

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Magister en Matemática

TÍTULO DE LA TESIS:

**PROBLEMAS INVERSOS MAL CONDICIONADOS: LA
INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE,
OPERADORES DE REGULARIZACIÓN Y EL MÉTODO DE
LA INVERSA APROXIMADA**

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

AUTOR:

Adriana del Valle Ramos

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Rubén Daniel Spies

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2008

Dedicatoria

A la memoria de mi madre Isabel por haberme enseñado que todo gran logro es fruto del esfuerzo y a mi hijo Franco como un legado de tal enseñanza.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi familia, en especial a mi padre Miguel y a mi hijo Franco, por haber comprendido la importancia de esta etapa en mi vida por lo cual me alentaron y ayudaron permanentemente. Gracias Franco por tu paciencia, no imaginas cuanto contribuiste a allanar el camino.

Agradezco eternamente a mi director Dr. Rubén Spies porque su compromiso con este trabajo y su orientación durante el proceso fueron excelentes. Agradezco también a mi amigo Rubén Spies porque sus valiosas palabras fueron un enorme apoyo moral para no decaer. ¡Lo logramos!

A mi amiga Cecilia, gracias por ser mi compañera de ruta.

Gracias al personal del Área Matemática Aplicada (FaCET), Lic. María Isabel de Lencina, Lic. Graciela de Odstrcil, Ing. Gloria Moris y Lic. Silvina Real, por su predisposición para cubrir mi tarea docente las veces que obligadamente tuve que ausentarme. Su aporte fue de gran ayuda.

Finalmente mi gratitud a todas aquellas personas que de una u otra manera colaboraron para que este sueño se concrete.

Índice General

Índice General	1
Índice de Figuras	4
Resumen	5
1. Introducción: conceptos básicos y ejemplos de problemas inversos	7
1.1. La diferenciación como un problema inverso	10
1.2. Problemas inversos en conducción de Calor	14
2. Ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales	18
2.1. Soluciones de cuadrados mínimos y la inversa generalizada de Moore-Penrose	19
2.2. Operadores compactos	29
2.3. Introducción al cálculo funcional: función de un operador autoadjunto .	38
3. Regularización de ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales	59
3.1. Teoría de regularización	59
3.2. Orden de optimalidad	68
3.3. Regularización por proyección	85
3.4. Regularización mediante filtros	103
3.5. Métodos de regularización espectrales	107
4. Métodos de molificación	113
4.1. El método de la inversa aproximada	114
4.2. Relación entre la inversa aproximada y los métodos de filtro	119
4.3. Relación entre la inversa aproximada y el método de Backus-Gilbert . .	122
4.4. Aplicación del método de la inversa aproximada a un problema inverso en conducción de calor	126

5. Ejemplos y resultados numéricos	136
5.1. Resolución numérica del problema inverso asociado a la ecuación lateral del calor por el método de la inversa aproximada	136
6. Conclusiones, contribuciones y trabajos futuros	148
6.1. Conclusiones	148
6.2. Contribuciones	149
6.3. Trabajos Futuros	150
Apéndice: resultados básicos del análisis funcional	152
A.1. Espacios normados y espacios de Hilbert	152
A.2. Sistemas ortonormales	157
A.3. Operadores lineales, acotados y compactos	158
A.4. Teoría espectral para operadores compactos en espacios de Hilbert . . .	165
Referencias Bibliográficas	169

Índice de figuras

1.1.	Gráfico del error total como función del parámetro de discretización. . .	13
5.1.	Flujo $f(t)$ en $x = 1$ para el Ejemplo 1.	137
5.2.	Temperatura $u(x, t)$ obtenida con el flujo f de la Figura 5.1. Ejemplo 1.	138
5.3.	La temperatura en el extremo izquierdo para el Ejemplo 1: dato $g(t) = u(0, t)$ del problema inverso. Ejemplo 1.	139
5.4.	El núcleo de reconstrucción $\psi_\gamma(t)$ obtenido con el molificador (5.1.1), para $\gamma = 5 \times 10^{-3}$. Ejemplo 1.	140
5.5.	Flujo $f_\gamma(t)$ reconstruido por el método de la inversa aproximada y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 1.	141
5.6.	La temperatura $u(x, t)$, solución de (4.4.1), obtenida con el flujo $f(t)$ dado por (5.1.2). Ejemplo 2.	142
5.7.	La temperatura en el extremo izquierdo para el Ejemplo 2: dato $g(t) = u(0, t)$ del problema inverso. Ejemplo 2.	142
5.8.	Flujo $f_\gamma(t)$ reconstruido por el método de la inversa aproximada y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 2.	143
5.9.	Dato $g^\delta(t)$ del Ejemplo 3, igual al dato exacto perturbado con 1% de ruido.	143
5.10.	Flujos $f_\gamma^\delta(t)$ reconstruidos a partir de datos perturbados con 1% de ruido, utilizando el método de la inversa aproximada, con diferentes valores de γ y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 3.	144
5.11.	Núcleos de reconstrucción ψ_γ para diferentes valores de γ . Ejemplo 3. .	144
5.12.	Dato $g^\delta(t)$ para el Ejemplo 4, igual al dato exacto perturbado con 5% de ruido.	145
5.13.	Flujos $f_\gamma^\delta(t)$ reconstruidos a partir de datos perturbados con 5% de ruido, utilizando el método de la inversa aproximada, con diferentes valores de γ y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 4.	145
5.14.	El flujo $f(t)$ de clase C^∞ dado por (5.1.3) para el Ejemplo 5.	146
5.15.	La temperatura $u(x, t)$, solución de (4.4.1), obtenida con el flujo $f(t)$ dado por (5.1.3). Ejemplo 5.	146
5.16.	Dato $g^\delta(t)$ para el Ejemplo 5, igual al dato exacto perturbado con 20% de ruido.	147

- 5.17. Flujo $f_\gamma^\delta(t)$ reconstruido a partir del dato perturbado con 20% de ruido, utilizando el método de la inversa aproximada, con $\gamma = 0.045$, y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 5. 147

Resumen

En las últimas tres décadas el estudio de problemas inversos ha sido sin lugar a dudas una de las áreas de mayor y más rápido crecimiento de la Matemática Aplicada. Una de las principales causas de este crecimiento ha sido el creciente número de aplicaciones provenientes de otras ciencias y de la industria. En términos generales, un problema inverso involucra la estimación de ciertas cantidades a partir de mediciones indirectas de estas cantidades. A menudo este proceso de estimación es mal condicionado en el sentido que la presencia de ruido en los datos puede originar errores muy grandes en la estimación. Para tales problemas inversos mal condicionados los métodos numéricos tradicionales se vuelven inestables haciéndose imprescindible la implementación de ciertas técnicas y herramientas matemáticas conocidas como métodos de regularización. Si bien los primeros métodos de regularización aparecieron a comienzos de la década de 1960 con los trabajos de A. N. Tikhonov y D. L. Phillips, fue Thomas Seidman quien en 1980 alertó sobre el peligro y las posibles graves consecuencias de la utilización arbitraria del tradicional “método de mínimos cuadrados” para aproximar las soluciones de problemas inversos mal condicionados. Desde entonces, la teoría matemática asociada al estudio de estos problemas ha crecido y se ha solidificado enormemente, en muchos casos empujada por la necesidad de contar con herramientas adecuadas para la solución de problemas concretos. No obstante ello, siguen apareciendo constantemente nuevas aplicaciones y las herramientas matemáticas siguen perfeccionándose para afrontar nuevos desafíos. Este trabajo consiste de un estudio exhaustivo de los problemas inversos mal condicionados, incluyendo instancias y ejemplos concretos de aplicación en donde se originan, el análisis y desarrollo de las principales herramientas matemáticas que permiten su adecuado tratamiento, el estudio de aplicaciones concretas y el desarrollo de algoritmos computacionales para la implementación numérica de algunos métodos de regularización.

La organización de esta tesis es la siguiente:

- **Capítulo 1:** Presentación de los postulados de Hadamard y estudio de la naturaleza de los problemas inversos. Ejemplos motivadores.
- **Capítulo 2:** Desarrollo de un marco adecuado para el estudio de ecuaciones lineales mal condicionadas en espacios de dimensión infinita: la inversa generalizada de

Moore-Penrose, soluciones de cuadrados mínimos, expansión en valores singulares de operadores compactos, introducción a la Teoría Espectral y Cálculo Funcional.

- **Capítulo 3:** Construcción de operadores de regularización y reglas de elección de parámetro. Análisis del orden de optimalidad y estudio de métodos de regularización por proyección y métodos de filtro. Formalización general para métodos continuos de regularización mediante la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert. Análisis de los métodos clásicos (Tikhonov-Phillips, TSVD, etc).
- **Capítulo 4:** Estudio de nuevos métodos de regularización: métodos de molificación y el método de la inversa aproximada. Análisis de su relación con los métodos de filtro y con el método de Backus-Gilbert. Aplicación del método de la inversa aproximada a un problema inverso en conducción de calor.
- **Capítulo 5:** Resolución numérica de un problema inverso asociado a la ecuación lateral del calor por el método de la inversa aproximada.
- **Apéndice:** Presentación de los principales resultados del Análisis Funcional utilizados a lo largo del trabajo a fin de facilitar su lectura.

Capítulo 1

Introducción: conceptos básicos y ejemplos de problemas inversos

En líneas generales, y siguiendo la definición de Keller [17] se dice que dos problemas son inversos uno del otro si la formulación de uno de ellos requiere del conocimiento total o parcial del otro. A uno de ellos se le llama el *problema directo* y al otro el *problema inverso*, aunque no es claro, en principio, cuál es el directo y cuál el inverso. Usualmente uno de ellos ha sido estudiado primero, posiblemente con más detalle y en mayor profundidad, y en general a este se le llama “el problema directo”. Sin embargo, desde el punto de vista matemático hay una distinción muy clara entre ambos problemas. Esta distinción natural la provee la noción de mal condicionamiento.

En general, se dice que un problema matemático es (o está) *bien condicionado* si satisface los postulados de Hadamard [12] de *buen condicionamiento*. Estos son:

- P1: Para todo dato admisible existe una solución (existencia).
- P2: Para todo dato admisible la solución es única (unicidad).
- P3: La solución depende de manera continua de los datos (dependencia continua).

Si alguno de estos postulados no se satisface, entonces se dice que el problema es *mal condicionado*. En tal caso, en general la existencia puede forzarse relajando de algún modo el concepto de solución y la unicidad puede lograrse introduciendo información adicional sobre los datos. El problema mas serio lo constituye la pérdida de dependencia continua de los datos. En este caso, si se desea aproximar la solución por métodos numéricos tradicionales, es de esperar que tales métodos se vuelvan inestables y, en consecuencia, inapropiados. Una solución (parcial) a este problema la proporcionan los llamados *métodos de regularización* para problemas inversos mal condicionados.

Estos métodos consisten en herramientas matemáticas que permiten extraer la mayor cantidad de información posible sobre la solución del problema sin perder estabilidad.

La organización de esta tesis es la siguiente:

En primer lugar, en el Capítulo 1 se presentan los postulados de Hadamard y se estudian la naturaleza y características de los problemas inversos a través de algunos ejemplos motivadores. Posteriormente, en el Capítulo 2 se procede a desarrollar un marco adecuado para el estudio de ecuaciones lineales mal condicionadas en espacios de dimensión infinita. Esto incluye el estudio de la inversa generalizada de Moore-Penrose, su descomposición en valores singulares para el caso de operadores compactos, el criterio de Picard, y su relación con las soluciones de cuadrados mínimos. Este análisis es de fundamental importancia pues constituye el nexo que vincula a la inversa de Moore-Penrose con el método clásico de cuadrados mínimos en dimensión infinita y con la Teoría Espectral. En la Sección 2.3 se procede a hacer una breve introducción a la Teoría Espectral y al Cálculo Funcional (familias espectrales, función de un operador compacto, Desigualdad de Interpolación, etc.), con el objeto de proveer un andamiaje matemático adecuado para el tratamiento de los problemas posteriores.

En el Capítulo 3 se introducen las herramientas matemáticas clásicas de la teoría de regularización para problemas mal condicionados: regularización, regla de elección de parámetros, método de regularización convergente para ecuaciones lineales mal condicionadas y su relación con la inversa generalizada de Moore-Penrose. Utilizando las herramientas del Análisis Espectral, se analiza la convergencia de métodos de regularización en espacios de Hilbert. En la Sección 3.2 se estudian órdenes de optimalidad y su relación con conjuntos fuente definidos en términos de operadores y con condiciones de regularidad sobre las soluciones. Se presentan condiciones suficientes para convergencia y convergencia óptima. En la Sección 3.3 se estudian dos métodos de regularización por proyección: proyección de cuadrados mínimos y proyección de cuadrados mínimos dual y para ambos métodos se analizan condiciones suficientes para la convergencia de las correspondientes sucesiones. También se presenta un resultado recíproco en el que se deducen condiciones de regularidad de la solución exacta a partir de información sobre la sucesión de soluciones de mínimos cuadrados y se obtienen órdenes de convergencia para el caso de operadores compactos. Asimismo, se muestra que, para el caso compacto, el método de expansión en valores singulares truncada es un caso particular del método de mínimos cuadrados dual. Hasta aquí, estos constituyen resultados mas o menos conocidos que reflejan el estado del arte sobre el tema, aunque en todos los casos se han incluido demostraciones y desarrollos propios utilizando el enfoque mencionado, del tratamiento mediante las herramientas de la Teoría Espectral.

Al final de la Sección 3.3 se presenta un ejemplo de aplicación para aproximar la solución de una ecuación integral de Fredholm de primera especie, conocido como “colocación de cuadrados mínimos” o “método de discretización de momentos”. Aquí se prueba que este método es un caso particular del método de regularización por proyección de cuadrados mínimos dual y que, si el conjunto de puntos de colocación es denso, entonces la correspondiente sucesión de soluciones aproximantes converge

a la solución exacta. Esto constituye un aporte significativo en lo que respecta a la aproximación de las soluciones de ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase.

En las Secciones 3.4 y 3.5 se presentan los métodos de regularización mediante filtros y métodos espectrales, respectivamente, y las relaciones entre los mismos. También se muestra como los métodos clásicos (tales como Tikhonov-Phillips, TSVD, etc.) quedan subsumidos bajo esta teoría general.

En el Capítulo 4 se introduce la teoría más moderna de los métodos de molificación y, en particular, se analiza en detalle el “método de la inversa aproximada” y su relación con los métodos de filtro. Aquí se prueba que para el caso de operadores compactos, todo método de filtro constituye una inversa aproximada con un cierto molificador definido en términos del filtro (Teor. 4.6). Como consecuencia de este resultado se tiene que los clásicos métodos de Tikhonov-Phillips y TSVD son también inversas aproximadas en el caso compacto, no obstante no es claro que características tienen estos molificadores particulares. Recíprocamente, se prueba que, si el molificador “factoriza”, entonces el método de la inversa aproximada es también un método de filtro (Teor. 4.7). En la Sección 4.3 se presenta el método de Backus-Gilbert (comúnmente utilizado en problemas de Geología) y se prueba que éste es un caso particular del método de la inversa aproximada. En la Sección 4.4 aplicamos el método de la inversa aproximada para resolver un problema de difusión inverso severamente mal condicionado: la ecuación lateral del calor o “sideways heat equation”. Para este problema se da una demostración sencilla de que el operador asociado al problema adjunto es efectivamente el operador adjunto (Teor. 4.14). En este caso particular se prueba la convergencia para ciertos molificadores de decaimiento rápido, que incluyen a los molificadores Gaussianos (Teor. 4.15 y Corolario 4.16). Todos estos constituyen aportes nuevos y significativos a los temas de estudio.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan varios resultados numéricos en los cuales se utiliza el método de la inversa aproximada con molificadores Gaussianos para reconstruir el flujo en la ecuación lateral de calor unidimensional. En ellos se reconstruyen diferentes flujos y se muestra la robustez del método ante la presencia de ruidos en los datos. También los resultados de esta sección son muy significativos pues ponen de manifiesto la importancia que tienen las herramientas matemáticas previamente analizadas y desarrolladas, en el análisis de problemas concretos.

Para facilitar la lectura, al final de la tesis se ha incluido además un apéndice que contiene la mayoría de los resultados del Análisis Funcional usados a lo largo de este trabajo.

En las siguientes dos secciones presentamos algunos ejemplos típicos de problemas inversos.

1.1. La diferenciación como un problema inverso

Evidentemente la diferenciación y la integración son problemas matemáticos inversos el uno del otro. En principio no es claro cuál de ellos debe considerarse el problema directo y cuál el problema inverso. Sin embargo, como veremos, es la diferenciación la que tiene las propiedades de un problema mal condicionado mientras que la integración es un problema bien condicionado. Es por ello que la diferenciación puede considerarse como el problema inverso a pesar de haber sido estudiada primero que la integración.

Sean $f \in C^1[0, 1]$ una función arbitraria, $\delta \in (0, 1)$, y definamos la función

$$f^\delta(x) \doteq f(x) + \delta \sin\left(\frac{x}{\delta^2}\right), \quad x \in [0, 1]. \quad (1.1.1)$$

Obviamente $f^\delta \in C^1[0, 1]$ y

$$(f^\delta)'(x) = f'(x) + \frac{1}{\delta} \cos\left(\frac{x}{\delta^2}\right), \quad x \in [0, 1]. \quad (1.1.2)$$

En consecuencia, con la norma infinito $\|f\|_\infty \doteq \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, tenemos que $\|f - f^\delta\|_\infty = \delta$ y $\|f' - (f^\delta)'\|_\infty = \frac{1}{\delta}$.

Por lo tanto, si consideramos a f y f^δ como los datos exacto y perturbado respectivamente, y queremos estimar f' vemos que para un error δ en el dato arbitrariamente pequeño, el error en el resultado (es decir, en la derivada) puede ser arbitrariamente grande, $\frac{1}{\delta}$. Así, la derivada no depende continuamente del dato con respecto a la norma infinito.

Se podría forzar continuidad cambiando la topología. Por ejemplo, se podría medir el error en el dato con la norma de $C^1[0, 1]$, esto es, $\|f\|_{C^1} \doteq \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. Pero esto sería "hacer trampa" pues entonces diríamos que un error en el dato es pequeño si es pequeña la diferencia entre los valores de f y f^δ y de sus respectivas derivadas, pero es justamente f' lo que se desea calcular o aproximar. Además, se corre el riesgo que los datos perturbados no estén en el nuevo espacio.

Es importante poder considerar datos perturbados porque en situaciones reales se trata con datos determinados experimentalmente los cuales casi siempre contienen errores de medición.

Dado que los problemas inversos pueden formularse a través de ecuaciones con operadores, observar que si definimos el operador $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ como

$$(Th)(x) \doteq \int_0^x h(t)dt, \quad x \in [0, 1], \quad h \in C[0, 1],$$

entonces, si $f \in C^1[0, 1]$, f' es solución de la ecuación integral

$$(Th)(x) = f(x) - f(0).$$

En este caso, el correspondiente problema directo consiste en calcular f a partir de h , esto es, integrar una función continua sobre el intervalo $[0, 1]$ lo cual es un proceso estable en $C[0, 1]$. Notar que la integración es un proceso que suaviza, es decir, los errores en el dato altamente oscilatorios (por ejemplo, de la forma $\frac{1}{\delta} \cos\left(\frac{x}{\delta^2}\right)$ como en (1.1.2)) se amortiguan y por lo tanto tienen un efecto pequeño sobre el dato para el problema inverso. Tal suavidad es consecuencia del hecho que los errores de amplitud pequeña pero alta frecuencia (por ejemplo, de la forma $\delta \sin\left(\frac{x}{\delta^2}\right)$ como en (1.1.1)) generan grandes oscilaciones en la solución del problema inverso. Estas consideraciones no se limitan a este particular problema. En general, si un problema directo tiene propiedades de suavidad, se debe esperar que en la solución del problema inverso surjan grandes oscilaciones provenientes de pequeñas perturbaciones en el dato. Este efecto es más pronunciado cuanto más fuerte es la suavidad del problema directo.

Los problemas de estabilidad deben aparecer cuando aproximamos la derivada, por ejemplo, por diferencias centrales. En efecto, sean f la función que queremos diferenciar y f^δ una perturbación con $\|f - f^\delta\|_\infty \leq \delta$. Supongamos que $f \in C^2[0, 1]$. Entonces, de la correspondiente serie de Taylor obtenemos:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(s_1), \quad x < s_1 < x+h,$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(s_2), \quad x-h < s_2 < x,$$

de donde

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h}{4} (f''(s_1) - f''(s_2))$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| &= \frac{h}{4} |f''(s_1) - f''(s_2)| \\ &\leq \frac{h}{4} (|f''(s_1)| + |f''(s_2)|) \\ &\leq \frac{h}{2} \|f''\|_\infty \quad (f \in C^2([0, 1])). \end{aligned}$$

Luego,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| = O(h). \quad (1.1.3)$$

Análogamente se prueba que, si $f \in C^3[0, 1]$ entonces

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| = O(h^2). \quad (1.1.4)$$

Así, la aproximación de la derivada por diferencias centrales, en el caso de ausencia de perturbaciones, tiene la propiedad que $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \rightarrow f'(x)$ cuando $h \rightarrow 0$ y la velocidad de convergencia es $O(h)$ u $O(h^2)$ según $f \in C^2[0, 1]$ o $f \in C^3[0, 1]$ respectivamente, esto es, depende de la suavidad del dato exacto.

Pero si en lugar de f tenemos f^δ , entonces lo que efectivamente estamos calculando es $\frac{f^\delta(x+h)-f^\delta(x-h)}{2h}$. Como $\|f - f^\delta\|_\infty \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - f^\delta(x)| \leq \delta, \forall x \in [0, 1]$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} |(f(x+h) - f(x-h)) - (f^\delta(x+h) - f^\delta(x-h))| = \\ |(f(x+h) - f^\delta(x+h)) - (f(x-h) - f^\delta(x-h))| \leq 2\delta. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Así,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^\delta(x+h) - f^\delta(x-h)}{2h} - f'(x) \right| &= \left| \frac{f^\delta(x+h) - f^\delta(x-h)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2h} |(f^\delta(x+h) - f^\delta(x-h)) \\ &\quad - (f(x+h) - f(x-h))| + \\ &\quad \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2h} 2\delta + O(h^\nu) \text{ (de (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5)).} \end{aligned}$$

Luego, $\left| \frac{f^\delta(x+h)-f^\delta(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \leq O(h^\nu) + \frac{\delta}{h}$ donde $\nu = 1$ si $f \in C^2[0, 1]$ y $\nu = 2$ si $f \in C^3[0, 1]$.

Vemos entonces que el error total se comporta como $O(h^\nu) + \frac{\delta}{h}$, lo cual indica la importancia de la elección de h para minimizar tal error pues, cuando h es pequeño ($h \rightarrow 0$) la propagación del error en el dato $\frac{\delta}{h}$ crece ($\frac{\delta}{h} \rightarrow \infty$) y si h es grande el error de aproximación $O(h^\nu)$ también es grande. La Figura 1.1 muestra el comportamiento del error total

$$E_T(h) \doteq \left\| \frac{f^\delta(\cdot+h) - f^\delta(\cdot-h)}{2h} - f' \right\|_\infty = O(h^\nu) + \frac{\delta}{h}$$

para un nivel de ruido δ fijo. El parámetro h se denomina parámetro de discretización.

Existe un parámetro de discretización óptimo h_0 (minimiza el error) el cual en general no puede calcularse explícitamente pues depende de información sobre el dato exacto como, por ejemplo, su suavidad la cual a menudo no se conoce. Sin embargo, es posible estimar el comportamiento asintótico de h_0 cuando h se elige como una potencia del nivel de ruido δ , esto es, $h \sim \delta^\mu$. El error total tiene entonces la forma $E_T(h) = O(\delta^{\mu\nu}) + \delta^{1-\mu}$ y se minimiza tomando $\mu\nu = 1 - \mu$, o sea, $\mu = \frac{1}{1+\nu}$. Así, con $\mu = \frac{1}{2}$ (para $\nu = 1$) o, $\mu = \frac{1}{3}$ (para $\nu = 2$) minimizamos el error total el cual es $O(\sqrt{\delta})$ o, $O(\delta^{2/3})$ para $f \in C^2[0, 1]$ ó $f \in C^3[0, 1]$, respectivamente.

Podemos plantearnos si no se puede mejorar esta estimación del error imponiendo condiciones de suavidad más severas para f , por ejemplo $f \in C^n[0, 1]$ para $n > 3$. Si

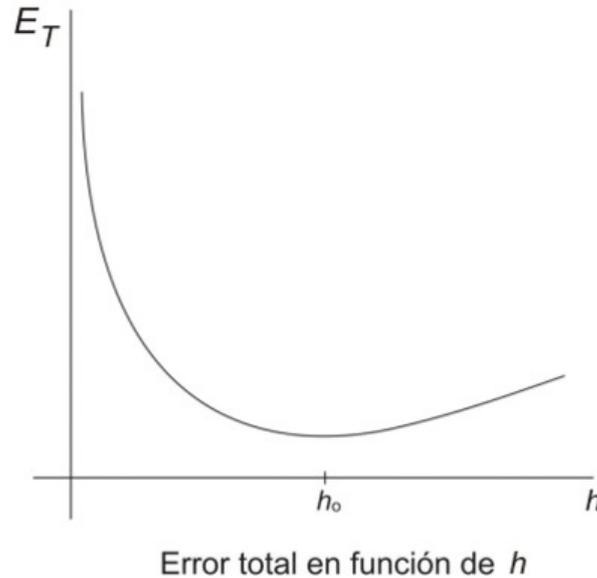


Figura 1.1: Gráfico del error total como función del parámetro de discretización.

suponemos por ejemplo que $f \in C^4[0, 1]$ tenemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \frac{h^3}{2 \cdot 4!} (f''''(s_1) - f''''(s_2)),$$

con $x < s_1 < x+h$ y $x-h < s_2 < x$, de donde

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \leq \frac{h^2}{3!} \|f''''\|_\infty + \frac{h^3}{4!} \|f''''\|_\infty$$

y por lo tanto

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \neq O(h^3).$$

Esto es, el error $O(h^2)$ no puede mejorarse. En consecuencia, aún en el mejor caso posible y, para una elección óptima de h , sólo obtenemos un orden de convergencia $O(\delta^{2/3})$, donde δ denota el nivel de error en el dato, esto es, hay una pérdida intrínseca de información. Si μ no se elige en forma óptima, o sea, si el parámetro de discretización h y el nivel de ruido no están relacionados apropiadamente, esta pérdida de información será más severa.

Esto muestra que el proceso de diferenciación es tal que, pequeños errores en la función dato pueden producir grandes errores en la función derivada, independientemente de cuán suave sea la función perturbada.

Con este ejemplo hemos mostrado algunas características típicas de los problemas mal condicionados:

- * Amplificación de errores en las altas frecuencias.
- * Restauración de la estabilidad usando información a-priori.
- * Error total formado por dos términos de naturaleza diferente: el error de aproximación y el error debido a la propagación del ruido en los datos.
- * Existencia de un parámetro de discretización óptimo cuya elección depende de información a-priori sobre la solución exacta del problema.
- * Pérdida de información aún bajo condiciones óptimas sobre la elección del parámetro de discretización.

1.2. Problemas inversos en conducción de Calor

En conducción de calor, el problema clásico es el problema directo de calcular la evolución de la temperatura de un cuerpo cuando se conocen: los parámetros térmicos, la temperatura inicial y la temperatura o el flujo de calor en toda la frontera. Este es un problema bien condicionado. Sin embargo, en muchas situaciones de transferencia de calor dinámicas es necesario estimar la temperatura o el flujo de calor en la frontera a partir de mediciones de la temperatura en el interior del sólido o, conocer estados pasados de la distribución de temperatura del cuerpo. Estos son problemas inversos en conducción de calor (IHCP). Entre ellos citamos:

- ▶ El problema de determinar la temperatura inicial a partir de mediciones posteriores, lo cual se denomina matemáticamente la *ecuación del calor hacia atrás* (*backward heat equation* - BHE).
- ▶ El problema de determinar los parámetros térmicos del material a partir de mediciones de la temperatura.
- ▶ El problema de determinar la temperatura en una parte inaccesible de la frontera a partir de mediciones del flujo de calor y de la temperatura en otras partes de la frontera, lo cual se denomina matemáticamente la *ecuación del calor lateral* (*sideways heat equation* - SHE).

A los efectos de ilustrar las dificultades matemáticas que surgen, analicemos este último problema en el caso unidimensional. Matemáticamente podemos describir el problema como sigue: determinar

$$f(t) \doteq u(1, t) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \quad (1.2.1)$$

sabiendo que $u(x, t)$ satisface

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2.2)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2.3)$$

(datos en la frontera izquierda) y

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2.4)$$

(frontera izquierda aislada).

Suponiendo que $u(x, \cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ para todo $x \in [0, 1]$ podemos tratar este problema usando transformada de Fourier (en t), esto es:

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} u(x, t) dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Aplicando transformada de Fourier a ambos miembros de (1.2.2) obtenemos

$$\hat{u}_{xx}(x, \omega) = \hat{u}_t(x, \omega), \quad 0 < x < 1, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

o equivalentemente,

$$\hat{u}_{xx}(x, \omega) = i\omega \hat{u}(x, \omega), \quad 0 < x < 1, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$\hat{u}(x, \omega) = A(\omega) e^{\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}(1+i\sigma)x} + B(\omega) e^{-\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}(1+i\sigma)x}, \quad (1.2.5)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y $\sigma = \text{sgn}(\omega)$. De las condiciones de borde (1.2.3) y (1.2.4) tenemos que $\hat{u}(0, \omega) = \hat{g}(\omega)$ y $\hat{u}_x(0, \omega) = 0$, lo cual llevado a (1.2.5) produce la solución particular

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, \omega) &= \frac{\hat{g}(\omega)}{2} \left(e^{\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}(1+i\sigma)x} + e^{-\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}(1+i\sigma)x} \right) \\ &= \hat{g}(\omega) \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1+i\sigma)x \right). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

De (1.2.1), $\hat{u}(1, \omega) = \hat{f}(\omega)$, con lo cual obtenemos de (1.2.6) la siguiente igualdad

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1+i\sigma) \right), \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.2.7)$$

De este modo, la solución formal al problema planteado está dada por la transformada inversa de Fourier de f , esto es:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{g}(\omega) \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right) d\omega \quad (\text{de (1.2.7)}).$$

Analizando esta última expresión vemos que tiene sentido (esto es, la integral impropia converge) sólo si el lado derecho de (1.2.7) es una función de $L_2(\mathbb{R})$. Analicemos ésto:

$$\begin{aligned} \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right) &= \cosh \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \cosh \left(i\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sigma \right) + \sinh \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sinh \left(i\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sigma \right) \\ &= \cosh \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \cos \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sigma \right) + i \sinh \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sin \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sigma \right). \end{aligned}$$

En consecuencia, como $\sigma = \pm 1$

$$\begin{aligned} \left| \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right) \right|^2 &= \cosh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \cos^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} + \sinh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sin^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \\ &= \cosh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} - \cosh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sin^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \\ &\quad + \sinh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \sin^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \\ &= \cosh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} - \sin^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}}, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

donde usamos que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ y $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$. Así,

$$\left| \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right) \right|^2 = \cosh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} - \sin^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} \infty.$$

En consecuencia para que $\hat{g}(\omega) \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right) \in L_2(\mathbb{R})$, \hat{g} debe decaer rápidamente a cero cuando $|\omega| \rightarrow \infty$, esto es, g debe ser muy suave. Dado que en el problema inverso g es el dato, el que en problemas concretos proviene de mediciones, no es de esperar que g tenga ninguna suavidad. Pero aún si g fuese suave, errores arbitrariamente pequeños pueden llevar a errores arbitrariamente grandes en el resultado f . En efecto, si llamamos g^δ a la perturbación de g y es tal que $\|g - g^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta$ (en consecuencia $\|\hat{g} - \hat{g}^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta$) y llamamos f^δ a la correspondiente solución obtenida con g^δ , de (1.2.7) tenemos que

$$\hat{f}^\delta(\omega) = \hat{g}^\delta(\omega) \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right), \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.2.9)$$

Por ejemplo, si elegimos a g^δ modificada en frecuencia como

$$\hat{g}^\delta(\omega) = \begin{cases} \hat{g}(\omega), & \omega \notin [\omega_0, \omega_0 + 1], \\ \hat{g}(\omega) + \delta, & \omega \in [\omega_0, \omega_0 + 1], \end{cases} \quad (1.2.10)$$

con $\omega_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, es claro que $\|g - g^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\hat{g} - \hat{g}^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta$. Para el correspondiente error en el resultado tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f - f^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \|\hat{f} - \hat{f}^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{Identidad de Parseval}) \\
&= \left\| (\hat{g} - \hat{g}^\delta) \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{de (1.2.7) y (1.2.9)}) \\
&= \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} \delta^2 \left| \cosh \left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} (1 + i\sigma) \right) \right|^2 d\omega \quad (\text{de (1.2.10)}) \\
&= \delta^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} \left(\cosh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} - \sin^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \right) d\omega \quad (\text{de (1.2.8)}) \\
&\geq \delta^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} \left(\cosh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} - 1 \right) d\omega \quad (0 \leq \sin^2 \theta \leq 1) \\
&= \delta^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} \sinh^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} d\omega.
\end{aligned}$$

Para $\omega_0 > 0$, de la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f - f^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &\geq \delta^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} \sinh^2 \sqrt{\frac{\omega}{2}} d\omega \\
&\geq \delta^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0+1} \sinh^2 \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} d\omega \quad (\sinh \theta \text{ función creciente}) \\
&= \delta^2 \sinh^2 \sqrt{\frac{\omega_0}{2}},
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\|f - f^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})} \geq \delta \sinh \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}.$$

En particular, para $\omega_0 \geq \frac{(\ln 2)^2}{2}$ tenemos que

$$\|f - f^\delta\|_{L_2(\mathbb{R})} \geq \frac{\delta}{4} e^{\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}},$$

de modo que el error δ en el dato se amplifica esencialmente en el resultado por el factor $e^{\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}}$. Este problema es altamente mal condicionado. Observar que el factor de amplificación del error crece exponencialmente con la frecuencia en la que está localizado el error en el dato.

De los análisis precedentes podemos ver que el mal condicionamiento es consecuencia directa de las propiedades de suavidad del operador que describe el problema directo. Esto provoca la amplificación de las componentes de errores de alta frecuencia en los datos del problema inverso.

Capítulo 2

Ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales

En este capítulo presentamos algunas herramientas matemáticas con las cuales se analizan y resuelven las ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales, esto es, aquellas para las cuales no se satisface alguno de los postulados de Hadamard de buen condicionamiento presentados en el capítulo anterior.

La violación del postulado P1 en general no es preocupante pues en la mayoría de los casos se puede forzar existencia relajando de algún modo el concepto de solución. Un poco más seria es la violación del segundo postulado (P2); si un problema tiene varias soluciones, se debe decidir cuál de ellas es la correcta o la de interés. Para ello se debe reevaluar la completitud y la relevancia de las hipótesis tenidas en cuenta en la formulación del problema incorporando mayor información si fuese necesario. En el caso de problemas inversos la unicidad es relevante sólo cuando lo que se busca es la causa para un efecto observado. Si en cambio lo que se busca es la causa para un efecto deseado, el hecho de no tener unicidad hasta puede ser ventajoso pues entonces se puede elegir aquella solución que satisfaga ciertos criterios adicionales. Definitivamente, el problema más serio lo constituye la violación del tercer postulado (P3); si se desea aproximar por métodos numéricos tradicionales la solución de un problema que no depende de manera continua de los datos, entonces es de esperar que tales métodos resulten inestables y, por lo tanto, inapropiados.

