gráficamente las soluciones obtenidas con la función de Wolfram Mathematica, y compararlas tanto con los datos observacionales, como con las etapas del modelo Λ -CDM. Aunque no obtengamos valores acotados de los parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$, y $d - \Delta$, se obtienen intervalos de posibles valores para estos parámetros, en los que las gráficas coinciden aproximadamente con las dos formas de contrastación que proponemos para nuestro modelo.

4.2.3. Porcentaje de cada contenido.

Antes de realizar cualquier comparación, debemos definir que porcentaje de nuestro universo es radiación y que porcentaje es materia no relativista. Para esto, vamos a usar los ajustes del modelo Λ -CDM, presentadas en la última sección del capítulo 1, pero con una modificación, esta modificación se debe a que en nuestro universo no existe la energía oscura.

Entonces, guiándonos del cuadro (1.1), vemos que la mayoría de la densidad de energía en el universo la aporta la energía oscura, aproximadamente el 70 %, luego la materia oscura que representa el 26 %, que junto a la materia bariónica forman la materia no relativista y conforman el 30 % del contenido del universo, mientras que la radiación ocupa una pequeña porción de este, solo el $8,4 \times 10^{-3} \%$ entre los fotones y los neutrinos.

Lo que debemos hacer para obtener el porcentaje de un universo sin energía oscura es modificar el total de la densidad de energía, en el caso del modelo Λ -CDM tenemos que $\Omega_{r1} + \Omega_{m1} + \Omega_{\Lambda1} = 1$, mientras que en nuestro modelo esto no es así, en nuestro caso se cumple que $\Omega_{r2} + \Omega_{m2} = 1$, por lo tanto, debemos encontrar nuevos valores de Ω_r y Ω_m , eso se puede hacer fácilmente utilizando una regla de tres simple, que relacione los valores del modelo Λ -CDM con los nuestros:

$$\text{Si: } \Omega_{r1} + \Omega_{m1} = 0,300084 \longrightarrow \Omega_{r2} + \Omega_{m2} = 1,$$

$$\text{Entonces: } \Omega_{r1} = 0,000084 \longrightarrow \Omega_{r2} = 0,00028.$$

Por lo tanto:

$$\Omega_{m2} = 1 - \Omega_{r2} = 0,99972.$$

Es importante recordar que los modelos de fuerza entrópica son una alternativa para la explicación de la expansión tardía del universo, es decir, una modificación al concepto de la energía oscura que propone de manera Ad-hoc el modelo Λ -CDM, pero no es una alternativa a todo el modelo. Esto quiere decir que es válido utilizar predicciones que hace este modelo, con base en otros fenómenos de la cosmología diferentes de la expansión tardía, como lo puede ser el *CMB*, o la cartografía de galaxias. Por lo tanto, utilizar como referencia los valores del porcentaje de contenido del universo es una consideración válida para nuestros

modelos, aunque no es la única que se puede hacer. Además de esto, la consideración de la existencia de la materia oscura, como parte de la materia no relativista, es consistente, ya que la materia oscura no tiene ninguna relación con la energía oscura, por lo tanto, la primera puede existir sin la necesidad de que la otra lo haga.

4.2.4. Comparación con el modelo Λ -CDM

Para poder comparar nuestro modelo de un universo compuesto, tanto por radiación como por materia no relativista, con las etapas de expansión del modelo Λ -CDM, primero debemos realizar un cambio de variables en la ecuación diferencial, ya que la solución debe ser una gráfica de $a(H_0(t - t_0))$, para poder ser comparada directamente con la solución de las etapas predichas por el modelo Λ -CDM, identificado por la curva de trazo rojo, mostrada en las gráficas 4.6, 4.7, y 4.8.

Partiendo de la ecuación (4.29), realizamos el siguiente cambio de variables, que nos permitirá encontrar la ecuación diferencial que necesitamos:

$$\frac{dH}{da} = \frac{d\dot{a}}{da} = -\dot{a} \frac{1}{a^2}. \quad (4.31)$$

Entonces remplazando esta relación entre $\frac{dH}{da}$ y $\dot{a}$, la ecuación (4.22) queda de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{a^2}\dot{a} = \frac{A}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{d-\Delta+1} + B \frac{\dot{a}}{a^2} - \frac{C}{\dot{a}a^4}. \quad (4.32)$$

Si agrupamos algunos términos y multiplicamos ambos miembros por $a\dot{a}$, se obtiene:

$$(\dot{a}a)^2 \left[1 + \frac{1}{2}[2C_d - 3(1 + \omega_m)] \right] = \frac{3}{2}H_0^2\Omega_r(\omega_r - \omega_m) - \frac{C_d D_{d,\Delta}}{a^{d-\Delta-2}} \dot{a}^{d-\Delta+2}. \quad (4.33)$$

Para finalizar es necesario hacer un último cambio de variable para pasar de la expresión de $a(t)$, hasta la expresión de $a(H_0(t - t_0))$. Para eso definimos

$T = H_0(t - t_0)$, y encontramos que:

$$dt = \frac{dT}{H_0}. \quad (4.34)$$

Finalmente la expresión a la cual vamos a solucionar con el método numérico, para luego ser comparada es la siguiente:

$$\left(\frac{da}{dT}a\right)^2 \left[1 + \frac{1}{2}[2C_d - 3(1 + \omega_m)]\right] = \frac{3}{2}\Omega_r(\omega_r - \omega_m) - \frac{C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}}{a^{d-\Delta-2}} \left(\frac{da}{dT}\right)^{d-\Delta+2}. \quad (4.35)$$

Sin embargo, esta ecuación diferencial es aún más complicada de resolver que en su forma inicial, y aunque lo resolvamos con métodos numéricos, el tiempo de cálculo y el costo son muy altos. De igual manera logramos hacer dos comparaciones, fijando los valores de $d - \Delta$.

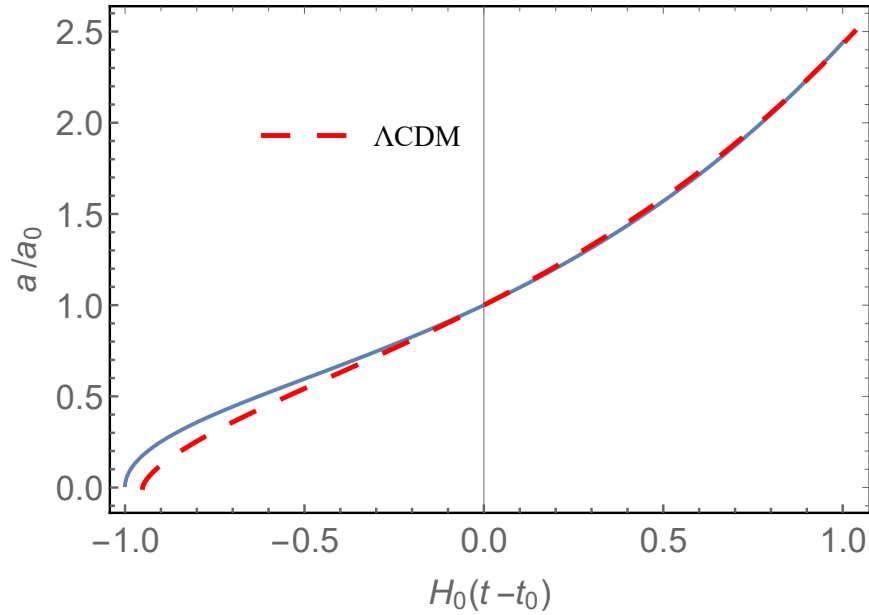


Figura 4.11: Comparación 1 del modelo Λ -CDM, con $d - \Delta = -2$

En esta primera comparación decidimos utilizar el valor de $d - \Delta = -2$, debido a que anteriormente nos había dado buenos resultados, y encontramos que en este modelo vuelve ocurrir, se obtiene un comportamiento muy parecido al predicho por el modelo Λ -CDM, con los siguientes valores de los parámetros $C_d = 7$ y

$D_{d,\Delta} = -0,7$. Aunque no coincide exactamente para las etapas tempranas, sí se comporta de una manera similar.

