

Sobre la estructura de $GL(V)$ -módulo
de la homología de extensiones
de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes libres
por álgebras de polinomios truncadas

Estela Fátima, Fernández

Diciembre de 2011

Agradecimientos

Pienso que un Gran Trabajo, que se precie como tal, no sólo tiene que ver con el resultado en sí mismo, sino con la cantidad y calidad de personas, que desinteresadamente, actúan durante el proceso de su realización. Por esta razón me atrevo a decir que éste, es un Gran Trabajo.

Quiero expresar mi gratitud, en primer lugar, a mis padres que fueron los cimientos de este emprendimiento apoyándome y acompañándome en todo momento.

Cuatro columnas fundamentales sostienen este trabajo.

- En lo institucional

-El programa Inter-U, que con su ayuda económica hizo posible mi estadía en Córdoba.

-El CyT (Ciencias y Técnica), por otorgarme una beca de finalización.

-La Facultad de Ciencias Exactas, específicamente al Departamento de Matemática, por la creación de esta Maestría.

-La Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, comunidad educativa que siempre me recibió.

A las personas que a través de estas instituciones hicieron posible el éxito de este logro: Dra. Ana María Sfer, Dr. Pedro Brito, Dra. Estela Ruiz, Dr. Rubén Spies, Dra. Isabel Dotti y Dra. Esther Galina, entre otras.

- En lo laboral A mi jefa Lic. Juana Vizchi y a todas mis compañeras y ex compañeras de trabajo, no sólo por su apoyo en lo anímico, sino también, por su disposición para cubrir mi tarea docente, las veces que tuve que ausentarme.

- En lo familiar

-A mis queridísimos hijos, porque supieron cumplir sus tareas en mis ausencias haciéndome sentir menos culpable.

-A mi esposo que no sólo me permitió abrir las alas, sino que, fue el motor que me impulsó a volar confiada para lanzarme en pos de mis proyectos personales.

-A mis hermanas, cuñadas, cuñados y sobrinas que con su presencia hicieron más llevaderas mis ausencias en el hogar.

- En lo personal

A mis amigas:

-Verónica Tejero, sinónimo de fuerza y empuje.

-Nadina Rojas y Silvina Gómez compañeras de trayecto, cuando me encontraba lejos de mis afectos.

-Isabel Lomas, Mónica Villafañes y Beatriz Funes que contribuyeron con sus sugerencias, comentarios y críticas constructivas.

-A mi Director Dr. Paulo Tirao, por sus valiosos aportes no sólo en lo académico sino como persona, que me enseñó en la práctica a encarar cada día con optimismo, actitud de vida muy importante.

Finalmente agradezco a todas aquellas personas que de una forma u otra colaboraron para que este sueño se hiciera realidad. MUCHAS GRACIAS.

Estela Fátima Fernández.

Contenidos

1	Introducción	7
2	Álgebras de Lie	11
3	Homología de álgebras de Lie	15
4	Extensiones por polinomios truncados de álgebras 2-pasos nilpotentes libres	17
5	Representaciones de $GL(V)$	19
5.1	La homología como representación de $\mathfrak{gl}(V)$	27
6	Estructura de $GL(V)$-módulo de la homología	29
6.1	Caso \mathcal{L}_n^2	31
6.1.1	Estructura de \mathcal{L}_n^2	31
6.1.2	Estructura de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$	32
6.1.3	Análisis del núcleo e imagen de ∂_2 para \mathcal{L}_n^2	33
6.1.4	Estructura de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$	36
6.1.5	Análisis de la imagen de ∂_3 para \mathcal{L}_n^2	37
6.1.6	Cálculo de las homologías de \mathcal{L}_n^2	56
6.2	Caso \mathcal{L}_n^3	60
6.2.1	Estructura de \mathcal{L}_n^3	60
6.2.2	Estructura de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$	60
6.2.3	Análisis del núcleo e imagen de ∂_2 para \mathcal{L}_n^3	61
6.2.4	Estructura de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3)$	65
6.2.5	Análisis de la imagen de ∂_3 para \mathcal{L}_n^3	68
6.2.6	Cálculo de las homologías de \mathcal{L}_n^3	115
7	Programas Maple	121
7.1	Preliminares	121
7.2	Bases	122
7.3	Pesos	131
7.4	Operador de crecimiento	133
7.5	Ordenar	135
7.6	Obtención de vectores de peso máximo	141
7.7	Dimensiones	143

8	Resultados	145
8.1	Homologías de \mathcal{L}_n^2	145
8.2	Homologías de \mathcal{L}_n^3	150
9	Programas Maple ejecutables y data (CD)	165

1 Introducción

La teoría de álgebras de Lie y sus generalizaciones es una parte muy importante de la teoría de Lie y ésta ocupa un lugar muy destacado en el álgebra moderna, la geometría, el análisis y recientemente han aparecido aplicaciones fundamentales en la computación. La teoría de Lie es muy vasta y en continuo desarrollo y crecimiento. Dentro de la teoría de álgebras de Lie el estudio de su (co)homología es un área de mucho interés actual y de investigación activa con aplicaciones a la teoría de representaciones, la teoría de deformaciones y la geometría. En particular un problema importante es la construcción explícita de clases de homología para obtener así soluciones concretas de distintos problemas replanteados en términos homológicos.

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} y un álgebra asociativa y conmutativa A , entonces el producto tensorial $\mathfrak{g} \otimes A$ con el corchete $[(x, a), (y, b)] = ([x, y], ab)$ es un álgebra de Lie. Una clase particular de éstas ocurre cuando $A = A_k = \mathbb{C}[t]/\langle t^k \rangle$ es el álgebra de polinomios truncada, y en este caso $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g} \otimes A_k$ es un álgebra de Lie truncada. La homología de Lie de estas álgebras ha sido y es objeto de diversas investigaciones.

Un problema natural es entender cómo están relacionadas las homologías de \mathfrak{g} y de \mathfrak{g}_k . P. Hanlon conjeturó en 1990 [Ha] que la homología de \mathfrak{g}_k es igual a

$$H(\mathfrak{g}_k) \simeq H(\mathfrak{g})^{\otimes(k+1)}$$

si \mathfrak{g} pertenece a una de las siguientes clases:

- \mathfrak{g} es semisimple compleja.
- \mathfrak{g} es el nilradical de una subálgebra parabólica de un álgebra semisimple compleja.

En ese mismo trabajo, Hanlon probó la conjetura para el álgebra simple $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. La conjetura está abierta para una \mathfrak{g} semisimple cualquiera. Más tarde S. Kumar [SK] mostró que la conjetura de Hanlon es falsa si \mathfrak{g} está en la segunda clase.

En este trabajo iniciamos el estudio de la homología de álgebras de Lie de la forma $\mathfrak{g} \otimes A_k$ donde A_k es el álgebra simétrica de rango n truncada $\text{Sym}_k V = \text{Sym} V / \bigoplus_{i \geq k} \text{Sym}^i V$ donde V es un espacio vectorial complejo con $\dim V = n$. Es decir, como espacio vectorial $\text{Sym}_k V = \mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V \oplus \dots \oplus \text{Sym}^{k-1} V$. Esta es el álgebra de polinomios en n variables truncada. Cuando $n = 1$ estamos en el caso anterior ya que $\text{Sym} V = \mathbb{C}[t]$ y $\text{Sym}_k V = \mathbb{C}[t]/\langle t^k \rangle$.

Tomamos como álgebra \mathfrak{g} el álgebra 2-pasos nilpotente libre de rango n . Esto es, $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_n = V \oplus \Lambda^2 V$, donde V es un espacio vectorial complejo con $\dim V = n$ y los únicos corchetes no nulos son $[v, w] = v \wedge w$, para $v, w \in V$. Así definimos las álgebras

$$\mathcal{L}_n^k = \mathcal{L}_n \otimes \text{Sym}_k V = (V \oplus \Lambda^2 V) \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V \oplus \dots \oplus \text{Sym}^{k-1} V).$$

Tanto \mathcal{L}_n como $\text{Sym}_k V$ tienen estructura natural como $GL(V)$ -módulos a partir de la representación estandar de $GL(V)$ en V . Luego \mathcal{L}_n^k tiene una estructura natural de $GL(V)$ -módulo. Esta estructura pasa a la homología y el problema es:

Determinar la estructura de $GL(V)$ -módulo del i -ésimo grupo de homología de \mathcal{L}_n^k con coeficientes triviales, $H_i(\mathcal{L}_n^k)$, para todo i , n y k .

En este trabajo calculamos la homología de \mathcal{L}_n^k , determinando previamente la homología del complejo de Koszul asociado $(\Lambda \mathcal{L}_n^k, \partial)$ usando la teoría de representaciones de $GL(V)$. El i -ésimo grupo de homología, $H_i(\mathcal{L}_n^k)$, es $\text{Nu } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}$, donde

$$\Lambda^{i+1} \mathcal{L}_n^k \xrightarrow{\partial_{i+1}} \Lambda^i \mathcal{L}_n^k \xrightarrow{\partial_i} \Lambda^{i-1} \mathcal{L}_n^k$$

es parte del complejo de Koszul. Los espacios involucrados son de dimensiones muy grandes y crecen rápidamente con i , n y k . Por ejemplo, las dimensiones de algunas de las álgebras consideradas son:

dim(\mathcal{L}_n^k)							
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
$k = 2$	9	24	50	90	147	224	324
$k = 3$	18	60	150	315	588	1.008	1.620

Y las dimensiones de los espacios involucrados para calcular los primeros grupos de homología de algunas de éstas son:

dim(W)							
W	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
$\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$	36	276	1.225	4.005	10.731	24.976	52.326
$\Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$	153	1.770	11.175	49.455	172.578	507.528	1.311.390
$\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$	84	2.024	19.600	117.480	518.665	1.848.224	5.616.324
$\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3)$	816	34.220	551.300	5.159.805	33.710.236	170.191.056	707.276.340

Si fijamos un i y fijamos un k , la teoría de representaciones nos permite independizarnos del parámetro n , a pesar de que el conjunto de las dimensiones de las álgebras consideradas es no acotada a medida que n crece. En este trabajo calculamos los primeros grupos de homología $H_i(\mathcal{L}_n^k)$ para $i = 0, 1, 2$, para $k = 2$ y $k = 3$ y para todo n . Gracias al uso de la teoría de representaciones, en este caso basta considerar $n \leq 6$, debido al álgebra de Lie y a un resultado de estabilización de la estructura de los $GL(V)$ -módulo para $n > 6$. El teorema de peso máximo es usado como herramienta fundamental para descomponer los espacios involucrados y evaluar las diferenciales correspondientes. Muchos de estos espacios son productos tensoriales de otros. Una vez conocidos los tipos de los factores, la regla de Littlewood-Richardson da los tipos de la descomposición del producto tensorial, pero no construye vectores de peso máximo. Por lo tanto, sigue siendo necesario encontrar vectores de peso máximo por otros medios. Para esto el uso de algoritmos implementados en Maple es una necesidad, dados los tamaños de los espacios involucrados y la cantidad de cálculos necesarios. Estos constituyen una parte fundamental de este trabajo. Aún contando con estos algoritmos es necesario un minucioso análisis previo y la consideración de descomposiciones en submódulos grandes, no necesariamente irreducibles, para los cuales se pueda determinar a priori el comportamiento de las diferenciales. Las descomposiciones que aparecen en este trabajo no son caprichosas, son el fruto de este análisis, y han hecho posible los resultados obtenidos.

La tesis está organizada por Secciones. Las primeras, del 2 al 5 inclusive contienen material preliminar sobre álgebras de Lie, homología de álgebras de Lie y la teoría de representaciones de $GL(V)$. Este material contiene lo necesario para la parte central de la tesis y permite leer el resto de manera (casi) autocontenida. Las Secciones 6 y 7 continen el desarrollo del problema y los resultados originales encontrados. Ahí se presentan tablas, algunas grandes, con las descomposiciones mencionadas y los vectores de peso máximo necesarios. En algunos casos éstos no se han incluido en forma escrita ya que ocupan muchas páginas; pero se encuentran grabados en el soporte informático, sección 9, que acompaña a este trabajo con todos los programas usados y todo el output producido. Por último en la sección 8 están sintetizados los resultados de manera tal que el lector que tenga más o menos un manejo fluido del álgebra lineal, álgebra multilineal, teoría de representaciones y Homología de Lie, sin leer la secciones anteriores, podrá aprovechar.

2 Álgebras de Lie

Definición 2.1. Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbf{k} con un producto $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ bilineal, llamado corchete de Lie, con las siguientes propiedades:

- (1) $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.
- (2) $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. (*Identidad de Jacobi*).

Álgebras de Lie de matrices

El primer ejemplo de álgebra de Lie es $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{k})$, el espacio de matrices cuadradas de orden n con coeficientes en el cuerpo \mathbf{k} con el corchete definido por

$$[A, B] = AB - BA.$$

Algunas subálgebras de Lie de la anterior son:

- (1) \mathfrak{sl}_n = el espacio de matrices de traza cero;
- (2) \mathfrak{t}_n^+ = el espacio de matrices estrictamente triangulares superiores;
- (3) \mathfrak{t}_n^- = el espacio de matrices estrictamente triangulares inferiores;
- (4) \mathfrak{so}_n = el espacio de matrices antisimétricas.

Álgebras de Lie abstractas

Toda álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbf{k} de característica 0 es isomorfa a un álgebra de Lie de matrices. Esto es lo que afirma el Teorema de Ado.

Álgebras de Lie simples

Un subespacio I de un álgebra de Lie \mathfrak{g} se llama un ideal de \mathfrak{g} si $[\mathfrak{g}, I] \subset I$

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *simple* si satisface que:

- los únicos ideales de \mathfrak{g} son 0 y \mathfrak{g} ;
- $\dim(\mathfrak{g}) \neq 1$.

Ejemplos de álgebras de Lie simples sobre el cuerpo \mathbb{C} son:

- $A_n = \mathfrak{sl}_{n+1}$ para $n \geq 1$,
- $B_n = \mathfrak{so}_{2n+1}$ para $n \geq 2$,
- $C_n = \mathfrak{sp}_{2n}$ para $n \geq 3$,
- $D_n = \mathfrak{so}_{2n}$ para $n \geq 4$.

Éstas, llamadas clásicas, junto con otras cinco álgebras de Lie simples llamadas excepcionales E_6 , E_7 , E_8 , F_4 y G_2 , completan la clasificación de todas las álgebras de Lie simples complejas de dimensión finita.

Álgebras de Lie solubles y nilpotentes

Toda álgebra de Lie tiene asociada dos series de ideales.

- La *serie derivada*,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}].$$

Note que $\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \dots$

- La *serie central descendente*,

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

Note que $\mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \dots$

A partir de estas series aparecen dos clases distinguidas de álgebras de Lie:

- (1) Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *soluble* si su serie derivada se extingue, es decir si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para algún k . Si además $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$, entonces \mathfrak{g} es k -pasos soluble.

Ejemplo 2.2. El álgebra de Lie de matrices triangulares superiores $n \times n$ es soluble.

- (2) Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *nilpotente* si su serie central descendente se extingue, es decir si $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$ para algún k . Si además $\mathfrak{g}^k \neq 0$, entonces \mathfrak{g} es k -pasos nilpotente.

Ejemplo 2.3. El álgebra de Lie de matrices triangulares superiores $n \times n$ estrictas es $n - 1$ pasos nilpotente.

Álgebras de Lie libres y nilpotentes libres

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T(V)$ el álgebra tensorial sobre V ;

$$T(V) = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots \oplus V^{\otimes r} \oplus \dots$$

$T(V)$ es el álgebra asociativa libre en n generadores. Como toda álgebra asociativa, es un álgebra de Lie con corchete

$$[v, w] = v \otimes w - w \otimes v$$

para todo $v, w \in T(V)$.

Ahora, sea \mathfrak{L} la subálgebra de Lie de $T(V)$ generada por V . \mathfrak{L} es el álgebra de Lie libre de rango n . \mathfrak{L} hereda la graduación de $T(V)$. Así

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{L}_r \oplus \dots$$

El álgebra de Lie

$$\mathfrak{L}(r) = \mathfrak{L} / (\mathfrak{L}_{r+1} \oplus \mathfrak{L}_{r+2} \oplus \dots)$$

es el álgebra de Lie r -pasos nilpotente libre de rango n . Como espacio vectorial

$$\mathfrak{L}(r) = \mathfrak{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{L}_r.$$

Por ejemplo el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre es

$$\mathfrak{L}(2) = V \oplus \Lambda^2(V).$$

Álgebras de Lie de corrientes

Dadas \mathfrak{g} un álgebra de Lie y A un álgebra asociativa y conmutativa con unidad sobre \mathbb{C} ,

$$\mathfrak{g} \otimes A$$

es un álgebra de Lie con el corchete definido por:

$$[u \otimes a, v \otimes b] = [u, v] \otimes ab, \quad \forall u, v \in \mathfrak{g} \quad \text{y} \quad \forall a, b \in A.$$

Veamos que efectivamente este producto, así definido, es un corchete de Lie.

(1) Sean $u \in \mathfrak{g}$ y $a \in A$. Entonces

$$[u \otimes a, u \otimes a] = [u, u] \otimes aa = 0 \otimes aa = 0.$$

(2) Sean $u, v, w \in \mathfrak{g}$ y sean $a, b, c \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} & [[u \otimes a, v \otimes b], w \otimes c] + [[w \otimes c, u \otimes a], v \otimes b] + [[v \otimes b, w \otimes c], u \otimes a] = \\ & = [[u, v], w] \otimes (ab)c + [[w, u], v] \otimes (ca)b + [[v, w], u] \otimes (bc)a \\ & = [[u, v], w] \otimes (ab)c + [[w, u], v] \otimes (ac)b + [[v, w], u] \otimes a(bc) \\ & = [[u, v], w] \otimes (ab)c + [[w, u], v] \otimes a(cb) + [[v, w], u] \otimes (ab)c \\ & = [[u, v], w] \otimes (ab)c + [[w, u], v] \otimes a(bc) + [[v, w], u] \otimes (ab)c \\ & = [[u, v], w] \otimes (ab)c + [[w, u], v] \otimes (ab)c + [[v, w], u] \otimes (ab)c \\ & = ([[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u]) \otimes (ab)c \\ & = 0 \otimes (ab)c \\ & = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{g} \otimes A$ es un álgebra de Lie con este corchete.

3 Homología de álgebras de Lie

Definición 3.1. Sea \mathfrak{g} una álgebra de Lie y M un \mathfrak{g} -módulo. La *homología* de \mathfrak{g} con coeficientes en M , $H_*(\mathfrak{g}, M)$, es la homología del complejo de Koszul $(\Lambda\mathfrak{g} \otimes M, \partial)$ donde la diferencial $\partial = \bigoplus \partial_p$, con

$$\partial_p : \Lambda^p(\Lambda^p\mathfrak{g} \otimes M) \longrightarrow \Lambda^{p-1}\mathfrak{g} \otimes M,$$

está definida por

$$\begin{aligned} \partial_p(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \otimes m) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \cdots \wedge \widehat{x}_i \cdots \wedge \widehat{x}_j \cdots \wedge x_p \otimes m \\ &+ \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_i \cdots \wedge x_p \otimes x_i m \end{aligned}$$

Es decir la diferencial ∂ satisface que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ para todo $p > 0$ y el p -ésimo grupo de homología de \mathfrak{g} con coeficientes en M es

$$H_p(\mathfrak{g}, M) = \ker(\partial_p) / \text{Im}(\partial_{p+1}).$$

En el caso particular donde $M = \mathbb{C}$ y la representación de \mathfrak{g} en M es la trivial, la homología de \mathfrak{g} con coeficientes en \mathbb{C} se denomina *homología trivial* y se denota $H_*(\mathfrak{g})$.

En este caso se tiene

$$H_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \quad y \quad H_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

4 Extensiones por polinomios truncados de álgebras 2-pasos nilpotentes libres

Sea V un espacio vectorial complejo con $\dim(V) = n$. Por un lado consideremos el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango n

$$\mathcal{L}_n = V \oplus \Lambda^2 V.$$

Los únicos corchetes no nulos son $[X, Y] = X \wedge Y$ para todo $X, Y \in V$ y $\dim(\mathcal{L}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Por otro lado sea $A = \text{Sym}(V)$ el álgebra simétrica sobre V

$$\text{Sym}(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Sym}^i(V) = \mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2(V) \oplus \dots$$

Ésta es isomorfa al álgebra de polinomios en n variables. Claramente para cualquier k

$$I_k = \bigoplus_{i=k}^{\infty} \text{Sym}^i(V)$$

es un ideal de A . El cociente

$$A_k = A/I_k = \bigoplus_{i=0}^{k-1} \text{Sym}^i(V)$$

es el álgebra de polinomios truncada, cuya dimensión es

$$\dim(A_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+i-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Consideramos ahora el álgebra de corrientes

$$\mathcal{L}_n \otimes A$$

y el álgebra de corrientes truncada

$$\mathcal{L}_n^k = \mathcal{L}_n \otimes A_k,$$

cuya dimensión es

$$\dim(\mathcal{L}_n^k) = \frac{(n+1)(n+k-1)!}{2(k-1)!(n-1)!}.$$

En lo que sigue trabajaremos con las álgebras \mathcal{L}_n^2 y \mathcal{L}_n^3 de dimensiones $\dim(\mathcal{L}_n^2) = \frac{n(n+1)^2}{2}$ y $\dim(\mathcal{L}_n^3) = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$ respectivamente.

5 Representaciones de $GL(V)$

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n . Las representaciones del grupo general lineal $GL(V)$ están en correspondencia con las representaciones de su álgebra de Lie, $\mathfrak{gl}(V)$, de todas las transformaciones lineales de V en V ; ésta es claramente isomorfa al álgebra de Lie de matrices $n \times n$.

Definición 5.1. Una *representación* de \mathfrak{g} en un espacio vectorial W es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W).$$

La dimensión de la representación ρ es la dimensión de W .

Ejemplo 5.2.

- (1) La *representación estándar* de $\mathfrak{gl}(V)$ en V . En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, $W = V$ y $\rho : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ está definida por: $\rho(A)(v) = Av$.
- (2) La *representación adjunta* de \mathfrak{g} . Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} tiene asociada esta representación en $W = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$,

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

definida por

$$\rho(A)(B) = [A, B], \quad \text{para todo } A, B \in \mathfrak{g}.$$

Esta representación juega un papel importante en la descripción de la estructura de las álgebras simples.

Construcción de representaciones

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y sean ρ_1, \dots, ρ_m representaciones de \mathfrak{g} en V_1, \dots, V_m respectivamente. A partir de éstas se definen otras.

- *Suma directa*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \dots \oplus V_m), \quad \rho(X) = \rho_1(X) \oplus \dots \oplus \rho_m(X).$$

- *Producto tensorial*

$$\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes \dots \otimes V_m),$$

$$\mu(X) = \rho_1(X) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(X) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \rho_m(X) \quad (5.1)$$

donde 1 representa la identidad en cada uno de los espacios.

- *Producto simétrico* En este caso consideramos una sólo representación $\rho = \rho_1$ en $W = V_1$.

$$\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\text{Sym}^k W),$$

$$\mu(X) = \rho(X) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes \rho(X) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \rho(X) \quad (5.2)$$

donde 1 representa la identidad en cada uno de los espacios.

- *Producto exterior* En este caso consideramos una sólo representación $\rho = \rho_1$ en $W = V_1$.

$$\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\Lambda^k W)$$

$$\mu(X) = \rho(X) \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 + 1 \wedge \rho(X) \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 + 1 \wedge \dots \wedge 1 \wedge \rho(X), \quad (5.3)$$

donde 1 representa la identidad en cada uno de los espacios.

Es fácil verificar directamente que las dos primeras son representaciones. En los dos últimos casos la representación es inducida por la representación tensorial. Para esto hay que observar que la acción definida en el producto tensorial preserva los ideales que definen al producto simétrico y al producto exterior.

Definición 5.3. Una representación de \mathfrak{g} en V es *irreducible* si los únicos subespacios invariantes por ρ son el subespacio nulo y V .

Ejemplo 5.4. La representación estándar de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ en V es irreducible, ya que dados un vector cualquiera $v \neq 0$ y otro cualquiera w siempre existe una transformación lineal T tal que $Tv = w$.

Definición 5.5. Una representación de \mathfrak{g} es completamente reducible si V se descompone como

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r,$$

donde cada subespacio V_i es invariante por ρ y la restricción de ρ a V_i es irreducible.

Teorema 5.6. *Toda representación de $\mathfrak{gl}(V)$ de dimensión finita es completamente reducible. Más aún, las representaciones irreducibles que aparecen y sus multiplicidades, es decir la cantidad de ellas que son isomorfas a una dada, son únicas.*

Las representaciones irreducibles de $\mathfrak{gl}(V)$ están clasificadas por el Teorema de Peso Máximo. A continuación describimos esta parametrización destacando los casos que más nos interesan: los productos simétricos y exteriores de la representación estándar y productos tensoriales de éstas.

El Teorema de Peso Máximo

Introducimos ahora una noción fundamental, la de *vector peso*. Para esto consideramos la *descomposición triangular*

$$\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{t}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{t}^+,$$

donde \mathfrak{t}^- es el espacio de matrices triangulares inferiores estrictas, \mathfrak{t}^+ es el espacio de matrices triangulares superiores estrictas y \mathfrak{h} es el espacio de matrices diagonales. Fijamos como base de \mathfrak{h} al conjunto $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, donde H_i es la matriz diagonal con todos sus elementos 0, salvo un 1 en la posición i .

Sea $\rho : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ en W .

Notación: Cuando la representación ρ se sobreentiende del contexto, usualmente se denota

$$xw = x \cdot w = \rho(x)(w),$$

para $x \in \mathfrak{g}$ y $w \in W$.

Definición 5.7. Un vector $w \in W$ es un vector peso de ρ , si $H_i \cdot w = \lambda_i w$, para todo $i = 1 \dots n$. En este caso w es un vector peso de peso $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Además el peso total de w es $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

En los ejemplos que siguen suponemos que V es de dimensión n y que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base fija de V .

Ejemplo 5.8. $W = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_m$.

Si $A \in \mathfrak{gl}(V)$, A actúa en W de acuerdo a (5.1) por

$$\rho(A)(v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_m) = Av_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m + v_1 \otimes Av_2 \otimes \cdots \otimes v_m + \cdots + v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes Av_m.$$

Los vectores de la base canónica del producto tensorial son vectores peso. En efecto,

$$\begin{aligned} H_i \cdot (e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_m}) &= \sum_k e_{j_1} \otimes \cdots \otimes H_i(e_{j_k}) \otimes \cdots \otimes e_{j_m} \\ &= \lambda_i(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \otimes \cdots \otimes e_{j_m}), \end{aligned}$$

donde λ_i es la cantidad de veces que aparece el índice i entre los j 's.

Supongamos que $\dim(V) = 4$ y $m = 4$. Entonces

$$\begin{aligned} H_1 \cdot (e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2) &= 0; \\ H_2 \cdot (e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2) &= 2e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2; \\ H_3 \cdot (e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2) &= e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2; \\ H_4 \cdot (e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2) &= e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2; \end{aligned}$$

Luego $e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2$ es un vector peso, de peso $(0, 2, 1, 1)$.

Ejemplo 5.9. $W = \Lambda^m V$.

Si $A \in \mathfrak{gl}(V)$, A actúa en W según (5.3) por

$$\rho(A)(v_1 \wedge v_2 \cdots \wedge v_m) = Av_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m + v_1 \wedge Av_2 \wedge \cdots \wedge v_m \cdots + v_1 \wedge v_2 \cdots \wedge Av_m.$$

Los vectores de la base canónica del producto exterior son vectores peso. En efecto,

$$H_i \cdot (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}) = \sum_k e_{j_1} \wedge \cdots \wedge H_i(e_{j_k}) \wedge \cdots \wedge e_{j_m} = \lambda_i(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}),$$

donde λ_i es la cantidad de veces que aparece el índice i entre los j 's que puede ser una vez o ninguna.

Supongamos que $\dim(V) = 3$ y $m = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} H_1.(e_1 \wedge e_3) &= e_1 \wedge e_3; \\ H_2.(e_1 \wedge e_3) &= 0; \\ H_3.(e_1 \wedge e_3) &= e_1 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Luego $e_1 \wedge e_3$ es un vector peso, de peso $(1, 0, 1)$.

Ejemplo 5.10. $W = \text{Sym}^m V$.

Si $A \in \mathfrak{gl}(V)$, A actúa en W de acuerdo a (5.2). Además, recordemos que si $\overline{e_2 \otimes e_2 \otimes e_3}$ es la imagen en el producto simétrico de $e_2 \otimes e_2 \otimes e_3$, entonces $\rho(A)(\overline{e_2 \otimes e_2 \otimes e_3}) = \overline{\rho(A)(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3)}$. En general, abusando de la notación, escribiremos indistintamente $e_2 \otimes e_2 \otimes e_3$ como elemento del producto tensorial o simétrico. Así, por ejemplo, si $\dim(V) = 3$ y $m = 3$, entonces

$$\begin{aligned} H_1.(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3) &= 0; \\ H_2.(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3) &= 2(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3); \\ H_3.(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3) &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_3; \end{aligned}$$

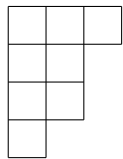
Luego $e_2 \otimes e_2 \otimes e_3$ es un vector peso, de peso $(0, 2, 1)$.

Los pesos son en estos casos m -uplas de enteros no negativos (esto no es cierto para cualquier representación, pero sí para las llamadas tensoriales).

Definición 5.11. Un peso $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es dominante si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$.

Los pesos dominantes se pueden representar con diagramas de Young. Al peso $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ le asociamos el diagrama de Young con λ_1 cuadritos en la primera fila, λ_2 cuadritos en la segunda fila y así sucesivamente para terminar con λ_m cuadritos en la última fila. Este diagrama tiene un total de $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$ cuadritos y tiene k filas si $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = 0$. Debemos hacer notar que si no especificamos m , un mismo diagrama puede corresponderse en pesos distintos. En cambio si m está previamente fijado no hay ambigüedad alguna.

Ejemplo 5.12. Si $m = 5$, el peso dominante $(3, 2, 2, 1, 0)$ se representa por



Ahora, este mismo diagrama representa también al peso dominante $(3, 2, 2, 1)$ (con $m = 4$) y a los pesos dominantes $(3, 2, 2, 1, 0, 0)$ (con $m = 6$) y $(3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ (con $m = 9$).

Como vimos, las matrices diagonales de $\mathfrak{gl}(V)$ juegan un rol muy importante; permitieron definir vectores peso y pesos. Las matrices triangulares superiores estrictas \mathfrak{t}^+ e inferiores estrictas \mathfrak{t}^- de la descomposición triangular de $\mathfrak{gl}(V)$, también tienen roles importantes.

Elegimos como base para \mathfrak{t}^+ y \mathfrak{t}^- las bases canónicas formadas por las matrices E_{ij} ($i \neq j$), aquellas con una única entrada no nula e igual a 1 en la posición i, j . Si $i > j$, $E_{ij} \in \mathfrak{t}^-$ y si $i < j$, $E_{ij} \in \mathfrak{t}^+$. Tenemos que

$$E_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_i, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Veamos ahora como es la acción de las matrices E_{ij} en los vectores peso de $V \otimes \dots \otimes V$ y $V \wedge \dots \wedge V$. (El caso $\text{Sym}^k V$ es totalmente análogo al del producto tensorial.)

Veamos el caso particular del Ejemplo 5.8, donde $\dim(V) = 4$ y $v = e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2$ es vector peso de peso $(0, 2, 1, 1)$. Calculemos:

$$\begin{aligned} E_{12}v &= e_1 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_1; \\ E_{13}v &= e_2 \otimes e_1 \otimes e_4 \otimes e_2; \\ E_{14}v &= e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_2; \\ E_{23}v &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_4 \otimes e_2; \\ E_{24}v &= e_2 \otimes e_3 \otimes e_2 \otimes e_2; \\ E_{34}v &= e_2 \otimes e_3 \otimes e_3 \otimes e_2. \end{aligned}$$

Las matrices $E_{ij} \in \mathfrak{t}^+$ aplicadas a v han producido vectores peso de diferente peso. Anotemos como han cambiado los pesos:

$$\begin{aligned} (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{12}} (1, 1, 1, 1) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{13}} (1, 2, 0, 1) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{14}} (1, 2, 1, 0) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{23}} (0, 3, 0, 1) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{24}} (0, 3, 1, 0) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{34}} (0, 2, 2, 0) \end{aligned}$$

Sigamos calculando.

$$\begin{aligned} E_{21}v &= 0; \\ E_{31}v &= 0; \\ E_{41}v &= 0; \\ E_{32}v &= e_3 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_3; \\ E_{42}v &= e_4 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_4; \\ E_{43}v &= e_2 \otimes e_4 \otimes e_4 \otimes e_2. \end{aligned}$$

Las matrices $E_{ij} \in \mathfrak{t}^-$ aplicadas a v han producido vectores peso de diferente peso. Anotemos como han cambiado los pesos:

$$\begin{aligned}
(0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{21}} (0, 0, 0, 0) \\
(0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{31}} (0, 0, 0, 0) \\
(0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{41}} (0, 0, 0, 0) \\
(0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{32}} (0, 1, 2, 1) \\
(0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{42}} (0, 1, 1, 2) \\
(0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{43}} (0, 2, 0, 2)
\end{aligned}$$

Según el orden lexicográfico en los pesos, vemos que las matrices de \mathfrak{t}^+ han hecho crecer el peso, mientras que las matrices de \mathfrak{t}^- lo han hecho decrecer. Los operadores de \mathfrak{t}^+ se llaman *Operadores de crecimiento* y los operadores de \mathfrak{t}^- se llaman *Operadores de decrecimiento*.

Usando estos operadores analicemos el Ejemplo 5.9 donde $\dim(V) = 3$, $m = 2$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de V y $v = e_1 \wedge e_3$. Entonces

$$\begin{aligned}
E_{12}v &= 0 & E_{21}v &= e_2 \wedge e_3 \\
E_{13}v &= 0 & E_{31}v &= 0 \\
E_{23}v &= e_1 \wedge e_2 & E_{32}v &= 0
\end{aligned}$$

Los cambios de peso son

$$\begin{aligned}
(1, 0, 1) &\xrightarrow{E_{12}} (0, 0, 0) & (1, 0, 1) &\xrightarrow{E_{21}} (0, 1, 1) \\
(1, 0, 1) &\xrightarrow{E_{13}} (0, 0, 0) & (1, 0, 1) &\xrightarrow{E_{31}} (0, 0, 0) \\
(1, 0, 1) &\xrightarrow{E_{23}} (1, 1, 0) & (1, 0, 1) &\xrightarrow{E_{32}} (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Observamos que en este ejemplo las matrices $E_{ij} \in \mathfrak{t}^+$ han hecho crecer los pesos o los han anulado.

Ejemplo 5.13. Consideremos la representación estandar vista en el Ejemplo 5.2. Los vectores de la base de V son vectores peso; más aún, e_i es de peso $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ con el 1 en la i -ésima posición. El de mayor peso es entonces e_1 , cuyo peso es dominante. Además, es anulado por todos los operadores de crecimiento y resulta que $V = \langle \{E_{ij}e_1 : i > j\} \rangle$. Es decir, e_1 es un vector de peso dominante, anulado por todos los operadores de crecimiento, tal que junto con los operadores de decrecimiento generan toda la representación.

Ejemplo 5.14. Sea ahora $W = V \otimes V$, con $\dim V = 3$, bajo la acción de $\mathfrak{gl}(V)$. Escribamos algunos vectores peso, de peso dominante y veamos como actúan los operadores de crecimiento y de decrecimiento en ellos. Por ejemplo

$$v_1 = e_1 \otimes e_1 \quad y \quad v_2 = e_1 \otimes e_2$$

son vectores peso de pesos $(2, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ respectivamente.

El vector v_1 es anulado por todos los operadores de crecimiento, mientras que v_2 no. De hecho $E_{12}v_2 = v_1$. Veamos que obtenemos, a partir de $v = v_1$, aplicando repetidamente los operadores de decrecimiento.

$$\begin{aligned}
\text{Peso } (2, 0, 0) : v &= e_1 \otimes e_1; \\
\text{Peso } (1, 1, 0) : E_{21}(v) &= e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2; \\
\text{Peso } (1, 0, 1) : E_{31}v &= e_3 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_3; \\
\text{Peso } (0, 2, 0) : E_{21}E_{21}v &= e_2 \otimes e_2; \\
\text{Peso } (0, 1, 1) : E_{31}E_{21}v &= e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3, \\
&E_{21}E_{31}v = e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3, \\
&E_{32}E_{21}E_{21}v = e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3; \\
\text{Peso } (0, 0, 2) : E_{31}E_{31}v &= e_3 \otimes e_3, \\
&E_{32}E_{31}E_{21}v = e_3 \otimes e_3, \\
&E_{32}E_{21}E_{31}v = e_3 \otimes e_3, \\
&E_{32}E_{32}E_{21}E_{21}v = e_3 \otimes e_3.
\end{aligned}$$

El subespacio generado por los 6 vectores peso que aparecen, es una representación irreducible de $\mathfrak{gl}(V)$. Para ésta, v es un vector de peso máximo (único salvo escalares). Esta representación es exactamente $\text{Sym}^2 V$. Como esta representación tiene dimensión 6 y $\dim V \otimes V = 9$, luego $V \otimes V$ no es irreducible. Busquemos la(s) componente(s) irreducible(s) que falta(n) para completar la descomposición de $V \otimes V$. El vector v_2 es vector peso de peso dominante pero no es anulado por todos los operadores de crecimiento. Además, si hicieramos lo mismo que hicimos con v_1 encontraríamos por ejemplo que $E_{21}v_2 = e_2 \otimes e_2$, que ya está en la representación anterior.

Hagamos entonces otra cosa. Busquemos un vector peso de peso $(1, 1, 0)$ pero que sea anulado por todos los operadores de crecimiento. Podemos tomar

$$v_3 = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

y hacer lo mismo que hicimos con v_1 . Los vectores no nulos que se obtienen son

$$E_{32}v_3 = e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 \quad \text{y} \quad E_{31}v_3 = e_3 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3.$$

El subespacio generado por los 3 vectores peso que aparecen es otra representación irreducible de $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim(V) = 3$. Es exactamente $\Lambda^2 V$.

Como $V \otimes V = \text{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$, hemos terminado. Cada una de estas representaciones irreducibles están generadas por sus vectores de peso máximo cuyos pesos son dominantes, luego podemos asociarles a cada una un diagrama de Young. Así podemos ahora escribir

$$V \otimes V = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Lo visto en este último ejemplo sucede en toda representación de $\mathfrak{gl}(V)$. Es decir, toda representación es suma directa de subrepresentaciones irreducibles (ver Teorema 5.6) y cada una de éstas tiene un vector de peso máximo a partir del cual se la puede obtener completa. Esto es lo que afirma el siguiente teorema.

Teorema 5.15 (Teorema de peso máximo). *Sea W una representación irreducible de $\mathfrak{gl}(V)$ de dimensión finita. Entonces existe un vector $v \in W$, único salvo escalares, que satisface:*

1. *Es un vector peso de peso dominante.*
2. *Es anulado por todos los operadores de \mathfrak{t}^+ .*
3. *El espacio generado por v y $T_{i_1} \dots T_{i_r} v$ con $T_i \in \mathfrak{t}^-$ es W .*

El vector v es un vector de peso máximo de W . Además si W_1 y W_2 son dos representaciones irreducibles con vectores de peso máximo v_1 y v_2 de pesos λ_1 y λ_2 respectivamente, W_1 y W_2 son equivalentes si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2$.

Además dado un peso dominante λ , existe una representación irreducible V_λ de dimensión finita de peso máximo λ . Es decir, las representaciones irreducibles de $\mathfrak{gl}(V)$ están parametrizadas por los pesos dominantes. La dimensión de la representación correspondiente a $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es

$$\dim V_\lambda = \prod_{i < j} \frac{(\lambda_j - \lambda_i) + j - i}{j - i}.$$

Sobre la descomposición en irreducibles

Dada una representación W de $\mathfrak{gl}(V)$ no hay a priori ningún método efectivo para descomponer a W como suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

En lo que sigue nosotros necesitamos descomponer muchas representaciones dadas como sumas de irreducibles. Haremos esto de la siguiente manera. Empezaremos con una base de W formada por vectores peso y distinguiremos aquellos elementos de la base de peso dominante; luego para un peso dominante dado buscaremos entre todos los vectores peso de ese peso, vectores de peso máximo. Asociados a cada uno hay entonces una subrepresentación en irreducibles de ese peso máximo. Haciendo esto con todos los pesos dominantes presentes descomponemos la representación W dada.

