CURSO DE POSGRADO

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA HOMÓLOGICA

Profesor Dr. Paulo Tirao

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN
facet
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA

MONOGRAFÍA

Lic. Mamaní Pedro, Mg. Fernández Estela

Segundo cuatrimestre 2019

El siguiente trabajo fue realizado por los alumnos de doctorado Mg. Estela Fernández y Lic. Mamaní Pedro, bajo la supervisión del Dr. Paulo Tirao. Dicho trabajo esta basado principalmente en el libro "An introduction to homological álgebra " de Charles Weibel y también se usaron como libros de consulta "An introduction to homological álgebra " de Joseph Rotman y categories and functors" de Bodo Pareigis. En esta monografia se completaron demostraciones, argumentos no explicitados en el libro y se resolvieron 39 ejercicios completos.

Índice general

PRELIMINARES CAPÍTULO 1

- Sea $A \neq \varnothing$ junto con una operación binaria $+$
  $(A, +)$ es **grupo** $\Longleftrightarrow$ la $+$ es asociativa, tiene elemento neutro y todo elemento tiene opuesto.

- $(A, +)$ es **grupo abeliano** $\Longleftrightarrow$ $(A, +)$ es grupo y la $+$ es conmutativa.

- $(R, +, \cdot)$ es **anillo** $\Longleftrightarrow$ $(R, +)$ es grupo abeliano, la operación binaria $\cdot$ es asociativa y vale la propiedad distributiva del $\cdot$ respecto de la $+$.

- Dado un anillo R

  Un R**- módulo a izquierda** es un grupo abeliano A junto con una función de $R \times A \longrightarrow A$ tal que $\forall r, s \in R$ y $\forall a, b \in A$ $r(a+b) = ra+rb$,

  $(r+s)a = ra + sa$ y

  $r(sa) = (rs)a$

- Sean A y B R-módulos

  $f : A \longrightarrow B$ es un **homomorfismo de R-módulos** $\Longleftrightarrow$ $\forall r \in R$ y $\forall m, n \in A, f(rm+n) = rf(m) + f(n)$.

- Una **categoría** $\mathcal{C}$ es una clase de objetos (denotados $A, B, C, \cdots$) junto con

  i Una clase de conjuntos disjuntos denotados $Hom(A, B)$ uno por cada par de objetos en $\mathcal{C}$ (un elemento f, de $Hom(A, B)$ es llamado morfismo, o flecha, de A en B y denotamos $f : A \longrightarrow B$)

  ii Para cada terna (A, B, C) de objetos de $\mathcal{C}$ una función, que denotamos $\circ : Hom(B, C) \times Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, C)$ (esto es para morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, esta función se escribe $(g, f) \longrightarrow g \circ f$ y $g \circ f : A \longrightarrow C$ es llamada composición de f y g), sujeta a dos condiciones

  - Asociatividad: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
  - Para cada objeto B de $\mathcal{C}$, $\exists\ 1_B : B \longrightarrow B$ tal que $\forall\ f : A \longrightarrow B, \forall\ g : B \longrightarrow C$ se cumple que $1_B \circ f = f$ y $g \circ 1_B = g$

- Un **funtor entre dos categorías** $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, es una $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ que asocia:

  - todo objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $F(C) \in \mathcal{D}$ y
  - todo morfismo $f : C_1 \longrightarrow C_2$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f) : F(C_1) \longrightarrow F(C_2)$ en $\mathcal{D}$. Además
  - F preserva morfismo identidad, es decir $F(Id(C)) = Id(F(C))$
  - $F(gf) = F(g)F(f)$.

Observación: F induce mapeos de conjuntos:

$$Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(C_1), F(C_2)).$$

- Un **objeto inicial** (si existe) en una categoría $\mathcal{C}$ es un objeto I tal que por cada C en $\mathcal{C}$ existe exactamente un morfismo de I a C.
- Un **un objeto terminal** (si existe) en una categoría $\mathcal{C}$ es un objeto T tal que por cada C en $\mathcal{C}$ existe exactamente un morfismo de C a T.

  Todos los objetos iniciales deben ser isomorfos y todos los objetos terminales deben ser isomorfos. Por ejemplo, en conjuntos, el conjunto $\varnothing$ es el objeto inicial y cualquier conjunto con solo un elemento es un objeto terminal.

  Un objeto que es inicial y terminal se llama un **objeto cero**. No hay ningún objeto cero en conjuntos, pero 0 es un objeto cero en *Ab* y en R-mod. Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene un objeto cero, 0, entonces existe un elemento distinguido en cada conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, a saber, la composición $B \longrightarrow 0 \longrightarrow C$; que por abuso denotaremos, a este mapeo, con 0.

Capítulo 1

Complejos de cadena

1.1. Complejos de R-módulos

Dados dos homomorfismo de R-módulos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ podemos formar la sucesión

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Diremos que esta **sucesión es exacta** (en B) si y solo si $ker(g) = img(f)$. Esto implica en particular que $gf : A \longrightarrow C$ es cero.

Definición 1.1.1. Un complejo de cadenas $C.$ *de* $R-mod$ *es una familia* $\{C_n\}_{n\in Z}$ *de R-módulos, junto con mapeos R-módulos* $d = d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ *tal que cada composición* $d \circ d : C_n \longrightarrow C_{n-2}$ *es cero.*
Los mapeos d_n *se llaman los* **diferenciales** *de* $C.$.
El kernel de d_n *es el módulo de* **n-ciclos** *de* $C.$, *denotado* $Z_n = Z_n(C.)$.
La imagen de $d_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow C_n$ *es el módulo de* **n-bordes** *de* $C.$, *denotado* $B_n = B_n(C.)$.
Como $d \circ d = 0$, *tenemos para todo* n

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$$

El n^{th} **módulo homológico de** $C.$ *es el conjunto cociente* $H_n(C.) = Z_n/B_n$ *de* $C.$, *como el punto en* $C.$ *es molesto, a menudo escribiremos* C *por* $C.$.

Ejercicio 1 (Ejercicio 1.1.1). *Sea* $C_n = \mathbb{Z}/8$ *para* $n \geq 0$ *y* $C_n=0$ *para* $n < 0$; *para* $n>0$ d_n *manda* $x(mod\ 8)$ *a* $4x(mod\ 8)$.

i) Demostrar que $C.$ *es un complejo de* $\mathbb{Z}/8$*-módulos.*

ii) Calcular sus módulos homológicos.

Demostración. i) Por hipótesis

$$\begin{array}{lll} C_n = & \mathbb{Z}/8 & = \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \quad para \quad n \geq 0 \\ C_n = & 0 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad para \quad n < 0 \end{array}$$

Sabemos que $\mathbb{Z}/8$ es un $\mathbb{Z}$-módulo

Luego tenemos la siguiente cadena de $\mathbb{Z}$-módulo

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}/8 \longrightarrow \dots \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{d_0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

veamos que cumple la condición deseada

Para todo n>0
$d_n \circ d_{n+1}(x) = d_n(4x) = 4(4x) = 16x = 8(2x) = 0$
Para todo n≥0
$d_n \circ d_{n+1}(x) = 0$ pues $d_n = 0$
Luego

$C.$ es un complejo de cadena de $\mathbb{Z}$-módulo.

ii) Como $C.$ es un complejo de cadena de $\mathbb{Z}$-módulo podemos calcular sus módulos homológicos.

$$\begin{aligned} H_0(C) &= Z_0/B_0 \\ &= \{0,1,2,3,4,5,6,7\}/\{0,4\} \\ &= \{\{0,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,0\},\{5,1\},\{6,2\},\{7,3\}\} \\ &= \{\{0,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\} = \{0,1,2,3,4\} = \mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

en el nuevo cociente.

para $n < 0$, $H_n(C) = Z_n/B_n = 0/0 = 0$
para $n > 0$, $H_n(C) = Z_n/B_n = \{0,2,4,6\}/\{0,4\}$
$= \{\{0,4\},\{2,6\},\{4,0\},\{6,2\},\} = \{0,2\} \simeq \mathbb{Z}_2$ en el nuevo cociente.

□

Existe una categoría $\mathbf{CH}(\mathbf{modR})$ de complejos de cadena R-módulos (a derecha). Los objetos son, por supuesto, complejos de cadenas y las flechas son lo que se define a continuación:

Definición 1.1.2. *Un morfismo $\mu : C \longrightarrow D$ es un mapeo de complejos de cadena si y solo si es una familia de homomorfismo de R- módulos $\mu_n : C_n \longrightarrow D_n$ que conmuta con d en el sentido que $\mu_{n-1}d_n = d'_n\mu_n$.Es decir tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\mu"] & \cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "\mu_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\mu_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, "\mu_{n-1}"] & \cdots \\ D & \cdots \arrow[r, "\delta'_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta'_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta'_{n-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ejercicio 2 (Ejercicio 1.1.2)**.** *Mostrar que un morfismo $U : C \longrightarrow D$ de complejos de cadena R-módulos* *i) envía bordes a bordes y ciclos a ciclos, por lo tanto* $H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$.

ii) Probar que H_n *es un funtor de* $Ch(mod - R)$ *a* $mod - R$.

Demostración.

i) Dado $u : C \longrightarrow D$ morfismo de complejos de cadena, para cada n tenemos $u_n : C_n \longrightarrow D_n$ con $u_{n-1}d_n = d_n u_n$.

Veamos que lleva bordes en bordes

Sea $y \in B_n(C)$, queremos probar que $u_n(y) \in B_n(D)$

Como $y \in B_n(C)$, entonces existe $x \in C_{n+1}$ tal que $d_n(x) = y$

$$u_n(y) = u_n(d_n(x)) = d_{n+1}(u_n(x))$$

por lo tanto, existe $u_n(x) \in D_{n+1}$ tal que $u_n(y) = d_{n+1}(u_n(x))$

luego $u_n(y) \in B_n(D)$.

Del mismo modo sea $x \in Z_n(C)$ entonces $d_n(x) = 0_C$, tenemos

$$d_n(u_n(x)) = u_{n-1}(d_n(x)) = u_{n-1}(0) = 0_D$$

luego $u_n(x) \in Z_n(D)$.

Además, esto nos permite definir $H_n(u) : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$, como

$$H_n(u)(\overline{x}) = \overline{u_n(x)}$$

ii) Por último veamos que H_n es un funtor entre las categorías $Ch(mod - R)$ y $mod - R$.

-Por lo visto anteriormente, sabemos que: a cada complejo de cadenas C le corresponde $H_n(C)$, el cual es un $R - mod$, y que dado un morfismo, de complejos de cadenas de $R - mod$, $u : C \longrightarrow D$ le corresponde $H_n(u) : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$ morfismo de $R - mod$.

- El morfismo $id : C \longrightarrow C$ de complejos de cadenas, por apartado anteriormente, induce $H_n(id) : H_n(C) \longrightarrow H_n(C)$ con $H_n(id)(\overline{x}) = \overline{id(x)}$, el cual es el mapa identidad en $H(C)$.

-Finalmente veamos que $H_n(\mu_2 \circ \mu_1) = H_n(\mu_2)H_n(\mu_1)$

Sean $\mu_1 : C \longrightarrow D$ y $\mu_2 : D \longrightarrow E$ morfismos de complejos de cadena considero $x \in C_n$

$$\begin{aligned} H_n(\mu_2 \circ \mu_1)(\overline{x}) &= \overline{(\mu_2 \circ \mu_1)(x)} \\ &= \overline{\mu_2}(\overline{\mu_1(x)}) \\ &= \overline{\mu_2}(\overline{\mu_1}\overline{(x)}) \\ &= \overline{\mu_2} \circ \overline{\mu_1}(\overline{x}) \\ &= H_n(\mu_2)H_n(\mu_1)(\overline{x}) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 3 (Ejercicio 1.1.3)**. Sucesión de espacios vectoriales que se parte** *Eligiendo espacios vectoriales* $\{B_n, H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *sobre un cuerpo, y conjuntos* $C_n = B_n \oplus H_n \oplus B_{n-1}$*. Demostrar que la proyección-inclusión* $i_n : C_n \longrightarrow B_{n-1} \subset C_{n-1}$ *hace a* $\{C_n\}$ *un complejo de cadena. Y que todo complejo de cadena de espacios vectoriales es isomorfo a un complejo de esta forma.*

Demostración. Sean $\{B_n, H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo, consideremos los conjuntos $C_n = B_n \oplus H_n \oplus B_{n-1}$ e $i_n : B_n \oplus H_n \oplus B_{n-1} \longrightarrow B_{n-1}$ con $i_n(b_n, h_n, b_{n-1}) = (b_{n-1}, 0, 0)$. Veamos que $i \circ i = 0$

$$i_{n-1} \circ i_n(b_n, h_n, b_{n-1}) = i_{n-1}(i_n(b_n, h_n, b_{n-1})) = i_{n+1}(b_{n-1}, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Luego $\{C_n\}$ es un complejo de cadena.
Sea $\{V_n\}$ un complejo de cadena de espacios vectoriales, así cada $d_n : V_n \longrightarrow V_{n-1}$ es una transformación lineal, sabemos que $Z_n \subset V_n$ y $B_{n-1} \subset V_{n-1}$ son subespacios vectoriales. Por primer teorema de isomorfismo tenemos:

$$V_n \simeq Z_n \oplus V_n/Z_n$$

y $Imd_n = B_{n-1} \simeq V_n/Z_n$, para todo n. Además y por ser $\{V_n\}$ un complejo de cadenas tenemos que $B_n \subset Z_n$ luego:

$$Z_n \simeq B_n \oplus Z_n/B_n$$

Finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} V_n &\simeq Z_n \oplus B_{n-1} \\ V_n &\simeq B_n \oplus Z_n/B_n \oplus B_{n-1} \\ V_n &\simeq B_n \oplus H_n \oplus B_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 4 (Ejercicio 1.1.4)**.** *Sean A un $R-$ módulo y C un complejo de cadena de $R-$módulos*

i) Mostrar que $\{Hom_R(A, C_n)\}$ *forma un complejo de cadena de grupos abelianos.*

ii) Tomar $A = Z_n$*, mostrar que si* $H_n(Hom_R(Z_n, C)) = 0$*, entonces* $H_n(C) = 0$*. ¿es cierta la vuelta?*

Demostración. .

i) - $Hom_R(A, C_n)$ es grupo abeliano ya que:
Dadas $f, g, \in Hom_R(A, C_n)$ como C_n es grupo abeliano tenemos:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = g(a) + f(a) = (g+f)(a)$$

- $\{\{Hom_R(A, C_n)\}, \overline{d}\}$ es un complejo de cadena con

$$\begin{aligned} \overline{d_n} : Hom_R(A, C_n) &\longrightarrow Hom_R(A, C_{n-1}) \\ f &\mapsto \overline{d_n}(f) = d_n \circ f \end{aligned}$$

Para esto debemos probar que:

$\overline{d_n}$ es homomorfismo

$$\overline{d_n}(f+g)(a) = d_n \circ (f+g)(a) = d_n(f(a)+g(a)) = d_n(f(a)) + d_n(g(a))$$

$$= (\overline{d_n}(f) + \overline{d_n}(g))(a).$$

$\overline{d_{n-1}} \circ \overline{d_n} = 0$

$$(\overline{d_{n-1}} \circ \overline{d_n})(f) = \overline{d_{n-1}}(\overline{d_n}(f)) = \overline{d_{n-1}}(d_n(f))$$

$$= d_{n-1} \circ (d_n(f)) = (d_{n-1} \circ d_n)(f) = 0.$$

Luego $\{\{Hom_R(A, C_n)\}, \overline{d}\}$ es un complejo de cadena, de grupos abelianos, con

$$\begin{aligned} \overline{d_n} : Hom_R(A, C_n) &\longrightarrow Hom_R(A, C_{n-1}) \\ f &\mapsto \overline{d_n}(f) = d_n \circ f \end{aligned}$$

ii) Debemos probar que reemplazando $A = Z_n$, en el apartado anterior, $H_n(Hom_R(Z_n, C)) = 0$, implica $H_n(C) = 0$, esto es lo mismo que probar que $\ker(\delta_n) = Img(\delta_{n+1})$

-Sabemos que $Img(\delta_{n+1}) \subset \ker(\delta_n)$

-Veamos que $\ker(\delta_n) \subset Img(\delta_{n+1})$

La función $id_{Z_n} : Z_n \longrightarrow C_n$ es tal que $\overline{\delta_n}(id_{Z_n}) = \delta_n \circ id_{Z_n} = 0$ pues Z_n es el kernel de δ_n

luego $id_{Z_n} \in \ker(\overline{\delta_n}) = Img(\overline{\delta_{n+1}})$

por lo tanto $\exists g \in Hom(Z_n, C_{n+1})$ tal que $\overline{\delta_{n+1}}(g) = id_{Z_n}$

entonces $\forall \times \in Z_n = \ker(\delta_n)$ sucede que $\overline{\delta_{n+1}}(g(x)) = id_{Z_n}(x)$

luego $\delta_{n+1}(g(x)) = x \therefore \exists y = g(x) \in C_{n+1} : \delta_{n+1}(y) = x$ es decir que $x \in Img(\delta_{n+1})$ por lo tanto

$\ker(\delta_n) \subset Img(\delta_{n+1})$

$\square$

Definición 1.1.3. *Un morfismo $C. \longrightarrow D.$ de complejos de cadenas se llama* **quasi-isomorfismo** *si los mapas $H_n(C.) \longrightarrow H_n(D.)$ son todos isomorfismos.*

Ejercicio 5 (Ejercicio 1.1.5)**.** *Probar las siguientes equivalencias para todo $C.$*

i) $C.$ es exacta, esto es, exacta para todo C_n.

ii) $C.$ es acíclica, esto es $H_n(C.) = 0$ para todo n.

iii) El mapa $0 \longrightarrow C.$ es un quasi-isomorfismo, donde 0 es el complejo de cero módulos y cero mapas.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$
Como $C.$ es exacta tenemos $Im(d_{n+1}) = \ker(d_n)$ para todo n, esto es $B_n = Z_n$, luego

$$H_n(C.) = Z_n/B_n = Z_n/Z_n = 0, \forall n.$$

Así $C.$ es acíclica.
$ii) \Rightarrow iii)$
El mapa $u : 0 \longrightarrow C.$ induce el mapa $\overline{u} : 0 \longrightarrow H_n(C.)$, como por hipótesis $C.$ es acíclico, se sigue que $\overline{u}$ es isomorfismo.
$iii) \Rightarrow i)$
Por hipótesis tenemos que $0 \longrightarrow C.$ es un quasi-isomorfismo, entonces por definición para cada n tenemos que $H_n(C) \simeq 0$, así $H_n(C) = Z_n/B_n = 0$, luego $Z_n = B_n$ concluyendo que $\{C\}$ es acíclico. □

Ejercicio 6 (1.1.6)**. Homología de un grafo** *Sea Γ un grafo finito con vértices V, $(v_1, \dots, v_V)$, y flechas E, $(e_1, \dots, e_E)$. Si orientamos las flechas, podemos formar la matriz de incidencia del grafo. Esta es una matriz, $V \times E$, cuya entrada (ij) es $+1$ si la flecha e_j comienza en v_i, -1 si e_j finaliza en v_i, y cero en otro caso. Sea C_0 el R-módulo libre de los vértices, C_1 el R-modulo libre de las flechas, $C_n = 0$ si $n \neq 0, 1$ y $d : C_1 \longrightarrow C_0$ la matriz de incidencia. Si Γ está conectada (es decir podemos llegar desde v_0 a cualquier otro vértice al trazar un camino con flechas), mostrar que $H_0(C)$ y $H_1(C)$ son R-módulos libres de dimensiones 1 y $V - E - 1$ respectivamente. (El número $V - E - 1$ es el número de circuitos del gráfico). Sugerencia: Elija la base $\{v_0, v_1 - v_0, \dots, v_V - v_0\}$ para Co, y use una ruta desde v_0 a v_i para encontrar un elemento de C_1 mapeando a $v_i - v_0$*

Demostración. Sea M la matriz de incidencia del grafo, $t : E \longrightarrow V$ el mapeo de llegada y $s : E \longrightarrow V$ el mapeo de partida tal que si e es una flecha que une v_i con v_j, entonces $t(e) = v_j$, $s(e) = v_i$ y $Me = t(e) - s(e)$.

Si e es una flecha que une v_i con v_j, entenderemos $-e$ como la orientación inversa, es decir es la misma flecha que une v_j con v_i, por lo tanto $t(-e) = s(e)$, $s(-e) = t(e)$ y $M(-e) = -Me$. Sea $e_1, \dots e_r$ un camino entre los vértices v_i y v_j.Esto quiere decir que: e_k es una flecha, $e \in E$ o $-e \in E$ y que:

- $s(e_1) = v_i$, pues el camino comienza en v_i.
- $t(e_k) = s(e_{k+1})$, el e_k y el e_{k+1} son consecutivos.
- $t(e_r) = v_j$, pues el camino termina en v_j

Si calculamos $M(\sum_{k=1}^{r} e_k) = \sum_{k=1}^{r} M(e_k) = \sum_{k=1}^{r}(t(e_k) - s(e_k)) = t(e_r) - s(e_1) = v_j - v_i$.

Por lo tanto, si existe un camino de v_i a v_j el elemento $v_j - v_i$ pertenece a la imagen de M, como Γ es un grafo conectado existe un $v_0 \in \{v_1, \dots, v_V\}$ tal que existe un camino de v_0 a v_i, luego todo elemento de la forma $v_i - v_0$ pertenecen a la imagen. Considero $\{v_0, v_1 - v_0, \dots, v_V - v_0\}$ base de $C_0 = V$

Supongamos que v_0 pertenece a la imagen de M, es decir que existe un camino e de v_i a v_j tal $Me = v_0$ entonces $v_j - v_i = v_0$ luego $\{v_1, \dots, v_V\}$ no es base de $C_0 = V$.

Como $H_0(C) = C_0/ImgM$ aplicando estas dos últimas observaciones

$$H_0(C) = \{v_0\}.$$

Luego es libre y

$$Dim(H_0(C)) = 1$$

Como $H_1(C) = KerM/\{0\} = KerM$ que como es libre, por ser subgrupo de un grupo abeliano libre, para su dimensión utilizamos el teorema de dimensión

$$Dim(E) = Dim(KerM) + Dim(ImgM)$$

luego

$$\begin{aligned} Dim(KerM) =& Dim(E) - Dim(ImgM) \\ =& Dim(E) - (Dim(V) - 1) \\ =& Dim(E) - Dim(V) + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Dim(H_1(C)) = Dim(E) - Dim(V) + 1$$

□

1.2. Operaciones sobre complejos de cadenas

El punto principal de esta sección es que los complejos de cadenas forman una categoría abeliana.