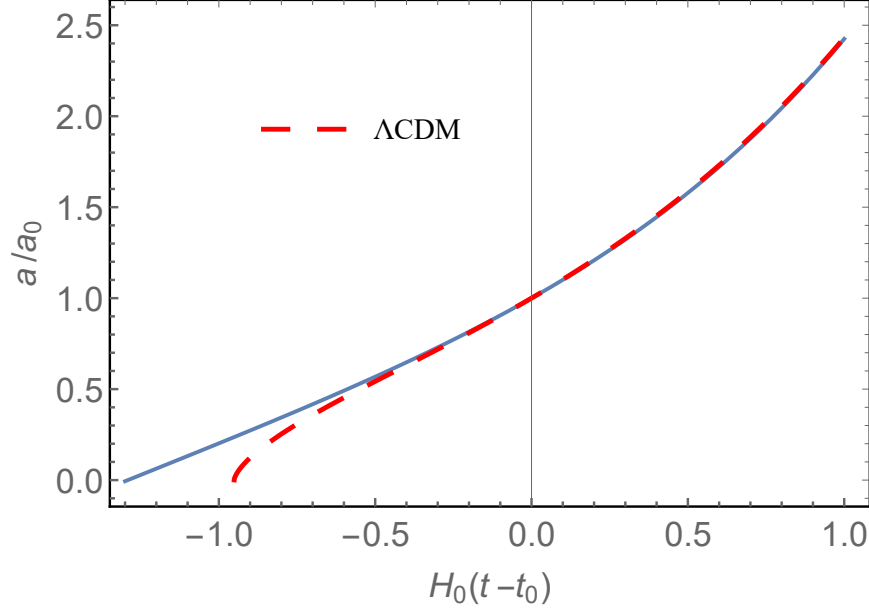


Figura 4.12: Comparación 2 del modelo Λ -CDM, con $d - \Delta = 2$

En esta segunda comparación elegimos este modelo por diversos motivos, uno de ellos es porque simplificaba la ecuación diferencial y reducía el costo, pero también porque son valores deseados en el escalamiento de nuestra entropía, sin mencionar que anteriormente también dio resultados; en este caso lo obtenemos con los parámetros $C_d = -1,5$, y $D_{d,\Delta} = 2$. Nuevamente, notamos que nuestros resultados tienen problemas para adaptarse a las etapas tempranas que predice el modelo Λ -CDM.

4.2.5. Comparación con los datos de supernovas tipo Ia

Al igual que en la sección anterior, para poder comparar nuestros resultados con los datos observacionales de supernovas tipo Ia presentados en la tabla 1 de (A.Pradhan, 2021), primero es necesario realizar un cambio de variable en la ecuación diferencial, en este caso la solución que buscamos debe ser una gráfica de $H(z)$, para poder ser comparada directamente con los datos.

Partiendo nuevamente de la ecuación (4.29):

$$\frac{dH}{da} = \frac{H}{2a} [2C_d - 3(\omega_m + 1)] + C_d D_{d,\Delta} \frac{H^{d-\Delta+1}}{a} - \frac{3}{2} \frac{H_0^2 \Omega_r}{H a^5} (\omega_r - \omega_m).$$

Realizamos un cambio de variable, a partir de la relación del RS z , con el factor de escala a :

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (4.36)$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{dH}{dz} \frac{da}{dz} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dH}{da}. \quad (4.37)$$

Finalmente remplazando obtenemos:

$$\frac{dH}{dz} = \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{H} (1+z)^3 \Omega_r (\omega_r - \omega_m) - \frac{C_d D_{d,\Delta}}{1+z} H^{d-\Delta+1} - \frac{[2C_d - 3(1+\omega_m)]}{2} \frac{H}{1+z}. \quad (4.38)$$

Buscamos encontrar valores de los parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$ y $d - \Delta$, a partir de encontrar la solución gráfica de la ecuación (4.38). Utilizando los mismos valores de las constantes que se utilizaron en la sección anterior, estos valores son: $H_0 = 64,7 \frac{km}{s\ mpc}$, $\Omega_r = 2,8 \times 10^{-4}$, $\omega_m = 0$, y $\omega_r = \frac{1}{3}$.

En la determinación de los parámetros, ajuste para 3 valores de $d - \Delta$, esto debido a que en principio esperaríamos encontrar valores enteros de d y Δ , por lo tanto, elegimos solo buscar soluciones para $d - \Delta = 1, \pm 2$. Las razones de elegir estos valores son diferentes, primero elegimos $d - \Delta = -2$ debido a que en el modelo compuesto solo de radiación dio buenos resultados para este valor, y es interesante saber si también logra ajustarse para un universo multi-componente. Aunque este valor del parámetro no respete la condición $d > \Delta$, si logra ajustar bien en los dos tipos de universo, tal vez tenga algún significado y sea la hipótesis del modelo la que está mal justificada. Por otro lado, elegimos los valores de $d - \Delta = 1, 2$, principalmente debido a que es de esperarse que d no sea mucho mayor que Δ , aunque sea el exponente de un término subdominante, su influencia tiene que ser notoria en el comportamiento de la entropía de la pantalla de Hubble.

Entonces, una vez fijados las tres opciones de $d - \Delta$, lo que se realiza es un barrido sobre los valores de C_d , en el intervalo de $[-1, 2]$ (sin considerar a $C_d = 0$), con un paso en el barrido C_d de 0,5, y para cada paso, encontramos un intervalo de

los valores $D_{d,\Delta}$, que presenten un comportamiento similar comparado con el de los datos.

- Si trabajamos con $d - \Delta = -2$, obtenemos los siguientes conjuntos de valores:

C_d	$D_{d,\Delta}$
-1	$[-11000, -10800]$
-0.5	$[15800, 16800]$
0.5	$[-1000, 1000]$
1	$[-7000, 5000]$
1.5	— — — —
2	— — — —

Tabla 4.5: Valores de parámetros C_d , y $D_{d,\Delta}$ para $H(z)$, con $d - \Delta = -2$

Mostramos los resultados para la combinación de parámetros $C_d = -0,5$ y $D_{d,\Delta}$ entre $[15800, 16800]$, donde solo representamos los casos limites, $D_{d,\Delta} = 15800$ con color rojo, y $D_{d,\Delta} = 16800$ con color azul, ya que todos los demás casos estarían entre estos dos resultados:

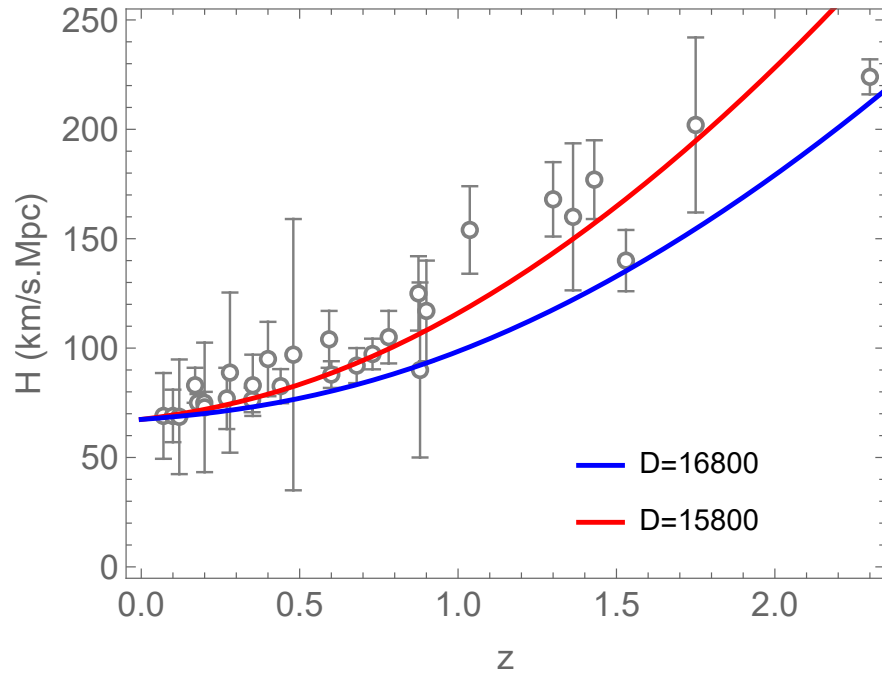


Figura 4.13: Comparación 1 de $H(z)$, con $d - \Delta = -2$ y $C_d = -0,5$. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de [28]