El procedimiento descripto requiere gran cantidad de operaciones de la aritmética del álgebra lineal en espacios de dimensión muy grande. Es por esto que es necesario usar la computadora para llevarlos a cabo. Vale la pena observar que los resultados de los algoritmos implementados en Maple pueden ser verificados y esto no es demasiado engorroso en general. Los algoritmos entregan vectores de peso máximo linealmente independientes. Verificar que en efecto son vectores de peso máximo es mucho más fácil y sencillo que encontrarlos; para esto hay que verificar que los operadores de crecimiento los anulan. Que son linealmente independientes suele ser posible por simple inspección. Luego, como sabemos de que dimensión es cada una de la representaciones asociadas a cada vector de peso máximo una vez alcanzada la dimensión total estamos seguros de haber terminado.

5.1 La homología como representación de $\mathfrak{gl}(V)$

Para todo $n \geq 2$ y todo $k \geq 1$, el álgebra de Lie \mathcal{L}_n^k definida en la Sección 4 tiene una estructura natural de $\mathfrak{gl}(V)$ -módulo dada por la representación estandar, sus productos exteriores, simétricos y productos tensoriales y sumas de éstos. Luego, el complejo de Koszul también es un $\mathfrak{gl}(V)$ -módulo. Además, las diferenciales ∂_p del complejo son $\mathfrak{gl}(V)$ -morfismos. Así resulta que los grupos de homología de \mathcal{L}_n^k son $\mathfrak{gl}(V)$ -módulos.

Veamos que las diferenciales ∂_p son $\mathfrak{gl}(V)$ -morfismos.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{L}_n^k$ y $A \in \mathfrak{gl}(V)$

$A.[x, y] = A.(x \wedge y) = A.x \wedge y + x \wedge A.y = [A.x, y] + [x, A.y]$ luego $A.[x, y] = [A.x, y] + [x, A.y]$
 Probar que las diferenciales ∂_p son $\mathfrak{gl}(V)$ -morfismos es probar que:

$$\partial_p A = A \partial_p$$

$$\begin{aligned} \partial_p A(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) &= \partial_p \left(\sum_k (x_1 \wedge \dots \wedge A.x_k \wedge \dots \wedge x_p) \right) = \sum_k \left(\partial_p (x_1 \wedge \dots \wedge A.x_k \wedge \dots \wedge x_p) \right) = \\ & \sum_k \left(\sum_{i < j; i, j \neq k} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \dots \wedge A.x_k \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p + \right. \\ & \quad \sum_{i < k} (-1)^{i+k+1} [x_i, A.x_k] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \dots \wedge \widehat{A.x_k} \wedge \dots \wedge x_p + \\ & \quad \left. \sum_{k < j} (-1)^{j+k+1} [A.x_k, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{A.x_k} \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p \right) = \\ & \sum_k \left(\sum_{i < j; i, j \neq k} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \dots \wedge A.x_k \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p \right) + \\ & \sum_{i < j} (-1)^{j+i+1} \left([A.x_i, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{A.x_i} \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p + \right. \\ & \quad \left. [x_i, A.x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \dots \wedge \widehat{A.x_j} \wedge \dots \wedge x_p \right) = \\ & \sum_k \left(\sum_{i < j; i, j \neq k} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \dots \wedge A.x_k \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p \right) + \\ & \sum_{i < j} (-1)^{j+i+1} A.[x_i, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p = \\ & \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} A([x_i, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p) = \\ & A. \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \dots \wedge \widehat{x_i} \dots \wedge \widehat{x_j} \dots \wedge x_p \right) = \\ & A.\partial_p(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \end{aligned}$$

6 Estructura de $GL(V)$ -módulo de la homología

En esta sección calcularemos los segundos grupos de homología con coeficientes triviales de las álgebras \mathcal{L}_n^2 y \mathcal{L}_n^3 . Esta sección es la parte central de este trabajo. Los cálculos realizados y los resultados obtenidos eran hasta ahora desconocidos.

Recordemos que los segundos grupos de homología que queremos determinar son

$$H_2(\mathcal{L}_n^2) = \frac{\text{Nu}(\partial_2 : \Lambda^2 \mathcal{L}_n^2 \longrightarrow \mathcal{L}_n^2)}{\text{Im}(\partial_3 : \Lambda^3 \mathcal{L}_n^2 \longrightarrow \Lambda^2 \mathcal{L}_n^2)}$$

y

$$H_2(\mathcal{L}_n^3) = \frac{\text{Nu}(\partial_2 : \Lambda^2 \mathcal{L}_n^3 \longrightarrow \mathcal{L}_n^3)}{\text{Im}(\partial_3 : \Lambda^3 \mathcal{L}_n^3 \longrightarrow \Lambda^2 \mathcal{L}_n^3)}.$$

Los espacios lineales que aparecen son de dimensiones muy grandes y no acotadas cuando n crece. Por ejemplo para \mathcal{L}_n^2 tenemos que

	$\dim(\mathcal{L}_n^2)$	$\dim(\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2))$	$\dim(\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2))$
$n = 2$	9	36	84
$n = 3$	24	276	2.024
$n = 4$	50	1.225	19.600
$n = 5$	90	4.005	117.480
$n = 6$	147	10.731	518.665
$n = 10$	605	182.710	36.724.710
$n = 20$	4.410	9.721.845	14.284.630.920
n	$\frac{d_2}{2}$	$\frac{d_2(d_2-2)}{8}$	$\frac{d_2(d_2-2)(d_2-4)}{48}$

donde $d_2 = n(n+1)^2$

Para \mathcal{L}_n^3 tenemos que

	$\dim(\mathcal{L}_n^3)$	$\dim(\Lambda^2(\mathcal{L}_n^3))$	$\dim(\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3))$
$n = 2$	18	153	816
$n = 3$	60	1.170	34.220
$n = 4$	150	11.175	551.300
$n = 5$	315	49.455	5.159.805
$n = 6$	588	172.578	33.710.236
$n = 10$	3.630	6.586.635	7.965.437.260
$n = 20$	48.510	1.176.585.795	19.024.607.914.620
n	$\frac{d_3}{4}$	$\frac{d_3(d_3-4)}{32}$	$\frac{d_3(d_3-4)(d_3-8)}{384}$

donde $d_3 = n(n+1)^2(n+2)$

Los tamaños de los espacios involucrados y sobre todo el hecho de ser no acotados hace imposible calcular los espacios de homología que nos interesan usando solamente álgebra lineal. De hecho ni siquiera es posible para n chico usando la computadora.

La teoría de representaciones resulta una herramienta fundamental que nos permite calcular los grupos de homología que nos interesan, no sólo para algunos valores de n sino sorprendentemente para todo valor de n .

Las álgebras \mathcal{L}_n^2 y \mathcal{L}_n^3 tienen una estructura natural de $GL(V)$ -módulos como también sus potencias exteriores. Estas estructuras pasan a la homología ya que los operadores de borde ∂_p son $GL(V)$ -morfismos.

El problema es entonces determinar la estructura de $GL(V)$ -módulo de los grupos de homología que nos interesan. Para esto a partir de la estructuras de $GL(V)$ -módulo de las álgebras \mathcal{L}_n^2 y \mathcal{L}_n^3 , determinamos la estructura de $GL(V)$ -módulo de sus potencias exteriores de orden 2 y 3 para luego calcular el segundo grupo de homología.

Estabilización

La estructura como $GL(V)$ -módulo de \mathcal{L}_n^2 se estabiliza a partir de $n = 3$ y la de \mathcal{L}_n^3 a partir de $n = 4$. Correspondientemente las estructuras de las potencias exteriores involucradas también se estabilizan para ciertos n . Este fenómeno es el que nos permite independizarnos de n y calcular la homología que nos interesa para todo n . Más precisamente la estructura de $GL(V)$ -módulo de $\Lambda^3\mathcal{L}_n^2$ y la de $\Lambda^3\mathcal{L}_n^3$ se estabilizan para $n = 6$ (para los submódulos que

nos interesa descomponer). Aún en estos casos los espacios involucrados son de tamaño muy grande. En efecto recordemos que para $n = 6$,

$$\dim \mathcal{L}_n^2 = 147; \quad \dim \Lambda^2 \mathcal{L}_n^2 = 1.0731; \quad \dim \Lambda^3 \mathcal{L}_n^2 = 518.665$$

y

$$\dim \mathcal{L}_n^3 = 588; \quad \dim \Lambda^2 \mathcal{L}_n^3 = 172.578; \quad \dim \Lambda^3 \mathcal{L}_n^3 = 33.710.236.$$

Las estructura de $GL(V)$ -módulo de los espacios involucrados, para $n \leq 6$, la determinamos calculando todos los vectores de peso máximo. Esto lo hacemos implementando los algoritmos lineales correspondientes en Maple.

Así, por ejemplo para encontrar vectores de peso máximo del submódulo $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \subset \Lambda^3 \mathcal{L}_n^3$, para $n = 6$, cuya dimensión es 238.140, se agrupó los vectores de una base formada por vectores peso según su peso, consideramos sólo los de peso dominante y en el espacio que éstos generan se determinó el núcleo común de los 15 operadores de crecimiento. Para este caso concreto una computadora moderna demoró aproximadamente 36 horas, para obtener como resultado 93 vectores de peso máximo que ocupan casi 95 páginas.

Las componentes irreducibles de cada submódulo (de \mathcal{L}_n^k , $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^k)$ y $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^k)$ con $k = 2, 3$) fueron encontradas usando los programas que están en la sección 7 y se encuentran en la sección 9 bajo el título **Vectores de peso máximo de Lnk**. Una vez propuestos los vectores de peso máximo, es fácil comprobar que en efecto lo son, verificando que son anulados por todos los operadores de crecimiento. Luego usando las fórmulas usuales se puede determinar las dimensiones del submódulo a descomponer y la de los correspondientes submódulos irreducibles. Si la suma de las dimensiones de todas las componentes irreducibles propuestas es igual a la del submódulo en cuestión se sigue que esa es su descomposición en irreducibles.

6.1 Caso \mathcal{L}_n^2

Dado V un espacio vectorial de dimensión n consideramos el álgebra de corrientes

$$\mathcal{L}_n^2 = (V \oplus \Lambda^2 V) \otimes (\mathbb{C} \oplus V)$$

introducida en el Capítulo 4.

6.1.1 Estructura de \mathcal{L}_n^2

Consideramos la siguiente descomposición de \mathcal{L}_n^2 como suma directa de submódulos:

$$\mathcal{L}_n^2 = (V \otimes \mathbb{C}) \oplus (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V).$$

Tenemos la siguiente tabla

\mathcal{L}_n^2			
	Submódulo	Peso Total	Dimensión
1	$V \otimes \mathbb{C}$	1	n
2	$\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$	2	$\frac{n(n-1)}{2}$
3	$V \otimes V$	2	n^2
4	$\Lambda^2 V \otimes V$	3	$\frac{n^2(n-1)}{2}$

Table 1: Descomposición de \mathcal{L}_n^2

6.1.2 Estructura de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$

Recordemos que dado dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo W_1 y W_2

$$\Lambda^2(W_1 \oplus W_2) \cong \Lambda^2 W_1 \oplus (W_1 \otimes W_2) \oplus \Lambda^2 W_2.$$

Así, resulta que:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(\mathcal{L}_n^2) = & (\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})) \oplus (\Lambda^2(V \otimes V)) \oplus (\Lambda^2(\Lambda^2(V) \otimes \mathbb{C})) \oplus (\Lambda^2(\Lambda^2(V) \otimes V)) \\ & \oplus ((V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)) \oplus ((V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2(V) \otimes \mathbb{C})) \oplus ((V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2(V) \otimes V)) \\ & \oplus ((V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})) \oplus ((V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)) \oplus ((\Lambda^2(V) \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)). \end{aligned}$$

En esta primera descomposición de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$ ordenaremos los 10 submódulos de acuerdo a su peso total en la tabla que sigue. Hacemos notar que la mayoría de éstos no son irreducibles.

$\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$		
Submódulo	Peso Total	Dimensión
$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})$	2	$\frac{n(n-1)}{2}$
$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$	3	n^3
$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	3	$\frac{n^2(n-1)}{2}$
$\Lambda^2(V \otimes V)$	4	$\frac{n^2(n^2-1)}{2}$
$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	4	$\frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{8}$
$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	4	$\frac{n^3(n-1)}{2}$
$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	4	$\frac{n^3(n-1)}{2}$
$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	5	$\frac{n^4(n-1)}{2}$
$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	5	$\frac{n^3(n-1)^2}{4}$
$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	6	$\frac{n^2(n-1)(n^3-n^2-2)}{8}$

6.1.3 Análisis del núcleo e imagen de ∂_2 para \mathcal{L}_n^2

Basta Considerar V tal que $\dim(V) = 6$ pues en $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$ el peso total máximo que aparece es 6. Fijo $\{e, f, g, h, v, w\}$ una base de V .

Recordemos que

$$\partial_2 : \Lambda^2(\mathcal{L}_n^2) \longrightarrow \mathcal{L}_n^2.$$

Proposición 6.1. *La diferencial $\partial_2 : \Lambda^2(\mathcal{L}_n^2) \longrightarrow \mathcal{L}_n^2$ como homomorfismo de $GL(V)$ -módulo satisface que*

	Submódulo	Nu(∂_2)	Im(∂_2)
1	$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})$	0	$\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$
2	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$	$\langle v_2^1 \rangle \oplus \langle v_2^2 + v_2^3 \rangle$	$\Lambda^2 V \otimes V$
3	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	0
4	$\Lambda^2(V \otimes V)$	$\Lambda^2(V \otimes V)$	0
5	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	0
6	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
7	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	0
8	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
9	$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
10	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	0

Donde v_2^1 es un vector de peso máximo de peso $(3, 0, \dots, 0)$ y $v_2^2 + v_2^3$ es un vector de peso máximo de peso $(2, 1, 0, \dots, 0)$ ambos pertenecientes a $(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$.

Notación.

- Con la letra u_i^j , denotaremos a los vectores de peso máximo de \mathcal{L}_n^k ,
- Con la letra v_i^j , denotaremos a los vectores de peso máximo de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^k)$,
- Con la letra w_i^j , denotaremos a los vectores de peso máximo de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^k)$.

donde i nos indica el submódulo al cual pertenece en la descomposición previamente fijada de \mathcal{L}_n^k , $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^k)$ y $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^k)$ respectivamente y j el lugar del vector de peso máximo en la descomposición en irreducibles de dicho submódulo obtenidos con los procedimientos Maple de la Sección 7. Estos se encuentran en el output del Maple grabado en el CD de la Sección 9. En la mayoría de los casos los vectores de peso máximo utilizados han sido transcriptos.

Prueba. Procedemos caso por caso.

Primer submódulo: $\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})$

Si $(x \otimes 1) \wedge (y \otimes 1) \in \Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})$, $\partial_2((x \otimes 1) \wedge (y \otimes 1)) = (x \wedge y) \otimes 1 \in \Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$. Luego $\partial_2(\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})) \subseteq \Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$.

Observemos que $\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$ es el segundo submódulo en la descomposición de \mathcal{L}_n^2 y que tanto $\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})$ como $\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$ son irreducibles.

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$
$(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$v_1^1 = (e \otimes 1) \wedge (f \otimes 1)$	$u_2^1 = (e \wedge f) \otimes 1$

Evaluando tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_2(v_1^1) &= \partial_2((e \otimes 1) \wedge (f \otimes 1)) \\ &= (e \wedge f) \otimes 1 \\ &= u_2^1. \end{aligned}$$

Así, resulta que:

Submódulo	Nu(∂_2)	Im(∂_2)
$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C})$	0	$\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$

Segundo submódulo: $(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$

Si $(x \otimes 1) \otimes (y \otimes z) \in (V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$, $\partial_2((x \otimes 1) \otimes (y \otimes z)) = (x \wedge y) \otimes z \in \Lambda^2 V \otimes V$. Luego $\partial_2((V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)) \subseteq \Lambda^2 V \otimes V$. La siguiente tabla muestra la descomposición en irreducibles de ambos módulos y vectores de peso máximo para cada uno de ellos con sus pesos correspondientes. Cabe observar que $\Lambda^2 V \otimes V$ es el cuarto submódulo en la descomposición de \mathcal{L}_n^2 .

Peso	Vectores de peso máximo de $(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes V$
$(3, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$v_2^1 = (e \otimes 1) \otimes (e \otimes e)$	
$(2, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$v_2^2 = (e \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \otimes 1) \otimes (f \otimes e)$ $v_2^3 = (e \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (f \otimes 1) \otimes (e \otimes e)$	$u_4^1 = (e \wedge f) \otimes e$
$(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$v_2^4 = (e \otimes 1) \otimes (f \otimes g) - (e \otimes 1) \otimes (g \otimes f) -$ $(f \otimes 1) \otimes (e \otimes g) + (f \otimes 1) \otimes (g \otimes e) +$ $(g \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (g \otimes 1) \otimes (f \otimes e)$	$u_4^2 = (f \wedge g) \otimes e - (e \wedge g) \otimes f +$ $(e \wedge f) \otimes g$

Evaluamos ahora ∂_2 en estos vectores de peso máximo.

Para el vector de peso $(3, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_2(v_2^1) &= \partial_2((e \otimes 1) \otimes (e \otimes e)) \\ &= (e \wedge e) \otimes 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para los vectores de peso $(2, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_2(v_2^2) &= \partial_2((e \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \otimes 1) \otimes (f \otimes e)) \\ &= -(e \wedge f) \otimes e \\ &= -u_4^1 \\ \partial_2(v_2^3) &= \partial_2((e \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (f \otimes 1) \otimes (e \otimes e)) \\ &= (e \wedge f) \otimes e \\ &= u_4^1.\end{aligned}$$

Para el vector de peso $(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_2(v_2^4) &= \partial_2((e \otimes 1) \otimes (f \otimes g) - (e \otimes 1) \otimes (g \otimes f) - (f \otimes 1) \otimes (e \otimes g) \\ &\quad + (f \otimes 1) \otimes (g \otimes e) + (g \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (g \otimes 1) \otimes (f \otimes e)) \\ &= 2(e \wedge f) \otimes g - 2(e \wedge g) \otimes f + 2(f \wedge g) \otimes e \\ &= 2u_4^2.\end{aligned}$$

Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_2) \subseteq \Lambda^2 V \otimes V$
$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$	$\langle v_2^1 = (e \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle \oplus$ $\langle v_2^2 + v_2^3 = 2(e \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \otimes 1) \otimes (f \otimes e) -$ $(f \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle$	$\Lambda^2 V \otimes V$

Tercer submódulo: $(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$

Si $(x \otimes 1) \wedge (y \wedge z \otimes 1) \in (V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$, $\partial_2((x \otimes 1) \otimes (y \wedge z \otimes 1)) = 0 \otimes 1 = 0$.
Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_2)$
$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	0

Cuarto submódulo: $\Lambda^2(V \otimes V)$

Si $(x \otimes y) \wedge (z \otimes w) \in \Lambda^2(V \otimes V)$, $\partial_2((x \otimes y) \otimes (z \otimes w)) = x \wedge z \otimes 0 = 0$. Notar que esto es debido al producto del álgebra asociativa truncada A_2 .

Así, resulta que:

Submódulo	Nu(∂_2)	Im(∂_2)
$\Lambda^2(V \otimes V)$	$\Lambda^2(V \otimes V)$	0

Submódulos restantes

La imagen por ∂_2 de estos 6 submódulos es nula, ya que $\Lambda^2 V \otimes (\mathbb{C} \oplus V)$ es el centro de \mathcal{L}_n^2 y el segundo factor tensorial de estos submódulos son $\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}$ o $\Lambda^2 V \otimes V$.

Así, resulta que:

Submódulo	Nu(∂_2)	Im(∂_2)
$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	0
$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	0
$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	0

□

6.1.4 Estructura de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$

Como hicimos con $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$, podemos descomponer $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$ como suma directa de 20 submódulos ordenados de acuerdo a su peso total en la tabla que sigue.

$\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$			
	Submódulo	Peso Total	Dimensión
1	$\Lambda^3(V \otimes \mathbb{C})$	3	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
2	$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	4	$\frac{n^2(n-1)^2}{4}$
3	$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$	4	$\frac{n^3(n-1)}{2}$
4	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \mathbb{C})$	5	$\frac{n^3(n^2-1)}{2}$
5	$\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	5	$\frac{n^3(n-1)^2}{4}$
6	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes \mathbb{C})$	5	$\frac{n^2(n-1)(n(n-1)-2)}{8}$
7	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	5	$\frac{n^4(n-1)}{2}$
8	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	6	$\frac{n^5(n-1)}{2}$
9	$\Lambda^3(V \otimes V)$	6	$\frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)}{6}$
10	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	6	$\frac{n(n-1)(n(n-1)-2)(n(n-1)-4)}{48}$
11	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	6	$\frac{n^3(n-1)^2(n+1)}{4}$
12	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$	6	$\frac{n^3(n-1)(n(n-1)-2)}{8}$
13	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	6	$\frac{n^4(n-1)^2}{4}$
14	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	7	$\frac{n^4(n-1)^2(n+1)}{4}$
15	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	7	$\frac{n^3(n-1)^2(n^2-n-2)}{16}$
16	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \mathbb{C})$	7	$\frac{n^3(n-1)(n^2(n-1)-2)}{8}$
17	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	7	$\frac{n^5(n-1)^2}{4}$
18	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	8	$\frac{n^4(n-1)(n^2(n-1)-2)}{8}$
19	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$	8	$\frac{n^3(n-1)^2(n^2(n-1)-2)}{16}$
20	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes V)$	9	$\frac{n^2(n-1)(n^2(n-1)-2)(n^2(n-1)-4)}{48}$

6.1.5 Análisis de la imagen de ∂_3 para \mathcal{L}_n^2

En esta sección sólo analizaremos la imagen de ∂_3 pues es lo que necesitamos para determinar el segundo grupo de homología.

Observemos que a pesar de que el máximo peso total es 9, la dimensión de V con la que seguiremos trabajando es 6 ya que el peso total máximo de los submódulos que necesitamos descomponer como suma de irreducibles a lo sumo es 6.

Como ya lo hicimos en la demostración de la proposición 6.1, dado un submódulo de la descomposición de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$ evaluaremos explícitamente ∂_3 en un elemento genérico de éste, para saber donde está contenida su imagen. A continuación obtendremos las imágenes de los vectores

de peso máximo de cada componente irreducible de dicho submódulo para escribir la imagen como suma directa de irreducibles. Luego de analizar todos los submódulos enunciaremos el lema con las conclusiones.

Cabe recordar que las componentes irreducibles de cada submódulo (de \mathcal{L}_n^k , $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^k)$ y $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^k)$ con $k = 2, 3$) fueron encontradas usando los programas que están en la sección 7 y dichas componentes se encuentran en la sección bajo el título **Vectores de peso máximo de Lnk**.

Observaciones.

- De aquí en adelante, para abreviar la nomenclatura de los submódulos involucrados en la descomposición de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$ y de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$, identificaremos aquellos que tengan un factor de la forma $W \otimes \mathbb{C}$ con W , ya que estos son isomorfos. Así, $\Lambda^3(V \otimes \mathbb{C}) \cong \Lambda^3 V$ y $(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \cong V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$. Esto no causará confusión si uno sabe en que contexto está trabajando. Por ejemplo $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$ se corresponde con el submódulo $\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$ en $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$ y con $(\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V)$ en $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$. Por otra parte el submódulo $\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V$ se corresponde con $\Lambda^2(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C})$ en $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$.
- Con el objetivo de que la notación no interfiera en el desarrollo de lo que sigue, de ahora en adelante, en la notación suprimiremos la unidad del álgebra asociativa y los productos tensoriales y exteriores. Así, un elemento de $\Lambda^3 V \cong \Lambda^3(V \otimes \mathbb{C})$ de la forma $(x \otimes 1) \wedge (y \otimes 1) \wedge (z \otimes 1)$ lo identificaremos con xyz . Esto no causará confusión si uno sabe en que contexto está trabajando. Por ejemplo $xyzt \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \subset \Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$ es en realidad el vector $(x \wedge y \otimes 1) \otimes (z \otimes t)$, pero $xyzt \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \subset \Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$ es el vector $(x \otimes 1) \wedge (y \otimes 1) \otimes (z \otimes t)$.
- Recordemos que:
 - Con la letra u_i^j , denotaremos a los vectores de peso máximo de \mathcal{L}_n^k ,
 - Con la letra v_i^j , denotaremos a los vectores de peso máximo de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^k)$ y
 - Con la letra w_i^j , denotaremos a los vectores de peso máximo de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^k)$.

donde i nos indica el submódulo al cual pertenece en la descomposición previamente fijada de \mathcal{L}_n^k , $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^k)$ y $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^k)$ respectivamente y j el lugar del vector de peso máximo en la descomposición en irreducibles de dicho submódulo obtenidos con los procedimientos Maple de la Sección 7. En la mayoría de los casos los vectores de peso máximo utilizados han sido transcritos.

Primer submódulo: $\Lambda^3 V$

Si $xyz = x \wedge y \wedge z \in \Lambda^3 V$,

$$\begin{aligned} \partial_3(xyz) &= (x \wedge y) \otimes z - (x \wedge z) \otimes y + (y \wedge z) \otimes x \\ &= xyz - xzy + yzx \in \Lambda^2 V \otimes V. \end{aligned}$$

Luego necesitamos la descomposición en irreducibles de $\Lambda^3 V$ y $\Lambda^2 V \otimes V$. La siguiente tabla muestra la descomposición en irreducibles de ambos módulos y vectores de peso máximo para cada uno de ellos con sus pesos correspondientes. Observemos que $\Lambda^3 V$ es irreducible.

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^3 V$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes V$
$(2, 1, 0, 0, \dots, 0)$	—	$v_3^1 = efe$
$(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$w_1^1 = efg$	$v_3^2 = fge - egf + efg$

Para el vector de peso máximo de peso $(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}
 \partial_3(w_1^1) &= \partial_3(e \wedge f \wedge g) \\
 &= (e \wedge f) \otimes g - (e \wedge g) \otimes f + (f \wedge g) \otimes e \\
 &= efg - egf + fge \\
 &= v_3^2.
 \end{aligned}$$

Notemos que v_3^1 no pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$

Así, resulta que:

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes V$	Vectores de peso máximo de $\partial_3(\Lambda^3 V) \subseteq \Lambda^2 V \otimes V$
$(2, 1, 0, 0, \dots, 0)$	v_3^1	-
$(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	v_3^2	v_3^2

Segundo submódulo: $\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$

Si $xyzt = (x \otimes 1) \wedge (y \otimes 1) \otimes (z \wedge t \otimes 1) \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$,

$$\begin{aligned}
 \partial_3(xyzt) &= \partial_3((x \otimes 1) \wedge (y \otimes 1) \otimes (z \wedge t \otimes 1)) \\
 &= ([x, y] \otimes 1) \wedge (z \wedge t \otimes 1) - ([x, z \wedge t] \otimes 1) \wedge (y \otimes 1) \\
 &\quad + ([y, z \wedge t] \otimes 1) \wedge (x \otimes 1) \\
 &= (x \wedge y \otimes 1) \wedge (z \wedge t \otimes 1) - 0 + 0 \\
 &= xyzt \in \Lambda^2(\Lambda^2 V)
 \end{aligned}$$

El módulo $\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$ no es irreducible, en cambio $\Lambda^2(\Lambda^2 V)$ si. En efecto tenemos que

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(\Lambda^2 V)$
$(2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_2^1 = efef$	—
$(2, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_2^2 = efeg - egef$	$v_5^1 = efeg$
$(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$w_2^3 = -efgh + egfh - ehfg - fgeh + fheg - ghef$	—

Evaluando ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$

Para el vector de peso $(2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_2^1) = 0.$$

Para el vector de peso $(2, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} \partial_3(w_2^2) &= \partial_3(efeg) \\ &= efeg \\ &= v_5^1. \end{aligned}$$

Para el vector de peso $(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_2^3) = 0.$$

Así, resulta que:

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	Vectores de peso máximo de $\partial_3(\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)) \subseteq \Lambda^2(\Lambda^2 V)$
$(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$	v_5^1	v_5^1

Tercer submódulo: $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$

Si $xyzt \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$

$$\begin{aligned} \partial_3(xyzt) &= [x, y]zt - [x, z]ty + [y, z]tx \\ &= (xyzt) + (-xzty + yzty) \subset \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V. \end{aligned}$$

La descomposición en irreducibles de $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$ y $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$ está dada en la siguiente tabla.

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$	
$(3, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_3^1 = -efee$	$v_7^1 = efee$	$v_6^1 = efee$
$(2, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_3^2 = -fgee + egef - efeg$ $w_3^3 = fgee - egfe + efge$	$v_7^2 = -fgee + egef - efeg$ $v_7^3 = fgee - egfe + efge$	$v_6^2 = -fgee + egef - efeg$ $v_6^3 = fgee - egfe + efge$
$(2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_3^4 = efef - effe$	$v_7^4 = efef - effe$	$v_6^4 = efef - effe$
$(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$w_3^5 = -ghef + fh eg - fgeh +$ $ghfe - ehfg + egfh - fhge +$ $ehgf - efgh + fghe -$ $eghf + efhg$	$v_7^5 = -ghef + fh eg - fgeh +$ $ghfe - ehfg + egfh - fhge +$ $ehgf - efgh + fghe -$ $eghf + efhg$	$v_6^5 = -ghef + fh eg - fgeh +$ $ghfe - ehfg + egfh - fhge +$ $ehgf - efgh + fghe -$ $eghf + efhg$

Para el vector de peso máximo de peso $(3, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_3^1) &= [-efee] + [efee] \\ &= -v_7^1 + v_6^1.\end{aligned}$$

Esta imagen junto con v_6^1 o v_7^1 son linealmente independientes y como en $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$ hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_6^1 o v_7^1 no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para los vectores de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_3^2) &= -[fgee - egfe + efge] - [efeg - egef + egfe - efge] \\ &= v_7^2 + v_6^2 + v_6^3 \\ \partial_3(w_3^3) &= [fgee - egfe + efge] + 2[efeg - egef + fgee] \\ &= v_7^3 - 2v_6^2.\end{aligned}$$

Estas imágenes junto con v_6^2 y v_6^3 (o v_7^2 y v_7^3) son linealmente independientes y como en $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$ hay cuatro vectores de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_6^2 y v_6^3 (o v_7^2 y v_7^3) no pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso máximo de peso $(2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_3^4) &= [efef - effe] + [-effe + efef] \\ &= v_7^4 + v_6^4.\end{aligned}$$

Esta imagen junto con v_6^4 o v_7^4 son linealmente independientes y como en $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$ hay dos vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_6^4 o v_7^4 no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso máximo de peso $(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_3^5) &= -[ghcf - fhcg + fgeh - ghfe + ehfg - egfh + fhge \\ &\quad - ehgf + efgh - fghe + eghf - efhg] \\ &\quad - 2[egfh - ehfg - efgh + ehgf + efhg - eghf - fgeh \\ &\quad + fhcg - fhge + fghe - ghcf + ghfe] \\ &= v_7^5 - 2v_6^5.\end{aligned}$$

Esta imagen junto con v_6^5 o v_7^5 son linealmente independientes y como en $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$ hay dos vectores de peso máximo de peso $(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_6^5 o v_7^5 no pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Así, resulta que:

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$		Vectores de peso máximo de $\partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) \subseteq \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$
$(3, 1, 0, 0, \dots, 0)$	v_7^1	v_6^1	$-v_7^1 + v_6^1$
$(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$	v_7^2	v_6^2	$v_7^2 + v_6^2 + v_6^3$
	v_7^3	v_6^3	$v_7^3 - 2v_6^3$
$(2, 2, 0, 0, \dots, 0)$	v_7^4	v_6^4	$v_7^4 + v_6^4$
$(1, 1, 1, 1, \dots, 0)$	v_7^5	v_6^5	$v_7^5 - 2v_6^5$

Observación. Observamos que

$$\begin{aligned}\partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) &= \langle -v_7^1 + v_6^1 \rangle \oplus \langle v_7^2 + v_6^2 + v_6^3 \rangle \oplus \langle v_7^3 - 2v_6^3 \rangle \\ &\quad \oplus \langle v_7^4 + v_6^4 \rangle \oplus \langle v_7^5 - 2v_6^5 \rangle \\ &\cong \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \\ &\cong (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V) / \text{Im } \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) \simeq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$$

o

$$(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V) / \text{Im } \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) \simeq \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V).$$

Cuarto submódulo: $\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$

Si $xyztu \in \Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$

$$\begin{aligned}\partial_3(xyztu) &= -[x, u]yzt + [z, u]txy \\ &= -xuyzt + zutxy \in (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V).\end{aligned}$$

La descomposición de $\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$ y $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$ en submódulos irreducibles se muestra en la siguiente tabla:

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$
(4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_4^1 = -eeefe$ $w_4^2 = -eefee$	$v_8^1 = -efeee$
(3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_4^3 = eeffe - effee - 2eeeff$ $w_4^4 = eeffe - eefff - eefef$	$v_8^5 = efef - effee$ $v_8^6 = efef - efefe$
(3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_4^5 = -eefge + eegfe + efgee - egfee - 2fegee$ $w_4^6 = efgee - egfee - fegee - eeeff + eefgf$ $w_4^7 = -fegee + eegfe - eefgf$ $w_4^8 = efefe + efgee - egfee - fegee$	$v_8^2 = fggee - egeef + efef$ $v_8^3 = -fggee + egefe - efefe$ $v_8^4 = -fggee + egfee - efgee$
(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_4^9 = -efgef + egfef - effge + 2efgfe - egffe - fegfe - ffgge + eefgf - eegff + 2fegef$ $w_4^{10} = efgfe - egffe - feffe - ffgge + eefgf - eegff - efgef + fegef$	$v_8^7 = fggef - fgefe - egfef + egffe + efgef - efgfe$ $v_8^8 = -fggef + egeff - efgef + fgfee - egffe + efgfe$ $v_8^9 = -fgefe + egeff - eefgf + fgfee - egfef + efgfe$
(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)	$w_4^{11} = feghe - fehge - fghee + fhgee + gehfe + gfhee - eeghf + eehgf + eghef - ehgef - 2gehef + eefgh - eefgh - efheg + ehgef + 2feheg - eefgh + eefgh + efgeh - egfeh - 2fegeh$ $w_4^{12} = efghe - efhge - egfhe + eghfe + ehfge - ehgfe + feffe - fehge - fghee + fhgee + gehfe + gfhee - 2eeghf + 2eehgf + 2egehf - 2gehef + 2eehgf - 2eehgf - 2efehg + 2feheg - 2eefgh + 2eefgh + 2efehg - 2fegeh$	$v_8^{10} = egehf - efegh - ghfee + ehfge - egfhe + fhgee - ehgfe + gheef - fheeg + fggeh + ehfg - egef - ehgef + efegh + efghe - fghee + eghfe - efhge$ $v_8^{11} = ehfg - egef - ehgef + efegh + egehf - efegh - ehfg + egfeh + ehfge - egfhe + ehgef - efghe - ehgfe + efghe - eghef + efheg + eghfe - efhge$ $v_8^{12} = -gheef + fheeg - fggeh + ghefe - ehfg + egef - fhege + ehgef - efegh + fgehe - egehf + efegh$
(1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)		$v_8^{13} = hvefg - gvehf + ghefv - hvegf + fvegh - fhgev + gvehf - fvehg + fgehv - ghevf + fhev - fgev - hvfeg + gvfeh - ghfev + hvfge - evfgh + ehfgv - gvffe + evfhg - egfhv + ghfve - ehfv + egfvh + hvgef - fvgeh + fhgev - hvffe + evfgh - ehgfv + fvge - evghf + efgvh - fhgve + ehgvf - efgvh - gvhef + fvheg - fghev + gvffe - evhfg + eghfv - fvheg + evhgf - efghv + fghve - eghvf + efhv + ghvef - fhveg + fgveh - ghvfe + ehvf - egvf + fhvge - ehvf + efvg - fgve + egvhf - efvhg$

Evaluamos ahora ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo.

Para los vectores de peso máximo de peso (4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)

$$\begin{aligned}\partial_3(w_4^1) &= 0 \\ \partial_3(w_4^2) &= -v_8^1.\end{aligned}$$

Luego v_8^1 pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para los vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_4^3) &= -3effee + 3feeff \\ &= 3v_8^5 \\ \partial_3(w_4^4) &= -2effee + efeef + efefe \\ &= 2v_8^5 - v_8^6.\end{aligned}$$

Como las imágenes de w_4^3 y w_4^4 son linealmente independientes pues v_8^5 y v_8^6 lo son, $3v_8^5$ y $2v_8^5 - v_8^6$ pertenecen a la imagen de ∂_3 o lo que es lo mismo v_8^5 y v_8^6 .

Para los vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_4^5) &= 2egefe - 2efege + efeeg - egeef + efgge - egfee \\ &= v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4 \\ \partial_3(w_4^6) &= 2feegg - 2geeff - efegge + egefe - efgge + egfee \\ &= 2v_8^2 + v_8^3 \\ \partial_3(w_4^7) &= -2efege + 2egefe - 2fggee + 2egfee \\ &= 2v_8^3 \\ \partial_3(w_4^8) &= efeeg - egeef + egefe - efegge \\ &= v_8^2 + v_8^3.\end{aligned}$$

De estas cuatro imágenes sólo tres de ellas son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que son las tres primeras. Luego $v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4$, $2v_8^2 + v_8^3$ y $2v_8^3$ pertenecen a la imagen de ∂_3 o lo que es lo mismo v_8^2 , v_8^3 y v_8^4 .

Para los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_4^9) &= v_8^7 + v_8^9 \\ \partial_3(w_4^{10}) &= -v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes junto con v_8^9 son linealmente independientes y como hay tres vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$ podemos, hasta aquí, suponer que v_8^9 no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para los vectores de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_4^{11}) &= -4v_8^{12} - 2v_8^{10} \\ \partial_3(w_4^{12}) &= -4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11}.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes junto con v_8^{12} son linealmente independientes y como hay tres vectores de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$ podemos, hasta aquí, suponer que v_8^{12} no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Así, resulta que:

Peso	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	Vectores de peso máximo de $\partial_3(\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V)$
$(4, 1, 0, 0, 0, 0 \dots, 0)$	v_8^1	v_8^1
$(3, 2, 0, 0, 0, 0 \dots, 0)$	v_8^5 v_8^6	v_8^5 v_8^6
$(3, 1, 1, 0, 0, 0 \dots, 0)$	v_8^2 v_8^3 v_8^4	v_8^2 v_8^3 v_8^4
$(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^7 v_8^8 v_8^9	$v_8^7 + v_8^9$ $-v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8$ -
$(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^{10} v_8^{11} v_8^{12}	$-4v_8^{12} - 2v_8^{10}$ $-4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11}$ -
$(1, 1, 1, 1, 0, 0 \dots, 0)$	v_8^{13}	-

Quinto submódulo: $\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

Si $xyztu \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$, $\partial_3(xyztu) = xyztu \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$ luego es sobre. Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Im}(\partial_3)$
$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

Sexto submódulo: $\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$

Si $xyztu \in \Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$

$$\begin{aligned}
\partial_3(xyztu) &= [xy, zt]u - [xy, u]zt + [zt, u]xy \\
&= 0u - 0zt + 0xy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Im}(\partial_3)$
$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$	0

Séptimo submódulo: $V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$

Si $xyztu \in V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$

$$\begin{aligned}\partial_3(xyztu) &= [x, y]ztu - [x, t]uyz + 0x \\ &= [x, y]ztu - [x, t]uyz \in (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V\end{aligned}$$

$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \cong \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \subset \text{Im}(\partial_3)$ por el quinto submódulo.

Así, resulta que:

$\partial_3(V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V)$ no aporta nada nuevo a la imagen de ∂_3 .

Octavo submódulo: $V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

Si $xyztuv \in V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$,

$$\begin{aligned}\partial_3(xyztuv) &= [x, y]ztuv - [x, tu]vyz + [yz, tu]vx \\ &= xyztuv - 0vyz + 0vx \\ &= xyztuv \in \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V).\end{aligned}$$

Los vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$ y $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$ se muestran en la siguiente tabla.