En un contexto general, un problema inverso puede formularse de la siguiente manera: determinar x en la ecuación

$$Tx = y \tag{2.0.1}$$

donde T es un operador lineal y acotado entre los espacios de Hilbert X e Y , $D(T) = X$ e $y \in Y$ es el dato. Entonces el postulado P1 es equivalente a $R(T) = Y$, el postulado

P2 es equivalente a $N(T) = \{0\}$ y, si se verifican P1 y P2, el postulado P3 es equivalente a la acotación de T^{-1} .

En general resulta muy restrictivo suponer que $R(T) = Y$. Se necesita un concepto más amplio de solución. Esta generalización la provee la inversa generalizada de Moore-Penrose.

2.1. Soluciones de cuadrados mínimos y la inversa generalizada de Moore-Penrose

Aunque muchos de los resultados que se dan a continuación siguen siendo válidos en espacios normados y aún en espacios métricos, por simplicidad nos restringiremos al caso en que X e Y son espacios de Hilbert.

Si un problema es mal condicionado porque no existe solución exacta, es muy probable que nos conformemos con soluciones que sean aproximadas en algún sentido.

Definición 2.1. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado.

i) Diremos que $x_{cm} \in X$ es una **solución de cuadrados mínimos** de $Tx = y$ si

$$\|Tx_{cm} - y\|_Y = \inf_{x \in X} \{\|Tx - y\|_Y\}, \quad (2.1.1)$$

o sea, si Tx_{cm} es el elemento en el rango de T más cercano a y .

ii) Diremos que $x^\dagger \in X$ es una **mejor solución aproximada** de $Tx = y$ si x^\dagger es una solución de cuadrados mínimos y

$$\|x^\dagger\|_X = \inf \{\|x_{cm}\|_X : x_{cm} \text{ es solución de cuadrados mínimos de } Tx = y\} \quad (2.1.2)$$

Observación 2.2.

- 1) Si x es solución de cuadrados mínimos de $Tx = y$, entonces $x + \tilde{x}$ también lo será para todo $\tilde{x} \in N(T)$.
- 2) No siempre existen soluciones de cuadrados mínimos (ver Proposición 2.9).
- 3) Si existe una mejor solución aproximada entonces esta es única (ver Proposición 2.9).
- 4) Si (2.0.1) tiene una única solución exacta, entonces coincide con x^\dagger .

Volvamos ahora a nuestra ecuación original (2.0.1), donde $T \in L(X, Y)$ no necesariamente es inyectivo, o sea, es posible que $N(T) \neq \{0\}$. Definimos

$$\tilde{T} \doteq T|_{N(T)^\perp}: N(T)^\perp \rightarrow Y.$$

Entonces claramente \tilde{T} es inyectivo y $R(\tilde{T}) = R(T)$. Por lo tanto es posible definir el operador inverso \tilde{T}^{-1}

$$\tilde{T}^{-1}: R(T) \rightarrow X, \quad (2.1.3)$$

con $D(\tilde{T}^{-1}) = R(T)$ y $R(\tilde{T}^{-1}) = D(\tilde{T}) = N(T)^\perp$.

Observar que $N(T)$ es un subespacio cerrado de X por ser T un operador lineal y acotado y por lo tanto $X = N(T) \oplus N(T)^\perp$. A su vez $R(T)$ es un subespacio de Y el cual puede o no ser cerrado, en consecuencia $R(T) \oplus R(T)^\perp \subseteq Y$.

Definición 2.3. Sea $T \in L(X, Y)$. La *inversa generalizada de Moore-Penrose* de T , denotada por T^\dagger , se define como la única extensión lineal del operador \tilde{T}^{-1} (definido en (2.1.3)) al subespacio

$$D(T^\dagger) = R(T) \oplus R(T)^\perp \quad (2.1.4)$$

de modo que

$$N(T^\dagger) = R(T)^\perp. \quad (2.1.5)$$

¿Cómo se define esta extensión?. Para todo $y \in D(T^\dagger)$ existen únicos $y_1 \in R(T)$, $y_2 \in R(T)^\perp$ tales que $y = y_1 + y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} T^\dagger y &= T^\dagger (y_1 + y_2) \\ &= T^\dagger y_1 + T^\dagger y_2 \quad (T^\dagger \text{ es lineal}) \\ &= T^\dagger y_1 \quad (\text{de (2.1.5) pues } y_2 \in R(T)^\perp) \\ &= \tilde{T}^{-1} y_1 \quad (y_1 \in R(T) \text{ y } T^\dagger|_{R(T)} = \tilde{T}^{-1}). \end{aligned}$$

Luego,

$$T^\dagger y = \tilde{T}^{-1} y_1. \quad (2.1.6)$$

El operador T^\dagger está bien definido pues la representación de $y \in D(T^\dagger)$ es única y existe \tilde{T}^{-1} . Por lo tanto, T^\dagger así definido, es la única extensión lineal de \tilde{T}^{-1} que satisface (2.1.4) y (2.1.5).

Observar que si existe T^{-1} entonces $T^\dagger|_{R(T)} = T^{-1}$.

En las siguientes proposiciones probaremos importantes propiedades del operador T^\dagger que lo caracterizan.

Proposición 2.4. Sean $T \in L(X, Y)$, T^\dagger su inversa generalizada. Entonces

$$R(T^\dagger) = N(T)^\perp.$$

Además $\overline{D(T^\dagger)} = Y$, esto es, T^\dagger es un operador densamente definido.

DEMOSTRACION. Sea $y \in D(T^\dagger)$. De (2.1.6) $T^\dagger y = \tilde{T}^{-1}y_1 \in R(\tilde{T}^{-1}) = N(T)^\perp$. Luego,

$$R(T^\dagger) \subset N(T)^\perp. \quad (2.1.7)$$

Por otro lado, sea $x \in N(T)^\perp$. Entonces

$$\begin{aligned} T^\dagger T x &= \tilde{T}^{-1} T x && (T^\dagger|_{R(T)} = \tilde{T}^{-1}) \\ &= \tilde{T}^{-1} \tilde{T} x && (x \in N(T)^\perp \text{ y } \tilde{T} = T|_{N(T)^\perp}) \\ &= x, \end{aligned}$$

de donde se infiere que $x \in R(T^\dagger)$. Luego,

$$N(T)^\perp \subset R(T^\dagger). \quad (2.1.8)$$

De (2.1.7) y (2.1.8) concluimos que $R(T^\dagger) = N(T)^\perp$.

Probemos ahora que $\overline{D(T^\dagger)} = Y$. Obviamente $\overline{D(T^\dagger)} \subset Y$. Resta ver la otra inclusión. Como $R(T)$ es un subespacio de Y , $\overline{R(T)}$ es un subespacio cerrado de Y y en consecuencia $Y = \overline{R(T)} \oplus R(T)^\perp$. Así, si $y \in Y$ existen únicos $y_1 \in \overline{R(T)}$, $y_2 \in R(T)^\perp$ tales que $y = y_1 + y_2$. A su vez, puesto que $y_1 \in \overline{R(T)}$ existe una sucesión $\{y_n^1\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(T)$ tal que $y_n^1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $y_n \doteq y_n^1 + y_2$. Entonces $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T^\dagger)$ y $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_1 + y_2 = y$. Luego, dado $y \in Y$ existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T^\dagger)$ tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, por lo tanto $y \in \overline{D(T^\dagger)}$. Como $y \in Y$ es arbitrario concluimos que $Y \subset \overline{D(T^\dagger)}$. ■

Proposición 2.5. Sean $T \in L(X, Y)$, T^\dagger su inversa generalizada, P la proyección ortogonal de X sobre $N(T)$ y Q la proyección ortogonal de Y sobre $\overline{R(T)}$. Entonces se satisfacen las siguientes igualdades llamadas **ecuaciones de Moore-Penrose**:

$$T^\dagger T = I - P \quad (2.1.9)$$

$$T T^\dagger = Q|_{D(T^\dagger)} \quad (2.1.10)$$

$$T T^\dagger T = T \quad (2.1.11)$$

$$T^\dagger T T^\dagger = T^\dagger \quad (2.1.12)$$

DEMOSTRACION.

► Demostremos (2.1.10). Sea $y \in D(T^\dagger)$, entonces $y = y_1 + y_2$ con $y_1 \in R(T)$, $y_2 \in R(T)^\perp$ y

$$\begin{aligned} T^\dagger y &= \tilde{T}^{-1} y_1 && (\text{de (2.1.6)}) \\ &= \tilde{T}^{-1} Q y_1 && (y_1 \in R(T)) \\ &= \tilde{T}^{-1} Q y && (y_2 \in R(T)^\perp = N(Q)). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} TT^\dagger y &= T\tilde{T}^{-1}Qy \\ &= \tilde{T}\tilde{T}^{-1}Qy \quad (\tilde{T}^{-1}Qy \in N(T)^\perp \text{ y } T|_{N(T)^\perp} = \tilde{T}) \\ &= Qy. \end{aligned}$$

Luego, para todo $y \in D(T^\dagger)$ se tiene que $TT^\dagger y = Qy$, o sea

$$Q|_{D(T^\dagger)} = TT^\dagger.$$

Esto prueba (2.1.10). Observar además que $Qy = y_1 \in R(T)$ y $T^\dagger|_{R(T)} = \tilde{T}^{-1}$, en consecuencia, de (2.1.13) se tiene que

$$T^\dagger y = \tilde{T}^{-1}Qy = T^\dagger Qy. \quad (2.1.14)$$

► Demostremos (2.1.9). Dado que P es la proyección ortogonal de X sobre $N(T)$, entonces $(I - P)$ es la proyección ortogonal de X sobre $N(T)^\perp$. Entonces para todo $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} T^\dagger Tx &= \tilde{T}^{-1}Tx \quad (Tx \in R(T) \text{ y } T^\dagger|_{R(T)} = \tilde{T}^{-1}) \\ &= \tilde{T}^{-1}T[Px + (I - P)x] \\ &= \tilde{T}^{-1}TPx + \tilde{T}^{-1}T(I - P)x \\ &= \tilde{T}^{-1}T(I - P)x \quad (Px \in N(T)) \\ &= \tilde{T}^{-1}\tilde{T}(I - P)x \quad ((I - P)x \in N(T)^\perp \text{ y } T|_{N(T)^\perp} = \tilde{T}) \\ &= (I - P)x. \end{aligned}$$

Luego, $T^\dagger Tx = (I - P)x$ para todo $x \in X$. Esto es

$$T^\dagger T = I - P.$$

► Demostremos ahora (2.1.11). Como $T^\dagger T = I - P$, tenemos que

$$TT^\dagger T = T(I - P) = T - TP = T \quad (R(P) = N(T)).$$

► Demostremos finalmente (2.1.12). Sea $y \in D(T^\dagger)$. De (2.1.10) tenemos que $TT^\dagger y = Qy$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} T^\dagger TT^\dagger y &= T^\dagger Qy \\ &= T^\dagger y \quad (\text{de (2.1.14)}). \end{aligned}$$

Luego, $T^\dagger TT^\dagger y = T^\dagger y$ para todo $y \in D(T^\dagger)$. Esto es,

$$T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger.$$

■

De la demostración se desprende que (2.1.11) y (2.1.12) se deducen de (2.1.9) y (2.1.10). Por otro lado, es posible probar que las ecuaciones de Moore-Penrose caracterizan unívocamente a la inversa generalizada, esto es, el único operador que satisface las cuatro ecuaciones (2.1.9)-(2.1.12) es el dado en la Definición 2.3.

Proposición 2.6. Sean $T \in L(X, Y)$, T^\dagger su inversa generalizada. Entonces, T^\dagger es cerrado.

DEMOSTRACION. Probemos que el grafo de T^\dagger es un subespacio cerrado de $Y \times X$. Por definición de T^\dagger su grafo tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 G(T^\dagger) &= \{(y, T^\dagger y) : y \in D(T^\dagger)\} \\
 &= \left\{ \left(y_1 + y_2, \tilde{T}^{-1} y_1 \right) : y_1 \in R(T), y_2 \in R(T)^\perp \right\} \quad (\text{de (2.1.4) y (2.1.6)}) \\
 &= \left\{ \left(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1 \right) + (y_2, 0) : y_1 \in R(T), y_2 \in R(T)^\perp \right\} \\
 &= \left\{ \left(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1 \right) : y_1 \in R(T) \right\} + \left\{ (y_2, 0) : y_2 \in R(T)^\perp \right\} \\
 &= \left\{ \left(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1 \right) : y_1 \in R(T) \right\} + (R(T)^\perp \times \{0\}) \\
 &= S_1 + S_2
 \end{aligned}$$

con

$$S_1 = \left\{ \left(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1 \right) : y_1 \in R(T) \right\} \quad (2.1.15)$$

y

$$S_2 = R(T)^\perp \times \{0\}. \quad (2.1.16)$$

Definimos ahora $S_3 \doteq \{(Tx, x) : x \in X\} \cap (Y \times N(T)^\perp)$. Probemos que $S_1 = S_3$ con S_1 definido por (2.1.15). Sea $(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1) \in S_1$. Sea $x = \tilde{T}^{-1} y_1$. Entonces $x \in R(\tilde{T}^{-1}) = N(T)^\perp$ y además

$$\begin{aligned}
 Tx &= T\tilde{T}^{-1} y_1 \\
 &= TT^\dagger y_1 \quad (y_1 \in R(T) \text{ y } \tilde{T}^{-1} = T^\dagger|_{R(T)}) \\
 &= Qy_1 \quad (\text{por (2.1.10)}) \\
 &= y_1 \quad (y_1 \in R(T) \text{ y } Q \text{ proy. ortog. sobre } \overline{R(T)}).
 \end{aligned}$$

Así, $(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1) = (Tx, x) \in Y \times N(T)^\perp$. Luego $S_1 \subset S_3$. Por otro lado, sea $x \in N(T)^\perp$ y sea $y_1 = Tx$. Entonces $y_1 \in R(T)$ y además

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}^{-1} y_1 &= T^\dagger y_1 \quad (y_1 \in R(T) \text{ y } \tilde{T}^{-1} = T^\dagger|_{R(T)}) \\
 &= T^\dagger Tx \\
 &= (I - P)x \quad (\text{por (2.1.9)}) \\
 &= x \quad (x \in N(T)^\perp \text{ y } (I - P) \text{ proy. ortog. sobre } N(T)^\perp).
 \end{aligned}$$

En consecuencia, $(Tx, x) = (y_1, \tilde{T}^{-1}y_1) \in S_1$. Luego $S_3 \subset S_1$. De este modo $S_1 = S_3$.

El operador T es cerrado pues por hipótesis es acotado, por lo tanto $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$. En consecuencia $\{(Tx, x) : x \in X\}$ es un subespacio cerrado de $Y \times X$. Además, $Y \times N(T)^\perp$ es un subespacio cerrado de $Y \times X$ pues $N(T)^\perp$ es un subespacio cerrado de X . Así, $S_1 (= S_3)$ es un subespacio cerrado de $Y \times X$ por ser intersección de subespacios cerrados. Por otro lado, S_2 definido por (2.1.16) también es un subespacio cerrado de $Y \times X$ pues $R(T)^\perp$ y $\{0\}$ son subespacios cerrados de Y y X respectivamente. Resta ver que S_1 y S_2 son ortogonales en $Y \times X$. Sean $x \in N(T)^\perp$ y $y \in R(T)^\perp$, entonces

$$\langle (Tx, x), (y, 0) \rangle_{Y \times X} = \langle Tx, y \rangle_Y + \langle x, 0 \rangle_X = 0$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $Tx \in R(T)$ e $y \in R(T)^\perp$. Luego $S_1 \perp S_2$.

Tenemos que: S_1 y S_2 son subespacios cerrados ortogonales de $Y \times X$, entonces $S_1 + S_2 = G(T^\dagger)$ es un subespacio cerrado de $Y \times X$ (ver Teorema A.15) y en consecuencia T^\dagger es cerrado. ■

La importante caracterización de T^\dagger dada por la proposición anterior es útil para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.7. Sean $T \in L(X, Y)$, T^\dagger su inversa generalizada. Entonces, T^\dagger es acotado (o equivalentemente, continuo) si y sólo si $R(T)$ es cerrado.

DEMOSTRACION.

(\Leftarrow) Supongamos que $R(T)$ es cerrado. Entonces $Y = R(T) \oplus R(T)^\perp$ y por lo tanto $D(T^\dagger) = Y$. Tenemos así que $T^\dagger : Y \rightarrow X$ es un operador lineal, cerrado (por Proposición 2.6) con $D(T^\dagger) = Y$, en consecuencia T^\dagger es acotado por el Teorema del Grafo Cerrado (ver Teorema A.42).

(\Rightarrow) Supongamos ahora que T^\dagger es acotado. Para probar que $R(T)$ es cerrado basta ver que $\overline{R(T)} \subset R(T)$. Por hipótesis $T^\dagger : D(T^\dagger) \subset Y \rightarrow X$ es un operador acotado, entonces, por el Teorema de Extensión (ver Teorema A.21) existe una única extensión acotada de T^\dagger , llamémosle \tilde{T}^\dagger , tal que $D(\tilde{T}^\dagger) = \overline{D(T^\dagger)}$. De la Proposición 2.4 tenemos entonces que $D(\tilde{T}^\dagger) = \overline{D(T^\dagger)} = Y$. Sea $y \in Y = \overline{D(T^\dagger)} = D(\tilde{T}^\dagger)$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T^\dagger)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ y además $\tilde{T}^\dagger y = \lim_{n \rightarrow \infty} T^\dagger y_n$ ($\tilde{T}^\dagger|_{D(T^\dagger)} = T^\dagger$). Así,

$$\begin{aligned} T\tilde{T}^\dagger y &= T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^\dagger y_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (TT^\dagger y_n) \quad (T \text{ es continuo}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Qy_n) \quad (\text{de (2.1.10) pues } y_n \in D(T^\dagger)) \\ &= Q \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \quad (Q \text{ es continuo}) \end{aligned}$$

$$= Qy.$$

Luego, para todo $y \in Y$ tenemos que $T\tilde{T}^\dagger y = Qy$. Por lo tanto,

$$T\tilde{T}^\dagger = Q. \quad (2.1.17)$$

Para $y \in \overline{R(T)}$ tenemos que

$$\begin{aligned} y &= Qy && (Q \text{ proy. ortog. sobre } \overline{R(T)}) \\ &= T\tilde{T}^\dagger y && (\text{de (2.1.17)}), \end{aligned}$$

en consecuencia $y \in R(T)$. Como $y \in \overline{R(T)}$ es arbitrario concluimos que $\overline{R(T)} \subset R(T)$. ■

Mencionamos anteriormente que una ecuación del tipo $Tx = y$ no siempre posee soluciones de cuadrados mínimos. La siguiente proposición arroja luz sobre esta afirmación.

Proposición 2.8. *Si la ecuación $Tx = y$ admite soluciones de cuadrados mínimos, entonces $y \in D(T^\dagger)$.*

DEMOSTRACION. (Por reducción al absurdo)

Supongamos que $y \notin D(T^\dagger)$ y que existe x_{cm} solución de cuadrados mínimos de $Tx = y$. Entonces $y \in Y \setminus D(T^\dagger)$. Como $Y = \overline{R(T)} \oplus R(T)^\perp$ de (2.1.4) podemos inferir que

$$y = y_1 + y_2, \quad \text{con } y_1 \in \overline{R(T)} \setminus R(T), \quad y_2 \in R(T)^\perp. \quad (2.1.18)$$

Por hipótesis x_{cm} es solución de cuadrados mínimos de $Tx = y$ y por lo tanto,

$$\|Tx_{cm} - y\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 \quad \forall x \in X,$$

de donde, por ortogonalidad y de (2.1.18) tenemos que

$$\|Tx_{cm} - y_1\|^2 + \|y_2\|^2 \leq \|Tx - y_1\|^2 + \|y_2\|^2 \quad \forall x \in X,$$

o sea,

$$\|Tx_{cm} - y_1\| \leq \|Tx - y_1\| \quad \forall x \in X. \quad (2.1.19)$$

Como $y_1 \in \overline{R(T)} \setminus R(T)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$. De (2.1.19) tenemos entonces que

$$0 \leq \|Tx_{cm} - y_1\| \leq \|Tx_n - y_1\| \quad \forall n,$$

de donde

$$0 \leq \|Tx_{cm} - y_1\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - y_1\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n - y_1 \right\| && \text{(por la continuidad de la norma)} \\ &= 0 && (y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n). \end{aligned}$$

Esto implica que $\|Tx_{cm} - y_1\| = 0$ o equivalentemente, $Tx_{cm} = y_1$ lo cual es absurdo pues por hipótesis $y_1 \notin R(T)$. Luego, si $y \notin D(T^\dagger)$ no existen soluciones de cuadrados mínimos de $Tx = y$. ■

Entonces para que la ecuación $Tx = y$ posea soluciones de cuadrados mínimos es necesario que $y \in D(T^\dagger)$. Sucede que esta condición es además suficiente. En el siguiente teorema se demuestra esta afirmación y se relacionan las soluciones de cuadrados mínimos y la mejor solución aproximada con la inversa generalizada de Moore-Penrose.

Teorema 2.9. *Sea la ecuación $Tx = y$. Si $y \in D(T^\dagger)$ entonces existe una única mejor solución aproximada dada por*

$$x^\dagger = T^\dagger y.$$

Además, el conjunto de todas las soluciones de cuadrados mínimos es $\{x^\dagger\} + N(T)$.

DEMOSTRACION. Probemos primero la existencia de soluciones de cuadrados mínimos. Sea $y \in D(T^\dagger)$ arbitrario pero fijo y definamos el conjunto

$$S \doteq \{z \in X : Tz = Qy\},$$

donde, como antes, Q es la proyección ortogonal de Y sobre $\overline{R(T)}$. Como $y \in D(T^\dagger)$, $y = y_1 + y_2$ con $y_1 \in R(T)$ e $y_2 \in R(T)^\perp$ de modo que $Qy = y_1 \in R(T)$. Entonces existe $\tilde{z} \in X$ tal que $Qy = T\tilde{z}$ y en consecuencia $\tilde{z} \in S$. Luego $S \neq \emptyset$. Por otro lado, para todo $z \in S$ y para todo $x \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tz - y\| &= \|Qy - y\| \\ &\leq \|Tx - y\| \quad (Q \text{ proy. ortog. sobre } \overline{R(T)}). \end{aligned}$$

Variando $x \in X$ con z fijo en la desigualdad anterior obtenemos que

$$\|Tz - y\| = \inf_{x \in X} \{\|Tx - y\|\}$$

y en consecuencia, de (2.1.1), concluimos que z es solución de cuadrados mínimos de $Tx = y$. Denotando con S_c al conjunto de las soluciones de cuadrados mínimos, acabamos de probar entonces que $S \subset S_c$. Probemos ahora que $S_c \subset S$. Sea $z \in S_c$. Entonces

$$\begin{aligned} \|Qy - y\| &\leq \|Tz - y\| && (Q \text{ proy. ortog. sobre } \overline{R(T)}) \\ &= \inf_{x \in X} \{\|Tx - y\|\} && (z \in S_c) \\ &= \inf_{u \in R(T)} \{\|u - y\|\} \end{aligned}$$

$$= \|Qy - y\|$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que Qy es el elemento en $R(T)$ con menor distancia a y . Luego $\|Tz - y\| = \|Qy - y\|$ de donde se sigue que Tz es el elemento en $R(T)$ más cercano a y , por lo tanto $Tz = Qy$. En consecuencia $z \in S$ y $S_c \subset S$.

Hemos probado así que si $y \in D(T^\dagger)$ entonces $\emptyset \neq S = S_c$. Esto es, existen soluciones de cuadrados mínimos de $Tx = y$ siempre que $y \in D(T^\dagger)$.

Observar que $S = \{z \in X : Tz = Qy\} = T^{-1}(Qy)$. Por lo tanto S es un conjunto cerrado por ser preimagen de un conjunto cerrado (unitario) por una función continua. Además S es un conjunto convexo pues si $z_1, z_2 \in S$ y $0 \leq a \leq 1$

$$\begin{aligned} T(az_1 + (1-a)z_2) &= aTz_1 + Tz_2 - aTz_2 \\ &= aQy + Qy - aQy \quad (z_1, z_2 \in S) \\ &= Qy, \end{aligned}$$

de donde $az_1 + (1-a)z_2 \in S$.

Resumiendo, tenemos entonces: X espacio de Hilbert, $S \subset X$ conjunto no vacío cerrado y convexo. Entonces, para $0 \in X$ existe un único $\bar{z} \in S$ tal que $\|\bar{z}\| = \inf_{z \in S} \{\|z\|\}$ (ver Teorema A.12). Por lo tanto, de (2.1.2), concluimos que \bar{z} es la mejor solución aproximada de $Tx = y$. Además, como $\bar{z} \in S \subset X = N(T) \oplus N(T)^\perp$, existen únicos $\bar{z}_1 \in N(T)$ y $\bar{z}_2 \in N(T)^\perp$ tales que $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Observar que $T\bar{z} = T\bar{z}_2$, de modo que $\bar{z}_2 \in S$. Si $\bar{z}_1 \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \|\bar{z}\|^2 &= \|\bar{z}_1\|^2 + \|\bar{z}_2\|^2 \quad (\text{por ortogonalidad}) \\ &> \|\bar{z}_2\|^2 \quad (\|\bar{z}_1\| \neq 0), \end{aligned}$$

lo cual es un absurdo pues $\bar{z}_2 \in S$ y \bar{z} es el elemento en S de mínima norma. Luego $\bar{z}_1 = 0$ y en consecuencia $\bar{z} = \bar{z}_2 \in N(T)^\perp$.

Probemos ahora que $S = \{\bar{z}\} + N(T)$. Sea $x \in S$,

$$\left. \begin{array}{l} x = \bar{z} + (x - \bar{z}) \\ y \\ (x - \bar{z}) \in N(T) \text{ pues } x, \bar{z} \in S \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \{\bar{z}\} + N(T).$$

Luego, $S \subset \{\bar{z}\} + N(T)$. Recíprocamente, sea $x \in \{\bar{z}\} + N(T)$. Entonces $x = \bar{z} + w$ con $w \in N(T)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} Tx &= T\bar{z} + Tw \\ &= T\bar{z} \quad (w \in N(T)) \\ &= Qy \quad (\bar{z} \in S) \end{aligned}$$

lo cual implica que $x \in S$. Luego, $\{\bar{z}\} + N(T) \subset S$.

Nos resta sólo probar que $\bar{z} = T^\dagger y$. Para esto, notar que

$$\begin{aligned}\bar{z} &= (I - P)\bar{z} \quad (\bar{z} \in N(T)^\perp) \\ &= T^\dagger T\bar{z} \quad (\text{de (2.1.9)}) \\ &= T^\dagger Qy \quad (\bar{z} \in S) \\ &= T^\dagger T T^\dagger y \quad (\text{de (2.1.10) pues } y \in D(T^\dagger)) \\ &= T^\dagger y \quad (\text{de (2.1.12)}).\end{aligned}$$

A tal $\bar{z} = T^\dagger y$ la (única) mejor solución aproximada de $Tx = y$, la denotaremos de ahora en más con x^\dagger . ■

Observación 2.10. De la Proposición 2.7 y del Teorema 2.9 se deduce que si T^\dagger es acotado (o equivalentemente, si $R(T)$ es cerrado), entonces **para todo** $y \in Y$ existe una única mejor solución aproximada de $Tx = y$ dada por $x^\dagger = T^\dagger y$. Esto es siempre cierto si Y es de dimensión finita.

Hasta aquí sabemos que dada la ecuación $Tx = y$, si $y \in D(T^\dagger)$ existen soluciones de cuadrados mínimos (y una única mejor solución aproximada). A continuación enunciamos y probamos un teorema que caracteriza a tales soluciones vía la **ecuación normal asociada** a $Tx = y$.

Teorema 2.11. *Sea $y \in D(T^\dagger)$. Entonces $x_{cm} \in X$ es una solución de cuadrados mínimos de $Tx = y$ si y sólo si x_{cm} satisface la ecuación normal*

$$T^*Tz = T^*y.$$

DEMOSTRACION. Notar que $x_{cm} \in X$ es solución de cuadrados mínimos de $Tx = y$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \|Tx_{cm} - y\| &= \inf_{x \in X} \{\|Tx - y\|\} \quad (\text{de (2.1.1)}) \\ \Leftrightarrow \|Tx_{cm} - y\| &= \inf_{u \in R(T)} \{\|u - y\|\} = \inf_{u \in R(T)} \{\|u - y\|\} \\ \Leftrightarrow Tx_{cm} - y &\in R(T)^\perp \quad (\text{ver Teorema A.13}) \\ \Leftrightarrow Tx_{cm} - y &\in N(T^*) \quad (R(T)^\perp = N(T^*)) \\ \Leftrightarrow T^*(Tx_{cm} - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow T^*Tx_{cm} &= T^*y.\end{aligned}$$

De este teorema se sigue entonces que $x^\dagger = T^\dagger y$ es la solución de mínima norma de la ecuación $T^*Tz = T^*y$ y en consecuencia $T^\dagger y = (T^*T)^\dagger T^*y$, o sea

$$T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*. \quad (2.1.20)$$

Este hecho explica también porque en la búsqueda de soluciones de cuadrados mínimos, el operador T^*T tiene un rol importante. ■

Observación 2.12. En la práctica, cuando se dice que una ecuación de la forma $Tx = y$ es "**mal condicionada**", por lo general se implica con ello la violación del tercer postulado de Hadamard y casi nunca la violación del primero o del segundo. Esto es así pues, como vimos, la existencia de soluciones puede lograrse casi siempre relajando el concepto de solución (e.g. soluciones débiles, soluciones de cuadrados mínimos, etc.) y, en tal caso la unicidad resulta frecuentemente al imponer condiciones adicionales a la solución (e.g. que sea de norma mínima). Por esta razón, en el resto de este trabajo, $Tx = y$ "**mal condicionada**" significará siempre T^\dagger "**no acotado**".

2.2. Operadores compactos

Muchos problemas inversos que surgen en aplicaciones concretas involucran operadores compactos. Por ejemplo, el operador integral de Fredholm de primera clase $T : L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$ definido por

$$(Tx)(t) \doteq \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad (2.2.1)$$

es compacto siempre que el núcleo $k(t, s) \in L_2((a, b) \times (a, b))$ o que $k(t, s)$ sea debilmente singular en $[a, b] \times [a, b]$ (ver Teorema A.45 y Definición A.22).

En lo que sigue, en lugar de la letra T para el operador utilizaremos la letra K a los efectos de enfatizar el hecho que suponemos que el mismo es compacto.

Proposición 2.13. Sean X, Y espacios de Hilbert, $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Entonces $\dim R(K) < \infty$ si y sólo si $R(K)$ es cerrado.

DEMOSTRACION. (\Rightarrow) Es obvio.

(\Leftarrow) Por hipótesis Y es un espacio de Hilbert y $R(K)$ es un subespacio cerrado de Y , entonces $R(K)$ es un espacio de Hilbert en si mismo.

El operador $K|_{N(K)^\perp} : N(K)^\perp \rightarrow R(K)$ es lineal, continuo y biyectivo, por lo tanto existe $(K|_{N(K)^\perp})^{-1}$ el cual es lineal y continuo (ver Teorema A.41). De este modo, $K(K|_{N(K)^\perp})^{-1} = I|_{R(K)}$ es compacto por ser la composición de un compacto con un acotado (ver Teorema A.44-d)) y en consecuencia, $\dim R(K) < \infty$ (ver Teorema A.44-f)). ■

El siguiente resultado prueba que los problemas de la forma $Kx = y$ con K compacto son "casi siempre" mal condicionados.

Teorema 2.14. Sean X, Y espacios de Hilbert de dimensión infinita, $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto con $\dim R(K) = \infty$. Entonces, la ecuación $Kx = y$ es mal condicionada.

DEMOSTRACION. Como $\dim R(K) = \infty$, de la Proposición 2.13 se sigue que $R(K)$ no es cerrado y en consecuencia, K^\dagger no es acotado (Proposición 2.7) y el problema $Kx = y$ es mal condicionado. ■

Observar que si $\dim R(K) < \infty$, como $\dim Y = \infty$ se tiene que $R(K) \subsetneq Y$ y en consecuencia, estrictamente hablando, la ecuación sigue siendo mal condicionada, esta vez por violación del postulado de existencia. De aquí la importancia de estudiar los problemas inversos asociados a operadores compactos.

Para el tratamiento de operadores compactos resulta conveniente introducir el concepto de *descomposición espectral*.

Si $K : X \rightarrow X$ es compacto y autoadjunto existe un autosistema $(\lambda_n; v_n)$ consistente en todos los autovalores no nulos, λ_n , y los correspondientes autovectores, v_n , de K . Estos autovectores forman un sistema ortonormal completo en $\overline{R(K)} = N(K)^\perp$ (ver Teorema A.49). Entonces, para todo $x \in X$ se tiene que

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n, \quad (2.2.2)$$

donde $x_0 \in N(K)$ es la proyección de x sobre $N(K)$. Además

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n. \quad (2.2.3)$$

Esto se conoce como la representación espectral, expansión en autofunciones o diagonalización del operador K . Esta expresión permite resolver ecuaciones de la forma $Kx = y$ y aún ecuaciones de la forma $Kx = \lambda x + y$ en forma sencilla, tal como lo demuestran los siguientes dos resultados.

► Sea $K : X \rightarrow X$ un operador compacto y autoadjunto. La ecuación $Kx = y$ admite solución si y sólo si $y \in N(K)^\perp$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |\langle y, v_n \rangle|^2 < \infty$.

DEMOSTRACION. Sea $y \in X$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in N(K)^\perp \\ y \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} |\langle y, v_n \rangle|^2 < \infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, v_n \rangle v_n \quad (\text{por (2.2.2)}) \\ y \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle y, v_n \rangle v_n \text{ converge (ver Teor. A.17-a)} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle y, v_n \rangle v_n \in X \text{ tal que } Kx = y.$$

Dicha solución es única si y sólo si $N(K) = \{0\}$. (Ver por ejemplo [8])

► Sea $K : X \rightarrow X$ un operador compacto y autoadjunto. Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq \lambda_n \forall n \in \mathbb{N}$ entonces, para todo $y \in X$ existe un único $x \in X$ tal que $(K - \lambda I)x = y$.

DEMOSTRACION. Sea $y \in X$. De (2.2.2)

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, v_n \rangle v_n \quad (2.2.4)$$

con $y_0 \in N(K)$. Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, v_n \rangle v_n$ converge y en consecuencia, por la ortogonalidad de los $\{v_n\}$, se tiene que

$$\{\langle y, v_n \rangle\} \in \ell_2 \quad (2.2.5)$$

(ver Teorema A.17).