Se puede ver que si $d - \Delta = -2$, existen muchas posibles combinaciones

de parámetros que dan un resultado similar a los datos, recordemos que también obtuvimos este resultado en el análisis del universo solo compuesto por radiación.

- Si trabajamos con $d - \Delta = 1$ obtenemos los siguientes conjuntos de valores:

C_d	$D_{d,\Delta}$
-1	— — — —
-0.5	— — — —
0.5	$[-0,001, 0,001]$
1	$[-0,005, -0,004]$
1.5	— — — —
2	— — — —

Tabla 4.6: Valores de parámetros C_d , y $D_{d,\Delta}$ para $H(z)$, con $d - \Delta = 1$

Mostramos los resultados para la combinación de parámetros $C_d = 1$ y $D_{d,\Delta}$ entre $[-0,005, -0,004]$, donde solo representamos los casos límites, $D_{d,\Delta} = -0,004$ con color rojo, y $D_{d,\Delta} = -0,005$ con color azul, ya que todos los demás casos estarían entre estos dos resultados:

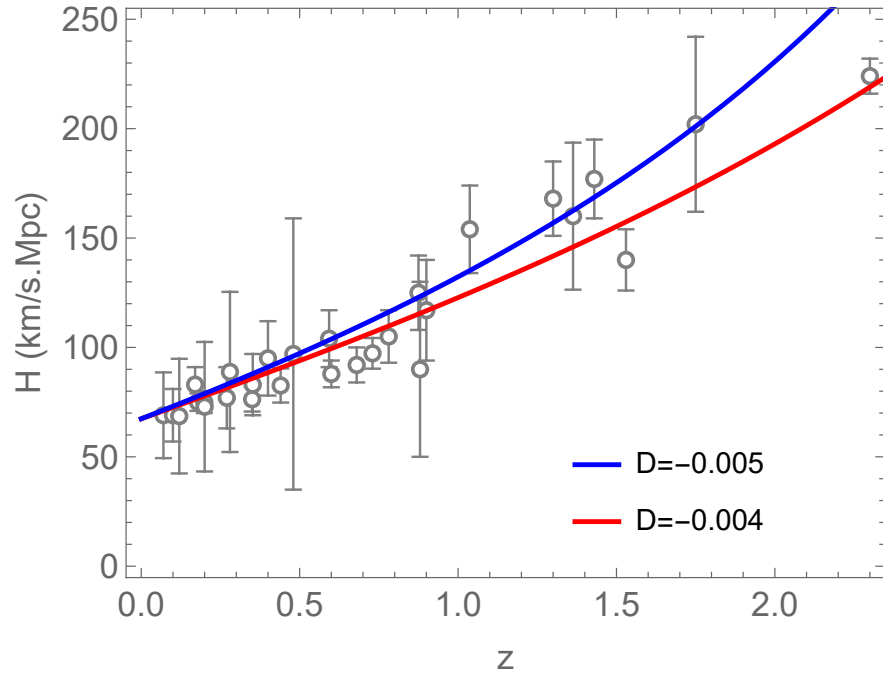


Figura 4.14: comparación 2 de $H(z)$, con $d - \Delta = 1$ y $C_d = 1$. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de (A.Pradhan, 2021)

- Si trabajamos con $d - \Delta = 2$ obtenemos los siguientes conjuntos de valores:

C_d	$D_{d,\Delta}$
-1	— — — —
-0.5	— — — —
0.5	$[-0,00001, 0,00001]$
1	$[-0,00004, -0,00003]$
1.5	— — — —
2	— — — —

Tabla 4.7: Valores de parámetros C_d y $D_{d,\Delta}$ para $H(z)$, con $d - \Delta = 2$

Mostramos los resultados para la combinación de parámetros $Cd = 1$ y $D_{d,\Delta}$ entre $[-0,00004, -0,00003]$, donde solo representamos los casos límites, $D_{d,\Delta} = -0,00003$ con color rojo, y $D_{d,\Delta} = -0,00004$ con color azul, ya que todos los demás casos estarían entre estos dos resultados:

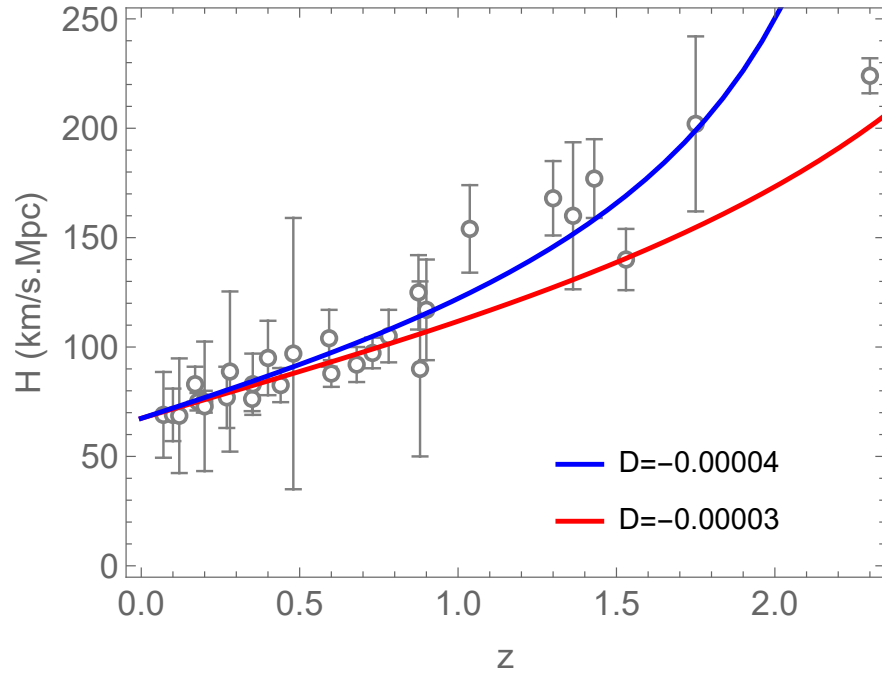


Figura 4.15: comparación 3 de $H(z)$, con $d - \Delta = 2$ y $C_d = 1$. Los círculos con barras de error son datos de supernovas tomados de [28]

Las tres comparaciones mostradas en las gráficas, presentan una forma similar a las que encontramos en la sección anterior y además coinciden con casi todos los datos dentro de su cota de error.

Capítulo 5

Conclusiones

El último capítulo se lo dedico a mi mamá.

Por haber creado, haberme cuidado, y por ser mi mayor inspiración.

Los logros que conseguí son solo la conclusión de tu crianza.