Una categoría $\mathcal{A}$ se llama **Ab**-categoría si cada $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ en $\mathcal{A}$ tiene estructura de grupo abeliano de tal manera que la composición se distribuye sobre la suma. En particular, dado un diagrama en $\mathcal{A}$ de la forma

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{h} D$$

tenemos $h(g+g')f = hgf + hg'f$ en $Hom_{\mathcal{A}}(A, D)$.

Observacíón 1. *Para todo de par de objetos (A, B) en $\mathcal{A}$ tenemos que $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano con alguna operación que llamaremos suma de morfismos, por esta razón existe un morfismo $e \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ tal que para toda $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$*

$$f + e = f = e + f$$

ahora veamos que pasa con respecto a la composición , supongamos que $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, C)$ se cumple:

$$g(f) = g(f + e) = g(f) + g(e)$$

Concluimos que existe un morfismo que se comporta como el morfismo nulo a pesar de que la definición de **Ab-***categoría no habla de la existencia de un objeto cero.*

La categoría Ch es una **Ab***-categoría porque podemos agregar mapas de cadenas en grado; si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son mapas de cadenas de $C.$ a $D.$, su suma es la familia de mapas $\{f_n + g_n\}$.*

Un **funtor aditivo** *$F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ entre Ab-categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ es un funtor tal que cada $Hom_{\mathcal{B}}(B', B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(FB', FB)$ es un homomorfismo de grupos.*

Una **categoría aditiva** *es una Ab-categoría $\mathcal{A}$ con objeto cero (esto es un objeto que es inicial y terminal) y un producto $A \times B$ para todo par A, B de objetos en $\mathcal{A}$, esta estructura es suficiente para hacer que los productos finitos como coproductos finitos sean iguales.*

El objeto cero en Ch es el complejo "0" de módulos y mapas cero. Dada una familia $\{A_\alpha\}$ de complejos de R-módulos, el producto $\prod A_\alpha$ y coproducto (suma directa) $\oplus A_\alpha$ existen en Ch y son definidos gradualmente: los diferenciales son los mapas

$$\prod d_\alpha : \prod_\alpha A_{\alpha,n} \longrightarrow \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \quad y \quad \oplus\, d_\alpha : \oplus_\alpha A_{\alpha,n} \longrightarrow \oplus_\alpha A_{\alpha,n-1}$$

respectivamente. Esto es suficiente para convertir a Ch en una categoría aditiva.

Ejercicio 7 (Ejercicio 1.2.1)**.** *Demostrar que la suma directa y el producto directo conmuta con la homología, es decir:*

$\oplus H_n(A_\alpha) \equiv H_n(\oplus A_\alpha)$ *y* $\prod H_n(A_\alpha) \equiv H_n(\prod A_\alpha)$ *para todo n.*

Demostración. Sea $\{((A_\alpha).,d_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de complejos de cadenas de $R-$ módulo. Por lo anterior sabemos que Ch es una categoría aditiva, donde $\oplus A_\alpha$ es un objeto de Ch con diferencial $d = \oplus d_\alpha : \oplus_\alpha A_{\alpha,n} \longrightarrow \oplus_\alpha A_{\alpha,n-1}$. Es decir que todo elemento de $a \in \oplus_\alpha A_\alpha$ se puede escribir como $a = (a_\alpha)_{\alpha\in I}$ con $a_\alpha \in A_\alpha$ y todas salvo una cantidad finita de a_α es cero, denotamos a estas con $(a_\alpha).$. Luego tenemos $da = (d_\alpha a_\alpha).$. Así $da = 0$ si y solo si $d_\alpha a_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in I$. Sea el siguiente mapa

$$\phi : H_n(\oplus A_\alpha) \longrightarrow \oplus H_n(A_\alpha)$$

$$[(a_\alpha)] \longmapsto ([a_\alpha])$$

Para ver que está bien definida observemos que $[(a_\alpha)] = [(a'_\alpha)]$ si y solo si $[(a_\alpha - a'_\alpha)] = [0]$ Esto es cierto si y solo si existe $(b_\alpha) \in \oplus A_\alpha$ tal que $d(b_\alpha) = (d_\alpha b_\alpha) = (a_\alpha - a'_\alpha)$ lo cual es verdad si y solo si $a'_\alpha + d_\alpha b_\alpha = a_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.Es decir que si $[(a_\alpha)] = [(a'_\alpha)]$

$$\phi([(a_\alpha)]) = ([a_\alpha]) = ([a'_\alpha + d_\alpha b_\alpha]) = ([a'_\alpha]) = \phi([(a'_\alpha)])$$

Luego

$$[(a_\alpha)] = [(a'_\alpha)] \text{ si y solo si } \phi([(a_\alpha)]) = \phi([(a'_\alpha)])$$

De la misma manera se puede probar que el mapa

$$\psi : \oplus H_n(A_\alpha) \longrightarrow H_n(\oplus A_\alpha)$$

$$([a_\alpha]) \longmapsto [(a_\alpha)]$$

está bien definida.

Claramente las dos son homomorfismos de grupos abelianos.

Veamos a que es igual $\phi\psi$:

$$\phi\psi([a_\alpha]) = \phi[(a_\alpha)] = ([a_\alpha])$$

De la misma manera $\quad \psi\phi[(a_\alpha)] = [(a_\alpha)]$

Asi ϕ es un isomorfismo con inversa ψ, luego

$$\oplus H_n(A_\alpha) \equiv H_n(\oplus A_\alpha)$$

Para demostrar que la homología conmuta con el producto directo, sea $\{((A_\alpha).,d_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de complejos de cadenas de $R-$ módulo y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Ker(d_\alpha) \arrow[r, "k_\alpha"] & A_{\alpha,n} \arrow[r, "\delta_\alpha"] & A_{\alpha,n-1} \\
Ker(\delta) \arrow[u, dashed] \arrow[r, "k"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n} \arrow[u] \arrow[r, "\delta"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Como primer paso queremos probar que $\prod_\alpha k_\alpha$ es un kernel de δ. Del diagrama anterior tenemos

$$\begin{tikzcd}
\prod_\alpha Ker(d_\alpha) \arrow[r, "\prod_\alpha k_\alpha"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n} \arrow[r, "\prod_\alpha \delta_\alpha"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \\
Ker(\delta) \arrow[u, dashed] \arrow[r, "k"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n} \arrow[u] \arrow[r, "\delta"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

como $\delta = \prod_\alpha \delta_\alpha$ entonces $\delta \prod_\alpha k_\alpha = 0$ Veamos que $\prod_\alpha k_\alpha$ es universal con respecto de esta propiedad. Sea $g : B \longrightarrow \prod_\alpha A_{\alpha,n}$ tal que $\delta g = 0$, como k es un kernel de δ, existe un único $h : B \longrightarrow ker(\delta)$ tal que $g = hk$, luego tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Ker(d_\alpha) \arrow[r, "k_\alpha"] & A_{\alpha,n} \arrow[r, "\delta_\alpha"] & A_{\alpha,n-1} \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Ker(\delta) \arrow[r, "k"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n} \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[r, "\delta"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Luego como $\pi_\alpha g : B \longrightarrow A_{\alpha,n}$ es tal que $\delta_\alpha \pi_\alpha g = 0$ y k_α es un kernel entonces existe $f_\alpha : B \longrightarrow ker(\delta_\alpha)$ tal que $\pi_\alpha g = k_\alpha f_\alpha$, por lo tanto el diagrama anterior resulta

$$\begin{tikzcd}
& Ker(d_\alpha) \arrow[r, "k_\alpha"] & A_{\alpha,n} \arrow[r, "\delta_\alpha"] & A_{\alpha,n-1} \\
B \arrow[ur, "f_\alpha"] \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Ker(\delta) \arrow[r, "k"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n} \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[r, "\delta"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

que lo podemos escribir como

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f_\alpha"] & Ker(d_\alpha) \arrow[r, "k_\alpha"] & A_{\alpha,n} \arrow[r, "\delta_\alpha"] & A_{\alpha,n-1} \\
B \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Ker(\delta) \arrow[u] \arrow[r, "k"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n} \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[r, "\delta"] & \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

luego existe, un único, $f : B \longrightarrow Ker(\delta)$ tal que $g = \prod_\alpha k_\alpha f$.

Por lo tanto $\prod_\alpha k_\alpha$ es un kernel de δ.

Luego tenemos la siguiente sucesión exacta diagrama

$$0 \longrightarrow \prod_\alpha ker(\delta_\alpha) \longrightarrow \prod_\alpha A_{\alpha,n} \longrightarrow Img(\delta) \longrightarrow 0$$

es decir que

$$Img(\delta) \cong \prod_\alpha A_{\alpha,n}/Ker(\delta) \cong \prod_\alpha A_{\alpha,n}/\prod_\alpha ker(\delta_\alpha) \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow ker(\delta_\alpha) \longrightarrow A_{\alpha,n} \longrightarrow Img(\delta_\alpha) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \prod_\alpha ker(\delta_\alpha) \longrightarrow \prod_\alpha A_{\alpha,n} \longrightarrow \prod_\alpha Img(\delta_\alpha) \longrightarrow 0$$

Por lo tanto

$$\prod_\alpha Img(\delta_\alpha) \cong \prod_\alpha A_{\alpha,n} / \prod_\alpha ker(\delta_\alpha)$$

que por (1)

$$Img(\delta) \cong \prod_\alpha Img(\delta_\alpha)$$

Luego

$$H_n(\prod_\alpha A_{\alpha,n}) = Ker(\delta)/Img(\delta) \cong \prod_\alpha ker(\delta_\alpha) / \prod_\alpha Img(\delta_\alpha)$$

es decir

$$H_n(\prod_\alpha A_{\alpha,n}) \cong \prod_\alpha ker(\delta_\alpha) / \prod_\alpha Img(\delta_\alpha) \qquad (2)$$

Considero la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Img(\delta_\alpha) \longrightarrow Ker(\delta_\alpha) \longrightarrow H_n(A_{\alpha,n}) \longrightarrow 0$$

luego como $\prod$ es epi

$$0 \longrightarrow \prod_\alpha Img(\delta_\alpha) \longrightarrow \prod_\alpha Ker_(\delta_\alpha) \longrightarrow \prod_\alpha H_n(A_{\alpha,n}) \longrightarrow 0$$

es exacta por lo tanto

$$\prod_\alpha H_n(A_{\alpha,n}) \cong \prod_\alpha Ker_(\delta_\alpha) / \prod_\alpha Img(\delta_\alpha)$$

por (2)

$$\prod_\alpha H_n(A_{\alpha,n}) \cong H_n(\prod_\alpha A_{\alpha,n})$$

□

Aquí hay algunas construcciones importantes en complejos de cadenas. Un complejo de cadenas B se llama un **subcomplejo** *de C si cada B_n es un submódulo de C_n y el diferencial en B es la restricción del diferencial en C, es decir, cuando las inclusiones en $i_n : B_n \subseteq C_n$ constituyen un mapa de cadena $B \longrightarrow C$. En este caso podemos ensamblar los módulos cociente C_n/B_n en un complejo de cadenas*

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1}/B_{n+1} \xrightarrow{\delta} C_n/B_n \xrightarrow{\delta} C_{n-1}/B_{n-1} \xrightarrow{\delta} \ldots$$

que denotamos C/B y llamamos complejo cociente. Si $f : B \longrightarrow C$ es un mapa de cadenas, los kernels $\{\ker(f_n)\}$ se ensamblan para formar un subcomplejo de B denotado $\ker(f)$, y los cokernels $\{coker(f_n)\}$ se ensamblan para formar un complejo cociente de C denotado $coker(f)$.

Definición 1.2.1. *En una categoría $\mathcal{A}$, un mapa $f : B \longrightarrow C$*

f es **mónico** *si $fg_1 = fg_2$ implica $g_1 = g_2$ para todo par de mapas $g_1, g_2 : A \longrightarrow B$,*

f es **epi** *si $h_1 f = h_2 f$ implica $h_1 = h_2$ para todo par de mapas $h_1, h_2 : C \longrightarrow D$.*

Ejercicio 8 (Ejercicio A.4.1)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una* **Ab-***categoría y $f : B \longrightarrow C$ un morfismo. Mostrar que:*

i) f es mónico $\Longleftrightarrow$ para todo mapa no nulo $g : A \longrightarrow B$, $fg \neq 0$

ii) f es epi $\Longleftrightarrow$ para todo mapa distinto del cero $h : C \longrightarrow D$, $hf \neq 0$

Demostración. i) Sea $f : B \longrightarrow C$ mónico en $\mathcal{A}$, supongamos que existe mapa no nulo $g : A \longrightarrow B$ tal que $fg = 0$, en $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ existe el mapa nulo, así $fg = f0$ como por hipótesis f es mónico $g = 0$, absurdo. Sean los mapas $g_1, g_2 : A \longrightarrow B$ tales que $fg_1 = fg_2$, como $\mathcal{A}$ es una **Ab**-categoría, para todo par de objetos $Hom_{\mathcal{A}}(A, C)$ grupo abeliano tenemos

$$\begin{aligned} fg_1 &= fg_2 \\ fg_1 - fg_2 &= 0_{Hom_{\mathcal{A}}(A,C)} \\ f(g_1 - g_2) &= 0_{Hom_{\mathcal{A}}(A,C)} \end{aligned}$$

Usando la hipótesis tenemos que $g_1 - g_2 = 0_{Hom_{\mathcal{A}}(A,C)}$, luego $g_1 = g_2$ así f es mónico. De forma análoga.

ii) Sea $f : B \longrightarrow C$ un epi en $\mathcal{A}$, supongamos que existe un mapa no nulo $h : C \longrightarrow D$ tal que $hf = 0$, como $\mathcal{A}$ es una **Ab-** categoría, en todo grupo abeliano $Hom_{\mathcal{A}}(\_, \_)$ existe el mapa nulo así tenemos que $0f = 0$, luego $hf = 0f$ como por hipótesis f es epi, $h = 0$ absurdo. Sean los mapa $h_1, h_2 : C \longrightarrow D$ tales que $h_1 f =_2 f$ luego:

$$\begin{aligned} h_1 f =& h_2 f \\ h_1 f - h_2 f =& 0_{Hom_{\mathcal{A}}(B,D)} \\ (h_1 - h_2) f =& 0_{Hom_{\mathcal{A}}(B,D)} \end{aligned}$$

Se sigue usando la hipótesis que $h_1 - h_2 = 0_{Hom_{\mathcal{A}}(B,D)}$ luego $h_1 = h_2$, así f es epi.

□

Observacíón 2. *En una categoría aditiva, denotaremos al coproducto como $C_1 \oplus C_2$, como existe por definición existen $\imath_1 : C_1 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ y $\imath_2 : C_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$, además por ser $C_1 \oplus C_2$ también un producto existen $\pi_1 : C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_1$ y $\pi_2 : C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_2$, notemos lo siguiente*

$$\pi_1 \imath_1 : C_1 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_1$$

$$\imath_1 \pi_1 : C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$$

Notemos que $\pi_1 \imath_1 = id_{C_1}$, esto es tiene inversa a izquierda luego $\imath_1$ es mónico. Veamos que π_1 es epi, sean $g_1, g_2 : C_1 \longrightarrow C$, para algún objeto C en $\mathcal{A}$; supongamos $g_1 \pi_1 = g_2 \pi_1$ componiendo con $\imath_1$ tenemos:

$$g_1 \pi_1 \imath_1 = g_2 \pi_2 \imath_1 \Longrightarrow g_1(\pi_1 \imath_1) = g_2(\pi_2 \imath_1) \Longrightarrow g_1 = g_2$$

Definición 1.2.2. *En cualquier categoría aditiva $\mathcal{A}$, un* **kernel** *de un morfismo $f : B \longrightarrow C$ se define como un mapa $i : A \longrightarrow B$ tal que $fi = 0$ y eso es universal con respeto a esta propiedad (es decir para cada morfismo $e : A' \longrightarrow B$ en $\mathcal{A}$ tal que $fe = 0$ se factoriza a través de A como $e = ie'$ para un único $e' : A' \longrightarrow A$). Dualmente, un* **cokernel** *de f es un mapa $e : C \longrightarrow D$, que es universal con respecto a la propiedad $ef = 0$ (es decir para cada morfismo $g : C' \longrightarrow D'$ en $\mathcal{A}$ tal que $gf = 0$ se factoriza a través de D como $g = g'e$ para un único $g' : D \longrightarrow D'$). (La definición de mónico y epi en una categoría no abeliana es ligeramente diferente). Es fácil ver que cada kernel es mónico y que cada cokernel es un epi.*

Ejercicio 9 (Ejercicio 1.2.2)**.** *En la categoría aditiva $\mathcal{A}$ de $R-$-módulo mostrar que:*

i) La noción de kernel, mónico, y monomorfismo es la misma.

ii) La noción de cokernel, epi y epimorfismo son lo mismo.

Demostración.

i) Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$, $f : B \longrightarrow C$ morfismo de R-mod.

a) Si i es kernel entonces es mónico
Como por hipótesis i es un kernel de f tenemos $i : A \longrightarrow B$ y $fi = 0$. Sean $h, g : D \longrightarrow A$ tal que $ig = ih$, es decir tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dr, "ih=ig"] & & \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

debemos probar que $g = h$
$f(ih) = (fi)h = 0h = 0$ por lo tanto $f(ih) = 0$ y como i es universal con esta propiedad entonces $ih = ie$ para una única e pero $ih = ih$ y $ih = ig$ luego $h = g$

b) Si f es mónico entonces es monomorfismo.
Como f es mónico si $fg = fh$ entonces $g = h$, gráficamente esto es,

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dr, "fh=fg"] & & \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Consideremos

$$\begin{tikzcd} kerf \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "\theta"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

con i,la función inclusión, es claro que $fi = f\theta$ entonces $i = \theta$ y como i es inyectiva entonces $kerf = 0$

c) f es monomorfismo entonces kernel
Como f es monomorfismo, entonces $Kerf = \{0\}$ considero la función inclusión $i : Kerf \longrightarrow B$, claramente $fi = 0$, veamos que vale la propiedad universal, sea $g : X \longrightarrow A$ tal que $fg = 0$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "\theta"] & & \\ kerf \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

luego $g(X) \subseteq Kerf = 0$ entonces $g(X) = 0$ por lo que $g = 0$, luego $g = i0$ supongamos que existe ψ tal que $g = i\psi = 0$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "\theta"] & & \\ kerf \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

como i es inyectiva $\psi = 0$

ii) Sean $B, C, D, D' \in \mathcal{A}$, $f : B \longrightarrow C$ morfismo de $R - mod.$

a) Si e es cokernel entonces es epi
Como por hipótesis e es un cokernel de f tenemos $e : C \longrightarrow D$ y $ef = 0$. Sean $h, g : D \longrightarrow D'$ tal que $ge = he$, es decir tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "he=ge"'] & D \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] \\ & & D' \end{tikzcd}$$

debemos probar que $g = h$

$(he)f = h(ef) = h0 = 0$ por lo tanto $(he)f = 0$ y como e es universal con esta propiedad entonces $he = h'e$ para una única h' pero $he = he$ y $he = ge$ luego $h = g$

b) Si f es epi entonces es epimorfismo.
Como f es epi si $gf = hf$ entonces $g = h$, gráficamente esto es,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "hf=gf"'] & C \arrow[r, "e"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] & D \\ & C' & \end{tikzcd}$$

Consideremos

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[r, shift right, "\theta"'] & C/Img(f) \end{tikzcd}$$

$\theta f = \pi f$ entonces $\theta = \pi$ y como π es sobre entonces $Img(f) = C$ luego f es epimorfismo

c) f es epimorfismo entonces cokernel
Como f es epimorfismo, entonces $Img(f) = C$ considero la función proyección $\pi : C \longrightarrow C/Img(f)$, claramente $\pi f = 0$, veamos que vale la propiedad universal, sea $g : C \longrightarrow X$ tal que $gf = 0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "\theta"'] & C \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g"] & C/Img(f) \\ & & X \end{tikzcd}$$

Luego $f(B) \subset Ker(g)$ entonces , como f es un epimorfismo, $C \subset Ker(g)$ por lo tanto $g = 0$ luego $g = \theta\pi$ supongamos que existe ψ tal que $g = \psi\pi = \theta$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "\theta"'] & C \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g"] & C/Img(f) \arrow[d, "\psi"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

como π es sobreyectiva entonces $\psi = \theta$

$\square$

Observacíón 3. *Sean A, B y C objetos de $Ch(\mathcal{A})$ y sea $f : B \longrightarrow C$ mapa de cadenas entonces:*

i) f es mónico si y solo si $f_n : B_n \longrightarrow C_n$ es mónico para todo n

ii) f es epi si y solo si $f_n : B_n \longrightarrow C_n$ es epi para todo n

Demostración. i) f es mónico $\Longleftrightarrow$ ($fg = 0 \Longrightarrow g = 0$, con g mapa de cadenas) $\Longleftrightarrow(\forall n, f_n g_n = 0 \Longrightarrow g_n = 0) \Longleftrightarrow f_n$ es mónico.

ii) Se prueba de forma análoga a la anterior.

□

Ejercicio 10 (Ejercicio 1.2.3)**.** *Supongamos $\mathcal{A} = Ch$ y $f : B \longrightarrow C$ es mapa de complejos de cadena. Mostrar que el complejo* $\ker(f)$ *es el kernel de f y que $coker(f)$ es el cokernel de f.*

Demostración. Sea $f : B \longrightarrow C$ un mapa de complejos de cadenas, para cada f_n tenemos $ker(f_n)$ es submódulo de B_n para todo n, además si definimos el diferencial en $ker(f)$ como el nulo, coincide con el diferencial en $d\mid_{\ker(f_n)}= 0$, luego por definición subcomplejo de B por definición. Definimos $i : ker(f) \longrightarrow B$ un mapa de cadenas, claramente tenemos $fi = 0$, además para cada n, $i_n : ker(f_n) \longrightarrow B_n$ es la función inclusión la cual es monomorfismo, luego por ejercicio anterior i_n es kernel de f_n, para todo n. De forma análoga para $coker(f)$. □

Definición 1.2.3. *Una categoría abeliana es una categoría aditiva $\mathcal{A}$ tal que*

1. *cada mapa en $\mathcal{A}$ tiene un Kernel y un cokernel.*
2. *cada mónico en $\mathcal{A}$ es el kernel de su cokernel.*
3. *cada epi en $\mathcal{A}$ es el cokernel de su kernel.*

El prototipo de categoría abeliana es la categoría R-mod de R- módulos.