Peso	Vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$
$(5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_8^1 = -eeeefe$	
$(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_8^2 = -efefge + eegefe + eeeegf - eeeefg$ $w_8^3 = -efeege + egeefe + eeeegf - eeeefg$ $w_8^4 = -eeefge + eeeegf - eeeefg$ $w_8^5 = -feeege + geeefe + eeeegf - eeeefg$	$v_{10}^4 = -efeege$
$(4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_8^6 = efefef - feeeef$ $w_8^7 = -efefef + efefef$ $w_8^8 = efefef - eeeeff$	
$(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_8^9 = -eeffge + efefge - egfefe + feefge - ffeege + fggefe$ $w_8^{10} = efgefe - egfefe - eegeff + egeeff + eeefgf - efefgf$ $w_8^{11} = eeffge - feefge - eeefgf + feeeegf + eeefgf - feeeefg$ $w_8^{12} = eeffge + efefge - efefge + egfefe - feefge - eeeffg -$ $eggeff + feeeegf + efefgf - feeeefg$ $w_8^{13} = efgefe - egfefe - fegefe + gefefe + egeeff - geeeff -$ $efefgf + feeeefg$ $w_8^{14} = efgefe - egfefe - fegefe + fggefe + gefefe - gfefef$ $w_8^{15} = efefge - feefge - efefgf + feeeegf + efefgf - feeeefg$ $w_8^{16} = -efefge + efefge - efgefe + feefge - feefge + fegefe$	$v_{10}^2 = -efefgf + efefge - efefge$ $v_{10}^3 = -efeeegf + 2efefge - efefge$
$(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_8^{17} = heefge - hefege + hegefe - eeeghf + eegehf - eeeghf +$ $feeghe - fegehe + fehege - geeffe + gefefe - gehefe +$ $eeefhg - eeefhg + eehefg - eeeefg + eeefgh - eeefgh$	$v_{10}^5 = -feeghe + efefgh -$ $efefge + efgehe - efhege -$ $eeeghf + eegehf - efgehe -$

	$w_8^{18} = efgehe - efhege - egfehe + eghefe + ehfege - ehgefe +$ $feeghe - fegehe + fehege - geeffe + gefehe - gehefe +$ $heefge - hefefe + hegefe - eeeghf + egeehf - cheegf$ $eeefhg - efeehg + cheefg - eefgh + efeegh - egeefh$ $w_8^{19} = eefghe - eegfhe + eehfge - feeghe + fegehe - fehege +$ $eeefhe - gefehe + gehefe - heefge + hefefe - hegefe$ $w_8^{20} = efeghe - egeffe + ehfge - eeeghf + egeehf - cheegf$ $eeefhg - efeehg + cheefg - eefgh + efeegh - egeefh$ $w_8^{21} = -feeghe + fgeeh - fhege + geeffe - gfeeh + gheefe -$ $heefge + hfeeg - hgeefe + eeeghf - egeehf + cheegf -$ $eeefhg + efeehg - cheefg + eefgh - efeegh + egeefh$ $w_8^{22} = -feeghe + geeffe - heefge + eeeghf - egeehf + heeegf -$ $eeefhg + ffeehg - heefg + eefgh - feeehg + geeefh$	$ehfge$
(3, 3, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$w_8^{23} = -effefe + ffeefe + eeefff - feeeff$ $w_8^{24} = -fefefe + ffeefe + eeefff - efeeff$	$v_{10}^1 = efeeff$
(2, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$w_8^{25} = -eeefgh + egfeh - ehfeg + feeghf - fgeehf + fheegf +$ $effghe - egffhe + ehffge - ffeghe + fgefhe - fhfge$ $eeffhg - eeffeh + ehfeg - feefhg + ffeehg - fheefg -$ $eeffgh + eeffgh - egfefh + feefgh - ffeegh + fgeefh$ $w_8^{26} = fefghe - fegfhe + fhfge - ffeghe + ffgehe - ffhege +$ $fgefhe - fghefe + fhfge - fhfge + fhfge - fhfge -$ $eeefgh + eegffh - eehffg + eefghf - eefghf + eefghf -$ $egfgh + egfeh - egheff + ehfeg - ehfeg + ehfeg$ $w_8^{27} = fghefe - fhfge - gfhefe + ghfefe + hfgefe - hgfeff -$ $egheff + ehfeg + geheff - gheeff - hegeff + hgeeff +$ $efheff - ehfeg - feheff + fheeff + hefeg - hfeeff -$ $efgef + egfeh + fegef - fgeefh - gefefh + gfeefh$ $w_8^{28} = eefghe - efgfhe + efhfge + fegfhe - fehfge - ffeghe -$ $geffhe + gfeffe + heffge - hfefge - eefghf + efghef -$ $efheff + feeghf - fegef + feheff + gefehf - gfeehf -$ $hefegf + hfeegf + eeffhg - eeffeh + efheff - feefhg -$ $fehgef + ffeehg + hefeg - hfeeff - eeffgh + eeffgh -$ $efgef + feefgh + fegef - ffeegh - gefefh + gfeefh$ $w_8^{29} = fegfhe - fehfge - ffgehe + ffhege - geffhe + gffehe -$ $gfhefe + heffge - hfgege + hfgefe - eegffh + eehffg +$ $efgef - efheff + geefhf + geheff - gfeehf - heefgf -$ $hegeff + hfeegf + eeffhg - eeffeh + efheff - feefhg -$ $fehgef + ffeehg + hefeg - hfeeff - eeffgh + eeffgh -$ $efgef + feefgh + fegef - ffeegh - gefefh + gfeefh$ $w_8^{30} = eefghe - efgfhe + efhfge - fegfhe + fegfhe - fehfge -$	$v_{10}^6 = efeghf - eeffghe -$ $egfghf + egffhe + ehfeg -$ $ehffge$ $v_{10}^7 = -efgef + efghef -$ $efghe - efheff + efheff -$ $egfgh + egffhe - ehffge -$ $fgefhe$ $v_{10}^8 = -eefgh + eefgh -$ $efeghf + eeffgh - eeffgh +$ $effghe - efgef + efgfhe +$ $efheff - efheff + 2egfgh -$ $2egffhe + 2ehffge + 2fgfhe$

	$ \begin{aligned} &efeghf + efgehf - efhegf + feeghf - fegehf + fehegf + \\ &efefhg - effehg + efhefg - feefhg + fefehg - fehefg - \\ &efefgh + effegh - efgefh + feefgh - fefegh + fegefh \end{aligned} $	
(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$ \begin{aligned} w_8^{31} &= efgfge - egffge - ffgege + fgfege + gfgefe - ggfege - \\ &eegfgf + egefgf + fegeg f - fgeegf - gegeff + ggeeff + \\ &eeffgg - efefgg - fefegg + ffeegg + gefefg - gfeefg \\ w_8^{32} &= -efgfge + egffge + fegfge - fgefge - geffge + gfefge + \\ &efgegf - egfegf - fegeg f + fgeegf + gefegf - gfeegf - \\ &efgefg + egfefg + fegef g - fgeefg - gefefg + gfeefg \\ w_8^{33} &= -efgfge + egffge + ffgege - fgefge - fggefe + gfefge - \\ &gffege + ggfege + eegfgf - egfegf + eggeff - fegeg f + \\ &fgeegf - geeffg + gefegf - ggeeff - eeffgg + eefegg - \\ &efgefg + feefgg + fegef g - ffeegg - gefefg + gfeefg \end{aligned} $	
(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)	$ \begin{aligned} w_8^{34} &= efghve - efhgve + efvghe - egfhve + eghfve - egvfhe + \\ &ehfgve - ehgfve + ehvfge - evfgh e + evgfhe - evhfge - \\ &feghve + fehgve - fevghe + fgehve - fgheve + fgvehe - \\ &fhgve + fhgeve - fhvege + fveghe - fvgehe + fvhege + \\ &gef hve - gehfve + gev fhe - gfheve + gfheve - gfvehe + \\ &ghfve - ghfeve + ghvefe - gvfehe + gvfehe - gvhefe - \\ &hefgve + hegfve - hev fge + hfegve - hfgeve + hfvege - \\ &hgefve + hgfeve - hgvefe + hvefge - hvfege + hvgefe + \\ &vef ghe - vegfhe + vehfge - vfeghe + v fgehe - vfhege + \\ &vgefhe - vgfche + vghfe - vhefge + vhfeg e - v hgef e \\ w_8^{35} &= fgehve - fhgve + fveghe - gfehve + ghefve - gvfehe + \\ &hfegve - hgefve + hvefge - vfeghe + vgefhe - vhefge - \\ &egehvf + ehgvf - eveghf + geehvf - gheevf + gveehf - \\ &heegvf + hgeevf - hveegf + veeghf - vgeehf + vheegf + \\ &efehvg - ehfv g + evfgh - feehvg + fheevg - fveehg + \\ &heefvg - hfeevg + hveefg - vefgh + vfeehg - vheefg - \\ &efegvh + egefvh - evfgh + feegvh - fgeevh + fveegh - \\ &geefvh + gfeevh - gvfevh + vefgh - vfeegh + vgeefh + \\ &efeghv - egef hv + chefgv - feeghv + fgeehv - fheegv + \\ &geefhv - gfeehv + gheefv - heefgv + hfeegv - hgeefv \\ w_8^{36} &= efghve - efhgve + efvghe - egfhve + eghfve - egvfhe + \\ &ehfgve - ehgfve + ehvfge - evfgh e + evgfhe - evhfge - \\ &eeghvf + eehgvf - eevghf + egehvf - eghev f + egvehf - \\ &ehgvf + ehgev f - ehvegf + eveghf - evgeh f + evhegf + \\ &eehvg - eehfv g + eevfhg - efehvg + efhev g - efvehg + \\ &ehfv g - ehfevg + ehvefg - evfgh + evfeh g - evhefg - \\ &eefgvh + eegfvh - eevfgh + efegvh - efgev h + efvegh - \\ &egefvh + egfevh - egvefh + evfgh - evfegh + evgef h + \\ &eefghv - eegfvh + eehfgv - efeghv + efgeh v - efhegv + \end{aligned} $	$ \begin{aligned} v_{10}^9 &= efeghv - efegvh + \\ &efehvg - efghve + efhgve - \\ &efvghe - egef hv + egefvh - \\ &egehvf + egfhve - eghfve + \\ &egvfhe + ehfv g - ehfv g + \\ &ehgvf - ehfv g + ehgvf - \\ &ehvfge - evfgh + evfgh - \\ &evghf + evfgh e - evgfhe + \\ &evhfge \end{aligned} $

$hvefwg - hvfewg + hvwefg - hwefvg + hwfevg - hwvefg -$
 $vefhwg + vehfwg - vewfhg + vfehgw - vfhewg + vfwehg -$
 $vhefwg + vhfewg - vhwefg + vwefhg - vwfehg + vwhefg +$
 $wefhwg - wehfvg + wevfhg - wehvg + wfhev + wfvehg +$
 $whefvg - whfevg + whvefg - wvefhg + wvfehg - wwhefg -$
 $efgvwh + efvgwh - efvgwh + egfvwh - egvfw + egwfvh -$
 $evfgwh + evgfw + evwfg + ewfgvh - ewgfv + ewvfg +$
 $fegvwh - fevgwh + fewgvh - fgevwh + fgvevh - fgwevh +$
 $fvegwh - fvgewh + fvwegh - fwegvh + fwgev + fwvegh -$
 $gefwh + gevfw + gefvh + gfevh - gfvevh + gfwevh -$
 $gvfwh + gvfevh - gvwevh + gvevh - gvfevh + gvvevh +$
 $hvefgwh - vegfwh + vevfgh - vefgwh + vfgewh - vfwegh +$
 $vgefwh - vgfewh + vgwefh - vwevgh + vwfegh - vwgfeh -$
 $wefgvh + wegvh - wevfhg + wfegvh - wfgevh + wfvegh -$
 $wgefwh + wgevh - wgvfwh + wvefgh - wvfegh + wvgef +$
 $efghvw - efghvw + efghvw - egfhwv + eghfvw - egwfvh +$
 $ehfgvw - ehfgvw + ehfgvw - ewfghv + ewgfvh - ewhfgv -$
 $feghvw + fehgvw - fewghv + fgehv - vfghev + fgwehv -$
 $fhgevw + fhgevw - fhwegv + fweghv - fwgevh + fwhegv +$
 $gefhw - vgefhw + gefhw - gfehvw + gfhev - gfwevh +$
 $ghfhw - ghfhw + ghfhw - gwevh + gwfevh - gwhevh -$
 $hefghv + hefghv - hefghv + hfegvw - hfgevw + hfvegv -$
 $hgefhw + hgefhw - hgefhw + hwevgh - hwfegv + hwgef +$
 $wefghv - wegfvh + wehfv - wfeghv + wfgehv - wfhegv +$
 $wgefhw + wgefhw - wgefhw + whfegv - whgef -$
 $efghvw + efghvw - efghvw + egfhwv - eghfvw + egvfhw -$
 $ehfgvw + ehfgvw - ehvfgw + evfghw - evgfhw + evhfgw +$
 $feghvw - fehgvw + fevghw - fgehv + fghev - fgvehw +$
 $fhgevw - fhgevw + fhvegv - fveghw + fvgehw - fvhegv -$
 $gefhw + gefhw - gevfhw + gfehvw - gfhev + gfvehw -$
 $ghfhw + ghfhw - ghvevh + gvevh - gvfevh + gvhevh +$
 $hefghv - hefghv + hevfgw - hfegvw + hfgevw - hfvegv +$
 $hgefhw - hgefhw + hgvevh - hvefgh + hvfegw - hvgef -$
 $vefghw + vegfhw - vehfgw + vfehgw - vfghev + vfhegv -$
 $vgefhw + vgefhw - vgefhw + vhefgh - vfegw + vhefgh$

$fvehgw - fvghe + fvhge -$
 $fvwghe - fweghv + fwegvh -$
 $fwehvg + fwghe - fwhge +$
 $fvwghe + ghevfh - ghfve -$
 $gvehw + gvfhw + gvehw -$
 $gvfhw$

Evaluamos ∂_3 en cada uno de estos vectores.

Para vectores de peso máximo de peso $(5, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_8^1) = 0.$$

pues $\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V)$ no tiene vectores de peso máximo de peso $(5, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$.

Para vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^2) &= 0, \\ \partial_3(w_8^3) &= 2v_{10}^4, \\ \partial_3(w_8^4) &= 0, \\ \partial_3(w_8^5) &= -2v_{10}^4.\end{aligned}$$

Luego el vector de peso máximo v_{10}^4 , de peso $(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$, pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para los vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

Como $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$ no tiene vectores de peso máximo de este peso

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^6) &= 0 \\ \partial_3(w_8^7) &= 0 \\ \partial_3(w_8^8) &= 0\end{aligned}$$

Para vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^9) &= -v_{10}^3, \\ \partial_3(w_8^{10}) &= 2v_{10}^2 - v_{10}^3, \\ \partial_3(w_8^{11}) &= -v_{10}^2 + v_{10}^3, \\ \partial_3(w_{12}) &= -2v_{10}^2 + 2v_{10}^3, \\ \partial_3(w_8^{13}) &= 4v_{10}^2 + 2v_{10}^3, \\ \partial_3(w_8^{14}) &= 2v_{10}^2 - 2v_{10}^3, \\ \partial_3(w_8^{15}) &= -2v_{10}^2 + 2v_{10}^3, \\ \partial_3(w_8^{16}) &= -2v_{10}^2 - 2v_{10}^3.\end{aligned}$$

Luego los vectores de peso máximo v_{10}^3 y $2v_{10}^2 - v_{10}^3$ de peso $(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$ o lo que es lo mismo v_{10}^2 y v_{10}^3 pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^{17}) &= v_{10}^5, \\ \partial_3(w_8^{18}) &= v_{10}^5, \\ \partial_3(w_8^{19}) &= -v_{10}^5, \\ \partial_3(w_8^{20}) &= -v_{10}^5, \\ \partial_3(w_8^{21}) &= v_{10}^5, \\ \partial_3(w_8^{22}) &= -v_{10}^5.\end{aligned}$$

Luego el vector de peso máximo v_{10}^5 de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^{23}) &= 2v_{10}^1, \\ \partial_3(w_8^{24}) &= -v_{10}^1.\end{aligned}$$

Luego el vector de peso máximo v_{10}^1 de peso $(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^{25}) &= 2v_{10}^8, \\ \partial_3(w_8^{26}) &= v_{10}^8 + 2v_{10}^6, \\ \partial_3(w_8^{27}) &= 2v_{10}^8 + 4v_{10}^7, \\ \partial_3(w_8^{28}) &= v_{10}^8 + 4v_{10}^7, \\ \partial_3(w_8^{29}) &= 2v_{10}^8 + 2v_{10}^6 + 4v_{10}^7, \\ \partial_3(w_8^{30}) &= 2v_{10}^8 + 4v_{10}^7.\end{aligned}$$

Luego los vectores de peso máximo $2v_{10}^8$, $v_{10}^8 + 2v_{10}^6$ y $2v_{10}^8 + 4v_{10}^7$ de peso $(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$, ya que los restantes son combinación lineal de estos, o lo que es lo mismo v_{10}^8 , v_{10}^6 y v_{10}^7 pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

Como $\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V)$ no tiene vectores de peso máximo de este peso

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^{31}) &= 0, \\ \partial_3(w_8^{32}) &= 0, \\ \partial_3(w_8^{33}) &= 0.\end{aligned}$$

Para los vectores de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_8^{34}) &= -2v_{10}^9, \\ \partial_3(w_8^{35}) &= 2v_{10}^9, \\ \partial_3(w_8^{36}) &= -v_{10}^9, \\ \partial_3(w_8^{37}) &= -v_{10}^9.\end{aligned}$$

Luego el vector de peso máximo $-2v_{10}^9$ de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$ o lo que es lo mismo v_{10}^9 pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para el vector de peso máximo de peso $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_8^{38}) = -4v_{10}^{10}.$$

Luego v_{10}^{10} pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$.

Así, resulta que:

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V)$	Vectores de peso máximo de $\partial_3(\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V))$
$(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_{10}^4	v_{10}^4
$(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_{10}^2 v_{10}^3	v_{10}^2 v_{10}^3
$(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_{10}^5	v_{10}^5
$(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_{10}^1	v_{10}^1
$(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_{10}^6 v_{10}^7 v_{10}^8	v_{10}^6 v_{10}^7 v_{10}^8
$(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	v_{10}^9	v_{10}^9
$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	v_{10}^{10}	v_{10}^{10}

Noveno submódulo: $\Lambda^3(V \otimes V)$

Si $xyztuv \in \Lambda^3(V \otimes V)$

$$\begin{aligned} \partial_3(xyztuv) &= [x, z]0uv - [x, u]0zt + [z, u]0xy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Im}(\partial_3)$
$\Lambda^3(V \otimes V)$	0

Décimo submódulo: $\Lambda^3(\Lambda^2V)$

Si $xyztuv \in \Lambda^3(\Lambda^2V)$

$$\begin{aligned} \partial_3(xyztuv) &= [xy, zt]uv - [xy, uv]zt + [zt, uv]xy \\ &= 0uv - 0zt + 0xy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Im}(\partial_3)$
$\Lambda^3(\Lambda^2V)$	0

Submódulos restantes:

La imagen por ∂_3 de estos 10 submódulos es nula debido al corchete definido en el álgebra de Lie \mathcal{L}_n o al álgebra asociativa truncada A_2 , sólo tiene sentido analizar ∂_3 en los submódulos que contengan dos factores tensoriales de la forma es $(V \otimes \mathbb{C}) \cong V$ o que contenga el factor tensorial $(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V) \cong V \otimes (V \otimes V)$, como vimos en la demostración de la Proposición 6.1. La siguiente tabla muestra éstos resultados.

	Submódulo	$\text{Im}(\partial_3)$
11	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2V$	0
12	$\Lambda^2(\Lambda^2V) \otimes (V \otimes V)$	0
13	$V \otimes \Lambda^2V \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$	0
14	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$	0
15	$\Lambda^2(\Lambda^2V) \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$	0
16	$\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes V$	0
17	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2V \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$	0
18	$\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	0
19	$\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes (\Lambda^2V)$	0
20	$\Lambda^3(\Lambda^2V \otimes V)$	0

Para sintetizar enunciamos la siguiente proposición cuya demostración se basa en los calculos anteriores

Proposición 6.2. *La diferencial $\partial_3 : \Lambda^3(\mathcal{L}_n^2) \longrightarrow \Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$ como homomorfismo de $GL(V)$ -módulo es tal que*

$\partial_3(\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2))$			
	Submódulo	$\partial_3(\text{Submódulo}) \subseteq$	$\partial_3(\text{Submódulo}) =$
1	Λ^3V	$\Lambda^2V \otimes V = \langle v_3^1 \rangle \oplus \langle v_3^2 \rangle$	$\langle v_3^2 \rangle$
2	$\Lambda^2V \otimes (\Lambda^2V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2V)$
3	$\Lambda^2V \otimes (V \otimes V)$	$\Lambda^2V \otimes (V \otimes V) =$ $\langle v_7^1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_7^5 \rangle$	$\langle -v_7^1 + v_6^1 \rangle \oplus$ $\langle v_7^2 + v_6^2 + v_6^3 \rangle \oplus$

		\oplus $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V =$ $\langle v_7^1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_7^5 \rangle$	$\langle v_7^3 - 2v_6^3 \rangle \oplus$ $\langle v_7^4 + v_6^4 \rangle \oplus$ $\langle v_7^5 - 2v_6^5 \rangle$
4	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) =$ $\langle v_8^1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_8^{13} \rangle$	$\langle v_8^1 \rangle \oplus \langle v_8^2 \rangle \oplus$ $\langle v_8^3 \rangle \oplus \langle v_8^4 \rangle \oplus$ $\langle v_8^5 \rangle \oplus \langle v_8^6 \rangle \oplus$ $\langle v_8^7 + v_8^9 \rangle \oplus$ $\langle -v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus$ $\langle -4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \oplus$ $\langle -4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle$
5	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$
6	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$	0	0
7	$V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$
8	$(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$
9	$\Lambda^3(V \otimes V)$	0	0
10	$\Lambda^3(\Lambda^2 V)$	0	0
11	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
12	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
13	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
14	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
15	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
16	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$	0	0
17	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
18	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
19	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
20	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0

6.1.6 Cálculo de las homología de \mathcal{L}_n^2

Teorema 6.3. *Dado V un espacio vectorial de dimensión n consideramos el álgebra de corrientes*

$$\mathcal{L}_n^2 = (V \oplus \Lambda^2(V)) \otimes (\mathbb{C} \oplus V)$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_0(\mathcal{L}_n^2) &= \mathbb{C} \\ H_1(\mathcal{L}_n^2) &= V \otimes (\mathbb{C} \oplus V) \\ H_2(\mathcal{L}_n^2) &= \langle v_2^1 \rangle \oplus \langle v_2^2 + v_2^3 \rangle \oplus \langle v_3^1 \rangle \oplus \Lambda^2(V \otimes V) \oplus \\ &\quad (\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V) / \text{Im } \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) \\ &\quad \oplus \langle v_8^9 \rangle \oplus \langle v_8^{12} \rangle \oplus \langle v_8^{13} \rangle \\ &\simeq \langle v_2^1 \rangle \oplus \langle v_2^2 + v_2^3 \rangle \oplus \langle v_3^1 \rangle \oplus \Lambda^2(V \otimes V) \\ &\quad \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V \oplus \\ &\quad \langle v_8^9 \rangle \oplus \langle v_8^{12} \rangle \oplus \langle v_8^{13} \rangle \\ &\simeq \langle v_2^1 \rangle \oplus \langle v_2^2 + v_2^3 \rangle \oplus \langle v_3^1 \rangle \oplus \Lambda^2(V \otimes V) \\ &\quad \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus \\ &\quad \langle v_8^9 \rangle \oplus \langle v_8^{12} \rangle \oplus \langle v_8^{13} \rangle . \end{aligned}$$

Prueba.

$$\begin{aligned} \partial_0 : \mathbb{C} &\longrightarrow 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \text{Nu}(\partial_0) = \mathbb{C}, \\ \partial_1 : \mathcal{L}_n^2 &\longrightarrow 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \text{Im}(\partial_1) = 0 \\ &\text{y como } H_0(\mathcal{L}_n^2) = \text{Nu}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$H_0(\mathcal{L}_n^2) = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C}.$$

$$\partial_1 : \mathcal{L}_n^2 \longrightarrow 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \text{Nu}(\partial_1) = \mathcal{L}_n^2,$$

por Proposición 6.1

$$\begin{aligned} \partial_2 : \Lambda^2(\mathcal{L}_n^2) &\longrightarrow \mathcal{L}_n^2 \quad \text{es tal que} \quad \text{Im}(\partial_2) = \Lambda^2 V \otimes (\mathbb{C} \oplus V) \\ &\text{y como } H_1(\mathcal{L}_n^2) = \text{Nu}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$H_1(\mathcal{L}_n^2) = \mathcal{L}_n^2 / \Lambda^2 V \otimes (\mathbb{C} \oplus V) = V \otimes (\mathbb{C} \oplus V).$$

$$\partial_3 : \Lambda^3(\mathcal{L}_n^2) \longrightarrow \Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$$

por Proposición 6.1 y Proposición 6.2 el $\text{Nu}(\partial_2)$ y la $\text{Im}(\partial_3)$ respectivamente son:

	Submódulo de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_3)$
1	$\Lambda^2 V$	0	—
2	$V \otimes (V \otimes V)$	$\langle v_2^1 \rangle = \langle e \otimes (e \otimes e) \rangle \oplus$ $\langle v_2^2 + v_2^3 \rangle = \langle 2e \otimes (e \otimes f) - e \otimes (f \otimes e) - f \otimes (e \otimes e) \rangle$	—
3	$V \otimes \Lambda^2 V \cong \Lambda^2 V \otimes V$	$\Lambda^2 V \otimes V =$ $\langle v_3^1 = eef \rangle \oplus \langle v_3^2 \rangle$	$\langle v_3^2 \rangle$
4	$\Lambda^2(V \otimes V)$	$\Lambda^2(V \otimes V)$	—
5	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$
6	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\langle -v_7^1 + v_6^1 \rangle \oplus$ $\langle v_7^2 + v_6^2 + v_6^3 \rangle \oplus$ $\langle v_7^3 - 2v_6^3 \rangle \oplus$
7	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$\langle v_7^4 + v_6^4 \rangle \oplus$ $\langle v_7^5 - 2v_6^5 \rangle$
8	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \cong$ $(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) =$ $\langle v_8^1 \rangle \oplus \langle v_8^2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_8^{13} \rangle$	$\langle v_8^1 \rangle \oplus \langle v_8^2 \rangle \oplus \langle v_8^3 \rangle \oplus$ $\langle v_8^4 \rangle \oplus \langle v_8^5 \rangle \oplus \langle v_8^6 \rangle \oplus$ $\langle v_8^7 + v_8^9 \rangle \oplus \langle -v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus$ $\langle -4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \oplus$ $\langle -4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle \oplus$
9	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$
10	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$

El análisis de la homología de orden 2 de \mathcal{L}_n^2 lo haremos analizando cada submódulo de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$ del cuadro anterior.

Primer Submódulo: $\Lambda^2 V$

Como $\text{Nu}(\partial_2) \cap \Lambda^2 V = 0$ luego este submódulo no aporta nada a la homología.

Segundo Submódulo: $V \otimes (V \otimes V)$

Como $\text{Nu}(\partial_2) \cap (V \otimes (V \otimes V)) = \langle v_2^1 \rangle \oplus \langle v_2^2 + v_2^3 \rangle$ y $\text{Im}(\partial_3) \cap (V \otimes (V \otimes V)) = 0$ luego
 $\langle v_2^1 \rangle \oplus \langle v_2^2 + v_2^3 \rangle \subseteq H_2$.

Tercer Submódulo: $V \otimes \Lambda^2 V \cong \Lambda^2 V \otimes V$

Como $\text{Nu}(\partial_2) \cap (V \otimes \Lambda^2 V) = \langle v_3^1 \rangle \oplus \langle v_3^2 \rangle$ y $\text{Im}(\partial_3) \cap (V \otimes \Lambda^2 V) = \langle v_3^2 \rangle$ luego
 $\langle v_3^1 \rangle \subseteq H_2$.

Cuarto Submódulo: $\Lambda^2(V \otimes V)$

Como $\text{Nu}(\partial_2) \cap \Lambda^2(V \otimes V) = \Lambda^2(V \otimes V)$ y $\text{Im}(\partial_3) \cap \Lambda^2(V \otimes V) = 0$ luego
 $\Lambda^2(V \otimes V) \subseteq H_2$.

Quinto Submódulo: $\Lambda^2(\Lambda^2 V)$

Como $\text{Nu}(\partial_2) \cap \Lambda^2(\Lambda^2 V) = \Lambda^2(\Lambda^2 V)$ y $\text{Im}(\partial_3) \cap \Lambda^2(\Lambda^2 V) = \Lambda^2(\Lambda^2 V)$. Luego este submódulo no aporta nada a la homología.

Sexto y Séptimo Submódulo: $V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \oplus (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$

De la observación hecha en página 42, resulta:

$$(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V) / \text{Im } \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) \simeq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$$

ó

$$(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V) / \text{Im } \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) \simeq \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V).$$

Octavo Submódulo: $(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

Como

$$\begin{aligned} \text{Nu}(\partial_2) \cap (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) &= (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \\ &= \langle v_8^1 \rangle \oplus \langle v_8^2 \rangle \oplus \langle v_8^3 \rangle \oplus \langle v_8^4 \rangle \\ &\quad \oplus \langle v_8^5 \rangle \oplus \langle v_8^6 \rangle \oplus \langle v_8^7 + v_8^9 \rangle \\ &\quad \oplus \langle -v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus \langle -4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \\ &\quad \oplus \langle -4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle \\ &\quad \oplus \langle v_8^9 \rangle \oplus \langle v_8^{12} \rangle \oplus \langle v_8^{13} \rangle \oplus y \\ \text{Im}(\partial_3) \cap (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) &= \langle v_8^1 \rangle \oplus \langle v_8^2 \rangle \oplus \langle v_8^3 \rangle \oplus \langle v_8^4 \rangle \\ &\quad \oplus \langle v_8^5 \rangle \oplus \langle v_8^6 \rangle \oplus \langle v_8^7 + v_8^9 \rangle \\ &\quad \oplus \langle -v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus \langle -4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \\ &\quad \oplus \langle -4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle, \end{aligned}$$

luego

$$\langle v_8^9 \rangle \oplus \langle v_8^{12} \rangle \oplus \langle v_8^{13} \rangle \subseteq H_2.$$

Noveno y Décimo Submódulo: $\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \oplus \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$

Al igual que el Quinto submódulo estos dos submódulos no aportan nada a la homología. \square

6.2 Caso \mathcal{L}_n^3

Dado V un espacio vectorial de dimensión n consideramos el álgebra de corrientes

$$\mathcal{L}_n^3 = (V \oplus \Lambda^2 V) \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V)$$

introducida en el capítulo 4.

6.2.1 Estructura de \mathcal{L}_n^3

Consideremos la siguiente descomposición de \mathcal{L}_n^3 como suma directa de ciertos submódulos, no necesariamente irreducibles,

$$\mathcal{L}_n^3 = (V \otimes \mathbb{C}) \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

que con la notación que convenimos se reduce a:

$$\mathcal{L}_n^3 = V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus \Lambda^2 V \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

En la tabla que sigue ordenamos los seis submódulos de acuerdo a su peso total respetando el orden de la de la tabla 1:

\mathcal{L}_n^3			
	Submódulo	Peso Total	Dimensión
1	V	1	n
2	$\Lambda^2 V$	2	$\frac{n(n-1)}{2}$
3	$V \otimes V$	2	n^2
4	$\Lambda^2 V \otimes V$	3	$\frac{n^2(n-1)}{2}$
5	$V \otimes \text{Sym}^2(V)$	3	$\frac{n^2(n+1)}{2}$
6	$\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2(V)$	4	$\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}$

Table 5: Descomposición de \mathcal{L}_n^3

6.2.2 Estructura de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$

Una primera descomposición de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$ en 21 submódulos, no necesariamente irreducibles, ordenados respetando la primera descomposición de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^2)$ y luego según su peso total, se muestra en la tabla que sigue.

$\Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$			
	Submódulo	Peso Total	Dimensión
D_1	$\Lambda^2 V$	2	$\frac{n(n-1)}{2}$
D_2	$V \otimes (V \otimes V)$	3	n^3
D_3	$V \otimes \Lambda^2 V$	3	$\frac{n^2(n-1)}{2}$
D_4	$\Lambda^2(V \otimes V)$	4	$\frac{n^2(n^2-1)}{2}$
D_5	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	4	$\frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{8}$
D_6	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	4	$\frac{n^3(n-1)}{2}$
D_7	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	4	$\frac{n^3(n-1)}{2}$
D_8	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	5	$\frac{n^4(n-1)}{2}$
D_9	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	5	$\frac{n^3(n-1)^2}{4}$
D_{10}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	6	$\frac{n^2(n-1)(n^3-n^2-2)}{8}$
D_{11}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	4	$\frac{n^3(n+1)}{2}$
D_{12}	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	5	$\frac{n^4(n+1)}{2}$
D_{13}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	5	$\frac{n^3(n-1)(n+1)}{4}$
D_{14}	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	5	$\frac{n^3(n-1)(n+1)}{4}$
D_{15}	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	6	$\frac{n^4(n-1)(n+1)}{4}$
D_{16}	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	6	$\frac{n^4(n-1)(n+1)}{4}$
D_{17}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	6	$\frac{n^3(n-1)^2(n+1)}{8}$
D_{18}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	6	$\frac{n^2(n^2(n+1)-2)(n+1)}{8}$
D_{19}	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	7	$\frac{n^4(n-1)^2(n+1)}{8}$
D_{20}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	7	$\frac{n^4(n-1)(n+1)^2}{8}$
D_{21}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	8	$\frac{n^2(n-1)(n+1)(n^2(n-1)(n+1)-4)}{32}$

6.2.3 Análisis del núcleo e imagen de ∂_2 para \mathcal{L}_n^3

A pesar de que el máximo peso total es 8, la base ordenada de V con la que continuaremos trabajando será $\{e, f, g, h, u, v\}$ ya que 4 es el máximo peso total de los submódulos que necesitaremos descomponer en irreducibles.

Recordemos que

$$\partial_2 : \Lambda^2(\mathcal{L}_n^3) \longrightarrow \mathcal{L}_n^3.$$

Proposición 6.4. *La diferencial $\partial_2 : \Lambda^2(\mathcal{L}_n^3) \longrightarrow \mathcal{L}_n^3$ como homomorfismo de $GL(V)$ -módulo satisface que*

	Submódulo	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_2)$
D_1	$\Lambda^2 V$	0	$\Lambda^2 V$
D_2	$V \otimes (V \otimes V)$	$\langle v_2^1 = e \otimes (e \otimes e) \rangle \oplus$ $\langle v_2^2 + v_2^3 = 2e \otimes (e \otimes f) - e \otimes (f \otimes e) - f \otimes (e \otimes e) \rangle$	$\Lambda^2 V \otimes V$
D_3	$V \otimes \Lambda^2 V$	$V \otimes \Lambda^2 V$	0
D_4 \oplus D_{11}	$\Lambda^2(V \otimes V)$ $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\langle v_4^1 = -eeef \rangle \oplus$ $\langle v_4^3 = eefg - eegf - 2efeg + efge - egfe \rangle \oplus$ $\langle v_{11}^1 = -eeee \rangle \oplus$ $\langle v_{11}^4 = eeff - efef - feef + ffee \rangle \oplus$ $\langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 = -2eeef + efee + fcee \rangle \oplus$ $\langle 2v_4^2 + v_{11}^2 = -eeef + (efee - ffee) \rangle \oplus$ $\langle 2v_4^4 + v_{11}^5 \rangle = \langle (-eeefg + eegf + efeg - fege) + (efeg - egef - feeg + fgee + gee f - gfee) \rangle$	$\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V$
D_5	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	0
D_6	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
D_7	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	0
D_8	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
D_9	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
D_{10}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	0
D_{12}	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
D_{13}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0
D_{14}	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
D_{15}	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
D_{16}	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
D_{17}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
D_{18}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
D_{19}	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
D_{20}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
D_{21}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0

Prueba. Procedemos caso por caso.

El análisis de los diez primeros submódulos excepto el cuarto es idéntico al de la Proposición 6.1, procedamos entonces caso por caso sobre estos doce submódulos restantes.

Submódulo $D_4 = \Lambda^2(V \otimes V)$

Si $xyzw \in \Lambda^2(V \otimes V)$, $\partial_2(xyzw) = x \wedge z \otimes yw = xzyw \in \Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$.
 Luego $\partial_2(\Lambda^2(V \otimes V)) \subseteq \Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$. Descomponemos en submódulos irreducibles $\Lambda^2(V \otimes V)$
 y $\Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$.

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(V \otimes V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$
$(3, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$v_4^1 = -eeef$ $v_4^2 = -ee fe$	$u_6^1 = -efee$
$(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$v_4^3 = eefg - eegf - 2efeg + efge - egfe$ $v_4^4 = -eefg + eegf + efeg - fege$	$u_6^2 = efeg - egef + fgee$

Evaluando ∂_2 en estos vectores de peso máximo.

Para vectores de peso $(3, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_2(v_4^1) &= 0 \\ \partial_2(v_4^2) &= -efee = u_6^1.\end{aligned}$$

Para vectores de peso $(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_2(v_4^3) &= -egef + egef = 0 \\ \partial_2(v_4^4) &= -efeg + egef - fgee = -u_6^2.\end{aligned}$$

Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_2)$
$\Lambda^2(V \otimes V)$	$\langle v_4^1 \rangle$ $\langle v_4^3 \rangle$	$\Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$

Como existe otro submódulo (D_{11}) cuya imagen está contenida en $\Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$ aún no podemos concluir en forma definitiva.

Submódulo $D_{11} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2V)$

Si $xyzw \in V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2V)$, $\partial_2(xyzw) = x \wedge y \otimes zw = xyzw \in \Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$. Luego
 $\partial_2(V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2V)) \subseteq \Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$

La descomposición en irreducibles de $\Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V$ fue detallada anteriormente y la de
 $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2V)$ se muestra en la tabla que sigue.

Peso	Vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V$
$(4, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$v_{11}^1 = -eeee$	
$(3, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$v_{11}^2 = efee - feee$ $v_{11}^3 = -eeef + efee$	u_6^1
$(2, 2, 0, 0, \dots, 0)$	$v_{11}^4 = eeff - efef - feef + ffee$	
$(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$v_{11}^5 = efeg - egef - feeg + fgee + gee f - gfee$	u_6^2

Evaluando ∂_2 en estos vectores de peso máximo.

Para el vector de peso $(4, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_2(v_{11}^1) = 0.$$

Para vectores de peso $(3, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_2(v_{11}^2) = 2efee = -2u_6^1$$

$$\partial_2(v_{11}^3) = efee = -u_6^1.$$

Para el vector de peso $(2, 2, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_2(v_{11}^4) = -efef + efef = 0.$$

Para el vector de peso $(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\partial_2(v_{11}^5) = 2efeg - 2egef + 2fgee = 2u_6^2$$

Así, resulta que:

Submódulo	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_2)$
$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\langle v_{11}^1 \rangle$ $\langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 \rangle$ $\langle v_{11}^4 \rangle$	$\langle u_6^1 \rangle \oplus \langle u_6^2 \rangle =$ $\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \partial_2(2v_4^2 + v_{11}^2) &= \partial_2(2v_4^2) + \partial_2(v_{11}^2) \\ &= -2efee + 2efee = 2u_6^1 - 2u_6^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2(2v_4^4 + v_{11}^5) &= \partial_2(2v_4^4) + \partial_2(v_{11}^5) \\ &= -2u_6^2 + 2u_6^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego $\langle 2v_4^2 + v_{11}^2 \rangle \oplus \langle 2v_4^4 + v_{11}^5 \rangle \in \text{Nu}(\partial_2)$ por lo tanto

Submódulo	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_2) \subseteq \Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V$
$\Lambda^2(V \otimes V)$	$\langle v_4^1 \rangle \oplus \langle v_4^3 \rangle \oplus$	$\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V$
\oplus	$\langle v_{11}^1 \rangle \oplus \langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 \rangle \oplus \langle v_{11}^4 \rangle \oplus$	
$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\langle 2v_4^2 + v_{11}^2 \rangle \oplus \langle 2v_4^4 + v_{11}^5 \rangle$	

Submódulo $D_{12} \dots D_{21}$

Para todo submódulo D_i con $i = 12 \dots 21$:

$$\partial_2(D_i) = 0.$$

La imagen por ∂_2 de estos 10 submódulos es nula debido al corchete definido en el álgebra de Lie \mathcal{L}_n o al álgebra asociativa truncada A_3 . Sólo tiene sentido analizar ∂_2 en los submódulos que contengan factores tensoriales de la forma V y $(V \otimes V)$. Así, resulta que:

	Submódulo	$\text{Nu}(\partial_2)$	$\text{Im}(\partial_2)$
12	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
13	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0
14	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
15	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
16	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
17	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
18	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
19	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
20	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
21	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0

□

6.2.4 Estructura de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3)$

Descomponemos $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3)$ como suma directa de 54 submódulos, no necesariamente irreducibles, ordenándolos en la tabla que sigue, respetando el orden de la tabla de la descomposición de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$ para aprovechar el análisis realizado.