'Yo no me detengo cuando estoy cansado, me detengo cuando termino'

5.1. Recapitulación de los objetivos

El objetivo general de esta tesis es analizar diversos modelos de cosmología entrópica, también conocidos como modelos de energía oscura holográfica, los cuales son propuestos como una alternativa a la explicación que el modelo Λ -CDM hace para el fenómeno de expansión tardía del universo. Estudiar dos variantes de universos, utilizando la expresión de la entropía con escalamiento arbitrario y termino subdominante, propuesta en (D.J. Zamora, [2022a](#)), uno para un universo compuesto solo de radiación y el otro para un universo multi-componente, compuesto tanto por radiación como materia no relativista.

Para lograr estos objetivos generales se trabajó sistemáticamente con un orden dictado por los siguientes objetivos particulares:

- Derivar las soluciones de las ecuaciones de Friedmann para ambos casos, bajo las hipótesis típicas de cualquier modelo de cosmología relativista.
- Verificar si estas soluciones son aptas para explicar periodos de expansión

acelerada y desacelerada con una única combinación de parámetros.

- Contrastar dichas soluciones con los datos observacionales más relevantes de la época, como lo son la magnitud y redshift de las supernovas tipo Ia, extraídas de (A.Pradhan, 2021) y (D.M.Scolnic, 2018).
- Comparar las soluciones con las predicciones que realiza el modelo Λ -CDM, y otros modelos de cosmología entrópica (D.A.Easson, 2011), (D.A.Easson, 2012), (N. Komatsu, 2013a) y (D.J. Zamora, 2022b), para las diferentes etapas de aceleración del universo.
- Obtener una serie de conjuntos de parámetros, que surjan de los análisis de las soluciones propuestos en los dos objetivos anteriores, y discutir sobre ellos sus coincidencias o sus implicaciones físicas, si es que la tienen.

En esta tesis, todos los objetivos fueron correctamente obtenidos para el caso del universo compuesto por radiación. Para el caso del universo multicomponente, se presentaron algunas dificultades debido a que no se obtuvo una solución analítica de las ecuaciones de Friedmann; sin embargo, se intentó seguir con el análisis de la manera que considerábamos más parecida para conseguir los objetivos propuestos. Los resultados de ambos universos serán resumidos en la próxima sección.

5.2. Resumen de los resultados

Para presentar los resultados, recordamos que la expresión de la fuerza entrópica depende de tres parámetros, C_d , $D_{d,\Delta}$, y $d - \Delta$. Es decir, que todas las soluciones que obtenemos tienen la misma forma, pero varían en el valor de estos tres parámetros, es por esto que lo que buscamos es encontrar los conjuntos de estos parámetros que mejor se ajustan a los datos experimentales o que nos proporcionan la solución más parecida a las obtenidas con el modelo Λ -CDM.

5.2.1. Universo compuesto de radiación

Se reemplazó la expresión de la fuerza entrópica en las ecuaciones de Friedmann, y se derivó las soluciones de las mismas para un universo compuesto de radiación de manera analítica, encontrando la expresión del parámetro de Hubble H en función del factor de escala a , y también en función del RS z ; la expresión del factor de escala en forma explícita con el tiempo; el parámetro de desaceleración q

en función del parámetro de Hubble y también en función del RS z ; y por último la 'magnitud' μ en función de z .

Los análisis de dichas soluciones se presentan en el siguiente listado:

- De la expresión de $q(H)$, se verificó que este tipo de modelos son aptos para explicar periodos de expansión acelerada y desacelerada, con una única combinación de sus parámetros C_d , $D_{d,\Delta}$ y $d - \Delta$.
- Con la ecuación de $q(z)$, analicé la dependencia de las diferentes etapas de expansión con los parámetros y se encontró que el parámetro más relevante para el comportamiento de las soluciones es C_d , que modifica la concavidad, el crecimiento y la ordenada al origen los parámetros $D_{d,\Delta}$ y $d - \Delta$, aunque menos importantes que el otro, también modifican notoriamente el comportamiento de las soluciones, sobre todo en el crecimiento.
- A partir de la solución de $a(H_0(t - t_0))$, se comparó con las predicciones de las diferentes etapas del modelo Λ -CDM, los resultados se pueden apreciar en la tabla 4.1. Se encontró una combinación de parámetros que se ajusta perfectamente a todas las etapas de expansión; sin embargo, en esta solución $d - \Delta = -2$, las implicaciones del valor de esta constante se discutirá en la siguiente sección. Además, se encuentra más de una combinación de parámetros que se ajustan de manera precisa a las diferentes etapas, excepto para valores de $H_0(t - t_0) < -0,5$.
- En lo que respecta a la contrastación de los datos observacionales de supernovas tipo Ia, se realizó dos tipos de ajustes. El primero tipo de ellos es el ajuste de la 'magnitud' en función del RS, es decir, $\mu(z)$, encontrando una gran cantidad de conjuntos de parámetros que se ajustan con un grado alto de correlación, el mejor de ellos se da cuando los parámetros toman los valores $C_d = 1,2 \pm 0,1$, $D_{d,\Delta} = 6 \times 10^{-6} \pm 1 \times 10^{-6}$ y $d - \Delta = 2$, dicho ajuste se obtiene con un factor de correlación de $R^2 = 0,999988$.

El segundo tipo de ajustes con los datos, se lo hace para $H(z)$, en este caso se llevó a cabo dos métodos diferentes. El primer método consistía en proponer los valores de los parámetros C_d y $d - \Delta$ y se ajustó solamente el valor de $D_{d,\Delta}$, los resultados están en la tabla 4.3, encontrando el mejor ajuste con un factor de correlación de $R^2 = 0,9943263$ cuando proponemos

los parámetros $C_d = 0,5$, $d - \Delta = -2$ y se obtiene $D_{d,\Delta} = 9,5 \times 10^3 \pm 0,2 \times 10^3$. El segundo método consiste en solo sugerir el valor de $d - \Delta$, y encontrar los otros dos, los resultados se muestran en la tabla 4.4, en este caso el mejor ajuste se da con un factor de correlación de $R^2 = 0,994317$, eligiendo $d - \Delta = 0,1$ y encontrando $C_d = 8 \pm 1$ y $D_{d,\Delta} = -0,54 \pm 0,01$.

5.2.2. Universo multicomponente

Al igual que para el universo compuesto solo de radiación, en el universo multicomponente se remplazó la expresión de la fuerza entrópica en las ecuaciones de Friedmann, pero en este caso se utilizó dos ecuaciones de estado, una para cada componente.

Al intentar resolver las ecuaciones de Friedmann, se llegó a una expresión que no posee solución analítica simple. Debido a que nosotros estamos interesados en encontrar una solución con la cual poder encontrar valores de los parámetros, se decidió utilizar métodos numéricos para obtener las soluciones gráficas, y se comparó dichas soluciones con las etapas predichas por el modelo Λ -CDM y los datos de supernovas tipo Ia. Para encontrar las soluciones que se compararon con los dos métodos mencionados, primero se realizó en cada caso los respectivos cambios de variables en la ecuación diferencial:

- En la primera comparación, se pasó de $H(a)$ hacia $a(H_0(t - t_0))$, utilizando la definición del parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$, se obtuvo una ecuación diferencial más complicada que la inicial, pero que al resolver con métodos numéricos se pudo obtener dos comparaciones que se comportaban de manera similar a las etapas predichas por el modelo Λ -CDM. El mejor de estos muestra una similitud en todas las etapas predichas por el modelo Λ -CDM, y se presenta cuando $C_d = 7$, $D_{d,\Delta} = -0,7$, pero $d - \Delta = -2$, al igual que para el universo compuesto de radiación. El segundo resultado de la comparación, se da cuando $C_d = -1,5$, $D_{d,\Delta} = 2$, y $d - \Delta = 2$; sin embargo, al igual que el modelo anterior, no muestra una buena concordancia con las etapas tempranas de expansión.
- Para la comparación con los datos de supernovas, se pasó de la ecuación diferencial de $H(a)$, hacia una de $H(z)$, esto fue posible gracias a la relación $a = \frac{1}{1+z}$, en este caso se encontró una ecuación diferencial un poco

más simple, y, por lo tanto, se pudo comparar con una amplia variedad de conjuntos de parámetros.