Ya que $\lambda \neq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} = 1$ de donde, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} - 1 \right| = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right| < \sqrt{\varepsilon} \quad \forall n \geq N$. Así,

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right|^2 |\langle y, v_n \rangle|^2 < \varepsilon |\langle y, v_n \rangle|^2 \quad \forall n \geq N$$

y en consecuencia, de (2.2.5) se sigue que $\left\{ \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle y, v_n \rangle \right\} \in \ell_2$. Luego, por la ortogonalidad de los $\{v_n\}$, podemos definir

$$z \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle y, v_n \rangle v_n \quad (2.2.6)$$

(ver Teorema A.17-a)). Sea ahora

$$x \doteq -\frac{1}{\lambda}(y + z), \quad (2.2.7)$$

esto es

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\lambda} \left[y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, v_n \rangle v_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle y, v_n \rangle v_n \right] \quad (\text{de (2.2.4) y (2.2.6)}) \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} \langle y, v_n \rangle v_n \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (K - \lambda I)x &= -\frac{1}{\lambda} \left[Ky_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} \langle y, v_n \rangle Kv_n - \lambda y_0 - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} \langle y, v_n \rangle v_n \right] \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \lambda_n - \lambda^2}{\lambda - \lambda_n} \langle y, v_n \rangle v_n - \lambda y_0 \right] \quad (y_0 \in N(K)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, v_n \rangle v_n - y_0 \right] \\
&= y
\end{aligned}$$

por lo tanto, x definido por (2.2.7) satisface la ecuación $(K - \lambda I)x = y$. Además, como por hipótesis $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq \lambda_n \forall n \in \mathbb{N}$, se sigue que $N(K - \lambda I) = \{0\}$ y en consecuencia la solución es única. ■

Si $K : X \rightarrow Y$ es compacto consideramos el correspondiente sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$ (ver Teorema A.53), donde $(\sigma_n^2; v_n)$ y $(\sigma_n^2; u_n)$ son los autosistemas de los operadores compactos y autoadjuntos K^*K y KK^* respectivamente, esto es,

$$\begin{aligned}
K^*Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n, \quad \forall x \in X, \\
KK^*y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle y, u_n \rangle u_n, \quad \forall y \in Y.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Los σ_n se denominan *valores singulares* de K y los consideramos ordenados en forma decreciente $0 \leq \sigma_{n+1} \leq \sigma_n \forall n$ con su multiplicidad (ver Definición A.52). Claramente, $\dim R(K) < \infty$ si y sólo si K tiene un número finito de valores singulares. Además, en el caso de infinitos valores singulares se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ (ver Definición A.52).

Por ejemplo, si en el operador integral definido por (2.2.1) el núcleo k *es degenerado*, esto es, si tiene la forma

$$k(t, s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \psi_i(s), \quad t, s \in [a, b]$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi_i, \psi_i \in L_2(a, b)$, entonces $\dim R(K) < \infty$ pues

$$\begin{aligned}
(Kx)(t) &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \psi_i(s) \right) x(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \left(\int_a^b \psi_i(s) x(s) ds \right) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \quad \left(c_i \doteq \int_a^b \psi_i(s) x(s) ds \right).
\end{aligned}$$

En consecuencia K tiene un número finito de valores singulares. Así, si el núcleo de K *no es degenerado* existen infinitos valores singulares.

Para referencia posterior observar que

$$\langle Kx, y \rangle_{L_2(a,b)} = \int_a^b (Kx)(t) \overline{y(t)} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(\int_a^b k(t,s)x(s)ds \right) \overline{y(t)} dt \quad (\text{por (2.2.1)}) \\
&= \int_a^b x(s) \left(\int_a^b k(t,s) \overline{y(t)} dt \right) ds \\
&= \int_a^b x(s) \overline{\left(\int_a^b k(t,s) y(t) dt \right)} ds \\
&= \langle x, \tilde{K}y \rangle_{L_2(a,b)} \tag{2.2.9}
\end{aligned}$$

donde $(\tilde{K}y)(t) \doteq \int_a^b \tilde{k}(t,s)y(s)ds$ con $\tilde{k}(t,s) = \overline{k(s,t)}$. Luego, si $k(t,s)$ es real y simétrico, el operador K definido por (2.2.1) es autoadjunto.

En el siguiente resultado caracterizamos al dominio de la inversa generalizada de Moore-Penrose de un operador compacto K con la ayuda del sistema singular asociado y obtenemos una descomposición espectral para la misma.

Teorema 2.15. Sean X, Y espacios de Hilbert, $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto, $(\sigma_n; v_n, u_n)$ el sistema singular asociado a K . Entonces:

i) $y \in D(K^\dagger)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle y, u_n \rangle|^2 < \infty$;

ii) para todo $y \in D(K^\dagger)$ se tiene que

$$K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n. \tag{2.2.10}$$

DEMOSTRACION. i) Sean $y \in D(K^\dagger)$ y Q la proyección ortogonal de Y sobre $\overline{R(K)}$. Entonces $Qy \in R(K)$ pues $KK^\dagger y = Qy$. Por lo tanto, existe $x \in X$ tal que

$$Qy = Kx. \tag{2.2.11}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in N(K)^\perp$ y en consecuencia

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n \tag{2.2.12}$$

pues los $\{v_n\}$ expanden a $\overline{R(K^*)} = N(K)^\perp$. A su vez, como Q proyecta sobre $\overline{R(K)}$ y los $\{u_n\}$ expanden a $\overline{R(K)}$, se tiene que

$$Q(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, u_n \rangle u_n. \tag{2.2.13}$$

Así,

$$Qy = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n$$

$$\begin{aligned}
&= K \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n \right) \quad (\text{por (2.2.11) y (2.2.12)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle K v_n \quad (K \text{ es lineal y continuo}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n,
\end{aligned}$$

de donde, por la ortogonalidad de $\{u_n\}$, se sigue que

$$\langle y, u_n \rangle = \sigma_n \langle x, v_n \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.14)$$

Como la sucesión de los coeficientes de Fourier $\{\langle x, v_n \rangle\} \in \ell_2$, de (2.2.14) se tiene que $\left\{ \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle \right\} \in \ell_2$ y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle y, u_n \rangle|^2 < \infty$.

Recíprocamente, sea $y \in Y$ y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle y, u_n \rangle|^2 < \infty$. Entonces, por el Teorema de Riesz-Fischer (Teorema A.17) se tiene que

$$x \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n \in X$$

por ser $\{v_n\}$ un sistema ortonormal. En consecuencia

$$\begin{aligned}
Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle K v_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n \\
&= Qy \quad (\text{por (2.2.13)}),
\end{aligned}$$

de donde $Qy \in R(K)$. Luego $y = Qy + (I - Q)y \in R(K) \oplus R(K)^\perp$ (pues $(I - Q)$ proyecta sobre $R(K)^\perp$). Por lo tanto $y \in D(K^\dagger)$.

ii) Sea $y \in D(K^\dagger)$. De lo desarrollado en la demostración de i) tenemos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n \in N(K)^\perp \quad \text{y} \quad Kx = Qy. \quad (2.2.15)$$

Por otro lado, del Teorema 2.9 sabemos que el conjunto de las soluciones de cuadrados mínimos tiene la forma $S = \{z \in X : Kz = Qy\} = \{x^\dagger\} + N(K)$, y por lo tanto, de (2.2.15) concluimos que $x \in S$. Tenemos que,

$$\left. \begin{array}{l} x \in S \\ y \\ x \in N(K)^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow x = x^\dagger = K^\dagger y. \quad \blacksquare$$

Notar que en la demostración anterior hemos considerado sólo el caso de infinitos valores singulares pues en el otro caso el resultado es inmediato.

La condición i) del Teorema 2.15 para la existencia de la mejor solución aproximada se denomina **Criterio de Picard**. Esta condición establece que dicha solución para la ecuación $Kx = y$ existe si y sólo si los coeficientes generalizados de Fourier $\{ \langle y, u_n \rangle \}$ de y respecto a las funciones singulares u_n decaen más rápidamente a cero que los valores singulares σ_n (recordemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$) de manera tal que la correspondiente sucesión de cocientes esté en ℓ_2 . Sobre la condición ii) podemos hacer un análisis de estabilidad. La expresión (2.2.10) muestra que errores en el dato y influyen sobre la mejor solución aproximada, $K^\dagger y$, del siguiente modo: las componentes del error (respecto a la base $\{u_n\}$) asociadas a valores singulares grandes no afectan demasiado, pero las correspondientes a valores singulares pequeños se amplifican por los factores $\frac{1}{\sigma_n}$, los cuales crecen indefinidamente siendo, en consecuencia, peligrosos. Aún en el caso que $\dim R(K) < \infty$, es decir que haya sólo un número finito de valores singulares, estos factores de amplificación podrían ser inaceptablemente grandes (a pesar de estar acotados).

La inestabilidad a la que hacemos referencia es claramente más severa cuanto más rápido decrecen a cero los valores singulares de K . Esto hace posible cuantificar el **grado de mal condicionamiento** de la ecuación $Kx = y$:

a) si $\sigma_n = O(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se dice que el problema es **débilmente mal condicionado**;

b) en otro caso, por ejemplo si $\sigma_n = O(e^{-n})$, se dice que el problema es **severamente mal condicionado**.

En el caso b) el factor de amplificación del error en el dato correspondiente a la n -ésima componente, $\langle y, u_n \rangle$, es del orden de e^n por lo cual, desde un punto de vista práctico, no se puede permitir más que unos pocos grados de libertad en el dato, esto es, uno debe asegurarse que el dato sólo contenga información sobre las primeras componentes de Fourier (componentes de baja frecuencia) y filtrar todas las componentes restantes.

Ejemplo 2.16. (La ecuación del calor hacia atrás - BHE)

Consideremos la ecuación del calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \quad (2.2.16)$$

con condiciones de borde homogéneas

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.2.17)$$

y con un perfil de temperatura final dado (en $T = 1$)

$$u(x, 1) = f(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (2.2.18)$$

donde $f(0) = f(\pi) = 0$.

Se desea determinar el perfil de temperatura inicial

$$g(x) \doteq u(x, 0), \quad x \in [0, \pi]. \quad (2.2.19)$$

Consideremos las funciones $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, las que, como sabemos, son autofunciones del operador $\frac{d^2}{dx^2}$ en $[0, \pi]$ con condiciones de borde homogéneas y sus autovalores son $\lambda_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Es bien sabido que el sistema $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal y completo en $L_2(0, \pi)$ y en consecuencia

$$h(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h(\cdot), X_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} X_n(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(\cdot), \quad \forall h \in L_2(0, \pi) \quad (2.2.20)$$

donde $c_n = \langle h(\cdot), X_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)}$.

Suponemos que el problema (directo) (2.2.16), (2.2.17), (2.2.19) posee solución de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n(x), \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0. \quad (2.2.21)$$

Queremos determinar las funciones a_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Procedemos formalmente, suponiendo convergencia uniforme de las series involucradas. Así, de (2.2.21) tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) X_n(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(t) X_n(x).$$

Haciendo cumplir (2.2.16) obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) X_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(t) X_n(x)$ o equivalentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n(t) + n^2 a_n(t)) X_n(x) = 0$. Como $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal, la igualdad anterior implica que $a'_n(t) + n^2 a_n(t) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Por otro lado, de (2.2.21) se tiene que $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) X_n(x)$. De (2.2.19) y (2.2.20) se sigue que $u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)$ donde $c_n = \langle g(\cdot), X_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)}$. En consecuencia, $a_n(0) = c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos así que, para cada n , la función a_n debe ser solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} a'_n(t) + n^2 a_n(t) = 0, & t > 0 \\ a_n(0) = c_n \end{cases}$$

de donde se deduce que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$ $t \geq 0$.

Volviendo a (2.2.21) obtenemos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g(\cdot), X_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} e^{-n^2 t} X_n(x). \quad (2.2.22)$$

Así,

$$\begin{aligned}
f(x) &= u(x, 1) \quad (\text{de (2.2.18)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle g(\cdot), X_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} e^{-n^2} X_n(x) \quad (\text{de (2.2.22)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} g(s) X_n(s) ds \right) e^{-n^2} X_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} g(s) \sin(ns) ds \right) e^{-n^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} g(s) \sin(ns) ds \right) e^{-n^2} \sin(nx) \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(ns) \cdot \sin(nx) \right) g(s) ds.
\end{aligned}$$

Denotando con $k(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(ns) \cdot \sin(nx)$, obtenemos:

$$f(x) = \int_0^{\pi} k(x, s) g(s) ds. \quad (2.2.23)$$

Luego, definiendo el operador $K : L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$ como

$$(Kh)(\cdot) \doteq \int_0^{\pi} k(\cdot, s) h(s) ds,$$

la ecuación (2.2.23) puede expresarse de la siguiente forma:

$$(Kg)(\cdot) = f(\cdot). \quad (2.2.24)$$

Por lo tanto, nuestro problema inverso original es equivalente a resolver la ecuación integral de primera clase (2.2.24).

Notar que el operador K es compacto pues $k(x, s) \in L_2((0, \pi) \times (0, \pi))$. Además, es autoadjunto ya que $k(x, s)$ es real y simétrico (ver lo observado en (2.2.9)). Como K es compacto y autoadjunto, en su correspondiente sistema singular se tiene que $v_n = u_n$ y $\sigma_n = \lambda_n$. Ya que

$$Kh = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \langle h(\cdot), X_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} X_n$$

y los X_n son ortonormales en $L_2(0, \pi)$, entonces esta es precisamente la expansión en autofunciones de K (comparar con (2.2.3)) y por lo tanto $\sigma_n = \lambda_n = e^{-n^2}$, $v_n = X_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, el sistema singular para el operador integral de la ecuación (2.2.24) está dado por $\left(e^{-n^2}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Observar que este operador es no

degenerado puesto que su núcleo no es suma finita de productos de funciones de $L_2(0, \pi)$ y en consecuencia, tal como lo observamos anteriormente, tiene un número infinito de valores singulares σ_n tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.

En este caso el problema inverso definido por (2.2.24) es severamente mal condicionado. De los Teoremas 2.15 y 2.9 tenemos que este problema admite soluciones de cuadrados mínimos si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2} \left| \langle f(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} \right|^2 < \infty, \quad (2.2.25)$$

en cuyo caso la solución de cuadrados mínimos de mínima norma (esto es, la mejor solución aproximada) está dada por

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} \langle f(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} u_n(x) \quad (\text{de (2.2.10)}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} \langle f(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} \sin nx \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

donde $\langle f(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(s) \sin(ns) ds$.

En (2.2.25) y (2.2.26) vemos cuan severamente mal condicionado es este problema: sólo existe solución si los coeficientes de Fourier de la función dato f , $\langle f(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0, \pi)}$, decaen muy rápido (mucho más rápido que e^{-n^2}), condición que es satisfecha solo por funciones muy suaves. Pero además, y más importante aún, vemos que un pequeño error en el n -ésimo coeficiente de Fourier del dato resulta amplificado por el factor e^{n^2} en la solución del problema inverso. Así por ejemplo, un error del orden de 10^{-8} en el quinto coeficiente de Fourier de f (lo que podría pensarse más que adecuado en la mayoría de las aplicaciones y mediciones en la práctica), origina un error del orden de 10^3 ($e^{5^2} \times 10^{-8} \approx 720$) en (el quinto coeficiente de Fourier de) el problema inverso lo cual es inaceptable desde todo punto de vista.

2.3. Introducción al cálculo funcional: función de un operador autoadjunto

En esta sección daremos la definición y algunas propiedades de una función de un operador autoadjunto. El estudio de funciones de operadores se denomina **cálculo funcional**. Desarrollamos este tema en virtud de que el mismo es sumamente necesario para la construcción y el análisis de métodos de regularización para problemas inversos mal condicionados.

Por otro lado, dado que no es un objetivo central de esta tesis realizar un análisis exhaustivo del cálculo funcional, en esta sección procederemos en algunos casos obviando demostraciones, evitando demasiados detalles, aunque manteniendo rigor matemático. No obstante, en la mayoría de los casos se proveen las referencias pertinentes en las que pueden encontrarse mayores detalles. Para un análisis profundo de este tema referirse al libro de Dautray y Lions [8].

Definición 2.17. Una *familia espectral* sobre un espacio de Hilbert X , es una función

$$\begin{aligned} E &: \mathbb{R} \rightarrow L(X) \\ \lambda &\rightarrow E_\lambda \end{aligned}$$

que posee las siguientes propiedades:

- a) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ es una proyección ortogonal.
- b) $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\min\{\lambda_1, \lambda_2\}}$ (monotonía).
- c) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_{\lambda^-} = E_\lambda$ donde $E_{\lambda^-} x \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\lambda - \varepsilon} x$, $\forall x \in X$ (continuidad por izquierda).
- d) $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = I$ donde $E_{\pm\infty} x \doteq \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} E_\lambda x$, $\forall x \in X$.

Utilizaremos $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ o simplemente $\{E_\lambda\}$ para denotar a una familia espectral.

Sea $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto y $(\sigma_n; v_n, u_n)$ el correspondiente sistema singular. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in X$ definimos:

$$E_\lambda x \doteq \begin{cases} \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n, & \lambda \leq 0, \\ \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n + Px, & \lambda > 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

siendo P la proyección ortogonal de X sobre $N(K) = N(K^*K) = R(K^*K)^\perp$.

Observar que para λ fijo

$$E_\lambda v_n = \begin{cases} v_n & \sigma_n^2 < \lambda \\ 0 & \sigma_n^2 \geq \lambda \end{cases}.$$

Teorema 2.18. La familia $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ definida por (2.3.1) es una familia espectral. La llamaremos *familia espectral asociada al operador K^*K* .

DEMOSTRACION.

► Probaremos en primer lugar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ es una proyección ortogonal. Es claro que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ es lineal por la linealidad tanto del producto interno como de la proyección P . Si $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
E_\lambda^2 x &= E_\lambda(E_\lambda x) \\
&= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \langle E_\lambda x, v_n \rangle v_n + P(E_\lambda x) \quad (\text{por (2.3.1)}) \\
&= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \left\langle \sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda} \langle x, v_m \rangle v_m + Px, v_n \right\rangle v_n + P \left(\sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda} \langle x, v_m \rangle v_m + Px \right) \\
&= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \left(\sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda} \langle x, v_m \rangle \langle v_m, v_n \rangle \right) v_n + \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \langle Px, v_n \rangle v_n + \\
&\quad \sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda} \langle x, v_m \rangle Pv_m + P^2 x \\
&= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n + \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \langle Px, v_n \rangle v_n + \\
&\quad \sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda} \langle x, v_m \rangle Pv_m + P^2 x \quad (\{v_n\} \text{ es ortonormal}) \\
&= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n + P^2 x \quad (*) \\
&= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n + Px \quad (P \text{ es proyección}) \\
&= E_\lambda x.
\end{aligned}$$

(*) Notar que $\langle Px, v_n \rangle = 0$ y $Pv_n = 0 \forall x \in X$ y $\forall n$ pues P proyecta sobre $N(K) = R(K^*K)^\perp$ y $v_n \in R(K^*K)$. Luego, $E_\lambda^2 = E_\lambda$.

Suprimiendo los términos que contienen a P se obtiene la demostración para el caso $\lambda \leq 0$. Así, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $E_\lambda^2 = E_\lambda$.

Por otro lado, observar que

$$R(E_\lambda) = \overline{\text{span}\{v_n : n \in \mathbb{N}, \sigma_n^2 < \lambda\}} \quad (+N(K^*K) \text{ si } \lambda > 0)$$

es un subespacio cerrado. Luego, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que E_λ es un operador lineal idempotente con $R(E_\lambda) = N(E_\lambda)^\perp$. En consecuencia, E_λ es una proyección ortogonal (ver Teorema A.34-c)). Por lo tanto, E_λ cumple la condición a) de la Definición 2.17.

► Por definición de autosistema sabemos que $\sigma_n^2 \geq 0 \forall n$. Por lo tanto, para $\lambda \leq 0$ se cumple que $\sigma_n^2 > \lambda \forall n$. Luego, $E_\lambda = 0$ para todo $\lambda \leq 0$, lo cual implica trivialmente que $E_{-\infty} = 0$.

Por otro lado, si $\lambda > \sigma_1^2 > 0$ entonces $\lambda > \sigma_n^2 \forall n$ pues la sucesión $\{\sigma_n^2\}$ es decreciente. En este caso, para todo $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} E_\lambda x &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n + Px \quad (\text{de (2.3.1)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n + Px \quad (\sigma_n^2 < \lambda \forall n) \\ &= x \quad (**). \end{aligned}$$

(**) Notar que los v_n expanden $N(K^*K)^\perp$, P es proyección sobre $N(K^*K)$ y $X = N(K^*K)^\perp \oplus N(K^*K)$. En consecuencia, $\forall \lambda > \sigma_1^2$ se tiene que $R(E_\lambda) = X$ y $E_\lambda = I$. Luego $E_{+\infty} = I$. Por lo tanto E_λ cumple con la condición d) de la Definición 2.17.

► Monotonía. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 < \lambda_2$. Probaremos que $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}$. Supongamos que $0 < \lambda_1$ (los restantes casos se prueban análogamente). Para todo $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} (E_{\lambda_1} E_{\lambda_2}) x &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda_1} \langle E_{\lambda_2} x, v_n \rangle v_n + P(E_{\lambda_2} x) \quad (\text{por (2.3.1)}) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda_1} \left\langle \sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda_2} \langle x, v_m \rangle v_m + Px, v_n \right\rangle v_n + \\ &\quad P \left(\sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda_2} \langle x, v_m \rangle v_m + Px \right) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda_1} \langle x, v_n \rangle v_n + \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda_1} \langle Px, v_n \rangle v_n + \\ &\quad \sum_{m:\sigma_m^2 < \lambda_2} \langle x, v_m \rangle P v_m + P^2 x \quad (\{v_n\} \text{ es ortonormal}) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda_1} \langle x, v_n \rangle v_n + Px \quad ((*) \text{ y } P \text{ es proyección}) \\ &= E_{\lambda_1} x. \end{aligned}$$

Luego, $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}$. Como por hipótesis $\lambda_1 < \lambda_2$, tenemos que

$$E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\min\{\lambda_1, \lambda_2\}}.$$

Se cumple así la condición b) de la Definición 2.17.

► Continuidad por izquierda. Esta propiedad es una consecuencia inmediata del hecho que en la definición (2.3.1) de E_λ la suma se toma sobre todos los valores de n para los cuales σ_n^2 es menor “estricto” que λ . En efecto, si $\lambda^* \leq 0$ o $\lambda^* > \sigma_1^2$ entonces

la continuidad por izquierda en λ^* es trivial puesto que $E_\lambda = 0$ para todo $\lambda \leq \lambda^*$ en el primer caso y $E_\lambda = I$ para todo $\lambda \in (\sigma_1^2, \lambda^*]$ en el segundo caso. Por otro lado, se sigue directamente de la definición de E_λ que si $0 < \lambda^* \leq \sigma_1^2$ entonces $E_\lambda = E_{\lambda^*}$ para todo $\lambda \in (\sigma_{n^*}^2, \lambda^*]$ donde $n^* = \min \{n \in \mathbb{N} : \sigma_n^2 < \lambda^*\}$. Más aún, es inmediato observar que

$$E_\lambda = E_{\sigma_n^2} \quad \forall \lambda \in (\sigma_{n+1}^2, \sigma_n^2], \forall n.$$

Luego E_λ cumple con la condición c) de la Definición 2.17. ■

De la demostración del teorema anterior vemos que la función

$$\begin{aligned} E &: \mathbb{R} \rightarrow L(X) \\ \lambda &\rightarrow E_\lambda \end{aligned}$$

con E_λ definido por (2.3.1) es constante a trozos. En $\lambda = 0$ tiene “salto” si y sólo si $N(K) \neq \{0\}$ pues en ese caso la proyección $P \neq 0$. En $\lambda = \sigma_n^2 > 0$ tiene un “salto” igual a

$$S_\lambda(\cdot) = \sum_{n:\sigma_n^2=\lambda} \langle \cdot, v_n \rangle v_n = \sum_{n:\sigma_n^2=\lambda} P_n(\cdot),$$

es decir, igual a la suma de todas las proyecciones ortogonales sobre el span de v_n para todo v_n autovector correspondiente al autovalor σ_n^2 . Más precisamente, $S_{\sigma_n^2}$ es la proyección ortogonal sobre el autoespacio generado por el autovalor σ_n^2 .

Recordemos que una integral con respecto a una función de peso constante a trozos se define como la suma, sobre todos los saltos de la misma, del producto entre el valor de la función integrando en cada salto y el valor del salto de la función de peso. Esto cae dentro del marco general del concepto de una integral desde el punto de vista de teoría de la medida; todos los resultados mas importantes de la teoría de integración tales como convergencia dominada e integración por partes siguen siendo válidos (ver por ejemplo [14]). Esto motiva las siguientes “notaciones”:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n & (2.3.2) \\ (“ = ” f(K^*K) x &\text{ ver Definición 2.19),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle \overline{\langle y, v_n \rangle} & (2.3.3) \\ (“ = ” \langle f(K^*K) x, y \rangle &\text{ ver Prop. 2.24),} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) |\langle x, v_n \rangle|^2. \quad (2.3.4)$$

Suscintamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n$$

donde f es la función integrando, $f(\sigma_n^2)$ es el valor de f en el salto σ_n^2 y $\langle x, v_n \rangle v_n$ es el valor del salto de $E_\lambda x$ en $\lambda = \sigma_n^2$.

En particular, observar que

$$\begin{aligned} (K^*K)x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n \quad (\text{por (2.2.8)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x \quad (\text{por (2.3.2)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} id(\lambda) dE_\lambda x = id(K^*K)x, \end{aligned}$$

siendo $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función identidad. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.19. Sean X, Y espacios de Hilbert, $K : X \rightarrow Y$ compacto y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente continua. Se define la función f del operador K^*K como:

$$f(K^*K)x \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x \quad (2.3.5)$$

para todo $x \in X$.

De los supuestos sobre K y f se sigue inmediatamente que la serie en (2.3.5) es en efecto convergente para todo $x \in X$ (ver Teorema A.17-a)).

Observación 2.20. 1) Como $\{\sigma_n^2\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \|K\|^2]$, $\|K\|^2 = \sigma_1^2$, basta que la función f esté definida en dicho intervalo.

2) Observar que

$$E_\lambda(\cdot) = \chi_{[0, \lambda)}(K^*K)(\cdot) + P(\cdot) \quad \text{para } \lambda > 0,$$

donde $\chi_{[0, \lambda)}(\cdot)$ denota la función característica del intervalo $[0, \lambda)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \chi_{[0, \lambda)}(K^*K)x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0, \lambda)}(\lambda) dE_\lambda x \quad (\text{de (2.3.5)}) \\ &= \int_0^\lambda 1 dE_\lambda x \\ &= \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} 1 \langle x, v_n \rangle v_n \quad (\text{de (2.3.5)}) \\ &= E_\lambda x - Px \quad (\text{de (2.3.1) pues } \lambda > 0). \end{aligned}$$

3) Tenemos además que

$$f(K^*K)E_\lambda = E_\lambda f(K^*K).$$

En efecto, dado $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} E_\lambda f(K^*K)x &= E_\lambda \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n \quad (\text{de (2.3.5)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle E_\lambda v_n \quad (E_\lambda \text{ es lineal y acotado}) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \lambda} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n \quad (E_\lambda v_n = 0 \text{ para } \sigma_n^2 \geq \lambda) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, E_\lambda v_n \rangle v_n \quad (v_n = E_\lambda v_n \text{ para } \sigma_n^2 < \lambda) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle E_\lambda x, v_n \rangle v_n \quad (E_\lambda \text{ es autoadjunto}) \\ &= f(K^*K)E_\lambda x. \end{aligned}$$

Proposición 2.21. *La función $f(K^*K)$ del operador compacto y autoadjunto K^*K definida por (2.3.5) es un operador lineal, acotado y autoadjunto.*

DEMOSTRACION. La linealidad del operador $f(K^*K) : X \rightarrow X$ es trivial. Además $D(f(K^*K)) = X$ (bajo la condición que f sea seccionalmente continua). Probemos que $f(K^*K)$ es acotado. Sea $x \in X$

$$\begin{aligned} \|f(K^*K)x\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n \right\|^2 \quad (\text{por (2.3.5)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f^2(\sigma_n^2) |\langle x, v_n \rangle|^2 \quad (\{v_n\} \text{ ortonormal}). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

La función f^2 es acotada en $[0, \|K\|^2]$ por ser seccionalmente continua en un intervalo cerrado, en consecuencia, existe una constante $M > 0$ tal que $|f^2(t)| \leq M^2$ para todo $t \in [0, \|K\|^2]$. Así

$$\begin{aligned} \|f(K^*K)x\|^2 &\leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2 \quad (\text{de (2.3.6)}) \\ &\leq M^2 \|x\|^2 \quad (\ddagger). \end{aligned}$$

(\ddagger) Notar que $\|x\|^2 = \left\| x_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, v_n \rangle v_n \right\|^2$, $x_0 \in N(K^*K)$ y en consecuencia, por ortonormalidad, se tiene que $\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, v_n \rangle v_n \right\|^2 = \|x_0\|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, v_n \rangle|^2$.

Luego, existe una constante $M > 0$ tal que $\|f(K^*K)x\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$, por lo tanto $f(K^*K)$ es acotado. Como $D(f(K^*K)) = X$ concluimos que $f(K^*K) \in L(X)$.

Resta probar que $f(K^*K)$ es autoadjunto; sean $x, y \in X$

$$\begin{aligned}
\langle f(K^*K)x, y \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n, y \right\rangle \quad (\text{de (2.3.5)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle \langle v_n, y \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \overline{\langle y, v_n \rangle} \langle x, v_n \rangle \\
&= \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle y, v_n \rangle v_n \right\rangle \quad (f \text{ es real}) \\
&= \langle x, f(K^*K)y \rangle \quad (\text{por (2.3.5)}).
\end{aligned}$$

Luego, para todo $x, y \in X$ se tiene que $\langle f(K^*K)x, y \rangle = \langle x, f(K^*K)y \rangle$ y por lo tanto $f(K^*K)$ es autoadjunto. \blacksquare

Si consideramos, por ejemplo, una función polinómica $p(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k$, entonces podemos también definir $p(K^*K)$ como $p(K^*K) \doteq \sum_{k=0}^N a_k (K^*K)^k$ la cual coincide con la Definición 2.19. En efecto,

$$\begin{aligned}
p(K^*K)x &= \sum_{n=1}^{\infty} p(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n \quad (\text{de (2.3.5)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^N a_k (\sigma_n^2)^k \right) \langle x, v_n \rangle v_n \\
&= \sum_{k=0}^N a_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^2)^k \langle x, v_n \rangle v_n \right) \quad (\text{cambiando el orden de integración}) \\
&= \sum_{k=0}^N a_k (K^*K)^k x \quad (\text{de (2.3.5) con } f(\cdot) = (\cdot)^k).
\end{aligned}$$

Proposición 2.22. Sean f una función continua y $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f en $[0, \|K\|^2]$. Entonces

$$p_j(K^*K)x \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(K^*K)x, \quad \forall x \in X.$$

DEMOSTRACION. Sea $x \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|p_j(K^*K)x - f(K^*K)x\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} p_j(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n - \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (p_j(\sigma_n^2) - f(\sigma_n^2)) \langle x, v_n \rangle v_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |p_j(\sigma_n^2) - f(\sigma_n^2)|^2 |\langle x, v_n \rangle|^2 \quad (\{v_n\} \text{ es ortonormal}) \\
&\leq \|p_j - f\|_{L^\infty(0, \|K\|^2)}^2 \cdot \|x\|^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

pues por hipótesis $p_j \rightrightarrows f$ en $[0, \|K\|^2]$. ■

Otro resultado importante que puede probarse es el siguiente:

Teorema 2.23. *Para toda función f seccionalmente continua en el intervalo $[0, \|K\|^2]$ valen las identidades:*

$$f(K^*K)K^* = K^*f(KK^*) \quad (2.3.7)$$

y

$$f(KK^*)K = Kf(K^*K). \quad (2.3.8)$$

Aquí $f(KK^*)$ se define análogamente a $f(K^*K)$ pero ahora usando la familia espectral $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ asociada al operador KK^* :

$$F_\lambda y \doteq \begin{cases} \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle y, u_n \rangle u_n & \lambda \leq 0 \\ \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle y, u_n \rangle u_n + (I - Q)y & \lambda > 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

donde $(I - Q)$ es la proyección ortogonal sobre $R(K)^\perp = R(KK^*)^\perp = N(KK^*)$. Entonces definimos

$$f(KK^*)y \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle y, u_n \rangle u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dF_\lambda y \quad (2.3.10)$$

para todo $y \in Y$.

DEMOSTRACION del Teorema 2.23. Probaremos el teorema sólo para f continua.

Si f es continua en $[0, \|K\|^2]$, por el Teorema de Aproximación de Weierstrass sabemos que existe $\{p_j\}$ sucesión de polinomios, $p_j(t) = \sum_{k=0}^{N_j} a_k^{(j)} t^k$, tal que $p_j \rightrightarrows f$. Por lo tanto, la Proposición 2.22 implica que para todo $y \in Y$ se cumple que

$$f(K^*K)K^*y = \lim_{j \rightarrow \infty} p_j(K^*K)K^*y$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N_j} a_k^{(j)} (K^* K)^k K^* y \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N_j} a_k^{(j)} K^* (K K^*)^k y \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} K^* \left(\sum_{k=0}^{N_j} a_k^{(j)} (K K^*)^k y \right) \quad (K^* \text{ es lineal}) \\
&= K^* \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N_j} a_k^{(j)} (K K^*)^k y \right) \quad (K^* \text{ es continuo}) \\
&= K^* f(K K^*) y \quad (\text{de la Proposición 2.22}).
\end{aligned}$$

En forma análoga se prueba (2.3.8). ■

El siguiente resultado prueba entre otras cosas, la igualdad señalada en (2.3.3). Más aún se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.24. *Sea $f(K^* K)$ definida por (2.3.5). Entonces para todo $x, y \in X$*

$$\langle f(K^* K) x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \langle E_\lambda x, y \rangle, \quad (2.3.11)$$

$$\|f(K^* K) x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2, \quad (2.3.12)$$

$$\|f(K^* K)\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{|f(\lambda)|\}, \quad (2.3.13)$$

$$\|f(K^* K) K^*\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{\sqrt{\lambda} |f(\lambda)|\}. \quad (2.3.14)$$

DEMOSTRACION. Sean $x, y \in X$

$$\begin{aligned}
\langle f(K^* K) x, y \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n, y \right\rangle \quad (\text{por (2.3.5)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle \langle v_n, y \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle \overline{\langle y, v_n \rangle} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \langle E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{por (2.3.3)}),
\end{aligned}$$

con lo cual queda probado (2.3.11). Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|f(K^*K)x\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n \right\|^2 \quad (\text{por (2.3.5)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f^2(\sigma_n^2) |\langle x, v_n \rangle|^2 \quad (\{v_n\} \text{ es ortonormal}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (2.3.4)}),
\end{aligned}$$

luego (2.3.12) se satisface.

Para probar (2.3.13) notar que para todo $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f(K^*K)x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} f^2(\sigma_n^2) |\langle x, v_n \rangle|^2 \quad (\text{de (2.3.12)}) \\
&\leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{f^2(\lambda)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2 \\
&\leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{f^2(\lambda)\} \cdot \|x\|^2 \\
&= \left(\sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{f(\lambda)\} \right)^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|f(K^*K)\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{f(\lambda)\}.$$

Para (2.3.14) observar que para todo $y \in Y$

$$\begin{aligned}
\|f(K^*K)K^*y\|^2 &= \|K^*f(KK^*)y\|^2 \quad (\text{de (2.3.7)}) \\
&= \left\| K^* \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle y, u_n \rangle u_n \right\|^2 \quad (\text{de (2.3.10)}) \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle y, u_n \rangle K^*u_n \right\|^2 \quad (K^* \text{ es continuo}) \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n f(\sigma_n^2) \langle y, u_n \rangle v_n \right\|^2 \quad (K^*u_n = \sigma_n v_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 f^2(\sigma_n^2) |\langle y, u_n \rangle|^2 \quad (\{v_n\} \text{ es ortonormal}) \\
&\leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{\lambda f^2(\lambda)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, u_n \rangle|^2
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \left\{ \sqrt{\lambda} |f(\lambda)| \right\} \right)^2 \|y\|^2.$$

En consecuencia

$$\|f(K^*K)K^*\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \left\{ \sqrt{\lambda} |f(\lambda)| \right\}.$$

■

A continuación presentaremos brevemente algunos resultados básicos de teoría espectral y cálculo funcional para el caso de operadores autoadjuntos no necesariamente compactos (acotado o no acotado).