Definición 1.2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, un subobjeto de un objeto B es un objeto A junto con un morfismo mónico $A \longrightarrow B$*

Definición 1.2.5. *Sea $f : B \longrightarrow C$ un morfismo en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, y sea $e : C \longrightarrow D$ para algún objeto D un $coker f$, entonces*

$$Imf = ker(coker f) = ker\, e$$

En la categoría de R-módulos, $im(f) = \{f(b) : b \in B\}$, $\ker f = \{b \in B : f(b) = 0_C\}$ y $coker f = C/im f$. Cada mapa f en una categoría abeliana se factorea como:

$$B \xrightarrow{e} Im(f) \xrightarrow{m} C$$

con e un epimorfismo y m un monomorfismo. Una sucesión

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

de mapas en $\mathcal{A}$ se dice exacta (en B) si $\ker(g) = Im(f)$.
Una subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ se dice **subcategoría abeliana** *si es abeliana y toda sucesión exacta en $\mathcal{B}$ es exacta en $\mathcal{A}$.*

Ejercicio 11 (Ejercicio A.4.2)**.** *Mostrar que $\mathcal{A}^{op}$ es una categoría abeliana si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana.*

Demostración. Por definición $Obj(\mathcal{A}) = Obj(\mathcal{A}^{op})$, sea $f^{op} : C \longrightarrow B$ un mapa en $\mathcal{A}^{op}$ por definición existe, en $\mathcal{A}$, $f : B \longrightarrow C$ el cual tiene kernel $i : A \longrightarrow B$ con $fi = 0$, con una propiedad universal, se cumple que en $\mathcal{A}^{op}$ existe $i^{op} : B \longrightarrow A$

$$i^{op} f^{op} = (fi)^{op} = 0$$

luego i^{op} es el cokernel de f^{op} de forma análoga se muestra la existencia del kernel de f^{op}.
Sea $f^{op} : C \longrightarrow B$ un mónico en $\mathcal{A}^{op}$, por definición tenemos que $f : B \longrightarrow C$ es epi luego este es cokernel de su kernel $i : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{A}$, esto es:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & C \arrow[d, "h"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Por ser $f = coker(i)$ en $\mathcal{A}$ se cumple $fi = 0$, y si $gi = 0$ entonces existe una única h con $hf = g$. Dualizando el diagrama anterior tenemos en $\mathcal{A}^{op}$:

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "i^{op}"'] & C \arrow[l, "f^{op}"'] \\ & & C', \arrow[ul, "g^{op}"] \arrow[u, "h^{op}"'] \end{tikzcd}$$

así tenemos $0 = (fi)^{op} = i^{op} f^{op}$, además como $(gi)^{op} = i^{op} g^{op} = 0$ existe una única h^{op} con $(hf)^{op} = f^{op} h^{op} = g^{op}$, esto es f^{op} es el kernel de i^{op} el cual es su cokernel ya que en $\mathcal{A}$ i era kernel f.
De forma analoga se prueba la otra propiedad, luego $\mathcal{A}^{op}$ es categoría abeliana. □

Si $\mathcal{A}$ es cualquier categoría abeliana, podemos repetir la discusión de la sección 1.1.para definir complejos de cadena y mapas reemplazando $mod-R$ por $\mathcal{A}$.Estos forman una categoría aditiva $Ch(\mathcal{A})$ y la homología se convierte en un funtor de esta categoría en $\mathcal{A}$. A continuación escribiremos Ch por $Ch(\mathcal{A})$ cuando se sobreentienda $\mathcal{A}$

Teorema 1.2.6. *La categoría $Ch = Ch(\mathcal{A})$ de complejos de cadena es una categoría abeliana.*

Ejercicio 12 (Ejercicio 1.2.4)**.** *Mostrar que la sucesión $0 \longrightarrow A. \longrightarrow B. \longrightarrow C. \longrightarrow 0$ de complejos de cadena es exacta en $Ch(R-mod)$ solo en el caso que cada sucesión $0 \longrightarrow A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$ es exacta.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ morfismos de complejos de cadenas,por ejercicio anterior el subcomplejo $\ker(f) = \{\ker(f_n)\}$ es el kernel de f, del mismo modo el subcomplejo $Im(g) = \{Im(g_n)\}$ es la imagen de g, como por hipótesis cada sucesión $0 \longrightarrow A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$ es exacta tenemos $Im(f_n) = \ker(g_n)$ para todo n, luego el subcomplejo $Im(f) = \ker(g)$ así por definición $0 \longrightarrow A. \longrightarrow B. \longrightarrow C. \longrightarrow 0$ es exacta. □

Definición 1.2.7. *En una categoría abeliana una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ se parte si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

i) El mapa $A \longrightarrow B$ tiene una sección.

ii) El mapa $B \longrightarrow C$ tiene una retracción.

iii) $B = A \oplus C'$ para algún sub objeto C' de C

iv) $B = A' \oplus C$ para algún sub objeto A' de A

Truncamiento 1.2.8. *Si C es un complejo de cadena y n es un entero, denotamos $\tau_{\geq n}C$ al subcomplejo de C definido por* $(\tau_{\geq n}C)_i = \begin{cases} 0 & si \quad i < n \\ Z_n & si \quad i = n \\ C_i & si \quad i > n \end{cases}$

esto es

$$\ldots 0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots$$

Claramente $H_i(\tau_{\geq n}C)_i = 0$ para $i < n$ y $H_i(\tau_{\geq n}C)_i = H_i(C)$ para $i \geq n$.El complejo $\tau_{\geq n}C$ se llama el truncamiento (bueno) de C debajo de n, y el complejo cociente $\tau_{<n}C = C/(\tau_{\geq n}C)$ se llama el truncamiento (bueno) de C arriba de n;

Esto es:

$$\ldots C_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots$$

y el subcomplejo

$$\ldots 0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots$$

consideramos el complejo cociente

$$\ldots C_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n/Z_n \longrightarrow 0 \ldots$$

$H_i(\tau_{<n}C)_i = H_i(C)$ para $i < n$ y 0 para $i \geq n$

Algunas variantes menos útiles son los truncamientos estrictos de $\tau_{<n}C$ y $\tau_{>n}C = C/\tau_{<n}C$. Por definición $(\tau_{<n}C)_i$ es C_i si $i < n$ y 0 si $i \geq n$

Éstas tienen la ventaja de ser más fácil de describir pero la desventaja de introducir el grupo de homología $H_n(\tau_{<n}C) = C_n/B_n$

Traslación 1.2.9. *El cambio de índices, o traslación, es otra operación útil que podemos utilizar en complejos de cadena o cocadena. Si C es un complejo y p es un entero, formamos un nuevo complejo $C[p]$ de la siguiente manera:*

$$C[p]_n = C_{n+p}$$

con diferencial$(-1)^p\delta$. Llamamos $C[p]$ a la p traslación de C. La manera de recordar el cambio es que la parte de grado cero de $C[p]$ es C_p. La convención signos esta diseñada para simplificar la notación mas adelante. Tenga en cuenta que la traslación cambia la homología.

$$H_n(C[p]) = H_{n+p}(C)$$

Hacemos la traslación de un funtor cambiando los índices en los mapas de cadena. Es decir, si$f : C \longrightarrow D$ es un mapa de cadena, entonces $f[p]$ es el mapa de cadena dado por la fórmula

$$f[p]_n = f_{n+p}$$

Ejercicio 13 (Ejercicio 1.2.7)**.** *Si C es un complejo, mostrar que las siguientes sucesiones de complejos son exactas:*

$$0 \longrightarrow Z(C) \longrightarrow C \longrightarrow B(C)[-1] \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow H(C) \longrightarrow C/B(C) \longrightarrow^d Z(C)[-1] \longrightarrow H(C)[-1] \longrightarrow 0$$

Demostración. Probaremos que cada sucesión $0 \longrightarrow Z_n(C) \longrightarrow C_n \longrightarrow B_n(C)[-1] \longrightarrow 0$ es exacta y aplicaremos el resultado del **Ejercicio 1.2.4**, tenemos:

1. $0 : 0 \longrightarrow Z_n(C)$ de donde $Im(0) = 0_{C_n}$
2. $i : Z_n(C) \longrightarrow C_n$ donde i es la función inclusión, luego $\ker(i) = 0_{C_n}$ y por definición de función inclusión $Im(i) = Z_n(C)$.
3. Recordando la definición de traslación tenemos $B_n(C[-1]) = B_{n-1}(C)$ y como $d_n : C_n \longrightarrow B_{n-1}$ por definición $Im(d_n) = B_{n-1}(C)$ y $\ker(d_n) = Z_n(C)$
4. $0_2 : B_{n-1}(C) \longrightarrow 0$ donde $\ker(0_2) = B_{n-1}(C)$, por ser el mapa nulo.

Luego la sucesión $0 \longrightarrow Z(C) \longrightarrow C \longrightarrow B(C)[-1] \longrightarrow 0$ es exacta.
De forma análoga probaremos la exactitud de

$$0 \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow C_n/B_n(C) \longrightarrow^d Z_n(C)[-1] \longrightarrow H_n(C)[-1] \longrightarrow 0$$

1. $i : H_n(C) = Z_n/B_n \longrightarrow C_n/B_n$ con $i(x) = x$, así

   $Ker(i) =\{x \in H_n(C) \mid i(x) = 0_{C_n/B_n}\} = \{x \in H_n(C) \mid x \in B_n\} = B_n.$

   Por definición de i y como $Z_n \subset C_n$ tenemos $Im(i) = Z_n/B_n$

2. $Z_n(C)[-1] = Z_{n-1} \supset B_{n-1}$, así definimos $d_n : C_n/B_n \longrightarrow Z_{n-1}$, con $d_n(x+B) = d_n(x) + d_n(B) = d_n(x) \in B_{n-1} \subset Z_{n-1}$

$$\ker(d_n) = \{x \in C_n/B_n : d_n(x) = 0_{C_{n-1}}\} = Z_n/B_n$$
$$Im(d_n) = B_{n-1}$$

3. Tenemos

$$\pi : Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}$$
$$x \longmapsto \overline{x}$$

como π es la proyección tenemos $Im(\pi) = H_{n-1}$ y $\ker(\pi) = B_{n-1}$.

Finalmente teniendo en cuenta que la primer y ultima función son nulas tenemos que la sucesión es exacta. □

1.3. Sucesiones exactas largas

Teorema 1.3.1. *Sea* $0 \longrightarrow A. \longrightarrow B. \longrightarrow C. \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Entonces existe un mapa natural*

$$\delta_n : H_n(C.) \longrightarrow H_{n-1}(A.)$$

llamado morfismo de conexión, tal que:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A.) \longrightarrow H_n(B.) \longrightarrow H_n(C.) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A.) \longrightarrow \dots$$

es una sucesión exacta larga.

Ejercicio 14 (Ejercicio 1.3.1)**.** *Sea* $0 \longrightarrow A. \longrightarrow B. \longrightarrow C. \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Mostrar que si dos de los tres complejos de cadenas* $A., B.$ *y* $C.$ *son exactos, entonces el tercero lo es.*

Demostración. Sean $f : A. \longrightarrow B.$ y $g : B. \longrightarrow C.$ morfismos de complejos de cadenas, $\overline{f}$ y $\overline{g}$, las funciones inducidas sobre los respectivos espacios de homología. Sin perdida de generalidad supongamos que $A.$ y $C.$ son exactos luego por **Ejercicio 1.1.5** tenemos que $A.$ y $C.$ son acíclicos, así $H_n(A.) = 0$ y $H_n(C.) = 0$ para todo n. Aplicando el teorema anterior tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} 0 \xrightarrow{\overline{f_n}} H_n(B.) \xrightarrow{\overline{g_n}} 0 \xrightarrow{\delta_n} 0 \longrightarrow \dots$$

Luego $0 = im(\overline{f_n}) = \ker(\overline{g_n}) = H_n(B.)$, para todo n, luego $B.$ es acíclico, por lo tanto exacto.
De forma análoga se prueban los otros casos. □

Ejercicio 15 (Ejercicio 1.3.3). *En un diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"] & C' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\gamma"] & D' \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "\delta"] & E' \arrow[d, "\epsilon"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "h"] & D \arrow[r, "t"] & E \end{tikzcd}$$

con filas exactas en una categoría abeliana probar que

i) Si β y δ son mónicos y α es epi entonces γ es mónico.

ii) Si β y δ son epis y ϵ es mónico entonces γ es epi.

Demostración. i) Sea $x \in C'$ tal que $\gamma(x) = 0_C$, aplicando h tenemos $h(\gamma(x)) = 0_D$, como el el diagrama conmuta

$\delta(h'(x)) = 0_D$, por hipótesis δ es mónico, luego

$h'(x) = 0_{D'}$, entonces $x \in \ker(h') = Im(g')$.

Así $\exists x_{B'}$ con $g\prime(x_{B'}) = x$, aplicando γ y usando que el diagrama conmuta, tenemos

$\gamma(x) = \gamma(g\prime(x_{B'})) = g(\beta(x_{B'}))$, como $\gamma(x) = 0$,

$\beta(x_{B'}) \in \ker(g) = Im(f)$ entonces $\exists a \in A$ con $f(a) = \beta(x_{B'})$, por hipótesis α es epimorfismo, luego $\exists x_{A'}$ con $\alpha(x_{A'}) = a$,por lo tanto

$\beta(x_{B'}) = f(a) = f(\alpha(x_{A'}))$ y como el diagrama conmuta

$\beta(x_{B'}) = f(\alpha(x_{A'})) = \beta(f'(x_{A'}))$ que demuestra

$$\beta(x_{B'}) = \beta(f'(x_{A'})),$$

como β es mónico $f'(x_{A'}) = x_{B'}$, aplicando g' tenemos

$g'(f'(x_{A'})) = \mathfrak{g}'(x_{B'})$ finalmente como $g\prime f\prime = 0$ nos queda $0 = \mathfrak{g}'(x_{B'})$ y como $x = \mathfrak{g}'(x_{B'})$

$$x = 0_C$$

.

ii) Veamos que γ es epi. Sea $y \in C$, como δ es epi $\exists x_{D'} \in D'$ con $\delta(x_{D'}) = h(y)$, ya que el diagrama conmuta

$$t(h(y)) = t(\delta(x_{D'})) = \epsilon(t'(x_{D'})) = 0_E$$

$t'(x_{D'}) = 0_{E'}$ por ser ϵ es mónico,
$\exists x_{C'} \in C\prime$ con $h'(x_{C'}) = x_{D'}$, ya que $x_{D'} \in \ker(t') = Im(h')$
Como el diagrama conmuta tenemos que

$$\delta(h'(x_{C'})) = h(\gamma(x_{C'})) = h(y),$$

luego $h(\gamma(x_{C'}) - y) = 0$ esto es $\gamma(x_{C'}) - y \in \ker h = Img$, así $\exists b \in B$ con $g(b) = \gamma(x_{C'}) - y$, como β es epi $\exists b' \in B'$ con $\beta(b') = b$, finalmente como el diagrama conmuta tenemos:

$$\begin{aligned}\gamma(g'(b')) &= g(\beta(b'))\\ &= g(b)\\ &= \gamma(x_{C'}) - y\end{aligned}$$

luego $\gamma(g'(b') - (x_{C'})) = y$.

$\square$

Lema 1.3.2. Snake *Dado el diagrama conmutativo de R-módulos de la forma*

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Si las filas son exactas, existe una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Aclaración 1.3.3. *Cuando trabajamos con módulos, es útil poder empujar elementos alrededor. Al decodificar la demostración anterior, obtenemos la siguiente fórmula para el homomorfismo de conexión: Sea $z \in H_n(C)$(entonces $z = \overline{c_n}$ como g es epimorfismo existe $b \in B_n$ tal que $g(b) = c_n$), aplico δ. El elemento $\delta(b) \in deB_{n-1}$ en realidad pertenece al submódulo $Z_{n-1}(A)$ y representa $\delta(z) \in H_{n-1}(A)$.*

Existe una categoría $\mathcal{S}$ cuyos objetos son sucesiones exactas cortas de complejos de cadena (digamos, en una categoría abeliana $\mathcal{C}$).Los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (*)$$

dan los morfismos en $\mathcal{S}$ (desde la fila superior hasta la fila inferior). Del mismo modo, existe una categoría $\mathcal{L}$ de sucesiones exactas largas en $\mathcal{C}$

Proposición 1.3.4. *La sucesión exacta larga es un funtor de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$. Es decir, para cada sucesión exacta corta existe una sucesión exacta larga y* *para cada mapa (*) de secuencias exactas cortas hay un diagrama de escalera conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\delta"] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(B) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(C) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\delta"] & H_n(A') \arrow[r] & H_n(B') \arrow[r] & H_n(C') \arrow[r] & H_{n-1}(A') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

1.4. Homotopías en cadena

Si C es cualquier complejo de cadenas de espacios vectoriales sobre un cuerpo tenemos que $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ es una transformación lineal, luego siempre podemos realizar la siguientes descomposición en espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} C_n &= Z_n \oplus B'_n, \quad B'_n \cong C_n/Z_n = d(C_n) = B_{n-1} \\ Z_n &= B_n \oplus H'_n, \quad H'_n \cong Z_n/B_n = H_n(C). \end{aligned}$$

$C_n = B_n \oplus H'_n \oplus B'_n$, así si $c \in C_n$ lo denotaremos de la forma (b, h, b'); $d_n(c) = d_n(b, h, b') = (b', 0, 0) \in C_{n-1}$. Por definición de suma directa en C_n existe $\pi_Z : Z_n \oplus B'_n \longrightarrow Z_n$, y $\pi_B : B_n \oplus H'_n \longrightarrow B_n$en Z_n, así podemos realizar las siguiente composiciones

$$C_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow B_n \cong B'_{n+1} \subseteq C_{n+1}$$

definimos los mapas splitting $s_{n-1} : C_{n-1} \longrightarrow C_n$ con

$$s_{n-1}(b_{n-1}, h_{n-1}, b'_{n-1}) = (0, 0, b_{n-1},)$$

veamos que $d = dsd$.

$$\begin{aligned} d_n s_{n-1} d_n(b, h, b') &= d_n s_{n-1}(d_n(b, h, b')) \\ &= d_n(s_{n-1}(b', 0, 0)) = d_n(0, 0, b') \\ &= (b', 0, 0) \\ &= d_n(b, h, b') \end{aligned}$$

La composición $ds : C_n \longrightarrow C_n$ es la proyección de C_n sobre B_n ya que dado $(b, h, b') \in C_n$

$$d_{n+1}s_n(b, h, b') = d_{n+1}(s_n(b, h, b')) = d_{n+1}(0, 0, b) = (b, 0, 0)$$

con $b \in B_n$ luego $d_{n+1}s_n(C_n) \simeq B_n$. Además $sd : C_n \longrightarrow C_n$ es la proyección de C_n sobre B'_n

$$s_{n-1}d_n(b, h, b') = s_{n-1}(d_n(b, h, b')) = s_{n-1}(b', 0, 0) = (0, 0, b')$$

$s_{n-1}d_n(C_n) \simeq B'_n$, entonces tenemos que $ds + sd$ es un endomorfismo de C_n, con $\ker(d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n) = H'_n \simeq H_n(C)$, ya que;

$$\begin{aligned}(ds + sd)(b, h, b') &= ds(b, h, b') + sd(b, h, b')\\ &= (b, 0, 0) + (0, 0, b'),\end{aligned}$$

luego $(b, h, b') \in \ker(ds + sd) \iff (b, h, b') = (0, h, 0)$. Por último si C es un complejo de cadenas exacto tenemos que $B_n = Z_n$ lo que implica $C_n \simeq B_n \oplus B'_n$, luego: C es un complejo exacto si y solo si $sd + ds$ es el mapa identidad.
Sobre anillos arbitrarios R no es siempre posible dividir un complejo de cadenas de está forma, le daremos un nombre a la noción anterior.

Definición 1.4.1. *Un complejo C es llamada split si hay mapas $s_n : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ tal que $d = dsd$. Los mapas s_n son llamados splitting maps. Si adicionalmente C es acíclico, decimos que C es split exacta.*

Ejemplo 1.4.2. *Sea $R = \mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}/4$, y sea C el complejo*

$$\ldots \longrightarrow^2 \mathbb{Z}/4 \longrightarrow^2 \mathbb{Z}/4 \longrightarrow^2 \mathbb{Z}/4 \longrightarrow^2 \ldots$$

Este complejo es acíclico pero no es split exacta, ya que $\mathbb{Z}/4$ no puede ser descompuesto de la forma $\mathbb{Z}/4 \cong Z_n \oplus B'_n$ con $Z_n =< 2 >$.

Ejercicio 16 (Ejercicio 1.4.1)**.** *i) Mostrar que un complejo de cadenas acíclico acotado por debajo de $R-$mod libres es siempre split exacta.*

ii) Mostrar que un complejo de cadenas acíclico de $R-$mod libres, finitamente generados son siempre split exacta,incluso cuando no está acotado por debajo.

Demostración.

i) Sea $C = \ldots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ el complejo de cadenas de la hipótesis, como C es exacto tenemos que $Im(d_1) = \ker(d_0) = C_0$, esto es d_1 es un epimorfismo de $R-$módulos. Sea X_0 una base de C_0, luego para todo $c_0^j \in X_0$ existen $c_1^j \in C_1$ tal que $d_1(c_1^j) = c_0^j$. Definimos $\overline{s_0} : X_0 \longrightarrow C_1$ de la siguiente forma $\overline{s_0}(c_0^j) = c_1^j$ tal que $d_1(c_1^j) = c_0^j$, además como C_0 es libre tenemos que existe un único morfismo de $R-$módulos $s_0 : C_0 \longrightarrow C_1$ que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\overline{s_0}"'] & C_0 \arrow[dl, "s_0"] \\ C_1 & \end{tikzcd}$$

Claramente $d_1 = d_1 s_0 d_1$, además $s_0(C_0) \subset C_1$ es un submódulo de C_1. La siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

Por definición de s_0 se cumple $d_1 s_0(C_0) = id(C_0)$, luego la sucesión anterior se parte y tenemos que $C_1 \simeq Z_1 \oplus C_0$, además como C es un complejo exacto $Z_1 = B_1$. Para definir $s_1 : C_1 \longrightarrow C_2$, tenemos en cuenta que $C_1 = B_1 \oplus C_0$, dado $c_1 \in C_1$, podemos escribirlo de forma única como $c_1 = (b_1, c_0)$ con $c_0 \in C_0$ y $b_1 \in B_1$ para el cual existe $c_2 \in C_2$ tal que $d_2(c_2) = (b_1, 0)$, finalmente definimos $s_1 : C_1 \longrightarrow C_2$ con $s_1(b_1, c_0) = c_2$ tal que $d_2(c_2) = (b_1, 0)$. Claramente se cumple $d_2 s_1 d_2(b_1, c_0) = d_2 s_1(d_2(b_1, c_0)) = d_2(s_1(b_1, 0)) = d_2(c_2) = (b_1, 0)$, realizando este proceso de forma iterada se encuentran las siguientes s_n. Así C es split exacta.