Sin embargo, al usar métodos numéricos y no obtener una expresión de las soluciones, no es posible encontrar la curva que mejor se ajuste a los datos, es por esto que se encontró gráficamente, intervalos de valor en los que las soluciones se comportaban de manera similar que los datos, los cuales presentamos en las tablas [4.5](#), [4.6](#), y [4.7](#).

Los resultados obtenidos son indudablemente relevantes para el campo de estudio. Gracias a estos diversos análisis, se llegó a varias conclusiones sobre los modelos de expansión entrópica, no solo se comprobó que son aptos para explicar diferentes etapas de expansión acelerada con una sola expresión de entropía, sino que también se encontró muy buenas correlaciones con los datos de supernovas y con las etapas del modelo Λ -CDM, tanto para un universo mono-componente como para uno multi-componente.

Con los resultados obtenidos en esta tesis, el campo de estudio se ve enriquecido por una serie de pruebas, que muestran que los modelos de expansión entrópica, son capaces de explicar con facilidad la expansión tardía del universo; e incluso, para un caso en particular, explicar todas las etapas de dicha expansión. De esta manera, el trabajo aporta positivamente a una posible explicación alternativa que proporciona el modelo Λ -CDM, sin la necesidad de la postulación ad hoc de la energía oscura.

En la siguiente sección se realizará una discusión de las implicaciones de los resultados, que dará pie a un estudio más detallado de los parámetros que se obtuvieron.

5.3. Implicaciones de los resultados

En principio, los resultados que obtuvimos en los diversos análisis detallados anteriormente, cumplen con la gran mayoría de los objetivos planteados inicialmente para esta tesis; sin embargo, todavía queda discutir las implicaciones que tienen estos resultados, y proponer posibles explicaciones en función del conjunto de parámetros obtenidos en los diversos análisis. Es por esto que la función principal de esta sección es el desarrollo de dicho objetivo.

- Con la expresión de $q(z)$ que se obtuvo para un universo compuesto solo de radiación, se analizó la relevancia de los diferentes parámetros presentes en la expresión de la fuerza entrópica:

$$F = C_d F_P (1 + D_{d,\Delta} H^{-(d-\Delta)}), \quad (5.1)$$

Se encontró que el parámetro de mayor relevancia es C_d , el mismo tiene una gran influencia en muchos de los comportamientos de las curvas resultantes; por ejemplo, en su crecimiento y su concavidad, pero más importante en su influencia sobre la ordenada al origen, ya que esta tiene un significado físico relevante. La ordenada al origen de una gráfica de $q(z)$, representa que valor tiene el parámetro de desaceleración en la actualidad, porque un valor de $z = 0$, implica que $a = a_0$, es decir que estamos en el presente. Por lo tanto, en el supuesto caso en el que se tuviera conocimiento del parámetro de desaceleración en el presente, con base en observaciones, sería posible, basándonos en este análisis, fijar el valor de C_d que coincida con dicha observación, y de esta manera reducir uno de los parámetros a ajustar, quedándonos con solo dos de estos.

- De la comparación con el modelo Λ -CDM, encontramos una gran variedad de conjuntos de parámetros que proporcionan una curva similar a las diferentes etapas de expansión del universo, a partir de un $H_0(t - t_0) > -0,5$ aproximadamente. Esto es de esperarse, considerando que el objetivo de estos modelos es la explicación de las etapas tardías de expansión, ya que es en estas etapas en donde domina la energía oscura; sin embargo, se encontró una combinación de parámetros, que coincide perfectamente con todas las etapas de la expansión predecidas por el modelo Λ -CDM.

Desafortunadamente dicha solución presenta un problema, debido a que el parámetro $d - \Delta = -2$, lo cual entra en contradicción con una de nuestras hipótesis, debido a que al término subdominante en la expresión de la entropía, se lo agrego con la condición de que $0 < \Delta < d$. De esta manera, dicho conjunto de parámetros, no pueden ser considerados como una solución válida de nuestro modelo, al menos que se modifique la interpretación del término subdominante; de igual manera, es de nuestro interés analizar si dicha combinación de parámetros también presenta un buen ajuste con los datos de supernovas tipo Ia. Dado que si dicha solución presenta una buena correlación con todos los métodos de contrastación, aumentaría el interés de futuras investigaciones de proponer modificaciones en las hipótesis, y, por lo tanto, en la interpretación de los diferentes términos de la entropía.

- Analizando el primer tipo de ajuste con los datos de supernovas tipo Ia, en donde se grafica la 'magnitud' en función del redshift. Es de destacar que, a pesar de que solo se expuso el mejor de los ajustes, la realidad es que existe muchas combinaciones de parámetros que logran ajustarse correctamente a estos datos, con un grado alto de correlación.

Sin embargo, aunque se cuente con muchas soluciones y los ajustes sean altamente preciso, este resultado no es realmente sorprendente, ya que es de esperarse que este tipo de modelos ajuste con estos datos. Se puede ver en la diversa bibliografía (D.A.Easson, [2011](#)), (D.A.Easson, [2012](#)), (N.Komatsu, [2014](#)), (D.J. Zamora, [2022b](#)), y (D.J. Zamora, [2022a](#)), que la mayoría de los modelos consiguen un ajuste preciso de estos datos de supernovas tipo Ia. Se necesitan análisis de datos más completos (por ejemplo, utilizando una matriz de covarianza) para validar aún más estos modelos. Esto está fuera de nuestros objetivos y puede ser una investigación a futuro.

- Del segundo ajuste de los datos de supernovas tipo Ia, en donde se analiza el parámetro de Hubble en función del redshift. Se propuso los mismos valores de los parámetros obtenidos de la mejor comparación con el modelo Λ -CDM, y se encontró que también ajusta correctamente con los datos de supernovas.

En este caso este resultado sí es notablemente sorprendente, ya que todos los parámetros ajustados coinciden dentro del error con los encontrados de la

comparación del análisis anterior, incluso para el caso en el que $d - \Delta = -2$. Es a partir de esto que se empieza a mirar con buenos ojos las soluciones obtenidas, y en donde ganan mayor validez los modelos de fuerza entrópica.

De esta manera se concluye con el análisis de las implicaciones de los resultados y las interpretaciones físicas de los mismos, aunque estas no sean muchas, sin duda aportan en la comprensión de estos modelos y dan pie a futuras investigaciones que puedan construirse sobre los hallazgos de esta tesis. hablaré más sobre este tema en la última sección de este capítulo. Antes de esto se hablara de las limitación de la validez de los resultados, para tener una visión mas realista de la investigación.

5.4. Limites de los resultados

Para tener un panorama claro de los limites que tienen los modelos de cosmología entrópica y particularmente nuestra investigación, empezamos por recapitular las hipótesis mas importantes que se utilizaron en el desarrollo de esta tesis.

1. El universo es homogéneo e isótropo a escalas cosmológicas.
2. La materia se comporta como un fluido ideal a escalas cosmológicas.
3. El universo es espacialmente plano, $k = 0$.
4. El horizonte cosmológico tiene asociado una temperatura y una entropía, análogo a la de un horizonte de sucesos de un BH
5. La esfera de Hubble coincide con el horizonte cosmológico.