Proposición 2.25. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $x \in X$ (X espacio de Hilbert) y $\{E_\lambda\}$ una familia espectral. Entonces, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe el límite de la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(\lambda'_i) (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) x$$

cuando $\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \rightarrow 0$, donde $-\infty < a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = b < \infty$, $\lambda'_i \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. Denotamos a este límite con

$$\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x.$$

DEMOSTRACION. Ver Dautray y Lions ([8], Proposición 2 de §3).

Definición 2.26. Dado cualquier $x \in X$ y cualquier función f continua sobre \mathbb{R} , la **integral impropia** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x$ se define como el límite, si existe, de $\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x$ cuando $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$.

Nos preguntamos ahora bajo qué condiciones sobre f y $x \in X$ existe esta integral impropia. Para responder a esta pregunta observemos primero que la condición b) de la Definición 2.17 es equivalente a la condición

$$b_1) \quad \langle E_{\lambda_1} x, x \rangle \leq \langle E_{\lambda_2} x, x \rangle \quad \forall x \in X, \lambda_1 \leq \lambda_2.$$

En efecto, suponiendo que vale la condición b) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle E_{\lambda_1} x, x \rangle &= \|E_{\lambda_1} x\|^2 && (E_{\lambda_1} \text{ es proyección ortogonal}) \\ &= \|E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} x\|^2 && (\text{por b) pues } \lambda_1 \leq \lambda_2) \\ &\leq \|E_{\lambda_2} x\|^2 && (E_{\lambda_1} \text{ es proyección ortogonal}) \end{aligned}$$

$$= \langle E_{\lambda_2} x, x \rangle \quad (E_{\lambda_2} \text{ es proyección ortogonal})$$

y en consecuencia vale b_1). Recíprocamente, suponiendo válida b_1) se sigue que

$$\begin{aligned} \|E_{\lambda_1} x - E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} x\|^2 &= \|E_{\lambda_1} (I - E_{\lambda_2}) x\|^2 \\ &= \langle E_{\lambda_1} (I - E_{\lambda_2}) x, (I - E_{\lambda_2}) x \rangle \\ &\leq \langle E_{\lambda_2} (I - E_{\lambda_2}) x, (I - E_{\lambda_2}) x \rangle \quad (\text{por } b_1)) \\ &= \|E_{\lambda_2} (I - E_{\lambda_2}) x\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual vale para todo $x \in X$, por lo tanto $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1} E_{\lambda_2}$, esto es, vale la condición b). Así, para cualquier $x \in X$ fijo, la función

$$\begin{aligned} g_x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\lambda \rightarrow \langle E_{\lambda} x, x \rangle = \|E_{\lambda} x\|^2 \end{aligned}$$

es monótona creciente. Además es continua por izquierda por la condición c) de la Definición 2.17 y la continuidad de la norma. En consecuencia g_x genera una medida sobre \mathbb{R} que denotaremos $d\|E_{\lambda} x\|^2$.

La siguiente proposición responde a la pregunta formulada anteriormente.

Proposición 2.27. *Para $x \in X$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) existe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_{\lambda} x$,
- ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_{\lambda} x\|^2 < \infty$.

DEMOSTRACION. Ver Dautray y Lions ([8], Teorema 1 de §3).

Así, la integral impropia en X existe si y sólo si la integral de Riemann-Stieljes existe y lo que luego se prueba es que tal integral puede usarse para representar puntualmente a un dado operador.

Si $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es un operador autoadjunto, existe una única familia espectral la cual puede usarse para representar a A y a funciones de A como integrales. Más precisamente:

Proposición 2.28. *Sea $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador autoadjunto. Entonces existe una única familia espectral $\{E_{\lambda}\}$ tal que*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E_{\lambda} x\|^2 < \infty \right\} \quad (2.3.15)$$

y

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x, \quad x \in D(A). \quad (2.3.16)$$

Simbólicamente escribimos

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda.$$

DEMOSTRACION. Ver Bachman y Narici ([3], Teorema 29.6 del capítulo 29) o Dautray y Lions ([8], Corolario 5 de §3).

La familia espectral para la cual se verifican (2.3.15) y (2.3.16) se denomina **familia espectral asociada a A** . La existencia de esta familia espectral nos permitirá definir funciones de un operador autoadjunto no necesariamente compacto. Para la construcción de una teoría productiva conviene introducir alguna restricción para la clase de funciones admisibles. Limitaremos nuestras consideraciones a las funciones f que sean medibles respecto de la medida $d\|E_\lambda x\|^2$, para todo $x \in X$. Denotamos con S a esta clase de funciones, esto es, $S = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid M_x - \text{medible } \forall x \in X\}$ siendo M_x la σ -álgebra de los conjuntos $d\|E_\lambda x\|^2$ medibles. Observar que las funciones seccionalmente continuas pertenecen a S pues para tales funciones, si $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((a, \infty))$ es abierto y en consecuencia $f^{-1}((a, \infty)) \in B_{\mathbb{R}} \subset M_x \forall x \in X$, donde $B_{\mathbb{R}}$ es la σ -álgebra de Borel. La inclusión $B_{\mathbb{R}} \subset M_x \forall x \in X$ se sigue del hecho que $g_x(\lambda) = \|E_\lambda x\|^2$ es función creciente continua por izquierda $\forall x \in X$ (ver por ejemplo Folland, [11] Teorema 1.16 y Teorema 1.14 del Capítulo 1).

Definición 2.29. Sean $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador autoadjunto, $\{E_\lambda\}$ la familia espectral asociada a A y $f \in S$. Entonces, $f(A)$ es el operador definido por la fórmula

$$f(A)x \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x, \quad x \in D(f(A)) \quad (2.3.17)$$

donde

$$D(f(A)) = \left\{ x \in X : \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\}.$$

Simbólicamente escribimos

$$f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda.$$

Dado que el operador definido por (2.3.17) es formalmente lineal pues E_λ es lineal y el proceso límite también lo es, para probar la linealidad de $f(A)$ es suficiente con probar que $D(f(A))$ es un subespacio de X . Para ello observar que para todo $x, y \in X$

$$\|E_\lambda(x + y)\|^2 = \|E_\lambda x + E_\lambda y\|^2 = 2\|E_\lambda x\|^2 + 2\|E_\lambda y\|^2 - \|E_\lambda x - E_\lambda y\|^2$$

de donde $d \|E_\lambda(x + y)\|^2 \leq 2d \|E_\lambda x\|^2 + 2d \|E_\lambda y\|^2$. Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda(x + y)\|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda y\|^2,$$

de donde se sigue que, si $x, y \in D(f(A))$ entonces $x + y \in D(f(A))$. Por otro lado, es inmediato que si $x \in D(f(A))$ entonces $cx \in D(f(A))$ para toda constante c . En consecuencia el operador $f(A)$ es **lineal**.

Proposición 2.30. Sean $f \in S$ y $f(A)$ definido por (2.3.17). Entonces para todo $x \in D(f(A))$ y para todo $y \in X$ se tiene que

$$\langle f(A)x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \langle E_\lambda x, y \rangle. \quad (2.3.18)$$

DEMOSTRACION. Ver Dautray y Lions ([8], Proposición 4 de §3).

En la siguiente proposición probaremos algunas propiedades importantes que satisfacen las funciones de operadores autoadjuntos definidas por (2.3.17).

Proposición 2.31. Sean A un operador autoadjunto en X , $\{E_\lambda\}$ la familia espectral asociada a A y $f, g \in S$.

i) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(A)$ conmuta con E_λ sobre $D(f(A))$, esto es,

$$f(A)E_\lambda x = E_\lambda f(A)x, \quad \forall x \in D(f(A)).$$

ii) Si $x \in D(f(A))$ e $y \in D(g(A))$, entonces

$$\langle f(A)x, g(A)y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)g(\lambda) d \langle E_\lambda x, y \rangle.$$

iii) Si $x \in D(f(A))$ entonces $f(A)x \in D(g(A))$ si y sólo si $x \in D((gf)(A))$ donde $(gf)(\lambda) = g(\lambda)f(\lambda)$. En tal caso

$$g(A)f(A)x = (gf)(A)x.$$

iv) Si $D(f(A))$ es denso en X , entonces $f(A)$ también es autoadjunto.

v) Si $f \neq 0$ c.t.p. con respecto a la medida $d \|E_\lambda x\|^2 \forall x \in D(f(A))$, entonces existe $(f(A))^{-1}$ y

$$(f(A))^{-1} = \left(\frac{1}{f} \right) (A).$$

DEMOSTRACION. i) Sean $x \in D(f(A))$, $y \in X$. Observar que $E_\lambda x \in D(f(A))$ pues $E_\lambda(E_\lambda x) = E_\lambda x$. Así,

$$\langle E_\lambda f(A)x, y \rangle = \langle f(A)x, E_\lambda y \rangle \quad (E_\lambda \text{ es autoadjunto})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \langle E_\lambda x, E_\lambda y \rangle \quad (\text{por (2.3.18)}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \langle E_\lambda (E_\lambda x), y \rangle \\
&= \langle f(A) E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{por (2.3.18) pues } E_\lambda x \in D(f(A))).
\end{aligned}$$

Como $y \in X$ es arbitrario se sigue que $f(A)E_\lambda x = E_\lambda f(A)x$.

ii) En lo que sigue utilizamos la notación d_λ y d_μ , en lugar de d , para remarcar la variable de diferenciación. Sean $x \in D(f(A)), y \in D(g(A))$

$$\begin{aligned}
\langle f(A)x, g(A)y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, g(A)y \rangle \quad (\text{por (2.3.18)}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \langle x, E_\lambda g(A)y \rangle \quad (E_\lambda \text{ es autoadjunto}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \langle x, g(A)E_\lambda y \rangle \quad (\text{por i)}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \overline{\langle g(A)E_\lambda y, x \rangle} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \left(\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) d_\mu \langle E_\mu (E_\lambda y), x \rangle} \right) \quad (*) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) d_\mu \overline{\langle E_\mu (E_\lambda y), x \rangle} \right) \quad (g \text{ es real}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} g(\mu) d_\mu \overline{\langle E_\mu y, x \rangle} \right) \quad (E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \mu\}}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d_\lambda \overline{\langle E_\lambda y, x \rangle} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d_\lambda \langle x, E_\lambda y \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, y \rangle.
\end{aligned}$$

(*) Esta igualdad es consecuencia de (2.3.18) pues $E_\lambda y \in D(g(A))$. Queda probado ii). Observar que si $g = f$ y $y = x$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f(A)x\|^2 &= \langle f(A)x, f(A)x \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \langle E_\lambda x, x \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2, \tag{2.3.19}
\end{aligned}$$

(comparar con (2.3.12)). En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\|E_\mu f(A)x\|^2 &= \|f(A)E_\mu x\|^2 \quad (\text{por i}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda(E_\mu x)\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\mu} f^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda x\|^2.
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

iii) Sea $x \in D(f(A))$. Como

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d \|f(A)E_\lambda x\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda f(A)x\|^2 \quad (\text{por i}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} f^2(\mu) d_\mu \|E_\mu x\|^2 \right) \quad (\text{por (2.3.20)}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) f^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda x\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (gf)^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2,
\end{aligned}$$

se sigue entonces que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d \|E_\lambda f(A)x\|^2 < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (gf)^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2 < \infty,$$

y por lo tanto, bajo la hipótesis general que $x \in D(f(A))$, se tiene que

$$f(A)x \in D(g(A)) \Leftrightarrow x \in D((gf)(A)).$$

Además, para todo $x \in D((gf)(A))$ y para todo $y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle g(A)f(A)x, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda f(A)x, y \rangle \quad (\text{por (2.3.18) pues } f(A)x \in D(g(A))) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d_\lambda \langle f(A)x, E_\lambda y \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) d_\mu \langle E_\mu x, E_\lambda y \rangle \right) \quad (*) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d_\mu \langle E_\mu x, y \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) f(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, y \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (gf)(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, y \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle (gf)(A)x, y \rangle.$$

(*) Esta igualdad es consecuencia de (2.3.18) pues $x \in D(f(A))$. Como $y \in X$ es arbitrario se sigue que $g(A)f(A)x = (gf)(A)x, \forall x \in D((gf)(A))$.

iv) Si $f \in S$ es una función acotada en casi todo punto respecto de la medida $d\|E_\lambda x\|^2 \forall x \in X$, entonces es integrable con respecto a $d\|E_\lambda x\|^2 \forall x \in X$ y en consecuencia $D(f(A)) = X$. En este caso, para todos $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \langle f(A)x, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{por (2.3.18) pues } x \in X = D(f(A))) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\overline{\langle E_\lambda y, x \rangle} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda y, x \rangle} \quad (f \text{ es real}) \\ &= \overline{\langle f(A)y, x \rangle} \quad (\text{por (2.3.18) pues } y \in X = D(f(A))) \\ &= \langle x, f(A)y \rangle. \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Por lo tanto $f(A)$ es autoadjunto.

Supongamos ahora que $f \in S$ no es acotada y que $D(f(A))$ es denso en X (de otra forma el adjunto del operador $f(A)$ no está definido). Sea $y \in D(f(A)^*)$, entonces existe $y^* \in X$ tal que

$$\langle f(A)x, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \quad \forall x \in D(f(A)). \tag{2.3.22}$$

Debemos probar que $y \in D(f(A))$ y que $y^* = f(A)y$.

Denotemos por $e_n = \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| < n\} = f^{-1}((-n, n))$ y sea

$$f_n(t) \doteq \begin{cases} f(t) & t \in e_n \\ 0 & t \notin e_n \end{cases}.$$

Como f_n es acotada, $D(f_n(A)) = X$ y de (2.3.21) tenemos que para todo $z \in X$

$$\langle f_n(A)z, y \rangle = \langle z, f_n(A)y \rangle. \tag{2.3.23}$$

Sea χ_{e_n} la función característica sobre e_n . Se tiene entonces que $\chi_{e_n} \in S$ (por ser seccionalmente continua) y por lo tanto está definido el operador $\chi_{e_n}(A)$ con $D(\chi_{e_n}(A)) = X$. Además, para cualquier $z \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\chi_{e_n}(A))^2 z &= \chi_{e_n}(A)\chi_{e_n}(A)z \\ &= \chi_{e_n}^2(A)z \quad (\text{por iii}) \end{aligned}$$

$$= \chi_{e_n}(A)z \quad (\chi_{e_n} \text{ toma sólo los valores } 0 \text{ y } 1)$$

($\chi_{e_n}(A)$ es una proyección). Entonces, si definimos

$$x \doteq \chi_{e_n}(A)z, \quad (2.3.24)$$

se tiene que

$$\|E_\lambda x\|^2 = \|E_\lambda \chi_{e_n}(A)z\|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} \chi_{e_n}(\mu) d_\mu \|E_\mu z\|^2 \quad (\text{por (2.3.20)}),$$

de donde

$$d_\lambda \|E_\lambda x\|^2 = \chi_{e_n}(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda z\|^2$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) \chi_{e_n}(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda z\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda z\|^2 < \infty \quad (z \in X = D(f_n(A))). \end{aligned}$$

Esto prueba que $x = \chi_{e_n}(A)z \in D(f(A))$. Por otro lado, de (2.3.22) con x dado por (2.3.24) se tiene que

$$\langle f(A)\chi_{e_n}(A)z, y \rangle = \langle \chi_{e_n}(A)z, y^* \rangle.$$

Pero por iii) $f(A)\chi_{e_n}(A)z = (f\chi_{e_n})(A)z = f_n(A)z$. Luego

$$\langle \chi_{e_n}(A)z, y^* \rangle = \langle f_n(A)z, y \rangle = \langle z, f_n(A)y \rangle \quad (\text{por (2.3.23)}).$$

Como $\chi_{e_n}(A)$ es autoadjunto, la igualdad anterior puede escribirse como

$$\langle z, \chi_{e_n}(A)y^* \rangle = \langle z, f_n(A)y \rangle,$$

lo cual, por ser z arbitrario, implica que $f_n(A)y = \chi_{e_n}(A)y^*$. Por lo tanto,

$$\|f_n(A)y\| = \|\chi_{e_n}(A)y^*\| \leq \|y^*\| \quad (\chi_{e_n}(A) \text{ es proyección})$$

y, en consecuencia, de (2.3.19)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(\lambda) d \|E_\lambda y\|^2 \leq \|y^*\|^2. \quad (2.3.25)$$

Tomando límite en (2.3.25) para $n \rightarrow \infty$, como $|f_n| \leq |f|$ y $f_n \rightarrow f$ en todo punto, por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda y\|^2 \leq \|y^*\|^2 < \infty.$$

Luego, $y \in D(f(A))$ como queríamos probar. Resta probar que $y^* = f(A)y$. Para esto notar que, como $y \in D(f(A))$, se puede probar que

$$\langle f(A)x, y \rangle = \langle x, f(A)y \rangle, \forall x \in D(f(A)) \quad (2.3.26)$$

(la demostración es análoga a la de (2.3.21) y en consecuencia no damos los detalles aquí). De (2.3.22) y (2.3.26) se sigue entonces que $y^* = f(A)y$ como queríamos probar. Luego, $f(A)$ es autoadjunto.

v) El operador $(f(A))^{-1}$ existe si y sólo si $f(A)x = 0$ implica $x = 0$ (esto es, si $N(f(A)) = \{0\}$). Esta condición es equivalente a

$$\|f(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 = 0 \text{ si y sólo si } x = 0$$

lo cual vale si y sólo si el conjunto de los λ tales que $f(\lambda) \neq 0$ tiene medida cero para cada medida $d\|E_\lambda x\|^2$, $x \in D(f(A))$. Esta condición se satisface por hipótesis, entonces de iii) se sigue que la función $\frac{1}{f} (\in S)$ define al operador $(f(A))^{-1}$ como

$$(f(A))^{-1} = \frac{1}{f}(A).$$

■

Corolario 2.32. (Desigualdad de Interpolación)

Sean X, Y espacios de Hilbert, $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal densamente definido y acotado. Entonces para $s > r \geq 0$ vale

$$\|(T^*T)^r x\| \leq \|(T^*T)^s x\|^{\frac{r}{s}} \|x\|^{1-\frac{r}{s}}. \quad (2.3.27)$$

DEMOSTRACION. Primero probemos que el operador T^*T es autoadjunto. De los supuestos sobre el operador T se sigue que $T^* \in L(Y, X)$ (ver Teorema A.36-c)) y que $(T^*)^*$ es una extensión continua de T a todo el espacio X (ver Teorema A.36-e)). Además,

$$(T^*T)^* = T^*(T^*)^* \text{ en } D(T^*(T^*)^*) \quad (2.3.28)$$

(ver Teorema A.37-d)). Como

$$\begin{aligned} D(T^*(T^*)^*) &= \{x \in D((T^*)^*) : (T^*)^* x \in D(T^*)\} \\ &= \{x \in X : (T^*)^* x \in Y\} = X, \end{aligned}$$

de (2.3.28) se tiene que $(T^*T)^* = T^*(T^*)^*$ en X , de donde $(T^*T)^* = T^*T$ en $D(T)$. Luego, el operador $T^*T : D(T) \subset X \rightarrow X$ es autoadjunto.

Sea entonces $\{E_\lambda\}$ la familia espectral asociada a T^*T y sean $s > r \geq 0$. Entonces

$$\|(T^*T)^r x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2r} d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{de (2.3.19) con } f(\cdot) = (\cdot)^r),$$

usando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{s}{r}$ y $q = \frac{s}{s-r}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|(T^*T)^r x\|^2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{2r})^{\frac{s}{r}} d\|E_\lambda x\|^2 \right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\|E_\lambda x\|^2 \right)^{\frac{s-r}{s}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2s} d\|E_\lambda x\|^2 \right)^{\frac{r}{s}} (\|x\|^2)^{\frac{s-r}{s}} \quad (\text{de (2.3.19) con } f \equiv 1) \\
&\leq \left(\|(T^*T)^s x\|^2 \right)^{\frac{r}{s}} (\|x\|^2)^{\frac{s-r}{s}} \quad (\text{de (2.3.19) con } f(\cdot) = (\cdot)^s) \\
&\leq \left(\|(T^*T)^s x\|^{\frac{r}{s}} \right)^2 \left(\|x\|^{\frac{s-r}{s}} \right)^2,
\end{aligned}$$

de donde se sigue (2.3.27). ■

Capítulo 3

Regularización de ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales

3.1. Teoría de regularización

Sean X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$. De los resultados del Capítulo 2 sabemos que un problema inverso de la forma

$$(\varphi) : \quad Tx = y \quad (3.1.1)$$

admite una única mejor solución aproximada dada por $x^\dagger = T^\dagger y$ siempre que $y \in D(T^\dagger)$, donde, recordemos, T^\dagger es la inversa generalizada de Moore-Penrose de T y $D(T^\dagger) = R(T) \oplus R(T)^\perp$.

A menudo, en problemas concretos el dato y se mide con instrumentos de precisión finita y por lo tanto no se conoce exactamente y sino sólo un valor aproximado y^δ con $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. Nos referiremos a δ como el nivel de ruido o la precisión del instrumento de medición. Aún cuando y se conociera en forma exacta, al abordar el problema numéricamente necesariamente se generan errores en dicho dato debido a la necesidad de discretización. En consecuencia, en estos problemas concretos el problema realmente a tratar en lugar de (3.1.1) es

$$Tx = y^\delta. \quad (3.1.2)$$

Denotaremos con x_δ^\dagger a la mejor solución aproximada de (3.1.2), es decir, $x_\delta^\dagger = T^\dagger y^\delta$ la cual obviamente existe si $y^\delta \in D(T^\dagger)$. Si el problema es mal condicionado, T^\dagger no es acotado y aún cuando $y^\delta \in D(T^\dagger)$ y satisfaga $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ con δ muy pequeño, puede suceder que $T^\dagger y^\delta$ no sea una buena aproximación de $T^\dagger y$. Esta característica de no acotación de T^\dagger genera problemas de inestabilidad cuando se aproximan numéricamente

las soluciones de (3.1.1) o (3.1.2) con algoritmos y/o métodos tradicionales (ver [29] y [30]).

En consecuencia nos confrontamos con el problema de obtener una buena aproximación de x^\dagger cuando sólo se conoce $y^\delta \in Y$ donde $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. ¿Cómo hacemos ésto?. El problema debe ser “regularizado” lo cual básicamente consiste en aproximar el problema (φ) de (3.1.1) por una familia uniparamétrica, $\{(\varphi_\alpha)\}$, de problemas bien condicionados. Como cada problema (φ_α) es bien condicionado, admite una solución (que puede computarse en forma estable) a la cual la llamaremos “solución regularizada”. El parámetro α , al que llamaremos “parámetro de regularización”, en general será función del nivel de ruido y del dato y deberá elegirse de manera tal que las correspondientes soluciones regularizadas converjan a la solución exacta cuando el nivel de ruido tiende a cero.

Puesto que como dijimos, el dato y no se conoce en forma exacta, resulta conveniente considerar el problema (φ) para todo $y \in D(T^\dagger)$. Entonces lo que haremos será regularizar la familia de ecuaciones (3.1.1) con y variando en $D(T^\dagger)$. No obstante, las reglas de elección de parámetro se elegirán en forma específica para cada $y \in D(T^\dagger)$. La familia $\{(\varphi_\alpha)\}$ junto con la regla de elección de parámetro asociada a un cierto $y \in D(T^\dagger)$ constituyen lo que llamaremos método de regularización para resolver la ecuación $Tx = y$. A continuación formalizaremos estas ideas.

Definición 3.1. Sean X, Y espacios de Hilbert, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado con $R(T)$ no cerrado y $\alpha_0 > 0$. Para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, sea $R_\alpha : Y \rightarrow X$ un operador continuo (no necesariamente lineal). Diremos que $\{R_\alpha\}$ es una **familia de regularización para T^\dagger** , o simplemente una **regularización para T^\dagger** si para todo $y \in D(T^\dagger)$ existe una función $\hat{\alpha} : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ a la que llamaremos **regla de elección de parámetro** tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{ \|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| \} \right) = 0 \quad (3.1.3)$$

y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{ \hat{\alpha}(\delta, y^\delta) \} \right) = 0. \quad (3.1.4)$$

Para un específico $y \in D(T^\dagger)$, al par $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ lo llamaremos un **método de regularización convergente** para resolver $Tx = y$ si (3.1.3) y (3.1.4) valen. En tal caso nos referiremos a $x_{\hat{\alpha}} = R_{\hat{\alpha}} y$ y $x_{\hat{\alpha}}^\delta = R_{\hat{\alpha}} y^\delta$ como las **soluciones regularizadas** de los problemas (3.1.1) y (3.1.2) respectivamente.

Observación 3.2. 1) Observar que en la definición anterior la regla de elección de parámetro $\hat{\alpha}$ depende además implícitamente de $y \in D(T^\dagger)$.

2) Notar que la definición de “método de regularización” exige convergencia en el peor caso posible. Así las soluciones regularizadas convergen a la mejor solución aproximada del problema cuando el nivel de ruido tiende a cero a condición que el parámetro de regularización se elija de acuerdo a la regla asociada al método. Es decir,

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta = T^\dagger y. \text{ En particular, } \lim_{\delta \rightarrow 0} R_{\hat{\alpha}(\delta, y)} y = T^\dagger y.$$

3) Advertir que la nomenclatura usada para un método de regularización obedece a razones de simplicidad. En forma estricta un método debiera representarse como $(\{R_\alpha\}, \hat{\alpha})$.

4) Como mencionamos, los operadores R_α no necesitan ser lineales. En el caso que si lo sean, a la familia $\{R_\alpha\}$ la llamaremos **regularización lineal** y al correspondiente método lo llamaremos **método de regularización lineal**.

En general, la regla de elección de parámetro depende del nivel de ruido δ y del dato perturbado y^δ , pero también puede depender sólo de δ . Más precisamente:

Definición 3.3. *Sea $\hat{\alpha}$ una regla de elección de parámetro de acuerdo a la Definición 3.1. Si $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta)$, esto es, sólo depende de δ , la llamaremos **regla de elección de parámetro a-priori**. En otro caso se denominará **regla de elección de parámetro a-posteriori**.*

Por lo tanto, una regla de elección de parámetro *a-priori* no depende del dato y^δ y en consecuencia puede evaluarse sin necesidad de contar efectivamente con el dato y^δ . De allí el nombre *a-priori*.

Es natural que nos cuestionemos entonces si una regla de elección de parámetro puede depender sólo de y^δ . La respuesta es negativa puesto que tal regla no correspondería a un método de regularización convergente en el sentido de la Definición 3.1 (T^\dagger no acotado) asociado a un problema mal condicionado, tal como lo prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Sean X, Y espacios de Hilbert, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado con $R(T)$ no cerrado y $\{R_\alpha\}$ una regularización para T^\dagger . Si para todo $y \in D(T^\dagger)$ existe una regla de elección de parámetro $\hat{\alpha}$ que depende sólo de y^δ de modo que el método $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es convergente, entonces T^\dagger es acotado.*

DEMOSTRACION. Sea $y \in D(T^\dagger)$ arbitrario pero fijo. Por hipótesis existe una regla de elección de parámetro $\hat{\alpha}$ que depende sólo de y^δ , esto es, $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(y^\delta)$, tal que el método de regularización $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es convergente. Esto implica (ver Observación 3.2-2)) que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (R_{\hat{\alpha}(y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y) = 0, \quad \forall y^\delta \in Y : \|y - y^\delta\| \leq \delta. \quad (3.1.5)$$

En particular, $\lim_{\delta \rightarrow 0} (R_{\hat{\alpha}(y)} y - T^\dagger y) = 0$ y dado que $\hat{\alpha}$ es independiente de δ se sigue que

$$R_{\hat{\alpha}(y)} y = T^\dagger y. \quad (3.1.6)$$

Sea ahora $\{y_n\} \subset D(T^\dagger)$ tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Entonces, para todo $\delta > 0$ existe $N = N(\delta)$ tal que $\|y_n - y\| < \delta, \forall n \geq N$, lo cual implica de (3.1.5) que

$$R_{\hat{\alpha}(y_n)} y_n \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} T^\dagger y, \quad \forall n \geq N(\delta).$$

Pero cuando $\delta \rightarrow 0$ se tiene que $n \rightarrow \infty$, por lo tanto

$$R_{\hat{\alpha}(y_n)} y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^\dagger y. \quad (3.1.7)$$

Como cada $y_n \in D(T^\dagger)$, de (3.1.6) y (3.1.7) se sigue que $T^\dagger y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^\dagger y$. Luego, T^\dagger es continuo en $D(T^\dagger)$ y en consecuencia es acotado (por ser lineal). ■

De este teorema concluimos que un método de regularización convergente para un problema mal condicionado no puede tener una regla de elección de parámetro que dependa sólo del dato y no del nivel de ruido. Sin embargo, frecuentemente no es posible conocer el nivel de ruido y por lo tanto resulta necesario considerar reglas de elección de parámetro alternativas que no involucren al mismo. Tales reglas se denominan *reglas de elección de parámetro independientes del ruido* y producen soluciones regularizadas que, si bien no converjen a x^\dagger cuando $\delta \rightarrow 0$, tienen un buen comportamiento para valores finitos del nivel de ruido. (Ver por ejemplo [10], Capítulo 4)

A continuación abordamos los problemas de construir familias de operadores de regularización y reglas de elección de parámetro. Para este propósito nos será útil el siguiente resultado:

Proposición 3.5. Sean $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado entre los espacios de Hilbert X e Y con $R(T)$ no cerrado y $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de operadores continuos (no necesariamente lineales) de Y en X . Si

$$R_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} T^\dagger \quad \text{puntualmente sobre } D(T^\dagger) \quad (3.1.8)$$

entonces la familia $\{R_\alpha\}$ es una regularización para T^\dagger . Mas aún, para todo $y \in D(T^\dagger)$ existe una regla de elección de parámetro a-priori $\hat{\alpha}$ tal que $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente para resolver $Tx = y$.

DEMOSTRACION. Sea $y \in D(T^\dagger)$ arbitrario pero fijo. Por hipótesis $R_\alpha y \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} T^\dagger y$, esto es,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varepsilon) \in (0, \alpha_0) : \left(\alpha \leq \tilde{\sigma} \Rightarrow \|R_\alpha y - T^\dagger y\| < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (3.1.9)$$

A continuación veremos que es posible construir una función $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monótona creciente (no necesariamente continua) que satisfaga $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon) = 0$ y tal que $\|R_{\sigma(\varepsilon)} y - T^\dagger y\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \varepsilon > 0$. Construyamos tal función. Sea $\varepsilon > 0$. De (3.1.9) sabemos que existe $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varepsilon) \in (0, \alpha_0)$ tal que $\|R_\alpha y - T^\dagger y\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \alpha \leq \tilde{\sigma}$. Definimos

$$C(\varepsilon) \doteq \left\{ \sigma^* \in (0, \alpha_0) : \|R_\alpha y - T^\dagger y\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \alpha \leq \sigma^* \right\} \quad (3.1.10)$$

y

$$S(\varepsilon) \doteq \sup \{ \sigma^* : \sigma^* \in C(\varepsilon) \} < \infty.$$

Puesto que $\tilde{\sigma} \in C(\varepsilon)$ se tiene entonces que $0 < \tilde{\sigma} \leq S(\varepsilon) \leq \alpha_0 < \infty$. Ahora definimos

$$\sigma(\varepsilon) \doteq (1 - e^{-\varepsilon}) S(\varepsilon).$$

Claramente $0 < \sigma(\varepsilon) < S(\varepsilon)$. Probemos ahora que la función $\sigma(\cdot)$ es monótona creciente como función de ε . Sean $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $C(\varepsilon_1) \subset C(\varepsilon_2)$, de donde

$$S(\varepsilon_1) = \sup \{ \sigma^* : \sigma^* \in C(\varepsilon_1) \} \leq \sup \{ \sigma^* : \sigma^* \in C(\varepsilon_2) \} = S(\varepsilon_2).$$

Ya que $1 - e^{-\varepsilon_1} > 0$, de la desigualdad anterior se sigue que

$$0 \leq (1 - e^{-\varepsilon_1}) S(\varepsilon_1) \leq (1 - e^{-\varepsilon_1}) S(\varepsilon_2).$$

Además, como $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, tenemos que $1 - e^{-\varepsilon_1} < 1 - e^{-\varepsilon_2}$ y en consecuencia

$$0 \leq (1 - e^{-\varepsilon_1}) S(\varepsilon_1) \leq (1 - e^{-\varepsilon_2}) S(\varepsilon_2),$$

o sea, $\sigma(\varepsilon_1) \leq \sigma(\varepsilon_2)$. Por lo tanto σ es monótona creciente. Además, puesto que $S(\varepsilon) < \infty$ claramente $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon) = 0$. Resta probar que $\|R_{\sigma(\varepsilon)}y - T^\dagger y\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall \varepsilon > 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sigma(\varepsilon) < S(\varepsilon) = \sup \{ \sigma^* : \sigma^* \in C(\varepsilon) \}$ se sigue que existe $\sigma^* \in C(\varepsilon)$ tal que $\sigma(\varepsilon) < \sigma^*$ y en consecuencia de (3.1.10) concluimos que $\|R_{\sigma(\varepsilon)}y - T^\dagger y\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otro lado, ya que $\sigma(\varepsilon) < S(\varepsilon) \leq \alpha_0$ por hipótesis se tiene que $R_{\sigma(\varepsilon)}$ es un operador continuo en y por lo tanto

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \rho = \rho(\tilde{\varepsilon}) > 0 : \left(\|z - y\| \leq \rho \Rightarrow \|R_{\sigma(\varepsilon)}z - R_{\sigma(\varepsilon)}y\| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \right).$$

En particular, para $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ se tiene que

$$\exists \rho = \rho(\varepsilon) : \|z - y\| \leq \rho \Rightarrow \|R_{\sigma(\varepsilon)}z - R_{\sigma(\varepsilon)}y\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.1.11)$$

A continuación veremos que la función $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ en (3.1.11) puede elegirse de manera tal que además resulte estrictamente monótona, continua y tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon) = 0$. Siguiendo la idea usada en la construcción de la función σ , dado $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto

$$\widehat{C}(\varepsilon) \doteq \left\{ \rho^* > 0 : \|z - y\| \leq \rho^* \Rightarrow \|R_{\sigma(\varepsilon)}z - R_{\sigma(\varepsilon)}y\| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (3.1.12)$$

De (3.1.11) se sigue que $\widehat{C}(\varepsilon) \neq \emptyset$ pues $\rho \in \widehat{C}(\varepsilon)$. En consecuencia,

$$0 < \widehat{S}(\varepsilon) \doteq \sup \{ \rho^* : \rho^* \in \widehat{C}(\varepsilon) \} < \infty$$

lo cual, como antes, define una función monótona creciente acotada (no necesariamente continua). Si \widehat{S} es continua, para $\varepsilon > 0$ definimos la función ρ como

$$\rho(\varepsilon) \doteq (1 - e^{-\varepsilon}) \widehat{S}(\varepsilon).$$

Observemos que $\rho(\varepsilon) > 0$. Si \widehat{S} no es continua, dado que es monótona creciente y acotada, el conjunto de los puntos de discontinuidad es numerable, entonces la redefinimos continua quitándole los saltos, es decir, como la componente absolutamente continua de la \widehat{S} . Dado que este proceso es estandar no damos los detalles aquí. (Este proceso de construcción de una función continua es comunmente utilizado, por ejemplo en la teoría de probabilidades en la definición y construcción de la componente absolutamente continua de la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria. Ver por ejemplo [16], capítulo 2). Llamémosle \widehat{S}_c a tal función continua. En este caso, para $\varepsilon > 0$ definimos a ρ como

$$\rho(\varepsilon) \doteq (1 - e^{-\varepsilon}) \widehat{S}_c(\varepsilon).$$

En cualquier caso obtenemos una función $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua, estrictamente monótona y tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon) = 0$. En consecuencia, existe $\rho^{-1} : R(\rho) \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ función continua, estrictamente monótona y tal que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho^{-1}(\delta) = 0$. A continuación extendemos ρ^{-1} a todo \mathbb{R}^+ manteniendo la monotonía. Llamémosle $\rho_e^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ a tal extensión.