$\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3)$			
	Submódulo	Peso Total	Dimensión
T_1	$\Lambda^3 V$	3	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
T_2	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$	4	$\frac{n^2(n-1)^2}{4}$
T_3	$\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$	4	$\frac{n^3(n-1)}{2}$
T_4	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$	5	$\frac{n^3(n^2-1)}{2}$
T_5	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	5	$\frac{n^3(n-1)^2}{4}$
T_6	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$	5	$\frac{n^2(n-1)(n(n-1)-2)}{8}$
T_7	$V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	5	$\frac{n^4(n-1)}{2}$
T_8	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	6	$\frac{n^5(n-1)}{2}$
T_9	$\Lambda^3(V \otimes V)$	6	$\frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)}{6}$
T_{10}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V)$	6	$\frac{n(n-1)(n(n-1)-2)(n(n-1)-4)}{48}$
T_{11}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V)$	6	$\frac{n^3(n-1)^2(n+1)}{4}$
T_{12}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes V)$	6	$\frac{n^3(n-1)(n(n-1)-2)}{8}$
T_{13}	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	6	$\frac{n^4(n-1)^2}{4}$
T_{14}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	7	$\frac{n^4(n-1)^2(n+1)}{4}$
T_{15}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	7	$\frac{n^3(n-1)^2(n(n-1)-2)}{16}$
T_{16}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$	7	$\frac{n^3(n-1)(n^2(n-1)-2)}{8}$
T_{17}	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	7	$\frac{n^5(n-1)^2}{4}$
T_{18}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	8	$\frac{n^4(n-1)(n^2(n-1)-2)}{8}$
T_{19}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	8	$\frac{n^3(n-1)^2(n^2(n-1)-2)}{16}$
T_{20}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes V)$	9	$\frac{n^2(n-1)(n^2(n-1)-2)(n^2(n-1)-4)}{48}$
T_{21}	$\Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	5	$\frac{n^3(n-1)(n+1)}{4}$
T_{22}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	6	$\frac{n^3(n-1)^2(n+1)}{8}$
T_{23}	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	6	$\frac{n^5(n+1)}{2}$
T_{24}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	6	$\frac{n^4(n-1)(n+1)}{4}$
T_{25}	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	7	$\frac{n^5(n+1)(n-1)}{4}$
T_{26}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	7	$\frac{n^4(n+1)^2(n-1)}{4}$
T_{27}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	7	$\frac{n^3(n+1)(n^2(n+1)-2)}{8}$
T_{28}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	7	$\frac{n^5(n-1)(n+1)}{4}$

T_{29}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	8	$\frac{n^5(n-1)(n+1)^2}{8}$
T_{30}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	8	$\frac{n^4(n-1)^2(n+1)^2}{8}$
T_{31}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	7	$\frac{n^3(n^2-1)(n-1)-2}{16}$
T_{32}	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	7	$\frac{n^4(n-1)^2(n+1)}{8}$
T_{33}	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	7	$\frac{n^5(n-1)(n+1)}{4}$
T_{34}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	8	$\frac{n^4(n+1)(n^2(n+1)-2)}{8}$
T_{35}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	8	$\frac{n^3(n^2-1)(n^2(n+1)-2)}{16}$
T_{36}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	8	$\frac{n^4(n^2-1)(n^2(n+1)-2)}{16}$
T_{37}	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	8	$\frac{n^5(n-1)^2(n+1)}{8}$
T_{38}	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	8	$\frac{n^5(n-1)^2(n+1)}{8}$
T_{39}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	8	$\frac{n^5(n-1)^2(n+1)}{8}$
T_{40}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	8	$\frac{n^3(n^2-1)(n-1)(n-1)-2}{16}$
T_{41}	$\Lambda^3(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	9	$\frac{n^2(n+1)(n^2(n+1)-2)(n^2(n+1)-4)}{48}$
T_{42}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	9	$\frac{n^4(n^2-1)(n^2(n-1)-2)}{16}$
T_{43}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	9	$\frac{n^4(n^2-1)(n-1)(n^2(n-1)-2)}{32}$
T_{44}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	9	$\frac{n^3(n^2-1)(n^2(n^2-1)-2)}{8}$
T_{45}	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	9	$\frac{n^6(n-1)^2(n+1)}{8}$
T_{46}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	9	$\frac{n^5(n-1)^2(n+1)^2}{16}$
T_{47}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	9	$\frac{n^5(n-1)^3(n+1)}{16}$
T_{48}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	10	$\frac{n^4(n^2-1)(n+1)(n^2(n-1)-2)}{32}$
T_{49}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	10	$\frac{n^4(n^2-1)(n^2(n^2-1)-2)}{8}$
T_{50}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	10	$\frac{n^3(n^2-1)(n-1)(n^2(n-1)-2)}{16}$
T_{51}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	10	$\frac{n^6(n-1)^2(n+1)^2}{16}$
T_{52}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	11	$\frac{n^3(n^2-1)(n+1)(n^2(n^2-1)-2)}{16}$
T_{53}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	11	$\frac{n^4(n^2-1)(n-1)(n^2(n-1)-2)}{16}$
T_{54}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	12	$n^2(n^2-1)(n^2(n^2-1)-2) \times$ $[n^2(n^2-1)(n^2(n^2-1)-2)-8].$ $\frac{n^2(n^2-1)(n^2(n^2-1)-2)-16}{3072}$

Observaciones.

1. Esta tabla se ordenó como ya dijimos desde el submódulo 1 al 20 coincidiendo con la tabla de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$ y los restantes poniendo primero los que no se anulan y luego los que se anulan por ∂_3 .
2. El máximo peso total es 12, por lo tanto la máxima dimensión de V que se debería considerar es 12; sin embargo veremos que basta con $\dim(V) = 6$ gracias a que los submódulos que necesitamos descomponer en irreducibles se estabilizan para este valor.

6.2.5 Análisis de la imagen de ∂_3 para \mathcal{L}_n^3

Analizaremos la imagen por ∂_3 de estos 54 submódulos, viendo en primer lugar a donde están contenidas.

$$\text{Submódulo } T_1 = \Lambda^3 V$$

$$\text{Si } xyz \in \Lambda^3 V, \partial_3(xyz) = xyz - xzy + yzx \in \Lambda^2 V \otimes V \cong D_3.$$

Luego

$$\partial_3(T_1) \subseteq D_3.$$

$$\text{Submódulo } T_2 = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$$

$$\text{Si } xyz \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V), \partial_3(xyz) = xyz - 0 + 0 = xyz \in \Lambda^2(\Lambda^2 V) = D_5.$$

Luego

$$\partial_3(T_2) \subseteq D_5.$$

$$\text{Submódulo } T_3 = \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$$

$$\text{Si } xyz \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V), \partial_3(xyz) = xyz - xzty + yztx \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V = D_7 \oplus D_6.$$

Luego

$$\partial_3(T_3) \subseteq D_7 \oplus D_6.$$

$$\text{Submódulo } T_4 = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$$

$$\text{Si } xyz \in \Lambda^2(V \otimes V) \otimes V, \partial_3(xyz) = xzyt - xuyz + zutx \in \Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V \otimes V \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) = D_{14} \oplus D_8.$$

Luego

$$\partial_3(T_4) \subseteq D_{14} \oplus D_8.$$

$$\text{Submódulo } T_5 = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$$

Si $xyztu \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$, $\partial_3(xyztu) = xyztu - 0 + 0 = xyztu \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) = D_9$.
Luego

$$\partial_3(T_5) \subseteq D_9.$$

Submódulo $T_6 = \Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$

Si $xyztu \in \Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$, $\partial_3(xyztu) = 0$.
Luego

$$\partial_3(T_6) = 0.$$

Submódulo $T_7 = V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$

Si $xyztu \in V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$, $\partial_3(xyztu) = xyztu - 0 + 0 \in (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V = D_9$.
Luego

$$\partial_3(T_7) \subseteq D_9.$$

Submódulo $T_8 = V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

Si $xyztuw \in V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuw) = xyztuw - 0 + 0 \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) = D_{10}$.
Luego

$$\partial_3(T_8) \subseteq D_{10}.$$

Submódulo $T_9 = \Lambda^3(V \otimes V)$

Si $xyztvw \in \Lambda^3(V \otimes V)$, $\partial_3(xyztvw) = xzytvw - xvywzt + zvtwxy \in (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V) = D_{16}$.
Luego

$$\partial_3(T_9) \subseteq D_{16}.$$

Submódulo $T_{10} = \Lambda^3(\Lambda^2 V)$

Si $xyztuw \in \Lambda^3(\Lambda^2 V)$, $\partial_3(xyztuw) = 0 - 0 + 0 = 0$.
Luego

$$\partial_3(T_{10}) = 0.$$

Submódulo $T_{11} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V)$

Si $xyztuv \in \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V)$, $\partial_3(xyztuv) = xzytuv - 0 + 0 = xzytuv \in (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V = D_{17}$.
Luego

$$\partial_3(T_{11}) \subseteq D_{17}.$$

Submódulo $T_{12} = \Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes V)$

Si $xyztuv \in \Lambda^2(\Lambda^2V) \otimes (V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuv) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{12}) = 0.$$

Submódulo $T_{13} = V \otimes \Lambda^2V \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$

Si $xyztuv \in V \otimes \Lambda^2V \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuv) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{13}) = 0.$$

Submódulo $T_{14} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$

Si $xyztuvw \in \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuvw) = xzytuwv - 0 + 0 = xzytuwv \in (\Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V) \otimes (\Lambda^2V \otimes V) = D_{19}$.

Luego

$$\partial_3(T_{14}) \subseteq D_{19}.$$

Submódulo $T_{15} = \Lambda^2(\Lambda^2V) \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$

Si $xyztuvw \in \Lambda^2(\Lambda^2V) \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuvw) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{15}) = 0.$$

Submódulo $T_{16} = \Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes V$

Si $xyztuvw \in \Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes V$, $\partial_3(xyztuvw) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{16}) = 0.$$

Submódulo $T_{17} = (V \otimes V) \otimes \Lambda^2V \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$

Si $xyztuvw \in (V \otimes V) \otimes \Lambda^2V \otimes (\Lambda^2V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuvw) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{17}) = 0.$$

Submódulo $T_{18} = \Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$

Si $xyztuvw \in \Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuvw) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{18}) = 0.$$

Submódulo $T_{19} = \Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V) \otimes \Lambda^2V$

Si $xyztuvw r \in \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$, $\partial_3(xyztuvw r) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{19}) = 0.$$

Submódulo $T_{20} = \Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes V)$

Si $xyztuvw r s \in \Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuvw r s) = 0$.

Luego

$$\partial_3(T_{20}) = 0.$$

Submódulo $T_{21} = \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Si $xyztv \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $\partial_3(xyztv) = xyztv + xztvy - yztvx \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V = D_{13} \oplus D_{14}$.

Luego

$$\partial_3(T_{21}) \subseteq D_{13} \oplus D_{14}.$$

Submódulo $T_{22} = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Si $xyztuv \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $\partial_3(xyztuv) = xyztuv \in \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) = D_{17}$

Luego

$$\partial_3(T_{22}) \subseteq D_{17}.$$

Submódulo $T_{23} = V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Si $xyztuv \in V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $\partial_3(xyztuv) = xyz - xtuv + 0 \in (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V) = D_{15} \oplus D_{16}$.

Luego

$$\partial_3(T_{23}) \subseteq D_{15} \oplus D_{16}.$$

Submódulo $T_{24} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$

Si $xyztuv \in V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$, $\partial_3(xyztuv) = xyztuv - 0 + 0 \in (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V = D_{17}$.

Luego

$$\partial_3(T_{24}) \subseteq D_{17}.$$

Submódulo $T_{25} = V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Si $xyztuvw \in V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $\partial_3(xyztuvw) = xyztuvw - 0 + 0 \in (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) = D_{19}$.

Luego

$$\partial_3(T_{25}) \subseteq D_{19}.$$

Submódulo $T_{26} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Si $xyztuv \in \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $\partial_3(xyztuv) = xzytuw - 0 + 0 = xzytuw \in (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) = D_{20}$.

Luego

$$\partial_3(T_{26}) \subseteq D_{20}.$$

Submódulo $T_{27} = \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$

Si $xyztuvw \in \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$, $\partial_3(xyztuvw) = 0 - xwyztuw + twvxyz \in (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) = D_{20}$.

Luego

$$\partial_3(T_{27}) \subseteq D_{20}$$

Submódulo $T_{28} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

Si $xyztuvw \in V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$, $\partial_3(xyztuvw) = xzytuw - 0 + 0 = xzytuw \in (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) = D_{19}$.

Luego

$$\partial_3(T_{28}) \subseteq D_{19}.$$

Submódulo $T_{29} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Si $xyztuvw \in V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $\partial_3(xyztuvw) = xzytuw - 0 + 0 = xzytuw \in \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) = D_{21}$.

Luego

$$\partial_3(T_{29}) \subseteq D_{21}.$$

Submódulo $T_{30} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Si $xyztuvw \in \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $\partial_3(xyztuvw) = xzytuw - 0 + 0 \in \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) = D_{21}$.

Luego

$$\partial_3(T_{30}) \subseteq D_{21}.$$

Submódulos $T_{31} \dots T_{54}$

La evaluación de ∂_3 en todos estos submódulos se anulan ya sea por el corchete definido en el algebra de Lie \mathcal{L}_n o por el álgebra asociativa truncada A_3 .

Luego

$$\partial_3(T_i) = 0, \quad \text{para } 31 \leq i \leq 54$$

Sintetizamos estos resultados en la siguiente tabla.

$\partial_3(\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3))$			
	Submódulo	$\partial_3(T_i) \subseteq$	D_i
T_1	$\Lambda^3 V$	$\Lambda^2 V \otimes V$	D_3
T_2	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	D_5
T_3	$\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$ \oplus $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$	D_7 \oplus D_6
T_4	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$ \oplus $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	D_8 \oplus D_{14}
T_{21}	$\Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ \oplus $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{14} \oplus D_{13}
T_5	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	D_9
T_6	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$	0	0
T_7	$V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	D_9
T_8	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	D_{10}
T_9	$\Lambda^3(V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	D_{16}
T_{23}	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ \oplus $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{16} \oplus D_{15}
T_{10}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V)$	0	0
T_{11}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	D_{17}
T_{22}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{17}
T_{24}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	D_{17}
T_{12}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{13}	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{14}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	D_{19}

T_{25}	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{19}
T_{28}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	D_{19}
T_{15}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{16}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$	0	0
T_{17}	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{18}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{19}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{20}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{26}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{20}
T_{27}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{20}
T_{29}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{21}
T_{30}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	D_{21}
T_{31}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{32}	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{33}	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{34}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{35}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{36}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{37}	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{38}	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{39}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{40}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{41}	$\Lambda^3(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{42}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{43}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{44}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	0	0
T_{45}	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{46}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0

T_{47}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{48}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{49}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{50}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{51}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{52}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{53}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{54}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0

Observaciones.

- El submódulo de mayor peso total que no se anula por ∂_3 es de peso total 9 por lo que se redujo la dimensión de V a considerar de 12 a 9.
- El análisis de la imagen por ∂_3 de los 20 primeros submódulos es el mismo al realizado en el estudio de la imagen de ∂_3 para \mathcal{L}_n^2 excepto para cuatro de ellos (T_4 , T_9 , T_{11} y T_{14}) los cuales en este caso se modifican y serán realizados a continuación.
- Observemos además que para hallar la imagen de ∂_3 para todo n faltaría analizar la imagen por ∂_3 de 14 de estos submódulos con $n \leq 9$.

Procedamos caso por caso sobre estos 14 submódulos.

$$\text{Submódulo } T_4 = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$$

$$\partial_3(\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V.$$

La descomposición de $\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$, $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$ y $\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V \otimes V$ en submódulos irreducibles se muestra en la tabla que sigue recordando que la de los dos primeros fue detallada en el análisis de la imagen por ∂_3 de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^2)$.

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$
$(4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_4^1 w_4^2	v_8^1	$v_{14}^1 = -efeee$
$(3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_4^3 w_4^4	v_8^5 v_8^6	$v_{14}^2 = efefe - efeef$
$(3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_4^5 w_4^6 w_4^7 w_4^8	v_8^2 v_8^3 v_8^4	$v_{14}^3 = fggee - egeef + efeeg$ $v_{14}^4 = efefe - egeef + egeef - cfeeg$
$(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_4^9 w_4^{10}	v_8^7 v_8^8 v_8^9	$v_{14}^5 = effge - egffe +$ $fgefe - efegf + egeff - fgeef$
$(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	w_4^{11} w_4^{12}	v_8^{10} v_8^{11} v_8^{12}	$v_{14}^6 = fgehe - fhege + ghefe - egehf +$ $ehgef - gheef + efegh - ehefg +$ $fheeg - efegh + egefh - fgeeh$
$(1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$		v_8^{13}	

Evaluamos ahora ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo.

Para vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_4^1) &= 0, \\ \partial_3(w_4^2) &= -efeee - v_8^1 \\ &= v_{14}^1 - v_8^1.\end{aligned}$$

Para vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_4^3) &= 0 - 3effee + 3efeeef \\ &= 3v_8^5, \\ \partial_3(w_4^4) &= efefe - efeef + 2v_8^5 - v_8^6 \\ &= v_{14}^2 + 2v_8^5 - v_8^6.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes no nulas son linealmente independientes.

Para vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}
\partial_3(w_4^5) &= -2efege + 2egefe - 2fgeee + v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4 \\
&= -2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4 \\
\partial_3(w_4^6) &= egefe - efege - fgeee + 2v_8^2 + v_8^3 \\
&= -v_{14}^3 - v_{14}^4 + 2v_8^2 + v_8^3 \\
\partial_3(w_4^7) &= -fgeee + egeef - ef eeg + 2v_8^3 \\
&= v_{14}^3 + 2v_8^3 \\
\partial_3(w_4^8) &= egefe - efege - fgeee + v_8^2 + v_8^3 \\
&= -v_{14}^3 - v_{14}^4 + v_8^2 + v_8^3.
\end{aligned}$$

De estas cuatros imágenes sólo tres de ellas son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que son las tres primeras.

Para vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}
\partial_3(w_4^9) &= -egeff + efegf - effge + 2egffe - effge - fgefe - \\
&\quad fgefe + efegf - egeff + 2fgeef + v_8^7 + v_8^9 \\
&= -2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9 \\
\partial_3(w_4^{10}) &= egffe - effge - fgefe + efegf - egeff + fgeef - \\
&\quad v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \\
&= -v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8.
\end{aligned}$$

Estas dos imágenes no nulas son linealmente independientes.

Para vectores de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}
\partial_3(w_4^{11}) &= 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10} \\
\partial_3(w_4^{12}) &= 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11}.
\end{aligned}$$

Estas dos imágenes no nulas son linealmente independientes.

Hasta aquí podemos concluir que :

Peso	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$		Vectores de peso máximo de $\partial_3(T_4)$ $\subseteq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$
	$(4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^1	v_{14}^1
$(3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^5 v_8^6	v_{14}^2	$3v_8^5$ $v_{14}^2 + 2v_8^5 - v_8^6$
$(3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^2 v_8^3 v_8^4	v_{14}^3 v_{14}^4	$-2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4$ $-v_{14}^3 - v_{14}^4 + 2v_8^2 + v_8^3$ $v_{14}^3 + 2v_8^3$
$(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^7 v_8^8 v_8^9	v_{14}^5	$-2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9$ $-v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8$
$(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^{10} v_8^{11} v_8^{12}	v_{14}^6	$2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10}$ $2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11}$
$(1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	v_8^{13}		

Pero existen otros submódulos que por ∂_3 van a parar a $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ por lo que aún no podemos concluir que estos son todos los vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ que pertenecen a la imagen de ∂_3 .

$$\text{Submódulo } T_{21} = \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

$$\begin{aligned} \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)) &\subseteq \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \\ &\simeq (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \end{aligned}$$

Observación. En este caso necesitamos la descomposición en submódulos irreducibles de $T_{21} = \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, $D_{13} = \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ y $D_{14} = (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$. La descomposición de D_{14} fue detallada en el análisis de la imagen por ∂_3 de T_4 ; la de D_{13} y T_{21} no se hizo aún pero como D_{14} es isomorfo a D_{13} y a T_{21} los vectores de peso máximo de uno se pueden obtener reordenando los del otro. Para ilustrar esto veamos el siguiente ejemplo, el vector $v = xyztw \in (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ se corresponde con el vector $v' = xywzt \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \subset \Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$ y con el vector $v'' = xywzt \in \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \subset \Lambda^3(\mathcal{L}_n^3)$. De todas maneras daremos en detalle la descomposición en irreducibles de T_{21} .

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$
$(4, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{21}^1 = -efeee$	v_{13}^1	v_{14}^1
$(3, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{21}^2 = efef - effe$	v_{13}^2	v_{14}^2
$(3, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{21}^3 = fgeee - egfee + efgee$ $w_{21}^4 = efefg - egfef + egfee - efgee$	v_{13}^3 v_{13}^4	v_{14}^3 v_{14}^4
$(2, 2, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{21}^5 = efefg - egfef +$ $fgfef - effeg + egfef - fgfee$	v_{13}^5	v_{14}^5
$(2, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$w_{21}^6 = fggeh - fheeg + gheef - egfeh +$ $ehfeg - ghfee + efgeh - ehgef +$ $fhgee - efheg + eghef - fghee$	v_{13}^6	v_{14}^6

Evaluamos ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo.

Para el vector de peso máximo de peso $(4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{21}^1) = -v_{13}^1 - v_{14}^1.$$

Esta imagen es linealmente independiente con los vectores de peso máximo $v_{14}^1 - v_{13}^1$ de peso $(4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ hallada en el análisis de la imagen T_4 y con v_{14}^1 (o v_{13}^1) y como en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ hay tres vectores de peso máximo de este peso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{14}^1 (o v_{13}^1) no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso máximo de peso $(3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{21}^2) = v_{13}^2 - v_{14}^2.$$

Esta imagen es linealmente independiente con los vectores de peso máximo $3v_{14}^5, v_{14}^2 + 2v_{13}^5 - v_{14}^6$ de peso $(4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ hallados en el análisis de la imagen T_4 y con v_{14}^2 (o v_{13}^2) y como en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ hay cuatro vectores de peso máximo de este peso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{14}^2 (o v_{13}^2) no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{21}^3) = v_{13}^3 + 2v_{14}^3$$

$$\partial_3(w_{21}^4) = v_{13}^4 - 2v_{14}^3 - v_{14}^4.$$

Estas dos imágenes son linealmente independientes junto con $-2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_{13}^5 + 2v_{13}^3 - v_{14}^4$, $-v_{14}^3 - v_{14}^4 + 2v_{13}^5 + v_{13}^3$, $v_{14}^3 + 2v_{13}^3$ hallados en el análisis de la imagen T_4 y con los vectores de peso máximo v_{14}^3 y v_{14}^4 (o v_{13}^3 y v_{13}^4) y como en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ hay siete vectores de peso máximo de este peso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{14}^3 y v_{14}^4 (o v_{13}^3 y v_{13}^4) no pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{21}^5) = v_{13}^5 - v_{14}^5.$$

Esta imagen es linealmente independiente junto con $-2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9$, $-v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8$ hallados en el análisis de la imagen T_4 y con los vectores de peso máximo v_{14}^5 y v_8^9 (o v_{13}^5 y v_8^9) y como en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ hay cinco vectores de peso máximo de este peso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{14}^5 y v_8^9 (o v_{13}^5 y v_8^9) no pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{21}^6) = v_{13}^6 + 2v_{14}^6.$$

Esta imagen es linealmente independiente junto con $2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10}$, $2v_{14}^6 - 4v_9^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11}$ hallados en el análisis de la imagen T_4 y con los vectores de peso máximo v_{14}^6 y v_8^{12} (o v_{13}^6 y v_8^{12}) y como en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ hay cinco vectores de peso máximo de este peso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{14}^6 y v_8^{12} (o v_{13}^6 y v_8^{12}) no pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Así, resulta que:

Peso	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ $\oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$			Vectores de peso máximo de $\partial_3(T_4 \oplus T_{21})$ $\subseteq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$(4, 1, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^1	v_{14}^1	v_{13}^1	$v_{14}^1 - v_8^1$ $-v_{13}^1 - v_{14}^1$
$(3, 2, 0, 0, \dots, 0)$	v_8^5 v_8^6	v_{14}^2	v_{13}^2	$3v_8^5$ $v_{14}^2 + 2v_8^5 - v_8^6$ $v_{13}^2 - v_{14}^2$
$(3, 1, 1, 0, \dots, 0)$	v_8^2 v_8^3 v_8^4	v_{14}^3 v_{14}^4	v_{13}^3 v_{13}^4	$-2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4$ $-v_{14}^3 - v_{14}^4 + 2v_8^2 + v_8^3$ $v_{14}^3 + 2v_8^3$ $v_{13}^3 + 2v_{14}^3$ $v_{13}^4 - 2v_{14}^3 - v_{14}^4$
$(2, 2, 1, 0, \dots, 0)$	v_8^7 v_8^8 v_8^9	v_{14}^5	v_{13}^5	$-2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9$ $-v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8$ $v_{13}^5 - v_{14}^5$
$(2, 1, 1, 1, \dots, 0)$	v_8^{10} v_8^{11} v_8^{12}	v_{14}^6	v_{13}^6	$2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10}$ $2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11}$ $v_{13}^6 + 2v_{14}^6$
$(1, 1, 1, 1, 1, \dots, 0)$	v_8^{13}			

Observación.

$$\begin{aligned}
\partial_3(\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)) = & \langle v_{14}^1 - v_8^1 \rangle \oplus \langle -v_{13}^1 - v_{14}^1 \rangle \\
& \oplus \langle 3v_8^5 \rangle \oplus \langle v_{14}^2 + 2v_8^5 - v_8^6 \rangle \oplus \langle v_{13}^2 - v_{14}^2 \rangle \\
& \oplus \langle -2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4 \rangle \oplus \langle -v_{14}^3 - v_{14}^4 + 2v_8^2 + v_8^3 \rangle \\
& \oplus \langle v_{14}^3 + 2v_8^3 \rangle \oplus \langle v_{13}^3 + 2v_{14}^3 \rangle \oplus \langle v_{13}^4 - 2v_{14}^3 - v_{14}^4 \rangle \\
& \oplus \langle -2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9 \rangle \oplus \langle -v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \\
& \oplus \langle v_{13}^5 - v_{14}^5 \rangle \oplus \langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \\
& \oplus \langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle \oplus \langle v_{13}^6 + 2v_{14}^6 \rangle \\
= & \langle v_{14}^1 - v_8^1 \rangle \oplus \langle 3v_8^5 \rangle \oplus \langle v_{14}^2 + 2v_8^5 - v_8^6 \rangle \\
& \oplus \langle -2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4 \rangle \oplus \langle -v_{14}^3 - v_{14}^4 + 2v_8^2 + v_8^3 \rangle \\
& \oplus \langle v_{14}^3 + 2v_8^3 \rangle \oplus \langle -2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9 \rangle \\
& \oplus \langle -v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus \langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \\
& \oplus \langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \\
= & \langle v_{14}^1 - v_8^1 \rangle \oplus \langle 3v_8^5 \rangle \oplus \langle v_{14}^2 + 2v_8^5 - v_8^6 \rangle \\
& \oplus \langle -2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^2 + 2v_8^3 - v_8^4 \rangle \oplus \langle -v_{14}^3 - v_{14}^4 + 2v_8^2 + v_8^3 \rangle \\
& \oplus \langle v_{14}^3 + 2v_8^3 \rangle \oplus \langle -2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9 \rangle \\
& \oplus \langle -v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus \langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \\
& \oplus \langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_8 \oplus D_{13} \oplus D_{14}) / \text{Im } \partial_3(T_4 \oplus T_{21}) \simeq & v_8^9 \oplus v_8^{12} \oplus v_8^{13} \\
& \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
(D_8 \oplus D_{13} \oplus D_{14}) / \text{Im } \partial_3(T_4 \oplus T_{21}) \simeq & v_8^9 \oplus v_8^{12} \oplus v_8^{13} \\
& \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V.
\end{aligned}$$

Submódulo $T_{23} = V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$

$$\begin{aligned}
\partial_3(V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)) \subseteq & (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \\
& \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V).
\end{aligned}$$

Observemos que los submódulos $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ y $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ son isomorfos por lo que los vectores de peso máximo de uno se puede obtener apartir de los

del otro reordenandolos. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo: $x = abcdef$, vector de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ se corresponde con el vector de peso máximo $x' = abefcd$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, por esta razón solo ilustramos los vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ y $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ en detalle.

Peso	Vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$
(6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_{23}^1 = -ceeeee$	
(5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_{23}^2 = efeeee - feeeee$ $w_{23}^3 = -eeefee + efeeee$ $w_{23}^4 = -ceefee + efeeee$ $w_{23}^5 = -ceeeef + efeeee$	$v_{16}^1 = -efeeee$
(4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_{23}^6 = -ceefef + eeffee + feeeef - fefeee$ $w_{23}^7 = eeeeff - efefef - feeeef + fefeee$ $w_{23}^8 = eeefee - efefee - fefeee + ffeeee$ $w_{23}^9 = eeeeff - efefef - feeeef + ffeeee$ $w_{23}^{10} = eeeeff - efefee - 2feeeef + fefeee + ffeeee$ $w_{23}^{11} = -ceeeff + eeefee + 2feeeef - feefee - fefeee$	$v_{16}^2 = efefee - efefee$ $v_{16}^3 = efefee - efefee$
(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_{23}^{12} = -ceefeg + eegef + efeeeg - efegee - egeee + egefef$ $w_{23}^{13} = efefee - efgeeg - egeee + efefee - feeeeg + fgeeee + geeee - gefee$ $w_{23}^{14} = eeefee - egefef - efegee + efgeee + egefef - egefef$ $w_{23}^{15} = -ceefeg + eegef + efeeeg - efgeee - egeee + egefef$ $w_{23}^{16} = efefee - egeef - feeeeg + fgeeee + geeee - gfeeee$ $w_{23}^{17} = efefee - efegee - eeegef + egefef - feeeeg + feeeef + geeee - gfeef$	$v_{16}^4 = efefee - egefef + egeefe - efefee$ $v_{16}^5 = -fgeeee + egeefe - efefee$ $v_{16}^6 = -egeee + efefee + egeefe - efefee$
(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_{23}^{18} = -efefef + efefef + eeffef - eeffef + feeeff - feefef - feefef + feefef$ $w_{23}^{19} = -ceefff + eefef + efefef - eeffef + feefef - feefef - feefef + feefef$ $w_{23}^{20} = eeefef - eeffef - eeffef + eeffef - feeeff + feefef + feefef - feefef$	$v_{16}^7 = -effef + efefef + efefef - eeffef$
(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_{23}^{21} = -ceefeg + efefeg - egefef + feeeeg - feefeg - fgeee + fgeef - geefef + geefef + gfeef - gfeef$ $w_{23}^{22} = -ceefeg + eegef + efefeg - efgeef - egefef + egefef + feeeeg - feefeg + feefeg - 2feeeef + fegef - ffeee + ffeeg + fgeef - fgfeef - fgfeef + geefef - geefef - gfeef - gfeef$ $w_{23}^{23} = -ceefeg + eegef + efefeg - efgeef - egefef + egefef + feeeeg - feefeg + feefeg - fegeef - ffeeg + fgeee + fgeef - fgfeef - geefef + geefef + gfeef - gfeef$ $w_{23}^{24} = -ceefeg + eegef + efefeg - eeffef - egefef + egefef - feeeef + feefef - ffeef - ffeef - ffeef + gfeef$ $w_{23}^{25} = efefeg - egefef - egefef + egefef - feefeg + feefeg + fgeef - fgfeef + geefef - geefef - gfeef + gfeef$ $w_{23}^{26} = -ceefeg + eegef + efefeg - efgeef + feefeg - feefeg - ffeeg + fgeee + fgeef - fgfeef - geefef + geefef + gfeef - gfeef$ $w_{23}^{27} = -ceefeg + eegef - eegef - egefef + feeeeg - feefeg - feefeg + fegef - geefef + geefef + gfeef - gfeef$ $w_{23}^{28} = eeefeg - eegef - eegef + eegef - feeeeg + feefef + feefef - feefeg + geefef - geefef - geefef + gfeef$	$v_{16}^8 = -effef + egefef - egefef + efefeg + efefeg - egefef + egefef - egefef - egefef$ $v_{16}^9 = -efefeg + efefeg + efefeg - egefef - egefef + egefef$ $v_{16}^{10} = -effef + egefef - fgfeef + efefeg - egefef + fgeef$ $v_{16}^{11} = -effef + egefef - fgfeef + efefeg - 2egefef + fgeef + egefef + efefeg - egefef$
(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)	$w_{23}^{29} = -cefgeh + eefheg + eefgeh - eeghef - eehfeg + eehgef + efeghe - efeghe - efgeeh + efheeg - egefef + egefef + egefef - egefef + egefef - egefef - egefef + gfeef$ $w_{23}^{30} = -cefgeh + eefheg + eefgeh - eeghef - eehfeg + eehgef + efeghe - efeghe - efgeeh + efheeg - egefef + egefef + egefef - egefef + egefef - egefef - egefef + gfeef$ $w_{23}^{31} = -cefgeh + eefheg + eefgeh - eeghef - eehfeg + eehgef + efeghe - efeghe - efgeeh + efheeg - egefef + egefef + egefef - egefef + egefef - egefef - egefef + gfeef$ $w_{23}^{32} = -cefgeh + eefheg + eefgeh - eeghef - eehfeg + eehgef + efeghe - efeghe - efgeeh + efheeg - egefef + egefef + egefef - egefef + egefef - egefef - egefef + gfeef$	$v_{16}^{12} = gheef - fheeg + fgeeh - gheef + cheefg - egefef + fheeg - cheefg + egefef - fgeeh + egefef - egefef$

	$ \begin{aligned} & feghee - fhegee - fgchee + fgheee + fhegee - fhgeee - \\ & gefeeh + gehfee + gfehee - gfheee - ghefee + ghfeee + \\ & hefgee - hegfee - hfegee + hfgeee + hgefee - hgfeee \\ w_{23}^{30} = & -efgee + efheeg + egfeeh - egheef - chfeeg + chgeef + \\ & fegeeh - fcheeg - fgceeh + fgheee + fheeeeg - fhgeee - \\ & gefeeh + geheef + gfeeeh - gfheee - gheeeef + ghfeee + \\ & hefgee - hegeef - hfeeeeg + hfgeee + hgeeeef - hgfeee \\ w_{23}^{31} = & efghee - efhgee - egfhee + eghfee + ehfgee - chgfee - \\ & feghee + fehgee + fgehee - fgheee - fhegee + fhgeee + \\ & gefhee - gehfee - gfehee + gfheee + ghefee - ghfeee - \\ & hefgee + hegfee + hfegee - hfgeee - hgefee + hgfeee \\ w_{23}^{32} = & eefgeh - eefheg - eegfeh + eeghef + eehfeg - eehgef + \\ & efgeeh - efheeg - egfeeh + egheef + ehfeeg - ehgeef - \\ & feegeh + feehge - feghee + fehgee + fgceeh - fgheee - \\ & fheeeeg + fhgeee + geefeh - geehef + gefhee - gehfee - \\ & gfceeh + gfheee + gheeeef - ghfeee - heefeg + heegef - \\ & hefgee + hegfee + hfeeee - hfgeee - hgeeeef + hgfeee \end{aligned} $	$ \begin{aligned} v_{16}^{13} = & fgchee - fhegee + ghefee - egehef + \\ & ehegef - gheeeef + efeheg - ehfefeg + \\ & fheeeeg - efeghe + egefhe - fgceeh \\ v_{16}^{14} = & fgchee - fhegee + ghefee - egehef + \\ & ehegef - gheefe + efehge - ehfefeg + \\ & fheeee - efeghe + egefhe - fgceeh \end{aligned} $
(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)	$ \begin{aligned} w_{23}^{33} = & -eeffgh - eefgfg + eegffg - eeggff + efefgg - efefgg - \\ & efgfeg + efggef - egeffg + eggef + egffeg - egfgef + \\ & fefegg - fefgeg - fegef + fegef - ffeegg + ffegeg + \\ & ffggeeg - ffggee + fgeefg - fgegef - fgfeeg + fgfgge - \\ & gefefg + geffeg + gegff - gegfef + gfeefg - gfefeg - \\ & gfggef + gfgfee - ggeeff + ggefef + ggfeef - ggeeff + \\ & ggefef + ggfeef - ggffee \\ w_{23}^{34} = & -effgg - eefgfg + eegffg + eeggff - eeffeg + eeffeg + \\ & efgfeg - efggef - egfefg - egffeg + eggef + eggfef - \\ & feefgg + feegfg + fegfeg - feggef + ffeegg - ffegeg - \\ & ffggeeg + ffggee - fggefg + fgfeg + fggeef - fggfef + \\ & geeffg - geegff - geffeg + gefgef - gfeefg + gfegef + \\ & gffeg - gffgee + ggeeff - ggefef - ggfeef + ggffee \end{aligned} $	$ \begin{aligned} v_{16}^{15} = & -efggef + egfgef - fggef + efggef - \\ & efgfeg + fgfeg + efggf - efggef + \\ & fggef - efefgg + egef + fggef - \\ & efggf - egef + fggef \end{aligned} $
(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)	$ \begin{aligned} w_{23}^{35} = & -efegfh + efefgh + efggef - efgheg + egefgh - egeghf - \\ & egffeh + egfhef - cheffg + ehgef + ehffeg - ehgfef + \\ & feegfh - feehfg - fefgeh + fefheg - fggefh + fgehef + \\ & fgfeeh - fgfhee + fheefg - fgheef - fhfeeg + fhfgee - \\ & geeffh + geehff + geffeh - gefhef + gfeefh - gfehef - \\ & gffeeh + gffhee - gheeff + ghefef + ghfeef - ghffef + \\ & heffg - heegff - heffeg + hefgef - hfeefg + hfegef + \\ & hfteeg - hffgee + hgefef - hgefef - hgfeef + hgffee \\ w_{23}^{36} = & -eeffgh + eefgfh + eegffh - eeghff - eehffg + eehgff + \\ & efggef - efgheg - efggef + efghef + efhefg - efhgef + \\ & egfefh - egffeef - egeghf + eghfef - ehfefg + ehffeg + \\ & fhgef - ehgef + feegfh - feehfg - fegfeh + feghef + \\ & fehgef - fehgef - ffegeh + ffeheg + ffgeeh - ffgeee - \\ & ffheeg + ffhgee - fggefh + fgfeh + fgheef - fghfeef + \\ & fheefg - fhefeg - fhgeef + fhgfee - geeffh + geehff + \\ & geffeh - gefhef + gfeefh - gfehef - gfteeh + gffhee - \\ & gheeff + ghefef + ghfeef - ghffef + heeffg - heegff - \\ & heffeg + hefgef - hfeefg + hfegef + hfteeg - hffgee + \\ & hgeeff - hgefef - hgfeef + hgffee \\ w_{23}^{37} = & eefgfh - eefhfg - eegffg + eegffh + eeghff + eehffg - \\ & eehgff - efggef + efgheg + efggef - efghef - efhgef + \\ & efghef - feegfh + feehfg + fegef - feghef - fehefg + \\ & ffegeh - ffeheg - ffgeeh + ffgeee + ffheeg - ffhgee + \\ & geeffh - geehff - gefefh + gefhef + geheff - gehfef - \\ & gfefeh + gfehef + gffeeh - gffhee - gfheef + gfhfee - \\ & heeffg + heegff + hefgef - hefgef - hegeff + heggef + \end{aligned} $	$ \begin{aligned} v_{16}^{16} = & egfhef - ehgef - fgheef + fhegef - \\ & efgheg + ehffeg - fhegef + efggef - \\ & egffeef + fggef - egghf + ehgfef + \\ & fghef - fhgef + efefgh - ehffg + \\ & fheefg - efefgh + egefgh - fggef + \\ & efghe - ehffeg + fhgef - efefgh + \\ & ehgef - fheegf - efghe + efghef - \\ & fggef + efghef + efghef - ehffg + \\ & ghefef - egeghf + ehgef - gheeff - \\ & efghe + ehffeg - fhgef + efghef - \\ & ehgef + fheegf + efghe - efghef + \\ & fghef - efefgh + egefgh - fggef \end{aligned} $