Las primeras dos hipótesis son típicas de cualquier modelo cosmológico y fundamentales para la simplificación de las ecuaciones diferenciales. Las mismas no producen grandes limitaciones en nuestros modelos, ya que son ambas utilizadas en el modelo Λ -CDM. En el caso de la tercera hipótesis, la misma está positivamente contrastada con las observaciones más recientes, por lo que se la considera como la curvatura del E-T más probable de nuestro universo. Sus limitaciones no son muchas, puesto que aunque el universo presente alguna curvatura, se esperaría que esta sea muy baja y, por lo tanto, no modificaría significativamente los resultados.

Las últimas dos hipótesis son el corazón de los modelos de cosmología entrópica, y, por lo tanto, son las hipótesis más novedosas en el contexto de la cosmología, y a su vez la que proporciona más limitaciones. Principalmente, la última de ellas, es la que hace que nuestra investigación tenga mayor validez en las etapas tardías del universo; esto debido a que se sabe que la esfera de Hubble y el horizonte cosmológico, en la actualidad, son muy próximos y lo serán en el futuro; sin embargo, suponer que coincidían en el pasado es una suposición muy fuerte, que muy posiblemente no se cumpla.

Además de estas hipótesis, en nuestra tesis trabajamos con dos tipos de universos. En el primero de estos hicimos la suposición de que el universo solo está compuesto de radiación; sin embargo, claramente el universo contiene materia y radiación, además de que se tiene pruebas de que en su gran mayoría es materia. Por lo que, obviamente, no se tiene la intención de proponer que este universo y, por lo tanto, sus soluciones, representen un modelo realista del universo, pero sí se busca de él información que puede ser útil como antecedentes de otros modelos.

Por otro lado, el segundo de los universos sugeridos, aunque sí considera ambos contenidos del universo, tanto materia como radiación. El porcentaje de cada uno de estos no es obtenido por nosotros, en cambio, se utiliza el supuesto de que los porcentajes que el modelo λ -CDM encuentra para el contenido del universo es correcto, con la modificación de la no existencia de la energía oscura.

Por ultimo, recordar otra de las hipótesis que produce limitaciones en nuestros modelos, y que esta presente en ambas propuestas de universos, es la que se supone cuando se define la expresión de la entropía, pidiendo que el termino de primer orden escale mas rápidamente que el termino subdominante de segundo orden.

5.5. Futuras investigaciones

Seguir investigando este tipo de modelos tiene implicaciones significativas en el estado de la cosmología actual, ya que estos representan una de las mejores alternativas al uso de la energía oscura como explicación de la expansión tardía del universo. Es por esto que para finalizar con las conclusiones de la tesis, es importante mencionar algunas recomendaciones para futuras investigaciones sobre este tipo de modelos, que se pueda construir sobre los resultados encontrados en

nuestra investigación.

De los resultados obtenidos del universo compuesto solo por radiación, se pueden encontrar varias propuestas que puedan ampliar el entendimiento de estos modelos. Por ejemplo, intentar encontrar significados de los parámetros a ajustar, en ciertos casos particulares, como lo hicimos con C_d en el caso de que $z = 0$. También una opción sería realizar un análisis de datos más complejos, que por ejemplo utiliza la matriz de covarianza, para validar más estos modelos, y poder obtener aún más indicaciones de los valores de los parámetros. Pero sin duda la propuesta de investigación más interesante que surge de nuestro trabajo, es el análisis de la solución en la que el parámetro $d - \Delta = -2$, esto debido a que no solo presenta buenos ajustes para los dos tipos de datos de supernovas tipo Ia, sino que además logra replicar a la perfección las predicciones de todas las etapas que propone el modelo Λ -CDM para la expansión del universo. En principio se podría modificar la interpretación que se le da a los dos términos de la expresión de la entropía, talvez relajando algún supuesto para que este no este en contradicción con las explicaciones del mismo.

Por último, con lo que respecta al universo multi-componente, es posible avanzar mucho en la investigación de estos modelos. Sería muy interesante intentar obtener alguna solución analítica, que pueda ser ajustada con los datos observacionales de las supernovas, al menos para un caso particular no muy complicado. Por otro lado, sería interesante hacer diversos análisis con diferentes métodos numéricos, que proporcionen nueva información de estas soluciones.

En resumen, nuestra investigación realiza grandes aportes a este tipo de modelos cosmológicos alternativos, mostrando resultados que apuntan positivamente al uso de los mismos ; sin embargo, para poder considerarlos como una alternativa sería, aún queda bastante trabajo por hacer, tanto en el análisis de las soluciones, como así también en las hipótesis principales, y en sus implicaciones teóricas.

Apéndice A

Función Hipergeométrica Gaussiana

La función hipergeométrica Gaussiana u ordinaria ${}_2F_1(a, b, c; z)$ es una función especial representada por la serie hipergeométrica. Es una solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, conocida como la ecuación diferencial hipergeométrica de Euler:

$$z(1-z)\frac{\partial^2 F(a, b, c; z)}{\partial z^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{\partial F(a, b, c; z)}{\partial z} - abF(a, b, c; z) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Puede ser representada por la siguiente serie de potencias (solo converge para $|z| < 1$):

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{A.2})$$

La función no está definida si c es igual a un entero no positivo.

Donde $(q)_n$ es el símbolo de Pochhammer, que se define por:

$$(q)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ q(q-1)\dots(q+n-1) & n > 0 \end{cases}$$

Apéndice B

Desarrollo de las ecuaciones

En este apéndice desarrollaremos paso a paso las derivaciones de las ecuaciones y las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

B.1. Entropía con escalamiento arbitrario

Primero resolveremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2C_d - 3(1+\omega)}{2}} \quad (\text{B.1})$$

Primero remplazamos $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

$$\dot{a} = aH_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2C_d - 3(1+\omega)}{2}} \quad (\text{B.2})$$

Ahora resolvemos la ecuación diferencial separando las variables:

$$\int_{t_0}^t H_0 dt = \int_{a_0}^a a^{-1} * \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{2C_d - 3(1+\omega)}{2}} da \quad (\text{B.3})$$

Resolvemos las integrales:

$$H_0(t - t_0) = \left[\left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{3(1+\omega) - 2C_d}{2}} - 1 \right] \frac{2}{3 + 3\omega - 2C_d} \quad (\text{B.4})$$

Finalmente obtenemos:

$$\frac{a}{a_0} = \left[\frac{3 + 3\omega - 2C_d}{2} H_0(t - t_0) + 1 \right]^{\frac{2}{3+3\omega-2C_d}} \quad (\text{B.5})$$

B.1.1. Parámetro de desaceleración

Para obtener el parámetro de desaceleración debemos derivar con respecto al tiempo el resultado obtenido anteriormente, recordamos que el parámetro de desaceleración es $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$.

$$\dot{a} = a_0 H_0 \left[\frac{3 + 3\omega - 2C_d}{2} H_0(t - t_0) + 1 \right]^{\frac{2}{3+3\omega-2C_d} - 1} \quad (\text{B.6})$$

Volvemos a derivar para obtener $\ddot{a}$.

$$\ddot{a} = a_0 H_0^2 \left(1 - \frac{3 + 3\omega - 2C_d}{2} \right) \left[\frac{3 + 3\omega - 2C_d}{2} H_0(t - t_0) + 1 \right]^{\frac{2}{3+3\omega-2C_d} - 2} \quad (\text{B.7})$$

Ahora podemos remplazar esto en la ecuación del parámetro de desaceleración para obtener:

$$q = -\frac{a_0^2 H_0^2 \left(1 - \frac{3+3\omega-2C_d}{2} \right) \left[\frac{3+3\omega-2C_d}{2} H_0(t - t_0) + 1 \right]^{\frac{4}{3+3\omega-2C_d} - 2}}{a_0^2 H_0^2 \left[\frac{3+3\omega-2C_d}{2} H_0(t - t_0) + 1 \right]^{\frac{4}{3+3\omega-2C_d} - 2}} \quad (\text{B.8})$$

Simplificando la fracción, obtenemos la simple expresión que usamos en el capítulo 3-1:

$$q = \left(1 - \frac{3 + 3\omega - 2C_d}{2} \right) \quad (\text{B.9})$$

B.1.2. Ecuaciones con entropía y término subdominante

Partiendo desde la solución a la ecuación diferencial.

$$\left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{d-\Delta}{2} [2C_d - 3(1+\omega)]} = \frac{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + [2C_d - 3(1+\omega)] \left(\frac{H_0}{H} \right)^{d-\Delta}}{2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta} + [2C_d - 3(1+\omega)]} \quad (\text{B.10})$$

Para simplificar la notación vamos a definir las constantes $A = 2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}$, $B = 2C_d - 3(1 + \omega)$.