Finalmente definimos la función $\hat{\alpha} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$\hat{\alpha}(\delta) \doteq (\sigma \circ \rho_e^{-1})(\delta) = \sigma(\rho_e^{-1}(\delta)). \quad (3.1.13)$$

La función $\hat{\alpha}$ así definida es monótona por ser composición de funciones monótonas y además $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\alpha}(\delta) = 0$ pues

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_e^{-1}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho^{-1}(\delta) = 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(\rho_e^{-1}(\delta)) = 0.$$

Además, dado $\varepsilon > 0$, como $\rho(\varepsilon) < \widehat{S}(\varepsilon) = \sup \{ \rho^* : \rho^* \in \widehat{C}(\varepsilon) \}$ se sigue que existe $\rho^* \in \widehat{C}(\varepsilon)$ tal que $\rho(\varepsilon) < \rho^*$ y en consecuencia de (3.1.12) tenemos que

$$\|R_{\sigma(\varepsilon)} y^\delta - R_{\sigma(\varepsilon)} y\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } \|y^\delta - y\| \leq \rho(\varepsilon). \quad (3.1.14)$$

Con $\delta \doteq \rho(\varepsilon)$ tenemos entonces que

$$\hat{\alpha}(\delta) = \sigma(\rho_e^{-1}(\delta)) = \sigma(\rho_e^{-1}(\rho(\varepsilon))) = \sigma(\varepsilon) \quad (3.1.15)$$

y por lo tanto

$$\|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| \leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y^\delta - R_{\hat{\alpha}(\delta)} y\| + \|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y - T^\dagger y\|$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| \quad (\text{de (3.1.14) y (3.1.15)}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{por construcción de } \sigma).
\end{aligned}$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \rho(\varepsilon) > 0$ tal que $\|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\| < \varepsilon$ siempre que $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. Por lo tanto se satisface (3.1.3) de la Definición 3.1. Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{\hat{\alpha}(\delta)\} \right) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\alpha}(\delta) \quad (\hat{\alpha} \text{ es independiente de } y^\delta) \\
&= 0 \quad (\text{por construcción de } \hat{\alpha}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\alpha}$ satisface (3.1.4) de la Definición 3.1.

Hemos probado entonces que para $y \in D(T^\dagger)$ existe $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta)$ tal que se verifican las condiciones (3.1.3) y (3.1.4). En consecuencia, $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente. Como $y \in D(T^\dagger)$ es arbitrario se sigue que $\{R_\alpha\}$ es una regularización para T^\dagger . ■

Observación 3.6. En la Observación 3.2-2) notamos que si $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente se cumple que $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta = T^\dagger y$. En particular, $\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{\hat{\alpha}(\delta, y)} y = T^\dagger y, \forall y \in D(T^\dagger)$ de donde $\lim_{\hat{\alpha}(\delta, y) \rightarrow 0} R_{\hat{\alpha}(\delta, y)} y = T^\dagger y, \forall y \in D(T^\dagger)$ pues de (3.1.4), $\hat{\alpha}(\delta, y^\delta) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$, lo cual a su vez puede expresarse como

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} R_\sigma y = T^\dagger y, \quad \forall y \in D(T^\dagger) \quad (3.1.16)$$

donde el límite se toma sobre los σ pertenecientes al rango de la regla de elección de parámetro $\hat{\alpha}$. Esto puede interpretarse como un resultado recíproco de la Proposición 3.5. En consecuencia, todas las regularizaciones para T^\dagger están construidas por aproximaciones puntuales de la inversa generalizada de Moore-Penrose de T . Esto muestra además la importancia del estudio de la inversa generalizada en el contexto de operadores de regularización para problemas inversos mal condicionados.

Si $\{R_\alpha\}$ es lineal y uniformemente acotada $R(T)$ no es cerrado (T^\dagger no acotado), la convergencia en (3.1.8) no puede ser en la norma de los operadores, esto es, $\|R_\alpha - T^\dagger\| \not\rightarrow^0 0$. En efecto, si suponemos que $\|R_\alpha - T^\dagger\| \rightarrow^0 0$ entonces

$$\|T^\dagger\| \leq \|T^\dagger - R_\alpha\| + \|R_\alpha\| \leq \|T^\dagger - R_\alpha\| + M \quad (M \text{ cota uniforme de } \{R_\alpha\}).$$

Tomando límite en ambos miembros para $\alpha \rightarrow 0$ tenemos que $\|T^\dagger\| \leq M$ y por lo tanto T^\dagger es acotado.

Por otro lado, si $\{R_\alpha\}$ es lineal y $R(T)$ no es cerrado, entonces $\|R_\alpha\| \rightarrow^0 \infty$. En efecto, si T^\dagger no es acotado entonces para toda constante $c > 0$ existe $y \in D(T^\dagger)$, $y \neq 0$ tal que $\|T^\dagger y\| > c \|y\|$. Por lo tanto $\|T^\dagger y\| = \left\| \lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha y \right\| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha y\| > c \|y\|$ de donde

$\liminf_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha\| \|y\| > c \|y\|$. Como c es arbitrario se sigue entonces que $\|R_\alpha\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty$.

Además, si $\|R_\alpha\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty$ entonces $\{R_\alpha\}$ no es uniformemente acotada lo cual implica, por el Principio de la Acotación Uniforme (ver Teorema A.39), que existe $\tilde{y} \in Y$ tal que $\{R_\alpha \tilde{y}\}$ no es acotada. Así entonces, si $R(T)$ no es cerrado y $\{R_\alpha\}$ es una regularización lineal para T^\dagger existe $\tilde{y} \in Y$ tal que $\|R_\alpha \tilde{y}\| \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ apropiadamente. En la siguiente proposición probaremos que, bajo ciertas hipótesis adicionales, esto es cierto para todo $\tilde{y} \in Y \setminus D(T^\dagger)$.

Proposición 3.7. Sean $\{R_\alpha\}$ una regularización lineal para T^\dagger , $y \in Y$ y $x_\alpha \doteq R_\alpha y$. Si $y \in D(T^\dagger)$ entonces

$$x_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} T^\dagger y. \quad (3.1.17)$$

Si $y \notin D(T^\dagger)$ y

$$\sup_{\alpha > 0} \{\|TR_\alpha\|\} < \infty, \quad (3.1.18)$$

entonces

$$\|x_\alpha\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty. \quad (3.1.19)$$

El límite indicados en (3.1.17) se considera sobre los α pertenecientes al rango de la correspondiente regla de elección de parámetro.

DEMOSTRACION. Supongamos que $y \in D(T^\dagger)$. Como $\{R_\alpha\}$ es una regularización (lineal) para T^\dagger existe $\hat{\alpha}$ regla de elección de parámetro tal que $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente para $Tx = y$. De lo observado en (3.1.16) se sigue entonces que $x_{\hat{\alpha}} \xrightarrow{\hat{\alpha} \rightarrow 0} T^\dagger y$ lo cual prueba (3.1.17).

Supongamos ahora que vale (3.1.18). Como $R_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} T^\dagger$ puntualmente sobre $D(T^\dagger)$ y T es continuo se sigue que $TR_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} TT^\dagger = Q$ puntualmente sobre $D(T^\dagger)$, donde, recordemos, Q es la proyección ortogonal sobre $R(T)$. Puesto que $D(T^\dagger)$ es denso en Y y que $\{\|TR_\alpha - Q\|\}$ está uniformemente acotada se sigue que

$$TR_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} Q \text{ puntualmente sobre todo el espacio } Y. \quad (3.1.20)$$

Sean $y \in Y$, $x_\alpha \doteq R_\alpha y$ y supongamos que existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ tal que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y $\{x_{\alpha_n}\} \subset X$ es acotada. Como X es un espacio de Hilbert, existe una subsucesión $\{x_{\alpha_{n_k}}\}$ tal que $x_{\alpha_{n_k}} \xrightarrow{w} x$, $x \in X$ (ver Teorema A.29) y en consecuencia, como T es lineal y continuo $Tx_{\alpha_{n_k}} \xrightarrow{w} Tx$ (ver Teorema A.30). Por otro lado, como $\alpha_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (pues $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) y $y \in Y$, de (3.1.20) se tiene que $TR_{\alpha_{n_k}} y = Tx_{\alpha_{n_k}} \xrightarrow{\alpha_{n_k} \rightarrow 0} Qy$ y por lo tanto $Tx = Qy$. Así, $Qy \in R(T)$ y en consecuencia $y = Qy + (y - Qy) \in D(T^\dagger)$. Hemos probado entonces que si $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y $\{x_{\alpha_n}\}$ es acotada entonces $y \in D(T^\dagger)$ o equivalentemente, si $y \notin D(T^\dagger)$ de la familia $\{x_\alpha\}$ no puede extraerse ninguna sucesión uniformemente acotada $\{x_{\alpha_n}\}$ ($\alpha_n \rightarrow 0$). Por lo tanto $\|x_\alpha\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty$ es decir, vale (3.1.19). ■

En la Proposición 3.5 vimos que si (3.1.8) vale entonces existe una regla de elección de parámetro a-priori tal que $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente. Tales reglas pueden caracterizarse a través del siguiente resultado:

Proposición 3.8. *Sean $\{R_\alpha\}$ una regularización lineal para T^\dagger y $\hat{\alpha} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una regla de elección de parámetro a-priori. Entonces $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente si y sólo si se satisface:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\alpha}(\delta) = 0 \quad (3.1.21)$$

y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\| = 0 \quad (3.1.22)$$

DEMOSTRACION. (\Leftarrow) Supongamos que $\hat{\alpha}$ satisface (3.1.21) y (3.1.22). La condición (3.1.4) se sigue inmediatamente de (3.1.21) y del hecho que $\hat{\alpha}$ es independiente de y^δ . Sean $y^\delta \in Y, y \in D(T^\dagger)$ y $\delta > 0$ tales que $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\| &\leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta - R_{\hat{\alpha}(\delta)}y\| \\ &= \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}(y^\delta - y)\| \quad (R_{\hat{\alpha}(\delta)} \text{ lineal}) \\ &\leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\| \|y^\delta - y\| \quad (R_{\hat{\alpha}(\delta)} \text{ acotado}) \\ &\leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\| \delta, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\forall y \in D(T^\dagger), \forall \delta > 0$

$$0 \leq \sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{\|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\|\} \leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\|.$$

Tomando límite en ambos miembros para $\delta \rightarrow 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{\|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\|\} \right) \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} (\|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\|) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\| \quad (\text{cada límite existe}) \\ &= \lim_{\hat{\alpha}(\delta) \rightarrow 0} \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y - T^\dagger y\| + \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\| \quad (\hat{\alpha}(\delta) \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de (3.1.17) pues $\{R_\alpha\}$ es una regularización lineal y

$y \in D(T^\dagger)$ y de (3.1.22). Luego, existe $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{\|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\|\} \right) = 0$. Por lo

tanto se satisface también la condición (3.1.3) y $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente.

(\Rightarrow) Supongamos ahora que $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente donde $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta)$ no depende de y^δ . De (3.1.4) se sigue que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\alpha}(\delta) = 0$. Resta entonces probar (3.1.22). Si (3.1.22) no se verifica entonces existen una constante $c > 0$ y una sucesión $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y tal que $\delta_n \|R_{\hat{\alpha}(\delta_n)}\| > c, \forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo

$$\delta_n \|R_{\hat{\alpha}(\delta_n)}\| = \|\delta_n R_{\hat{\alpha}(\delta_n)}\| = \sup_{\substack{z \in Y \\ \|z\|=1}} \{\|\delta_n R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} z\|\} > c$$

en consecuencia, existe $z_n \in Y, \|z_n\| = 1$ tal que

$$\|\delta_n R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} z_n\| \geq c. \quad (3.1.23)$$

Definiendo la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ como $y_n \doteq y + \delta_n z_n$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} y_n - T^\dagger y &= (R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} y - T^\dagger y) + R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} (\delta_n z_n) \quad (R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} \text{ lineal}) \\ &= (R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} y - T^\dagger y) + \delta_n R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} z_n. \end{aligned}$$

Para $\delta_n \rightarrow 0$, el primer sumando converge a cero pues $y \in D(T^\dagger)$ (ver (3.1.16)) pero el segundo sumando no converge a cero en virtud de (3.1.23). En consecuencia, $R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} y_n - T^\dagger y$ no converge a cero cuando $\delta_n \rightarrow 0$. Así, hemos probado la existencia de una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ tal que $\|y_n - y\| \leq \delta_n$ y $\lim_{\delta_n \rightarrow 0} R_{\hat{\alpha}(\delta_n)} y_n \neq T^\dagger y$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método convergente. Esta contradicción provino de suponer que (3.1.22) no se verificaba. Luego (3.1.22) se satisface. \blacksquare

3.2. Orden de optimalidad

Si $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente entonces tenemos asegurado que las soluciones regularizadas con él obtenidas convergen a x^\dagger cuando el nivel de ruido tiende a cero. A continuación analizaremos el orden de esta convergencia. Es decir, estudiaremos en primer lugar con qué velocidad

$$\|x_{\hat{\alpha}} - x^\dagger\| \xrightarrow{\hat{\alpha} \rightarrow 0} 0 \quad (3.2.1)$$

siendo $x_{\hat{\alpha}} = R_{\hat{\alpha}} y$ ó,

$$\|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (3.2.2)$$

siendo $x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta = R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta$, con $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. En segundo lugar estudiaremos la optimalidad del método en el sentido del orden de convergencia arriba mencionado.

Dado que

$$\left\| x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger \right\| \leq \left\| x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} - x^\dagger \right\| + \left\| x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} - x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta \right\|,$$

observamos que los órdenes de convergencia en (3.2.1) y (3.2.2) están relacionados. En particular observamos que el orden de convergencia en (3.2.2) no puede ser mejor que el orden de convergencia en (3.2.1). El primer término de la desigualdad anterior es el **error total**. En el segundo término, el primer sumando es el error debido a la regularización y el segundo sumando es el error debido al ruido (en ausencia de ruido éste es cero).

Presentaremos ahora algunos resultados que nos permitirán responder adecuadamente a los interrogantes planteados.

Definición 3.9. Sean X, Y espacios de Hilbert, $M \subseteq X$, $T \in L(X, Y)$, $R : Y \rightarrow X$ un operador (no necesariamente lineal) y $\delta > 0$. Definimos

$$\Delta(\delta, M, R) \doteq \sup \{ \|Ry^\delta - x\| : x \in M, y^\delta \in Y, \|Tx - y^\delta\| \leq \delta \} \quad (3.2.3)$$

y

$$\Omega(\delta, M) \doteq \sup \{ \|x\| : x \in M, \|Tx\| \leq \delta \}. \quad (3.2.4)$$

Observar que $\Delta(\delta, M, R)$ puede interpretarse como el peor error que puede cometerse al aproximar la mejor solución aproximada x^\dagger del problema (3.1.1) con Ry^δ bajo los supuestos que $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ y $x^\dagger \in M$. Nos referiremos a $\Delta(\delta, M, R)$ como el **peor error de R bajo la hipótesis $x^\dagger \in M$** o simplemente como el **peor error de R bajo el supuesto M** .

En la siguiente proposición probaremos que la exactitud de cualquier método (asociada a cualquier operador R) está acotada por $\Omega(\delta, M)$. En todo lo que sigue X e Y denotarán espacios de Hilbert y $T \in L(X, Y)$.

Proposición 3.10. Sean $M \subseteq X$, $\delta > 0$, $R : Y \rightarrow X$ un operador arbitrario con $R(0) = 0$. Entonces

$$\Delta(\delta, M, R) \geq \Omega(\delta, M). \quad (3.2.5)$$

DEMOSTRACION. Sea $x \in M$ tal que $\|Tx\| \leq \delta$. Ya que $0 \in Y$ y $\|Tx\| \leq \delta$, de (3.2.3) se sigue que $\|R(0) - x\| \leq \Delta(\delta, M, R)$ y como por hipótesis $R(0) = 0$ tenemos que $\|x\| \leq \Delta(\delta, M, R)$. Como x es arbitrario de esta desigualdad concluimos que

$$\Omega(\delta, M) = \sup \{ \|x\| : x \in M, \|Tx\| \leq \delta \} \leq \Delta(\delta, M, R).$$

■

Usando la proposición anterior probaremos que para problemas mal condicionados no es posible tener un orden de convergencia uniforme en y . Esto es, la velocidad de convergencia del error total como función del ruido puede ser arbitrariamente lenta dependiendo de $y \in D(T^\dagger)$.

Proposición 3.11. *Supongamos que $R(T)$ no es cerrado y sea $\{R_\alpha\}$ una regularización para T^\dagger con $R_{\hat{\alpha}}(0) = 0$, donde $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta, y^\delta)$ es una regla de elección de parámetro. Entonces no puede haber una función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = 0$ tal que, para todo $y \in D(T^\dagger)$ con $\|y\| \leq 1$ y para todo $\delta > 0$ se verifique que*

$$\|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| \leq f(\delta). \quad (3.2.6)$$

DEMOSTRACION. Sea $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta, y^\delta)$ una regla de elección de parámetro y supongamos por el contrario que existe $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = 0$ tal que (3.2.6) se satisface para todo $y \in D(T^\dagger)$ con $\|y\| \leq 1$ y para todo $\delta > 0$. Observar que si $y \in D(T^\dagger)$ con $\|y\| \leq 1$ entonces $x^\dagger = T^\dagger y \in R(T^\dagger) = N(T)^\perp$. Luego, $N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0)) \neq \emptyset$ donde $B_1(0) = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$.

Para $\delta > 0$ definamos a continuación el operador $R^\delta : Y \rightarrow X$ como $R^\delta y^\delta \doteq R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta$ y consideremos el peor error de R^δ sobre el conjunto $N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0))$, esto es,

$$\begin{aligned} & \Delta(\delta, N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0)), R^\delta) \\ &= \sup \{ \|R^\delta y^\delta - x\| : x \in N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0)), y^\delta \in Y, \|Tx - y^\delta\| \leq \delta \} \\ &= \sup \{ \|R^\delta y^\delta - T^\dagger y\| : y \in D(T^\dagger) \cap B_1(0), y^\delta \in Y, \|Qy - y^\delta\| \leq \delta \} \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $R(T^\dagger) = N(T)^\perp$ y $TT^\dagger = Q|_{D(T^\dagger)}$. Consideramos ahora los conjuntos

$$C_1 \doteq \{ \|R^\delta y^\delta - T^\dagger y\| : y \in D(T^\dagger) \cap B_1(0), y^\delta \in Y, \|Qy - y^\delta\| \leq \delta \} \subset \mathbb{R}$$

y

$$C_2 \doteq \{ \|R^\delta y^\delta - T^\dagger y\| : y \in D(T^\dagger) \cap B_1(0), y^\delta \in Y \} \subset \mathbb{R}.$$

Entonces $\Delta(\delta, N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0)), R^\delta) = \sup C_1$. Además, dado que $C_1 \subset C_2$ se cumple que $\sup C_1 \leq \sup C_2$. Como hemos supuesto que $\|R^\delta y^\delta - T^\dagger y\| \leq f(\delta)$ para todo $y \in D(T^\dagger) \cap B_1(0)$ se sigue que $\sup C_2 \leq f(\delta)$ y por lo tanto $\sup C_1 \leq f(\delta)$, o sea,

$$\Delta(\delta, N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0)), R^\delta) \leq f(\delta).$$

La Proposición 3.10 implica entonces que

$$0 \leq \Omega(\delta, N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0))) \leq f(\delta), \quad \forall \delta > 0.$$

Tomando límite en ambos miembros para $\delta \rightarrow 0$ y dado que $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = 0$ obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(\delta, N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0))) = 0. \quad (3.2.7)$$

Probaremos a continuación que este resultado implica que T^\dagger es acotado. Para esto basta probar que $T^\dagger|_{R(T) \cap B_1(0)}$ es continuo. Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(T) \cap B_1(0)$ una sucesión tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ con $y \in R(T) \cap B_1(0)$. Definamos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como $x_n \doteq T^\dagger y_n$ y $x \doteq T^\dagger y$. Entonces

$$Tx_n = TT^\dagger y_n = Qy_n = y_n \quad (3.2.8)$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $y_n \in R(T)$. Análogamente

$$Tx = y. \quad (3.2.9)$$

Como $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, dado $0 < \delta < 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n - y\| < \delta$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, de (3.2.8) y (3.2.9)

$$\|T(x_n - x)\| = \|y_n - y\| < \delta < 1, \quad \forall n \geq N.$$

Luego, $x_n - x \in T^{-1}(B_1(0))$. Además como $x_n - x \in R(T^\dagger) = N(T)^\perp$, tenemos que $x_n - x \in N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0))$ y $\|T(x_n - x)\| < \delta$ por lo tanto

$$0 \leq \|x_n - x\| \leq \Omega(\delta, N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0))), \quad \forall n \geq N, \forall 0 < \delta < 1$$

y en consecuencia

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq \Omega(\delta, N(T)^\perp \cap T^{-1}(B_1(0))), \quad \forall 0 < \delta < 1.$$

Tomando límite para $\delta \rightarrow 0$ y usando (3.2.7) obtenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, de donde $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ o sea, $T^\dagger y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^\dagger y$. Luego, $T^\dagger|_{R(T) \cap B_1(0)}$ es continuo y por lo tanto $T^\dagger|_{R(T)}$ también lo es. Como $T^\dagger|_{R(T)^\perp} = 0$ se sigue que T^\dagger es continuo sobre todo su dominio y por lo tanto acotado. Luego $R(T)$ es cerrado (ver Proposición 2.7). ■

De (3.2.3) dedujimos el peor error del operador R bajo el supuesto M . En la terminología específica a los conjuntos $M \subset X$ utilizados para formular una hipótesis de la forma “ $x^\dagger \in M$ ” se los denomina **conjuntos fuente**. Por razones que veremos a continuación resultan de particular interés conjuntos fuente de la forma

$$X_{\mu, \rho} \doteq \{x \in X : x = (T^*T)^\mu \omega, \|\omega\| \leq \rho\}, \quad \mu > 0, \rho > 0 \quad (3.2.10)$$

y

$$X_\mu \doteq \bigcup_{\rho > 0} X_{\mu, \rho} = R((T^*T)^\mu). \quad (3.2.11)$$

Ya que en los problemas mal condicionados T es un operador que “suaviza”, el requerimiento de que un elemento $x \in X$ esté en $X_{\mu, \rho}$ puede verse como una condición de suavidad sobre x .

Observar que:

$$\blacktriangleright X_{\mu, \rho} \subset N(T)^\perp, \quad \forall \mu, \rho > 0$$

resultado que se obtiene inmediatamente de la Proposición 2.31-iii) con $A = (T^*T)^\mu$, $g(\lambda) = \lambda^{\mu-1}$ y $f(\lambda) = \lambda$. Además,

- para μ fijo y $\rho_1 < \rho_2$, $X_{\mu, \rho_1} \subset X_{\mu, \rho_2}$,
- para $\mu_1 < \mu_2$, $X_{\mu_1} \supset X_{\mu_2}$.

En el caso particular en que $T = K$ sea un operador compacto el conjunto X_μ puede caracterizarse en término de los valores singulares de K . Más precisamente se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.12. *Sea K un operador compacto y $(\sigma_n; v_n, u_n)$ el correspondiente sistema singular. Entonces, para $\mu > 0$*

$$K^\dagger y \in R((K^*K)^\mu) \quad (3.2.12)$$

si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^{2+4\mu}} < \infty. \quad (3.2.13)$$

DEMOSTRACION. Por hipótesis $(\sigma_n; v_n, u_n)$ es el sistema singular asociado al operador compacto K , entonces $(\sigma_n^2; v_n)$ es un autosistema para el operador compacto y autoadjunto K^*K y en consecuencia $(\sigma_n^{2\mu}; v_n)$ es un autosistema para el operador compacto y autoadjunto $(K^*K)^\mu$. Así,

$$(K^*K)^\mu \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{2\mu} \langle \omega, v_n \rangle v_n, \quad \forall \omega \in X. \quad (3.2.14)$$

Por otro lado, como K es compacto, del Teorema 2.15, si $y \in D(K^\dagger)$

$$K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n. \quad (3.2.15)$$

Luego, $K^\dagger y \in R((K^*K)^\mu)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists \omega \in X : (K^*K)^\mu \omega = K^\dagger y \\ &\Leftrightarrow \exists \omega \in X : \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{2\mu} \langle \omega, v_n \rangle v_n = K^\dagger y \quad (\text{de (3.2.14)}) \\ &\Leftrightarrow \exists \omega \in X : \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{2\mu} \langle \omega, v_n \rangle v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n \quad (\text{de (3.2.15)}) \\ &\Leftrightarrow \exists \omega \in X : \sigma_n^{2\mu} \langle \omega, v_n \rangle = \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\{v_n\} \text{ ortonormal}). \quad (3.2.16) \end{aligned}$$

Como por el Teorema de Riesz-Fischer (Teorema A.17)

$$\omega \in X \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \omega, v_n \rangle|^2 < \infty,$$

de (3.2.16) deducimos que

$$K^\dagger y \in R((K^*K)^\mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^{2+4\mu}} < \infty.$$

■

Observar que (3.2.12)-(3.2.13) es equivalente a $x \in R((K^*K)^\mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle Kx, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^{2+4\mu}} < \infty$.

Del Criterio de Picard (Teorema 2.15-i), $y \in D(K^\dagger) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty$. En consecuencia, (3.2.12) puede verse como una escala de condiciones para que $K^\dagger y \in X_\mu$ partiendo de dicho criterio con $\mu = 0$. Así mismo, al igual que en dicho criterio, la condición (3.2.13) es una condición sobre las velocidades de decaimiento de los coeficientes de y en la base $\{u_n\}$. Observar que esta condición es más restrictiva cuanto más grande es μ . Por otro lado, para un μ fijo, cuanto peor sea el grado de mal condicionamiento del problema (o sea, cuanto más rápido decrezcan los σ_n) más severa será la condición (3.2.13).

De la Proposición 3.10 se deduce inmediatamente que $\Omega(\delta, M)$ es una cota inferior para la velocidad de convergencia de cualquier método de regularización para resolver (3.1.1) bajo el supuesto $x^\dagger \in M$. En los siguientes dos resultados se analizará en detalle esta cota inferior en el caso particular $M = X_{\mu, \rho}$.

Proposición 3.13. Sean $\mu > 0, \rho > 0$, $X_{\mu, \rho}$ definido como en (3.2.10) y $\Omega(\delta, X_{\mu, \rho})$ como en (3.2.4). Entonces, para todo $\delta > 0$ se satisface que

$$\Omega(\delta, X_{\mu, \rho}) \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (3.2.17)$$

DEMOSTRACION. Sea $x \in X_{\mu, \rho}$ tal que $\|Tx\| \leq \delta$. Entonces existe $\omega \in X$, $\|\omega\| \leq \rho$ tal que $x = (T^*T)^\mu \omega$. Luego, usando la Desigualdad de Interpolación (2.3.27) con $r = \mu$ y $s = \mu + \frac{1}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(T^*T)^\mu \omega\| \\ &\leq \left\| (T^*T)^{\mu+\frac{1}{2}} \omega \right\|^{\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}} \|\omega\|^{1-\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}} \\ &= \left\| (T^*T)^{\mu+\frac{1}{2}} \omega \right\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|\omega\|^{\frac{1}{2\mu+1}} \\ &= \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} (T^*T)^\mu \omega \right\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|\omega\|^{\frac{1}{2\mu+1}} \end{aligned}$$

$$\leq \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} x \right\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (3.2.18)$$

Por otro lado,

$$\left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} x \right\|^2 = \left\langle (T^*T)^{\frac{1}{2}} x, (T^*T)^{\frac{1}{2}} x \right\rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2. \quad (3.2.19)$$

De (3.2.18) y (3.2.19) obtenemos que $\|x\| \leq \|Tx\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$.

Así, $\forall x \in X_{\mu,\rho}$ tal que $\|Tx\| \leq \delta$ se tiene que $\|x\| \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$. En consecuencia

$$\Omega(\delta, X_{\mu,\rho}) = \sup \{ \|x\| : x \in X_{\mu,\rho}, \|Tx\| \leq \delta \} \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad \blacksquare$$

En la siguiente proposición probaremos que si $R(T)$ no es cerrado entonces la estimación (3.2.17) es óptima, es decir, no puede mejorarse. Por simplicidad probaremos esto sólo para el caso particular en que T es un operador compacto.

Proposición 3.14. *Sea K un operador compacto y supongamos que $R(K)$ no es cerrado. Entonces para todo $\mu > 0, \rho > 0$, existe una sucesión $\{\delta_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y*

$$\Omega(\delta_n, X_{\mu,\rho}) = \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (3.2.20)$$

DEMOSTRACION. Sean $\mu, \rho > 0$ y $(\sigma_n; v_n, u_n)$ el sistema singular asociado a K . Como por hipótesis $R(K)$ no es cerrado existen infinitos valores singulares $\sigma_n > 0$ y $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $\delta_n \doteq \rho \sigma_n^{2\mu+1}$. Entonces $\delta_n > 0$, $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y

$$\left(\frac{\delta_n}{\rho} \right)^{\frac{2}{2\mu+1}} = \sigma_n^2 \quad (3.2.21)$$

es un autovalor de K^*K asociado al autovector v_n . Definiendo $x_n \doteq (K^*K)^\mu (\rho v_n)$ se tiene que $x_n \in X_{\mu,\rho}$ (pues $\|\rho v_n\| = \rho \|v_n\| = \rho$). Además,

$$\begin{aligned} x_n &= \rho (K^*K)^\mu v_n \\ &= \rho \sigma_n^{2\mu} v_n \quad (\sigma_n^{2\mu} \text{ autovalor de } (K^*K)^\mu) \\ &= \rho \left(\frac{\delta_n}{\rho} \right)^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} v_n \quad (\text{por (3.2.21)}) \\ &= \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{1-\frac{2\mu}{2\mu+1}} v_n \\ &= \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} v_n. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Luego

$$\|x_n\| = \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \quad (3.2.23)$$

Además,

$$\begin{aligned}
K^* K x_n &= \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} K^* K v_n \quad (\text{de (3.2.22)}) \\
&= \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \sigma_n^2 v_n \\
&= \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \left(\frac{\delta_n}{\rho} \right)^{\frac{2}{2\mu+1}} v_n \quad (\text{de (3.2.21)}) \\
&= \delta_n^{\frac{2\mu+2}{2\mu+1}} \rho^{-\frac{1}{2\mu+1}} v_n, \tag{3.2.24}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|K x_n\|^2 &= \langle K x_n, K x_n \rangle \\
&= \langle K^* K x_n, x_n \rangle \\
&= \left\langle \delta_n^{\frac{2\mu+2}{2\mu+1}} \rho^{-\frac{1}{2\mu+1}} v_n, x_n \right\rangle \quad (\text{de (3.2.24)}) \\
&= \left\langle \delta_n^{\frac{2\mu+2}{2\mu+1}} \rho^{-\frac{1}{2\mu+1}} v_n, \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} v_n \right\rangle \quad (\text{de (3.2.22)}) \\
&= \delta_n^{\frac{2\mu+2}{2\mu+1}} \rho^{-\frac{1}{2\mu+1}} \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \langle v_n, v_n \rangle \\
&= \delta_n^{\frac{4\mu+2}{2\mu+1}} \|v_n\|^2 \\
&= \delta_n^{\frac{2(2\mu+1)}{2\mu+1}} = \delta_n^2.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $x_n \in X_{\mu,\rho}$, $\|K x_n\| = \delta_n$ y por lo tanto

$$\Omega(\delta_n, X_{\mu,\rho}) \geq \|x_n\| = \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \quad (\text{de (3.2.23)}).$$

Por otro lado, como en virtud de la Proposición 3.13 se tiene que

$$\Omega(\delta_n, X_{\mu,\rho}) \leq \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}},$$

concluimos que $\Omega(\delta_n, X_{\mu,\rho}) = \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$. ■

Notar que aún en el caso de K compacto, para otros valores de δ que no sean parte de la sucesión que converge a cero construída en la demostración, podría suceder que $\Omega(\delta, X_{\mu,\rho})$ sea estrictamente menor que $\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$.

Observación 3.15. Las dos proposiciones anteriores junto con la Proposición 3.10 tienen importantes consecuencias en lo que respecta a la optimalidad de un método de regularización. En efecto, si $R(T)$ no es cerrado se deduce de tales proposiciones que, bajo la hipótesis $x^\dagger \in X_{\mu,\rho}$, ningún método de regularización puede proveer soluciones aproximadas que converjan a x^\dagger más rápidamente que $\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

Esta observación induce en forma natural las siguientes definiciones.

Definición 3.16. Consideremos la ecuación (3.1.1). Supongamos que $R(T)$ no es cerrado y que $\{R_\alpha\}$ es una regularización para T^\dagger . Sean $\mu > 0, \rho > 0, y \in T(X_{\mu,\rho})$ y sea $\hat{\alpha}$ una regla de elección de parámetro.

i) Diremos que el método $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es **óptimo en $X_{\mu,\rho}$** si

$$\Delta(\delta, X_{\mu,\rho}, R_{\hat{\alpha}}) = \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}, \quad \forall \delta > 0. \quad (3.2.25)$$

Es **óptimo en X_μ** si es óptimo en $X_{\mu,\rho}, \forall \rho > 0$.

ii) Diremos que el método $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es **de orden óptimo en $X_{\mu,\rho}$** si existe una constante $c \geq 1$ tal que

$$\Delta(\delta, X_{\mu,\rho}, R_{\hat{\alpha}}) \leq c \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}, \quad \forall \delta > 0. \quad (3.2.26)$$

Es **de orden óptimo en X_μ** si lo es en $X_{\mu,\rho}, \forall \rho > 0$.

Observar que en (3.2.25) y (3.2.26), para $\delta > 0$ fijo

$$\Delta(\delta, X_{\mu,\rho}, R_{\hat{\alpha}}) = \sup \{ \|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta - x\| : x \in X_{\mu,\rho}, y^\delta \in Y, \|Tx - y^\delta\| \leq \delta \}.$$

Notar además que la condición (3.2.26) es equivalente a $\Delta(\delta, X_{\mu,\rho}, R_\alpha) = O\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$.