	$hfeveg - hfegef - hffeeg + hffgee + hfgeef - hfgfee$	
$(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{23}^{38} = efghev - efgveh - efhgev + efhvge + efvgeh - efvheg -$ $egfhev + egfveh + eghfev - eghvef - egvfeh + egvhef +$ $ehfgev - ehfvge - ehgfev + ehgvef + ehvfeg - ehvgef -$ $evfgeh + evfhge + evgfeh - evghef - evhfeg + evhgef -$ $feghev + fegveh + fehgev - fehveg - fevgeh + fevhge +$ $fgheev - fgvevh - fgheev + fghvee + fgveeh - fgveee -$ $fhegev + fheveg + fhgeev - fhgvee - fhveeg + fhvgee +$ $fvegeh - fveheg - fvgeeh + fvghee + fvheeg - fvhgee +$ $gefhev - gefveh - gehfev + gehvef + gevfeh - gevhef -$ $gfehev + gfeveh + gfheev - gfhvee - gfveeh + gfvgee +$ $gehfev - ghevef - ghfeev + ghfvee + ghveef - ghvfee -$ $gvefeh + gvehef + gvfeeh - gvfhee - gvheef + gvheeh -$ $hefgev + hefvev + hegfve - hegvef - hevfeh + hevgef +$ $hfegev - hfeveg - hfgeev + hfgvee + hfveeg - hfveee -$ $hgefev + hgevef + hgfeev - hgfvee - hgveef + hgvfee +$ $hvefeg - hvegef - hvfeeg + hvfgee + hvgeef - hvgeee +$ $vefgeh - vefheg - vegfeh + veghef + vehfeg - vehgef -$ $vfegeh + vfeheg + vfgheh - vfghee - vfheeg + vfhgee +$ $vfegeh - vgehef - vgfheh + vgfhee + vgheef - vghfee -$ $vhfeg + vhegef + vhfgeeg - vhfgee - vhggeef + vhfgee +$	$v_{16}^{18} = -ghevef + gvehef - hvegef + fheveg -$ $fveheg + hvefeg - fgveeh + fvegeh -$ $gvefeh + fgehev - fhegev + ghefev +$ $ghevfe - gvehfe + hvegef - ehvfg +$ $evhfg - evhfg + egevfh - evgef +$ $gveefh - egehf + ehgef - gheefv -$ $fhevge + fvehge - hvefge + ehvgef -$ $evhgf + hvegef - efvgh + evfgh -$ $fveegh + efegv - ehgef + fheegv +$ $fgevhe - fveghe + gvefhe - egevh +$ $evghf - gvehf + efvgh - evfgh +$ $fvehg - efegv + egef + fgeehv -$ $fgehve + fhegve - ghefve + egevh -$ $ehgef + gheevf - efvgh + ehvfg -$ $fheevg + efegv - egef + fgeevh$

Evaluamos ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Para el vector de peso $(6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{23}^1) = 0,$$

Para vectores de peso $(5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{23}^2) = -2v_{15}^1 + v_{16}^1 \quad y$$

$$\partial_3(w_{23}^3) = -v_{15}^1$$

Como estas dos imágenes son linealmente independientes y sólo hay dos vectores de peso máximo de peso $(5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ no tiene sentido calcular la imagen de los restantes vectores de peso máximo de peso $(5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ de $V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pues serán combinaciones lineales de éstas, además podemos afirmar que todos los vectores de peso máximo de peso $(5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{23}^6) = -v_{15}^2 + 2v_{16}^3,$$

$$\partial_3(w_{23}^7) = v_{15}^2 - v_{16}^3,$$

$$\partial_3(w_{23}^8) = -v_{15}^2 + v_{15}^3 - 2v_{16}^2 + 2v_{16}^3 \quad y$$

$$\partial_3(w_{23}^9) = v_{16}^2.$$

Como estas cuatro imágenes son linealmente independientes y hay cuatro vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$,

al igual que el caso anterior, no tiene sentido calcular las imágenes de los dos restantes y todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{23}^{12}) &= v_{15}^4 - v_{15}^6 - v_{16}^4, \\ \partial_3(w_{23}^{13}) &= 2v_{15}^4 - v_{16}^4 + v_{16}^6, \\ \partial_3(w_{23}^{14}) &= -v_{15}^6 + v_{16}^6, \\ \partial_3(w_{23}^{15}) &= v_{15}^4, \\ \partial_3(w_{23}^{16}) &= 2v_{15}^4 - 2v_{15}^5 - v_{16}^4 \quad y \\ \partial_3(w_{23}^{17}) &= 2v_{15}^4 - 2v_{15}^6 - v_{16}^4 + 2v_{16}^5.\end{aligned}$$

Como estas seis imágenes son linealmente independientes y hay seis vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$, afirmamos que todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{23}^{18}) &= 2v_{15}^7 + 2v_{16}^7 \quad y \\ \partial_3(w_{23}^{19}) &= -v_{16}^7.\end{aligned}$$

Como estas dos imágenes son linealmente independientes y hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$, no tiene sentido calcular la imagen del vector de peso máximo de este peso en $V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ que falta, además todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{23}^{21}) &= 2v_{15}^8 - 2v_{15}^9 + 2v_{15}^{10} - 2v_{15}^{11} - 0v_{16}^8 + 0v_{16}^9 - v_{16}^{10} + 0v_{16}^{11}, \\ \partial_3(w_{23}^{22}) &= 2v_{15}^8 - 2v_{15}^9 - v_{15}^{10} + 0v_{15}^{11} - v_{16}^8 - v_{16}^9 - v_{16}^{10} + v_{16}^{11}, \\ \partial_3(w_{23}^{23}) &= 2v_{15}^8 - 2v_{15}^9 + v_{15}^{10} - 2v_{15}^{11} - 0v_{16}^8 - v_{16}^9 - v_{16}^{10} + 0v_{16}^{11}, \\ \partial_3(w_{23}^{24}) &= 2v_{15}^8 - v_{15}^9 - v_{15}^{10} - v_{15}^{11} + 2v_{16}^8 - 2v_{16}^9 - 2v_{16}^{10} + 0v_{16}^{11}, \\ \partial_3(w_{23}^{25}) &= 2v_{15}^8 - 2v_{15}^9 + 0v_{15}^{10} - 2v_{15}^{11} + v_{16}^8 - v_{16}^9 - v_{16}^{10} + 0v_{16}^{11}, \\ \partial_3(w_{23}^{26}) &= 0v_{15}^8 - v_{15}^9 + v_{15}^{10} - v_{15}^{11} + 2v_{16}^8 - 2v_{16}^9 - 0v_{16}^{10} - 2v_{16}^{11}, \\ \partial_3(w_{23}^{27}) &= 0v_{15}^8 - v_{15}^9 + v_{15}^{10} - v_{15}^{11} - v_{16}^8 + v_{16}^9 - v_{16}^{10} + v_{16}^{11} \quad y \\ \partial_3(w_{23}^{28}) &= -v_{15}^8 + 0v_{15}^9 + 0v_{15}^{10} + 0v_{15}^{11} + 2v_{16}^8 - 2v_{16}^9 + 2v_{16}^{10} - 2v_{16}^{11}.\end{aligned}$$

Como estas ocho imágenes son linealmente independientes y hay ocho vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{23}^{29}) &= -v_{15}^{12} + v_{15}^{13} - v_{15}^{14} + v_{16}^{12} - v_{16}^{13} + v_{16}^{14}, \\ \partial_3(w_{23}^{30}) &= 0v_{15}^{12} + 0v_{15}^{13} - 2v_{15}^{14} + v_{16}^{12} + v_{16}^{13} - v_{16}^{14}, \\ \partial_3(w_{23}^{31}) &= 2v_{15}^{12} + 0v_{15}^{13} + 0v_{15}^{14} - 2v_{16}^{12} + 0v_{16}^{13} + 0v_{16}^{14} \quad y \\ \partial_3(w_{23}^{32}) &= v_{15}^{12} + v_{15}^{13} + v_{15}^{14} - v_{16}^{12} + v_{16}^{13} + v_{16}^{14}.\end{aligned}$$

Como estas cuatros imágenes son linealmente independientes y hay seis vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ luego hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ que no pertenecen a la imagen de ∂_3 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{16}^{13} y v_{16}^{14} son esos vectores ya que estos dos junto con los otros cuatros son linealmente independientes.

Para vectores de peso $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{23}^{33}) &= -v_{15}^{15} - 2v_{16}^{15} \quad y \\ \partial_3(w_{23}^{34}) &= -v_{15}^{15} + v_{16}^{15}.\end{aligned}$$

Como estas dos imágenes son linealmente independientes y hay dos vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{23}^{35}) &= 2v_{15}^{16} + 2v_{15}^{17} - 0v_{16}^{16} + 2v_{16}^{17}, \\ \partial_3(w_{23}^{36}) &= v_{15}^{16} + 2v_{15}^{17} + v_{16}^{16} + 2v_{16}^{17} \quad y \\ \partial_3(w_{23}^{37}) &= -v_{15}^{16} + 0v_{15}^{17} - 2v_{16}^{16} - 2v_{16}^{17}.\end{aligned}$$

Como estas tres imágenes son linealmente independientes y hay cuatro vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ luego existe un vector de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ que no pertenece a la imagen de ∂_3 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{16}^{17} es ese vector.

Para el vector de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{23}^{38}) = -2v_{15}^{18} + v_{16}^{18}.$$

Como existen 2 vectores de peso máximo en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$, luego hay un vector de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ que no pertenece a la imagen de ∂_3 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{16}^{18} es ese vector.

Hasta aquí, existen cuatro vectores de peso máximo en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$

$$\begin{aligned} v_{16}^{13} & \text{ de peso } (3, 1, 1, 1, 0, \dots, 0), \\ v_{16}^{14} & \text{ de peso } (2, 2, 1, 1, 0, \dots, 0), \\ v_{16}^{17} & \text{ de peso } (2, 2, 1, 1, 0, \dots, 0) \text{ y} \\ v_{16}^{18} & \text{ de peso } (2, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

que aparentemente no pertenecen a la imagen de ∂_3 . Evaluemos ∂_3 en T_9 para poder concluir pues $\partial_3(T_9) \subset (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$.

$$\text{Submódulo } T_9 = \Lambda^3(V \otimes V)$$

$$\partial_3(\Lambda^3(V \otimes V)) \subset (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V).$$

Los vectores de peso máximo de peso

$$(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad (2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) \text{ y } (2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

de la descomposición en irreducibles de $\Lambda^3(V \otimes V)$, que nos interesa analizar, es la que figura en la siguiente tabla:

Peso	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^3(V \otimes V))$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$
$(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_9^9 = -ceefgh + eefhgf + eeegfh - ceeghf - eechfg +$ $eechgf - 3efeghe + efeghe - efeghe + egehfe$ $w_9^{10} = efeghe - efeghe + efeghe + efeghe - egehfe -$ $egfehe + chfege - fegehe$ $w_9^{11} = eeefgh - eefhgf + eefhgf + eeeghf + eeghfe - 3efeghe +$ $3efeghe - 3efeghe - 2efeghe + 3efeghe + 2efeghe - 2efeghe$	v_{16}^{12} v_{16}^{13} v_{16}^{14}
$(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_9^{13} = -2eefgh + 2eefgh - 2eefgh - 2eefgh + eefgh -$ $3efeghe - efeghe + 3efeghe + efeghe - eefgh + eefgh -$ $efeghe - 2efeghe - egfehe - egfehe - 2efeghe + ehfege +$ $ehfege + 2ehffge - 3efeghe + 3efeghe + fegehe + fegehe - 2ffgehe$	v_{16}^{16} w_{16}^{17} v_{16}^{18}
$(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$		

Para vectores de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} \partial_3(w_9^9) &= 0, \\ \partial_3(w_9^{10}) &= -v_{16}^{13} + v_{16}^{14}, \\ \partial_3(w_9^{11}) &= v_{16}^{12} + 3v_{16}^{13} - v_{16}^{14}. \end{aligned}$$

De estas 3 imágenes sólo una, la segunda, es linealmente independiente con las otras cuatro, de este peso, que ya encontramos y hay seis vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ luego un vector de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ no pertenece a la imagen de ∂_3 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_{16}^{14} es dicho vector.

Para el vector de peso $(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_9^{13}) = 3v_{16}^{16} + 2v_{16}^{17}.$$

Como esta imagen junto con las otras tres ya encontradas son linealmente independientes y hay cuatro vectores de peso máximo con este peso en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

No tiene, por lo que el vector de peso máximo v_{16}^{18} no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Luego los vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ que no pertenecen a la imagen de ∂_3 son v_{16}^{14} y v_{16}^{18} .

Así, resulta que

Peso	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$		Vectores de peso máximo de $\partial_3(T_{23} \oplus T_9)$ $\subseteq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$
$(5, 1, 0, 0, \dots, 0)$	v_{15}^1	v_{16}^1	v_{15}^1, v_{16}^1
$(4, 2, 0, 0, \dots, 0)$	v_{15}^2, v_{15}^3	v_{16}^2, v_{16}^3	$v_{15}^2, v_{15}^3, v_{16}^2, v_{16}^3$
$(4, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$v_{15}^4, v_{15}^5, v_{15}^6$	$v_{16}^4, v_{16}^5, v_{16}^6$	$v_{15}^4, v_{15}^5, v_{15}^6, v_{16}^4, v_{16}^5, v_{16}^6$
$(3, 3, 0, 0, \dots, 0)$	v_{15}^7	v_{16}^7	v_{15}^7, v_{16}^7
$(3, 2, 1, 0, \dots, 0)$	$v_{15}^8, v_{15}^9, v_{15}^{10}, v_{15}^{11}$	$v_{16}^8, v_{16}^9, v_{16}^{10}, v_{16}^{11}$	$v_{15}^8, v_{15}^9, v_{15}^{10}, v_{15}^{11}, v_{16}^8, v_{16}^9, v_{16}^{10}, v_{16}^{11}$
$(3, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	$v_{15}^{12}, v_{15}^{13}, v_{15}^{14}$	$v_{16}^{12}, v_{16}^{13}, v_{16}^{14}$	$-v_{15}^{12} + v_{15}^{13} - v_{15}^{14} + v_{16}^{12} - v_{16}^{13} + v_{16}^{14}$ $-2v_{15}^{14} + v_{16}^{12} + v_{16}^{13} - v_{16}^{14}$ $2v_{15}^{12} - 2v_{16}^{12}$ $v_{15}^{12} + v_{15}^{13} + v_{15}^{14} - v_{16}^{12} + v_{16}^{13} + v_{16}^{14}$ $-v_{16}^{13} + v_{16}^{14}$
$(2, 2, 2, 0, \dots, 0)$	v_{15}^{15}	v_{16}^{15}	v_{15}^{15}, v_{16}^{15}
$(2, 2, 1, 1, 0, \dots, 0)$	v_{15}^{16}, v_{15}^{17}	v_{16}^{16}, v_{16}^{17}	$2v_{15}^{16} + 2v_{15}^{17} + 2v_{16}^{17}$ $v_{15}^{16} + 2v_{15}^{17} + v_{16}^{16} + 2v_{16}^{17}$ $-v_{15}^{16} - 2v_{16}^{16} - 2v_{16}^{17}$ $3v_{16}^{16} + 2v_{16}^{17}$
$(2, 1, 1, 1, 1, \dots, 0)$	v_{15}^{18}	v_{16}^{18}	$-2v_{15}^{18} + v_{16}^{18}$

$$\text{Submódulo } T_{22} = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

$$\partial_3(\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)) = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

Así, resulta que ∂_3 restringida al submódulo T_{22} es sobre.

$$\text{Submódulo } T_{11} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$$

$$\partial_3(\Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V) \subseteq \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \subseteq \text{Im}(\partial_3).$$

La imagen del submódulo T_{11} no aporta nada nuevo a la imagen de ∂_3 gracias al submódulo anterior.

$$\text{Submódulo } T_{24} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$$

$$\partial_3(V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \subseteq \text{Im}(\partial_3).$$

Idem al caso anterior, la imagen del submódulo T_{24} no aporta nada nuevo a la imagen de ∂_3 .

De estos tres últimos submódulos, T_{22} , T_{24} y T_{11} , resulta que:

Submódulo	$\partial_3(T_{24} \oplus T_{22} \oplus T_{11}) \subseteq \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Observación. Apartir de aquí, los vectores de peso máximo de los submódulos T_{25} , T_{26} , T_{27} , T_{29} , D_{19} , D_{20} y T_{21} no fueron transcritos debido a sus tamaños, llegando a ocupar uno de ellos 95 páginas. Sin embargo se encuentran en el output de la sección 9 grabada en el CD, bajo el título **Vectores de peso máximo de Lnk**.

$$\text{Submódulo } T_{25} = V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

$$\partial_3(V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

La cantidad de vectores de peso máximo de los submódulos $V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ y $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ se muestran en la siguiente tabla agrupados según su peso.

Peso	Vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$(6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{25}^1	
$(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^2, w_{25}^3, w_{25}^4$	v_{19}^1
$(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^5, w_{25}^6, w_{25}^7, w_{25}^8$	v_{19}^{17}
$(4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^9, w_{25}^{10}, w_{25}^{11}$	v_{19}^2
$(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{12} \dots w_{25}^{20}$	$v_{19}^3 \dots v_{19}^6$
$(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{21} \dots w_{25}^{26}$	$v_{19}^{18} \dots v_{19}^{20}$
$(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{27} \dots w_{25}^{31}$	v_{19}^7, v_{19}^8
$(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{32} \dots w_{25}^{36}$	$v_{19}^9, v_{19}^{10}, v_{19}^{11}$
$(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{37} \dots w_{25}^{45}$	$v_{19}^{12} \dots v_{19}^{16}$
$(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{46} \dots w_{25}^{49}$	$v_{19}^{21}, v_{19}^{22}, v_{19}^{23}$
$(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{50}, w_{25}^{51}, w_{25}^{52}$	v_{19}^{24}, v_{19}^{25}
$(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{25}^{53}, w_{25}^{54}, w_{25}^{55}$	v_{19}^{26}, v_{19}^{27}
$(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	w_{25}^{56}	v_{19}^{28}

Observación.

Observemos que T_{25} y D_{19} son los primeros submódulos donde el peso total, 7, es mayor que la $\dim V = 6$ que prefijamos. Antes de comenzar con el análisis de la $\text{Im}(\partial_3)$ verificaremos que para $\dim(V) = 6$ las descomposiciones de éstos se estabilizan.

$T_{25} = V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$										
N ⁰	Peso	dim(V)								
		n	2	3	4	5	6	7	8	
1	(6, 1, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{840}$	6	48	216	720	1.980	4.752	10.296	
3	(5, 2, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360}$	12	126	672	2.520	7.560	19.404	44.352	
4	(5, 1, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{336}$	—	60	120	2.160	7.200	19.800	47.520	
3	(4, 3, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360}$	6	72	420	1.680	5.292	14.112	33.264	
9	(4, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{9(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{144}$	—	135	1.260	6.300	22.680	66.150	166.320	
6	(4, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{6(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{252}$	—	—	120	960	4.320	14.400	39.600	
5	(3, 3, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{5(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{240}$	—	30	300	1.575	5.880	17.640	45.360	
5	(3, 2, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{5(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)}{240}$	—	15	180	1.050	4.200	13.230	35.280	
9	(3, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{9(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{144}$	—	—	180	1.575	7.560	26.460	75.600	
4	(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{336}$	—	—	—	60	480	2.160	7.200	
3	(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{360}$	—	—	12	120	630	2.352	7.056	
3	(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{360}$	—	—	—	30	252	1.176	4.032	
1	(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{840}$	—	—	—	—	6	48	216	
	Total	$\frac{(n-1) \cdot n^5 \cdot (n+1)}{4}$ *	24	486	3.840	18.750	68.040	201.684	516.096	
	dim(T_{25})	$\frac{(n-1) \cdot n^5 \cdot (n+1)}{4}$	24	486	3.840	18.750	68.040	201.684	516.096	

*En la tabla anterior se observa que para $2 \leq n \leq 8$ las dimensiones de los submódulos irreducibles propuestos como vectores de peso máximo de T_{25} es igual a la dimensión de T_{25} , luego esta es la descomposición de T_{25} para $2 \leq n \leq 8$. Probaremos que ésto es cierto para todo n .

$$\begin{aligned}
& \dim(6, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + 3 \dim(5, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + 4 \dim(5, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + \\
& 3 \dim(4, 3, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + 9 \dim(4, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + 6 \dim(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + \\
& 5 \dim(3, 3, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + 5 \dim(3, 2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0) + 9 \dim(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + \\
& 4 \dim(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0) + 3 \dim(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + 3 \dim(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0) + \\
& \dim(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0) = \\
& \frac{(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{840} + \frac{3(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360} + \frac{4(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{336} \\
& + \frac{3(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360} + \frac{9(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{144} + \frac{6(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{252} + \\
& \frac{5(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{240} + \frac{5(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)}{240} + \frac{9(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{144} + \\
& \frac{4(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{336} + \frac{3(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{360} + \frac{3(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{360} + \\
& \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{840} = \frac{2(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n^4 + 71n^2 + 120)}{840} + \frac{6(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (2n^2 + 37)}{360} + \\
& \frac{8(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n^2 + 12)}{336} + \frac{18(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{144} + \frac{10(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{240} + \\
& \frac{6(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{252} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n^4 + 71n^2 + 120)}{420} + \frac{(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (2n^2 + 37)}{60} + \\
& \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n^2 + 12)}{42} + \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{8} + \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{24} + \\
& \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{42} = \frac{21(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n^2 + 1)}{420} + \frac{(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (2n^2 + 37)}{60} + \\
& \frac{4(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{24} = \frac{(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n^2 + 1)}{20} + \frac{3(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (4n^2 - 1)}{60} = \\
& \frac{(n+1) \cdot n^3 \cdot (n-1) \cdot (n^2 + 1 + 4n^2 - 1)}{20} = \frac{(n+1) \cdot n^5 \cdot (n-1)}{4} = \dim(T_{25})
\end{aligned}$$

Como estos 56 vectores de peso máximo propuestos de T_{25} son linealmente independientes y las sumas de sus dimensiones es la dimensión de T_{25} , luego ésta es su descomposición en irreducibles para todo n .

De manera análoga para D_{19}

$D_{19} = (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$										
N ⁰	Peso	dim(V)								
		n	2	3	4	5	6	7	8	
1	(5, 2, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n^2(n-1)}{360}$	4	42	224	840	2.520	6.468	14.784	
1	(5, 1, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{336}$	—	15	120	540	1.800	4.950	11.880	
1	(4, 3, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)^2 n^2 (n-1)}{360}$	2	24	140	560	1.764	4.704	11.088	
4	(4, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+3)(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)}{144}$	—	60	560	2.800	10.080	29.400	73.920	
3	(4, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{252}$	—	—	60	480	2.160	7.200	19.800	
2	(3, 3, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+2)(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)}{240}$	—	12	120	630	2.352	7.056	18.144	
3	(3, 2, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+2)(n+1)n^2(n-1)^2(n-2)}{240}$	—	9	108	630	2.520	7.938	21.168	
5	(3, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{5(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{144}$	—	—	100	875	4.200	14.700	42.000	
3	(3, 1, 1, 1, 1, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{336}$	—	—	—	45	360	1.620	5.400	
2	(2, 2, 2, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+1)n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)}{360}$	—	—	8	80	420	1.568	4.704	
2	(2, 2, 1, 1, 1, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{360}$	—	—	—	20	168	784	2.688	
1	(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{840}$	—	—	—	—	6	48	216	
	Total	$\frac{(n-1)^2 n^4 (n+1)}{8} *$	6	162	1.440	7.500	28.350	86.436	225.792	
	dim(D_{19})	$\frac{(n-1)^2 n^4 (n+1)}{8}$	6	162	1.440	7.500	28.350	86.436	225.792	

*Se observa en la tabla anterior que para $2 \leq n \leq 8$ las dimensiones de los submódulos irreducibles propuestos como vectores de peso máximo de D_{19} es igual a la dimensión de D_{19} , luego esta es la descomposición de D_{19} para $2 \leq n \leq 8$. Probaremos que esto es cierto para todo n .

$$\begin{aligned}
& \dim(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + \dim(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + \dim(4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + \\
& 4 \dim(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + 3 \dim(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + 2 \dim(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + \\
& 3 \dim(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) + 5 \dim(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + 3 \dim(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0) + \\
& 2 \dim(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) + 2 \dim(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0) + \dim(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0) = \\
& \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360} + \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{336} + \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360} + \\
& \frac{4(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{144} + \frac{3(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{252} + \frac{2(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{240} + \\
& \frac{3(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)}{240} + \frac{5(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{144} + \frac{3(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{336} + \\
& \frac{2(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{360} + \frac{2(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{360} + \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{840} = \\
& \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (2n+5)}{360} + \frac{2(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (2n^2-7n+24)}{336} + \frac{3(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (3n-1)}{144} + \\
& \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{84} + \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (5n-1)}{240} + \\
& \frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (2n-5)}{180} + \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{840} = \\
& \frac{3(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (2n^3-5n^2+37n-10)}{360} + \frac{2(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (10n-3)}{240} + \\
& \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (4n^2-7n+6)}{168} + \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{840} = \\
& \frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (12n^3-8n^2-3n+2)}{120} + \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (4n^2-7n+6)}{168} + \\
& \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{840} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (105n^4-105n^3)}{840} = \frac{(n+1) \cdot n^4 \cdot (n-1)^2}{8} = \dim(D_{19}).
\end{aligned}$$

Como estos 28 vectores de peso máximo propuestos de D_{19} son linealmente independientes y las sumas de sus dimensiones es la dimensión de D_{19} para todo n , luego ésta es la descomposición en irreducibles de D_{19} .

Evaluamos ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo de T_{25} .

Para el vector de peso $(6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{25}^1) = 0.$$

Para el vector de peso $(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{25}^2) = 2v_{19}^1.$$

Como sólo hay un vector de peso máximo de peso $(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no tiene sentido calcular la imagen de los restantes vectores de peso máximo de este peso en $V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pues serán combinaciones lineales de ésta o se anularán.

Para el vector de peso $(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{25}^5) = -v_{19}^{17}.$$

Como solo hay un vector de peso máximo de peso $(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no tiene sentido calcular la imagen de los restantes vectores de peso máximo de este peso en $V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Para el vector de peso $(4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{25}^9) = v_{19}^2.$$

Al igual que el caso anterior no tiene sentido calcular la imagen de w_{25}^{10} y w_{25}^{11}

Para vectores de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{12}) &= v_{19}^4, \\ \partial_3(w_{25}^{13}) &= -v_{19}^3 + v_{19}^4 + v_{19}^5, \\ \partial_3(w_{25}^{14}) &= v_{19}^4 - v_{19}^6 \quad y \\ \partial_3(w_{25}^{15}) &= 2v_{19}^3.\end{aligned}$$

Como estas cuatro imágenes son linealmente independientes y hay cuatro vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, luego todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{21}) &= v_{19}^{19} - v_{19}^{20}, \\ \partial_3(w_{25}^{22}) &= v_{19}^{18} - v_{19}^{19}, \\ \partial_3(w_{25}^{23}) &= -v_{19}^{19} + v_{19}^{20} \quad y \\ \partial_3(w_{25}^{24}) &= 2v_{19}^{20}.\end{aligned}$$

Sólo tres de estas cuatros imágenes son linealmente independientes (la primera, la segunda y la cuarta) y hay tres vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, luego no tiene sentido calcular las imágenes de w_{25}^{25} y w_{25}^{26} . Todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{27}) &= -v_{19}^7 + v_{19}^8 & y \\ \partial_3(w_{25}^{28}) &= -v_{19}^7.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independientes y hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{32}) &= 2v_{19}^9 - 2v_{19}^{11}, \\ \partial_3(w_{25}^{33}) &= -2v_{19}^9 - v_{19}^{10} + v_{19}^{11} & y \\ \partial_3(w_{25}^{34}) &= -2v_{19}^{10}.\end{aligned}$$

Estas tres imágenes son linealmente independientes y hay tres vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{37}) &= -v_{19}^{14}, \\ \partial_3(w_{25}^{38}) &= v_{19}^{14} - 2v_{19}^{15} - v_{19}^{16}, \\ \partial_3(w_{25}^{39}) &= -v_{19}^{12} + v_{19}^{15}, \\ \partial_3(w_{25}^{40}) &= -2v_{19}^{14} + v_{19}^{16}, \\ \partial_3(w_{25}^{41}) &= v_{19}^{12} + v_{19}^{14} - v_{19}^{15} - v_{19}^{16} & y \\ \partial_3(w_{25}^{42}) &= v_{19}^{12} + 2v_{19}^{13} + v_{19}^{14} - v_{19}^{15} - 2v_{19}^{16}.\end{aligned}$$

Sólo cinco de estas imágenes son linealmente independientes, en particular podemos conciderar la primera a la cuarta junto con la sexta, y como hay cinco vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen en la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{46}) &= -2v_{19}^{17} - 2v_{19}^{18}, \\ \partial_3(w_{25}^{47}) &= 2v_{19}^{19}, \\ \partial_3(w_{25}^{48}) &= v_{19}^{18} & y \\ \partial_3(w_{25}^{49}) &= -2v_{19}^{17}.\end{aligned}$$

Sólo tres de estas imágenes son linealmente independiente, en particular podemos considerar las tres últimas, y como hay tres vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{50}) &= -v_{19}^{24} - v_{19}^{25} & y \\ \partial_3(w_{25}^{51}) &= -2v_{19}^{24}.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independiente y como hay dos vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{25}^{53}) &= 2v_{19}^{26} + 2v_{19}^{27} & y \\ \partial_3(w_{25}^{54}) &= 2v_{19}^{27}.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independiente y como hay dos vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{25}^{56}) = -2v_{19}^{28}.$$

Esta imagen es no nula y como sólo hay un vector de peso máximo de peso $(2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de este peso en $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Así, resulta que:

Submódulo	$\partial_3(T_{25}) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Submódulo $T_{14} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

$$\begin{aligned}\partial_3(\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)) &\subseteq (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \\ &\subseteq \text{Im}(\partial_3).\end{aligned}$$

Submódulo $T_{28} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$

$$\begin{aligned} \partial_3(V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)) &\subseteq (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \\ &\subseteq \text{Im}(\partial_3). \end{aligned}$$

Por submódulo anterior.

Submódulo $T_{27} = \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$

$$\partial_3(\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

Los vectores de peso máximo del submódulo $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ y $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ se detallan en la siguiente tabla.

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$(6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{27}^1, w_{27}^2	v_{20}^1
$(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{27}^3, w_{27}^4, w_{27}^5$	v_{20}^2, v_{20}^3
$(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{27}^6, \dots, w_{27}^9$	$v_{20}^4, v_{20}^5, v_{20}^6$
$(4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{27}^{10}, w_{27}^{11}, w_{27}^{12}$	v_{20}^7, v_{20}^8
$(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{27}^{13}, \dots, w_{27}^{17}$	$v_{20}^9, \dots, v_{20}^{13}$
$(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{27}^{18}, w_{27}^{19}	$v_{20}^{14}, v_{20}^{15}, v_{20}^{16}$
$(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{27}^{20}, \dots, w_{27}^{23}$	$v_{20}^{17}, v_{20}^{18}, v_{20}^{19}$
$(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{27}^{24}, w_{27}^{25}	v_{20}^{20}, v_{20}^{21}
$(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{27}^{26}, w_{27}^{27}, w_{27}^{28}$	$v_{20}^{22}, \dots, v_{20}^{25}$
$(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$		v_{20}^{26}
$(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{27}^{29}	v_{20}^{27}
$(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	w_{27}^{30}	v_{20}^{28}

El peso total de los submódulos T_{27} y D_{20} , 7, es mayor que la $\dim V = 6$ que prefijamos. Antes de comenzar con el análisis de la $\text{Im}(\partial_3)$ verificaremos que para $\dim(V) \geq 6$ las descomposiciones de estos se estabilizan.

$T_{27} = \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$										
N ⁰	Peso	dim(V)								
		n	2	3	4	5	6	7	8	
2	(6, 1, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{840}$	12	96	432	1.440	3.960	9.504	20.592	
3	(5, 2, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360}$	12	126	672	2.520	7.560	19.404	44.352	
4	(5, 1, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{336}$	–	60	480	2.160	7.200	19.800	47.520	
3	(4, 3, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360}$	6	72	420	1.680	5.292	14.112	33.264	
5	(4, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{5(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{144}$	–	75	700	3.500	12.600	36.750	92.400	
2	(4, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{252}$	–	–	40	320	1.440	4.800	13.200	
4	(3, 3, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{240}$	–	24	240	1.260	4.704	14.112	36.288	
2	(3, 2, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)}{240}$	–	6	72	420	1.680	5.292	14.112	
3	(3, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{144}$	–	–	60	525	2.520	8.820	25.200	
1	(2, 2, 2, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{360}$	–	–	4	40	210	784	2.352	
1	(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{360}$	–	–	–	10	84	392	1.344	
	Total	$\frac{n^3 \cdot (n+1) \cdot (n^3 + n^2 - 2)}{8}$	30	486	3.120	13.875	47.250	133.770	330.624	
	dim(T ₂₇)	$\frac{n^3 \cdot (n+1) \cdot (n^3 + n^2 - 2)}{8}$	30	486	3.120	13.875	47.250	133.770	330.624	

$D_{20} = (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$									
N ^o	Peso	dim(V)							
		n	2	3	4	5	6	7	8
1	(6, 1, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{840}$	6	48	216	720	1.980	4.752	10.296
2	(5, 2, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360}$	8	84	448	1.680	5.040	12.936	29.568
3	(5, 1, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{336}$	—	45	360	1.620	5.400	14.850	35.640
2	(4, 3, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{360}$	4	48	280	1.120	3.528	9.408	22.176
5	(4, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{5(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{144}$	—	75	700	3.500	12.600	36.750	92.400
3	(4, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{252}$	—	—	60	480	2.160	7.200	19.800
3	(3, 3, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{240}$	—	18	180	945	3.528	10.584	27.216
2	(3, 2, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)}{240}$	—	6	72	420	1.680	5.292	14.112
4	(3, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{144}$	—	—	80	700	3.360	11.760	33.600
1	(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{336}$	—	—	—	15	120	540	1.800
1	(2, 2, 2, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{360}$	—	—	4	40	210	784	2.352
1	(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{360}$	—	—	—	10	84	392	1.344
	Total	$\frac{(n-1) \cdot n^4 \cdot (n+1)^2}{8}$ *	18	324	2.400	11.250	39.690	115.248	290.304
	dim(D_{20})	$\frac{(n-1) \cdot n^4 \cdot (n+1)^2}{8}$	18	324	2.400	11.250	39.690	115.248	290.304

En las dos tablas anteriores se observa que para $2 \leq n \leq 8$ las dimensiones de los submódulos irreducibles, por su respectivas multiplicidades, de T_{27} y D_{20} es igual a la dimensión de T_{27} y D_{20} respectivamente, luego estas son sus descomposiciones en irreducibles para $2 \leq n \leq 8$.

* Probar que la suma de las dimensiones de los submódulos irreducibles es igual a la dimensión del submódulo, para todo n , es sencillo e innecesaria, basta probarlo para $n = 7$ para poder concluir que ésta es su descomposición en irreducibles.

En cada submódulo, los vectores de peso máximo son linealmente independientes y las sumas de sus dimensiones es igual a su dimensión entonces esta es su descomposición en irreducibles. Evaluamos ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo de T_{27} .

Para vectores de peso $(6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^1) &= 0 \\ \partial_3(w_{27}^2) &= v_{20}^1.\end{aligned}$$

Como sólo hay un vector de peso máximo de peso $(6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo con este peso en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para vectores de peso $(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^3) &= -3v_{20}^2 \\ \partial_3(w_{27}^4) &= -v_{20}^2 - v_{20}^3.\end{aligned}$$

Como estas dos imágenes son linealmente independientes y sólo hay dos vectores de peso máximo de peso $(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no tiene sentido calcular la imagen del tercer vector de peso máximo de peso $(5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ de $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ pues será combinación lineal de éstas.

Para vectores de peso $(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^6) &= -v_{20}^4 + 2v_{20}^5 + v_{20}^6 \\ \partial_3(w_{27}^7) &= v_{20}^4 + 2v_{20}^5 + 3v_{20}^6 \\ \partial_3(w_{27}^8) &= 2v_{20}^4.\end{aligned}$$

Como estas tres imágenes son linealmente independientes y hay tres vectores de peso máximo de peso $(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no tiene sentido calcular la imagen del cuarto vector de peso máximo de peso $(5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ de $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ pues será combinación lineal de ésta.

Para vectores de peso $(4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^{10}) &= -v_{20}^7 \\ \partial_3(w_{27}^{11}) &= -v_{20}^8.\end{aligned}$$

Al igual que el caso anterior no tiene sentido calcular la imagen de w_{20}^{12} .

Para los vectores de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^{13}) &= -v_{20}^{10} - v_{20}^{12} - 2v_{20}^{13} \\ \partial_3(w_{27}^{14}) &= 2v_{20}^{10} + 2v_{20}^{11} - v_{20}^{12} + v_{20}^{13}, \\ \partial_3(w_{27}^{15}) &= v_{20}^9 + v_{20}^{10} + v_{20}^{11} + v_{20}^{13}, \\ \partial_3(w_{27}^{16}) &= -v_{20}^{10} - 2v_{20}^{13} \quad y \\ \partial_3(w_{27}^{17}) &= 2v_{20}^9 - v_{20}^{10} - v_{20}^{13}.\end{aligned}$$

De estas cinco imágenes sólo cuatro son linealmente independientes (sin pérdida de generalidad podemos suponer que son las cuatro primeras), como hay cinco vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ y v_{20}^{13} es linealmente independiente con estas cuatro imágenes, hasta aquí, podemos concluir que el vector de peso máximo v_{20}^{13} de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^{18}) &= v_{20}^{14} + 3v_{20}^{15} - v_{20}^{16} \quad y \\ \partial_3(w_{27}^{19}) &= 2v_{20}^{14} + 2v_{20}^{16}.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes junto con v_{20}^{16} son linealmente independientes y hay tres vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ por lo que en este punto el vector de peso máximo v_{20}^{16} de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no pertenece a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^{20}) &= 2v_{20}^{17} - 2v_{20}^{18} \\ \partial_3(w_{27}^{21}) &= v_{20}^{17} - 2v_{20}^{18} + v_{20}^{19} \quad y \\ \partial_3(w_{27}^{22}) &= -v_{20}^{17} + 2v_{20}^{18} - 2v_{20}^{19}.\end{aligned}$$

Estas tres imágenes son linealmente independientes y hay tres vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, por lo que no tiene sentido buscar la imagen de w_{27}^{23} y todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^{24}) &= -v_{20}^{20} - v_{20}^{21} \quad y \\ \partial_3(w_{27}^{25}) &= -3v_{20}^{21}.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independientes y hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso

máximo de peso $(3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{27}^{26}) &= 2v_{20}^{22} + 4v_{20}^{23} + 2v_{20}^{24}, \\ \partial_3(w_{27}^{27}) &= 2v_{20}^{22} + 2v_{20}^{24} - v_{20}^{25} \quad y \\ \partial_3(w_{27}^{28}) &= v_{20}^{22} + 2v_{20}^{23} - v_{20}^{25}.\end{aligned}$$

Estas tres imágenes son linealmente independientes junto con v_{20}^{24} , y como hay cuatro vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, hasta aquí podemos concluir que el vector de peso máximo v_{20}^{23} de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no pertenece a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para vectores de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

No tiene por lo que el vector de peso máximo v_{20}^{26} de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ aparentemente no pertenecería a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para el vector de peso $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{27}^{29}) = v_{20}^{27}.$$

Como hay un vector de peso máximo de peso $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$.

Para el vector de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{27}^{30}) = -2v_{20}^{28}.$$

Como hay un vector de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$.

Hasta aquí resulta que los vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$:

$$\begin{aligned}v_{20}^{13} & \text{ de peso } (4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0), \\ v_{20}^{16} & \text{ de peso } (4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0), \\ v_{20}^{24} & \text{ de peso } (3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) \quad y \\ v_{20}^{26} & \text{ de peso } (3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0).\end{aligned}$$

no pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$, pero $\partial_3(T_{26}) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ por lo que aún no podemos concluir en forma definitiva.

$$\text{Submódulo } T_{26} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

$$\partial_3(\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

En este caso no necesitamos la descomposición en irreducibles completa de T_{26} , sólo algunas componentes, las cuales a lo sumo tienen peso total $5 \leq 6 = \dim(V)$.