□

Ejercicio 17 (Ejercicio 1.4.2)**.** *Sea C un complejo de cadenas, con bordes B_n y ciclos Z_n en C_n. Probar que C es split si y solo si hay una descomposición de $R-$módulos $C_n \simeq Z_n \oplus B'_n$ y $Z_n = B_n \oplus H'_n$. Probar que C es split exacta si y solo si $H'_n = 0$.*

Demostración. Si C es split, existe $s_{n-1} : C_{n-1} \longrightarrow C_n$, morfismo de $R-$módulos, con $d_n = d_n s_{n-1} d_n$. Tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_n \longrightarrow 0$$

Tomamos $s_{n-1} |_{B_n} : B_n \subset C_{n-1} \longrightarrow C_n$, $s_{n-1} |_{B_n} (b) = c$ con $d_n(c) = b$,

$$d_n s_{n-1} |_{B_n} (b) = d_n(s_{n-1} |_{B_n} (b)) = d_n(s_{n-1}(d_n(c)) = d_n(c) = b$$

Luego $d_n s_{n-1} |_{B_n} = id_{B_n}$, por Definición 1.2.7 tenemos que $C_n \simeq Z_n \oplus B'_n$. Sabemos que $d_{n+1} s_n(C_n) = B_n$ por ser la proyección de C_n sobre B_n, luego tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow ds(C_n) \longrightarrow Z_n \longrightarrow Z_n/ds(C_n) \longrightarrow 0$$

Si $C_n \simeq Z_n \oplus B'_n$ y $Z_n = B_n \oplus H'_n$, cada $c \in C_n$ puede escribirse de forma única como $c = (b, h', b')$ con $b \in B_n$, $h' \in H'_n$ y $b' \in B'_n$, teniendo en cuenta que d_n es la diferencial en C_n y la descomposición de Z_n es claro que $d_n(c) = d_n(b, h', b') = (b', 0, 0)$

$$\begin{aligned} S_n : C_n &\longrightarrow C_{n+1} \\ b &\mapsto c, \end{aligned}$$

veamos que $dsd = d$, dado $c \in C_{n+1}$

$$d_{n+1}s_nd_{n+1}(c) = d_{n+1}s_n(d_{n+1}(c)) = d_{n+1}(s_n(d_{n+1}(c))) = d_{n+1}(c)$$

$\square$

Supongamos que tenemos dos complejos de cadena C y D, junto con mapas elegidos al azar $s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$. Sean f_n mapas desde C_n a D_n definidos por la fórmula $f_n = d^D_{n+1}s_n + s_{n-1}d^C_n$

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d"] & C_n \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "f"] & C_{n-1} \arrow[dl, "s"'] \\
D_{n+1} \arrow[r, "d"] & D_n \arrow[r, "d"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Omitiendo subíndices, calculamos

$$df = d(ds + sd) = dds + dsd = dsd + sdd = (ds + sd)d = fd.$$

Así $f = ds + sd$ es un mapa de cadenas de C a D

Definición 1.4.3. *Diremos que un mapa $f : C \longrightarrow D$ es homotópicamente nulo si hay mapas $s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ tal que $f = ds + sd$. Los mapas $\{s_n\}$ son llamados una contracción en cadena de f.*

Ejercicio 18 (Ejercicio 1.4.3)**.** *Mostrar que C es un complejo de cadena exacto que se parte si y solo si el mapa identidad en C es homotópicamente nulo.*

Demostración. Sea $id : C \longrightarrow C$ el mapa identidad, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d"] & C_n \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "id"] & C_{n-1} \arrow[dl, "s"'] \\
C_{n+1} \arrow[r, "d"] & C_n \arrow[r, "d"] & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta la observación
C es un complejo de cadenas exacto que se parte $\Longleftrightarrow$ existe, para todo n, $s_n : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ con $id = ds + sd \Longleftrightarrow id_C : C \longrightarrow C$ es homotópicamente nulo. $\square$

La construcción de la contracción de cadena nos brinda una manera fácil de proliferar mapas de cadenas: si $g : C \longrightarrow D$ es cualquier mapa de cadena, para cualquier elección de mapas s_n tenemos que $g + (ds + sd)$ no es muy diferente de g es un sentido que ahora explicaremos:

Definición 1.4.4. *Diremos que dos mapas de cadena f y g de C a D son cadenas homotópicas si su diferencia $f - g$ es homotópicamente nulo, esto es, si*

$$f - g = sd + ds$$

Los mapas $\{s_n\}$ son llamados cadenas homotópicas de f a g. Finalmente diremos que $f : C \longrightarrow D$ es una cadena homotópica equivalente si existe un mapa $g : D \longrightarrow C$ tal que gf y fg son cadenas homotópicas de los respectivos mapas identidad de C y D

1.5. Mapa Cono

Definición 1.5.1. *Sea $f : B. \longrightarrow C.$ un mapa de complejos de cadenas. El* **mapa cono de** *f es el complejo de cadenas cono(f) cuyo $n-$esimo elemento es $B_{n-1} \oplus C_n$, la diferencial en cono(f) esta dada por la fórmula:*

$$d(b, c) = (-d^B_{n-1}(b), d^C_n(c) - f_{n-1}(b)), \;\; b \in B_{n-1}, c \in C_n$$

en general omitiremos los subíndices. Podemos recordar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_{n-1} \arrow[d, "d^B_{n-1}"'] \arrow[dr, "f_n"'] & C_n \arrow[d, "d^C_n"] \\
B_{n-2} & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 19 (Ejercicio 1.5.1)**.** *Sea id_C el mapa identidad del complejo C, denotaremos cone(C) al mapa cono de la identidad; este tiene a $C_{n-1} \oplus C_n$ en el $n-$esimo elemento. Probar que cone(C) es split exacto, con $s(b, c) = (-c, 0)$ que define los splitting map.*

Demostración. Veamos que $cone(C)$ es realmente un complejo de cadenas con la diferencial $d : C_{n-1} \oplus C_n \longrightarrow C_{n-2} \oplus C_{n-1}$ definida por:

$$d(c_{n-1}, c_n) = (-d_{n-1}(c_{n-1}), d_n(c_n) - c_{n-1})$$

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1} \arrow[d, "d_{n-1}"'] \arrow[dr, "id"'] & C_n \arrow[d, "d_n"] \\
C_{n-2} & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Veamos que $d \circ d = 0$, dados $(p, q) \in C_{n-1} \oplus C_n$

$$\begin{aligned}
d(d(p, q)) &= d(-d_{n-1}(p), d_n(q) - p) \\
&= (-d_{n-2}(-d_{n-1}(p)), d_{n-1}(d_n(q) - p) + d_{n-1}(p)) \\
&= (0, d_{n-1}(d_n(q)) - d_{n-1}(p) + d_{n-1}(p)) = (0, 0).
\end{aligned}$$

Por ser $cone(C)$ un complejo se cumple trivialmente $Imd \subset \ker d$, sea $(p,q) \in C_{n-1} \oplus C_n$ con $d(p,q) = (0,0)$ tenemos $d(p,q) = (-d_{n-1}(p), d_n(q) - p) = (0,0)$ luego $p = d_n(q)$. Por último veamos que existe $(a,b) \in C_n \oplus C_{n+1}$ con $d(a,b) = (p,q)$, basta tomar $(a,b) = (-q,0)$,

$$d(-q,0) = (-d_n(-q), d_{n+1}(0) - (-q)) = (p,q)$$

Así $cone(f)$ es exacto. Finalmente veamos que $cone(f)$ se parte; definimos $s : C_{n-1} \oplus C_n \longrightarrow C_n \oplus C_{n+1}$ con $s(p,q) = (-q,0)$, vemos que se cumple $dsd = d$

$$\begin{aligned}
dsd(p,q) &= ds(d(p,q)) \\
&= d(s(-d(p), d(q) - p) = \\
&= d(-d(q) + p, 0) \\
&= (-d(-d(q) + p), d(0) - (-d(q) + p)) \\
&= (-d(p), d(q) - p) \\
&= d(p,q).
\end{aligned}$$

□

Apéndice

A continuación presentaremos algunas definiciones que serán de utilidad a lo largo del siguiente capítulo.

Definición 1.5.2. *Una categoría $\mathcal{A}$ consiste de lo siguiente: una clase $Obj(\mathcal{A})$ de objetos, y conjuntos $Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ de morfismos para todo par (A,B) de objetos, un morfismo identidad $id_A \in Hom_{\mathcal{A}}(A,A)$ para cada objeto A, y una composición de funciones*

$$Hom_{\mathcal{A}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{A}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$$

definida para toda terna ordenada (A,B,C) de objetos. Escribiremos $f : A \longrightarrow B$ para indicar que f es un morfismo (o mapa) en $Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$, y gf ó $g \circ f$ para la composición $f : A \longrightarrow B$ con $g : B \longrightarrow C$, dicha composición sujeta a dos axiomas:

- *i Axioma de asociatividad: $(hg)f = h(gf)$ para $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$*
- *ii $id_B \circ f = f = f \circ id_A$ para $f : A \longrightarrow B$*

Ejemplo 1.5.3. *La categoría* **Ab** *de grupos abelianos. Los objetos son grupos abelianos, y los morfismos son homomorfismos de grupos abelianos. La composición es justamente la composición de homomorfismos.*

Definición 1.5.4. *Un morfismo $f : B \longrightarrow C$ se llama* **mónico** *en $\mathcal{A}$ si para cualquier par de morfismos distintos e_1, e_2 tenemos que $fe_1 \neq fe_2$; en otras palabras podemos cancelar f por izquierda. (Equivalentemente f es mónico si $fe_1 = fe_2 \Longrightarrow e_1 = e_2$)*

Observacíón 4. *Los morfismos mónicos son precisamente generalizaciones de las funciones inyectivas (monomorfismos) en el sentido usual.*
Notemos lo siguiente; si $f : B \longrightarrow C$ en una categoría $\mathcal{A}$ tiene inversa a izquierda entonces es mónico; supongamos $fe_1 = fe_2$ como existe la inversa a izquierda $(gf)e_1 = (gf)e_2$, luego $e_1 = e_2$. La vuelta, en general, no es cierta ya que por ejemplo en la categoría de grupos si H es un subgrupo de G entonces la inclusión $i : H \longrightarrow G$ es siempre mónico, pero i tiene inversa a izquierda en esta categoría si y solo si H tiene complemento normal en G.

$$G = HK\{hk; h \in H, k \in K\}$$

Proposición 1.5.5. *Sea $\mathcal{A}$ un categoría y se $f : B \longrightarrow C$. f es mónico si y solo si*

$$\begin{aligned} f_* : Hom_{\mathcal{A}}(A, B) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(A, C) \\ h &\mapsto f_*(h) = fh \end{aligned}$$

es un mapa inyectivo de conjuntos.

Demostración. f es mónico $\Longleftrightarrow (fe_1 = fe_2 \Longrightarrow e_1 = e_2) \Longleftrightarrow$
$(f_*(e_1) = f_*(e_2) \Longrightarrow e_1 = e_2) \Longleftrightarrow f_*$ es inyectiva. □

Definición 1.5.6. *Un morfismo $f : B \longrightarrow C$ se llama epi en $\mathcal{A}$ si para cualquier par de morfismos distintos g_1, g_2 tenemos que $g_1 f \neq g_2 f$; en otras palabras podemos cancelar f por derecha. (Equivalentemente f es epi si $g_1 f = g_2 f \Longrightarrow g_1 = g_2$)*

Definición 1.5.7 (Funtor covariante)**.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un funtor covariante T desde $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ es un par de funciones , ambas denotadas por T, una que asigna a cada objeto de $\mathcal{A}$ un objeto de $\mathcal{B}$ y otra que a cada morfismo de $\mathcal{A}$ le asigna un morfismo en $\mathcal{B}$ esto es: $A \in obj(\mathcal{A}) \Longrightarrow T(A) \in obj(\mathcal{B})$, y si $f : A \longrightarrow A'$ un morfismo en $\mathcal{A}$ entonces $T(f) : T(A) \longrightarrow T(A')$ es morfismo en $\mathcal{B}$ junto con las siguientes propiedades:*

- *i* $T(1_A) = 1_{T(A)}$ *para todo morfismo identidad 1_A en $\mathcal{A}$*
- *ii* $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ *para cualquier par de morfismos f, g de $\mathcal{A}$ cuya composición está definida.*

Proposición 1.5.8. *Todo objeto en una categoría $\mathcal{A}$, define un funtor covariante T_A desde la categoría $\mathcal{A}$ a la categoría de conjuntos §*

Demostración. Sea A un objeto fijo en una categoría $\mathcal{A}$, definimos $T_A(B) = Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ para todo objeto B en $\mathcal{A}$ y si $f : B \longrightarrow B'$ es morfismo en $\mathcal{A}$, tenemos

$$T_A(f) : Hom_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(A, B')$$
$$h \mapsto f \circ h : A \longrightarrow B'$$

Claramente T_A está bien definida ya que los conjuntos $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ siempre existen por definición de categoría.

i Sea 1_B la identidad de B en $\mathcal{A}$ y sea $h \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, tenemos $T_A(1_B)(h) = 1_B \circ h = h$.

ii Sean $f : B \longrightarrow B'$ y $g : B' \longrightarrow B''$ morfismos en $\mathcal{A}$ queremos ver si $T_A(g \circ f) = T_A(g) \circ T_A(f)$

$$T_(g \circ f)(h) = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = T_A(g) \circ T_A(f)(h)$$

□

Definición 1.5.9 (Funtor Contravariante)**.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un funtor contravariante S desde $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ es un par de funciones,ambas denotadas por S, una que asigna a cada objeto de $\mathcal{A}$ un objeto de $\mathcal{B}$ y otra que asigna cada morfismo de $\mathcal{A}$ un morfismo en $\mathcal{B}$ esto es: $A \in obj(\mathcal{A}) \Longrightarrow S(A) \in obj(\mathcal{B})$, y si $f : A \longrightarrow \mathcal{A}'$ un morfismo en $\mathcal{A}$ entonces $S(f) : S(A') \longrightarrow S(A)$ junto con las siguientes propiedades:*

i $S(1_A) = 1_{S(A)}$ *para todo morfismo identidad* 1_A *en* $\mathcal{A}$

ii $S(g \circ f) = S(f) \circ T(g)$ *para cualquier par de morfismos* f, g *de* $\mathcal{A}$ *cuya composición está definida.*

Ejemplo 1.5.10. *Todo objeto en una categoría $\mathcal{A}$, define un funtor contravariante T^A desde la categoría $\mathcal{A}$ a la categoría de conjuntos §, con $T^A(B) = Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ y si $f : B \longrightarrow B'$ tenemos*

$$T^A(f) : Hom_{\mathcal{A}}(B', A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$$

, la prueba es análoga a la realizada para funtor covariante.

A continuación presentaremos el concepto de categoría opuesta, la cual es también llamada categoría dual.

Definición 1.5.11. *Toda categoría $\mathcal{A}$ tiene una categoría opuesta $\mathcal{A}^{op}$, donde $Obj(\mathcal{A}) = Obj(\mathcal{A}^{op})$, pero los morfismos y composiciones se invierten, esto es hay una correspondencia $1-1$ entre morfismos $f \mapsto f^{op}$, si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathcal{A}$ le corresponde un $f^{op} : B \longrightarrow A$ en $\mathcal{A}^{op}$. Además si la composición fg esta definida en $\mathcal{A}$, tenemos que $(fg)^{op} = g^{op}f^{op}$ está definida en $\mathcal{A}^{op}$. Si f es mónico entonces f^{op} es epi y si g es epi entonces g^{op} es mónico.*

Observacíón 5. *Todo funtor covariante T de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ define un funtor contravariante S de $\mathcal{A}^{op}$ en $\mathcal{B}$, basta tomar $S(A) = T(A)$ y $S(f^{op}) = T(f)$ si $f : A \longrightarrow B$ es morfismo en $\mathcal{A}$.*

Para más detalles de la observación anterior veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.12. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría, I un objeto de $\mathcal{A}$. El funtor covariante $T_A(\_) = Hom_{\mathcal{A}}(A, \_)$ en $\mathcal{A}$ define un funtor contravariante $S^A = Hom_{\mathcal{A}^{op}}(\_, A)$ en $\mathcal{A}^{op}$.*

Por definición tenemos $obj(\mathcal{A}) = obj(\mathcal{A}^{op})$ así $S(A)$ está definido además para $f : B \longrightarrow B'$ en $\mathcal{A}$ existe $f^{op} : B' \longrightarrow B$ en $\mathcal{A}^{op}$

Sea $T_I = Hom_{\mathcal{A}}(I, \_)$ en $\mathcal{A}$, definimos $T^I = Hom_{\mathcal{A}^{op}}(\_, I)$ en $\mathcal{A}^{op}$ donde $T_I(A) = Hom_{\mathcal{A}}(I, A)$ y $T^I(A) = Hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, I)$ están bien definidos en sus respectivos espacios. Sea $f : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$, por definición de categoría opuesta existe $f^{op} : A' \longrightarrow A$ en $\mathcal{A}^{op}$, luego tenemos:

$$\begin{aligned} T_I(f) : Hom_{\mathcal{A}}(I, A) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(I, A') \\ h &\mapsto fh : I \longrightarrow A' \end{aligned}$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} T^I(f^{op}) : Hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, I) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{A}^{op}}(A', I) \\ h^{op} &\mapsto h^{op} f^{op} : A' \longrightarrow I. \end{aligned}$$

de forma análoga se muestran las otras propiedades.

Definición 1.5.13 (Producto). *Si $C_i : i \in I$ es un conjunto de objetos de $\mathcal{A}$, un producto $\prod_{i\in I} C_i$, si este existe, es un objeto de $\mathcal{A}$, junto con mapas $\pi_j : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_j (j \in I)$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, y toda familia de morfismos $\alpha_j : A \longrightarrow C_j (j \in I)$, existe un único morfismo $\alpha : A \longrightarrow \prod_{\in I} C_i$ en $\mathcal{A}$ tal que $\pi_j \alpha = \alpha_j$, esto es el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha_j"] \\ \prod_{i\in I} C_i \arrow[r, "\pi_j"'] & C_j \end{tikzcd}$$

Notemos que cualquier objeto de $\mathcal{A}$ isomorfo al producto es también un producto, si $\prod_{\in I} C_i$ existe es único salvo isomorfismos. Para el caso $I = 1, 2$, escribiremos $C_1 \times C_2$. Dualmente definimos coproducto.