Respecto a los conjuntos fuente, sobre los cuales se dieron las definiciones anteriores, observar que cuando $\mu \rightarrow 0$ se hacen más grandes y las correspondientes velocidades de convergencia son más lentas, esto es, si $\mu_1 < \mu_2$ entonces $X_{\mu_1} \supset X_{\mu_2}$ y $\frac{2\mu_1}{2\mu_1+1} < \frac{2\mu_2}{2\mu_2+1}$. A pesar de ello, en general sucede que $\bigcup_{\mu>0} X_\mu \neq X$ y por lo tanto $\bigcup_{\mu>0} T(X_\mu) \neq T(X) = R(T)$. Que ésto es así se puede ver claramente en el caso en que el operador T sea compacto y no degenerado, usando el Teorema 2.15 y la Proposición 3.12. En efecto, sea $y \in R(K)$ entonces $y \in D(K^\dagger)$ y por el Teorema 2.15 podemos implicar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty. \quad (3.2.27)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\sigma_n| < 1 \forall n \geq N$. Por lo tanto, $\sigma_n^{2+4\mu} < \sigma_n^2 \forall \mu > 0$ y $\forall n \geq N$. De esto se deduce que $\frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^{2+4\mu}} \forall \mu > 0$ y $\forall n \geq N$ tal que $|\langle y, u_n \rangle| \neq 0$. Así, la convergencia de la serie en (3.2.27) no garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^{2+4\mu}}$. Equivalentemente (ver la Proposición 3.12) no podemos garantizar que $K^\dagger y \in R((K^*K)^\mu) = X_\mu$, es decir, que $KK^\dagger y = y \in K(X_\mu)$. Así, $y \in R(K)$ no necesariamente implica que $y \in K(X_\mu)$ para algún $\mu > 0$.

Sin embargo, se puede probar que, bajo ciertas hipótesis, si un método de regularización es de orden óptimo sobre un X_{μ_0} específico, entonces es convergente para todo

$y \in R(T)$. Lo que se requiere como hipótesis sobre dicho método es que la regla de elección de parámetro dependa de y^δ y de una cota para el nivel de ruido ligeramente más grande que δ . Formalizaremos esto a través del siguiente teorema donde, si $\{R_\alpha\}$ es una regularización para T^\dagger y $\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)$ es una regla de elección de parámetro, para $\tau > 1$ definimos

$$\hat{\alpha}_\tau(\delta, y^\delta) \doteq \hat{\alpha}(\tau\delta, y^\delta). \quad (3.2.28)$$

Teorema 3.17. *Si para todo $\tau > \tau_0 \geq 1$ el método de regularización $(R_\alpha, \hat{\alpha}_\tau)$ es de orden óptimo en $X_{\mu_0, \rho}$ para algún $\mu_0 > 0$ y para todo $\rho > 0$, entonces todos los métodos de regularización $(R_\alpha, \hat{\alpha}_\tau)$ con $\tau > \tau_0$ son convergentes para $y \in R(T)$ y son de orden óptimo en todo $X_{\nu, \rho}$ para todos ν, ρ tales que $0 < \nu \leq \mu_0$ y $\rho > 0$.*

DEMOSTRACION. Probaremos el teorema en el caso particular en que el operador T es compacto. Sean $\delta > 0$, $y \in R(T)$ fijo, $y \neq 0$, $\|y\| > \delta$, $x^\dagger = T^\dagger y$ y sea y^δ una perturbación de y tal que $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. La idea de la demostración consiste en considerar a y^δ una perturbación de $(I - F_\varepsilon)y$ siendo $\{F_\lambda\}$ la familia espectral asociada al operador TT^* y con una adecuada elección de $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$. Observar que, si $\{E_\lambda\}$ es la familia espectral asociada al operador T^*T y definimos $x_\varepsilon \doteq (I - E_\varepsilon)x^\dagger$ (notar que x_ε es la expansión espectral truncada de x^\dagger), entonces

$$\begin{aligned} x_\varepsilon &= (I - E_\varepsilon)T^\dagger y \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^\dagger y, v_n \rangle v_n - \left(\sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} \langle T^\dagger y, v_n \rangle v_n + P(T^\dagger y) \right) \quad ((* \text{ y (2.3.1)}) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \varepsilon} \langle T^\dagger y, v_n \rangle v_n \quad (P \text{ proy. ortog. sobre } R(T^*T)^\perp) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \varepsilon} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_m \rangle}{\sigma_m} v_m, v_n \right\rangle v_n \quad (\text{de (2.2.10) pues } y \in D(T^\dagger)) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \varepsilon} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_m \rangle}{\sigma_m} \langle v_m, v_n \rangle \right) v_n \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \varepsilon} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n \quad (\text{pues } \{v_n\} \text{ es ortonormal}). \end{aligned}$$

(*) Notar que $T^\dagger y \in R(T^\dagger) = N(T)^\perp = \overline{R(T^*)} = \overline{R(T^*T)}$ y $\{v_n\}$ expande a $\overline{R(T^*T)}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} Tx_\varepsilon &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \varepsilon} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} T v_n \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \varepsilon} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} \sigma_n u_n \quad (T v_n = \sigma_n u_n) \end{aligned}$$

$$= (I - F_\varepsilon)y \quad (\text{por (2.3.9) pues } y \in R(T) \text{ y } \varepsilon > 0).$$

Luego,

$$(I - F_\varepsilon)y = Tx_\varepsilon, \quad \text{donde } x_\varepsilon = (I - E_\varepsilon)x^\dagger. \quad (3.2.29)$$

Observar que si $x^\dagger \in X_{\mu_0, \rho}$ entonces $x^\dagger = (T^*T)^{\mu_0} \tilde{\omega}$ con $\|\tilde{\omega}\| \leq \rho$ y en consecuencia,

$$x_\varepsilon = (I - E_\varepsilon)x^\dagger = (I - E_\varepsilon)(T^*T)^{\mu_0} \tilde{\omega} = (T^*T)^{\mu_0} (I - E_\varepsilon) \tilde{\omega} \doteq (T^*T)^{\mu_0} \omega, \quad (3.2.30)$$

de donde $x_\varepsilon \in X_{\mu_0}$. Más precisamente, $x_\varepsilon \in X_{\mu_0, \tilde{\rho}}$ para algún $\tilde{\rho} > 0$. Calculemos concretamente $\tilde{\rho} \doteq \|\omega\|$.

$$\begin{aligned} \omega &= (T^*T)^{-\mu_0} x_\varepsilon \\ &= (T^*T)^{-\mu_0} (I - E_\varepsilon)x^\dagger \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-\mu_0} \chi_{[\varepsilon, \|T\|^2]}(\lambda) dE_\lambda x^\dagger \quad (\text{de (2.3.5) con } f(\cdot) = (\cdot)^{-\mu_0} \chi_{[\varepsilon, \|T\|^2]}(\cdot)) \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda^{-\mu_0} dE_\lambda x^\dagger, \end{aligned}$$

de donde

$$\|\omega\|^2 = \tilde{\rho}^2 = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda^{-2\mu_0} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2. \quad (3.2.31)$$

Sea $\tau > \tau_0 \geq 1$ fijo y definamos

$$\tilde{\tau} \doteq \frac{\tau + \tau_0}{2}, \quad \tilde{\delta} \doteq \frac{2\tau}{\tau + \tau_0} \delta.$$

Ya que $0 < \tau + \tau_0 < 2\tau$ se sigue que $\frac{2\tau}{\tau + \tau_0} > 1$ y por lo tanto $\tilde{\delta} > \delta$. Además, como $2\tau < 2(\tau + \tau_0)$ se tiene que $\frac{2\tau}{\tau + \tau_0} < 2$ y por lo tanto $\tilde{\delta} < 2\delta$. Así, $\tilde{\delta} \in (\delta, 2\delta)$. Observar también que $\tau_0 < \tilde{\tau} < \tau$ y que $\tau\delta = \tilde{\tau}\tilde{\delta}$.

Definamos ahora $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ como

$$\varepsilon(\delta) \doteq \inf \left\{ \bar{\varepsilon} > 0 : \|F_{\bar{\varepsilon}}y\| \geq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta \right\}.$$

Observar que $\varepsilon < \infty$ pues

$$S \doteq \left\{ \bar{\varepsilon} > 0 : \|F_{\bar{\varepsilon}}y\| \geq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta \right\} \neq \emptyset.$$

En efecto, como $\{F_\lambda\}$ es una familia espectral, de la Definición 2.17-d) se sigue que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|F_\lambda y\| = \|y\|$ y en consecuencia, dado $\eta = \frac{2\tau_0}{\tau + \tau_0} \delta$ existe $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\eta)$ tal que para todo $\lambda \geq \bar{\lambda}$, $\| \|F_\lambda y\| - \|y\| \| < \eta$. En particular, $\| \|F_{\bar{\lambda}} y\| - \|y\| \| < \frac{2\tau_0}{\tau + \tau_0} \delta$, de donde $\|F_{\bar{\lambda}} y\| > \|y\| - \frac{2\tau_0}{\tau + \tau_0} \delta > \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta$ pues $\|y\| > \delta$. Luego, $\bar{\lambda} \in S$. Además $\varepsilon > 0$ pues $y \neq 0$.

Claramente, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon - \frac{1}{n} \notin S$ y en consecuencia $\left\| F_{\varepsilon - \frac{1}{n}} y \right\| < \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta$. Usando la continuidad por izquierda de la familia espectral $\{F_\lambda\}$ y la continuidad de la norma, haciendo tender n a ∞ concluimos que

$$\|F_\varepsilon y\| \leq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta. \quad (3.2.32)$$

Por otro lado como $\varepsilon = \inf S > 0$, se tiene que $2\varepsilon > \bar{\varepsilon}_0$ para algún $\bar{\varepsilon}_0 \in S$ de donde

$$\begin{aligned} \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta &\leq \|F_{\bar{\varepsilon}_0} y\| \\ &= \|F_{\bar{\varepsilon}_0} F_{2\varepsilon} y\| \quad (\text{por la monotonía de } \{F_\lambda\}) \\ &\leq \|F_{\bar{\varepsilon}_0}\| \|F_{2\varepsilon} y\| \\ &= \|F_{2\varepsilon} y\| \quad (\text{pues } \|F_{\bar{\varepsilon}_0}\| = 1). \end{aligned}$$

Luego,

$$\|F_{2\varepsilon} y\| \geq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta. \quad (3.2.33)$$

Como

$$\begin{aligned} \|(I - F_\varepsilon) y - y^\delta\| &\leq \|y - y^\delta\| + \|F_\varepsilon y\| \\ &\leq \delta + \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta \quad (\text{de (3.2.32)}) \\ &= \frac{2\tau}{\tau + \tau_0} \delta = \tilde{\delta}, \end{aligned}$$

concluimos que y^δ es una perturbación de $(I - F_\varepsilon) y$ con $\tilde{\delta}$ como cota para la perturbación. Observar además que

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_\tau(\delta, y^\delta) &= \hat{\alpha}(\tau\delta, y^\delta) \quad (\text{de (3.2.28) pues } \tau > 1) \\ &= \hat{\alpha}(\tilde{\tau}\tilde{\delta}, y^\delta) = \hat{\alpha}_{\tilde{\tau}}(\tilde{\delta}, y^\delta). \end{aligned}$$

Así, la regla de elección de parámetro $\hat{\alpha}_\tau$ con cota δ para el nivel de ruido es idéntica a la regla $\hat{\alpha}_{\tilde{\tau}}$ con cota $\tilde{\delta}$ para el nivel de ruido. En consecuencia, las correspondientes soluciones regularizadas son las mismas, o sea

$$R_{\hat{\alpha}_{\tilde{\tau}}(\tilde{\delta}, y^\delta)} y^\delta = R_{\hat{\alpha}(\tau\delta, y^\delta)} y^\delta = R_{\hat{\alpha}_\tau(\delta, y^\delta)} y^\delta \doteq x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta. \quad (3.2.34)$$

Ya que $\tilde{\tau} > \tau_0$ y $\tilde{\rho} > 0$, por hipótesis tenemos que $(R_\alpha, \hat{\alpha}_{\tilde{\tau}})$ es de orden óptimo en $X_{\mu_0, \tilde{\rho}}$ y por lo tanto existe una constante $c_{\tilde{\tau}} \geq 1$ tal que

$$\Delta\left(\tilde{\delta}, X_{\mu_0, \tilde{\rho}}, R_{\hat{\alpha}_{\tilde{\tau}}}\right) \leq c_{\tilde{\tau}} \tilde{\delta}^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \tilde{\rho}^{\frac{1}{2\mu_0+1}}. \quad (3.2.35)$$

Como

$$\begin{aligned} \Delta\left(\tilde{\delta}, X_{\mu_0, \tilde{\rho}}, R_{\hat{\alpha}_\tau}\right) &= \sup_{\substack{x \in X_{\mu_0, \tilde{\rho}} \\ y^\delta: \|Tx - y^\delta\| \leq \tilde{\delta}}} \left\{ \left\| R_{\hat{\alpha}_\tau(\tilde{\delta}, y^\delta)} y^\delta - x \right\| \right\} \\ &= \sup_{\substack{x \in X_{\mu_0, \tilde{\rho}} \\ y^\delta: \|Tx - y^\delta\| \leq \tilde{\delta}}} \left\{ \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x\| \right\} \quad (\text{de (3.2.34)}), \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

y $x_\varepsilon \in X_{\mu_0, \tilde{\rho}}$ (ver (3.2.30)) con $\|Tx_\varepsilon - y^\delta\| = \|(I - F_\varepsilon)y - y^\delta\| \leq \tilde{\delta}$, se sigue de (3.2.35) y (3.2.36) que

$$\begin{aligned} \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x_\varepsilon\| &\leq c_{\tilde{\tau}} \tilde{\delta}^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \tilde{\rho}^{\frac{1}{2\mu_0+1}} \\ &\leq c_{\tilde{\tau}} 2^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \tilde{\rho}^{\frac{1}{2\mu_0+1}} \quad (\text{pues } \tilde{\delta} < 2\delta) \\ &= c_1 \delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \tilde{\rho}^{\frac{1}{2\mu_0+1}} \quad (\text{con } c_1 \doteq c_{\tilde{\tau}} 2^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} > 1). \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

► Probemos ahora que $(R_\alpha, \hat{\alpha}_\tau)$ es de orden óptimo en $X_{\nu, \rho}$ para todos ν, ρ tales que $0 < \nu \leq \mu_0$ y $\rho > 0$. Para ello debemos acotar apropiadamente

$$\Delta(\delta, X_{\nu, \rho}, R_{\hat{\alpha}_\tau}) = \sup_{\substack{x \in X_{\nu, \rho} \\ y^\delta: \|Tx - y^\delta\| \leq \delta}} \left\{ \left\| R_{\hat{\alpha}_\tau(\delta, y^\delta)} y^\delta - x \right\| \right\} = \sup_{\substack{x \in X_{\nu, \rho} \\ y^\delta: \|Tx - y^\delta\| \leq \delta}} \left\{ \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x\| \right\}.$$

El caso $\nu = \mu_0$ se satisface por hipótesis. Supongamos ahora que $\nu \in (0, \mu_0)$ y que $x^\dagger \in X_{\nu, \rho}$. Entonces

$$x^\dagger = (T^*T)^\nu z, \quad \text{con } \|z\| \leq \rho. \quad (3.2.38)$$

Como $x_\varepsilon = (I - E_\varepsilon)x^\dagger$, de (3.2.30) y (3.2.38) tenemos que $(T^*T)^{\mu_0} \omega = (I - E_\varepsilon)(T^*T)^\nu z$, de donde $\omega = (T^*T)^{-\mu_0} (I - E_\varepsilon)(T^*T)^\nu z = (T^*T)^{\nu - \mu_0} (I - E_\varepsilon)z$ (pues la familia espectral conmuta con todas las potencias del operador) y en consecuencia

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^2 &= \|\omega\|^2 \\ &= \left\| (T^*T)^{\nu - \mu_0} (I - E_\varepsilon)z \right\|^2 \\ &= \int_\varepsilon^{+\infty} \lambda^{2(\nu - \mu_0)} d\|E_\lambda z\|^2 \\ &\leq \varepsilon^{2(\nu - \mu_0)} \int_\varepsilon^{+\infty} d\|E_\lambda z\|^2 \quad (\text{pues } \nu < \mu_0) \\ &\leq \varepsilon^{2(\nu - \mu_0)} \|z\|^2 \\ &\leq \varepsilon^{2(\nu - \mu_0)} \rho^2 \quad (\text{por (3.2.38)}). \end{aligned}$$

Luego, $\tilde{\rho} \leq \varepsilon^{\nu - \mu_0} \rho$ lo cual llevado a (3.2.37) da

$$\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x_\varepsilon\| \leq c_1 \delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \varepsilon^{\frac{\nu - \mu_0}{2\mu_0+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu_0+1}}$$

$$= c_1 \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \varepsilon^{\frac{\nu-\mu_0}{2\mu_0+1}} \rho. \quad (3.2.39)$$

Por otro lado, como $\tau > \tau_0$, de (3.2.33) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta &\leq \frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0} \|F_{2\varepsilon} y\| \\ &= \frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0} \|F_{2\varepsilon} T x^\dagger\| \\ &= \frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0} \|F_{2\varepsilon} T (T^* T)^\nu z\| \quad (\text{por (3.2.38)}) \\ &\leq \frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0} \|F_{2\varepsilon} T (T^* T)^\nu\| \|z\| \\ &\leq \frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0} \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} \left\{ \sqrt{\lambda} |\lambda|^\nu \chi_{[0, 2\varepsilon]}(\lambda) \right\} \|z\| \quad (\text{por (2.3.13)}) \\ &\leq \frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0} (2\varepsilon)^{\nu+\frac{1}{2}} \rho \quad (\text{pues } \|z\| \leq \rho), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \right)^{\frac{2}{2\nu+1}} \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{2}{2\nu+1}} \\ &= c_2 \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{2}{2\nu+1}} \quad (\text{con } c_2 \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \right)^{\frac{2}{2\nu+1}} < 1), \end{aligned}$$

y como $\nu - \mu_0 < 0$

$$\varepsilon^{\frac{\nu-\mu_0}{2\mu_0+1}} \leq c_3 \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{2(\nu-\mu_0)}{(2\nu+1)(2\mu_0+1)}} \quad (\text{con } c_3 \doteq c_2^{\nu-\mu_0} > 1)$$

lo cual llevado a (3.2.39) nos da

$$\begin{aligned} \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x_\varepsilon\| &\leq c_1 c_3 \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{2(\nu-\mu_0)}{(2\nu+1)(2\mu_0+1)}} \rho \\ &= c_1 c_3 \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho \\ &= c_4 \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}} \quad (\text{con } c_4 \doteq c_1 c_3 > 1). \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - x^\dagger\| &= \|E_\varepsilon x^\dagger\| = \|E_\varepsilon (T^* T)^\nu z\| \quad (\text{de (3.2.38)}) \\ &= \|(T^* T)^\nu E_\varepsilon z\| \end{aligned}$$

$$\leq \left\| (T^*T)^{\nu+\frac{1}{2}} E_\varepsilon z \right\|_{2\nu+1}^{2\nu} \|E_\varepsilon z\|_{2\nu+1}^{-1}, \quad (3.2.41)$$

donde en el último paso hemos utilizado la desigualdad de interpolación (2.3.27) con $s = \nu + \frac{1}{2}$ y $r = \nu$. Ahora

$$\begin{aligned} \left\| (T^*T)^{\nu+\frac{1}{2}} E_\varepsilon z \right\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^2)^{2\nu+1} |\langle E_\varepsilon z, v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^2)^{2\nu+1} |\langle z, E_\varepsilon v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} (\sigma_n^2)^{2\nu+1} |\langle z, v_n \rangle|^2 \quad \left(E_\varepsilon v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_n^2 \geq \varepsilon \\ v_n & \text{si } \sigma_n^2 < \varepsilon \end{cases} \right) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} (\sigma_n^2)^{2\nu+1} |\langle (T^*T)^{-\nu} x^\dagger, v_n \rangle|^2 \quad (\text{por (3.2.38)}) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} (\sigma_n^2)^{2\nu+1} |\langle (T^*T)^{-\nu-1} (T^*T) x^\dagger, v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} (\sigma_n^2)^{2\nu+1} |\langle T^* y, (T^*T)^{-\nu-1} v_n \rangle|^2 \quad (*) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} (\sigma_n^2)^{2\nu+1} \left| \langle T^* y, (\sigma_n^2)^{-\nu-1} v_n \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} (\sigma_n^2)^{-1} |\langle y, T v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 < \varepsilon} |\langle y, u_n \rangle|^2 \quad (T v_n = \sigma_n u_n) \\ &= \|F_\varepsilon y\|^2. \end{aligned}$$

(*) Esta igualdad se sigue del hecho que $y = T x^\dagger$ y $(T^*T)^{-\nu-1}$ es autoadjunto. En consecuencia, $\left\| (T^*T)^{\nu+\frac{1}{2}} E_\varepsilon z \right\| = \|F_\varepsilon y\|$ lo cual llevado a (3.2.41) implica que

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - x^\dagger\| &\leq \|F_\varepsilon y\|_{2\nu+1}^{2\nu} \|E_\varepsilon z\|_{2\nu+1}^{-1} \\ &\leq \|F_\varepsilon y\|_{2\nu+1}^{2\nu} \|z\|_{2\nu+1}^{-1} \\ &\leq \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}} \quad (\text{por (3.2.32) y (3.2.38)}) \\ &= \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}}. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Sea ahora $x \in X_{\nu, \rho}$ tal que $\|Tx - y^\delta\| \leq \delta$

$$\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x\| \leq \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x^\dagger\| + \|x^\dagger - x\|, \quad (3.2.43)$$

para los dos primeros términos en el lado derecho de esta última desigualdad tenemos las acotaciones (3.2.40) y (3.2.42), respectivamente. Resta acotar el tercero. Sabemos que $x^\dagger, x \in X_{\nu, \rho}$ de donde $x^\dagger - x = (T^*T)^\nu \tilde{z}$ con $\|\tilde{z}\| \leq 2\rho$ y en consecuencia $x^\dagger - x \in X_{\nu, 2\rho}$. Además

$$\|T(x^\dagger - x)\| \leq \|Tx^\dagger - y^\delta\| + \|Tx - y^\delta\| = \|y - y^\delta\| + \|Tx - y^\delta\| \leq 2\delta.$$

Tenemos así que

$$\left. \begin{array}{l} x^\dagger - x \in X_{\nu, 2\rho} \\ y \\ \|T(x^\dagger - x)\| \leq 2\delta \end{array} \right\} \Rightarrow \|x^\dagger - x\| \leq \Omega(2\delta, X_{\nu, 2\rho}),$$

de lo cual se deduce usando (3.2.17) que

$$\|x^\dagger - x\| \leq (2\delta)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} (2\rho)^{\frac{1}{2\nu+1}} = 2 \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}}. \quad (3.2.44)$$

Finalmente, con (3.2.40), (3.2.42) y (3.2.44) en (3.2.43) obtenemos

$$\begin{aligned} \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x\| &\leq c_4 \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}} + \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}} + 2\delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}} \\ &= \left(c_4 + \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} + 2 \right) \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}} \\ &= c \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}}, \end{aligned}$$

con $c > 1$ de donde

$$\sup_{\substack{x \in X_{\nu, \rho} \\ y^\delta: \|Tx - y^\delta\| \leq \delta}} \{\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x\|\} \leq c \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \rho^{\frac{1}{2\nu+1}}.$$

Por lo tanto, el método $(R_\alpha, \hat{\alpha}_\tau)$ es de orden óptimo en $X_{\nu, \rho}$ para todos ν, ρ tales que $0 < \nu \leq \mu_0$ y $\rho > 0$.

► Probemos ahora la convergencia del método $(R_\alpha, \hat{\alpha}_\tau)$ para $y \in R(T)$. Debemos probar que $\forall y \in R(T)$ se cumple

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x^\dagger\|\} \right) = 0.$$

Para ello acotemos $\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x^\dagger\|$:

$$\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x^\dagger\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x_\varepsilon\| + \|E_\varepsilon x^\dagger\| \quad (\text{por (3.2.29)}) \\
&\leq c_1 \delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \tilde{\rho}^{\frac{1}{2\mu_0+1}} + \|E_\varepsilon x^\dagger\| \quad (\text{por (3.2.37)}). \quad (3.2.45)
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.2.31)

$$\tilde{\rho}^2 = \int_\varepsilon^{+\infty} \lambda^{-2\mu_0} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \leq \varepsilon^{-2\mu_0} \int_\varepsilon^{+\infty} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \leq \varepsilon^{-2\mu_0} \|x^\dagger\|^2,$$

esto es, $\tilde{\rho} \leq \varepsilon^{-\mu_0} \|x^\dagger\|$ lo cual llevado a (3.2.45) nos da

$$\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x^\dagger\| \leq c_1 \left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{\mu_0}{2\mu_0+1}} \|x^\dagger\|^{\frac{1}{2\mu_0+1}} + \|E_\varepsilon x^\dagger\|.$$

En consecuencia

$$\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{\|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x^\dagger\|\} \leq c_1 \left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{\mu_0}{2\mu_0+1}} \|x^\dagger\|^{\frac{1}{2\mu_0+1}} + \|E_\varepsilon x^\dagger\|.$$

A continuación probaremos que $\frac{\delta^2}{\varepsilon(\delta)} \rightarrow 0$ y que $E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$. En particular, notar que la función $\varepsilon(\delta)$ es no negativa y monótona no decreciente pues si $\delta_1 < \delta_2$ entonces

$$\left\{ \bar{\varepsilon} > 0 : \|F_{\bar{\varepsilon}} y\| \geq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta_2 \right\} \subset \left\{ \bar{\varepsilon} > 0 : \|F_{\bar{\varepsilon}} y\| \geq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta_1 \right\}$$

y en consecuencia

$$\varepsilon(\delta_2) = \inf \left\{ \bar{\varepsilon} > 0 : \|F_{\bar{\varepsilon}} y\| \geq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta_2 \right\} \geq \inf \left\{ \bar{\varepsilon} > 0 : \|F_{\bar{\varepsilon}} y\| \geq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta_1 \right\} = \varepsilon(\delta_1).$$

Entonces pueden suceder dos casos: i) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = \varepsilon_0 > 0$ ó ii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = 0$.

i) En este caso obviamente $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\varepsilon(\delta)} = 0$. Por otro lado, de (3.2.32) se sigue que $\lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\varepsilon(\delta)} y = 0$. Además como $\forall \delta > 0$, $\varepsilon_0 \leq \varepsilon(\delta) = \inf S$ se tiene que $0 \leq \|F_{\varepsilon_0} y\| \leq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta$ y por lo tanto, tomando límite cuando $\delta \rightarrow 0$, $F_{\varepsilon_0} y = 0$. Así, $\lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\varepsilon(\delta)} y = F_{\varepsilon_0} y = 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (y - T x_{\varepsilon(\delta)}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (y - T(x^\dagger - E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger)) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} T E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger = T \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger \right),
\end{aligned}$$

esto es, $\lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger \in N(T)$. Pero, $E_{\varepsilon(\delta)}$ proyecta sobre $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$ que es cerrado, por lo cual $\lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger \in N(T)^\perp$. Por lo tanto, $\lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger = 0$. Además, como $\forall \delta > 0$,

$\varepsilon_0 \leq \varepsilon(\delta)$ se tiene que $E_{\varepsilon_0} x^\dagger = E_{\varepsilon_0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger$ de donde $E_{\varepsilon_0} x^\dagger = E_{\varepsilon_0} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger \right) = E_{\varepsilon_0} 0 = 0$. Luego, $\lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger = E_{\varepsilon_0} x^\dagger = 0$.

ii) Notar que en este caso sigue siendo válido que $\lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\varepsilon(\delta)} x^\dagger = 0$. Ahora, de (3.2.33) tenemos que

$$\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta \leq \|F_{2\varepsilon} y\|. \quad (3.2.46)$$

Por otro lado, ya probamos que $\left\| (T^*T)^{\nu+\frac{1}{2}} E_\varepsilon z \right\| = \|F_\varepsilon y\|$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|F_{2\varepsilon} y\| &= \left\| (T^*T)^{\nu+\frac{1}{2}} E_{2\varepsilon} z \right\| \\ &= \left\| E_{2\varepsilon} (T^*T)^{\frac{1}{2}} (T^*T)^\nu z \right\| \\ &= \left\| E_{2\varepsilon} (T^*T)^{\frac{1}{2}} x^\dagger \right\| \quad (\text{por (3.2.38)}) \\ &= \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} E_{2\varepsilon} x^\dagger \right\| \\ &\leq \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} \right\| \|E_{2\varepsilon} x^\dagger\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in [0, 2\varepsilon]} \left\{ |\lambda|^{\frac{1}{2}} \right\} \|E_{2\varepsilon} x^\dagger\| \quad (\text{por (2.3.13) con } f(\cdot) = (\cdot)^{1/2}) \\ &= \sqrt{2\varepsilon} \|E_{2\varepsilon} x^\dagger\|, \end{aligned}$$

lo cual llevado a (3.2.46) implica que $\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta \leq \sqrt{2\varepsilon} \|E_{2\varepsilon} x^\dagger\|$ de donde

$$0 \leq \frac{\delta^2}{\varepsilon} \leq 2 \left(\frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0} \right)^2 \|E_{2\varepsilon} x^\dagger\|^2.$$

Tomando límite para $\delta \rightarrow 0$ concluimos que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\varepsilon(\delta)} = 0$.

Así, hemos probado entonces que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y - y^\delta\| \leq \delta}} \{ \|x_{\hat{\alpha}_\tau}^\delta - x^\dagger\| \} \right) = 0$. Por lo tanto el

método $(R_\alpha, \hat{\alpha}_\tau)$ es convergente. ■

3.3. Regularización por proyección

En las secciones anteriores hemos mostrado que los métodos de regularización permiten obtener aproximaciones estables de las soluciones de problemas mal condicionados de la forma $Tx = y$. Para un tratamiento numérico de tales ecuaciones se debe

buscar un método implementable, esto es, que pueda realizarse en espacios de dimensión finita. Una forma posible de lograrlo es usando **regularización por proyección** donde la regularización se logra por aproximaciones finito dimensionales, por ejemplo, a través de discretización y el uso de métodos de colocación o métodos de Galerkin (ver por ejemplo [18]). En este sentido, los siguientes métodos proveen formas prácticas para aproximar x^\dagger .

Proyección de Cuadrados Mínimos. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios finitodimensionales de X tal que

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X,$$

cuya unión $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es densa en X . Para cada n nos planteamos determinar la solución de cuadrados mínimos de mínima norma de $Tx = y$ en X_n , a la que denotaremos con x_n . Esto es, $x_n \in X_n$ debe satisfacer

$$\|Tx_n - y\| \leq \|Tz - y\|, \quad \forall z \in X_n \quad (3.3.1)$$

y

$$\|x_n\| = \inf \{\|x\| : x \in X_n \text{ y } x \text{ satisface (3.3.1)}\}.$$

En términos de la inversa generalizada de Moore-Penrose,

$$x_n = T_n^\dagger y, \quad (3.3.2)$$

donde $T_n \doteq TP_n$ y P_n es la proyección ortogonal de X sobre X_n . Observar que $R(T_n) = T(X_n)$ es un subespacio cerrado por tener dimensión finita (es imagen de un espacio de dimensión finita por una transformación lineal). En consecuencia, $D(T_n^\dagger) = R(T_n) \oplus R(T_n)^\perp = Y$ y por lo tanto, tenemos garantizada la existencia de x_n para todo $y \in Y$. Además T_n^\dagger es acotado (ver Proposición 2.7) de modo que x_n es una aproximación estable de x^\dagger .

Seidman [29] probó que, sin ninguna hipótesis adicional sobre los X_n o x^\dagger no se puede garantizar que x_n converja a x^\dagger cuando $n \rightarrow \infty$. Esto es, este método no siempre es convergente. El siguiente teorema proporciona condiciones necesarias y suficientes para garantizar esta convergencia, tanto en el sentido débil como en el sentido fuerte.

Teorema 3.18. Sean $y \in D(T^\dagger)$ y x_n definida por (3.3.2). Entonces

i) $x_n \xrightarrow{w} x^\dagger$ si y sólo si $\{\|x_n\|\}$ es acotada.

ii) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\dagger$ si y sólo si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x^\dagger\|$.

DEMOSTRACION. i) (\Rightarrow) Supongamos que $\{x_n\}$ converge débilmente a x^\dagger . Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy débil, esto es, para todo $x \in X$, $\{\langle x_n, x \rangle\}$ es una sucesión de Cauchy. Denotando con $A_n(x) = \langle x_n, x \rangle$ al funcional lineal inducido por x_n

sobre X (ver Teorema A.27) tenemos que para todo $x \in X$, $\{A_n(x)\}$ es una sucesión acotada (por ser de Cauchy). Por el Principio de la Acotación Uniforme (Teorema A.39) se sigue entonces que $\{\|A_n\|\}$ está acotada uniformemente. Así, $\{\|x_n\|\}$ es acotada.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos ahora que $\{\|x_n\|\}$ es acotada, esto es, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Sea $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión arbitraria de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como X es un espacio de Hilbert existe una subsucesión de $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ a la que nuevamente denotaremos $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, que converge débilmente (ver Teorema A.29). Denotamos con $u \in X$ al correspondiente límite débil, o sea, $x_{n_k} \xrightarrow{w} u$. Queremos ver entonces que $x_n \xrightarrow{w} u$ y que $u = x^\dagger$. Como T es acotado se sigue que (ver Teorema A.30)

$$Tx_{n_k} \xrightarrow{w} Tu. \quad (3.3.3)$$

Por otro lado, por definición x_{n_k} satisface $\|Tx_{n_k} - y\| \leq \|Tz - y\|$, $\forall z \in X_{n_k}$ y por lo tanto $\|Tx_{n_k} - Qy + Qy - y\|^2 \leq \|Tz - Qy + Qy - y\|^2$. Como $(I - Q)$ es la proyección ortogonal sobre $R(T)^\perp$, por ortogonalidad se sigue entonces que $\|Tx_{n_k} - Qy\|^2 + \|(I - Q)y\|^2 \leq \|Tz - Qy\|^2 + \|(I - Q)y\|^2$ de donde

$$\|Tx_{n_k} - Qy\| \leq \|Tz - Qy\|, \quad \forall z \in X_{n_k}.$$

En particular, $\|Tx_{n_k} - Qy\| \leq \|TP_{n_k}x^\dagger - Qy\|$ siendo P_{n_k} la proyección ortogonal de X sobre X_{n_k} . Como $Qy = TT^\dagger y = Tx^\dagger$ pues $y \in D(T^\dagger)$, de la desigualdad anterior tenemos entonces que

$$\|Tx_{n_k} - Tx^\dagger\| \leq \|T(P_{n_k} - I)x^\dagger\| \leq \|T\| \|(I - P_{n_k})x^\dagger\|. \quad (3.3.4)$$

El límite del lado derecho de (3.3.4) cuando $k \rightarrow \infty$ es cero pues, por la elección de los X_n , se cumple que $P_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ para todo $x \in X$. En efecto, sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $\bigcup X_n$ es densa en X , existe $\bar{x} \in X_m$ para algún m tal que $\|x - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como $X_n \subset X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que para todo $n \geq m$, $\bar{x} \in X_n$ y $P_n \bar{x} = \bar{x}$. En consecuencia, si $n \geq m$

$$\|P_n x - x\| \leq \|P_n x - \bar{x}\| + \|\bar{x} - x\| = \|P_n x - P_n \bar{x}\| + \|\bar{x} - x\| \leq 2\|\bar{x} - x\| < \varepsilon.$$

Luego, el límite del lado izquierdo de (3.3.4) cuando $k \rightarrow \infty$ es cero y en consecuencia $Tx_{n_k} \xrightarrow{w} Tx^\dagger$. De (3.3.3) y por la unicidad del límite débil concluimos que $Tu = Tx^\dagger$ y por lo tanto

$$u - x^\dagger \in N(T). \quad (3.3.5)$$

Probaremos ahora que $u - x^\dagger$ también está en $N(T)^\perp$. Para esto probaremos primero la siguiente igualdad:

$$N(TP_n)^\perp = X_n \cap (N(T) \cap X_n)^\perp. \quad (3.3.6)$$

Claramente $N(T) \cap X_n \subset N(TP_n)$ y por lo tanto $N(TP_n)^\perp \subset (N(T) \cap X_n)^\perp$. Además, $N(P_n) = X_n^\perp \subset N(TP_n)^\perp$ de donde $N(TP_n)^\perp \subset X_n \cap (N(T) \cap X_n)^\perp$. Para probar la otra inclusión, sean $x \in X_n \cap (N(T) \cap X_n)^\perp$, $y \in N(TP_n)$. Entonces $\langle x, y \rangle = \langle P_n x, y \rangle = \langle x, P_n y \rangle = 0$ (pues $P_n y \in X_n \cap N(T)$). Por lo tanto, $x \in N(TP_n)^\perp$.