Los vectores de peso máximo de los submódulos $\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ y $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ que nos interesan se muestran agrupados según su peso en la siguiente tabla .

Peso	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	Vectores de peso máximo de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{26}^{17}, \dots, w_{26}^{26}$	$v_{20}^9, \dots, v_{20}^{13}$
$(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{26}^{27}, \dots, w_{26}^{32}$	$v_{20}^{14}, v_{20}^{15}, v_{20}^{16}$
$(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{26}^{43}, \dots, w_{26}^{50}$	$v_{20}^{22}, \dots, v_{20}^{25}$
$(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	w_{26}^{51}, w_{26}^{52}	v_{20}^{26}

Para el vector de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{26}^{17}) = -v_{20}^9 + v_{20}^{11} + v_{20}^{13}.$$

Como la imagen por ∂_3 del vector de peso máximo w_{26}^{17} en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$, es linealmente con las cuatro primeras imágenes por ∂_3 de los vectores de peso máximo w_{27}^{13} , w_{27}^{14} , w_{27}^{15} y w_{27}^{16} de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ y hay cinco vectores de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces podemos concluir que todos los vectores de peso máximo en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, de peso $(4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$, pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$, además no tiene sentido calcular las 9 imágenes restantes pues serán combinaciones lineales de estas cinco seleccionadas.

Para el vector de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{26}^{27}) = v_{20}^{16}.$$

Como la imagen por ∂_3 del vector de peso máximo w_{26}^{27} en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, es linealmente con las dos imágenes por ∂_3 de los vectores de peso máximo w_{27}^{18} , w_{27}^{14} y w_{27}^{19} de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ y hay tres vectores de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces podemos concluir que todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ de $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$, además no tiene sentido calcular las 5 imágenes restantes pues serán combinaciones lineales de estas tres seleccionadas.

Para el vector de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{26}^{44}) = -2v_{20}^{23} + 2v_{20}^{22}.$$

Como la imagen por ∂_3 del vector de peso máximo w_{26}^{49} en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, es linealmente con las tres imágenes por ∂_3 de los vectores de peso máximo w_{27}^{26} , w_{27}^{27} y w_{27}^{28} de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ y hay cuatro vectores de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces podemos concluir que todos los vectores de peso máximo en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$, de peso $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$, además no tiene sentido calcular las 7 imágenes restantes pues serán combinaciones lineales de estas tres seleccionadas.

Para el vector de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{26}^{51}) = 2v_{20}^{26}.$$

Como solo hay un vector de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ podemos concluir que todos los vectores de peso máximo con este peso en $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a $\text{Im}(\partial_3)$.

Así, resulta que:

Submódulo	$\partial_3(T_{27} \oplus T_{26}) \subseteq (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Submódulo $T_{29} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

$$\partial_3(V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)) \subseteq \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

La cantidad de vectores de peso máximo del submódulo $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ y $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ se muestran en la siguiente tabla.

Peso	Vectores de peso máximo de $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	Vectores de peso máximo de $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$(7, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{29}^1	
$(6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^2 \dots w_{29}^4$	
$(6, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^5 \dots w_{29}^8$	v_{21}^1
$(5, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^9 \dots w_{29}^{12}$	v_{21}^2
$(5, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{13} \dots w_{29}^{22}$	v_{21}^3 v_{21}^4
$(5, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{23} \dots w_{29}^{28}$	v_{21}^5
$(4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{29}^{29} w_{29}^{30}	
$(4, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{31} \dots w_{29}^{40}$	v_{21}^6 v_{21}^7
$(4, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{41} \dots w_{29}^{47}$	v_{21}^8
$(4, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{48} \dots w_{29}^{59}$	v_{21}^9 v_{21}^{10} v_{21}^{11} v_{21}^{12}
$(4, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{60} \dots w_{29}^{63}$	v_{21}^{13}
$(3, 3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{64} \dots w_{29}^{68}$	v_{21}^{14} v_{21}^{15}
$(3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{69} \dots w_{29}^{75}$	v_{21}^{16}
$(3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{76} \dots w_{29}^{82}$	v_{21}^{17}
$(3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	$w_{29}^{83} \dots w_{29}^{88}$	v_{21}^{19} v_{21}^{20}
$(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	w_{29}^{89}	v_{21}^{21}
$(2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$	w_{29}^{90}	
$(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$	w_{29}^{91} w_{29}^{92}	v_{21}^{22}
$(2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$	w_{29}^{93}	

El peso total de los submódulos T_{29} y D_{21} , 8, es mayor que la $\dim V = 6$ que prefijamos. Antes de comenzar con el análisis de la $\text{Im}(\partial_3)$ verificaremos que para $\dim(V) \geq 6$ las descomposiciones de estos se estabilizan.

$T_{29} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$									
N ⁰	Peso	dim(V)							
		n	2	3	4	5	6	7	8
1	(7, 1, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+6) \cdot (n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{5 \cdot 760}$	7	63	315	1.155	3.465	9.009	21.021
3	(6, 2, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{3(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)}{1 \cdot 008}$	15	180	1080	4.500	14.850	41.580	102.960
4	(6, 1, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 920}$	—	84	756	3.780	13.860	41.580	108.108
4	(5, 3, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{1 \cdot 440}$	12	168	1.120	5.040	17.640	51.744	133.056
10	(5, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{10(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{630}$	—	240	2.560	14.400	57.600	184.800	506.880
6	(5, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{6(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 152}$	—	—	210	1.890	9.450	34.650	103.950
2	(4, 4, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+3) \cdot (n+2)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{2 \cdot 880}$	2	30	210	980	3.528	10.584	27.720
10	(4, 3, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{10(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{576}$	—	150	1.750	10.500	44.100	147.000	415.800
7	(4, 2, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{7(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{720}$	—	42	588	3.920	17.640	61.740	181.104
12	(4, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{12(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{448}$	—	—	540	5.400	29.160	113.400	356.400
4	(4, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 152}$	—	—	—	140	1.260	6.300	23.100
5	(3, 3, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{5(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)}{960}$	—	15	225	1.575	7.350	26.460	79.380
7	(3, 3, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{7(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{720}$	—	—	140	1.470	8.232	32.928	105.840
7	(3, 2, 2, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{7(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{576}$	—	—	105	1.225	7.350	30.870	102.900
6	(3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{6(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{12 \cdot 600}$	—	—	—	240	2.304	12.096	46.080
1	(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{1 \cdot 920}$	—	—	—	—	21	189	945
1	(2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)^2 \cdot (n-3)}{2 \cdot 880}$	—	—	1	15	105	490	1.764
2	(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 440}$	—	—	—	20	210	1.176	4.704
1	(2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{336}$	—	—	—	—	15	140	720
	Total	$\frac{(n-1) \cdot n^5 \cdot (n+1)^2}{8} *$	36	972	9.600	56.250	238.140	806.736	2.322.432
	dim(T ₂₉)	$\frac{(n-1) \cdot n^5 \cdot (n+1)^2}{8}$	36	972	9.600	56.250	238.140	806.736	2.322.432

$D_{21} = \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$										
Nros	Peso	dim(V)								
		n	2	3	4	5	6	7	8	
1	(6, 1, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1.920}$	—	21	189	945	3.465	10.395	27.027	
1	(5, 3, 0, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)}{1.440}$	3	42	280	1.260	4.410	12.936	33.264	
2	(5, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{630}$	—	48	512	2.880	11.520	36.960	101.376	
1	(5, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1.152}$	—	—	35	315	1.575	5.775	17.325	
2	(4, 3, 1, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{576}$	—	30	350	2.100	8.820	29.400	83.160	
1	(4, 2, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{720}$	—	6	84	560	2.520	8.820	25.872	
4	(4, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{4(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{448}$	—	—	180	1.800	9.720	37.800	118.800	
1	(4, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{1(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1.152}$	—	—	—	35	315	1.575	5.775	
2	(3, 3, 2, 0, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+2) \cdot (n+1)^2 \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)}{960}$	—	6	90	630	2.940	10.584	31.752	
1	(3, 3, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{720}$	—	—	20	210	1.176	4.704	15.120	
2	(3, 2, 2, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{576}$	—	—	30	350	2.100	8.820	29.400	
2	(3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+2) \cdot (n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{12.600}$	—	—	—	80	768	4.032	15.360	
1	(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{1.920}$	—	—	—	—	21	189	945	
2	(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, ..., 0)	$\frac{2(n+1) \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1.440}$	—	—	—	10	105	588	2.352	
	Total	$\frac{(n-1) \cdot n^5 \cdot (n+1)^2}{8}$	3	153	1.770	11.175	49.455	172.578	507.528	
	dim(D_{21})	$\frac{(n-1) \cdot n^5 \cdot (n+1)^2}{8}$	3	153	1.770	11.175	49.455	172.578	507.528	

En las dos tablas anteriores se observa que para $n \geq 6$ las descomposiciones en irreducibles de T_{29} y D_{21} se estabilizan, luego estas son sus descomposiciones en irreducibles. Evaluamos ∂_3 en cada uno de los vectores de peso máximo de T_{29} .

Para el vector de peso $(7, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^1) = 0.$$

Para vectores de peso $(6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} \partial_3(w_{29}^2) &= 0, \\ \partial_3(w_{29}^3) &= 0 \quad y \\ \partial_3(w_{29}^4) &= 0. \end{aligned}$$

Para el vector de peso $(6, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^5) = 2v_{21}^1.$$

Como sólo hay un vector de peso máximo de peso $(6, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ no tiene sentido calcular las imágenes de los restantes vectores de peso máximo de peso $(6, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ de $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Para el vector de peso $(5, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{11}) = -2v_{21}^2.$$

Al igual que el caso anterior no tiene sentido calcular la imagen de los restantes vectores de peso máximo de peso $(5, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$.

Para vectores de peso $(5, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} \partial_3(w_{29}^{13}) &= v_{21}^3 \quad y \\ \partial_3(w_{29}^{14}) &= v_{21}^4. \end{aligned}$$

Como estas dos imágenes son linealmente independientes y hay dos vectores de peso máximo de peso $(5, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, luego todos los vectores de peso máximo de peso $(5, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(5, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{23}) = 2v_{21}^5.$$

Como sólo hay un vector de peso máximo de peso $(5, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, no tiene sentido calcular las imágenes de los vectores de peso máximo restantes de este peso, luego todos los vectores de peso máximo de peso $(5, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Par vectores de peso $(4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{29}^{29}) &= 0 & y \\ \partial_3(w_{29}^{30}) &= 0.\end{aligned}$$

Para vectores de peso $(4, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{29}^{31}) &= v_{21}^7 & y \\ \partial_3(w_{29}^{34}) &= v_{21}^6 - v_{21}^7.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independientes y hay dos vectores de peso máximo de peso $(4, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 3, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(4, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{41}) = -2v_{21}^8.$$

Como sólo hay un vector de peso máximo de peso $(4, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(4, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{29}^{48}) &= -2v_{21}^{12} + 2v_{21}^{11} + 4v_{21}^9, \\ \partial_3(w_{29}^{49}) &= v_{21}^{12} + v_{21}^{11} + v_{21}^{10} - 2v_{21}^9, \\ \partial_3(w_{29}^{50}) &= 2v_{21}^{12} - 2v_{21}^{11} + 2v_{21}^{10} - 4v_{21}^9 & y \\ \partial_3(w_{29}^{52}) &= 2v_{21}^{12} - 2v_{21}^{11} - 2v_{21}^9.\end{aligned}$$

Estas cuatro imágenes son linealmente independiente y como hay cuatro vectores de peso máximo en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, de peso $(4, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(4, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{60}) = -v_{21}^{13}.$$

Como hay un vector de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(4, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_3(w_{29}^{63}) &= -3v_{21}^{14} - 3v_{21}^{15} & y \\ \partial_3(w_{29}^{65}) &= v_{21}^{14} - 3v_{21}^{15}.\end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independiente y hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 3, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{69}) = 2v_{21}^{16}.$$

Como hay un vector de peso máximo de peso $(3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ luego todos los vectores de peso máximo en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$, de peso $(3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} \partial_3(w_{29}^{76}) &= -4v_{21}^{17} - 2v_{21}^{18} & y \\ \partial_3(w_{29}^{77}) &= 5v_{21}^{17} + 2v_{21}^{18}. \end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independiente y hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para vectores de peso $(3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} \partial_3(w_{29}^{83}) &= 4v_{21}^{19} - 2v_{21}^{20} & y \\ \partial_3(w_{29}^{84}) &= v_{21}^{19} - v_{21}^{20}. \end{aligned}$$

Estas dos imágenes son linealmente independiente y hay dos vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{89}) = 4v_{21}^{21}.$$

Como solo hay un vector de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{90}) = 0.$$

Para el vector de peso $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{91}) = 4v_{21}^{22}.$$

Como sólo hay un vector de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ entonces todos los vectores de peso máximo de peso $(3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ en $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ pertenecen a la imagen de ∂_3 .

Para el vector de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$

$$\partial_3(w_{29}^{93}) = 0.$$

Así, resulta que:

Submódulo	$\partial_3(T_{29}) \subseteq \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

$$\text{Submódulo } T_{30} = \Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$$

$$\begin{aligned} \partial_3(\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)) &\subseteq \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \\ &\subseteq \text{Im}(\partial_3), \end{aligned}$$

esto se deduce del submódulo anterior.

Submódulos restantes:

La imagen por ∂_3 de estos 24 submódulos es nula debido al corchete definido en el álgebra de Lie \mathcal{L}_n o al álgebra asociativa truncada A_3 , sólo tiene sentido analizar ∂_3 en los submódulos que contengan dos factores tensoriales de la forma V o $(V \otimes V)$ (iguales o distintos), como vimos en la demostración de la Proposición 6.1. Así, resulta que:

	Submódulo	$\text{Im}(\partial_3)$
T_{31}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{32}	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{33}	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0
T_{34}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0
T_{35}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0
T_{36}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
T_{37}	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{38}	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{39}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
T_{40}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{41}	$\Lambda^3(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0

T_{42}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{43}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{44}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	0
T_{45}	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{46}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{47}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{48}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{49}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0
T_{50}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0
T_{51}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{52}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0
T_{53}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0
T_{54}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0

Observaciones.

Para determinar la imagen por ∂_3 de T_i , no es necesario encontrar su descomposición en irreducible completa, solo basta con hallar sus vectores de peso máximo cuyo peso coincida con los pesos de la descomposición en irreducibles de D_j , con D_j tal que $\partial_3(T_i) \subseteq D_j$.

Para determinar la imagen de ∂_3 se trabajo con $\dim(V) \leq 6$.

Para sintetizar enunciamos la siguiente proposición cuya demostración se basa en los cálculos anteriores.

Proposición 6.5. *La diferencial $\partial_3 : \Lambda^3(\mathcal{L}_n^3) \longrightarrow \Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$ como homomorfismo de $GL(V)$ -módulo es tal que*

$\partial_3(\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3))$			
	Submódulo	$\partial_3(\text{Submódulo}) \subseteq$	$\partial_3(\text{Submódulo}) =$
T_1	$\Lambda^3 V$	$\Lambda^2 V \otimes V$	$\langle v_3^2 \rangle$
T_2	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$
T_3	$\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)$ \oplus $(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$	$\langle -v_7^1 + v_6^1 \rangle \oplus$ $\langle v_7^2 + v_6^2 + v_6^3 \rangle \oplus$ $\langle v_7^3 - 2v_6^3 \rangle \oplus$ $\langle v_7^4 + v_6^4 \rangle \oplus$ $\langle v_7^5 - 2v_6^5 \rangle$
T_4	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes V$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$ \oplus $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$ \oplus $\Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\langle v_{14}^1 - v_8^1 \rangle \oplus \langle -v_{13}^1 - v_{14}^1 \rangle \oplus$ $\langle 3v_8^2 \rangle \oplus \langle v_{14}^2 + 2v_8^2 - v_8^3 \rangle \oplus$ $\langle v_{13}^3 - v_{14}^3 \rangle \oplus$ $\langle -2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^4 + 2v_8^5 - v_8^6 \rangle \oplus$ $\langle -v_{14}^4 - v_{14}^4 + 2v_8^4 + v_8^5 \rangle \oplus \langle v_{14}^3 + 2v_8^5 \rangle \oplus$ $\langle v_{13}^3 + 2v_{14}^3 \rangle \oplus \langle v_{13}^4 - 2v_{14}^3 - v_{14}^4 \rangle \oplus$ $\langle -2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9 \rangle \oplus$ $\langle -v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus \langle v_{13}^5 - v_{14}^5 \rangle \oplus$ $\langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \oplus$ $\langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle \oplus$ $\langle v_{13}^6 + 2v_{14}^6 \rangle$
T_5	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$
T_6	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes V$	0	0
T_7	$V \otimes (V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$
T_8	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$
T_9	$\Lambda^3(V \otimes V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \oplus$
T_{23}	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V) =$ $\langle v_{16}^1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{16}^8 \rangle$	$\langle v_{16}^1 \rangle \oplus \langle v_{16}^2 \rangle \oplus \langle v_{16}^3 \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^4 \rangle \oplus \langle v_{16}^5 \rangle \oplus \langle v_{16}^6 \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^7 \rangle \oplus \langle v_{16}^8 \rangle \oplus \langle v_{16}^9 \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^{10} \rangle \oplus \langle v_{16}^{11} \rangle \oplus \langle v_{16}^{12} \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^{13} \rangle \oplus \langle v_{16}^{15} \rangle \oplus \langle v_{16}^{16} \rangle \oplus \langle v_{16}^{17} \rangle$
T_{10}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V)$	0	0
T_{11}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$
T_{22}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$		
T_{24}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$		
T_{12}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{13}	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{14}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$
T_{25}	$V \otimes (V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$		
T_{28}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$		
T_{15}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{16}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V$	0	0
T_{17}	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{18}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{19}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{20}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{26}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$
T_{27}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$		
T_{29}	$V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
T_{30}	$\Lambda^2(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$		

T_{31}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{32}	$V \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{33}	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{34}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{35}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{36}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{37}	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{38}	$(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{39}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{40}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{41}	$\Lambda^3(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{42}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{43}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{44}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V$	0	0
T_{45}	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{46}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{47}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{48}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{49}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	0	0
T_{50}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$	0	0
T_{51}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{52}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0
T_{53}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	0	0
T_{54}	$\Lambda^3(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	0	0

6.2.6 Cálculo de las homología de \mathcal{L}_n^3

Teorema 6.6. *Dado V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 2$ consideramos el álgebra de corrientes*

$$\mathcal{L}_n^3 = (V \oplus \Lambda^2(V)) \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V)$$

Entonces

$$H_0(\mathcal{L}_n^3) = \mathbb{C}$$

$$H_1(\mathcal{L}_n^3) = V \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V)$$

$$\begin{aligned}
H_2(\mathcal{L}_n^3) = & \langle v_2^1 \rangle \oplus \langle v_2^2 + v_2^3 \rangle \oplus \langle v_3^1 \rangle \oplus \langle v_4^1 \rangle \oplus \langle v_4^3 \rangle \oplus \langle v_{11}^1 \rangle \oplus \\
& \langle v_{11}^4 \rangle \oplus \langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 \rangle \oplus \langle 2v_4^2 + v_{11}^2 \rangle \oplus \langle 2v_4^4 + v_{11}^5 \rangle \oplus \\
& (\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V) / \text{Im } \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V)) \oplus \\
& ((V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \oplus V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \\
& \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)) / \text{Im } \partial_3(V \otimes \Lambda^2(V \otimes V) \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)) \oplus \\
& (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus \langle v_{16}^{14} \rangle \oplus \langle v_{16}^{18} \rangle \oplus \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V).
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V) \oplus (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V)}{\text{Im } \partial_3(\Lambda^2 V \otimes (V \otimes V))} &\simeq (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes V \\ &\simeq \Lambda^2 V \otimes (V \otimes V). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{((V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V \oplus V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V))}{\text{Im } \partial_3(V \otimes \Lambda^2(V \otimes V) \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{sym}^2 V))} \\ \simeq \langle v_8^9 \rangle \oplus \langle v_8^{12} \rangle \oplus \langle v_8^{13} \rangle \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \\ \simeq \langle v_8^9 \rangle \oplus \langle v_8^{12} \rangle \oplus \langle v_8^{13} \rangle \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V. \end{aligned}$$

Prueba.

$$\begin{aligned} \partial_0 : \mathbb{C} &\longrightarrow 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \text{Nu}(\partial_0) = \mathbb{C}, \\ \partial_1 : \mathcal{L}_n^3 &\longrightarrow 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \text{Im}(\partial_1) = 0 \\ \text{y} \quad \text{como} \quad H_0(\mathcal{L}_n^3) &= \text{Nu}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$H_0(\mathcal{L}_n^3) = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C}.$$

$$\partial_1 : \mathcal{L}_n^3 \longrightarrow 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \text{Nu}(\partial_1) = \mathcal{L}_n^3,$$

por Proposición 6.4

$$\begin{aligned} \partial_2 : \Lambda^2(\mathcal{L}_n^3) &\longrightarrow \mathcal{L}_n^3 \quad \text{es tal que} \quad \text{Im}(\partial_2) = \Lambda^2 V \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V) \\ \text{y} \quad \text{como} \quad H_1(\mathcal{L}_n^3) &= \text{Nu}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$H_1(\mathcal{L}_n^3) = \mathcal{L}_n^3 / \Lambda^2 V \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V) = V \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V).$$

$$\begin{aligned} \partial_2 : \Lambda^2(\mathcal{L}_n^3) &\longrightarrow \mathcal{L}_n^3 \\ \partial_3 : \Lambda^3(\mathcal{L}_n^3) &\longrightarrow \Lambda^2(\mathcal{L}_n^3) \end{aligned}$$

de las Proposiciones 6.4 y 6.5 sabemos que el núcleo de ∂_2 y la $\text{Im}(\partial_3)$ son:

	Submódulos de $\Lambda^2(\mathcal{L}_n^3)$	Núcleo ∂_2	$\text{Im}(\partial_3)$
D_1	$\Lambda^2 V$	0	-
D_2	$V \otimes (V \otimes V)$	$\langle v_2^1 = e \otimes (e \otimes e) \rangle \oplus$ $\langle v_2^2 + v_3^3 \rangle =$ $\langle 2e \otimes (e \otimes f) - e \otimes (f \otimes e) - f \otimes (e \otimes e) \rangle$	-
D_3	$V \otimes \Lambda^2 V$	$V \otimes \Lambda^2 V = \langle v_3^1 \rangle \oplus \langle v_3^2 \rangle$	$\langle v_3^2 \rangle$
D_4 D_{11}	$\Lambda^2(V \otimes V)$ \oplus $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\langle v_4^1 = -eeef \rangle \oplus$ $\langle v_4^3 = eefg - eegf - 2efeg + efge - egfe \rangle \oplus$ $\langle v_{11}^1 = -eeee \rangle \oplus$ $\langle v_{11}^4 = eeff - efef - feef + ffee \rangle \oplus$ $\langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 = -2eeef + efec + feec \rangle \oplus$ $\langle 2v_4^2 + v_{11}^2 = -eeef + (efec - feec) \rangle \oplus$ $\langle 2v_4^4 + v_{11}^5 \rangle = \langle (-eeefg + eegf + efeg - fege)$ $+ (efeg - egef - feeg + fgee + geef - gfee) \rangle$	-
D_5	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V)$
D_6 D_7	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$ \oplus $(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$ \oplus $(V \otimes V) \otimes \Lambda^2 V$	$\langle -v_7^1 + v_6^1 \rangle \oplus$ $\langle v_7^2 + v_6^2 + v_6^3 \rangle \oplus$ $\langle v_7^3 - 2v_6^3 \rangle \oplus$ $\langle v_7^4 + v_6^4 \rangle \oplus$ $\langle v_7^5 - 2v_6^5 \rangle$
D_8 D_{13} D_{14}	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$ $(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$ $V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$ $= \langle v_8^1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_8^{13} \rangle$ $(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2 V$ $= \langle v_{13}^1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{13}^6 \rangle$ $V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ $= \langle v_{14}^1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{14}^6 \rangle$	$\langle v_{14}^1 - v_8^1 \rangle \oplus \langle -v_{13}^1 - v_{14}^1 \rangle \oplus$ $\langle 3v_8^2 \rangle \oplus \langle v_{14}^2 + 2v_8^2 - v_8^3 \rangle \oplus$ $\langle v_{13}^2 - v_{14}^3 \rangle \oplus$ $\langle -2v_{14}^3 + 2v_{14}^4 + v_8^4 + 2v_8^5 - v_8^6 \rangle \oplus$ $\langle -v_{14}^4 - v_{14}^4 + 2v_8^4 + v_8^5 \rangle \oplus$ $\langle v_{14}^3 + 2v_8^5 \rangle \oplus \langle v_{13}^3 + 2v_{14}^3 \rangle \oplus$ $\langle v_{13}^4 - 2v_{14}^3 - v_{14}^4 \rangle \oplus \langle -2v_{14}^5 + v_8^7 + v_8^9 \rangle \oplus$ $\langle -v_{14}^5 - v_8^7 + 2v_8^9 - v_8^8 \rangle \oplus \langle v_{13}^5 - v_{14}^5 \rangle \oplus$ $\langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 2v_8^{10} \rangle \oplus$ $\langle 2v_{14}^6 - 4v_8^{12} - 4v_8^{10} + 3v_8^{11} \rangle \oplus$ $\langle v_{13}^6 + 2v_{14}^6 \rangle$
D_9	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes V)$
D_{10}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$
D_{12}	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$	-
D_{15} D_{16}	$(\Lambda^2 V \otimes V)$ $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$ $(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (V \otimes V) =$ $\langle v_{16}^1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{16}^{18} \rangle$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \oplus$ $\langle v_{16}^1 \rangle \oplus \langle v_{16}^2 \rangle \oplus \langle v_{16}^3 \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^4 \rangle \oplus \langle v_{16}^5 \rangle \oplus \langle v_{16}^6 \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^7 \rangle \oplus \langle v_{16}^8 \rangle \oplus \langle v_{16}^9 \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^{10} \rangle \oplus \langle v_{16}^{11} \rangle \oplus \langle v_{16}^{12} \rangle \oplus$ $\langle v_{16}^{13} \rangle \oplus \langle v_{16}^{15} \rangle \oplus \langle v_{16}^{16} \rangle \oplus \langle v_{16}^{17} \rangle$
D_{17}	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
D_{18}	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$	-
D_{19}	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
D_{20}	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$(V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$
D_{21}	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$	$\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Analizaremos la intersección del núcleo por ∂_2 restringida a estos veintiun submódulos con la imagen de ∂_3 teniendo en cuenta que el análisis de los submódulos $D_1, D_2, D_3, D_5, D_6, D_7, D_9$ y D_{10} es idéntico al realizado en el cálculo de la homología de \mathcal{L}_n^2 .

Submódulo $D_4 \oplus D_{11} = \Lambda^2(V \otimes V) \oplus V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Del calculo del núcleo de ∂_2 y la imagen de ∂_3 restringida a estos submódulos es

$$\begin{aligned} \text{Nu}(\partial_2) \cap (D_4 \oplus D_{11}) &= \langle v_4^1 \rangle \oplus \langle v_4^3 \rangle \oplus \langle v_{11}^1 \rangle \\ &\quad \oplus \langle v_{11}^4 \rangle \oplus \langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 \rangle \\ &\quad \oplus \langle 2v_4^2 + v_{11}^2 \rangle \oplus \langle 2v_4^4 + v_{11}^5 \rangle . \\ \text{Im}(\partial_3) \cap (D_4 \oplus D_{11}) &= 0. \end{aligned}$$

Así, resulta que:

$$\begin{aligned} \langle v_4^1 \rangle \oplus \langle v_4^3 \rangle \oplus \langle v_{11}^1 \rangle \oplus \langle v_{11}^4 \rangle \oplus \langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 \rangle \\ \oplus \langle 2v_4^2 + v_{11}^2 \rangle \oplus \langle 2v_4^4 + v_{11}^5 \rangle \subset H_2. \end{aligned}$$

Submódulo $D_8 \oplus D_{13} \oplus D_{14}$

De la observación de página 81

$$\begin{aligned} (D_8 \oplus D_{13} \oplus D_{14}) / \text{Im } \partial_3(T_4 \oplus T_{21}) &\simeq v_8^9 \oplus v_8^{12} \oplus v_8^{13} \\ &\quad \oplus \Lambda^2 V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (D_8 \oplus D_{13} \oplus D_{14}) / \text{Im } \partial_3(T_4 \oplus T_{21}) &\simeq v_8^9 \oplus v_8^{12} \oplus v_8^{13} \\ &\quad \oplus (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes V. \end{aligned}$$

Submódulo $D_{12} = (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Del cálculo del núcleo de ∂_2 y la imagen de ∂_3

$$\begin{aligned} \text{Nu}(\partial_2) \cap (D_{12}) &= (V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \\ \text{Im}(\partial_3) \cap (D_{12}) &= 0. \end{aligned}$$

Así resulta que:

$$(V \otimes V) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \subset H_2.$$

Submódulo $D_{15} \oplus D_{16}$

De la tabla anterior los vectores de peso máximo de la $\text{Im}(\partial_3)$ en $D_{15} \oplus D_{16}$ unido a los vectores

de peso máximo $\langle v_{16}^{14} \rangle$ y $\langle v_{16}^{18} \rangle$ forman una base de vectores propios de $D_{15} \oplus D_{16}$ por lo que podemos suponer que:

$$\langle v_{16}^{14} \rangle \oplus \langle v_{16}^{18} \rangle \subset H_2.$$

Submódulo $D_{17} = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Del cálculo del núcleo de ∂_2 y la imagen de ∂_3

$$\text{Nu}(\partial_2) \cap (D_{17}) = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

$$\text{Im}(\partial_3) \cap (D_{17}) = \Lambda^2 V \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

Así resulta que este submódulo no aporta nada a la homología.

Submódulo $D_{18} = \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Del cálculo del núcleo de ∂_2 y la imagen de ∂_3

$$\text{Nu}(\partial_2) \cap (D_{18}) = \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

$$\text{Im}(\partial_3) \cap (D_{18}) = 0.$$

Así, resulta que:

$$\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V) \subset H_2.$$

Submódulo $D_{19} = (\Lambda^2 V \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Del cálculo del núcleo de ∂_2 y la imagen de ∂_3

$$\text{Nu}(\partial_2) \cap (D_{19}) = \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$$

$$\text{Im}(\partial_3) \cap (D_{19}) = \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V).$$

Así resulta que este submódulo no aporta nada a la homología.

Submódulo $D_{20} = (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Del cálculo del núcleo de ∂_2 y la imagen de ∂_3

$$\text{Nu}(\partial_2) \cap (D_{20}) = (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$$

$$\text{Im}(\partial_3) \cap (D_{20}) = (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

Así resulta que este submódulo no aporta nada a la homología.

Submódulo $D_{21} = \Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$

Del cálculo del núcleo de ∂_2 y la imagen de ∂_3

$$\text{Nu}(\partial_2) \cap (D_{21}) = 0.$$

Así resulta que este submódulo no aporta nada a la homología. □

7 Programas Maple

En esta sección están escritos todos los programas que se necesitaron, organizados en grupos según su función. El paquete completo descompone, vía el Teorema de peso máximo, los módulos del complejo de Koszul como suma de submódulos irreducibles proveyendo además vectores de peso máximo para cada uno de ellos.

El paquete se inicia con una base ordenada del espacio V y un procedimiento auxiliar que devuelva el orden de un elemento dado de la base.

Un primer grupo produce bases de los espacios involucrados formadas por vectores peso y un segundo grupo los clasifica según su peso distinguiendo los de peso dominante.

El cuarto grupo de procedimientos implementa la acción de los operadores de crecimiento, que se aplican a los distintos subespacios de vectores de peso dominante y calcula los núcleos de éstos para luego encontrar los vectores de peso máximo. Estos procedimientos utilizan otros agrupados en el tercer grupo, los procedimientos de ordenar. Los procedimientos de ordenar reescriben los vectores devueltos por los operadores de crecimiento en términos de las bases canónicas utilizadas.

Un quinto grupo contiene el procedimiento de intersección de subespacios, que permite determinar los vectores de peso máximo de un peso dado intersecando los núcleos devueltos por los procedimientos anteriores. Este procedimiento devuelve una base de la intersección en coordenadas. Luego un último procedimiento reescribe esta base en términos de las bases canónicas utilizadas.

Por último escribimos un procedimiento que calcula la dimensión de un submódulo irreducible de peso dado. Este se utilizó en una etapa preliminar como herramienta para chequear los procedimientos escritos comparando las dimensiones de los espacios a descomponer con la suma de las dimensiones de los submódulos irreducibles encontrados.

7.1 Preliminares

ALPH: lista de letras que serán usadas como una base ordenada de V .

Ejemplo

```
> ALPH:=[e,f,g,h,v,w,x,y];
```

$$ALPH := [e, f, g, h, v, w, x, y]$$

ORDALPH: es un procedimiento que devuelve el orden de un elemento de la base ALPH.

Input: una letra de la base ALPH.

Output: el lugar que ocupa dicha letra en ALPH.

```
> ORDALPH:=table():
> for i from 1 to nops(ALPH) do
>   ORDALPH[ALPH[i]]:=i:
> od:
```

Ejemplo

```
> print(ORDALPH[f]);
```

2

7.2 Bases

Este grupo tiene varios procedimientos que escriben las bases canónicas de subespacios que luego deben ser descompuestos como suma de módulos irreducibles. La mayoría de los subespacios referidos son productos tensoriales de potencias tensoriales, simétricas y exteriores de V ; además hay potencias exteriores de algunos de los anteriores.

BASET: da una base de $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$.

BASEALT: da una base de $\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V \otimes \dots \otimes \Lambda^2 V$.

BASESYMM: da una base de $\text{Sym}^2 V \otimes \text{Sym}^2 V \otimes \dots \otimes \text{Sym}^2 V$.

BASESP1: da una base de $\Lambda^2(V \otimes V)$.

BASESP2: da una base de $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

BASE : da una base de $(V \otimes \dots \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \dots \otimes \Lambda^2 V) \otimes (\text{Sym}^2 V \otimes \dots \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

BASESP3: da una base de $\Lambda^3(V \otimes V)$.

BASESP4: da una base de $\Lambda^2(\Lambda^2(V) \otimes V)$.

BASESP5: da una base de $\Lambda^2(\Lambda^2(V))$.

BASESP6: da una base de $\Lambda^2(\Lambda^2(V) \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Con el objetivo de determinar los vectores de peso máximo de estos submódulos una vez que conseguimos mediante los programas anteriores determinar una base de estos necesitamos clasificar los vectores de una base dada según su peso creando así el grupo:

BASET: es un procedimiento que nos da una base de $V \otimes \dots \otimes V$.

Input: n y p donde:

n : es la dimensión de V y

p : es la cantidad de factores V .

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```
> BASET:=proc(n,p) local d,BT,i,j,aux:
> d:=n:
> BT:=matrix(d^p,p):
> for i from 1 to d^p do
> aux:=convert(i-1,base,d):
> for j from 1 to p do
> if j<=nops(aux) then BT[i,p-j+1]:=ALPH[aux[j]+1]:
> else BT[i,p-j+1]:=ALPH[1]: fi:
> od:
> od:
> BT:
> end:
```

Ejemplo

```
> print(BASET(2,3)):
```

$$\begin{bmatrix} e & e & e \\ e & e & f \\ e & f & e \\ e & f & f \\ f & e & e \\ f & e & f \\ f & f & e \\ f & f & f \end{bmatrix}$$

BASEALT: es un procedimiento que nos da una base de $\Lambda^2 V \otimes \cdots \otimes \Lambda^2 V$.

Input: n y q donde :

n : es la dimensión de V y

q : es la cantidad de factores $\Lambda^2 V$.

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```
> BASEALT:=proc(n,q) local d,B,BA,i,j,aux:
> d:=(n-1)*n/2:
> B:=[]:
> for i from 1 to n-1 do
> for j from i+1 to n do
> B:=[op(B),[ALPH[i],ALPH[j]]]:
> od:
> od:
> BA:=matrix(d^q,2*q):
> for i from 1 to d^q do
> if d<>1 then aux:=convert(i-1,base,d): else aux:=[]: fi:
> for j from 1 to q do:
> if j<=nops(aux)
> then BA[i,2*q-2*j+1]:=B[aux[j]+1,1]:
> BA[i,2*q-2*j+2]:=B[aux[j]+1,2]:
> else BA[i,2*q-2*j+1]:=B[1,1]:
> BA[i,2*q-2*j+2]:=B[1,2]:
> fi:
> od:
> od:
> BA:
> end:
```

Ejemplo

```
> print(BASEALT(4,1));
```

$$\begin{bmatrix} e & f \\ e & g \\ e & h \\ f & g \\ f & h \\ g & h \end{bmatrix}$$

BASESYMM: es un procedimiento que nos da una base de $\text{Sym}^2 V \otimes \dots \otimes \text{Sym}^2 V$.

Input: n y r donde:

n : es la dimensión de V y

r : es la cantidad de factores $\text{Sym}^2 V$.

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```
> BASESYMM:=proc(n,r) local d,B,BS,i,j,aux:
> d:=(n+1)*n/2:
> B:=[]:
> for i from 1 to n do
>   for j from i to n do
>     B:=[op(B),[ALPH[i],ALPH[j]]]:
>   od:
> od:
> BS:=matrix(d^r,2*r):
> for i from 1 to d^r do
>   aux:=convert(i-1,base,d):
>   for j from 1 to r do:
>     if j<=nops(aux)
>     then BS[i,2*r-2*j+1]:=B[aux[j]+1,1]:
>     BS[i,2*r-2*j+2]:=B[aux[j]+1,2]:
>     else BS[i,2*r-2*j+1]:=B[1,1]:
>     BS[i,2*r-2*j+2]:=B[1,2]:
>   fi:
>   od:
> od:
> BS:
> end:
```

Ejemplo

```
> print(BASESYMM(2,2)):
```

$$\begin{bmatrix} e & e & e & e \\ e & e & e & f \\ e & e & f & f \\ e & f & e & e \\ e & f & e & f \\ e & f & f & f \\ f & f & e & e \\ f & f & e & f \\ f & f & f & f \end{bmatrix}$$

BASESP1: es un procedimiento que nos da una base de $\Lambda^2(V \otimes V)$.

Input: n , donde:

n : es la dimensión de V .

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```
> BASESP1:=proc(n) local d,B,BS1,i,j,aux:
> d:=n^2*(n^2-1)/2:
> B:=BASET(n,2):
> BS1:=matrix(d,4):
> aux:=1:
> for i from 1 to n^2-1 do
> for j from i+1 to n^2 do
> BS1[aux,1]:=B[i,1]:
> BS1[aux,2]:=B[i,2]:
> BS1[aux,3]:=B[j,1]:
> BS1[aux,4]:=B[j,2]:
> aux:=aux+1:
> od:
> od:
> BS1:
> end:
```

Ejemplo

```
> print(BASESP1(2)):
```

$$\begin{bmatrix} e & e & e & f \\ e & e & f & e \\ e & e & f & f \\ e & f & f & e \\ e & f & f & f \\ f & e & f & f \end{bmatrix}$$

BASESP2: es un procedimiento que nos da una base de $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Input: n , donde :

n : es la dimensión de V .

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```

> BASESP2:=proc(n) local B,d,BB,aux,i,j,BS2:
> B:=BASESYMM(n,1):
> d:=n^2*(n+1)/2:
> BB:=matrix(d,3):
> aux:=1:
> for i from 1 to n do
> for j from 1 to n*(n+1)/2 do
> BB[aux,1]:=ALPH[i]:
> BB[aux,2]:=B[j,1]:
> BB[aux,3]:=B[j,2]:
> aux:=aux+1:
> od:
> od:
> d:=n^2*(n+1)*(n^2*(n+1)-2)/8:
> BS2:=matrix(d,6):
> aux:=1:
> for i from 1 to n^2*(n+1)/2-1 do
> for j from i+1 to n^2*(n+1)/2 do
> BS2[aux,1]:=BB[i,1]:
> BS2[aux,2]:=BB[i,2]:
> BS2[aux,3]:=BB[i,3]:
> BS2[aux,4]:=BB[j,1]:
> BS2[aux,5]:=BB[j,2]:
> BS2[aux,6]:=BB[j,3]:
> aux:=aux+1:
> od:
> od:
> BS2:
> end:

```

Ejemplo

```

> print(BASESP2(2)):

```

$$\begin{bmatrix} e & e & e & e & e & f \\ e & e & e & e & f & f \\ e & e & e & f & e & e \\ e & e & e & f & e & f \\ e & e & e & f & f & f \\ e & e & f & e & f & f \\ e & e & f & f & e & e \\ e & e & f & f & e & f \\ e & e & f & f & f & f \\ e & f & f & f & e & e \\ e & f & f & f & e & f \\ e & f & f & f & f & f \\ f & e & e & f & e & f \\ f & e & e & f & f & f \\ f & e & f & f & f & f \end{bmatrix}$$

BASE: es un procedimiento que nos da una base de:

$$(V \otimes \cdots \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \cdots \otimes \Lambda^2 V) \otimes (\text{Sym}^2 V \otimes \cdots \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V).$$

Input: n, p, q, r, s y t donde :

n : es la dim de V ,

p : es la cantidad de factores V ,

q : es la cantidad de factores $\Lambda^2 V$,

r : es la cantidad de factores $\text{Sym}^2 V$,

s : es la cantidad (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes V)$,

t : es la cantidad (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

Observación: dicha información queda guardada en la letra B (pues está definida globalmente).