Definición 1.5.14 (Coproducto). *Si $C_i : i \in I$ es un conjunto de objetos de $\mathcal{A}$, un coproducto $\coprod_{i\in I} C_i$, si existe, es un objeto de $\mathcal{A}$, junto con los mapas $\imath_j : C_j \longrightarrow \coprod_{i\in I} C_i, (j \in I)$ tal que para toda familia de morfismos*

$\alpha_i : C_i \longrightarrow A$ existe un único morfismo $\alpha : \coprod_{i\in I} C_i \longrightarrow A$ tal que $\alpha\imath_j = \alpha_j$, esto es el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & A \\ \coprod_{i\in I} C_i \arrow[ur, "\alpha"] & C_j \arrow[l, "\imath_j"] \arrow[u, "\alpha_j"'] \end{tikzcd}$$

Ejercicio 20 (Ejercicio A.1.4)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $\{C_i\}_{i\in I}$ familia de objetos de $\mathcal{C}$.Probar que $\prod_{i\in I} Hom_{\mathcal{C}}(A, C_i) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(A, \prod_{i\in I} C_i)$ y $\coprod_{i\in I} Hom_{\mathcal{C}}(A, C_i) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(A, \coprod_{i\in I} C_i)$*

Demostración.

$$\phi : Hom_{\mathcal{C}}(A, \prod_{i\in I} C_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_{\mathcal{C}}(A, C_i)$$

con $\phi(f) = (\pi_j f)_i$(un producto de familia de funciones), veamos que ϕ es isomorfismo. Sea $(f_i) \in \prod_{i\in I} Hom_{\mathcal{C}}(A, C_i)$, luego para cada j tenemos que $f_j : A \longrightarrow C_j$. Como por hipótesis existe $\prod_{i\in I} C_i$, tenemos $\pi_j : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_j$, luego existe una única $f : A \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ con $\pi_j f = f_j$, así $\phi(f) = (\pi_j f) = (f_j)$.
ϕ es inyectiva. Sean $f, f_1 \in Hom_{\mathcal{C}}(A, \prod_{i\in I} C_i)$, si $a \in A$ entonces $f(a) = (b_j)_i$ con $(b_j)_i \in \prod C_i$ y $\pi_j f(a) = b_j \in C_j$, del mismo modo $f_1(a) = (b_i^1)$ con $(b_i^1) \in \prod C_i$ y $\pi_j f_1(a) = b_j^1 \in C_j$.
Si $\phi(f) = (b_i) = (b_i^1) = \phi(f_1)$ entonces $(\pi_j f) = (\pi_j f_1)$, esto es $f_j = f_{1_j}$ para todo j o sea $f = f_1$.
De forma análoga para coproducto. □

Ejercicio 21 (Ejercicio A.1.5)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{C_i\}_{i\in I}$ familias de objetos de $\mathcal{C}$. Si $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow C_i\}$ es una familia de mapas en $\mathcal{C}$, mostrar que:*

i) Si $\prod A_i$ y $\prod C_i$ existen, hay un único mapa $\gamma : \prod A_i \longrightarrow \prod C_i$ tal que $\pi_i\gamma = \alpha_i\pi_i$. Si cada α_i es mónico, lo es γ

ii) Si $\coprod A_i$ y $\coprod C_i$ existen, hay un único mapa $\lambda : \coprod A_i \longrightarrow \coprod C_i$ tal que $\imath_i\lambda = \alpha_i\imath_i$. Si cada α_i es epi, lo es λ

Demostración. i) Como por hipótesis existen $\prod A_i$ y $\prod C_i$, tenemos los mapas $\pi_j^A : \prod A_i \longrightarrow A_j$ y $\pi_j^C : \prod C_i \longrightarrow C_j$. Definimos la familia de funciones $\{\gamma_j : \prod A_i \longrightarrow C_j\}$ con $\gamma_j = \alpha_j \pi_j^A$, luego por definición de producto existe un único $\gamma : \prod A_i \longrightarrow \prod C_i$ con $\pi_j^C \gamma = \gamma_j$,

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i\in I} A_i \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\gamma_j"] \\
\prod_{i\in I} C_i \arrow[r, "\pi_j^C"'] & C_j
\end{tikzcd}$$

luego $\pi_i^C \gamma = \alpha_i \pi_i^A$. Veamos que si α_i es mónico para todo i, γ es mónico, razonando por el absurdo. Supongamos que $\gamma : \prod A_i \longrightarrow \prod C_i$ no es mónico, esto es existen $g_1 \neq g_2$ con $\gamma g_1 = \gamma g_2$

$$\begin{aligned}
\gamma g_1 &= \gamma g_2 \\
\pi_j^C \gamma g_1 &= \pi_j^C \gamma g_2 \\
\alpha_j \pi_j^A g_1 &= \alpha_j \pi_j^A g_2.
\end{aligned}$$

Llamamos $\pi_j^A g_1 = f_1$ y $\pi_j^A g_2 = f_2$, claramente $f_1 \neq f_2$. Luego tenemos

$$\alpha_i f_1 = \alpha_i f_2,$$

absurdo ya que por hipótesis α_i es mónico, luego γ es mónico.

ii De forma análoga, como por hipótesis existen $\coprod A_i$ y $\coprod C_i$, tenemos los mapas $\imath_j^A : A_j \longrightarrow \coprod A_i$ y $\imath_j^C : C_j \longrightarrow \coprod C_i$. Definimos la familia de funciones $\{\lambda_j : A_j \longrightarrow \coprod C_i\}$ con $\lambda = \imath_j^C \alpha_j$, luego por definición de coproducto existe un único $\lambda : \coprod A_i \longrightarrow \coprod C_i$ con $\lambda \imath_j^A = \lambda_j$, esto es $\lambda \imath_j^A = \imath_j^C \alpha_j$.
Veamos que si α_i es epi para todo i, λ es epi, razonando por el absurdo. Supongamos que $\lambda : \coprod A_i \longrightarrow \coprod C_i$ no es epi, esto es existen $g_1 \neq g_2$ con $g_1 \lambda = g_2 \lambda$

$$\begin{aligned}
g_1 \lambda &= g_2 \lambda \\
g_1 \lambda \imath_j^A &= g_2 \lambda \imath_j^A \\
g_1 \imath_j^C \alpha_j &= g_2 \imath_j^C \alpha_j.
\end{aligned}$$

Llamamos $g_1 \imath_j^C = f_1$ y $g_2 \imath_j^C = f_2$, claramente $f_1 \neq f_2$. Luego tenemos

$$f_1 \alpha_i = f_2 \alpha_i,$$

absurdo ya que por hipótesis α_i es epi, luego γ es epi.

$\square$

Capítulo 2

Funtor derivado

PRELIMINARES CAPÍTULO 2

i) Sean S y W funtores entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Una **transformación natural** $\tau : S \longrightarrow W$ es una familia de morfismos

$$\tau = \{\tau_A : S(A) \longrightarrow W(A)\}_{A \in obj(\mathcal{A})}$$

que hace que el siguiente diagrama conmute para todo $f : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "S(f)"'] & W(A) \arrow[d, "W(f)"] \\ S(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"] & W(A') \end{tikzcd}$$

ii) Un **funtor exacto** es un funtor aditivo entre categorías abelianas $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que para toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ en $\mathcal{A}$ la sucesión $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathcal{B}$.

2.1. δ- Funtor

Definición 2.1.1. *Un $\delta-$funtor homológico entre las categorías abelianas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es una colección de funtores aditivos $T_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ para $n \geq 0$,junto con morfismos*

$$\delta_n : T_n(C) \longrightarrow T_{n-1}(A)$$

definido para cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ en $\mathcal{A}$. Convenimos que $T_n = 0$ para todo $n > 0$. Se imponen las siguientes condiciones:

1. *A cada sucesión exacta corta en $\mathcal{A}$, como arriba, le corresponde una sucesión exacta larga*

$$\ldots T_{n+1}(C) \xrightarrow{\delta_{n+1}} T_n(A) \longrightarrow T_n(B) \longrightarrow T_n(C) \xrightarrow{\delta_n} T_{n-1}(A.) \longrightarrow \ldots$$

2. *Para cada morfismo f que lleva :*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

a

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T_n(C') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "T_n(f)"'] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "T_{n-1}(f)"] \\ T_n(C) \arrow[r, "\delta"'] & T_{n-1}(A) \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.1.2. *La homología da un $\delta-$funtor homológico H_* de $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ categoría abeliana entonces $Ch(\mathcal{A})$ es una categoría abeliana.
Considero la colección de funtores (probado en Ejercicio 1.1.2)

$$H_n : Ch_{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

-Veamos que son funtores aditivos esto es ver que
$Hom(A, B) \longrightarrow Hom(H_*(A), H_*(B))$ es morfismo de grupos. Sean $f, g \in Hom(A, B)$:

$$H_n(f_n + g_n)(x) = \overline{(f_n + g_n)(x)} = \overline{f_n(x) + g_n(x)} =$$

$$\overline{f_n(x)} + \overline{g_n(x)} = H_n(f_n)(x) + H_n(g_n)(x) = (H_n(f_n) + H_n(g_n))(x)$$

-Veamos que existen los δ_n y que se cumplen las dos condiciones de la definición

i) Por Teorema 1-3-1 para toda $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ sucesión exacta corta de complejos de cadenas existen mapeos naturales

$$\delta_n : H_n(C.) \longrightarrow H_{n-1}(A.)$$

llamado morfismo de conexión, talque:

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A.) \longrightarrow H_n(B.) \longrightarrow H_n(C.) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A.) \longrightarrow \ldots$$

es una sucesión exacta larga.

ii) Considero h un morfismo entre las dos sucesiones exactas cortas que lleva :

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

a

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

por Teorema 1-3-4 existe h^* tal que

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_{n+1}(C') \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "h_*"] & H_n(A') \arrow[r, "f'_*"] \arrow[d, "h_*"] & H_n(B') \arrow[r, "g'_*"] \arrow[d, "h_*"] & H_n(C') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "h_*"] & H_{n-1}(A') \arrow[r] \arrow[d, "h_*"] & {} \\
\arrow[r] & H_{n+1}(C) \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & H_n(A) \arrow[r, "f_*"'] & H_n(B) \arrow[r, "g_*"'] & H_n(C) \arrow[r, "\delta_n"'] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

el diagrama conmuta, así en particular

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(C') \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "F_*"] & H_n(A') \arrow[d, "F_*"] \\
H_{n+1}(C) \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & H_n(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Luego H_* es un δ-funtor homológico. $\square$

Ejercicio 22 (Ejercicio 2.1.1)**.** *Sea δ un delta funtor homológico de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, considero § la categoría de sucesiones exactas cortas*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{A}$. Probar que los δ_i- son transformación natural entre el funtor que envía las sucesiones exactas cortas a $T_i(C)$ y el que envía las sucesiones exactas cortas a $T_{i-1}(A)$

Demostración. Sea $\delta-$ funtor homológico de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, es decir existe una colección de funtores aditivos $T_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ para $n \geq 0$, tal que para cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ en $\mathcal{A}$ tiene definido los morfismos

$$\delta_n : T_n(C) \longrightarrow T_{n-1}(A)$$

que cumplen las dos condiciones de funtor homológico.
Sea § la categoría abeliana de las sucesiones exactas cortas en $\mathcal{A}$
Considero S y W funtores entre las categorías $\mathfrak{s}$ y $\mathcal{B}$ tal que:
S manda $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ a $T_n(C)$ y
W manda $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ a $T_{n-1}(A)$

Definimos una transformación τ usando el $\delta-$funtor homológico del siguiente modo:

$$\tau = \{\tau_* : S(*) \longrightarrow W(*)\}_{* \in obj(\mathfrak{s})}$$

esto es

$$\tau = \{\tau_* = \delta_i : T_i(C) \longrightarrow T_{i-1}(A)\}_{* \in obj(\mathfrak{s})}$$

claramente τ es una familia de morfismos. Además si f es un morfismo entre sucesiones exactas cortas tenemos que el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T_n(C') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "T_n(f)"] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "T_{n-1}(f)"] \\ T_n(C) \arrow[r, "\delta"] & T_{n-1}(A) \end{tikzcd}$$

lo que equivale a:

$$\begin{tikzcd} T(*') \arrow[r, "\tau'_*"] \arrow[d, "T(f)"] & S(*') \arrow[d, "S(f)"] \\ T(*) \arrow[r, "\tau_*"] & S(*) \end{tikzcd}$$

luego τ es una transformación natural. □

Ejercicio 23 (Ejemplo 2.1.3)**.** *(**p**-torsión) Si **p** es un entero, los funtores*

$$T_0(A) = A/pA \ \ y \ \ T_1(A) =_p A \equiv \{a \in A : pa = 0\}$$

*encajan para formar un δ-funtor homológico de $\mathcal{A}$**b**(la categoría de grupos abelianos) en $\mathcal{A}$**b**.*

Demostración. Sea **Ab** la categoría de grupos abelianos .
Considero:

-La colección $T_n : \mathcal{A}\mathbf{b} \longrightarrow \mathcal{A}\mathbf{b}$
tal que: $T_0(A) = A/pA$, $T_1(A) =_p A$ y los otros ceros.

Efectivamente los T_i son funtores ya que para cada A grupo abeliano, ${}_pA$ y pA son subgrupos normales (luego grupo abeliano) por lo tanto A/pA es un grupo abeliano.

Sea $f : A \longrightarrow B$ con A y B grupos abelianos. Veamos cual es el homomorfismo que le asocia, T_0 y T_1

$T_0(f) : T_0(A) \longrightarrow T_0(B)$ es decir $T_0(f) : A/pA \longrightarrow B/pB$ es tal que $T_0(f)(\overline{x}) = \overline{f(x)}$ y

$T_1(f) : T_1(A) \longrightarrow T_1(B)$ es decir $T_1(f) :_p A \longrightarrow_p B$ es tal que $T_1(f)(x) = f(x)$ están bien definidos.

Probemos que son aditivos

Sean $f_1, f_2 : A \longrightarrow B$ homomorfismos de grupos

$T_0(f_1 + f_2)(\overline{x}) = \overline{(f_1 + f_2)(x)} = \overline{f_1(x) + f_2(x)} = (T_0(f_1) + T_0(f_2))(\overline{x})$

$$T_1(f_1+f_2)(x) = (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (T_1(f_1)+T_1(f_2))(x)$$

-Probemos que para cada sucesión exacta corta existe una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

y el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & C \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C & \end{tikzcd}$$

El diagrama conmuta esto es $pf = fp$ y $pg = gp$, luego por el lema de Snake la sucesión

$$\ker p_A \longrightarrow Kerp_B \longrightarrow Kerp_C \xrightarrow{\delta} Cokerp_A \longrightarrow Cokerp_B \longrightarrow Cokerp_C$$

es exacta y como

$$Ker(p_A) = \{a \in A : pa = 0\} =_p A = T_1(A)$$

$$Ker(p_B) = \{b \in B : pb = 0\} =_p B = T_1(B)$$

$$Ker(p_C) = \{c \in C : pc = 0\} =_p C = T_1(C)$$

$$Coker(p_A) = A/Img(p) = A/pA = T_0(A), \;\; Coker(p_B) = B/pB = T_0(B)$$

$$\text{y} \;\; Coker(p_C) = C/pC = T_0(C)$$

tenemos

$$T_1(A) \longrightarrow T_1(B) \longrightarrow T_1(C) \xrightarrow{\delta} T_0(A) \longrightarrow T_0(B) \longrightarrow T_0(C)$$

es exacta

Además por lema de Snake como f es inyectiva, $T_1(A) \longrightarrow T_1(B)$ es inyectiva

y como g es sobre, $T_0(B) \longrightarrow T_0(C)$ es sobre

por lo tanto tenemos que

$$0 \longrightarrow T_1(A) \longrightarrow T_1(B) \longrightarrow T_1(C) \xrightarrow{\delta} T_0(A) \longrightarrow T_0(B) \longrightarrow T_0(C) \longrightarrow 0$$

es exacta con $\delta(c) = f^{-1}pg^{-1}(c), \quad c \in Ker(p_C)$

F un morfismo entre las dos sucesiones exactas cortas

$$F\Big\downarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_A"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_B"] & C \arrow[r] \arrow[d, "F_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (*)$$

veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T_1(C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\overline{F_C}"'] & T_0(A) \arrow[d, "\overline{F_A}"] \\ T_1(C') \arrow[r, "\delta"] & T_0(A') \end{tikzcd}$$

Debemos probar que: $\overline{F_A}\delta = \delta\overline{F_C}$
usando la igualdad de δ debemos probar que

$$\overline{F_A}f^{-1}pg^{-1} = (f')^{-1}p(g')^{-1}\overline{F_C}$$

que es lo mismo $\overline{F_A}f^{-1}g^{-1} = (f')^{-1}(g')^{-1}\overline{F_C}$ como el diagrama (*) conmuta entonces vale. □

Generalización: La misma prueba muestra que si r es cualquier elemento en un anillo R, entonces $T_0(M) = M/rM$ y $T_1(M) = rM$ encajan para formar un δ- funtor homológico de R-módulo a Ab.

Definición 2.1.3. *Sean S y T funtores*

i) Un morfismo $f : S \longrightarrow T$ de $\delta-$ funtores es un sistema de transformaciones naturales $S_n \longrightarrow T_n$ que conmutan con δ es decir:

$$\begin{tikzcd} S_n(C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"] & S_{n-1}(A) \arrow[d, "f"] \\ T_n(C) \arrow[r, "\delta"] & T_{n-1}(A) \end{tikzcd}$$

ii) Un $\delta-$funtor homológico T es universal si, dado cualquier otro $\delta-$funtor homológico S y una transformación natural $f_0 : S_0 \longrightarrow T_0$, existe un único morfismo $\{f_n : S_n \longrightarrow T_n\}$ de $\delta-$funtores homológicos que extiende a f_0

Ejemplo 2.1.4. *Veremos en la sección 2.4 que la homología $H_* : Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{A}$ es un δ-funtor homológico.*

Ejercicio 24 (Ejercicio 2.1.2)**.** *Si F es un funtor exacto entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, demostrar que $T_0 = F$ y $T_n = 0$ si $n \neq 0$ definen un $\delta-$ funtor homológico universal.*

Demostración. Sea F es un funtor exacto entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, consideremos la siguiente colección de funtores aditivos $T_0 = F$ (como F es funtor exacto por definición es aditivo), $T_n = 0$ si $n \neq 0$ y $\delta_n = 0$ morfismo nulo veamos que definen un δ-funtor homológico, en efecto dada $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ en $\mathcal{A}$ por ser F funtor exacto tenemos que $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$ es exacta, luego como $F = T_0$

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow T_1(C) = 0 \longrightarrow T_0(A) \longrightarrow T_0(B) \longrightarrow T_0(C) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta larga en $\mathcal{B}$.
Dado f un morfismo entre sucesiones exactas cortas en $\mathcal{A}$, claramente tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "0(f)"'] & T_0(A') \arrow[d, "T_0(f)"] \\ 0 \arrow[r, "\delta"] & T_0(A) \end{tikzcd}$$

Así $\delta = 0$ es $\delta-$funtor homológico.
Ahora veamos que es universal, sea S un cualquier $\delta-$funtor homológico entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y sea la transformación natural $f_0 : S_0 \longrightarrow T_0$, definimos el morfismo entre $\delta-$funtores homológicos como $\{f_n : S_n \longrightarrow T_n = 0\}$ con $f_n = 0$ □

Observacíón 6. *Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor aditivo, entonces podemos preguntar si existe un δ-funtor T (universal o no) de modo que $T_0 = F$. Claramente la obstrucción es que T_0 debe ser exacto a derecha. Por definición, sin embargo, veremos que existe a lo sumo un(salvo isomorfismo) δ-funtor universal T con $T_0 = F$. Si existe una T universal,los T_n, algunas veces, se denominan funtores satélite a izquierda de F. Esta terminología se debe a la penetrante influencia del libro [CE]. Veremos que los funtores derivados, cuando existen, son de hecho δ- funtores universales. Para esto necesitamos el concepto de resoluciones proyectivas e inyectivas.*

2.2. Resoluciones proyectivas

Un objeto P en la categoría **abeliana** $\mathcal{A}$ es proyectivo si satisface la siguiente propiedad de elevación universal:
Dado un epimorfismo $g : B \longrightarrow C$ y un mapeo $\gamma : P \longrightarrow C$, existe al menos un mapeo $\beta : P \longrightarrow B$ tal que $\gamma = g \circ \beta$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nos ocuparemos principalmente de módulos proyectivos ($\mathcal{A}$ la categoría de R-módulos proyectivos).

Ejercicio 25. *Todo R-módulo libre es proyectivo.*

Demostración. Sea P un modulo libre luego existe S, una base de P, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Para cada $s \in S$, $\gamma(s) \in C$ y como g es sobreyectiva existe un $b_s \in B$ tal que $\gamma(s) = g(b_s)$. Defino $\beta(s) = b_s$ para todo $s \in S$ y extiendo por linealidad a P. Veamos que $\gamma = g\beta$ sobre S, sea $s \in S$ $g\beta(s) = g(b_s) = \gamma(s)$ luego se cumple la igualdad en todo S, por lo tanto son iguales en todo P.

□

Claramente, sumandos directos de módulos libres son también módulos proyectivos. Esta observación es la condición suficiente de la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Un R-módulo es proyectivo si y solo si es sumando directo de un R-módulo libre*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea A un R-modulo proyectivo, consideremos F(A) el R-modulo libre sobre el conjunto subyacente A. y $I_A : A \longrightarrow A$, como A es proyectivo existe al menos un mapeo $i : A \longrightarrow F(A)$ tal que $I_A = \pi \circ i$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[d, "I_A"] & \\ F(A) \arrow[r, "\pi"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como la función I_A es inyectiva entonces i es inyectiva luego $A \simeq i(A) \subset F(A)$. Como $A \simeq i(A)$ entonces A es un sumando directo del modulo libre $F(A)$.

($\Leftarrow$) Probaremos que todo sumando directo A de un R-modulo libre F(A) es proyectivo. Dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como A es un sumando directo de F(A) luego sabemos que existe un mapeo sobreyectivo $\pi : F(A) \longrightarrow A$ y como F(A) es libre entonces es proyectivo luego existe existe al menos un mapeo $\beta' : F(A) \longrightarrow B$ tal que $f \circ \pi = \beta' \circ g$ esto es:

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddl, "\beta'"'] & \\
& A \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como A es sumando directo existe el mapeo inclusión $i : A \longrightarrow F(A)$ tal que si definimos $\beta : A \longrightarrow B$ con $\beta = \beta' \circ i$

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[ddl, "\beta'"'] & \\
& A \arrow[u, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$g \circ \beta|_A = g \circ (\beta' \circ i|_A) = (g \circ \beta') \circ i|_A = f \circ i|_A = f$$

Por lo tanto A es proyectivo $\square$

Ejemplo 2.2.2. *Sobre muchos anillos ($\mathbb{Z}$, campos, anillos de división, ...) un módulo proyectivo es, de hecho, un módulo libre. Mostraremos dos ejemplos donde esto no se cumple:*

i) *Si $R = R_1 \times R_2$, entonces $P = R_1 \times 0$ y $0 \times R_2$ son proyectivos porque son sumandos de R. P no es un R-módulo libre porque para $(0,1) \in R$ $(0,1)P = 0$ luego no tiene base. Esto es cierto, por ejemplo, cuando $R = \mathbb{Z}/6 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$.Claramente $\mathbb{Z}/6$ es $\mathbb{Z}/6$-módulo libre y como $\mathbb{Z}/2$ es sumando de un libre por proposición anterior es proyectivo pero no es un $\mathbb{Z}/6$-módulo libre pues no tiene base, $\overline{2} \in \mathbb{Z}/6$ es tal que $\overline{2}.\overline{1} = \overline{0}$ sin ser nulo cada uno en el conjunto al que pertenecen.*

ii) *Considere el anillo $R = M(F)$ de matrices $n \times n$ sobre un campo F, actuando a izquierda sobre el espacio vectorial columna $V = F^n$. Veamos que V es proyectivo pero no es R-módulo libre:*

-V no es un R-módulo libre (pues dada un vector columna no nulo siempre existe una matriz cuadrada tal que por la columna dé cero sin ser ninguno nulo.

-R es un R-módulo libre (pues tiene una base id_{nxn}).

-Veamos que V es sumando directo de R luego V es proyectivo.

Sea $v_1, \ldots, v_n$ base de V como espacio vectorial. Considero el ideal de R, $I_j = Re_j$, formado por las matrices que tienen todas las columnas *nulas excepto quizás la columna j, siendo ej la matriz idempotente de R que tiene un uno en el lugar j, j un uno. La asignación que envía a Xe_j a la j-ésima columna de Xe_j define un isomorfismo f de R-módulo de I_j en V, luego $V \approx I_j$. Como $R \approx I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ entonces $R \approx V \oplus \cdots \oplus V$ luego V es un módulo proyectivo.*

Observacíón 7. *La categoría $\mathcal{A}$ de grupos abelianos finitos es un ejemplo de categoría abeliana que no tiene objetos proyectivos.*
Como ejemplo veamos $\mathbb{Z}_n$ no es proyectivo. consideremos $Id : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ y el mapeo proyección al cociente de $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ sobreyectivo,como el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_n \arrow[d, "Id"] & \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{Z}_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

no existe un mapeo β de $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{Z}$ tal que $g \circ \beta = Id$ ya que

$$0 = \beta(\overline{0}) = \beta(\overline{n}) = \beta(\sum_{k=1}^{n} \overline{1}) = n\beta(\overline{1})$$

$$0 = n\beta(\overline{1}) \Longrightarrow \beta(\overline{1}) = 0 \Longrightarrow \beta = 0$$

y $\beta = 0$ no satisface $g \circ \beta = Id$.