En consecuencia $X_n \cap (N(T) \cap X_n)^\perp \subset N(TP_n)^\perp$. Esto culmina la demostración de (3.3.6). Así, $x_{n_k} \in R(T_{n_k}^\dagger) = N(T_{n_k})^\perp = N(TP_{n_k})^\perp = X_{n_k} \cap (N(T) \cap X_{n_k})^\perp$. Por otro lado, como $X_n \subset X_{n+1}$ para todo n , se sigue que

$$(N(T) \cap X_n)^\perp \supset (N(T) \cap X_{n+1})^\perp \supset \dots \supset N(T)^\perp$$

y por lo tanto $x_{n_k} \in (N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}})^\perp$ para todo $\tilde{k} \leq k$. Además, para todo n , $(N(T) \cap X_n)^\perp$ es un subespacio cerrado de X , o sea que es cerrado y convexo y por lo tanto es débilmente cerrado (si una sucesión contenida en el subespacio cerrado converge débilmente, su límite también pertenece al subespacio). Así, como $x_{n_k} \xrightarrow{w} u$ se sigue que

$$u \in (N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}})^\perp, \quad \forall \tilde{k}. \quad (3.3.7)$$

Por otro lado, como $N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}} \subset N(T)$ para todo \tilde{k} , se sigue que

$$\overline{\bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} (N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}})} \subseteq \overline{N(T)} = N(T).$$

Más precisamente, $\overline{\bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} (N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}})} = N(T)$, esto es, $\bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} (N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}}) = \bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} X_{n_{\tilde{k}}} \cap N(T)$ es densa en $N(T)$. En efecto, sea un conjunto $A \subset N(T)$, A abierto. Ya que $\bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} X_{n_{\tilde{k}}}$ es densa en X y A es abierto se sigue que $A \cap \bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} X_{n_{\tilde{k}}} \neq \emptyset$ y en consecuencia,

como $A \subset N(T)$, $A \cap \left(\bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} X_{n_{\tilde{k}}} \cap N(T) \right) = A \cap \bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} X_{n_{\tilde{k}}} \neq \emptyset$ (ver comentario siguiente a la Definición A.4).

Así, si $z \in N(T)$ existe una sucesión $\{z_n\} \subset \bigcup_{\tilde{k} \in \mathbb{N}} (N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Luego, $\langle u, z \rangle = \langle u, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, z_n \rangle = 0$ pues $u \in (N(T) \cap X_{n_{\tilde{k}}})^\perp$ para todo \tilde{k} (ver (3.3.7)). Por lo tanto $u \in N(T)^\perp$. Como también $x^\dagger \in N(T)^\perp$ tenemos que $(u - x^\dagger) \in N(T)^\perp$. En consecuencia, de (3.3.5) concluimos que $u - x^\dagger = 0$.

Hemos probado así que toda subsucesión de $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge débilmente a x^\dagger , por lo tanto, $x_n \xrightarrow{w} x^\dagger$ (si suponemos lo contrario, entonces existe $z \in X$ tal que $\langle x_n - x^\dagger, z \rangle \not\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, o sea, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $n_N > N$ y tal que $|\langle x_{n_N} - x^\dagger, z \rangle| > \varepsilon_0$; ordenando los n_N en forma creciente obtenemos una subsucesión para la cual ninguna subsucesión converge débilmente a x^\dagger).

ii) (\Rightarrow) Supongamos que $\{x_n\}$ converge a x^\dagger . Entonces $\{\|x_n\|\}$ converge a $\|x^\dagger\|$ y en consecuencia $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x^\dagger\|$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x^\dagger\|$, entonces la sucesión $\{\|x_n\|\}$ es acotada. Así, del apartado i) se sigue que $x_n \xrightarrow{w} x^\dagger$, de donde, como X es un espacio de

Hilbert podemos inferir que $\|x^\dagger\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ (ver Teorema A.28). Tenemos así que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x^\dagger\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$, por lo tanto, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x^\dagger\|$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x^\dagger\|. \quad (3.3.8)$$

Por otro lado, $\|x_n - x^\dagger\|^2 = \langle x_n - x^\dagger, x_n - x^\dagger \rangle = \|x_n\|^2 + \|x^\dagger\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x_n, x^\dagger \rangle$, de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^\dagger\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|x_n\|^2 + \|x^\dagger\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x_n, x^\dagger \rangle \right). \quad (3.3.9)$$

Como $x_n \xrightarrow{w} x^\dagger$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x^\dagger \rangle = \langle x^\dagger, x^\dagger \rangle = \|x^\dagger\|^2 \in \mathbb{R}$ y en consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} (\langle x_n, x^\dagger \rangle) = \|x^\dagger\|^2. \quad (3.3.10)$$

Con (3.3.8) y (3.3.10) en (3.3.9) concluimos finalmente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^\dagger\| = 0$, esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^\dagger$. ■

La caracterización para la convergencia (fuerte) en el Teorema 3.18- *ii*) no es muy útil puesto que requiere del conocimiento de la norma de la solución buscada x^\dagger . Sin embargo, veremos que dicha convergencia puede también garantizarse bajo hipótesis más razonables desde el punto de vista práctico. Para ello necesitaremos previamente el siguiente resultado.

Lema 3.19. *Sea $T \in L(X, Y)$, X e Y espacios de Hilbert. Entonces*

$$(T^\dagger)^* = (T^*)^\dagger.$$

DEMOSTRACION. Denotemos con

P la proyección ortogonal de X sobre $\overline{N(T)}$,

Q la proyección ortogonal de Y sobre $\overline{R(T)}$,

\tilde{P} la proyección ortogonal de Y sobre $\overline{N(T^*)} = R(T)^\perp$ y

\tilde{Q} la proyección ortogonal de X sobre $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$.

Entonces

$$\tilde{P} = I - Q \quad \text{y} \quad \tilde{Q} = I - P. \quad (3.3.11)$$

Para probar que $(T^\dagger)^*$ es el inverso generalizado de T^* utilizaremos las ecuaciones de Moore-Penrose (2.1.9) y (2.1.10).

► Probemos primero que $D((T^\dagger)^*) = D((T^*)^\dagger)$. Para ello, sea $x \in D((T^*)^\dagger) = R(T^*) \oplus R(T^*)^\perp$. Entonces $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in R(T^*)$ y $x_2 \in R(T^*)^\perp = N(T)$; sea además $y \in D(T^\dagger)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y \in R(T)$ (pues $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$). Entonces

$$\langle T^\dagger y, x \rangle_X = \langle T^\dagger y, x_1 \rangle_X + \langle T^\dagger y, x_2 \rangle_X$$

$$\begin{aligned}
&= \langle T^\dagger y, x_1 \rangle_X \quad (\text{pues } x_2 \in N(T) \text{ y } T^\dagger y \in N(T)^\perp) \\
&= \langle T^\dagger y, T^* y^* \rangle_X \quad (\text{para } y^* \in Y \text{ pues } x_1 \in R(T^*)) \\
&= \langle TT^\dagger y, y^* \rangle_Y \\
&= \langle Q|_{D(T^\dagger)} y, y^* \rangle_Y \quad (\text{por (2.1.10)}) \\
&= \langle y, y^* \rangle_Y \quad (\text{pues } y \in R(T) \subset D(T^\dagger)).
\end{aligned}$$

Así, existe $y^* \in Y$ tal que $\langle T^\dagger y, x \rangle_X = \langle y, y^* \rangle_Y$ para todo $y \in D(T^\dagger)$. Por lo tanto $x \in D((T^\dagger)^*)$ y $D((T^*)^\dagger) \subset D((T^\dagger)^*)$.

Recíprocamente, sea $x \in D((T^\dagger)^*)$ y sea $y^* \doteq (T^\dagger)^* x$. Como $T^*(T^\dagger)^* = (T^\dagger T)^*$ en $D(T^*(T^\dagger)^*)$ (T^\dagger no necesariamente es acotado) y

$$\begin{aligned}
D(T^*(T^\dagger)^*) &= \{x \in D((T^\dagger)^*) : (T^\dagger)^* x \in D(T^*)\} \\
&= \{x \in D((T^\dagger)^*) : (T^\dagger)^* x \in Y\} \\
&= D((T^\dagger)^*),
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
T^* y^* &= T^*(T^\dagger)^* x \\
&= (T^\dagger T)^* x \quad (\text{pues } x \in D((T^\dagger)^*)) \\
&= (I - P)^* x \quad (\text{por (2.1.9)}) \\
&= (I - P)x.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $x = T^* y^* + Px$ con $T^* y^* \in R(T^*)$ y $Px \in N(T) = R(T^*)^\perp$; esto es, $x \in D((T^*)^\dagger)$. Así, $D((T^\dagger)^*) \subset D((T^*)^\dagger)$. Luego

$$D((T^\dagger)^*) = D((T^*)^\dagger), \tag{3.3.13}$$

como queríamos probar. Observar entonces que

$$\begin{aligned}
D((T^\dagger)^* T^*) &= \{y \in D(T^*) : T^* y \in D((T^\dagger)^*)\} \\
&= \{y \in D(T^*) : T^* y \in D((T^*)^\dagger)\} \quad (\text{por (3.3.13)}) \\
&= \{y \in D(T^*) : T^* y \in R(T^*) \oplus N(T)\} \\
&= D(T^*) = Y.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

► Ahora, observar que

$$(T^\dagger)^* T^* = (TT^\dagger)^*|_{D((T^\dagger)^* T^*)} \quad (\text{ver Teorema A.37-d})$$

$$\begin{aligned}
&= (TT^\dagger)^* \quad (\text{por (3.3.14)}) \\
&= (Q|_{D(T^\dagger)})^* \quad (\text{por (2.1.10)}). \tag{3.3.15}
\end{aligned}$$

Pero Q extiende a $Q|_{D(T^\dagger)}$ y por lo tanto, $(Q|_{D(T^\dagger)})^*$ extiende a Q^* (ver Teorema A.37-b)), esto es,

$$D(Q^*) \subset D((Q|_{D(T^\dagger)})^*) \quad \text{y} \quad (Q|_{D(T^\dagger)})^* = Q^* \text{ en } D(Q^*).$$

Como $D(Q^*) = Y$ se sigue entonces que $D((Q|_{D(T^\dagger)})^*) = Y$ y $(Q|_{D(T^\dagger)})^* = Q^*$, lo cual llevado a (3.3.15) nos da

$$\begin{aligned}
(T^\dagger)^* T^* &= Q^* = Q \\
&= I - \tilde{P} \quad (\text{por (3.3.11)}). \tag{3.3.16}
\end{aligned}$$

Por lo tanto se satisface (2.1.9).

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
T^* (T^\dagger)^* &= (T^\dagger T)^* |_{D(T^*(T^\dagger)^*)} \quad (\text{ver Teorema A.37-d}) \\
&= (T^\dagger T)^* |_{D((T^\dagger)^*)} \quad (\text{por (3.3.12)}) \\
&= (T^\dagger T)^* |_{D((T^*)^\dagger)} \quad (\text{por (3.3.13)}) \\
&= (I - P)^* |_{D((T^*)^\dagger)} \quad (\text{por (2.1.9)}) \\
&= (I - P) |_{D((T^*)^\dagger)} \\
&= \tilde{Q} |_{D((T^*)^\dagger)} \quad (\text{por (3.3.11)}). \tag{3.3.17}
\end{aligned}$$

Por lo tanto también se satisface (2.1.10).

De (3.3.16) y (3.3.17) concluimos finalmente que $(T^\dagger)^* = (T^*)^\dagger$. ■

La siguiente proposición garantiza la convergencia fuerte de x_n a x^\dagger bajo una condición que no involucra conocimiento alguno sobre x^\dagger .

Proposición 3.20. Sean $y \in D(T^\dagger)$ y x_n definido por (3.3.2). Si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| (T_n^\dagger)^* x_n \right\| < \infty, \tag{3.3.18}$$

entonces $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\dagger$.

DEMOSTRACION. Puesto que $x_n = T_n^\dagger y$, se tiene que

$$x_n \in R(T_n^\dagger) = N(T_n)^\perp = \overline{R(T_n^*)} = R(T_n^*) \subset D((T_n^*)^\dagger).$$

Por lo tanto está bien definido

$$z_n \doteq (T_n^*)^\dagger x_n, \tag{3.3.19}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} T_n^* z_n &= T_n^* (T_n^*)^\dagger x_n \\ &= Q_n \mid_{D((T_n^*)^\dagger)} x_n \quad (Q_n = \text{proy. ortog. sobre } R(T_n^*)) \\ &= x_n \quad (\text{pues } x_n \in R(T_n^*)). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\langle x_n - x^\dagger, x_n \rangle| &= |\langle x_n - x^\dagger, T_n^* z_n \rangle| \\ &= |\langle T_n (x_n - x^\dagger), z_n \rangle| \\ &= |\langle Tx_n - Tx^\dagger, z_n \rangle| \quad (\text{pues } T = T_n \text{ sobre } X_n) \\ &= |\langle Tx_n - Tx^\dagger, z_n \rangle + \langle Tx^\dagger - Tx^\dagger, z_n \rangle| \\ &= |\langle Tx_n - Tx^\dagger, z_n \rangle + \langle T(I - P_n)x^\dagger, z_n \rangle| \\ &\leq (\|Tx_n - Tx^\dagger\| + \|T(I - P_n)x^\dagger\|) \|z_n\| \\ &\leq 2 \|T(I - P_n)x^\dagger\| \|z_n\| \quad (\text{por (3.3.4)}) \\ &\leq 2 \|T\| \|(I - P_n)x^\dagger\| \|z_n\| \doteq r_n. \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Luego, $|\langle x_n, x_n \rangle - \langle x^\dagger, x_n \rangle| \leq r_n$ de donde

$$\|x_n\|^2 \leq |\langle x^\dagger, x_n \rangle| + r_n \leq \|x^\dagger\| \|x_n\| + r_n$$

y en consecuencia $\|x_n\| \leq \|x^\dagger\| + r_n^{1/2}$ (pues si $a^2 \leq ab + c$ con $a, b, c > 0$, entonces $a \leq b + c^{1/2}$). Por lo tanto

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|x^\dagger\| + r_n^{1/2}) \\ &= \|x^\dagger\| + \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Ahora, notar que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (2 \|T\| \|(I - P_n)x^\dagger\| \|z_n\|) \\ &\leq 2 \|T\| \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)x^\dagger\| \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_n^*)^\dagger x_n\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)x^\dagger\| = 0$ ($P_n \rightarrow I$ puntualmente sobre X) y del Lema 3.19 y la condición (3.3.18) tenemos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_n^*)^\dagger x_n\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_n^\dagger)^* x_n\| < \infty$. Luego,

$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ y en consecuencia $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n^{1/2} = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n \right)^{1/2} = 0$. Así, de (3.3.21) tenemos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x^\dagger\|$ lo cual, en virtud del Teorema 3.18-ii) implica que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\dagger$. ■

Es importante observar que la condición (3.3.18) impone un cierto tipo de regularidad sobre la solución x^\dagger . Esto puede verse claramente en el caso de operadores compactos, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.21. *Sea $y \in D(T^\dagger)$. Si T es compacto y la condición (3.3.18) se satisface, entonces $x^\dagger \in R(T^*)$.*

DEMOSTRACION. Sean x_n y z_n definidos por (3.3.2) y (3.3.19), respectivamente. De la condición (3.3.18) y del Lema 3.19 se sigue que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| < \infty$. Por lo tanto, existe una subsucesión $\{z_k\} \subset \{z_n\}$ que converge, esto es, $z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v$, para algún $v \in Y$. Como T^* es continuo se sigue que

$$T^* z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T^* v. \quad (3.3.22)$$

Por otro lado, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} T^* z_k &= P_k T^* z_k + (I - P_k) T^* z_k \\ &= P_k T^* (T_k^*)^\dagger x_k + (I - P_k) T^* z_k \quad (\text{por (3.3.19)}) \\ &= (T P_k)^* (T_k^*)^\dagger x_k + (I - P_k) T^* z_k \\ &= T_k^* (T_k^*)^\dagger x_k + (I - P_k) T^* z_k \\ &= \overline{Q}_k \mid_D((T_k^*)^\dagger) x_k + (I - P_k) T^* z_k \quad (\overline{Q}_k = \text{proy. ortog. sobre } \overline{R(T_k^*)}) \\ &= x_k + (I - P_k) T^* z_k \quad (\text{pues } x_k \in N(T_k)^\perp = \overline{R(T_k^*)}). \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Ahora, de la Proposición 3.20, la sucesión $\{x_n\}$ converge a x^\dagger , por lo tanto lo mismo sucede con cualquier subsucesión. Así, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^\dagger$. Además hemos probado que $P_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I$ puntualmente sobre X y T^* es compacto (porque T lo es). En consecuencia (ver Teorema A.44-e)), $\|P_k T^* - T^*\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (convergencia en norma). De modo que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|(I - P_k) T^* z_k\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|(I - P_k) T^*\| \|z_k\| \\ &= 0 \quad (\text{pues } \{\|z_k\|\} \text{ es acotada}). \end{aligned}$$

Tomando límite para $k \rightarrow \infty$ en (3.3.23) tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^* z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \lim_{k \rightarrow \infty} (I - P_k) T^* z_k = x^\dagger,$$

lo cual junto con (3.3.22) implica que $T^* v = x^\dagger$ y por lo tanto $x^\dagger \in R(T^*)$. ■

En el siguiente teorema veremos que, en el caso de operadores compactos, la condición (3.3.18) proporciona además una velocidad de convergencia.

Teorema 3.22. Sean $y \in D(T^\dagger)$ y x_n definido por (3.3.2). Si T es compacto y la condición (3.3.18) se satisface, entonces

$$\|x_n - x^\dagger\| = O(\|(I - P_n)T^*\|).$$

DEMOSTRACION. Dado que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.21, existe $v \in Y$ tal que $x^\dagger = T^*v$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} |\langle x^\dagger - x_n, x^\dagger \rangle| &= |\langle x^\dagger - x_n, T^*v \rangle| \\ &= |\langle T(x^\dagger - x_n), v \rangle| \\ &\leq \|Tx_n - Tx^\dagger\| \|v\| \\ &\leq \|T(P_n - I)x^\dagger\| \|v\| \quad (\text{por (3.3.4)}). \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Luego

$$\begin{aligned} \|x_n - x^\dagger\|^2 &= \langle x_n - x^\dagger, x_n - x^\dagger \rangle \\ &= \langle x_n - x^\dagger, x_n \rangle + \langle x^\dagger - x_n, x^\dagger \rangle \\ &= |\langle x_n - x^\dagger, x_n \rangle + \langle x^\dagger - x_n, x^\dagger \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x^\dagger, x_n \rangle| + |\langle x^\dagger - x_n, x^\dagger \rangle| \\ &\leq 2\|T(I - P_n)x^\dagger\| \|z_n\| + \|T(P_n - I)x^\dagger\| \|v\| \quad (\text{por (3.3.20) y (3.3.24)}) \\ &= (2\|z_n\| + \|v\|) \|T(I - P_n)x^\dagger\|. \end{aligned}$$

Ahora, como $\{\|z_k\|\}$ es acotada pues se satisface la condición (3.3.18), existe $c > 0$ tal que $2\|z_n\| + \|v\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|x_n - x^\dagger\|^2 &\leq c \|T(I - P_n)x^\dagger\| & (3.3.25) \\ &= c \|T(I - P_n)(I - P_n)T^*v\| \quad ((I - P_n) \text{ proyección}) \\ &\leq \tilde{c} \|T(I - P_n)(I - P_n)T^*\| \quad (\tilde{c} \doteq c\|v\|) \\ &= \tilde{c} \|(I - P_n)T^*\|^2 \quad (\text{pues } T(I - P_n) \in L(X, Y)), \end{aligned}$$

de donde $\|x_n - x^\dagger\| = O(\|(I - P_n)T^*\|)$. ■

Es importante observar que si T no es compacto (posiblemente no acotado) y suponemos que se satisface la condición (3.3.18) y que $x^\dagger \in R(T^*)$, de (3.3.25) obtenemos al menos el siguiente orden de convergencia:

$$\|x_n - x^\dagger\| = O\left(\|T(I - P_n)x^\dagger\|^{1/2}\right),$$

el que obviamente no es uniforme para $x^\dagger \in R(T^*)$.

Proyección de Cuadrados Mínimos Dual. Este es otro método de proyección para el cual la convergencia está siempre garantizada.

Sea $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios aproximantes de $\overline{R(T)}$ de dimensión finita tal que

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots \subset \overline{R(T)},$$

cuya unión $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ es densa en $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$. Para cada n , sea x_n la solución de cuadrados mínimos de mínima norma de

$$Q_n T x = Q_n y, \quad (3.3.26)$$

donde Q_n es la proyección ortogonal de Y sobre Y_n o equivalentemente, $T_n x = Q_n y$ donde $T_n \doteq Q_n T$. En términos de la inversa generalizada sabemos que

$$x_n = T_n^\dagger Q_n y, \quad (3.3.27)$$

la cual existe siempre que $Q_n y \in D(T_n^\dagger)$. Pero como $R(T_n) \subset Y_n$ es un subespacio cerrado de Y por tener dimensión finita, se sigue que $D(T_n^\dagger) = R(T_n) \oplus R(T_n)^\perp = Y$. Por lo tanto, tenemos garantizada la existencia de x_n para todo $y \in Y$. Además T_n^\dagger es un operador acotado (ver Proposición 2.7) de modo que x_n es una aproximación “estable” de x^\dagger . Observar también que T_n es compacto (por ser acotado y de rango finito) y además

$$R(T_n^\dagger) = N(T_n)^\perp = \overline{R(T_n^*)} = \overline{T_n^*(Y_n)} = T^*(Y_n).$$

Por lo tanto T_n^\dagger también es compacto por ser acotado y de rango finito. Luego, T_n y T_n^\dagger son operadores compactos para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el siguiente teorema probaremos que si $y \in D(T^\dagger)$, entonces x_n converge a x^\dagger cuando $n \rightarrow \infty$ y daremos una caracterización especial para x_n .

Teorema 3.23. *Sean $y \in D(T^\dagger)$ y x_n como en (3.3.27). Entonces $x_n = P_n x^\dagger$, donde P_n es la proyección ortogonal de X sobre $X_n \doteq T^*(Y_n)$. Además, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\dagger$.*

DEMOSTRACION. Sean $X_n \doteq T^*(Y_n)$ y P_n la proyección ortogonal de X sobre X_n . Observar que

$$N(T_n) = R(T_n^*)^\perp = R(T^* Q_n)^\perp = T^*(Y_n)^\perp = X_n^\perp.$$

En consecuencia, como $(I - P_n)$ es la proyección ortogonal de X sobre X_n^\perp

$$T_n(I - P_n) = Q_n T(I - P_n) = 0. \quad (3.3.28)$$

Además, dado que $(I - Q)$ proyecta sobre $R(T)^\perp$ y Q_n proyecta sobre $Y_n \subset \overline{R(T)}$, se tiene que $Q_n(I - Q) = 0$, de donde

$$Q_n y = Q_n Q y = Q_n T x^\dagger \quad (\text{pues } y \in D(T^\dagger)). \quad (3.3.29)$$

Así

$$\|T_n x - Q_n y\| = \|Q_n T x - Q_n T x^\dagger\| \quad (\text{usando que } T_n = Q_n T \text{ y (3.3.29)})$$

$$\begin{aligned}
&= \|Q_n T(x - x^\dagger)\| \\
&= \|Q_n T P_n(x - x^\dagger)\| \quad (\text{por (3.3.28)}) \\
&= \|Q_n T P_n(x - P_n x^\dagger)\| \quad (\text{pues } P_n^2 = P_n). \tag{3.3.30}
\end{aligned}$$

Ahora, como las soluciones de cuadrado mínimo de la ecuación $T_n x = Q_n y$ minimizan $\|T_n x - Q_n y\|$, de (3.3.30) concluimos que el conjunto de tales soluciones es el espacio afín $P_n x^\dagger + X_n^\perp$. Como la mejor solución aproximada es la de menor norma, concluimos entonces que $x_n = P_n x^\dagger$.

Resta probar la convergencia de x_n a x^\dagger . Para esto, observar en primer lugar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset R(T^*) \subset \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$ y $X_n \subset X_{n+1}$ (pues $Y_n \subset Y_{n+1}$). Probaremos ahora que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es densa en $N(T)^\perp$. Sean $x \in N(T)^\perp$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $T^*(Y)$ es denso en $N(T)^\perp$ (pues $\overline{T^*(Y)} = \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$), existe $y \in Y$ tal que $\|x - T^*y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $y \in N(T^*)^\perp$ ($Y = N(T^*) \oplus N(T^*)^\perp$). Ya que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ es densa en $N(T^*)^\perp$, existe $z \in Y_m$, para algún m , tal que $\|z - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|T^*\|}$. Entonces, para $T^*z \in T^*(Y_m) = X_m$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\|x - T^*z\| &\leq \|x - T^*y\| + \|T^*y - T^*z\| \\
&\leq \|x - T^*y\| + \|T^*\| \|y - z\| \quad (\text{pues } T^* \in L(Y, X)) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es densa en $N(T)^\perp$. Siguiendo la misma demostración que la hecha en el

Teorema 3.18-*i*) se prueba que $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ puntualmente sobre $N(T)^\perp$. Como $x^\dagger \in N(T)^\perp$, concluimos entonces que $x_n = P_n x^\dagger \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\dagger$. ■

Hemos probado que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\dagger$, esto es, $T_n^\dagger Q_n y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^\dagger y$ para todo $y \in D(T^\dagger)$. Como además, los operadores $T_n^\dagger Q_n$ son continuos, de la Proposición 3.5 concluimos entonces que $\{T_n^\dagger Q_n\}$ es una regularización para T^\dagger y, para todo $y \in D(T^\dagger)$ existe una regla de elección de parámetro a-priori, $\hat{n} = \hat{n}(\delta)$, tal que $(T_n^\dagger Q_n, \hat{n})$ es un método de regularización convergente.

A continuación haremos un análisis de estabilidad para datos con ruido y^δ tales que

$$\|Q_n(y - y^\delta)\| \leq \delta. \tag{3.3.31}$$

Denotaremos con x_n^δ a la mejor solución aproximada de la ecuación (3.3.26) para dato con ruido, esto es

$$x_n^\delta = T_n^\dagger Q_n y^\delta. \tag{3.3.32}$$

Teorema 3.24. Sean $y \in D(T^\dagger)$ y $y^\delta \in Y$ tal que se satisface la condición (3.3.31). Sea μ_n el menor valor singular de $T_n = Q_n T$. Si $\frac{\delta}{\mu_n} \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$, entonces

$$x_n^\delta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\delta \rightarrow 0} x^\dagger.$$

DEMOSTRACION. Para todo $n \in \mathbb{N}$, T_n y T_n^\dagger son operadores compactos de rango finito, por lo tanto tienen sólo un número finito de valores singulares. Sea $(\mu_i; u_i, v_i)_{i=1}^{r(n)}$, donde $r(n) = \dim Y_n$, un sistema singular para T_n y tal que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{r(n)}$. Probemos que $(\frac{1}{\mu_i}; u_i, v_i)_{i=1}^{r(n)}$ es un sistema singular para T_n^\dagger . En efecto, para $1 \leq i \leq r(n)$, $u_i \in R(T_n) = Y_n \subset Y = D(T_n^\dagger)$, en consecuencia del Teorema 2.15 se sigue que

$$\begin{aligned} T_n^\dagger u_i &= \sum_{m=1}^{r(n)} \frac{1}{\mu_m} \langle u_i, u_m \rangle v_m \\ &= \frac{1}{\mu_i} v_i \quad (\text{pues } \{u_n\} \text{ es ortonormal}). \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

A su vez, T_n^* también es compacto con sistema singular $(\mu_i; u_i, v_i)_{i=1}^{r(n)}$ (ver Observación A.54) y $D((T_n^*)^\dagger) = R(T_n^*) \oplus R(T_n^*)^\perp = X$. Aplicando el Teorema 2.15 a T_n^* tenemos que

$$\begin{aligned} (T_n^*)^\dagger T_n^\dagger u_i &= \sum_{m=1}^{r(n)} \frac{1}{\mu_m} \langle T_n^\dagger u_i, v_m \rangle u_m \\ &= \sum_{m=1}^{r(n)} \frac{1}{\mu_m} \left\langle \frac{1}{\mu_i} v_i, v_m \right\rangle u_m \quad (\text{por (3.3.33)}) \\ &= \frac{1}{\mu_i^2} u_i \quad (\text{pues } \{v_n\} \text{ es ortonormal}). \end{aligned}$$

Luego, para todo i , $1 \leq i \leq r(n)$ se tiene que

$$\begin{aligned} (T_n^\dagger)^* T_n^\dagger u_i &= (T_n^*)^\dagger T_n^\dagger u_i \quad (\text{Lema 3.19}) \\ &= \frac{1}{\mu_i^2} u_i. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

En forma totalmente análoga se prueba que para todo i , $1 \leq i \leq r(n)$

$$T_n^\dagger (T_n^\dagger)^* u_i = \frac{1}{\mu_i^2} v_i. \quad (3.3.35)$$

De (3.3.34) y (3.3.35) concluimos que $(\frac{1}{\mu_i}; u_i, v_i)_{i=1}^{r(n)}$ es un sistema singular para T_n^\dagger . Si a $\mu_{r(n)}$, que es el menor valor singular de T_n , lo denotamos con μ_n , entonces $\frac{1}{\mu_n}$ será el mayor valor singular de T_n^\dagger y en consecuencia

$$\|T_n^\dagger\| = \frac{1}{\mu_n}. \quad (3.3.36)$$

Ahora

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_n - x^\dagger\| + \|x_n - x_n^\delta\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x_n - x^\dagger\| + \|T_n^\dagger Q_n (y - y^\delta)\| \quad (\text{por (3.3.27) y (3.3.32)}) \\
&\leq \|x_n - x^\dagger\| + \|T_n^\dagger\| \|Q_n (y - y^\delta)\| \\
&\leq \|x_n - x^\dagger\| + \frac{1}{\mu_n} \delta \quad (\text{por (3.3.36) y (3.3.31)}). \tag{3.3.37}
\end{aligned}$$

Tomando límite en ambos miembros de la desigualdad anterior para $\delta \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$, usando el Teorema 3.23 y la hipótesis sobre $\frac{\delta}{\mu_n}$ concluimos que $\|x_n^\delta - x^\dagger\| \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$, esto es, $x_n^\delta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\delta \rightarrow 0} x^\dagger$. ■

Ya observamos que $\{T_n^\dagger Q_n\}$ es una regularización para T^\dagger con una regla de elección de parámetro a-priori. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta \|T_n^\dagger Q_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta \frac{1}{\mu_n}$, de la Proposición 3.8 y del teorema que acabamos de probar deducimos que $\frac{1}{n}$ juega el rol de la regla de elección de parámetro. Más precisamente, si $\hat{n}(\delta)$ es tal que $\hat{n}(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ y $\frac{\delta}{\mu_{\hat{n}(\delta)}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, entonces $(T_{\hat{n}(\delta)}^\dagger Q_{\hat{n}(\delta)}, \hat{n})$ es un método de regularización convergente.

Con las condiciones impuestas a los subespacios Y_n , esto es, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset \overline{R(T)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ densa en $\overline{R(T)}$, hemos probado entonces la convergencia de las soluciones regularizadas a la mejor solución aproximada del problema original, x^\dagger . Ahora nos planteamos el problema de cómo elegir Y_n para que esta convergencia sea "óptima". De (3.3.37) vemos que esto se logra eligiendo los Y_n de modo tal de maximizar μ_n . Para el caso de operadores compactos tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.25. *Sea T un operador compacto con sistema singular $(\sigma_m; v_m, u_m)$ y sea Y_n tal que $\dim Y_n = n$. Si μ_n es el menor valor singular de $T_n = Q_n T$, entonces $\mu_n \leq \sigma_n$.*

DEMOSTRACION. Dado que $\dim Y_n = n$, existen exactamente n valores singulares para T_n . Denotemos con μ_n al menor de ellos. Ya que $\text{span}\{u_m\} = \overline{R(T)}$ y $Y_n \subset \overline{R(T)}$ se sigue que existe un subconjunto $\{u_{m_k}\}_{k=1}^n \subset \{u_m\}$ que es base de Y_n .

Sea U_{n-1} el subespacio de $R(T)$ generado por los $(n-1)$ primeros autovectores de TT^* , esto es, $U_{n-1} \doteq \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$. Entonces existe $u_0 \in Y$ tal que $u_0 \in Y_n \cap U_{n-1}^\perp$ y $\|u_0\| = 1$. (En efecto, $u_0 = \frac{\tilde{u}_0}{\|\tilde{u}_0\|}$ con $\tilde{u}_0 = \sum_{k=1}^n c_k u_{m_k}$; la condición $u_0 \in U_{n-1}^\perp$ impone $(n-1)$ condiciones lineales sobre los n coeficientes c_1, \dots, c_n , por lo tanto siempre tiene solución no trivial). Ya que μ_n es el menor valor singular del operador compacto T_n , se sigue que μ_n^2 es el menor autovalor del operador compacto y autoadjunto $T_n T_n^* : Y_n \rightarrow Y_n$ y por lo tanto (ver Teoremas A.47)

$$\mu_n^2 = \inf \{ \langle T_n T_n^* y, y \rangle : y \in Y_n, \|y\| = 1 \}. \tag{3.3.38}$$

Pero si $y \in Y_n$, $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{m_k}$, entonces

$$TT^* Q_n y = TT^* y \quad (\text{pues } y \in Y_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k TT^* u_{m_k} \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k \sigma_{m_k}^2 u_{m_k},
\end{aligned}$$

por lo tanto $TT^*Q_n y \in Y_n$ y en consecuencia $T_n T_n^* y = Q_n TT^* Q_n y = TT^* Q_n y = TT^* y$. Luego, de (3.3.38) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_n^2 &= \inf \{ \langle TT^* y, y \rangle : y \in Y_n, \|y\| = 1 \} \\
&\leq \langle TT^* u_0, u_0 \rangle \quad (\text{pues } u_0 \in Y_n \text{ y } \|u_0\| = 1) \\
&\leq \sup \{ \langle TT^* y, y \rangle : y \in U_{n-1}^\perp, \|y\| = 1 \} \quad (\text{pues } u_0 \in U_{n-1}^\perp \text{ y } \|u_0\| = 1).
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Ahora, como TT^* es compacto y autoadjunto siendo $\{\sigma_n^2\}$ la sucesión de autovalores, entonces $(TT^*)^{1/2}$ es compacto y autoadjunto y $\{\sigma_n\}$ es la sucesión de sus correspondientes autovalores. En consecuencia, por la F3rmula de Courant-Fischer (ver (A.4.2))

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \inf_{M_{n-1}} \sup \left\{ \langle (TT^*)^{1/2} (TT^*)^{1/2} y, y \rangle : y \in M_{n-1}^\perp, \|y\| = 1 \right\} \\
&= \sup \{ \langle TT^* y, y \rangle : y \in U_{n-1}^\perp, \|y\| = 1 \}
\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

pues el 3nfimo se alcanza cuando $M_{n-1} = U_{n-1}$ (ver Teorema A.50).