```

> BASE:=proc(n,p,q,r,s,t)local a,b,B1,B2,B3,B4,B5,b1,b2,
> b3,b4,b5,i,j,k,l,m,aux: global B:
> a:=n^p * ((n-1)*n/2)^q * ((n+1)*n/2)^r *
> (n^2*(n^2-1)/2)^s * (n^2*(n+1)*
> (n^2*(n+1)-2)/8)^t:
> b:=p+2*q+2*r+4*s+6*t:
> B:=matrix(a,b):
> B1:=BASET(n,p):
> B2:=BASEALT(n,q):
> B3:=BASESYMM(n,r):
> if s<>0 then B4:=BASESP1(n): else B4:=matrix(1,0): fi:
> if t<>0 then B5:=BASESP2(n): else B5:=matrix(1,0): fi:
> b1:=rowdim(B1):
> b2:=rowdim(B2):
> b3:=rowdim(B3):
> b4:=rowdim(B4):
> b5:=rowdim(B5):
> aux:=1:
> for i from 1 to b1 do
> for j from 1 to b2 do
> for k from 1 to b3 do
> for l from 1 to b4 do
> for m from 1 to b5 do
> B:=copyinto(transpose(convert(row(B1,i),matrix)),B,aux,1):
> B:=copyinto(transpose(convert(row(B2,j),matrix)),B,aux,1+p):
> B:=copyinto(transpose(convert(row(B3,k),matrix)),B,aux,
> 1+p+2*q):
> B:=copyinto(transpose(convert(row(B4,l),matrix)),B,aux,
> 1+p+2*q+2*r):
> B:=copyinto(transpose(convert(row(B5,m),matrix)),B,aux,
> 1+p+2*q+2*r+4*s):
> aux:=aux+1:
> od:
> od:
> od:
> od:
> od:
> od:
> B:
> end:

```

Ejemplo

```
> print(BASE(2,1,2,0,0,0)):print(B);
```

$$\begin{bmatrix} e & e & f & e & f \\ f & e & f & e & f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e & e & f & e & f \\ f & e & f & e & f \end{bmatrix}$$

BASESP3: es un procedimiento que nos da una base de $\Lambda^2(V \otimes V)$.

Input: n , donde:

n : es la dimensión de V .

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```
> BASESP3:=proc(n)local X,m,Y,s,i,j,t:
> X:=BASE(n,2,0,0,0,0):
> m:=rowdim(X):
> Y:=matrix(m*(m-1)*(m-2)/6,3*coldim(X)):
> s:=0:
> for i from 1 to m-2 do
> for j from i+1 to m-1 do
> for t from j+1 to m do
> s:=s+1:
> Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,i),matrix)),Y,s,1):
> Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,j),matrix)),Y,s,
> coldim(X)+1):
> Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,t),matrix)),Y,s,
> 2*coldim(X)+1):
> od:
> od:
> od:
> Y:
> end:
```

Ejemplo

```
> print(BASESP3(2)):
```

$$\begin{bmatrix} e & e & e & f & f & e \\ e & e & e & f & f & f \\ e & e & f & e & f & f \\ e & f & f & e & f & f \end{bmatrix}$$

BASESP4: es un procedimiento que nos da una base para $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes V)$.

Input: n , donde:

n : es la dimensión de V .

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```

> BASESP4:=proc(n) local B,X,i,j,Y,m,s:
> B:=BASEALT(n,1):
> X:=matrix(rowdim(B)*n,coldim(B)+1):
> for i from 1 to rowdim(B)do
> for j from 1 to n do
> X[n*(i-1)+j,coldim(B)+1]:=ALPH[j]:
> X:=copyinto(transpose(convert(row(B,i),matrix)),X,
> n*(i-1)+j,1):
> od:
> od:
> m:=rowdim(X):
> Y:=matrix(m*(m-1)/2,2*coldim(X)):
> s:=0:
> for i from 1 to m-1 do
> for j from i+1 to m do
> s:=s+1:
> Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,i),matrix)),Y,s,1):
> Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,j),matrix)),Y,s,
> coldim(X)+1):
> od:
> od:
> end:

```

Ejemplo

```
> print(BASESP4(2));
```

$$[e \ f \ e \ e \ f \ f]$$

BASESP5: es un procedimiento que nos da la base de $\Lambda^2(\Lambda^2V)$.

Input: n , donde:

n : es la dimensión de V .

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```

> BASESP5:=proc(n) local B,X,i,j,Y,m,s:
> X:=BASEALT(n,1):
> m:=rowdim(X):
> Y:=matrix(m*(m-1)/2,2*coldim(X)):
> s:=0:
> for i from 1 to m-1 do
> for j from i+1 to m do
> s:=s+1:
> Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,i),matrix)),Y,s,1):
> Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,j),matrix)),Y,s,
> coldim(X)+1):
> od:
> od:
> Y:
> end:

```

Ejemplo

```
> print(BASESP5(3));
```

$$\begin{bmatrix} e & f & e & g \\ e & f & f & g \\ e & g & f & g \end{bmatrix}$$

BASESP6: es un procedimiento que nos da la base de $\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes \text{Sym}^2V)$.

Input: n , donde :

n : es la dimensión de V .

Output: una matriz, donde las filas son los elementos de dicha base.

```
> BASESP6:=proc(n)local X,m,Y,s,i,j:
> X:=BASE(n,0,1,1,0,0):
> m:=rowdim(X):
> Y:=matrix(m*(m-1)/2,2*coldim(X)):
> s:=0:
> for i from 1 to m-1 do
>   for j from i+1 to m do
>     s:=s+1:
>     Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,i),matrix)),Y,s,1):
>     Y:=copyinto(transpose(convert(row(X,j),matrix)),Y,s,
>     coldim(X)+1):
>   od:
> od:
> Y:
> end:
```

Ejemplo

```
> print(BASESP6(2));
```

$$\begin{bmatrix} e & f & e & e & e & f & e & f \\ e & f & e & e & e & f & f & f \\ e & f & e & f & e & f & f & f \end{bmatrix}$$

7.3 Pesos

PESOS: es un procedimiento que clasifica los vectores peso de una base producida por algún procedimiento base.

Input: A y n , donde :

A : es una matriz cuyas filas son los elementos de una base que quiero calcular su peso y clasificar y

n : es la dimensión de V .

Output: tablas con indices:

$TP[pos]$: una lista con todos los pesos dominantes,

$TP[neg]$: una lista con todos los pesos no dominantes y

$TP[i]$: una lista con los vectores pesos de la base cuyo peso es el i -esimo de $TP[pos]$ si $i > 0$ o el $(-i)$ -esimos de $TP[neg]$ si $i < 0$.

```
> PESOS:=proc(A,n) local a,b,C,i,j,aux,z,TP:
> b:=coldim(A):
> a:=rowdim(A):
> TP:=table():
> TP[pos]:=[]:
> TP[neg]:=[]:
> for i from 1 to a do
> C:=[seq(0,1=1..n)]:
> for j from 1 to b do
> C[ORDALPH[A[i,j]]]:=C[ORDALPH[A[i,j]]]+1
> od:
> aux:=0:
> for j from 1 to n-1 do:
> if C[j]<C[j+1] then aux:=1: break: fi:
> od:
> if aux=0
> then if member(C,TP[pos], 'z')
> then TP[z]:=[op(TP[z]),row(A,i)]:
> else TP[pos]:=[op(TP[pos]),C]: z:=nops(TP[pos]):
> TP[z]:=[row(A,i)]:
> fi:
> else if member(C,TP[neg], 'z')
> then TP[-z]:=[op(TP[-z]),row(A,i)]:
> else TP[neg]:=[op(TP[neg]),C]: z:=nops(TP[neg]):
> TP[-z]:=[row(A,i)]:
> fi:
> fi:
> od:
> TP:
> end:
```

Ejemplo

```
> print(PESOS(BASET(2,3),2)[1]);
[[ e e e ]]
> print(PESOS(BASET(2,3),2)[2]);
[[ e e f ], [ e f e ], [ f e e ]]
> print(PESOS(BASET(2,3),2)[pos]);
[[3,0], [2,1]]
> print(PESOS(BASET(2,3),2)[neg]);
```

[[1, 2], [0, 3]]

> `print(PESOS(BASET(2,3),2)[-2]);`

[[f f f]]

> `print(PESOS(BASET(2,3),2)[-1]);`

[[e f f], [f e f], [f f e]]

7.4 Operador de crecimiento

OPERADORC: es un procedimiento que calcula el nucleo de un operador de crecimiento con los vectores de peso dominante de una base cualquier luego de haberlos clasificado con el programa *PESOS*.

Input: $n, p, q, r, s, t, l, k, ind$ y e , donde :

n : es la dimensión del espacio V ,

p : la cantidad de factores V ,

q : la cantidad de factores $\Lambda^2 V$,

r : la cantidad de factores $\text{Sym}^2 V$,

s : la cantidad (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes V)$,

t : la cantidad de factores (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$,

l : el lugar en el alfabeto de la letra que quiero cambiar,

k : el lugar en el alfabeto de la letra por la que quiero cambiar y

ind : es el indice positivo a donde voy a aplicar el operador,

e : nos dice que base voy a utilizar para ordenar por lo tanto los valores que puede tomar son:

$e = 0$: *labaseesBASE*,

$e = 3$: *labaseesBASESP3*,

$e = 4$: *labaseesBASESP4*,

$e = 5$: *labaseesBASESP5* *y*

$e = 6$: *labaseesBASESP6*.

Output: una matriz, cuyas columnas son las coordenadas respecto a la nueva base.

Observación: la cantidad de intercambios que tiene sentido tener en cuenta ($\Lambda^2 V$) queda guardada en la letra *expo* (pues está definida globalmente).

```

> OPERADORC:=proc(n,p,q,r,s,t,k,l,TP,ind,e) local m,
> peso1,peso2 ,nn,pp,B1,b1,b2,i,B1l,j,H: global T, B2:
> pp:=TP[pos]:
> nn:=TP[neg]:
> peso1:=pp[ind]:
> peso2:=peso1:
> peso2:=subsop(k=peso2[k]+1,l=peso2[l]-1,peso2):
> if member(peso1,pp,'z') then B1:=TP[z]: fi:
> if member(peso1,nn,'z') then B1:=TP[-z]: fi:
> if member(peso2,pp,'z') then B2:=TP[z]: fi:
> if member(peso2,nn,'z') then B2:=TP[-z]: fi:
> if not member(peso2,[op(pp),op(nn)]) then
> T:=matrix(1,nops(B1),0):return:fi:
> b1:=nops(B1): b2:=nops(B2):
> B2:=map(xx->convert(xx,list),B2):
> T:=matrix(b2,b1,0):
> m:=0:
> for i from 1 to b1 do
> B1l:=convert(B1[i],list):
> for j from 1 to nops(B1l) do
> H:=B1l:
> if H[j]=ALPH[l] then m:=1:H:=subsop(j=ALPH[k],H):if e=0
> then H:=ORD||0(H,n,p,q,r,s,t)
> else H:=ORD||e(H,n):fi:
> if H<>NULL then member(H,B2,'z'):
> T[z,i]:=T[z,i]+(-1)^expo: fi:
> fi:
> od:
> od:
> if m=0 then T:=transpose(matrix(nops(B1),1,0)):return:fi:
> T:
> end:

```

Ejemplo

```

> BASE(3,1,1,0,0,0):
> print(B);
> TP:=PESOS(B,3):
> OPERADORC(3,1,1,0,0,0,2,3,TP,2,0):
> print(T);

```

$$\begin{bmatrix} e & e & f \\ e & e & g \\ e & f & g \\ f & e & f \\ f & e & g \\ f & f & g \\ g & e & f \\ g & e & g \\ g & f & g \\ [0 & 1 & 1] \end{bmatrix}$$

7.5 Ordenar

ORD0: es un procedimiento que dada una lista A con $p+2q+2r+4s+6t$ elementos los ordena de la siguiente manera:

los p primeros elementos según el orden de la base de $V \otimes \dots \otimes V$ con p la cantidad de factores V ,

los $2q$ siguientes según el orden de la base de $\Lambda^2 V \otimes \dots \otimes \Lambda^2 V$ con q la cantidad de factores $\Lambda^2 V$,

los $2r$ siguientes según el orden de la base de $\text{Sym}^2 V \otimes \dots \otimes \text{Sym}^2 V$ con r la cantidad de factores $\text{Sym}^2 V$,

los $4s$ siguientes según el orden de la base de $\Lambda^2(V \otimes V)$ con s la cantidad de veces que aparece (que puede ser 0 o 1) y

los $6t$ últimos según el orden de la base de $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$ con t la cantidad de veces que aparece (que puede ser 0 o 1).

Input: A, n, p, q, r, s y t donde:

A : una lista,

n : la dimensión de V ,

p : la cantidad de factores V ,

q : la cantidad de factores $\Lambda^2 V$, r : la cantidad de factores $\text{Sym}^2 V$,

s : la cantidad (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes V)$ y

t : la cantidad (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Output: una lista.

Observación: en general la lista de entrada proviene de aplicar un operador de crecimiento (que luego veremos), la cantidad de intercambios que tiene sentido tener en cuenta ($\Lambda^2 V$) queda guardada en la letra *expo* (pues está definida globalmente).

```

> ORDO:=proc(A,n,p,q,r,s,t) local B,c,j,x,X,ORDX,i,L,a1,a2,a3:
> global expo:
> c:=nops(A):B:=[seq(0,j=1..c)]:expo:=0:
> for j from 1 to p do B[j]:=A[j]:od:
> for j from 1 to q do x:=p+2*j-1:
> if ORDALPH[A[x]]>ORDALPH[A[x+1]] then B[x]:=A[x+1]:
> B[x+1]:=A[x]:expo:=expo+1:
> else if ORDALPH[A[x]]=ORDALPH[A[x+1]]then
> B:=NULL: return:
> else B[x]:=A[x]:B[x+1]:=A[x+1]: fi:fi:od:
> for j from 1 to r do x:=p+2*q+2*j-1:
> if ORDALPH[A[x]]>ORDALPH[A[x+1]] then
> B[x]:=A[x+1]:B[x+1]:=A[x]
> else B[x]:=A[x]:B[x+1]:=A[x+1]:fi:od:
> if s<>0 thenX:=BASE(n,2,0,0,0,0):ORDX:=table():
> for i from 1 to rowdim(X) do
> L:=convert(row(X,i),list):
> ORDX[op(L)]:=i:od: x:=p+2*q+2*r+1:
> if ORDX[A[x],A[x+1]]=ORDX[A[x+2],A[x+3]] then B:=NULL:
> return: fi:
> if ORDX[A[x],A[x+1]]>ORDX[A[x+2],A[x+3]] then B[x]:=A[x+2]:
> B[x+1]:=A[x+3]: B[x+2]:=A[x]:B[x+3]:=A[x+1]:expo:=expo+1:
> else B[x]:=A[x]: B[x+1]:=A[x+1]: B[x+2]:=A[x+2]:
> B[x+3]:=A[x+3]:fi:fi:
> if t<>0 then x:=p+2*q+2*r+4*s+1:
> B[x]:=A[x]: B[x+1]:=A[x+1]: B[x+2]:=A[x+2]:
> B[x+3]:=A[x+3]:
> B[x+4]:=A[x+4]:B[x+5]:=A[x+5]:
> if ORDALPH[A[x+1]]>ORDALPH[A[x+2]]then
> B[x+1]:=A[x+2]:B[x+2]:=A[x+1]:fi:
> if ORDALPH[A[x+4]]>ORDALPH[A[x+5]]then
> B[x+4]:=A[x+5]:B[x+5]:=A[x+4]:fi:
> X:=BASE(n,1,0,1,0,0): ORDX:=table():
> for i from 1 to rowdim(X) do
> L:=convert(row(X,i),list):
> ORDX[op(L)]:=i:od:
> if ORDX[B[x],B[x+1],B[x+2]]=ORDX[B[x+3],B[x+4],B[x+5]] then B:=NULL:return:
fi:
> if ORDX[B[x],B[x+1],B[x+2]]>ORDX[B[x+3],B[x+4],B[x+5]] then
> B[x]:=B[x+3]: B[x+1]:=B[x+4]:
> B[x+2]:=B[x+5]:B[x+3]:=a1:B[x+4]:=a2:
> fi:B:end:

```

Ejemplo

```

> print(ORDO([e,e,f,e,f,g,f,f,g,e,g,g,g,e,g,f,e],3,1,2,1,1,1));
> print(expo)

```

$[e, e, f, e, f, f, g, e, g, f, g, g, e, f, g, e, g]$

ORD3: es un procedimiento que ordena un elemento de $\Lambda^3(V \otimes V)$ según el orden de $V \otimes V$.

Input: A y n donde:

A : una lista y

n : la dimensión de V .

Output: una lista.

Observación: la cantidad de intercambios que tiene sentido tener en cuenta (de $\Lambda^3(V \otimes V)$) queda guardada en la letra *expo* (pues está definida globalmente).

```

> ORD3:=proc(A,n)local H,X,ORDX,i,L,S1,S2,S3:global expo:
> X:=BASE(n,2,0,0,0,0):
> ORDX:=table():
> for i from 1 to rowdim(X) do
> L:=convert(row(X,i),list):
> ORDX[op(L)]:=i:
> od:
> S1:=[A[1],A[2]]:
> S2:=[A[3],A[4]]:
> S3:=[A[5],A[6]]:
> H:=A:
> expo:=0:
> if ORDX[op(S1)]<ORDX[op(S2)] and ORDX[op(S2)]>ORDX[op(S3)]
> and ORDX[op(S1)]<ORDX[op(S3)] then
> H:=[op(S1),op(S3),op(S2)]:expo:=expo+1:fi:
> if ORDX[op(S1)]>ORDX[op(S2)] and ORDX[op(S2)]<ORDX[op(S3)]
> and ORDX[op(S1)]<ORDX[op(S3)] then
> H:=[op(S2),op(S1),op(S3)]:expo:=expo+1:fi:
> if ORDX[op(S1)]<ORDX[op(S2)] and ORDX[op(S2)]>ORDX[op(S3)]
> and ORDX[op(S1)]>ORDX[op(S3)] then
> H:=[op(S3),op(S1),op(S2)]:expo:=expo+2:fi:
> if ORDX[op(S1)]>ORDX[op(S2)] and ORDX[op(S2)]>ORDX[op(S3)]
> and ORDX[op(S1)]<ORDX[op(S3)] then
> H:=[op(S2),op(S3),op(S1)]:expo:=expo+2:fi:
> if ORDX[op(S1)]>ORDX[op(S2)] and ORDX[op(S2)]>ORDX[op(S3)]
> and ORDX[op(S1)]>ORDX[op(S3)] then
> H:=[op(S3),op(S2),op(S1)]:expo:=expo+3:fi:
> if ORDX[op(S1)]=ORDX[op(S2)] or ORDX[op(S2)]=ORDX[op(S3)]
> or ORDX[op(S1)]=ORDX[op(S3)] then
> H:=NULL:fi:
> H:
> end:

```

Ejemplo

```

> ORD3([e,e,f,e,e,f],3);
> expo

```

$[e, e, e, f, f, e]$

1

ORD4: es un procedimiento que ordena un elemento de $\Lambda^2(\Lambda^2V \otimes V)$.

Input: A y n donde: A : es una lista y

n : la dimensión de V .

Output: una lista.

Observación: la cantidad de intercambios que tiene sentido tener en cuenta (de Λ^2V) queda guardada en la letra "expo" (pues está definida globalmente).

```

> ORD4:=proc(A,n)local H,a,b,c:global expo:
> expo:=0:
> H:=A:
> if ORDALPH[H[1]]>ORDALPH[H[2]]then
> a:=H[1]:b:=H[2]:H[1]:=b:H[2]:=a:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[4]]>ORDALPH[H[5]]then
> a:=H[4]:b:=H[5]:H[4]:=b:H[5]:=a:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[1]]>ORDALPH[H[4]]then
> a:=H[1]:b:=H[2]:c:=H[3]:
> H[1]:=H[4]:H[2]:=H[5]:H[3]:=H[6]:
> H[4]:=a:H[5]:=b:H[6]:=c:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[1]]=ORDALPH[H[4]]then
> if ORDALPH[H[2]]>ORDALPH[H[5]]then
> a:=H[2]:b:=H[3]:
> H[2]:=H[5]:H[3]:=H[6]:
> H[5]:=a:H[6]:=b:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[2]]=ORDALPH[H[5]]then
> if ORDALPH[H[3]]>ORDALPH[H[6]]then
> a:=H[3]:
> H[3]:=H[6]:H[6]:=a:expo:=expo+1:fi
> fi:
> fi:
> if (H[1]=H[4] and H[2]=H[5] and H[3]=H[6])or
> H[1]=H[2]or H[4]=H[5]then H:=NULL:fi:
> H:
> end:

```

Ejemplo

```

> ORD4([e,f,f,e,f,e],3);
expo

```

$[e, f, e, e, f, f]$

1

ORD5: es un procedimiento que ordena un elemento de $\Lambda^2(\Lambda^2V)$.

Input: A y n donde:

A : es una lista y

n : la dimensión de V .

Output: una lista.

Observación: la cantidad de intercambios que tiene sentido tener en cuenta (de Λ^2V)

queda guardada en la letra *expo* (pues está definida globalmente).

```

> ORD5:=proc(A,n)local H,X,a,b,c,d,i,S1,S2,ORDX,L:global expo:
> X:=BASE(n,0,1,0,0,0):
> ORDX:=table():
> for i from 1 to rowdim(X) do
> L:=convert(row(X,i),list):
> ORDX[op(L)]:=i:
> od:
> H:=A:
> expo:=0:
> if (H[1]=H[3] and H[2]=H[4])or H[1]=H[2]
> or H[3]=H[4]then H:=NULL:return:fi:
> if ORDALPH[H[3]]>ORDALPH[H[4]]then a:=H[3]:
> H[3]:=H[4]:H[4]:=a:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[1]]>ORDALPH[H[2]]then a:=H[1]:
> H[1]:=H[2]:H[2]:=a:expo:=expo+1:fi:
> if ORDX[H[1],H[2]]>ORDX[H[3],H[4]] then
> H:=[H[3],H[4],H[1],H[2]]:
> expo:=expo+1:fi:
> if ORDX[H[1],H[2]]=ORDX[H[3],H[4]] then H:=NULL:fi:
> H:
> end:

> ORD5([g,f,f,e],3);
> expo

```

$[e, f, f, g]$

3

ORD6: es un procedimiento que ordena un elemento de $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Input: A y n donde:

A : es una lista (elemento de $\Lambda^2(\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$) y

n : la dimensión de V .

Output: una lista.

Observación: la cantidad de intercambios que tiene sentido tener en cuenta ($\Lambda^2 V$) queda guardada en la palabra *expo* (pues está definida globalmente).

```

> ORD6:=proc(A,n)local H,X,a,b,c,d,i,S1,S2,ORDX,L:global expo:
> X:=BASE(n,0,1,1,0,0):
> ORDX:=table():
> for i from 1 to rowdim(X) do
> L:=convert(row(X,i),list):
> ORDX[op(L)]:=i:
> od:
> H:=A:
> expo:=0:
> if (H[1]=H[5] and H[2]=H[6] and H[3]=H[7] and
> H[4]=H[8])or H[1]=H[2]or H[6]=H[5]then H:=NULL:return:fi:
> if ORDALPH[H[3]]>ORDALPH[H[4]]then a:=H[3]:
> H[3]:=H[4]:H[4]:=a:fi:
> if ORDALPH[H[7]]>ORDALPH[H[8]]then a:=H[7]:
> H[7]:=H[8]:H[8]:=a:fi:
> if ORDALPH[H[1]]>ORDALPH[H[2]]then a:=H[1]:
> H[1]:=H[2]:H[2]:=a:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[5]]>ORDALPH[H[6]]then a:=H[5]:
> H[5]:=H[6]:H[6]:=a:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[1]]>ORDALPH[H[5]]then a:=H[1]:
> b:=H[2]:c:=H[3]:d:=H[4]:
> H[1]:=H[5]:H[2]:=H[6]:H[3]:=H[7]:H[4]:=H[8]:
> H[5]:=a:H[6]:=b:H[7]:=c:
> H[8]:=d:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[1]]=ORDALPH[H[5]]then
> if ORDALPH[H[2]]>ORDALPH[H[6]]then
> a:=H[2]:b:=H[3]:c:=H[4]:H[2]:=H[6]:H[3]:=H[7]:H[4]:=H[8]:
> H[6]:=a:H[7]:=b:H[8]:=c:expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[2]]=ORDALPH[H[6]]then if
> ORDALPH[H[3]]>ORDALPH[H[7]]then a:=H[3]:b:=H[4]:H[3]:=H[7]:
> H[4]:=H[8]:H[7]:=a:H[8]:=b:
> expo:=expo+1:fi:
> if ORDALPH[H[3]]=ORDALPH[H[7]]and ORDALPH[H[4]]>ORDALPH[H[8]]
a:=H[4]:H[4]:=H[8]:H[8]:=a:
> expo:=expo+1:fi:
> fi:
> fi:
> if ORDX[H[1],H[2],H[3],H[4]]>ORDX[H[5],H[6],H[7],H[8]]
> then H:=[H[5],H[6],H[7],H[8],H[1],H[2],H[3],H[4]]:
> expo:=expo+1:fi:
> if ORDX[H[1],H[2],H[3],H[4]]=ORDX[H[5],H[6],H[7],H[8]] then H:=NULL:fi:
> H
> end:

```

Ejemplo

```

> ORD6([e,f,f,e,e,f,e,e],2)
      [e,f,e,e,e,f,e,f]

```

7.6 Obtención de vectores de peso máximo

INTERSECCIÓN: es un procedimiento que calcula la intersección de subespacios de un mismo espacio vectorial.

Input: una lista de conjuntos, donde cada uno de ellos contiene una base, expresado en coordenadas, de los subespacios.

Output: una matriz donde cada columna es un vector de la base de dicha intersección.

```
> INTERSECCIÓN:=proc(Espacios) local aux,i,EE,M,c,j,m,cc,k:
> global E:
> if nops(Espacios[1])=0 then E:={}: return:
> else E:=transpose(matrix([op(Espacios[1])])):
> fi:
> aux:=coldim(E):
> for i from 2 to nops(Espacios) do
> if nops(Espacios[i])=0 then E:={}: return: fi:
> EE:=concat(E,transpose(matrix([op(Espacios[i])]))):
> M:=kernel(EE):
> if nops(M)=0 then E:={}: return: else
> c:=[]:
> for j from 1 to nops(M) do
> m:=M[j]:
> cc:=0:
> for k from 1 to aux do
> cc:=cc+m[k]*convert(col(E,k),list):
> od:
> c:=[op(c),cc]:
> od:
> E:=transpose(convert([op(c)],matrix)):
> aux:=coldim(E):
> fi:
> od:
> E:
> end:
```

Ejemplo

```
> E1:={ [1,0,1], [0,2,0] }: E2:={ [0,1,0] }:
> print(INTERSECCIÓN([E1,E2]));
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NU: es un procedimiento para ser usado después de hacer la INTERSECCIÓN de los operadores de crecimiento.

Input: B y C donde:

B : es la base que la sacamos de $TP[ind]$ (y $TP[pos][ind]$ es el peso de los elementos de $TP[ind]$) y

C : son las coordenadas sacadas de la INTERSECCIÓN.

Output: una lista de lista con los vectores de peso máximo.

```

> NU:=proc(B,C) local i,j,R,n,m,RT:
> if nops(C)=0 then RT:={NULL}: else
> RT:=[]:
> for i from 1 to coldim (C)do
> R:=[]:
> for j from 1 to nops (B)do
> if C[j,i]<>0 then R:=[op(R),C[j,i]*B[j]]:fi:
> od:
> RT:=[op(RT),R]:
> od:
> fi:
> RT:
> end:

```

Ejemplo

```

> BASE(3,1,1,0,0,0):
> TP:=PESOS(B,3):
> c:=0:
> for ind from 1 to nops(TP[pos]) do
> k:=1: l:=2:
> OPERADORC(n,1,1,0,0,0,k,l,TP,ind,0):
> K1:=kernel(T):
> k:=1: l:=3:
> OPERADORC(n,1,1,0,0,0,k,l,TP,ind,0):
> K2:=kernel(T):
> k:=2: l:=3:
> OPERADORC(n,1,1,0,0,0,k,l,TP,ind,0):
> K3:=kernel(T):
> INTERSECCION([K1,K2,K3]):
> X:=NU(TP[ind],E):
> print(X):
> c:=c+nops(X)* DIM(TP[pos][ind]):
> od:
> m:=DIMSUBESP(n,1,1,0,0,0):
> print(c,m):

```

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad [[- [e \ e \ f]]] \\
 & [[- [e \ f \ g], [f \ e \ g], - [g \ e \ f]]]
 \end{aligned}$$

7.7 Dimensiones

Este grupo contiene dos programas: DIM y DIMSUBESP, que se usaron para controlar, a partir de la dimensión, si la descomposición de un submódulo en suma directa de pesos máximo tiene sentido.

DIM: calcula la dimensión del módulo correspondiente a un peso dominante dado.

Input: A , una lista que representa el peso dominante.

Output: la dimensión del módulo irreducible de peso A .

```
> DIM:=proc(A) local i,j,x,n:
> n:=nops(A):
> x:=1:
> for i from 1 to n-1 do
> for j from i+1 to n do
> x:=x*(A[i]-A[j]+j-i)/(j-i):
> od:
> od:
> end:
```

Ejemplo

```
> DIM([7,1,0,0]);
```

315

DIMSUBESP: es un procedimiento que calcula la dimensión de:

$(V \otimes \cdots \otimes V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \cdots \otimes \Lambda^2 V) \otimes (\text{Sym}^2 V \otimes \cdots \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes \Lambda^2(V \otimes V) \otimes \Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$.

Input: n, p, q, r, s y t donde:

n : es la dimensión de V ,

p : es la cantidad de factores de V en el primer factor,

q : es la cantidad de factores $\Lambda^2 V$ en el segundo factor,

r : es la cantidad de factores $\text{Sym}^2 V$ en el tercer factor,

s : es la cantidad (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes V)$ en el cuarto factor y

t : la cantidad (1 o 0) de factores $\Lambda^2(V \otimes \text{Sym}^2 V)$ en el quinto factor.

Output: la dimensión.

```
> DIMSUBESP:=proc(n,p,q,r,s,t) local d:
> d:=n^p * ((n-1)*n/2)^q * ((n+1)*n/2)^r *
> (n^2*(n^2-1)/2)^s * (n^2*(n+1)*(n^2*(n+1)-2)/8)^t:
> d:
> end:
```

Ejemplo