Es decir $\mathbb{Z}_n$ tiene generador $\{1\}$ pero no es linealmente independiente, luego no es $\mathbb{Z}$-módulo libre.

Decimos que $\mathcal{A}$ tiene **suficientes proyectivos** si para cada objeto A de $\mathcal{A}$ existe un mapeo sobreyectivo $P \longrightarrow A$ con P proyectivo.

Daremos una caracterización de objetos proyectivos en $\mathcal{A}$:

Lema 2.2.3. *M es proyectivo si y solo si $Hom_{\mathcal{A}}(M, -)$ es un funtor exacto. Es decir, si para toda sucesión exacta en $\mathcal{A}$*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

la sucesión de grupos

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M, A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M, C) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. ($\Longrightarrow$)

$$Hom(M, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

es un funtor entre la categoría abeliana $\mathcal{A}$ y la categoría $\mathcal{B}$ de grupos abelianos (ya que como $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana $Hom(M, A)$ es un grupo abeliano para todo A).

Sea M proyectivo y sea la sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Considero

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M,A) \xrightarrow{f\prime} Hom_{\mathcal{A}}(M,B) \xrightarrow{g\prime} Hom_{\mathcal{A}}(M,C) \longrightarrow 0$$

Por proposición 1-6-8 sabemos que :

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M,A) \xrightarrow{f\prime} Hom_{\mathcal{A}}(M,B) \xrightarrow{g\prime} Hom_{\mathcal{A}}(M,C)$$

es exacta para toda sucesión exacta corta, debemos probar que

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M,-) \xrightarrow{f\prime} Hom_{\mathcal{A}}(M,-) \xrightarrow{g\prime} Hom_{\mathcal{A}}(M,-) \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir, g' es sobreyectiva.

Dado $\gamma \in Hom_{\mathcal{A}}(M,C)$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

como M es proyectivo existe $\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(M,B) : g \circ \beta = \gamma \Longrightarrow g'(\beta) = \gamma$ luego g' es sobreyectiva.

($\Longleftarrow$)

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con g sobreyectiva

Como $Hom_{\mathcal{A}}(M,-)$ es un funtor exacto,

$$Hom(M,B) \xrightarrow{g'} Hom(M,C) \longrightarrow 0$$

es exacta, luego g' es sobreyectiva, entonces existe $\beta \in Hom(M,B)$ tal que $\gamma = g'\beta = g \circ \beta$.

Por lo tanto M es proyectivo. $\square$

Proposición 2.2.4. *Si P es proyectivo entonces la siguientes sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow$$

se parte.

Demostración. Dada la siguiente sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow$ consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "id"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

como por hipótesis P es proyectivo existe $\beta : P \longrightarrow B$ tal que $\beta g = id$, luego la sucesión exacta corta se parte. □

Un complejo de cadena P en el cual cada P_n es un proyectivo de $\mathcal{A}$ se denomina **Complejo de cadena de proyectivos**. Este no necesariamente es un objeto proyectivo en Ch

Ejercicio 26 (Ejercicio 2.2.1)**.** *Demostrar que un complejo de cadena P es un objeto proyectivo en Ch si y solo si es un complejo exacto split de proyectivos.*

Demostración. Si P es un objeto proyectivo en la categoría Ch, $P[-1]$ también lo es, luego por proposición anterior la siguiente sucesión exacta de complejos se parte:

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Cone(P) \longrightarrow P[-1] \longrightarrow 0$$

Esto es $Cone(P) \simeq P \oplus P[-1]$, por Ejercicio 19 sabemos que el cono siempre es exacto y se parte, luego P es exacto.
Consideramos el siguiente epimorfismo de cadenas $g : Cone(P) \longrightarrow P[-1]$ de forma que $(P_n, P_{n-1}) \mapsto P_{n-1}$, como la sucesión de complejos se parte tenemos que existe $\phi : P[-1] \longrightarrow Cone(P)$ un mapa de complejos de cadenas, tal que $\phi(p) = (-p, \theta(p))$ con $\theta : P[-1] \longrightarrow P$. El siguiente diagrama conmuta por ser ϕ mapa de cadenas:

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d_n"] & P_n \oplus P_{n+1} \arrow[d, "d"] \\ P_{n-1} \arrow[r, "\phi"] & P_{n-1} \oplus P_n \end{tikzcd}$$

dado p en P_n tenemos

$$\begin{aligned} d(\phi(p)) &= d(-p, \theta(p)) \\ &= (d_n(p), d_{n+1}(\theta(p)) + p) \\ &= (d_n(p)), \theta(-d_n(p)) \\ &= \phi(d_n(p)) \end{aligned}$$

luego nos queda

$$\begin{aligned} d_{n+1}(\theta(p)) + p &= -\theta(d_n(p) \\ p &= -(d_{n+1}(\theta(p)) + \theta(d_n(p)) \end{aligned}$$

así $Id_P = -(d\theta + \theta d)$, luego θ es una contracción de la identidad por Ejercicio 18 P es split exacta.
Finalmente veamos que P es un complejo de proyectivos. Como P es un complejo exacto que se parte, $P_n = B_n \oplus B'_n$ con $d\mid_{B_n} = 0$ y un isomorfismo entre B'_n y B_{n-1}, es suficiente probar que B'_n es proyectivo. Supongamos que hay un mapa $f : B'_n \longrightarrow M_n$ y una sobreyección $g : N_n \longrightarrow M_n$.

$$\begin{tikzcd} & B'_n \arrow[dl, "?"'] \arrow[d, "f"] & \\ N_n \arrow[r, "g"] & M_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definimos los complejos de cadenas M y N con M_n y N_n en el lugar n y todo los demás cero, del mismo modo definimos una epi $N \longrightarrow M$ entre los complejos N y M, ahora definimos el mapa $\gamma : P \longrightarrow M$ de forma que en el lugar n tenemos a la función $0 \oplus f : B_n \oplus B'_n \longrightarrow M_n$ y cero en cualquier otro caso, por ser P un objeto proyectivo de Ch existe un mapa de cadenas β mapa de cadenas,tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d] & \\ N \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Para ver que B'_n es proyectivo, tenemos $\pi : B_n \oplus B'_n \longrightarrow B'_n$ con $\pi(p, q) = q$ definimos $h : B'_n \longrightarrow N_n$ de forma que $h(q) = \beta_n(p, q)$, se cumple que $h(\pi(p, q)) = h(q) = \beta_n(p, q)$ para todo (p, q) en P_n esto es el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & B_n \oplus B'_n \arrow[dl, "\beta_n"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ N_n & B'_n \arrow[l, "h"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La proyectividad de B'_n se deduce de $(0 \oplus f)(P_n) = f(B'_n)$.
Si P es un complejo exacto que se parte podemos escribir $P_n = B_n \oplus B'_n$ con $B_n = \ker d_n$ y $B'_n \simeq B_{n-1}$. Como P_n es proyectivo tenemos que B_n y B'_n son proyectivos, definimos el siguiente complejo;

$$P(n) : \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow B'_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Entonces $P = \bigoplus_n P(n)$. Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con g epi de complejos de cadenas.f induce el morfismo restricción $f(n) = P(n) \longrightarrow Y$ con $f = \sum f(n)$, luego hay un morfismo $h(n) : P(n) \longrightarrow X$ tal que $gh(n) = f(n)$. Finalmente $h = \sum h(n) : P \longrightarrow X$ hace conmutar el diagrama anterior, luego P es proyectivo en la categoría Ch.

□

Ejercicio 27 (Ejercicio 2.2.2)**.** *Use el ejercicio anterior para demostrar que si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces también la categoría $Ch(\mathcal{A})$ de complejos de cadena sobre $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea A un objeto de $Ch(\mathcal{A})$, como por hipótesis la categoría $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos para cada A_n, tenemos que existe un epimorfismo $g_n : P_n \longrightarrow A_n$ con P_n proyectivo. Queremos encontrar un complejo de cadenas P proyectivo y un epimorfismo de cadenas $g : P \longrightarrow A$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P_{n+1} \arrow[d, "g_{n+1}"] & P_n \arrow[d, "g_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "g_{n-1}"] \\ A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] & A_{n-1} \end{tikzcd}$$

Ensamblaremos los P_n para formar el complejo P de proyectivos, construiremos sus diferenciales como sigue, definimos el mapa $\gamma_{n+1} = d_{n+1}g_{n+1}$, además como P_{n+1} es proyectivo existen d^P_{n+1} y d^P_n que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[dl, "d^P_{n+1}"'] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & \\ P_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d^P_n"'] \arrow[dr, "\gamma_n"] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & 0 \\ P_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & A_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

esto es $g_n d^P_{n+1} = \gamma_{n+1} = d_{n+1}g_{n+1}$, así tenemos que

$$\begin{aligned} g_{n-1}d^P_n d^P_{n+1} &= d_n\gamma_{n+1} \\ &= d_n(d_{n+1}g_{n+1}) \\ &= (d_n d_{n+1})g_{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

luego $d_n^P d_{n+1}^P = 0$ ya que g_{n-1} es un epimorfismo. Luego P es un complejo de proyectivos.
Para ver que P es un objeto proyectivo de la categoría $Ch(\mathcal{A})$ usaremos el ejercicio anterior, tomamos la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Cone(P) \longrightarrow P[-1] \longrightarrow 0$$

la cual es exacta y se parte, ya que en cada grado n tenemos que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_n \oplus P_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow 0$$

que es exacta y se parte, ya que cada P_n es proyectivo, se sigue como la demostración anterior y probamos que el complejo P se parte, luego P es un objeto proyectivo de Ch. $\square$

Definición 2.2.5. *Sea M un objeto de $\mathcal{A}$. Una* **Resolución a izquierda de** *M es un complejo P con $P_i = 0$ para $i < 0$ junto con un mapeo $\epsilon : P_O \longrightarrow M$ tal que el complejo aumentado*

$$\xrightarrow{\delta} P_2 \xrightarrow{\delta} P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es exacto.Es una **resolución proyectiva** *si cada P_i es proyectivo.*

Lema 2.2.6. *Todo R-módulo M tiene resolución proyectiva. Mas generalmente, si una categoría abeliana $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces todo objeto M en $\mathcal{A}$ tiene resolución proyectiva.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{A}$ como por hipótesis $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos existe P_0 proyectivo y un epimorfismo $\epsilon_0 : P_0 \longrightarrow M$,defino $M_0 = Ker(\epsilon_0)$. Inductivamente, como $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, dado un módulo M_{n-1}, elegimos un proyectivo P_n y un epimorfismo $\epsilon_n : P_n \longrightarrow M_{n-1}$. Defino $M_n = ker(\epsilon_n)$, y sea δ_n la composición $P_n \longrightarrow M_{n_1} \longrightarrow P_{n-1}$. Como $\delta_n(P_n) = M_{n-1} = ker(\delta_{n-1})$, el complejo de cadena P es una resolución de M.(Ver el diagrama: resolución empalmada) $\square$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & \\
& M_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[rr] & & P_3 \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr] & & P_1 \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "\epsilon_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & M_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 28 (Ejercicio 2.2.3). *Mostrar que si P es un complejo de proyectivos con $P_i = 0$ para $i < 0$ entonces el mapa $\epsilon : P_0 \longrightarrow M$ que da la resolución para M es igual que pensarlo como un mapa de cadenas $\epsilon : P \longrightarrow M$, donde M es considerado como el complejo concentrado de grado cero.*

Demostración. Como P es resolución proyectiva de M tenemos la siguiente sucesión exacta;

$$\xrightarrow{\delta} P_2 \xrightarrow{\delta} P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

Consideramos $f : P \longrightarrow N$, donde N es un complejo de cadenas con $N_n = 0$ si $n \neq 0$ y $N_0 = M$, las diferenciales de N son nulas, además $f_n = 0$ si $n \neq 0$ y $f_0 = \epsilon$. Así tenemos

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & P_0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Claramente $\epsilon \circ \delta_1 = 0$ por ser P resolución proyectiva de M........... □

Teorema 2.2.7 (Comparación). *Sea $\epsilon : P \longrightarrow M$ una resolución proyectiva de M y $f' : M \longrightarrow N$ un mapeo en $\mathcal{A}$. Entonces para toda resolución $\eta : Q \longrightarrow N$ de N existe un mapeo de cadena $f : P \longrightarrow Q$ que levanta a f' en el sentido que $\eta \circ f_0 = f' \circ \epsilon$. El mapeo de cadena f es único salvo equivalencia homotópica de cadena.*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\exists"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\exists"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\exists"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Porismo 2.2.8. *(Resultado de la demostración del teorema de comparación) La prueba dejará en claro que la hipótesis de que sea una resolución proyectiva es demasiado fuerte. Es suficiente recibir un complejo de cadena*

$$\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con P_i proyectivo. Luego, para cada resolución $Q \longrightarrow N$ de N, cada mapeo $M \longrightarrow N$ se eleva a un mapeo $P \longrightarrow Q$, que es único salvo la homotopía en cadena. Esta versión más fuerte del teorema de comparación se usará en la sección 2.7 para construir el producto externo para Tor.

Demostración. Construiremos el f_n y mostraremos su unicidad por inducción sobre n, esto es $P[k]$: existen f_i para $i \leq k$ de modo que $f_{i-1}\delta = \delta f_i$.

Veamos que P[0] es verdadera, partiendo de $f_{-1} = f'$ y que vale la condición $f_i = 0$ para $i < -1$, faltaría determinar f_0 tal que $f_{-1}\delta = \delta f_0$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[d, "\epsilon"] & \\
 & M \arrow[d, "f'"] & \\
Q_0 \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como la fila de abajo es exacta, η es epi y como P_0 es proyectivo existe $f_0 : P_0 \longrightarrow Q_0$ tal que $\eta f_0 = f_1\epsilon$, por lo tanto $P[0]$ es verdadero.

Inductivamente, supongamos que P[n] es verdadero veamos que P[n+1] también es lo es. Hemos construido f_i para $i \leq n$ de modo que $f_{i-1}\delta = \delta f_i$.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para construir f_{n+1} consideramos los n -ciclos de P y Q.

Si $n = -1$, sabemos que $Z_{-1}(P) = M$ y $Z_{-1}(Q) = N$.

Si $n > 0$, el hecho de que $f_{n-1}\delta = \delta f_n$ significa que f_n induce un mapa f'_n de $Z_n(P)$ a $Z_n(Q)$ de la siguiente manera:

$\forall x \in Z_n(P) : f'_n(x) = f_n(x)$ con $f_n(x) \in Z_n(Q)$ pues $\delta(f_n(x)) = (\delta f_n)(x) = (f_{n-1}\delta)(x) = f_{n-1}(0) = 0$.

Por lo tanto, tenemos dos diagramas con filas exactas.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\delta"] & P_{n+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exists"'] & Z_n(P) \arrow[r] \arrow[d, "f'_n"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r, "\delta"] & Z_n(Q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n(P) \arrow[r] \arrow[d, "f'_n"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
0 \arrow[r] & Z_n(Q) \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & Q_{n-1}
\end{tikzcd}$$

La propiedad universal de elevación de P_{n+1} proyectivo produce un mapa f_{n+1} de P_{n+1} a Q_{n+1}, de modo que $\delta f_{n+1} = f'_n\delta = f_n\delta$. Esto termina el paso inductivo y demuestra que el mapa de cadena $f : P \longrightarrow Q$ existe.

Para ver la unicidad de f salvo homotopía en cadena, supongamos que existe $g : P \longrightarrow Q$ es otra elevación de f' y definamos $h = f - g$; construiremos una contracción en cadena $\{s_n : P_n \longrightarrow Q_{n+1}\}$ de h por inducción sobre n. Si $n < 0$, como $P_n = 0$, entonces establecemos $s_n = 0$.

Si $n = 0$, como $\eta h_0 = \epsilon h_{-1} = \epsilon(f_{-1} - g_{-1}) = \epsilon(f' - f') = 0$,entonces el mapeo h_0 envía P_0 a $Z_0(Q) = \delta(Q_1)$. Usamos la propiedad de elevación de P_0 para obtener un mapa, $s_0 : P_0 \longrightarrow Q_1$ tal que $h_0 = \delta s_0 = \delta s_0 + s_{-1}\delta$. Inductivamente, supongamos que existen mapeos $s_i (i < n)$ tal que $h_i = \delta s_i + s_{i-1}\delta$ en particular para$i = n - 1$

$$h_{n-1} = \delta s_{n-1} + s_{n-2}\delta$$

luego

$$\delta s_{n-1} = h_{n-1} - s_{n-2}\delta,$$

consideramos el mapa $h_n - s_{n-1}\delta$ de P_n a Q_n. Calculemos

$$\delta(h_n - s_{n-1}\delta) = \delta h_n - \delta s_{n-1}\delta = \delta h_n - (h_{n-1} - s_{n-2}\delta)\delta$$

$$= \delta h_n - h_{n-1}\delta - s_{n-2}\delta\delta = 0 - 0 = 0$$

Por lo tanto, $h_n - s_{n-1}\delta$ de P_n en $Z_n(Q) = Img(\delta_{n+1})_{n+1}$ La propiedad de elevación de P_n produce el mapa deseado$s_n : P_n \longrightarrow Q_{n+1}$ tal que $\delta s_n = h_n - s_{n-1}\delta$

$$\begin{tikzcd}
 & P_n \arrow[dl, "\exists s_n"'] \arrow[d, "h_n - s_{n-1}\delta"] & \\
Q_{n+1} \arrow[r, "\delta"] & Z_n(Q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

2.3. Resoluciones inyectivas

Un objeto I en la categoría abeliana $\mathcal{A}$ es inyectivo si satisface la siguiente propiedad de elevación universal:
Dado $f : A \longrightarrow B$ mónico y un mapeo $\alpha : A \longrightarrow I$, existe al menos un mapeo $\beta : B \longrightarrow I$ tal que $\alpha = \beta \circ f$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, "\beta"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 29. *Si I es un $R-$ módulo inyectivo entonces toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ se parte.*

Demostración. Dada la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ considero el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_I"'] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\
& I & & &
\end{tikzcd}$$

con f mónico, como I es inyectivo entonces $\exists g : M \longrightarrow I$ tal que $fg = Id_I$. Luego la sucesión exacta se parte.

□

Diremos que $\mathcal{A}$ tiene **suficientes inyectivos** si para cada objeto A en $\mathcal{A}$ existe un mónico de $A \longrightarrow I$ con I inyectivo.

Ejercicio 30. *Si $\{I_\alpha\}$ es una familia de inyectivos, entonces el producto $\prod I_\alpha$ es inyectivo.*

Demostración. Sea $f : N \longrightarrow M$ mónico y $g : N \longrightarrow \prod I_\alpha$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "\exists h?"] \\
& \prod I_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Considero $g_\alpha = p_\alpha g$, donde p_α es la proyección del producto a I_α. Como para todo α, I_α es inyectiva

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_\alpha"'] & M \arrow[dl, "h_\alpha"] \\
& I_\alpha &
\end{tikzcd}$$

existe $h_\alpha : M \longrightarrow I_\alpha$ tal que $g_\alpha = h_\alpha f$ entonces existe $h : M \longrightarrow \prod I_\alpha$, con $p_\alpha h = h_\alpha$ la cual es única por definición de producto, la igualdad $g = hf$ se cumple teniendo en cuenta $g_\alpha = h_\alpha f$ y $h_\alpha = p_\alpha h$. □

La noción de módulo inyectivo era inventado por R. Baer en 1940, mucho antes de que se pensaran los módulos proyectivos.

Criterio 2.3.1. *(de Baer) Un R-modulo a derecha I es inyectivo si y solo si para todo ideal a derecha J de R , todo mapeo $J \longrightarrow I$ se puede extender a un mapeo $R \longrightarrow I$*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Este es un caso especial de la definición de inyectivo donde considero $i : J \longrightarrow R$ inyectiva.
($\Longleftarrow$) Dado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \\ & I & \end{tikzcd}$$

Dado un R-modulo B, un submódulo A y un mapeo $\alpha : A \longrightarrow I$. Sea ξ el conjunto parcialmente ordenado de todas las extensiones $\alpha' : A' \longrightarrow I$ de α para un submódulo intermedio $A \subseteq A' \subseteq B$; siendo el orden parcial tal que $\alpha' \leq \alpha''$ si α'' extiende a α'.Claramente $\xi \neq \varnothing$ ya que $\alpha \in \xi$. Por Lema de Zorn existe un elemento maximal en ξ, al cual llamaremos A_0, junto con $\alpha_0 : A_0 \longrightarrow I$, veamos que $A_0 = B$.

Supongamos que existe un $b \in B - A_0$. El conjunto $J = \{r \in R : br \in A_0\}$ es un ideal a derecha de R. Definimos

$$\begin{aligned} h :& J \longrightarrow I \\ & r \mapsto h(r) = \alpha_0(br) \end{aligned}$$

y por hipótesis existe una extensión $h^* : R \longrightarrow I$

Sea $A_1 = A_0 + < b >$ submódulo de B y definimos $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow I$ por

$$\alpha_1(a + br) = \alpha_0(a) + h^*(1)r, a \in A_0 \;\; y \;\; r \in R$$

Veamos que α_1 está bien definida: Sea $a_0 + br = a_0' + br'$ entonces $b(r - r') = (a_0' - a_0)$ lo que nos dice que $b(r - r') \in A_0$, luego $(r - r') \in J$.

$$\alpha_0(a_0' - a_0) = \alpha_0(b(r - r')) = h(r - r') = h^*(r - r')$$

además

$$\begin{aligned} \alpha_0(a_0') - \alpha_0(a_0) &= h^*(1)r - h^*(1)r' \\ \alpha_0(a_0') + h^*(1)r' &= \alpha_0(a_0) + h^*(1)r \\ \alpha_1(a_0' + br') &= \alpha_1(a_0 + br) \end{aligned}$$

Claramente $\alpha_1(a_0) = \alpha_0(a_0)$ para todo a_0 en A_0, lo que nos dice que α_1 se extiende de α_0 absurdo ya que (A_0, α_0) es maximal, esto provino de suponer que existe b en $B - A_0$. Así $A_0 = B$ y existe $\alpha_0 : B \longrightarrow I$ concluyendo que I es inyectivo.