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} = \frac{A + B \left(\frac{H_0}{H}\right)^{d-\Delta}}{A + B} \quad (\text{B.11})$$

Buscamos encontrar la expresión de a explícita con el tiempo. Para esto reemplazamos $H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$\left[\frac{(A + B) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A}{B H_0^{d-\Delta}} \right]^{\frac{1}{d-\Delta}} = \frac{a}{\dot{a}} \quad (\text{B.12})$$

Ahora resolvemos la ecuación diferencial separando las variables:

$$\int_{t_0}^t B^{\frac{1}{d-\Delta}} H_0 dt = \int_{a_0}^a a^{-1} \left[\frac{(A + B) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A}{B H_0^{d-\Delta}} \right]^{\frac{1}{d-\Delta}} da \quad (\text{B.13})$$

Resolver estas integrales nos da como resultado:

$$(1 + d - \Delta) A H_0 (t - t_0) = \left[(A - B) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A \right]_2^{1 + \frac{1}{d-\Delta}} F_1 \left(1, 1 + \frac{1}{d-\Delta}; \right. \\ \left. 2 + \frac{1}{d-\Delta}; 1 - \frac{A-B}{A} \right) - B^{(1 + \frac{1}{d-\Delta})} {}_2F_1 \left(1, 1 + \frac{1}{d-\Delta}; 2 + \frac{1}{d-\Delta}; \frac{B}{A} \right) \quad (\text{B.14})$$

B.1.3. Obtención del Parámetro de desaceleración

Es posible calcular el parámetro de desaceleración $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$, a partir de la ecuación (3.27). Para simplificar la notación, utilizamos las constantes $A = 2C_d D_{d,\Delta} H_0^{d-\Delta}$ y $B = 2C_d - 4$.

$$\frac{A + B \left(\frac{H_0}{H}\right)^{d-\Delta}}{A + B} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} \quad (\text{B.15})$$

Buscamos despejar $\dot{a}$.

$$A + B \left(\frac{H_0}{H} \right)^{d-\Delta} = (A + B) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B}$$

$$(H)^{-(d-\Delta)} = \left[(A + B) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A \right] \frac{H_0^{-(d-\Delta)}}{B} \quad (\text{B.16})$$

Por lo tanto, sabiendo que el parámetro de Hubble es $H = \frac{\dot{a}}{a}$, encontramos la siguiente ecuación para $\dot{a}$:

$$\dot{a} = \left[\frac{(A + B) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A}{B} \right]^{-\frac{1}{d-\Delta}} H_0 * a \quad (\text{B.17})$$

Derivamos con respecto al tiempo esta ultima para obtener $\ddot{a}$, además utilizamos la ecuación (4.6) para simplificar la notación:

$$\ddot{a} = H * \dot{a} + H * \dot{a} \frac{(A + B)}{2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} \left[\frac{(A + B) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{d-\Delta}{2}B} - A}{B} \right]^{-1}$$

Para finalizar utilizamos la expresión encontrada en (4.5) y luego derivamos ambos lados de la ecuación por $\dot{a} * H$:

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a} * H} = 1 + \frac{A + B \left(\frac{H_0}{H} \right)^{d-\Delta}}{2} * \left(\frac{H}{H_0} \right)^{d-\Delta}$$

Acomodando esta ultima ecuación y recordando los valores de el parámetro de Hubble y las constantes A y B, encontramos que el parámetro de desaceleración para un universo con las condiciones planteadas es el siguiente:

$$q = -1 - \frac{[2C_d - 3(1 + \omega)]}{2} - C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta} \quad (\text{B.18})$$

Apéndice C

Ecuaciones diferenciales

En este apéndice desarrollaremos paso a paso las derivaciones de las diferentes ecuaciones diferenciales, partiendo de las ecuaciones de Friedmann para un universo compuesto de radiación y materia no relativista.

C.1. Derivación de la ecuación diferencial de $H(t)$, de $H(a)$, de $H(z)$ y $a(t)$

C.1.1. Ecuación diferencial de $H(t)$

Partiendo de la ecuación (4.24) del capítulo 4:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \left(\rho_m + \rho_r + \frac{3p_m}{c^2} + \frac{3p_r}{c^2} \right) + 2C_d H^2 (1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) \quad (\text{C.1})$$

Remplazamos ρ_m , ρ_r , P_m , y P_r , utilizando las siguientes definiciones, mostradas en el capítulo 4:

$$\rho_i = \frac{3H_0^2 \Omega_i}{8\pi G} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{n_i} \quad (\text{C.2})$$

$$P_i = c^2 \omega_i \rho_i \quad (\text{C.3})$$

En donde Ω_r y Ω_m son el porcentaje del total de cada componente, $\omega_r = \frac{1}{3}$, $\omega_m = 0$, $n_r = -3$, y $n_m = -4$.

Al remplazar estas expresiones en la ecuación (C.1) nos da:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -H_0^2 [\Omega_r a^{-4}(1 + 3\omega_r) + \Omega_m a^{-3}(1 + 3\omega_m)] + 2C_d H^2(1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) \quad (\text{C.4})$$

Acomodándola también se puede escribir:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_r(1 + 3\omega_r) + \frac{8\pi G}{3}\rho_m(1 + 3\omega_m) = 2C_d H^2(1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) - 2\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{C.5})$$

Sabemos que $H = \frac{\dot{a}}{a}$, si derivamos esta expresión obtenemos:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \quad (\text{C.6})$$

Reemplazando en (C.5):

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_r(1 + 3\omega_r) + \frac{8\pi G}{3}\rho_m(1 + 3\omega_m) = 2C_d H^2(1 + D_{d,\Delta} H^{d-\Delta}) - 2H^2 - 2\dot{H} \quad (\text{C.7})$$

Ahora multiplicando ambos miembros de la ecuación de Friedmann (4.20), por $1 + 3\omega_m$:

$$(1 + 3\omega_m)H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r(1 + 3\omega_m) + \frac{8\pi G}{3}\rho_m(1 + 3\omega_m) \quad (\text{C.8})$$

Volvemos a la forma de la ecuación de continuidad, escrita como en (C.5), pero remplazando el termino $\frac{8\pi G}{3}\rho_m(1 + 3\omega_m)$, obtenido de la ecuación de Friedmann.