```
> DIMSUBESP(4,2,1,0,0,0);
```

96

8 Resultados

En esta sección recopilamos los resultados obtenidos. Además de presentar la estructura de $GL(V)$ -módulo de los grupos de homología calculados, damos clases de homología de peso máximo explícitas para cada submódulo irreducible. Para entender a qué subespacios pertenecen éstos introducimos la notación $V_A = V$, $V_{\mathcal{L}} = V$ y $Z = \Lambda^2 V$ para distinguir los espacios V según sean parte de \mathcal{L}_n o de A_k ; es decir tenemos que

$$\mathcal{L}_n^2 = (V_{\mathcal{L}} \oplus Z) \otimes (\mathbb{C} \oplus V_A) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_n^3 = (V_{\mathcal{L}} \oplus Z) \otimes (\mathbb{C} \oplus V_A \oplus \text{Sym}^2 V_A)$$

8.1 Homologías de \mathcal{L}_n^2

Teorema 8.1. *Para todo natural $n \geq 2$ sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n , sea $\mathcal{L}_n = V \oplus \Lambda^2 V$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre en n generadores y sea \mathcal{L}_n^2 el álgebra de Lie de corrientes $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n \otimes (\mathbb{C} \oplus V)$.*

Entonces la estructura de $GL(V)$ -módulo de los primeros grupos de homología de \mathcal{L}_n^2 está dada por:

$$H_0 = \emptyset$$

$$H_1 = \square \oplus \square \square \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

$$H_2 = \begin{array}{cccccccccccc} \square \square \square & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array} & \oplus \\ \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \oplus & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \end{array}$$

Más aún, los que siguen son vectores clases del segundo grupo de homología de peso máximo

para cada submódulo irreducible con sus dimensiones.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \langle v_2^1 = (e \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle \subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\ \dim = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \langle v_2^2 + v_2^3 = 2(e \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \otimes 1) \otimes (f \otimes e) - (f \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle \\ \subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \langle v_3^1 = (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes 1) \rangle \subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \langle v_4^1 = -(e \otimes e) \wedge (e \otimes f) \rangle \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \langle v_4^2 = -(e \otimes e) \wedge (f \otimes e) \rangle \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_7^1 = (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle \simeq \langle v_6^1 = (e \wedge f \otimes e) \otimes (e \otimes 1) \rangle \\ \subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_7^4 = (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes f) \rangle \\
&\simeq \langle v_6^4 = (e \wedge f \otimes f) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge f \otimes f) \otimes (e \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&= \langle v_8^9 = -(f \wedge g \otimes e) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge g \otimes e) \otimes (f \otimes f) - \\
&\quad (e \wedge f \otimes e) \otimes (f \otimes g) + (f \wedge g \otimes f) \otimes (e \otimes e) - \\
&\quad (e \wedge g \otimes f) \otimes (e \otimes f) + (e \wedge f \otimes f) \otimes (e \otimes g) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&= \langle v_4^3 = (e \otimes e) \wedge (f \otimes g) - (e \otimes e) \wedge (g \otimes f) - 2(e \otimes f) \wedge (e \otimes g) + \\
&\quad (e \otimes f) \wedge (g \otimes e) - (e \otimes g) \wedge (f \otimes e) \rangle \\
&\subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&= \langle v_4^4 = (e \otimes e) \wedge (f \otimes g) + (e \otimes e) \wedge (g \otimes f) + \\
&\quad (e \otimes f) \wedge (e \otimes g) - (f \otimes e) \wedge (g \otimes e) \rangle \\
&\subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_7^2 = -(f \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes e) + (e \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes g) \rangle \\
&\simeq \langle v_6^2 = -(f \wedge g \otimes e) \otimes (e \otimes 1) + (e \wedge g \otimes e) \otimes (f \otimes 1) - (e \wedge f \otimes e) \otimes (g \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_7^3 = (f \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes e) - (e \wedge g \otimes 1) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge f \otimes 1) \otimes (g \otimes e) \rangle \\
&\simeq \langle v_6^3 = (f \wedge g \otimes e) \otimes (e \otimes 1) + (e \wedge g \otimes f) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge f \otimes g) \otimes (e \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_7^5 = -(g \wedge h \otimes 1) \otimes (e \otimes f) + (f \wedge h \otimes 1) \otimes (e \otimes g) - \\
&\quad (f \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes h) + (g \wedge h \otimes 1) \otimes (f \otimes e) - \\
&\quad (e \wedge h \otimes 1) \otimes (f \otimes g) + (e \wedge g \otimes 1) \otimes (f \otimes h) - \\
&\quad (f \wedge h \otimes 1) \otimes (g \otimes e) + (e \wedge h \otimes 1) \otimes (g \otimes f) - \\
&\quad (e \wedge f \otimes 1) \otimes (g \otimes h) + (f \wedge g \otimes 1) \otimes (h \otimes e) - \\
&\quad (e \wedge g \otimes 1) \otimes (h \otimes f) + (e \wedge f \otimes 1) \otimes (h \otimes g) \rangle \\
&\simeq \langle v_6^5 = -(g \wedge h \otimes e) \otimes (f \otimes 1) + (f \wedge h \otimes e) \otimes (g \otimes 1) - \\
&\quad (f \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes 1) + (g \wedge h \otimes f) \otimes (e \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge h \otimes f) \otimes (g \otimes 1) + (e \wedge g \otimes f) \otimes (h \otimes 1) - \\
&\quad (f \wedge h \otimes g) \otimes (e \otimes 1) + (e \wedge h \otimes g) \otimes (f \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge f \otimes g) \otimes (h \otimes 1) + (f \wedge g \otimes h) \otimes (e \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge g \otimes h) \otimes (f \otimes 1) + (e \wedge f \otimes h) \otimes (g \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \langle v_8^{12} = -(g \wedge h \otimes e) \otimes (e \otimes f) + (f \wedge h \otimes e) \otimes (e \otimes g) - \\
& \quad (f \wedge g \otimes e) \otimes (e \otimes h) + (g \wedge h \otimes e) \otimes (f \otimes e) - (e \wedge f \otimes e) \otimes (g \otimes h) + \\
& \quad (f \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes e) - (e \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes f) + (e \wedge f \otimes e) \otimes (h \otimes g) \rangle \\
& \subseteq (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim = & \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{30}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \langle v_8^{13} = (h \wedge v \otimes e) \otimes (f \otimes g) - (g \wedge v \otimes e) \otimes (f \otimes h) + (g \wedge h \otimes e) \otimes (f \otimes v) - \\
& \quad (h \wedge v \otimes e) \otimes (g \otimes f) + (f \wedge v \otimes e) \otimes (g \otimes h) - (f \wedge h \otimes e) \otimes (g \otimes v) + \\
& \quad (g \wedge v \otimes e) \otimes (h \otimes f) - (f \wedge v \otimes e) \otimes (h \otimes g) + (f \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes v) - \\
& \quad (g \wedge h \otimes e) \otimes (v \otimes f) + (f \wedge h \otimes e) \otimes (v \otimes g) - (f \wedge g \otimes e) \otimes (v \otimes h) - \\
& \quad (h \wedge v \otimes f) \otimes (e \otimes g) + (g \wedge v \otimes f) \otimes (e \otimes h) - (g \wedge h \otimes f) \otimes (e \otimes v) + \\
& \quad (h \wedge v \otimes f) \otimes (g \otimes e) - (e \wedge v \otimes f) \otimes (g \otimes h) + (e \wedge h \otimes f) \otimes (g \otimes v) - \\
& \quad (g \wedge v \otimes f) \otimes (h \otimes e) + (e \wedge v \otimes f) \otimes (h \otimes g) - (e \wedge g \otimes f) \otimes (h \otimes v) + \\
& \quad (g \wedge h \otimes f) \otimes (v \otimes e) - (e \wedge h \otimes f) \otimes (v \otimes g) + (e \wedge g \otimes f) \otimes (v \otimes h) + \\
& \quad (h \wedge v \otimes g) \otimes (e \otimes f) - (f \wedge v \otimes g) \otimes (e \otimes h) + (f \wedge h \otimes g) \otimes (e \otimes v) - \\
& \quad (h \wedge v \otimes g) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge v \otimes g) \otimes (f \otimes h) - (e \wedge h \otimes g) \otimes (f \otimes v) + \\
& \quad (f \wedge v \otimes g) \otimes (h \otimes e) - (e \wedge v \otimes g) \otimes (h \otimes f) + (e \wedge f \otimes g) \otimes (h \otimes v) - \\
& \quad (f \wedge h \otimes g) \otimes (v \otimes e) + (e \wedge h \otimes g) \otimes (v \otimes f) - (e \wedge f \otimes g) \otimes (v \otimes h) - \\
& \quad (g \wedge v \otimes h) \otimes (e \otimes f) + (f \wedge v \otimes h) \otimes (e \otimes g) - (f \wedge g \otimes h) \otimes (e \otimes v) + \\
& \quad (g \wedge v \otimes h) \otimes (f \otimes e) - (e \wedge v \otimes h) \otimes (f \otimes g) + (e \wedge g \otimes h) \otimes (f \otimes v) - \\
& \quad (f \wedge v \otimes h) \otimes (g \otimes e) + (e \wedge v \otimes h) \otimes (g \otimes f) - (e \wedge f \otimes h) \otimes (g \otimes v) + \\
& \quad (f \wedge g \otimes h) \otimes (v \otimes e) - (e \wedge g \otimes h) \otimes (v \otimes f) + (e \wedge f \otimes h) \otimes (v \otimes g) + \\
& \quad (g \wedge h \otimes v) \otimes (e \otimes f) - (f \wedge h \otimes v) \otimes (e \otimes g) + (f \wedge g \otimes v) \otimes (e \otimes h) - \\
& \quad (g \wedge h \otimes v) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge h \otimes v) \otimes (f \otimes g) - (e \wedge g \otimes v) \otimes (f \otimes h) + \\
& \quad (f \wedge h \otimes v) \otimes (g \otimes e) - (e \wedge h \otimes v) \otimes (g \otimes f) + (e \wedge f \otimes v) \otimes (g \otimes h) - \\
& \quad (f \wedge g \otimes v) \otimes (h \otimes e) + (e \wedge g \otimes v) \otimes (h \otimes f) - (e \wedge f \otimes v) \otimes (h \otimes g) \rangle \\
& \subseteq (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim = & \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{120}.
\end{aligned}$$

8.2 Homologías de \mathcal{L}_n^3

Teorema 8.2. *Para todo natural $n \geq 2$ sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n , sea $\mathcal{L}_n = V \oplus \Lambda^2 V$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre en n generadores y sea \mathcal{L}_n^3 el álgebra de Lie de corrientes $\mathcal{L}_n^3 = \mathcal{L}_n \otimes (\mathbb{C} \oplus V \oplus \text{Sym}^2 V)$. Entonces la estructura de $GL(V)$ -módulo de los primeros grupos de homología de \mathcal{L}_n^3 está dada por:*

$$H_0 = \emptyset.$$

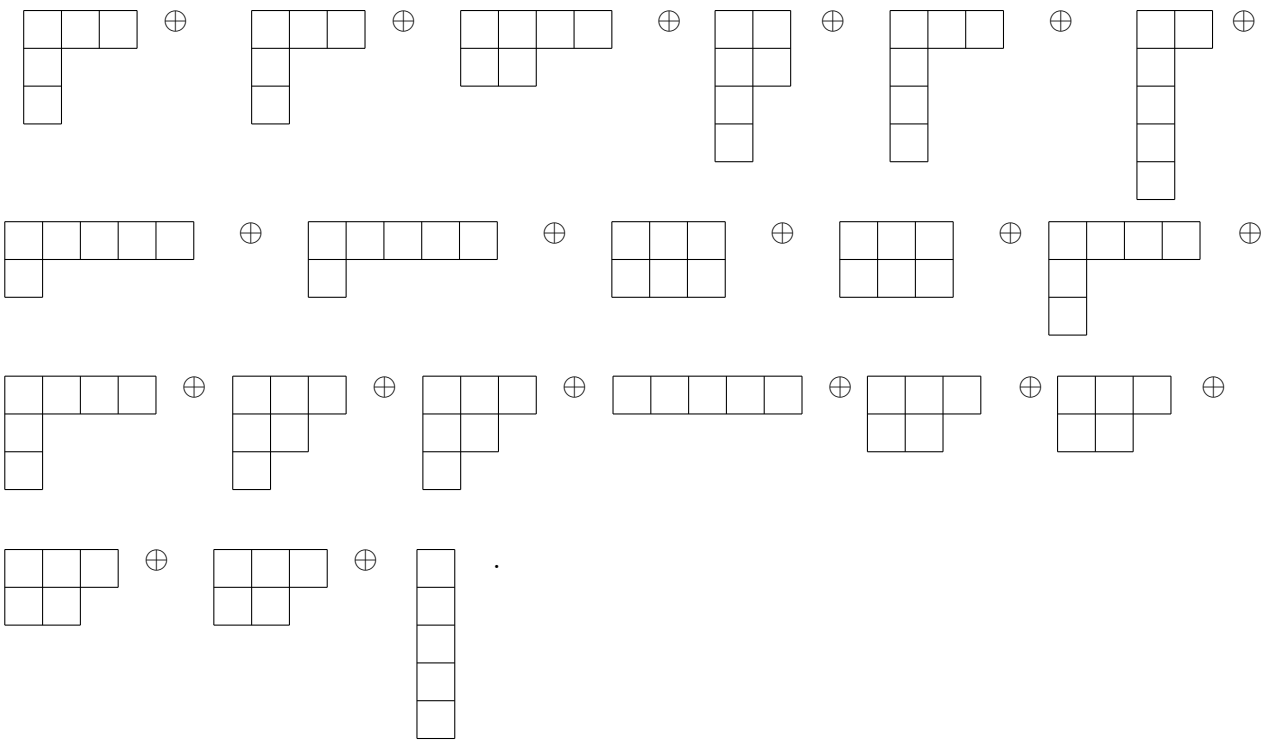
$$H_1 = \square \oplus \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} .$$

$$H_2 = \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus$$



Más aún, los que siguen son vectores clases del segundo grupo de homología de peso máximo para cada submódulo irreducible con sus dimensiones.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \langle v_2^1 = (e \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle \subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\ \dim = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \langle v_2^2 + v_2^3 = 2(e \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \otimes 1) \otimes (f \otimes e) - (f \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle \\ \subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \langle v_3^1 = (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes 1) \rangle \subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \langle v_4^1 = -(e \otimes e) \wedge (e \otimes f) \rangle \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \langle 2v_{11}^3 - v_{11}^2 = -2(e \otimes 1) \wedge (e \otimes ef) \rangle \subseteq V_{\mathcal{L}} \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \langle 2v_4^2 + v_{11}^2 = -2(e \otimes e) \wedge (f \otimes e) + (e \otimes 1) \wedge (f \otimes ee) - (f \otimes 1) \wedge (e \otimes ee) \rangle \\ \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus V_{\mathcal{L}} \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\ \dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_7^1 = (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes e) \rangle \simeq \langle v_6^1 = (e \wedge f \otimes e) \otimes (e \otimes 1) \rangle \\
\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{11}^4 = (e \otimes 1) \wedge (e \otimes ff) - (e \otimes 1) \wedge (f \otimes ef) - (f \otimes 1) \wedge (e \otimes ef) + \\
(f \otimes 1) \wedge (f \otimes ee) \rangle \subseteq V_{\mathcal{L}} \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_7^4 = (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes f) \rangle \\
\simeq \langle v_6^4 = (e \wedge f \otimes f) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge f \otimes f) \otimes (e \otimes 1) \rangle \\
\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{11}^1 = (e \otimes 1) \wedge (e \otimes ee) \rangle \subseteq V_{\mathcal{L}} \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \langle v_4^3 = (e \otimes e) \wedge (f \otimes g) - (e \otimes e) \wedge (g \otimes f) - 2(e \otimes f) \wedge (e \otimes g) + \\
(e \otimes f) \wedge (g \otimes e) - (e \otimes g) \wedge (f \otimes e) \rangle \\
\subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_7^2 = -(f \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes e) + (e \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes f) - (e \wedge f \otimes 1) \otimes (e \otimes g) \rangle \\
\simeq \langle v_6^2 = -(f \wedge g \otimes e) \otimes (e \otimes 1) + (e \wedge g \otimes e) \otimes (f \otimes 1) - (e \wedge f \otimes e) \otimes (g \otimes 1) \rangle \\
\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_7^3 = (f \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes e) - (e \wedge g \otimes 1) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge f \otimes 1) \otimes (g \otimes e) \rangle \\
&\simeq \langle v_6^3 = (f \wedge g \otimes e) \otimes (e \otimes 1) + (e \wedge g \otimes f) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge f \otimes g) \otimes (e \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&= \langle 2v_4^4 + v_{11}^5 = -2(e \otimes e) \wedge (f \otimes g) + 2(e \otimes e) \wedge (g \otimes f) + \\
&\quad 2(e \otimes f) \wedge (e \otimes g) - 2(f \otimes e) \wedge (g \otimes e) + \\
&\quad (e \otimes 1) \wedge (f \otimes eg) - (e \otimes 1) \wedge (g \otimes ef) - (f \otimes 1) \wedge (e \otimes eg) + \\
&\quad (f \otimes 1) \wedge (g \otimes ee) + (g \otimes 1) \wedge (e \otimes ef) - (g \otimes 1) \wedge (f \otimes ee) \rangle \\
&\subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus V_{\mathcal{L}} \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}.
\end{aligned}$$

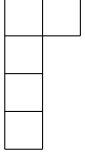
$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_7^5 = -(g \wedge h \otimes 1) \otimes (e \otimes f) + (f \wedge h \otimes 1) \otimes (e \otimes g) - \\
&\quad (f \wedge g \otimes 1) \otimes (e \otimes h) + (g \wedge h \otimes 1) \otimes (f \otimes e) - \\
&\quad (e \wedge h \otimes 1) \otimes (f \otimes g) + (e \wedge g \otimes 1) \otimes (f \otimes h) - \\
&\quad (f \wedge h \otimes 1) \otimes (g \otimes e) + (e \wedge h \otimes 1) \otimes (g \otimes f) - \\
&\quad (e \wedge f \otimes 1) \otimes (g \otimes h) + (f \wedge g \otimes 1) \otimes (h \otimes e) - \\
&\quad (e \wedge g \otimes 1) \otimes (h \otimes f) + (e \wedge f \otimes 1) \otimes (h \otimes g) \rangle \\
&\simeq \langle v_6^5 = -(g \wedge h \otimes e) \otimes (f \otimes 1) + (f \wedge h \otimes e) \otimes (g \otimes 1) - \\
&\quad (f \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes 1) + (g \wedge h \otimes f) \otimes (e \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge h \otimes f) \otimes (g \otimes 1) + (e \wedge g \otimes f) \otimes (h \otimes 1) - \\
&\quad (f \wedge h \otimes g) \otimes (e \otimes 1) + (e \wedge h \otimes g) \otimes (f \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge f \otimes g) \otimes (h \otimes 1) + (f \wedge g \otimes h) \otimes (e \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge g \otimes h) \otimes (f \otimes 1) + (e \wedge f \otimes h) \otimes (g \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \mathbb{C}) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \oplus (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_{14}^5 = (e \wedge f \otimes eg) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge g \otimes ff) \otimes (e \otimes 1) + (f \wedge g \otimes ef) \otimes (e \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge f \otimes eg) \otimes (f \otimes 1) + (e \wedge g \otimes ef) \otimes (f \otimes 1) + (f \wedge g \otimes ee) \otimes (f \otimes 1) \\
&\simeq \langle v_{13}^5 = (e \otimes eg) \otimes (e \wedge f \otimes 1) - (e \otimes ff) \otimes (e \wedge g \otimes 1) + (e \otimes ef) \otimes (f \wedge g \otimes 1) - \\
&\quad (f \otimes eg) \otimes (e \wedge f \otimes 1) + (f \otimes ef) \otimes (e \wedge g \otimes 1) + (f \otimes ee) \otimes (f \wedge g \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \simeq (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (Z \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

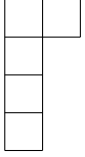
$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&= \langle v_8^9 = -(f \wedge g \otimes e) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge g \otimes e) \otimes (f \otimes f) - (e \wedge f \otimes e) \otimes (f \otimes g) + \\
&\quad (f \wedge g \otimes f) \otimes (e \otimes e) - (e \wedge g \otimes f) \otimes (e \otimes f) + (e \wedge f \otimes f) \otimes (e \otimes g) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&= \langle v_{12}^{11} = -(e \otimes e) \otimes (f \otimes fg) + (e \otimes e) \otimes (g \otimes ff) + (e \otimes f) \otimes (f \otimes eg) - \\
&\quad (e \otimes f) \otimes (g \otimes ef) + (f \otimes e) \otimes (e \otimes fg) - (f \otimes e) \otimes (g \otimes ef) - \\
&\quad (f \otimes f) \otimes (e \otimes eg) + (f \otimes f) \otimes (g \otimes ee) - (g \otimes e) \otimes (e \otimes ff) + \\
&\quad (g \otimes e) \otimes (f \otimes ef) + (g \otimes f) \otimes (e \otimes ef) - (g \otimes f) \otimes (f \otimes ee) \rangle \\
&\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

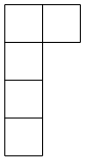
$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&= \langle v_{12}^{12} = -(e \otimes f) \otimes (e \otimes fg) + (e \otimes f) \otimes (f \otimes eg) + (e \otimes g) \otimes (e \otimes ff) - \\
&\quad (e \otimes g) \otimes (f \otimes ef) + (f \otimes e) \otimes (e \otimes fg) - (f \otimes e) \otimes (f \otimes eg) - \\
&\quad (f \otimes g) \otimes (e \otimes ef) + (f \otimes g) \otimes (f \otimes ee) - (g \otimes e) \otimes (e \otimes ff) + \\
&\quad (g \otimes e) \otimes (f \otimes ef) + (g \otimes f) \otimes (e \otimes ef) - (g \otimes f) \otimes (f \otimes ee) \rangle \\
&\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)}{24}.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\simeq \langle v_{14}^6 = (f \wedge g \otimes eh) \otimes (e \otimes 1) - (f \wedge h \otimes eg) \otimes (e \otimes 1) + (g \wedge h \otimes ef) \otimes (e \otimes 1) - \\
&\quad (e \wedge g \otimes eh) \otimes (f \otimes 1) + (e \wedge h \otimes eg) \otimes (f \otimes 1) - (g \wedge h \otimes ee) \otimes (f \otimes 1) + \\
&\quad (e \wedge f \otimes eh) \otimes (g \otimes 1) - (e \wedge h \otimes ef) \otimes (g \otimes 1) + (f \wedge h \otimes ee) \otimes (g \otimes 1) + \\
&\quad (e \wedge f \otimes eg) \otimes (h \otimes 1) + (e \wedge g \otimes ef) \otimes (h \otimes 1) - (f \wedge g \otimes ee) \otimes (h \otimes 1) \\
&\simeq \langle v_{13}^6 = (e \otimes eh) \otimes (f \wedge g \otimes 1) - (e \otimes eg) \otimes (f \wedge h \otimes 1) + (e \otimes ef) \otimes (g \wedge h \otimes 1) - \\
&\quad (f \otimes eh) \otimes (e \wedge g \otimes 1) + (f \otimes eg) \otimes (e \wedge h \otimes 1) - (f \otimes ee) \otimes (g \wedge h \otimes 1) + \\
&\quad (g \otimes eh) \otimes (e \wedge f \otimes 1) - (g \otimes ef) \otimes (e \wedge h \otimes 1) + (g \otimes ee) \otimes (f \wedge h \otimes 1) + \\
&\quad (h \otimes eg) \otimes (e \wedge f \otimes 1) + (h \otimes ef) \otimes (e \wedge g \otimes 1) - (h \otimes ee) \otimes (f \wedge g \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \simeq (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (Z \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{30}.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \langle v_8^{12} = -(g \wedge h \otimes e) \otimes (e \otimes f) + (f \wedge h \otimes e) \otimes (e \otimes g) - (f \wedge g \otimes e) \otimes (e \otimes h) + \\
&\quad (g \wedge h \otimes e) \otimes (f \otimes e) - (e \wedge f \otimes e) \otimes (g \otimes h) + (f \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes e) - \\
&\quad (e \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes f) + (e \wedge f \otimes e) \otimes (h \otimes g) \rangle \subseteq (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{30}.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \langle v_{12}^{13} = (e \otimes f) \otimes (g \otimes eh) - (e \otimes f) \otimes (h \otimes eg) - (e \otimes g) \otimes (f \otimes eh) + \\
&\quad (e \otimes g) \otimes (h \otimes ef) + (e \otimes h) \otimes (f \otimes eg) - (e \otimes h) \otimes (g \otimes ef) - \\
&\quad (f \otimes e) \otimes (g \otimes eh) + (f \otimes e) \otimes (h \otimes eg) + (f \otimes g) \otimes (e \otimes eh) - \\
&\quad (f \otimes g) \otimes (h \otimes ee) - (f \otimes h) \otimes (e \otimes eg) + (f \otimes h) \otimes (g \otimes ee) + \\
&\quad (g \otimes e) \otimes (f \otimes eh) - (g \otimes e) \otimes (h \otimes ef) - (g \otimes f) \otimes (e \otimes eh) + \\
&\quad (g \otimes f) \otimes (h \otimes ee) + (g \otimes h) \otimes (e \otimes ef) - (g \otimes h) \otimes (f \otimes ee) - \\
&\quad (h \otimes e) \otimes (f \otimes eg) + (h \otimes e) \otimes (g \otimes ef) + (h \otimes f) \otimes (e \otimes eg) - \\
&\quad (h \otimes f) \otimes (g \otimes ee) - (h \otimes g) \otimes (e \otimes ef) + (h \otimes g) \otimes (f \otimes ee) \rangle \\
&\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{30}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{14}^1 = -(e \wedge f \otimes ee) \otimes (e \otimes 1) \rangle \subseteq (Z \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\simeq \langle v_{13}^1 = (e \otimes ee) \otimes (e \wedge f \otimes 1) \rangle \subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (Z \otimes \mathbb{C}) \\
\dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{30}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{12}^2 = (e \otimes e) \otimes (e \otimes ef) - (e \otimes e) \otimes (e \otimes ef) \rangle \\
\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{30}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{12}^3 = (e \otimes e) \otimes (e \otimes ef) - (e \otimes f) \otimes (e \otimes ee) \rangle \\
\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{30}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{12}^4 = (e \otimes e) \otimes (e \otimes ef) - (f \otimes e) \otimes (e \otimes ee) \rangle \\
\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{30}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{14}^3 = (f \wedge g \otimes ee) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge g \otimes ee) \otimes (f \otimes 1) + (e \wedge f \otimes ee) \otimes (g \otimes 1) \rangle \\
\subseteq (Z \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
\simeq \langle v_{13}^3 = (e \otimes ee) \otimes (f \wedge g \otimes 1) - (f \otimes ee) \otimes (e \wedge g \otimes 1) + (g \otimes ee) \otimes (e \wedge f \otimes 1) \rangle \\
\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (Z \otimes \mathbb{C}) \\
\dim = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{20}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_{14}^4 = (e \wedge f \otimes eg) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge g \otimes ef) \otimes (e \otimes 1) + \\
&\quad (e \wedge g \otimes ee) \otimes (f \otimes 1) - (e \wedge f \otimes ee) \otimes (g \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (Z \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}) \\
&\simeq \langle v_{13}^4 = (e \otimes eg) \otimes (e \wedge f \otimes 1) - (e \otimes ef) \otimes (e \wedge g \otimes 1) + \\
&\quad (f \otimes ee) \otimes (e \wedge g \otimes 1) - (g \otimes ee) \otimes (e \wedge f \otimes 1) \rangle \\
&\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (Z \otimes \mathbb{C}) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{20}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_{12}^8 = -(e \otimes e) \otimes (f \otimes eg) + (e \otimes e) \otimes (g \otimes ef) - (e \otimes f) \otimes (g \otimes ee) + \\
&\quad (e \otimes g) \otimes (f \otimes ee) + (f \otimes e) \otimes (e \otimes eg) - (f \otimes g) \otimes (e \otimes ee) - \\
&\quad (g \otimes e) \otimes (e \otimes ef) + (g \otimes f) \otimes (e \otimes ee) \rangle \\
&\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{20}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_{12}^9 = (e \otimes e) \otimes (f \otimes eg) - (e \otimes e) \otimes (g \otimes ef) - (f \otimes e) \otimes (e \otimes eg) + \\
&\quad (f \otimes e) \otimes (g \otimes ee) + (g \otimes e) \otimes (e \otimes ef) - (g \otimes e) \otimes (f \otimes ee) \rangle \\
&\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{20}.
\end{aligned}$$

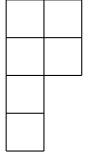
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}
\begin{aligned}
&\simeq \langle v_{12}^{10} = -(e \otimes f) \otimes (e \otimes eg) + (e \otimes g) \otimes (e \otimes ef) + (f \otimes e) \otimes (e \otimes eg) - \\
&\quad (f \otimes g) \otimes (e \otimes ee) - (g \otimes e) \otimes (e \otimes ef) + (g \otimes f) \otimes (e \otimes ee) \rangle \\
&\subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{20}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{18}^3 = (e \otimes ee) \wedge (e \otimes ff) - (e \otimes ee) \wedge (f \otimes ef) + (e \otimes ef) \wedge (f \otimes ee) \rangle \\
\subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = \frac{(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{80}.$$

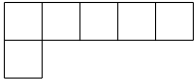
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{16}^{14} = (f \wedge g \otimes eh) \otimes (e \otimes e) - (f \wedge h \otimes eg) \otimes (e \otimes e) + (g \wedge h \otimes ef) \otimes (e \otimes e) - \\
(e \wedge g \otimes eh) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge h \otimes eg) \otimes (f \otimes e) - (g \wedge h \otimes ee) \otimes (f \otimes e) + \\
(e \wedge f \otimes eh) \otimes (g \otimes e) - (e \wedge h \otimes ef) \otimes (g \otimes e) + (f \wedge h \otimes ee) \otimes (g \otimes e) - \\
(e \wedge f \otimes eg) \otimes (h \otimes e) + (e \wedge g \otimes ef) \otimes (h \otimes e) - (f \wedge g \otimes ee) \otimes (h \otimes e) \rangle \\
\subseteq (Z \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{144}.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \simeq \langle v_{16}^{18} = -(g \wedge h \otimes ev) \otimes (e \otimes f) + (g \wedge v \otimes eh) \otimes (e \otimes f) - (h \wedge v \otimes eg) \otimes (e \otimes f) + \\
(f \wedge h \otimes ev) \otimes (e \otimes g) - (f \wedge v \otimes eh) \otimes (e \otimes g) + (h \wedge v \otimes ef) \otimes (e \otimes g) - \\
(f \wedge g \otimes ev) \otimes (e \otimes h) + (f \wedge v \otimes eg) \otimes (e \otimes h) - (g \wedge v \otimes ef) \otimes (e \otimes h) + \\
(f \wedge g \otimes eh) \otimes (e \otimes v) - (f \wedge h \otimes eg) \otimes (e \otimes v) + (g \wedge h \otimes ef) \otimes (e \otimes v) + \\
(g \wedge h \otimes ev) \otimes (f \otimes e) - (g \wedge v \otimes eh) \otimes (f \otimes e) + (h \wedge v \otimes eg) \otimes (f \otimes e) - \\
(e \wedge h \otimes ev) \otimes (f \otimes g) + (e \wedge v \otimes eh) \otimes (f \otimes g) - (h \wedge v \otimes ee) \otimes (f \otimes g) + \\
(e \wedge g \otimes ev) \otimes (f \otimes h) - (e \wedge v \otimes eg) \otimes (f \otimes h) + (g \wedge v \otimes ee) \otimes (f \otimes h) - \\
(e \wedge g \otimes eh) \otimes (f \otimes v) + (e \wedge h \otimes eg) \otimes (f \otimes v) - (g \wedge h \otimes ee) \otimes (f \otimes v) - \\
(f \wedge h \otimes ev) \otimes (g \otimes e) + (f \wedge v \otimes eh) \otimes (g \otimes e) - (h \wedge v \otimes ef) \otimes (g \otimes e) + \\
(e \wedge h \otimes ev) \otimes (g \otimes f) - (e \wedge v \otimes eh) \otimes (g \otimes f) + (h \wedge v \otimes ee) \otimes (g \otimes f) - \\
(e \wedge f \otimes ev) \otimes (g \otimes h) + (e \wedge v \otimes ef) \otimes (g \otimes h) - (f \wedge v \otimes ee) \otimes (g \otimes h) + \\
(e \wedge f \otimes eh) \otimes (g \otimes v) - (e \wedge h \otimes ef) \otimes (g \otimes v) + (f \wedge h \otimes ee) \otimes (g \otimes v) + \\
(f \wedge g \otimes ev) \otimes (h \otimes e) - (f \wedge v \otimes eg) \otimes (h \otimes e) + (g \wedge v \otimes ef) \otimes (h \otimes e) - \\
(e \wedge g \otimes ev) \otimes (h \otimes f) + (e \wedge v \otimes eg) \otimes (h \otimes f) - (g \wedge v \otimes ee) \otimes (h \otimes f) + \\
(e \wedge f \otimes ev) \otimes (h \otimes g) - (e \wedge v \otimes ef) \otimes (h \otimes g) + (f \wedge v \otimes ee) \otimes (h \otimes g) - \\
(e \wedge f \otimes eg) \otimes (h \otimes v) + (e \wedge g \otimes ef) \otimes (h \otimes v) - (f \wedge g \otimes ee) \otimes (h \otimes v) - \\
(f \wedge g \otimes eh) \otimes (v \otimes e) + (f \wedge h \otimes eg) \otimes (v \otimes e) - (g \wedge h \otimes ef) \otimes (v \otimes e) + \\
(e \wedge g \otimes eh) \otimes (v \otimes f) - (e \wedge h \otimes eg) \otimes (v \otimes f) + (g \wedge h \otimes ee) \otimes (v \otimes f) - \rangle$$

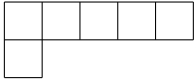
$$\begin{aligned}
& (e \wedge f \otimes eh) \otimes (v \otimes g) + (e \wedge h \otimes ef) \otimes (v \otimes g) - (f \wedge h \otimes ee) \otimes (v \otimes g) + \\
& (e \wedge f \otimes eg) \otimes (v \otimes h) - (e \wedge g \otimes ef) \otimes (v \otimes h) + (f \wedge g \otimes ee) \otimes (v \otimes h) \\
\subseteq & (Z \otimes \text{Sym}^2 V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \\
\dim = & \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{144}.
\end{aligned}$$



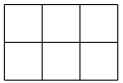
$$\begin{aligned}
\simeq \langle v_{18}^{10} = & (e \otimes ef) \wedge (g \otimes fh) - (e \otimes ef) \wedge (h \otimes fg) - (e \otimes eg) \wedge (f \otimes fh) + \\
& (e \otimes eg) \wedge (h \otimes ff) + (e \otimes eh) \wedge (f \otimes fg) - (e \otimes eh) \wedge (g \otimes ff) - \\
& (e \otimes ff) \wedge (g \otimes eh) + (e \otimes ff) \wedge (h \otimes eg) - (e \otimes fg) \wedge (f \otimes eh) - \\
& (e \otimes fg) \wedge (h \otimes ef) - (e \otimes fh) \wedge (f \otimes eg) + (e \otimes fh) \wedge (g \otimes ef) - \\
& (f \otimes ee) \wedge (g \otimes fh) + (f \otimes ee) \wedge (h \otimes fg) + (f \otimes ef) \wedge (g \otimes eh) - \\
& (f \otimes ef) \wedge (h \otimes eg) - (f \otimes eg) \wedge (h \otimes ef) + (f \otimes eh) \wedge (g \otimes ef) + \\
& (f \otimes fg) \wedge (h \otimes ee) - (f \otimes fh) \wedge (g \otimes ee) - (g \otimes ee) \wedge (h \otimes ff) + \\
& 2(g \otimes ef) \wedge (h \otimes ef) - (g \otimes ff) \wedge (h \otimes ee) \\
\subseteq & \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = & \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)}{80}.
\end{aligned}$$



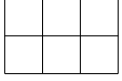
$$\begin{aligned}
\simeq \langle v_{18}^1 = & (e \otimes ee) \wedge (f \otimes ee) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = & \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\simeq \langle v_{18}^2 = & (e \otimes ee) \wedge (e \otimes ef) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = & \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}.
\end{aligned}$$

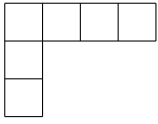


$$\begin{aligned}
\simeq \langle v_{18}^6 = & (e \otimes ef) \wedge (e \otimes ff) - (e \otimes ef) \wedge (f \otimes ef) + (e \otimes ff) \wedge (f \otimes ee) + \\
& (f \otimes ee) \wedge (f \otimes ef) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \\
\dim = & \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)}{144}.
\end{aligned}$$



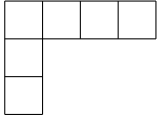
$$\simeq \langle v_{18}^7 = -(e \otimes ee) \wedge (f \otimes ff) + 2(e \otimes ef) \wedge (e \otimes ff) + (e \otimes ff) \wedge (f \otimes ee) + 2(f \otimes ee) \wedge (f \otimes ef) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \rangle$$

$$\dim = \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)}{144}.$$



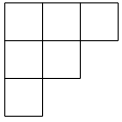
$$\simeq \langle v_{18}^4 = -(e \otimes ee) \wedge (f \otimes eg) + (e \otimes ee) \wedge (g \otimes ef) + (e \otimes ef) \wedge (g \otimes ee) - (e \otimes eg) \wedge (f \otimes ee) - 2(f \otimes ee) \wedge (g \otimes ee) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \rangle$$

$$\dim = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{72}.$$



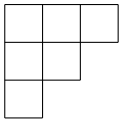
$$\simeq \langle v_{18}^5 = (e \otimes ee) \wedge (f \otimes eg) + (e \otimes ee) \wedge (g \otimes ef) - (e \otimes ef) \wedge (e \otimes eg) + (f \otimes ee) \wedge (g \otimes ee) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \rangle$$

$$\dim = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{72}.$$



$$\simeq \langle v_{18}^8 = (e \otimes ee) \wedge (f \otimes fg) - (e \otimes ee) \wedge (g \otimes ff) - (e \otimes ef) \wedge (f \otimes eg) + 2(e \otimes ef) \wedge (g \otimes ef) - (e \otimes eg) \wedge (f \otimes ef) - (e \otimes ff) \wedge (g \otimes ee) + (e \otimes fg) \wedge (f \otimes ee) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \rangle$$

$$\dim = \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)}{45}.$$



$$\simeq \langle v_{18}^9 = -(e \otimes ef) \wedge (e \otimes fg) + 2(e \otimes ef) \wedge (f \otimes eg) - (e \otimes ef) \wedge (g \otimes ef) + (e \otimes eg) \wedge (e \otimes ff) - (e \otimes eg) \wedge (f \otimes ef) + (e \otimes ff) \wedge (g \otimes ee) - (e \otimes fg) \wedge (f \otimes ee) - 2(f \otimes ee) \wedge (f \otimes eg) + (f \otimes ee) \wedge (g \otimes ef) - 2(f \otimes ef) \wedge (g \otimes ee) \subseteq \Lambda^2(V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \rangle$$

$$\dim = \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)}{45}.$$

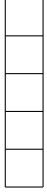
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\
\dim = \frac{\langle v_{12}^1 = -(e \otimes e) \otimes (e \otimes ee) \subseteq (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes \text{Sym}^2 V_A) \rangle}{120}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \\
\dim = \frac{\langle v_{14}^2 = (e \wedge f \otimes ef) \otimes (e \otimes 1) - (e \wedge f \otimes ee) \otimes (f \otimes 1) \rangle}{24}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \\
\dim = \frac{\langle v_{12}^5 = -(e \otimes e) \otimes (e \otimes ff) + (e \otimes e) \otimes (f \otimes ef) + (e \otimes f) \otimes (e \otimes ef) - (e \otimes f) \otimes (f \otimes ee) \rangle}{24}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \\
\dim = \frac{\langle v_{12}^6 = -(e \otimes e) \otimes (f \otimes ef) + (e \otimes f) \otimes (e \otimes ef) + (f \otimes e) \otimes (f \otimes ee) - (f \otimes f) \otimes (e \otimes ee) \rangle}{24}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \\
\dim = \frac{\langle v_{12}^7 = (e \otimes e) \otimes (e \otimes ff) - (e \otimes e) \otimes (f \otimes ef) - (f \otimes e) \otimes (e \otimes ef) + (f \otimes e) \otimes (f \otimes ee) \rangle}{24}.
\end{array}$$



$$\begin{aligned}
\simeq \langle v_8^{13} = & (h \wedge v \otimes e) \otimes (f \otimes g) - (g \wedge v \otimes e) \otimes (f \otimes h) + (g \wedge h \otimes e) \otimes (f \otimes v) - \\
& (h \wedge v \otimes e) \otimes (g \otimes f) + (f \wedge v \otimes e) \otimes (g \otimes h) - (f \wedge h \otimes e) \otimes (g \otimes v) + \\
& (g \wedge v \otimes e) \otimes (h \otimes f) - (f \wedge v \otimes e) \otimes (h \otimes g) + (f \wedge g \otimes e) \otimes (h \otimes v) - \\
& (g \wedge h \otimes e) \otimes (v \otimes f) + (f \wedge h \otimes e) \otimes (v \otimes g) - (f \wedge g \otimes e) \otimes (v \otimes h) - \\
& (h \wedge v \otimes f) \otimes (e \otimes g) + (g \wedge v \otimes f) \otimes (e \otimes h) - (g \wedge h \otimes f) \otimes (e \otimes v) + \\
& (h \wedge v \otimes f) \otimes (g \otimes e) - (e \wedge v \otimes f) \otimes (g \otimes h) + (e \wedge h \otimes f) \otimes (g \otimes v) - \\
& (g \wedge v \otimes f) \otimes (h \otimes e) + (e \wedge v \otimes f) \otimes (h \otimes g) - (e \wedge g \otimes f) \otimes (h \otimes v) + \\
& (g \wedge h \otimes f) \otimes (v \otimes e) - (e \wedge h \otimes f) \otimes (v \otimes g) + (e \wedge g \otimes f) \otimes (v \otimes h) + \\
& (h \wedge v \otimes g) \otimes (e \otimes f) - (f \wedge v \otimes g) \otimes (e \otimes h) + (f \wedge h \otimes g) \otimes (e \otimes v) - \\
& (h \wedge v \otimes g) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge v \otimes g) \otimes (f \otimes h) - (e \wedge h \otimes g) \otimes (f \otimes v) + \\
& (f \wedge v \otimes g) \otimes (h \otimes e) - (e \wedge v \otimes g) \otimes (h \otimes f) + (e \wedge f \otimes g) \otimes (h \otimes v) - \\
& (f \wedge h \otimes g) \otimes (v \otimes e) + (e \wedge h \otimes g) \otimes (v \otimes f) - (e \wedge f \otimes g) \otimes (v \otimes h) - \\
& (g \wedge v \otimes h) \otimes (e \otimes f) + (f \wedge v \otimes h) \otimes (e \otimes g) - (f \wedge g \otimes h) \otimes (e \otimes v) + \\
& (g \wedge v \otimes h) \otimes (f \otimes e) - (e \wedge v \otimes h) \otimes (f \otimes g) + (e \wedge g \otimes h) \otimes (f \otimes v) - \\
& (f \wedge v \otimes h) \otimes (g \otimes e) + (e \wedge v \otimes h) \otimes (g \otimes f) - (e \wedge f \otimes h) \otimes (g \otimes v) + \\
& (f \wedge g \otimes h) \otimes (v \otimes e) - (e \wedge g \otimes h) \otimes (v \otimes f) + (e \wedge f \otimes h) \otimes (v \otimes g) + \\
& (g \wedge h \otimes v) \otimes (e \otimes f) - (f \wedge h \otimes v) \otimes (e \otimes g) + (f \wedge g \otimes v) \otimes (e \otimes h) - \\
& (g \wedge h \otimes v) \otimes (f \otimes e) + (e \wedge h \otimes v) \otimes (f \otimes g) - (e \wedge g \otimes v) \otimes (f \otimes h) + \\
& (f \wedge h \otimes v) \otimes (g \otimes e) - (e \wedge h \otimes v) \otimes (g \otimes f) + (e \wedge f \otimes v) \otimes (g \otimes h) - \\
& (f \wedge g \otimes v) \otimes (h \otimes e) + (e \wedge g \otimes v) \otimes (h \otimes f) - (e \wedge f \otimes v) \otimes (h \otimes g) \rangle
\end{aligned}$$

$$\subseteq (Z \otimes V_A) \otimes (V_{\mathcal{L}} \otimes V_A)$$

$$\dim = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{120}.$$

9 Programas Maple ejecutables y data (CD)

En el CD que se adjunta están grabados los programas Maple ejecutables tal cual se incluyeron en la Sección 7. El paquete está organizado en secciones y éstas aparecen como sigue:

> `with(linalg)`

- ▶ **Alfabeto, Orden del alfabeto**
- ▶ **Bases**
- ▶ **Pesos**
- ▶ **Operador de crecimiento**
- ▶ **Ordenar**
- ▶ **Obtención de vectores de peso máximo**
- ▶ **Dimensiones**
- ▶ **Vectores de peso máximo de Lnk**

Además están grabados los outputs de los mismos y en particular los vectores de peso máximo utilizados en la Sección 6. Recordamos que muchos de ellos han sido transcriptos en las secciones anteriores, pero algunos de ellos no dado su tamaño. Por ejemplo los vectores de peso máximo del submódulo $T_{29} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ de la primera descomposición de $\Lambda^3(\mathcal{L}_n^3)$ llamados $w_{29}^1, \dots, w_{29}^{94}$ no fueron transcriptos ya que ocupan alrededor de 90 páginas. Para transcribir a partir del output los vectores de peso máximo es necesario interpretar las salidas según como fueron escritos los procedimientos. El siguiente ejemplo muestra como hacer esto.

Ejemplo 9.1.

El vector w_{29}^{94} de peso $(2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ se encuentra en la sección **Vectores de peso máximo de Lnk** en la subsección **Ln3**, donde se encuentran todos los vectores de peso máximo que se usaron para el caso \mathcal{L}_n^3 , en el paquete $Vx(VxSym \wedge 2(V))x(Alt \wedge 2(V)xSym \wedge 2V)$ siendo el último de la lista del output.

Los primeros 3 sumandos, de los 708, y los tres últimos del vector w_{29}^{94} son devuletos por Maple de la siguiente forma:

$$[[efghevfw], -[efghewfv], -[efghfvew], \dots, [feghgvee], [fegvghee], [fehvggee]]$$

Cada uno de estos sumandos según como se escribió el programa pertenecen a $V \otimes V \otimes \Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V \otimes \text{Sym}^2 V$ que es isomorfo a $T_{29} = V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ por lo que el vector de peso máximo correspondiente será:

$$w_{29}^{94} = efvghfw - efewghfv - effvghew + \cdots + fegvghee + feghgvee + fegghvee,$$

y como $V \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ con la notación original es el submódulo $(V \otimes \mathbb{C}) \otimes (V \otimes \text{Sym}^2 V) \otimes (\Lambda^2 V \otimes \text{Sym}^2 V)$ así resulta que:

$$\begin{aligned} w_{29}^{94} = & (e \otimes 1) \otimes (f \otimes ev) \otimes (g \wedge h \otimes fw) - (e \otimes 1) \otimes (f \otimes ew) \otimes (g \wedge h \otimes fv) - \\ & (e \otimes 1) \otimes (f \otimes fv) \otimes (g \wedge h \otimes ew) + \cdots + (f \otimes 1) \otimes (e \otimes gv) \otimes (g \wedge h \otimes ee) + \\ & (f \otimes 1) \otimes (e \otimes gh) \otimes (g \wedge v \otimes ee) + (f \otimes 1) \otimes (e \otimes gg) \otimes (h \wedge v \otimes ee). \end{aligned}$$

Bibliografía

- [FH] Fulton, William; Harris, J., Representation Theory A first Course, Graduate Texts in Mathematics 129. Springer Verlag, New York, 1996.
- [H] Humphreys, J., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics 9. Springer Verlag, 1994.
- [SM] San Martin, Luis A.B., Algebras de Lie, Editora da Unicamp, 1999.
- [LC] Cagliero, Leandro, *El teorema de Kostant sobre cohomología de nilradicales de subálgebras parabólicas de álgebras de Lie semisimple*, XVI Coloquio Latinoamericano de Álgebras. Colonia, agosto de 2005.
- [SK] Kumar, Shrawan, *Homology of Certain Truncated Lie Algebras*, Contemporary Mathematics. **Volume 248**, (1999)
- [T] Tirao, P., *La Dualidad de Schur*, VIII congreso Dr. Antonio Monteiro. Bahía Blanca, mayo de 2005.
- [SS] Sigg, Stefan, *Laplacian and Homology of Free Two-step Nilpotent Lie Algebras*, Journal of Algebra. **185**, 144-161 (1996)
- [T] Tirao, P., *On the homology of graded Lie algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra. **156**, 357-366 (2001)
- [HW] Hanlon, Phil; Wachs, Michelle L., *On the Property M Conjecture for the Heisenberg Lie Algebra*, Journal of Combinatorial Theory. **Serie A 99**, 219-231 (2002)
- [Ha] Hanlon, Phil, *Some conjectures and results concerning the homology of nilpotent Lie algebras*, Adv. Math. **84**, 91-134 (1990).