□

Ejercicio 31. *Sea $R = \mathbb{Z}_m$. Use el criterio de Baer para probar que $\mathbb{Z}_m$ es un $\mathbb{Z}_m$−módulo inyectivo. Entonces probar que $\mathbb{Z}_d$ no es un $\mathbb{Z}_m$−módulo inyectivo cuando d divide a m y algún p primo divide a d y m/d.*

Demostración. Sea I ideal de $\mathbb{Z}_m$, luego tenemos que $I =< \overline{d} >$ tal que $d \mid m$, esto es $m = kd$ para algún entero k ($\frac{m}{d} = k$). Sea $f :< \overline{d} >\longrightarrow \mathbb{Z}_m$ morfismo de $R-$módulos, solo necesitamos saber cuanto vale $f(\overline{d})$. Supongamos que $f(\overline{d}) = \overline{a}$, luego por ser f morfismo de módulos tenemos:

$$\overline{0} = f(\overline{m}) = f(\overline{m.\frac{d}{d}}) = f(\overline{k}.\overline{d}) = \overline{k}f(\overline{d}) = \overline{k}.\overline{a}$$

Así $f(\overline{d}) = \overline{a}$ con $\overline{k}.\overline{a} = \overline{0}$, esto es $\overline{m.k_1} = \overline{k.a}$ luego $m.k_1 = k.a$ entonces $k.d.k_1 = k.a$ cancelando $d.k_1 = a$ esto es $d \mid a$, lo que nos dice $\frac{a}{d}$ es un entero.

Veamos que siempre podemos encontrar $g : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ con $g \mid_{<\overline{d}>}= f$, solo necesitamos conocer $g(\overline{1})$.

$$\overline{a} = f(\overline{d}) = g(\overline{d}) = g(\overline{d}.\overline{1}) = \overline{d}.g(\overline{1}),$$

por lo viste anteriormente $\frac{a}{d}$ es un entero luego definimos $g(\overline{1}) = \overline{\frac{a}{d}}$. Veamos que $g \mid_{<\overline{d}>}= f$, sea $\overline{x} \in< \overline{d} >$ luego $\overline{x} = \overline{k.d}$

$$g(\overline{x}) = g(\overline{k.d}) = g(\overline{k}.\overline{d}) = \overline{k}.g(\overline{d}) = \overline{k}.f(\overline{d}) = f(\overline{k}.\overline{d}) = f(\overline{x}),$$

luego por criterio de Baer $\mathbb{Z}_m$ es un $\mathbb{Z}_m-$módulo inyectivo.

□

Corolario 2.3.2. *Supongamos que $R = \mathbb{Z}$, o mas generalmente R es un dominio de ideales principales.*

Un R-módulo A es inyectivo si y solo si es divisible, es decir, para cada $r \in R, r \neq 0$ y para todo $a \in A, a = br$ para algún $b \in A$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos en primer lugar que A es inyectivo. Sea $a \in A$ y $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Consideremos $< n >$ ideal de Z y el homomorfismo $f_0 :< n >\longrightarrow A$ dado por $f_0(mn) = ma$ por el criterio de Baer f_0 se extiende a $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$. Entonces $a = f_0(n) = f(n) = nf(1)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & < n > \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_0"] & \mathbb{Z} \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

($\Longleftarrow$) (Usaremos el criterio de Baer). Supongamos ahora que A es divisible, sea $I = (n)$ un ideal de $\mathbb{Z}$ y sea $f_0 : (n) \longrightarrow A$ un homomorfismo. Como $n \in \mathbb{Z}$ y $f_0(n) \in A$ y A es divisible existe un $a \in A$ tal que $f_0(n) = na$. Definimos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ mediante $f(m) = ma$, de modo que $f(n) = na = f_0(n)$, luego $f_{|(n)} = f_0$.

□

Ejemplo 2.3.3.

i) *El grupo abeliano $\mathbb{Q}$ es inyectivo. $\mathbb{Q}$ es divisible pues $\forall q \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{Z}$ existe $q/n \in \mathbb{Q}$ tal que $q = n.q/n$, luego $\mathbb{Q}$ es inyectivo.*

ii) *El grupo abeliano $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ es inyectivo.*

iii) *Todo grupo abeliano inyectivo es suma directa de estos. En particular, el grupo abeliano inyectivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$*

Ahora mostraremos que **Ab** tiene suficientes inyectivos.

Sea A un grupo abeliano. Definimos $I(A)$ al producto de copias del grupo inyectivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, indexado por el conjunto $Hom_{\mathbf{Ab}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, por ser producto de inyectivos $I(A)$ es inyectivo. Existe un mapa canónico $e_A : A \longrightarrow I(A)$, notemos que e_A es un morfismo de grupos abelianos. Esta es nuestra inyección deseada de A en un inyectivo.

Ejercicio 32. *Demostrar que e_A es inyectivo. Ayuda: Si $a \in A$, determinar un mapeo $f : a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $f(a) \neq 0$ y extendemos f a $f' : A \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Demostración. Dado $a \in A$, tomamos $< a >= a\mathbb{Z}$ subgrupo de A y sea $p \in \mathbb{Z}$ primo, definimos $f :< a >\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $f(a) = 1/p$, veamos que f es morfismo de grupos; si $b, c \in< a >$ tenemos que $b = n_b a$ y $c = n_c a$ con $n_b, n_c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f(b + c) &= f(n_b a + n_c a) = f((n_b + n_c)a) = (n_b + n_c)f(a) \\ &= (n_b + n_c)1/p = (n_b +)1/p + (n_c)1/p \\ &= f(b) + f(c). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & < a > \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "f'"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

conmuta con $f = f'i$ □

Ejercicio 33. *Probar que un grupo abeliano A es cero si y solo si $Hom_{Ab}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si el grupo abeliano A es cero, el único homomorfismo $f : 0 \longrightarrow \mathcal{Q}/\mathcal{Z}$ es el nulo, luego $Hom_{Ab}(A, \mathcal{Q}/\mathcal{Z}) = 0$.
($\Longleftarrow$) Si $Hom_{Ab}(A, \mathcal{Q}/\mathcal{Z}) = 0$ con $A \neq 0$ entonces por la construcción de la ayuda anterior $\exists f' : A \longrightarrow \mathcal{Q}/\mathcal{Z}$ en $Hom_{Ab}(A, \mathcal{Q}/\mathcal{Z})$ tal que $f' \neq 0$ contradicción. □

Lema 2.3.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un objeto I en una categoría abeliana $\mathcal{A}$:*

i) I es inyectivo en $\mathcal{A}$

ii) I es proyectivo en $\mathcal{A}^{op}$

iii) El funtor contravariante $Hom(-, I)$ es exacta, es decir toda sucesión exacta corta en $\mathcal{A}$ lleva a sucesión exacta en Ab.

Demostración. $i) \Longleftrightarrow ii)$ si I es inyectivo en $\mathcal{A}$, dados $f : A \longrightarrow B$ mónico y $\alpha : A \longrightarrow I$ morfismo existe $\beta : B \longrightarrow I$ con $\alpha = \beta f$ esto es el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

luego por definición de $\mathcal{A}^{op}$; $I \in \mathcal{A}^{op}$ existe $f^{op} : B \longrightarrow A$ epi en $\mathcal{A}^{op}$ del mismo modo $\alpha^{op} : I \longrightarrow A$ es morfismo en $\mathcal{A}^{op}$ y existe $\beta^{op} : I \longrightarrow B$ con $\alpha^{op} = (\beta f)^{op} = f^{op}\beta^{op}$ obteniendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 & A \arrow[l] & B \arrow[l, "f^{op}"'] \\ & I \arrow[u, "\alpha^{op}"] \arrow[ur, "\beta^{op}"'] & \end{tikzcd}$$

luego I es proyectivo en $\mathcal{A}^{op}$. De forma análoga se prueba la vuelta.
$ii) \Longleftrightarrow iii)$ Si I es proyectivo en $\mathcal{A}^{op}$ por **Lema 2.2.3** tenemos $Hom_{\mathcal{A}^{op}}(I, \_)$ es un funtor exacto, por observación anterior tenemos que $Hom_{\mathcal{A}^{op}}(I, \_)$ define un funtor contravariante $Hom_{\mathcal{A}}(\_, I)$, el cual es exacto ya que $Hom_{\mathcal{A}^{op}}(I, \_)$ es exacto. □

Definición 2.3.5. *Sea M un objeto de $\mathcal{A}$. Una resolución a derecha de M es un complejo de cadena I con $I^i = 0$ para $i < 0$ y un mapa $M \longrightarrow I^0$ tal que el complejo aumentado*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\delta} I^1 \xrightarrow{\delta} I^2 \longrightarrow \ldots$$

es exacta. Esto es lo mismo que un mapa de cocadenas $M \longrightarrow I$, donde M se considera como un complejo concentrado en grado 0. Se llama resolución inyectiva si cada I^i es inyectivo.

Lema 2.3.6. *Si una categoría abeliana $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos entonces todo objeto en $\mathcal{A}$ tiene resolución inyectiva.*

Teorema 2.3.7. *(Comparación) Dada $N \longrightarrow I$ una resolución inyectiva de N y $f' : M \longrightarrow N$ un mapa en $\mathcal{A}$. Entonces para toda resolución $M \longrightarrow E$*

existe un mapa de cocadena $F : E \longrightarrow I$ que levanta a f'. El mapa f es única sobre cadena homotópica equivalente

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & E^0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exists"'] & E^1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exists"'] & E^2 \arrow[r] \arrow[d, "\exists"'] & ... \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "\delta"] & I^1 \arrow[r, "\delta"] & I^2 \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

Veremos ahora que la categoría de $R-$módulos tiene suficientes inyectivos sobre cualquier anillo R.

Proposición 2.3.8. *Si A es un grupo abeliano y B es un $R-$módulo a izquierda, entonces $Hom_{Ab}(B, A)$ es un $R-$módulo a derecha vía la regla*

$$\begin{aligned} . : Hom_{Ab}(B, A) \times R &\longrightarrow Hom_{Ab}(B, A) \\ (f, r) &\longmapsto fr : B \longrightarrow A \end{aligned}$$

con $b \mapsto f(rb)$.

Demostración. $Hom_{Ab}(B, A)$ es un grupo abeliano, sean $f, g \in Hom_{Ab}(B, A)$ y $r \in R$, veamos que $(f + g).r = f.r + g.r$. Dado $b \in B$

$$(f + g)r(b) = (f + g)(rb) = f(rb) + g(rb) = fr(b) + gr(b)$$

de forma análoga se prueban las otras propiedades. □

Lema 2.3.9. *Para todo R-modulo a derecha M, el mapeo natural*

$$\begin{aligned} \tau : Hom_{Ab}(M, A) &\longrightarrow Hom_{R-mod}(M, Hom_{Ab}(R, A)) \\ f &\longmapsto \tau(f) : M \longrightarrow Hom_{Ab}(R, A) \end{aligned}$$

es un isomorfismo, donde $\tau(f)(m)$ es el mapeo que $r \longmapsto f(mr)$.

Es decir que para cada $m \in M$

$$\tau(f)(m) : R \longrightarrow A \qquad \text{tal que} \qquad \forall r \in R, \tau(f)(m)(r) = f(mr)$$

Definición 2.3.10. *Un par de funtores $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ son adjuntos si existe una biyección natural para todo A en $\mathcal{A}$ y B en $\mathcal{B}$:*

$$\tau = \tau_{AB} : Hom_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{A}}(A, R(B))$$

Aquí la palabra natural significa que para todo $f : A \longrightarrow A' \in \mathcal{A}$ y $g : B \longrightarrow B' \in \mathcal{B}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{B}}(L(A'), B) \arrow[r, "Lf^*"] \arrow[d, "\tau"] & Hom_{\mathcal{B}}(L(A), B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau"] & Hom_{\mathcal{B}}(L(A), B') \arrow[d, "\tau"] \\
Hom_{\mathcal{A}}(A', R(B)) \arrow[r, "f^*"] & Hom_{\mathcal{A}}(A, R(B)) \arrow[r, "Rg_*"] & Hom_{\mathcal{A}}(A, R(B'))
\end{tikzcd}$$

Llamaremos a L el **adjunto** a izquierda y a R el **adjunto** a derecha de este par. El lema anterior enuncia que el funtor forgetful(olvidadizo)de mod-R a Ab tiene $Hom_{Ab}(R,-)$como su adjunto a derecha.

$$\mathcal{A} : \textit{categoría de } R-mod, \qquad \mathcal{B} : \textit{categoría abeliana}$$

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} : L(A) = A \qquad T = Hom(R,-) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

por lema anterior para todo R-módulo M y $B \in \mathcal{B}$ el mapeo natural

$$\tau = \tau_{MB} : Hom_{\mathcal{B}}(M,B) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{A}}(M, Hom(R,B))$$

es decir

$$\tau = \tau_{L(M)B} : Hom_{\mathcal{B}}(M,B) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{A}}(M, T(B))$$

Proposición 2.3.11. *Si un funtor aditivo $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ es adjunto a derecha de un funtor exacto $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y I es un objeto inyectivo de $\mathcal{B}$, entonces $R(I)$ es un objeto inyectivo de $\mathcal{A}$. (Decimos que R preserva inyectivos).*

Dualmente, si un funtor aditivo $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es adjunto a izquierda de un funtor exacto $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ y P es un objeto proyectivo de $\mathcal{A}$, entonces $L(P)$ es un objeto proyectivo de $\mathcal{B}$. (Decimos que L preserva proyectivos).

Demostración. Usaremos el Lema 3-4 para demostrar, esto es probaremos que $Hom_{\mathcal{A}}(-, R(I))$ es exacta. Dada una inyección $f : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$

-Como el funtor $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ es adjunto a derecha de un funtor $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ tenemos que:

$$Hom_{\mathcal{B}}(L(A'), I) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{A}}(A', R(I))$$

y

$$Hom_{\mathcal{B}}(L(A), I) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{A}}(A, R(I))$$

-Considero la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} A'$$

por ser f inyectiva la sucesión es exacta a izquierda, como L y $Hom_(-, I)$ son funtores exactos a izquierda

$$0 \longrightarrow L(A) \xrightarrow{Lf} L(A')$$

es exacta a izquierda por lo tanto Lf es inyectiva,

$$Hom_{\mathcal{B}}(A, R(I)) \xrightarrow{f^*} Hom_{\mathcal{B}}(A', R(I))$$

y

$$Hom_{\mathcal{B}}(L(A), I) \xrightarrow{Lf^*} Hom_{\mathcal{B}}(L(A'), I)$$

en definitiva tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{B}}(L(A), I) \arrow[r, "Lf^*"] \arrow[d, "\cong"] & Hom_{\mathcal{B}}(L(A'), I) \arrow[d, "\cong"] \\ Hom_{\mathcal{A}}(A, R(I)) \arrow[r, "f^*"] & Hom_{\mathcal{A}}(A', R(I)) \end{tikzcd}$$

Veamos que Lf^* es sobreyectiva, sea $g : A \longrightarrow R(I)$ luego existe $g' : L(A) \longrightarrow L(R(I))$ es decir existe $g' : L(A) \longrightarrow I$ y como $Lf : L(A) \longrightarrow L(A')$ inyectiva con I inyectivo entonces $\exists \alpha : L(A') \longrightarrow I$ por lo tanto $\exists \alpha' : A' \longrightarrow R(I)$ Por lo tanto, el mapa inferior / * está en, lo que demuestra que R (I) es un objeto inyectivo en A. □

Corolario 2.3.12. *Si I es un grupo abeliano inyectivo, entonces $Hom_{Ab}(R, I)$ es un R-modulo inyectivo.*

2.4. Funtores derivados a izquierda

Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor exacto a derecha entre dos categorías abelianas. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, podemos construir los **funtores derivados a izquierda** $L_iF(i \geq 0)$ de F como sigue. Si A es un objeto de $\mathcal{A}$, elige (de una vez por todas)una resolución proyectiva $P \longrightarrow A$ y defino

$$L_iF(A) = H_i(F(P)).$$

- Note que como P es una resolución proyectiva de A entonces

  $$\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

  es exacta y como F es un funtor exacto

  $$F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0$$

  es exacta

- para $i = 0$

  $$H_0(F(P)) = Ker(\delta_0^*)/Im(\delta_1^*) = F(P_0)/Im(\delta_1^*)$$

  Si miramos en la resolución proyectiva de A

  $$F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0$$

al ser exacta $Im(\delta_1^*) = \ker(\epsilon)$ y como ϵ es sobre tenemos

$$H_0(F(P)) = F(P_0)/Im(\delta_1^*) = F(P_0)/\ker(\epsilon) \backsimeq F(A)$$

por lo tanto

$$H_0(F(P)) \backsimeq F(A)$$

El objetivo de esta sección es demostrar que L_*F forma un δ-funtor homológico universal.

Lema 2.4.1. *Los objetos $L_iF(A)$ de $\mathcal{B}$ están bien definidos salvo isomorfismo natural. Es decir, si $Q \longrightarrow A$ es una segunda resolución proyectiva, entonces existe un isomorfismo canónico*

$$L_iF(A) = H_i(F(P)) \xrightarrow{\backsimeq} H_i(F(Q))$$

En particular, una elección diferente de las resoluciones proyectivas produciría nuevos funtores $\hat{L}_iF$, que son naturalmente isomorfos a los funtores $L_i(F)$.

Demostración. Usando el teorema de comparación, sea $P \longrightarrow A$ una resolución proyectiva de A y sea $Id_A : A \longrightarrow A$ entonces para cualquier otra resolución proyectiva $Q \longrightarrow A$ de A existe un mapeo $f : P \longrightarrow Q$ que levanta al mapeo identidad, produciendo un mapeo f_* de $H_i(F(P))$ a $H_i(F(Q))$.

Cualquier otro mapa de cadena de este tipo $f' : P \longrightarrow Q$ es una cadena homotópica para f, entonces $f_* = f'_*$. Por lo tanto, el mapa f_* es canónico. Del mismo modo, existe un mapa de cadena $g : Q \longrightarrow P$ que levanta Id_A y un mapa g_*. Como gf e Id_P son mapas de cadena $P \longrightarrow P$ que levantan la Id_A, tenemos

$$g_*f_* = (gf)_* = (Id_p)_* = \textbf{mapa de identidad en } H_iF(P).$$

Del mismo modo, fg e Id_Q levantan Id_A, entonces f_*g_* es la identidad. Esto prueba que f_* y g_* son isomorfismos. □

Corolario 2.4.2. *Si P es proyectivo, entonces $L_iF(P) = 0$ para $i \neq 0$*

Demostración. Para calcular los $L_iF(P) = 0$ para $i \neq 0$ necesito una resolución proyectiva de P. Considere el complejo

$$\ldots P_2 = 0 \longrightarrow P_1 = 0 \longrightarrow P_0 = P \longrightarrow 0$$

con el mapeo identidad $\epsilon = Id_P$, estos hacen que la sucesión

$$\ldots \longrightarrow P_2 = 0 \longrightarrow P_1 = 0 \longrightarrow P_0 = P \xrightarrow{Id_P} P \longrightarrow 0$$

sea exacta luego es una resolución proyectiva de P, claramente tenemos $L_iF(P) = 0$ para $i \neq 0$. □

Definición 2.4.3. *Un objeto Q es llamado* **F-acíclico** *si $L_iF(Q) = 0$ para todo $i \neq 0$, es decir, si los funtores derivados más altos de F desaparecen en Q.*

Por corolario anterior si P es proyectivo es $F-$acíclico, para todo funtor exacto a derecha F. Existen otros F-acíclicos, por ejemplo, los módulos planos son acíclicos para productos tensoriales.

Una resolución a izquierda $Q \longrightarrow A$ es **F-acíclica** si cada Q_i es F-acíclico.

Más adelante veremos que también puede calcular funtores derivados a izquierda de resoluciones F-acíclicas, es decir, que $L_i(A) \backsimeq Hi(F(Q))$ para cualquier resolución F-acíclica Q de A.

Lema 2.4.4. *Si $f : A \longrightarrow A'$ es un mapeo en $\mathcal{A}$, para cada i existe un mapeo natural*

$$L_iF(f) : L_iF(A') \longrightarrow L_iF(A)$$

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow A'$ es un mapeo en $\mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos existen $P' \longrightarrow A'$ y $P \longrightarrow A$ las resoluciones proyectivas de A y A' respectivamente. El teorema de comparación produce una elevación de f a un mapa de cadena $\tilde{f}$ de P' a P, por lo tanto existe, un mapeo $\tilde{f}_*$ de $H_iF(P')$ a $H_iF(P)$. Cualquier otra elevación es una cadena homotópica a $\tilde{f}_*$, así el mapeo $\tilde{f}_*$ es independiente de la elección de $\tilde{f}$. El mapeo $L_iF(f)$ es $\tilde{f}_*$. □

Ejercicio 34 (Ejercicio 2.4.1). *Demostrar que $L_0F(f) = F(f)$ bajo la identificación $L_0F(A) \simeq F(A)$*

Demostración. Por ser F un funtor entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, tenemos que para $f : A' \longrightarrow A$ morfismo en $\mathcal{A}$, $F(f) : F(A') \longrightarrow F(A)$ es un morfismo en $\mathcal{B}$. Por Lema anterior existe $L_0F(f) : H_0F(P') \longrightarrow H_0F(P)$ y como $H_0F(P) = L_0F(A) \simeq F(A)$ y $H_0F(P') = L_0F(A') \simeq F(A')$ tenemos que $L_0F(f) : L_0F(A') \longrightarrow L_0F(A)$ finalmente:

$$L_0F(f)(A) = L_0F(f(A)) = L_0F(A') \backsimeq F(A') = F(f(A))$$

Luego

$$L_0F(f) = F(f)$$

□

Teorema 2.4.5. *Cada L_iF es un funtor aditivo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.*

Demostración.

-$\forall A \in \mathcal{A}, L_iF(A) = H_i(F(P)) \in \mathcal{B}$

-$\forall f : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$ por lema anterior existe un mapeo natural $L_iF(f) : L_iF(A') \longrightarrow L_iF(A)$

-Considero $f = Id_A : A \longrightarrow A$, aplicando el ejercicio anterior $L_iF(Id_A) = Id_A$.

-Dado los mapeos

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$$

y mapas de cadena $\tilde{f}$,$\tilde{g}$que levantan a f y g, la composición $\tilde{g}\tilde{f}$ levanta a gf. Por lo tanto, $g_* f_* = (gf)_*$.