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_r(3\omega_r - 3\omega_m) + H^2(1 + 3\omega_m) = 2C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta+2}(2C_d - 2)H^2 - 2\dot{H} \quad (\text{C.9})$$

Agrupando términos y derivando ambos miembros por H_0^2 :

$$\frac{\dot{H}}{H_0^2} = \frac{2C_d D_{d,\Delta}}{H_0^2} H^{d-\Delta+2} + \frac{[2C_d - 3(\omega_m + 1)]}{2} \left(\frac{H}{H_0} \right)^2 - \frac{3}{2} \Omega_r a^{-4} (\omega_r - \omega_m) \quad (\text{C.10})$$

Obtenemos la ecuación diferencial de $H(t)$, despejando $\dot{H}$.

$$\dot{H} = \frac{H^2}{2} [2C_d - 3(\omega_m + 1)] + C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta+2} - \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{a^4} \Omega_r (\omega_r - \omega_m) \quad (\text{C.11})$$

C.1.2. Ecuación diferencial de $H(a)$

Para obtener la ecuación diferencial para $H(a)$, multiplicamos ambos miembros de (C.11) por $\frac{1}{H} = \frac{a}{\dot{a}}$:

$$\frac{dH}{dt} \frac{dt}{da} a = \frac{H}{2} [2C_d - 3(\omega_m + 1)] + C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta+1} - \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{H a^4} \Omega_r (\omega_r - \omega_m) \quad (\text{C.12})$$

Finalmente despejamos $\frac{dH}{da}$:

$$\frac{dH}{da} = \frac{H}{2a} [2C_d - 3(\omega_m + 1)] + \frac{C_d D_{d,\Delta}}{a} H^{d-\Delta+1} - \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{H a^5} \Omega_r (\omega_r - \omega_m) \quad (\text{C.13})$$

C.1.3. Ecuación diferencial de $a(t)$

Para encontrar la ecuación diferencial de $a(t)$, partimos nuevamente de la definición del parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$, pero esta vez derivamos H respecto al factor de escala a .

$$\frac{dH}{da} = \frac{d\frac{\dot{a}}{a}}{da} = -\dot{a}\frac{1}{a^2} \quad (\text{C.14})$$

Ahora remplazamos en la ecuación (C.13):

$$-\frac{1}{a^2}\dot{a} = \frac{C_d D_{d,\Delta}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{d-\Delta+1} + \frac{[2C_d - 3(1 + \omega_m)]}{2a} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{\dot{a}a^4} \Omega_r(\omega_r - \omega_m) \quad (\text{C.15})$$

Despejamos $\dot{a}$:

$$\dot{a} = -\frac{C_d D_{d,\Delta}}{a^{d-\Delta}} (\dot{a})^{d-\Delta+1} - \frac{[2C_d - 3(1 + \omega_m)]}{2} \dot{a} + \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{\dot{a}a^2} \Omega_r(\omega_r - \omega_m) \quad (\text{C.16})$$

Agrupamos algunos términos:

$$\dot{a} \left[1 + \frac{1}{2} [2C_d - 3(1 + \omega_m)] \right] = \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{\dot{a}a^2} \Omega_r(\omega_r - \omega_m) - \frac{C_d D_{d,\Delta}}{a^{d-\Delta}} (\dot{a})^{d-\Delta+1} \quad (\text{C.17})$$

Por ultimo multiplicamos ambos miembros por $\dot{a}a^2$:

$$(\dot{a}a)^2 \left[1 + \frac{1}{2} [2C_d - 3(1 + \omega_m)] \right] = \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_r(\omega_r - \omega_m) - C_d D_{d,\Delta} \dot{a}^{d-\Delta+2} \left(\frac{1}{a}\right)^{d-\Delta-2} \quad (\text{C.18})$$

C.1.4. Ecuación diferencial de $H(z)$

Conociendo la ecuación que relaciona el RS z con el factor de escala a , podemos derivar la ecuación diferencial de $H(z)$, de la siguiente forma:

$$a = \frac{1}{1+z} \quad (\text{C.19})$$

Por regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dH}{dz} = \frac{dH}{da} \frac{da}{dz} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dH}{da} \quad (\text{C.20})$$

Entonces remplazando en la ecuación (C.13), obtenemos:

$$-(1+z)^2 \frac{dH}{dz} = C_d D_{d,\Delta} H^{d-\Delta+1} (1+z) + \frac{1+z}{2} H [2C_d - 3(1+\omega_m)] - \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{H} (1+z)^5 \Omega_r(\omega_r - \omega_m)$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{H} (1+z)^3 \Omega_r(\omega_r - \omega_m) - \frac{C_d D_{d,\Delta}}{1+z} H^{d-\Delta+1} - \frac{[2C_d - 3(1+\omega_m)]}{2} \frac{H}{1+z}$$

Bibliografía

- A.Pradhan, A. (2021). Tsallis holographic dark energy model with observational constraints in the higher derivative theory of gravity. *New Astron.* 89, 101636.
- A.Tartaglia, M. (2009). Fitting the luminosity data from type Ia supernovae in the frame of the cosmic defect theory. *IJMPD* 18, 501.
- Barbara.Ryden. (2006). *Introduction to Cosmology*. The Ohio State University.
- Bert.Janssen. (2013). *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada, España.
- C. Tsallis, L. C. (2013). Black hole thermodynamical entropy. *Eur. Phys. J. C* 73, 1.
- Carmen.A.Núñez. (2006). La paradoja de la pérdida de información de agujeros negros. *Ciencia Hoy, Volumen 16 Numero 91*.
- D.A.Easson, G., P.H.Framptone. (2011). Entropic accelerating universe. *Phys.Lett.B* 696.
- D.A.Easson, G., P.H.Framptone. (2012). Entropic inflation. *Int. J. Mod. Phys. A* 27, 1250066.
- David.Wakeham. (2015). Black hole thermodynamics. *Quantum computing educator*.
- D.J. Zamora, C. T. (2022a). Thermodynamically consistent entropic late-time cosmological acceleration. *Eur. Phys. J. C* 82:689.
- D.J. Zamora, C. T. (2022b). Thermodynamically consistent entropic-force cosmology. *Phys. Lett. B* 827, 136967.
- D.M.Scolnic. (2018). The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from PanSTARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *Astrophys. J.* 859, 101.
- E.Hubble. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15,168.

- E.L.D.Perico, J. L. (2013). Complete cosmic history with a dynamical Λ term. *Phys. Rev. D* **88**, 063531.
- G.F.R. Ellis, M. M., R. Maartens. (2012). Relativistic Cosmology.. *Cambridge University Press*, pp. 1–622.
- J.D.Bekenstein. (1973). Black holes and entropy. *Phys. Rev. D* **7**, 2333.
- J.Sola. (2013). Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas. *J. Phys. Conf. Ser.* **453**, 012015.
- Michael C. LoPresto. (2003). Some Simple Black Hole Thermodynamics. *THE PHYSICS TEACHER*.
- M.Tafalla. (2014). La expansión acelerada del universo. *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*.
- N. Komatsu, S. K. (2013a). Non-adiabatic-like accelerated expansion of the late universe in entropic cosmology. *Phys. Rev. D* **87**, 043531.
- N. Komatsu, S. K. (2013b). Non-adiabatic-like accelerated expansion of the late universe in entropic cosmology. *Phys. Rev. D* **87**, 043531.
- N. Komatsu, S. K. (2014). Evolution of the universe in entropic cosmologies via different formulations. *Phys. Rev. D* **89**, 123501.
- Planck Collaboration. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.* **641**, 1–56.
- P.Olesen. (2005). AN INTRODUCTION TO COSMOLOGY. *The Niels Bohr Institute*.
- R.A.Knop, e. (2003). New constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an independent set of 11 high-redshift supernovae observed with the Hubble space telescope. *ApJ* **598**, 102.
- S. Basilakos, J. S., D. Polarski. (2012). Generalizing the running vacuum energy model and comparing with the entropic-force models. *Phys. Rev. D* **86**, 043010.
- S.Jana. (2014). Cosmology in a reduced Born–Infeld theory of gravity. *Phys. Rev. D* **90**, 124007.
- S.M.Carroll. (2001). The Cosmological constant. *Living Rev. Relativ.* **4**, 1–56.
- Stephen.W.Hawking. (1974). Black hole explosions?. *Nature* **248**, 30.
- S.Weinberg. (1989). The Cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1.
- S.Weinberg. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.
- T.Zhang. (2018). Mach’s principle to Hubble’s law and light relativity. *J. Mod. Phys.* **9**, 433.