Por todo esto L_iF es un funtor de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$

-Veamos que es aditivo

Si $f_i : A' \longrightarrow A$ son dos mapas que levantan $\tilde{f}_i$ la suma $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ levanta a $f_1 + f_2$. Por lo tanto $f_{1_*} + f_{2_*} = (f_1 + f_2)_*$, lo que demuestra que L_iF es aditivo. □

Ejercicio 35 (Ejercicio 2.4.2)**.** *(Preservando los funtores derivados) Si $U : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor exacto,demostrar que*

$$U(L_iF) \cong L_i(UF)$$

Demostración. Sea F funtor exacto a derecha entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y U funtor exacto entre las categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Dado A un objeto de $\mathcal{A}$ y

$$\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de A, al siguiente complejo en $\mathcal{B}$

$$\ldots \longrightarrow F(P_2) \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \xrightarrow{F(\epsilon)} F(A) \longrightarrow 0$$

le calculamos los espacios de homología y obtenemos $H_iF(P) = L_iF(A)$ los cuales son objetos de la categoría $\mathcal{B}$, finalmente aplicamos el funtor U y tenemos $U(H_iF(P)) = U(L_iF(A))$ objetos de $\mathcal{C}$.
Veamos que UF es un funtor exacto a derecha, sea $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en A, luego como F es exacto a derecha tenemos que $F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathcal{B}$, finalmente como U es exacto tenemos que $UF(A) \longrightarrow UF(B) \longrightarrow UF(C) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathcal{C}$, lo que nos dice que UF es un funtor exacto a derecha entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$, realizando un proceso similar al anterior calculamos los objetos $H_i(UF(P)) = L_i(UF(A))$.
Lo que nos resta por ver es que el funtor exacto U conmuta con la homología H, esto es dado un complejo de cadenas $B.$ en $\mathcal{B}$, se cumple $U(HB) = H(UB)$. Como U un funtor es exacto tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "U"'] & Z_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "U"'] & H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "U"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & UB_n(B) \arrow[r] & UZ_n(B) \arrow[r] & UH_n(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego $U(HB) = H(UB)$. □

Funtores olvidadizos como R-mod $\longrightarrow Ab$ son a menudo exactos, y a menudo es más fácil calcular los funtores derivados de UF debido a la ausencia de restricciones desordenadas.

Teorema 2.4.6. *Los funtores derivados L_*F forman un δ-funtor.*

Teorema 2.4.7. *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces para todo funtor exacto $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, los funtores derivados L_nF forman un δ-funtor universal.*

Demostración. Por teorema 2.4.6 los funtores derivados L_nF forman un δ-funtor homológico, falta probar que es universal.

Consideremos T_* un δ-funtor homológico y $\varphi_0 : T_0 \longrightarrow L_0F$ una transformación natural. Debemos probar que φ_0 admite una única extensión a un morfismo $\varphi : T_* \longrightarrow L_*F$ de δ-funtores. Supongamos inductivamente que $\varphi_i : T_i \longrightarrow L_iF$ están ya definidas para $0 \leq i < n$, y conmutan con las δ_i's apropiados. Dado $A \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, existe P proyectivo tal que $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ sucesión exacta , K existe pues puedo considerar el kernel de $P \longrightarrow A$.

Por corolario 2.4.2 como P es proyectivo $L_iF(P) = 0$ para todo $i \neq 0$, en particular para $i = n$, esto produce un diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & T_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] & T_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(P) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
0 \arrow[r] & L_nF(A) \arrow[r, "\delta_n"] & L_{n-1}F(K) \arrow[r] & L_{n-1}F(P)
\end{tikzcd}$$

A partir de este diagrama podemos definir un único mapa $\varphi_n(A)$ de $T_n(A)$ a $L_nF(A)$, que conmuta con las δ's, de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
{\color{red}x} \in T_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] & {\color{red}y} \in T_{n-1}(K) \arrow[r] & {\color{red}0} \in T_{n-1}(P) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
 & & {\color{red}0} \in L_{n-1}F(P)
\end{tikzcd}$$

como el diagrama conmuta entonces

$$\begin{tikzcd}
{\color{red}x} \in T_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] & {\color{red}y} \in T_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & {\color{red}0} \in T_{n-1}(P) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
 & {\color{red}z} \in L_{n-1}F(K) \arrow[r] & {\color{red}0} \in L_{n-1}F(P)
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $z \in Kernel$ de $L_{n-1}F(K) \longrightarrow L_nF(P)$

y como la sucesión es exacta $z \in Img$ de $L_nF(A) \longrightarrow L_{n-1}F(K)$ luego existe un $t \in L_nF(A)$ que por δ_n va a z y es único pues esta función es inyectiva. Defino entonces

$$\varphi_n : T_n(A) \longrightarrow L_nF(A)$$

$$x \longmapsto t$$

única que hace que el diagrama conmute.

Debemos demostrar que φ_n es una transformación natural que conmuta con todo los δ_n's para toda sucesión exacta corta.

Para ver que φ_n es una transformación natural, consideremos

$$f : A' \longrightarrow A$$

debemos probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "T_n(f)"'] & L_nF(A') \arrow[d, "LnF(f)"] \\
T_n(A) \arrow[r, "\varphi_n"] & L_nF(A)
\end{tikzcd}$$

para esto, sea una sucesión exacta $0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow A' \longrightarrow 0$ con P' proyectivo, luego podemos elevar f a $g : P' \longrightarrow P$ lo que produce el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[d] \arrow[ddl, "g"'] & \\
& A' \arrow[d, "f"] & \\
P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

por lo tanto tenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En forma análoga a la construcción de φ_n, g induce un mapa $h : K' \longrightarrow K$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para ver que φ_n conmuta con f construyamos el siguiente diagrama usando el diagrama anterior y el hecho que T y L_nF son δ- funtores entonces tenemos que

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "T_n(f)"'] & T_{n-1}(K') \arrow[d, "T_{n-1}(h)"] \\
T_n(A) \arrow[r, "\delta"] & T_{n-1}(K)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
L_nF(A) \arrow[r, "\delta"] & L_{n-1}F(K) \\
L_nF(A') \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "L_nF(f)"] & L_{n-1}F(K') \arrow[u, "L_{n-1}F(h)"']
\end{tikzcd}$$

que lo podemos ubicar como sigue

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[rrr, "T_n(f)"] \arrow[dr, "\delta"] & & & T_n(A) \arrow[dl, "\delta"'] \\
& T_{n-1}(K') \arrow[r, "T_{n-1}(h)"] & T_{n-1}(K) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& L_{n-1}F(K') \arrow[r, "L_{n-1}F(h)"] & L_{n-1}F(K) & \\
L_nF(A') \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rrr, "L_nF(f)"'] & & & L_nF(A) \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta el primer diagrama, de esta demostración, obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[rrr, "T_n(f)", "*1"'] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ddd, "\varphi_n(A')"', "*3"] & & & T_n(A) \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[ddd, "\varphi_n(A)", "*5"'] \\
& T_{n-1}(K') \arrow[r, "T_{n-1}(h)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(K) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \\
& L_{n-1}F(K') \arrow[r, "*4", "L_{n-1}F(h)"'] & L_{n-1}F(K) & \\
L_nF(A') \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rrr, "*2", "L_nF(f)"'] & & & L_nF(A) \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Realizando el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
\delta \circ L_nF(f) \circ \varphi_n(A') &= (\delta \circ L_nF(f))\varphi_n(A') \underset{*2}{=} (L_{n-1}F(h) \circ \delta) \circ \varphi_n(A') \\
&= L_{n-1}F(h) \circ (\delta \circ \varphi_n)(A') \underset{*3}{=} L_{n-1}F(h) \circ (\varphi_{n-1} \circ \delta)(A') \\
&= (L_{n-1}F(h) \circ \varphi_{n-1}) \circ \delta(A') \underset{*4}{=} (\varphi_{n-1} \circ T_{n-1}(h)) \circ \delta(A') \\
&= \varphi_{n-1} \circ (T_{n-1}(h) \circ \delta)(A') \underset{*1}{=} \varphi_{n-1} \circ (\delta \circ T_{n-1}(f))(A') \\
&= (\varphi_{n-1} \circ \delta) \circ T_{n-1}(f)(A') \underset{*5}{=} (\delta \circ \varphi_n(A)) \circ T_{n-1}(f)(A') \\
&= \delta \circ \varphi_n(A) \circ T_{n-1}(f)(A')
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\delta \circ L_nF(f) \circ \varphi_n(A') = \delta \circ \varphi_n(A) \circ T_{n-1}(f)(A')$$

y como $\delta : L_nF(A) \longrightarrow L_{n-1}F(K)$ es mónico ($0 \longrightarrow L_nF(A) \longrightarrow L_{n-1}F(K) \longrightarrow L_nF(P)$) podemos cancelarla y conseguimos

$$L_nF(f) \circ \varphi_n(A') = \varphi_n(A) \circ T_{n-1}(f)$$

Por lo tanto el rectángulo exterior conmuta, es decir φ_n es una transformación natural. Este argumento (con $A = A'$ y $f = id_A$)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d, "id_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

también muestra que $\varphi_n(A)$ no depende de la elección de P.

Finalmente, necesitamos verificar que $\{\varphi_n\}$ es un sistema de transformaciones naturales, esto es que φ_n conmuta con δ_n, para cada n .

Dado una sucesión exacta $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$, consideremos la siguiente sucesión exacta corta $0 \longrightarrow K'' \longrightarrow P'' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ con P'' proyectivo, podemos construir mapas h y g que hacen que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "id_{A''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmute. Esto produce, como ya lo hicimos, un diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_n(A") \arrow[rrr, "T_n(id_{A"})"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ddd, "\varphi_n(A")"'] & & & T_n(A") \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[ddd, "\varphi_n(A")"] \\
& T_{n-1}(K") \arrow[r, "T_{n-1}(h)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \\
& L_{n-1}F(K") \arrow[r, "*4", "L_{n-1}F(h)"'] & L_{n-1}F(A') & \\
L_nF(A") \arrow[rrr, "L_nF(id_{A"})"'] \arrow[ur, "\delta"] & & & L_nF(A") \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

que conmuta. Teniendo en cuenta que $T_n(id_{A"}) = id_{T_n(A")}$ y $L_nF(id_{A"}) = id_{L_nF(A")})$, por ser funtores, se ve claramente que $\delta_n : T_n(A") \longrightarrow T_{n-1}(A')$ es $T_{n-1}(h)\delta$ con este último $\delta : T_n(A") \longrightarrow T_{n-1}(K")$ y lo mismo para L_nF, nos queda el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_n(A'') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & T_{n-1}(K'') \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
L_nF(A'') \arrow[r, "\delta"] & L_{n-1}F(K) \arrow[r, "LF(h)"] & L_{n-1}F(A')
\end{tikzcd}$$

conmutativo, esto implica la relación de conmutatividad deseada.

□

Ejercicio 36 (Ejercicio 2.4.4)**.** *Demostrar que la homología*

$$H_* : Ch_{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \text{ y la cohomología } H_* : Ch_{\leq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

son $\delta-$ funtores universales.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva, por ejemplo 1.2.3 (desarrollado), $H_* : Ch_{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ es un $\delta-$funtor homológico. Probemos que es universal.

Consideremos T_* un δ-funtor homológico y $\varphi_0 : T_0 \longrightarrow H_0$ una transformación natural. Debemos probar que φ_0 admite una única extensión a un morfismo $\varphi : T_* \longrightarrow H_*$ de δ-funtores. Supongamos inductivamente que $\varphi_i : T_i \longrightarrow H_i$ están ya definidas para $0 \leq i < n$, y conmutan con las δ_i's apropiados. Dado $A \in \mathcal{A}$, consideremos $cone(A)$, por ejercicio 1.5.1, es split exacta luego, como es split, existe la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A[-1] \longrightarrow cone(A) \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

con $A[-1]$ la traslación de A. y como es exacta, $Hn(cone(A)) = 0$, usando que T_* y H_* son $\delta-$funtores tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & T_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] & T_{n-1}(A[-1]) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(cone(A)) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
0 \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(A[-1]) \arrow[r] & H_{n-1}(cone(A))
\end{tikzcd}$$

A partir de este diagrama podemos definir un único mapa $\varphi_n(A)$ de $T_n(A)$ a $H_n(A)$, que conmuta con las δ's, de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
x \in T_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] & y \in T_{n-1}(A[-1]) \arrow[r] & 0 \in T_{n-1}(cone(A)) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
 & & 0 \in H_{n-1}(cone(A))
\end{tikzcd}$$

como el diagrama conmuta entonces

$$\begin{tikzcd}
x \in T_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] & y \in T_{n-1}(A[-1]) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & 0 \in T_{n-1}(cone(A)) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
 & z \in H_{n-1}(A[-1]) \arrow[r] & 0 \in H_{n-1}(cone(A))
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $z \in Kernel$ de $H_{n-1}(A[-1]) \longrightarrow H_n(cone(A))$ y como la sucesión es exacta $z \in Img$ de $H_n(A) \longrightarrow H_{n-1}(A[-1])$ luego existe un $t \in H_n(A)$ que por δ_n va a z y es único pues esta función es mónica. Defino entonces

$$\varphi_n : T_n(A) \longrightarrow H_n(A)$$

$$x \longmapsto t$$

única que hace que el diagrama conmute.

Debemos demostrar que φ_n es una transformación natural que conmuta con todo los δ_n's para toda sucesión exacta corta.

Para ver que φ_n es una transformación natural, consideremos

$$f : A' \longrightarrow A$$

debemos probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "T_n(f)"'] & H_n(A') \arrow[d, "Hn(f)"] \\
T_n(A) \arrow[r, "\varphi_n"] & H_n(A)
\end{tikzcd}$$

para esto, sea una sucesión exacta

$0 \longrightarrow A'[-1] \longrightarrow cone(A') \longrightarrow A' \longrightarrow 0$, luego podemos elevar f a $f \oplus f : cone(A') \longrightarrow cone(A)$ y $f : A'[-1] \longrightarrow A[-1]$ logrando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'[-1] \arrow[r] \arrow[d, "f"] & cone(A') \arrow[r] \arrow[d, "f\oplus f"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A[-1] \arrow[r] & cone(A) \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para ver que φ_n conmuta con f construyamos el siguiente diagrama usando el diagrama anterior y el hecho que T y H_n son δ- funtores entonces tenemos que

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "T_n(f)"'] & T_{n-1}(A'[-1]) \arrow[d, "T_{n-1}(f)"] \\
T_n(A) \arrow[r, "\delta"] & T_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
H_n(A) \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1}(A[-1]) \\
H_n(A') \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A'[-1]) \arrow[u, "H_{n-1}(f)"']
\end{tikzcd}$$

que lo podemos ubicar como sigue

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[rrr, "T_n(f)"] \arrow[dr, "\delta"] & & & T_n(A) \arrow[dl, "\delta"'] \\
& T_{n-1}(A'[-1]) \arrow[r, "T_{n-1}(f)"] & T_{n-1}(A[-1]) & \\
& H_{n-1}(A'[-1]) \arrow[r, "H_{n-1}(f)"] & H_{n-1}(A[-1]) & \\
H_n(A') \arrow[rrr, "H_n(f)"'] \arrow[ur, "\delta"] & & & H_n(A) \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta el primer diagrama, de esta demostración, obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[rrr, "T_n(f)", "*1"'] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ddd, "\varphi_n(A')"', "*3"] & & & T_n(A) \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[ddd, "*5"', "\varphi_n(A)"] \\
& T_{n-1}(A'[-1]) \arrow[r, "T_{n-1}(f)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(A[-1]) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \\
& H_{n-1}(A'[-1]) \arrow[r, "*4", "H_{n-1}(f)"'] & H_{n-1}(A[-1]) & \\
H_n(A') \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rrr, "*2", "H_n(f)"'] & & & H_n(A) \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Realizando el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
\delta \circ H_n(f) \circ \varphi_n(A') &= (\delta \circ H_n(f))\varphi_n(A') \underset{*2}{=} (H_{n-1}(f) \circ \delta) \circ \varphi_n(A') \\
&= H_{n-1}(f) \circ (\delta \circ \varphi_n)(A') \underset{*3}{=} H_{n-1}(f) \circ (\varphi_{n-1} \circ \delta)(A') \\
&= (H_{n-1}(h) \circ \varphi_{n-1}) \circ \delta(A') \underset{*4}{=} (\varphi_{n-1} \circ T_{n-1}(f)) \circ \delta(A') \\
&= \varphi_{n-1} \circ (T_{n-1}(f) \circ \delta)(A') \underset{*1}{=} \varphi_{n-1} \circ (\delta \circ T_{n-1}(f))(A') \\
&= (\varphi_{n-1} \circ \delta) \circ T_{n-1}(f)(A') \underset{*5}{=} (\delta \circ \varphi_n(A)) \circ T_{n-1}(f)(A') \\
&= \delta \circ \varphi_n(A) \circ T_{n-1}(f)(A')
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\delta \circ H_n(f) \circ \varphi_n(A') = \delta \circ \varphi_n(A) \circ T_{n-1}(f)(A')$$

y como $\delta : H_n(A) \longrightarrow H_{n-1}(A[-1])$ es mónico
$(0 \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_{n-1}(A[-1]) \longrightarrow H_n(cone(A)))$
podemos cancelarla y conseguimos

$$H_n(f) \circ \varphi_n(A') = \varphi_n(A) \circ T_{n-1}(f)$$

Por lo tanto el rectángulo exterior conmuta, es decir φ_n es una transformación natural.

Finalmente, necesitamos verificar que $\{\varphi_n\}$ es un sistema de transformaciones naturales, esto es que φ_n conmuta con δ_n, para cada n .

Dado una sucesión exacta $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A" \longrightarrow 0$, consideremos la siguiente sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A"[-1] \longrightarrow cone(A") \longrightarrow A" \longrightarrow 0$, podemos construir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A"[-1] \arrow[r] \arrow[d, "h"] & cone(A") \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A" \arrow[r] \arrow[d, "id_{A"}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A" \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmutativo, (como ya lo hicimos). Esto produce, un diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_n(A") \arrow[rrr, "T_n(id_{A"})"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ddd, "\varphi_n(A")"'] & & & T_n(A") \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[ddd, "\varphi_n(A")"] \\
& T_{n-1}(A"[-1]) \arrow[r, "T_{n-1}(h)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \\
& H_{n-1}(A"[-1]) \arrow[r, "*4", "H_{n-1}(h)"'] & H_{n-1}(A') & \\
H_n(A") \arrow[rrr, "H_n(id_{A"})"'] \arrow[ur, "\delta"] & & & H_n(A") \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

que conmuta. Teniendo en cuenta que $T_n(id_{A"}) = id_{T_n(A")}$ y $H_n(id_{A"}) = id_{H_n(A")}$, por ser funtores, se ve claramente que $\delta_n : T_n(A") \longrightarrow T_{n-1}(A')$ es $T_{n-1}(h)\delta$ con este último $\delta : T_n(A") \longrightarrow T_{n-1}(A'[-1])$ y lo mismo para H_n, nos queda el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_n(A") \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & T_{n-1}(A"[-1]) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
H_n(A") \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1}(A[-1]) \arrow[r, "H_n(h)"] & H_{n-1}(A')
\end{tikzcd}$$

conmutativo, esto implica la relación de conmutatividad deseada.

□

Un funtor aditivo $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ se llama **borrable** si para cada objeto$A$ de $\mathcal{A}$ existe un monomorfismo $\mu : A \longrightarrow I$ tal que $F(\mu) = 0$. Llamamos F **coborrable** si para cada A existe un epimorfismo $\mu : P \longrightarrow A$ tal que $F(\mu) = 0$.

2.5. Funtores derivados a derecha

Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor exacto a izquierda entre dos categorías abelianas. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, podemos construir los **funtores derivados a derecha** $R^iF(i \geq 0)$ de F como sigue. Si A es un objeto de $\mathcal{A}$, elegimos (de una vez por todas)una resolución inyectiva $A \longrightarrow I$ y defino

$$R^iF(A) = H^i(F(I)).$$

Note que como I es una resolución inyectiva de A entonces

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(I^0) \longrightarrow F(I^1)$$

es exacta pues F es un funtor exacto a izquierda y siempre tenemos

$$R^0(F(A)) \backsimeq F(A)$$

Dado que F también define un funtor exacto a derecha $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}^{op}$, y $\mathcal{A}^{op}$ tiene suficientes proyectivos, podemos construir los funtores derivados a izquierda $L_i F^{op}$. Como I se convierte en una resolución proyectiva de A en $\mathcal{A}^{op}$, vemos que

$$R^i F(A) = (L_i F^{op})^{op}(A).$$

Por lo tanto, todos los resultados sobre los funtores exactos a derecha se aplican a los funtores exactos a izquierda. En particular, los objetos $R^i F(A)$ son independientes de la elección de la resolución inyectiva, R^*F es un δ-funtor cohomológico universal, y $R^i F(I) = 0$ para $i \neq 0$ siempre que I sea inyectivo. Llamaremos a un objeto Q F-acíclico si $R^i F(Q) = 0(i \neq 0)$ como en 2.4.3, vemos que los funtores derivados a derecha de F también pueden ser calculado a partir de resoluciones F-acíclicas.

Definición 2.5.1 (Funtor *Ext*). *Para cada $R-$modulo A, el funtor $F_B = Hom_R(\_, B)$ es exacto a izquierda. Sus funtores derivados a derecha son llamados grupo Ext*

$$Ext^i_R(A, B) = R^i Hom_R(A, \_)(B)$$

En particular $Ext^0_R(A, B) = Hom_R(A, B)$

Podemos caracterizar los inyectivos por el siguiente ejercicio.

Ejercicio 37 (Ejercicio 2.5.2). *Probar las siguientes equivalencias:*

i) *A es un $R-$módulo proyectivo.*

ii) *$Hom_R(A, -)$ es un funtor exacto.*

iii) *$Ext^i_R(A, B)$ se anula para todo $i \neq 0$ y para todo B (A es $Hom_R(-, B)-$acíclico para todo B).*

Demostración. $i) \Longleftrightarrow ii)$ Es cierta por Lema 2.2.3
$i) \Longrightarrow iii)$ Si A es un objeto proyectivo en $\mathcal{A}$, por Corolario 2.4.2 tenemos que $L_i F(A) = 0$ para $i \neq 0$, con F funtor exacto a derecha, en particular para $F = Hom_R(-, B)$.
$iii) \Longrightarrow iv)$ Si $Ext^i_R(A, B)$ se anula para todo $i \neq 0$ y para todo B, en particular se anula para $i = 1$.

□