De (3.3.39) y (3.3.40) concluimos que $\mu_n^2 \leq \sigma_n^2$ y, como $\mu_n, \sigma_n > 0$, se sigue que $\mu_n \leq \sigma_n$ como quer3amos probar. ■

De la proposici3n anterior se sigue adem3s que $\mu_n = \sigma_n$ cuando $Y_n = U_n = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$. En efecto, para todo $y \in U_n$ tal que $\|y\| = 1$ se cumple que $\langle TT^* u_n, u_n \rangle \leq \langle TT^* y, y \rangle$ (ver Dautray y Lions [8], Corolario 2 de §2). En consecuencia, como $u_n \in U_n$ y $\|u_n\| = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_n^2 &= \inf \{ \langle TT^* y, y \rangle : y \in U_n, \|y\| = 1 \} \\
&= \langle TT^* u_n, u_n \rangle \\
&= \sigma_n^2 \quad (\text{pues } TT^* u_n = \sigma_n^2 u_n)
\end{aligned}$$

Con esta elecci3n particular de Y_n , el m3todo que resulta se denomina **expansi3n en valores singulares truncada** (ver Secci3n 3.5).

Observar que si $x^\dagger \in R(T^*)$, esto es $x^\dagger = T^* u$ para alg3n $u \in Y$, de (3.3.37) y del Teorema 3.23 se sigue que

$$\begin{aligned}
\|x_n^\delta - x^\dagger\| &\leq \|x_n - x^\dagger\| + \frac{1}{\mu_n} \delta \quad (\text{por (3.3.37)}) \\
&\leq \|P_n x^\dagger - x^\dagger\| + \frac{1}{\mu_n} \delta \quad (\text{por Teorema 3.23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|(I - P_n)T^*u\| + \frac{1}{\mu_n}\delta \\
&\leq \|(I - P_n)T^*\| \|u\| + \frac{1}{\mu_n}\delta \\
&\leq M \left(\|(I - P_n)T^*\| + \frac{1}{\mu_n}\delta \right)
\end{aligned}$$

donde $M \doteq \max\{\|u\|, 1\}$. En consecuencia

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| = O\left(\|(I - P_n)T^*\| + \frac{\delta}{\mu_n}\right).$$

Esta acotación obviamente vale sólo en el caso que T sea compacto.

En la siguiente proposición mostramos que la elección $Y_n = U_n$ también es óptima con respecto al error de regularización.

Proposición 3.26. *Sea T un operador compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$ y sea Y_n tal que $\dim Y_n = n$. Entonces*

$$\sigma_{n+1} \leq \|(I - P_n)T^*\|.$$

La igualdad vale si $Y_n = U_n$.

DEMOSTRACION. Dado que σ_n es un autovalor del operador compacto y autoadjunto $(T^*T)^{1/2}$, de la fórmula de Courant-Fischer (ver (A.4.2))

$$\sigma_{n+1}^2 = \inf_{M_n} \sup \{ \langle T^*Tx, x \rangle : x \in M_n^\perp, \|x\| = 1 \}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los subespacios M_n de X de dimensión n y tal ínfimo se alcanza cuando M_n es el subespacio generado por los n primeros autovectores de T^*T . Si consideramos el subespacio $X_n = T^*(Y_n)$ de dimensión menor o igual que n y si P_n es la proyección ortogonal sobre X_n entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^2 &\leq \sup \{ \langle T^*Tx, x \rangle : x \in X_n^\perp, \|x\| = 1 \} \\
&= \sup \{ \|Tx\|^2 : x \in X_n^\perp, \|x\| = 1 \} \\
&= \sup \{ \|T(I - P_n)x\|^2 : x \in X, \|x\| = 1 \} \\
&= \|T(I - P_n)\|^2 \\
&= \|(I - P_n)T^*\|^2.
\end{aligned}$$

Si $Y_n = U_n$, entonces $X_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, esto es, el subespacio generado por los n primeros autovectores de T^*T y por lo tanto vale la igualdad. \blacksquare

Vemos así que si T es compacto y $Y_n = U_n$ (de modo que, $\mu_n = \sigma_n$ y $\sigma_{n+1} = \|(I - P_n)T^*\|$) y si $x^\dagger \in R(T^*)$, entonces el orden de convergencia del error total

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| = O\left(\sigma_{n+1} + \frac{\delta}{\sigma_n}\right)$$

es el mejor posible. Este orden de convergencia se logra con la expansión en valores singulares truncada.

En el siguiente ejemplo presentaremos una aplicación concreta de los métodos de regularización por proyección a la aproximación de las soluciones de ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase. Este método se conoce usualmente como *colocación de cuadrados mínimos* o *discretización de momentos*.

Ejemplo 3.27. Consideremos la ecuación integral de Fredholm de primera clase $Kx = y$ donde $K : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ es el operador definido por

$$(Kx)(s) \doteq \int_0^1 k(s, t)x(t)dt,$$

con núcleo k continuo en $[0, 1] \times [0, 1]$, de modo que K es un operador compacto (ver Teorema A.45). Como vimos en la Sección 2.2, esta ecuación es mal condicionada excepto en el caso en que k es degenerado.

Para la solución numérica de dicha ecuación por colocación de cuadrados mínimos se eligen n puntos de colocación $s_j \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, n$ y se consideran las ecuaciones

$$(Kx)(s_j) = \int_0^1 k(s_j, t)x(t)dt = y(s_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3.41)$$

llamadas ecuaciones de colocación. Luego se aproxima x^\dagger por $x_n \in L_2(0, 1)$ tal que x_n satisface (3.3.41) y

$$\|x_n\|_{L_2(0,1)} = \min \left\{ \|z_n\|_{L_2(0,1)} : z_n \in L_2(0, 1) \text{ y } z_n \text{ satisface (3.3.41)} \right\}.$$

Esta solución aproximante x_n se denomina *solución de momentos* y puede interpretarse como una solución de cuadrados mínimos como veremos a continuación. Observar que las ecuaciones (3.3.41) pueden escribirse como

$$\langle k_j(\cdot), x(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} = y(s_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.3.42)$$

donde $k_j(t) \doteq k(s_j, t)$ para $t \in [0, 1]$.

Definiendo $Y \doteq R(K)$ con producto interno

$$\langle y, z \rangle_Y \doteq \langle K^\dagger y(\cdot), K^\dagger z(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)}, \quad (3.3.43)$$

se puede probar que Y es un espacio de Hilbert, y para todo $x(\cdot) \in X \doteq L_2(0, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle Kx, Kk_j \rangle_Y &= \langle K^\dagger Kx(\cdot), K^\dagger Kk_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\ &= \langle (I - P)x(\cdot), (I - P)k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \quad (P = \text{proy. ortog. sobre } N(K)) \\ &= \langle (I - P)x(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} - \langle Px(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \langle x(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} - [K(Px(\cdot))](s_j) \\
&= \langle x(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \quad (\text{pues } Px \in N(K)).
\end{aligned} \tag{3.3.44}$$

Además, para todo $y \in R(K)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle y, Kk_j \rangle_Y &= \langle K^\dagger y(\cdot), K^\dagger Kk_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \langle K^\dagger y(\cdot), (I - P)k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \langle (I - P)K^\dagger y(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \langle K^\dagger y(\cdot), k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \quad (\text{pues } K^\dagger y \in R(K^\dagger) = N(K)^\perp) \\
&= (KK^\dagger y)(s_j) \\
&= (Qy)(s_j) \quad (Q = \text{proy. ortog. sobre } \overline{R(K)}) \\
&= y(s_j) \quad (\text{pues } y \in Y = R(K)).
\end{aligned} \tag{3.3.45}$$

De (3.3.44) y (3.3.45) concluimos que las ecuaciones (3.3.42) son equivalentes a

$$\langle Kx, Kk_j \rangle_Y = \langle y, Kk_j \rangle_Y, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.3.46}$$

Definiendo $Y_n \doteq \text{span} \{Kk_1, \dots, Kk_n\}$, observamos que (3.3.46) es equivalente a

$$\langle Kx, z \rangle_Y = \langle y, z \rangle_Y, \quad \forall z \in Y_n,$$

lo cual a su vez es equivalente a la ecuación

$$Q_n Kx = Q_n y$$

donde Q_n es la proyección ortogonal de Y sobre Y_n . En este punto, es importante observar que esta ecuación es exactamente la ecuación (3.3.26) y por consiguiente, el método de aproximación de las soluciones de ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase por colocación de cuadrados mínimos es equivalente a regularizar un problema mal condicionado por proyección de cuadrados mínimos dual. Ahora, del Teorema 3.23 sabemos que la solución de cuadrados mínimos de menor norma tiene la forma $x_n = P_n x^\dagger$ donde P_n es la proyección ortogonal sobre $X_n = K^*(Y_n)$. Como, para todo $z \in L_2(0, 1)$

$$\begin{aligned}
\langle z(\cdot), K^* Kk_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} &= \langle Kz, Kk_j \rangle_Y \\
&= \langle K^\dagger Kz(\cdot), K^\dagger Kk_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \langle (I - P)z(\cdot), K^\dagger Kk_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \langle z(\cdot), K^\dagger Kk_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} - \langle Pz(\cdot), (I - P)k_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \langle z(\cdot), K^\dagger Kk_j(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)},
\end{aligned}$$

se sigue entonces que $K^*Kk_j = K^\dagger Kk_j$, para $j = 1, \dots, n$, de donde $K^*(Y_n) = K^\dagger(Y_n)$ y por lo tanto, $X_n = \text{span}\{k_1, \dots, k_n\}$.

Suponiendo que $\{k_1, \dots, k_n\}$ es un conjunto linealmente independiente en $L_2(0, 1)$ (esto claramente impone ciertas restricciones al núcleo $k(s, t)$), como $x_n \in X_n$ se sigue que existen coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que

$$x_n = P_n x^\dagger = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i.$$

En consecuencia, $Kx_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i Kk_i$. Haciendo cumplir (3.3.41) deducimos que los coeficientes α_i son soluciones del sistema

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (Kk_i)(s_j) = y(s_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Observar que en el Teorema 3.23 hemos probado que x_n converge a x^\dagger como consecuencia de la convergencia puntual de P_n a I (en X). En este caso, ésto sucede si la sucesión de puntos de colocación $\{s_n\}$ es densa en $[0, 1]$, como puede probarse fácilmente.

3.4. Regularización mediante filtros

Si el operador K es compacto, una forma conveniente de construir regularizaciones para K^\dagger , resulta a partir de su correspondiente sistema singular. Si $(\sigma_n; v_n, u_n)$ es el sistema singular para K y $y \in D(K^\dagger)$ vimos (Teorema 2.15) que la mejor solución aproximada de $Kx = y$ puede escribirse en la forma

$$x^\dagger = K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n.$$

Este resultado pone en evidencia la influencia sobre la reconstrucción de x^\dagger de posibles errores en el dato y (recordar que $\sigma_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$). La idea para la construcción de un método de regularización es, esencialmente, amortiguar el efecto del factor $\frac{1}{\sigma_n}$.

Teorema 3.28. Sean $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$ y $F : (0, \infty) \times (0, \|K\|) \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

i) existe una constante C , $0 < C < \infty$ y tal que $|F(\alpha, \sigma)| \leq C$ para todos $\alpha > 0$ y $0 < \sigma \leq \|K\|$ (i.e., F es acotada en $(0, \infty) \times (0, \|K\|)$);

ii) para todo $\alpha > 0$, existe una constante $C(\alpha)$ tal que $|F(\alpha, \sigma)| \leq C(\alpha)\sigma$, para todo $0 < \sigma \leq \|K\|$;

iii) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(\alpha, \sigma) = 1$ para todo $0 < \sigma \leq \|K\|$.

Sea $\{R_\alpha\}_{0 < \alpha < \infty}$ la familia de operadores de Y en X definidos por

$$R_\alpha y \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\alpha, \sigma_n)}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n, \quad y \in Y. \quad (3.4.1)$$

Entonces, $\{R_\alpha\}$ es una regularización para K^\dagger y $\|R_\alpha\| \leq C(\alpha)$ para todo $\alpha > 0$. Más aún, para todo $y \in D(K^\dagger)$ existe una regla de elección de parámetro a-priori $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta)$ tal que el método $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es convergente si $\hat{\alpha}(\delta) \rightarrow 0$ y $\delta C(\hat{\alpha}(\delta)) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

En el contexto de los métodos de regularización, la función F se denomina **filtro de regularización** para K^\dagger .

DEMOSTRACION. Para probar que $\{R_\alpha\}$ es una regularización para K^\dagger usaremos la Proposición 3.5, para lo cual es suficiente con probar que R_α converge puntualmente a K^\dagger sobre $D(K^\dagger)$ para $\alpha \rightarrow 0^+$.

Obviamente, para cada $\alpha > 0$, R_α es un operador lineal porque el producto interno lo es. Además,

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F(\alpha, \sigma_n)|^2}{\sigma_n^2} |\langle y, u_n \rangle|^2 \quad (\{v_n\} \text{ ortonormal}) \\ &\leq C^2(\alpha) \|y\|^2 \quad (\text{por ii}). \end{aligned}$$

En consecuencia R_α es acotado y por lo tanto continuo. Más aún, $\|R_\alpha\| \leq C(\alpha)$.

Sea ahora $y \in D(K^\dagger)$. Entonces

$$\begin{aligned} R_\alpha y - K^\dagger y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\alpha, \sigma_n) - 1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\alpha, \sigma_n) - 1}{\sigma_n} \left\langle y, \frac{K v_n}{\sigma_n} \right\rangle v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\alpha, \sigma_n) - 1}{\sigma_n^2} \langle K^* y, v_n \rangle v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\alpha, \sigma_n) - 1}{\sigma_n^2} \langle K^* K x^\dagger, v_n \rangle v_n \quad (\text{por Teorema 2.11}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\alpha, \sigma_n) - 1}{\sigma_n^2} \langle x^\dagger, K^* K v_n \rangle v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\alpha, \sigma_n) - 1}{\sigma_n^2} \langle x^\dagger, \sigma_n^2 v_n \rangle v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (F(\alpha, \sigma_n) - 1) \langle x^\dagger, v_n \rangle v_n, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\|R_\alpha y - K^\dagger y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |F(\alpha, \sigma_n) - 1|^2 |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2. \quad (3.4.2)$$

Ahora, como $x^\dagger \in R(K^\dagger) = N(K)^\perp$ y $\{v_n\}$ expande $N(K)^\perp$ entonces $x^\dagger = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^\dagger, v_n \rangle v_n$, esto es, la serie converge. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle x^\dagger, v_n \rangle v_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2(C+1)^2} \quad (3.4.3)$$

donde C es la constante de la condición *i*). Además, dado $\varepsilon > 0$, para cada σ_j , $j = 1, \dots, N$ de la condición *iii*) sabemos que existe $\alpha_j = \alpha_j(\sigma_j, \varepsilon)$ tal que

$$|F(\alpha, \sigma_j) - 1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} \|x^\dagger\|} \quad (3.4.4)$$

para todo $0 < \alpha < \alpha_j$. Definiendo $\alpha_0 \doteq \min\{\alpha_j, j = 1, \dots, N\}$, se tiene entonces que (3.4.4) se satisface para todo $0 < \alpha < \alpha_0$ y σ_j , $j = 1, \dots, N$. Observar también que, de la condición *i*)

$$|F(\alpha, \sigma) - 1| \leq |F(\alpha, \sigma)| + 1 \leq C + 1. \quad (3.4.5)$$

Volviendo a (3.4.2) tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y - K^\dagger y\|^2 &= \sum_{n=1}^N |F(\alpha, \sigma_n) - 1|^2 |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} |F(\alpha, \sigma_n) - 1|^2 |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2 \|x^\dagger\|^2} \sum_{n=1}^N |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} |F(\alpha, \sigma_n) - 1|^2 |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 \quad (\text{por (3.4.4)}) \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2 \|x^\dagger\|^2} \sum_{n=1}^N |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 \\ &\quad + (C+1)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 \quad (\text{por (3.4.5)}) \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2 \|x^\dagger\|^2} \sum_{n=1}^N |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (C+1)^2 \frac{\varepsilon^2}{2(C+1)^2} \quad (\text{por (3.4.3)}) \\
& \leq \frac{\varepsilon^2}{2\|x^\dagger\|^2} \|x^\dagger\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2
\end{aligned}$$

válido para $0 < \alpha < \alpha_0$. Luego, dados $y \in D(K^\dagger)$ y $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ tal que si $0 < \alpha < \alpha_0$, entonces $\|R_\alpha y - K^\dagger y\| < \varepsilon$. En consecuencia R_α converge puntualmente a K^\dagger sobre $D(K^\dagger)$ para $\alpha \rightarrow 0^+$ (más aún, la convergencia es uniforme en $D(K^\dagger)$). De la Proposición 3.5 se sigue entonces que $\{R_\alpha\}$ es una regularización para K^\dagger .

Finalmente, si para $y \in D(K^\dagger)$ consideramos una regla de elección de parámetro a-priori $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta)$ tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\alpha}(\delta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta C(\hat{\alpha}(\delta)) = 0,$$

entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\alpha}(\delta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\| = 0$$

de lo cual se sigue, en virtud de la Proposición 3.8, que $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ es un método de regularización convergente para resolver $Kx = y$. ■

Existen numerosos ejemplos de funciones $F : (0, \infty) \times (0, \|K\|] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen las condiciones *i*), *ii*) y *iii*) del teorema anterior y por lo tanto conducen a métodos de regularización convergentes. Veamos dos típicos ejemplos de funciones filtro.

Ejemplo 3.29. 1) Para $\alpha > 0$ y $0 < \sigma \leq \|K\|$, sea

$$F(\alpha, \sigma) \doteq \frac{\sigma^2}{\alpha + \sigma^2}.$$

Obviamente $|F(\alpha, \sigma)| \leq 1$ pues $\alpha > 0$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha, \sigma) = 1$ para todo $0 < \sigma \leq \|K\|$. Además, dado $\alpha > 0$

$$|F(\alpha, \sigma)| = F(\alpha, \sigma) = \frac{\sigma}{\alpha + \sigma^2} \sigma \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \sigma$$

pues $(\sigma - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0$ y $\sigma > 0$, por lo tanto $C(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

2) Para $\alpha > 0$ y $0 < \sigma \leq \|K\|$, sea

$$F(\alpha, \sigma) \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^2 \geq \alpha \\ 0 & \text{si } \sigma^2 < \alpha. \end{cases}$$

En este caso $|F(\alpha, \sigma)| \leq 1$ y para la segunda condición es suficiente considerar el caso $\sigma^2 \geq \alpha$. Como

$$|F(\alpha, \sigma)| = 1 = \frac{1}{\sigma} \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sigma,$$

se tiene que $C(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Además, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha, \sigma) = 1$ para todo $0 < \sigma \leq \|K\|$ pues fijado $\sigma > 0$ para $\alpha \leq \sigma^2$ se cumple que $F(\alpha, \sigma) = 1$.

En la siguiente sección veremos que para la primera elección del ejemplo precedente, el método que se obtiene (*Método de Tikhonov-Phillips*) admite una caracterización que evita el conocimiento de un sistema singular. Para la segunda elección, el método que se obtiene se denomina *expansión en valores singulares truncada* y, en este caso, la solución regularizada con dato con ruido tiene la forma

$$x_\alpha^\delta = \sum_{n: \sigma_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_n} \langle y^\delta, u_n \rangle v_n \quad (\text{de (3.4.1)}).$$

3.5. Métodos de regularización espectrales

Usando la teoría espectral para operadores lineales y autoadjuntos, se puede construir una amplia clase de métodos de regularización lineales. La idea es la siguiente: sean $T \in L(X, Y)$ y $\{E_\lambda\}$ la familia espectral asociada al operador autoadjunto $T^*T \in L(X)$. Supongamos que T^*T es inversible con inversa continua, i.e. $0 \notin \sigma(T^*T)$. Entonces de la Definición 2.29 tenemos que

$$(T^*T)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda. \quad (3.5.1)$$

Si $y \in D(T^\dagger)$, x^\dagger satisface la ecuación normal $T^*Tx^\dagger = T^*y$ y por lo tanto, en este caso, $x^\dagger = (T^*T)^{-1}T^*y$. En virtud de (3.5.1) esto puede expresarse como

$$x^\dagger = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda T^*y. \quad (3.5.2)$$

Ahora, si $R(T)$ no es cerrado, esto es, si el problema $Tx = y$ es mal condicionado entonces $0 \in \sigma(T^*T)$ y por lo tanto la integral en (3.5.2) no existe debido a que el integrando tiene ahora un polo en $\lambda = 0$. Esta observación nos induce a considerar la estrategia de reemplazar el integrando $\frac{1}{\lambda}$ por una familia uniparamétrica de funciones $\{g_\alpha(\lambda)\}$ las cuales sean al menos seccionalmente continuas en $[0, \|T\|^2]$ (esto es, en un conjunto que contenga al espectro de T^*T) y además que sean continuas por derecha en los puntos de discontinuidad, y reemplazar (3.5.2) por

$$x_\alpha \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^*y. \quad (3.5.3)$$

Como $g_\alpha \in S$ (ver Definición 2.29) tenemos que

$$x_\alpha = R_\alpha y, \quad (3.5.4)$$

donde

$$R_\alpha \doteq g_\alpha(T^*T)T^*. \quad (3.5.5)$$

Para datos con ruido y^δ tal que $\|y - y^\delta\| \leq \delta$, denotamos con $x_\alpha^\delta \doteq R_\alpha y^\delta$. El operador lineal $g_\alpha(T^*T)$ es continuo pues la función g_α es acotada por ser seccionalmente continua en $[0, \|T\|^2]$. En consecuencia, R_α definido por (3.5.5) es un operador lineal y continuo.

Observar que, si T es compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$, de (3.5.4) y (3.5.5) se sigue que

$$\begin{aligned} x_\alpha &= g_\alpha(T^*T)T^*y \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle T^*y, v_n \rangle v_n \quad (\text{por (2.3.5)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle y, Tv_n \rangle v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n g_\alpha(\sigma_n^2) \langle y, u_n \rangle v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2 g_\alpha(\sigma_n^2)}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n, \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

expresión que tiene la forma de (3.4.1) donde el filtro $F(\alpha, \sigma)$ en este caso es $F(\alpha, \sigma) = \sigma^2 g_\alpha(\sigma^2)$. En este sentido, esta nueva forma de construcción de una regularización para T^\dagger puede verse como una generalización de la regularización mediante filtros. Esta comparación sirve además para orientarnos respecto de condiciones mínimas que deban imponerse a la familia $\{g_\alpha(\lambda)\}$ para obtener convergencia.

Supongamos entonces que para todo $\alpha > 0$ la función $g_\alpha : [0, \|T\|^2] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

i) g_α es seccionalmente continua y continua por derecha en los puntos de discontinuidad,

ii) existe una constante $C > 0$ tal que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C$ para todos $\lambda \in [0, \|T\|^2]$ y $\alpha > 0$,

iii) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda \in (0, \|T\|^2]$.

Bajo estas condiciones se tiene el siguiente resultado sobre convergencia:

Teorema 3.30. Sean X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$ y $\{g_\alpha(\cdot)\}$ una familia de funciones que satisface las condiciones i), ii) y iii). Entonces para todo $y \in D(T^\dagger)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(T^*T)T^*y = T^\dagger y. \quad (3.5.7)$$

Por otro lado, si $y \notin D(T^\dagger)$ entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|g_\alpha(T^*T)T^*y\| = +\infty. \quad (3.5.8)$$

DEMOSTRACION. Probaremos el teorema en el caso particular en que el operador T es compacto.

Sean $y \in D(T^\dagger)$, $x^\dagger = T^\dagger y$ y $x_\alpha = g_\alpha(T^*T)T^*y$. Probar (3.5.7) es equivalente a probar $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x^\dagger - x_\alpha\| = 0$. Para ello, observar que

$$x^\dagger - x_\alpha = x^\dagger - g_\alpha(T^*T)T^*y = (I - g_\alpha(T^*T)T^*T)x^\dagger \quad (\text{pues } y \in D(T^\dagger)). \quad (3.5.9)$$

Definiendo la función

$$r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda) \quad (3.5.10)$$

para todo (α, λ) para el cual $g_\alpha(\lambda)$ esté definido, se tiene que r_α es seccionalmente continua y por lo tanto (3.5.9) puede expresarse como

$$x^\dagger - x_\alpha = r_\alpha(T^*T)x^\dagger = \int_{-\infty}^{+\infty} r_\alpha(\lambda) dE_\lambda x^\dagger \quad (\text{por (2.3.5)}).$$

Así,

$$\|x^\dagger - x_\alpha\|^2 = \|r_\alpha(T^*T)x^\dagger\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \quad (\text{por (2.3.12)}). \quad (3.5.11)$$

Para todo $\alpha > 0$ el integrando en (3.5.11) está acotado por $(C+1)^2$ siendo C la constante de la condición *i*) (observar que $|r_\alpha(\lambda)| \leq 1 + |\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq 1 + C$), por lo tanto es integrable respecto de la medida $d\|E_\lambda x^\dagger\|^2$. En consecuencia, por el Teorema de la Convergencia Dominada se cumple que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2. \quad (3.5.12)$$

Ahora, de (3.5.10) y de la condición *iii*) se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} r_\alpha^2(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda > 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$, por

lo tanto, la integral en el lado derecho de (3.5.12) es igual al valor del salto en $\lambda = 0$ de la función $\lambda \rightarrow \|E_\lambda x^\dagger\|^2$. De (2.3.1) es claro que para $\lambda > 0$, $\|E_\lambda x^\dagger\|^2 - \|E_0 x^\dagger\|^2 = \|Px^\dagger\|^2$ siendo P la proyección ortogonal de X sobre $N(T^*T) = N(T)$. Luego, el valor de dicho salto es $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\|E_\lambda x^\dagger\|^2 - \|E_0 x^\dagger\|^2) = \|Px^\dagger\|^2 = 0$ (pues $x^\dagger \in N(T)^\perp$) y por lo tanto la integral en (3.5.12) es nula. De (3.5.11) se sigue entonces que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x^\dagger - x_\alpha\| = 0$ tal como queríamos probar.

Observar que, de lo que acabamos de probar, se sigue que $\{R_\alpha\}_{\alpha > 0}$, con R_α definido por (3.5.5), converge puntualmente a T^\dagger sobre $D(T^\dagger)$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ y en consecuencia,

de la Proposición 3.5 concluimos que $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ es una regularización para T^\dagger . Más aún, esta regularización es lineal.

Supongamos ahora que $y \notin D(T^\dagger)$. Ya que para todo $\alpha > 0$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|TR_\alpha\| &= \|Tg_\alpha(T^*T)T^*\| \\ &= \|TT^*g_\alpha(TT^*)\| \quad (\text{por (2.3.7)}) \\ &\leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{|\lambda g_\alpha(\lambda)|\} \quad (\text{por (2.3.13)}) \\ &\leq C \quad (\text{por la condición ii}), \end{aligned}$$

de la Proposición 3.7 se sigue que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x_\alpha\| = +\infty$, con lo cual queda demostrado (3.5.8). ■

A partir de la regularización obtenida mediante la familia $\{g_\alpha\}$ se pueden construir reglas de elección de parámetro a-priori $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta)$ de modo tal que el método $(R_\alpha, \hat{\alpha})$ sea de orden óptimo en $X_{\mu, \rho}$ con $\mu, \rho > 0$ donde $x^\dagger \in X_{\mu, \rho}$. En este caso, el máximo valor de μ para el cual el método es de orden óptimo en $X_{\mu, \rho}$ se denomina *índice de calificación del método* y se denota con μ_0 . Así, con estas reglas tenemos garantizado orden óptimo en $X_{\mu, \rho}$ para $0 < \mu \leq \mu_0$. En caso contrario, se deben construir reglas de elección de parámetro a-posteriori $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta, y^\delta)$; por ejemplo, cuando $\mu_0 > \frac{1}{2}$ se puede usar el Principio de Discrepancia de Morozov y se obtiene orden óptimo en $X_{\mu, \rho}$ para $0 < \mu \leq \mu_0 - \frac{1}{2}$. No profundizaremos aquí sobre el tema reglas de elección de parámetros.

Distintas elecciones de la familia $\{g_\alpha(\cdot)\}$ conducen a distintos métodos. Veamos dos típicos ejemplos.

Ejemplo 3.31. (Expansión en Valores Singulares Truncada)

Para $\alpha > 0$ y $\lambda \in [0, \|T\|^2]$ definimos

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda \geq \alpha \\ 0 & \text{si } \lambda < \alpha \end{cases}.$$

Claramente la familia $\{g_\alpha(\cdot)\}$ satisface las condiciones *i*), *ii*) con $C = 1$ y *iii*). Del Teorema 3.30 se sigue entonces que para $y \in D(T^\dagger)$

$$x_\alpha = g_\alpha(T^*T)T^*y = \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda T^*y$$

converge a x^\dagger cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

Si $T = K$ es compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$, de (3.5.6) tenemos que

$$x_\alpha = \sum_{n: \sigma_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n$$

lo que en efecto es un truncamiento de la expansión en valores singulares (2.2.10) de $x^\dagger = K^\dagger y$. Por esta razón, este método se denomina expansión en valores singulares truncada.

Obviamente, para T compacto, este método puede verse también como un método de filtro donde

$$F(\alpha, \sigma) \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^2 \geq \alpha \\ 0 & \text{si } \sigma^2 < \alpha \end{cases}$$

(ver Ejemplo 3.29).

Este método también puede relacionarse con el método de cuadrados mínimos dual. En efecto, podemos pensar que lo que estamos haciendo es reemplazar el operador compacto

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n,$$

(ver (A.4.3)) por el operador K_α definido por

$$K_\alpha x \doteq \sum_{n: \sigma_n^2 \geq \alpha} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n$$

que es de rango finito para todo $\alpha > 0$ y por lo tanto es compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n: \sigma_n^2 \geq \alpha}$ y, por (2.2.10)

$$K_\alpha^\dagger y = \sum_{n: \sigma_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n.$$

Análogamente para $x_\alpha^\delta = K_\alpha^\dagger y^\delta$. Observar entonces que este puede verse como un método de cuadrados mínimos dual donde Y_α es el espacio generado por los autovectores u_n de KK^* correspondientes a los autovalores σ_n^2 para los cuales $\sigma_n^2 \geq \alpha$. En este caso $K_\alpha = Q_\alpha K$ donde Q_α es la proyección ortogonal de Y sobre Y_α . En la Sección 3.3 vimos que este método de proyección es óptimo en el sentido que minimiza el error producido por ruidos en los datos.

Ejemplo 3.32. (Regularización de Tikhonov-Phillips)

Para $\alpha > 0$ y $\lambda \in [0, \|T\|^2]$ definimos

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda + \alpha}.$$

Claramente la familia $\{g_\alpha(\cdot)\}$ satisface las condiciones *i)*, *ii)* con $C = 1$ y *iii)*. Del Teorema 3.30 se sigue entonces que para $y \in D(T^\dagger)$

$$x_\alpha = g_\alpha(T^*T)T^*y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda + \alpha} dE_\lambda T^*y$$

converge a x^\dagger cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. Observar que, en este caso

$$g_\alpha(T^*T) = (T^*T + \alpha I)^{-1}.$$

Si $T = K$ es compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$, de (3.5.6) tenemos que

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{1}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle y, u_n \rangle v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle y, u_n \rangle v_n$$

lo cual puede interpretarse como un método de filtro en el que

$$F(\alpha, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha}$$

(ver Ejemplo 3.29).

Capítulo 4

Métodos de molificación

Sean X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$. Como se vió en los capítulos anteriores, cuando el problema inverso

$$Tf = g, \quad (4.0.1)$$

es mal condicionado, tanto por la naturaleza del problema como por la frecuente presencia de ruido en los datos, no es posible calcular de manera exacta la mejor solución aproximada $f^\dagger = T^\dagger g$ del problema. Esto es así aún cuando g se conoce en forma exacta (hipótesis casi nunca cierta en la práctica). Lo mejor que se puede hacer es calcular una aproximación de f^\dagger y hacerlo de manera tal que su cálculo sea estable. En el capítulo anterior vimos como esto puede conseguirse mediante los métodos de regularización por proyección, los métodos de filtros y los métodos espectrales en general. Una idea radicalmente diferente de todos estos métodos de regularización, en el caso en que X sea un espacio de funciones, digamos sobre un cierto conjunto Ω , fué introducida originalmente por A. K. Louis y P. Maass en 1990 ([20]) y consiste esencialmente en considerar la ecuación (4.0.1) e introducir una familia paramétrica de “operadores de molificación” $E_\gamma : X \rightarrow X$ de modo tal que $E_\gamma f \xrightarrow{w} f$ cuando $\gamma \rightarrow 0^+$ para todo $f \in X$. Dado que X es un espacio de funciones sobre Ω , podemos representar E_γ puntualmente, para cada $x \in \Omega$, mediante un “molificador” $m_\gamma(x, \cdot) \in X$ utilizando el Teorema de Representación de Riesz (Teorema A.27):

$$(E_\gamma f)(x) \doteq \langle f(\cdot), m_\gamma(x, \cdot) \rangle_X, \quad f \in X. \quad (4.0.2)$$

Estos “métodos de molificación” se originan a partir de la observación del hecho que a menudo no se está interesado en calcular f^\dagger sino sólo un funcional lineal $\langle f^\dagger, m \rangle$ de f^\dagger y muy a menudo, dependiendo del funcional en cuestión, este problema resulta bien condicionado. Por ejemplo, si uno quisiera aproximar un valor puntual de f^\dagger , digamos en $x_0 \in \Omega$, entonces eligiendo convenientemente $m(\cdot) \approx \delta_{x_0}(\cdot)$, la delta de Dirac en x_0 , es posible conseguir que $\langle f^\dagger, m \rangle \approx f^\dagger(x_0)$. En (4.0.2) m_γ recibe el nombre

de “molificador”, $x \in \Omega$ es el “punto de reconstrucción” y γ es un parámetro positivo denominado “parámetro de reconstrucción”.

4.1. El método de la inversa aproximada

El método de la inversa aproximada es un caso particular de molificación y fue introducido por A. K. Louis en 1996 ([21]). Si bien este método se aplica a ecuaciones de la forma (4.0.1) con T tanto lineal como no lineal, por razones de simplicidad, en este trabajo sólo trataremos el caso en que T es lineal. Por conveniencia, de aquí en más utilizaremos la notación m_γ^x para denotar a $m_\gamma(x, \cdot) \in X$.

Supongamos que elegimos al molificador m_γ de modo que $\forall x \in \Omega$, $m_\gamma^x(\cdot)$ esté en el rango del operador adjunto T^* , esto es, de manera tal que

$$m_\gamma^x = T^* \psi_\gamma^x \quad (4.1.1)$$

para algún $\psi_\gamma^x \in Y$ (observar que esta solución es única si T es inyectivo, hipótesis que, como hemos visto, siempre podemos suponer válida en el tratamiento de problemas inversos). Si $g \in R(T)$, $Tf^\dagger = g$ y tenemos entonces que

$$\begin{aligned} (E_\gamma f^\dagger)(x) &= \langle f^\dagger(\cdot), m_\gamma^x(\cdot) \rangle_X \quad (\text{por (4.0.2)}) \\ &= \langle f^\dagger(\cdot), (T^* \psi_\gamma^x)(\cdot) \rangle_X \quad (\text{por (4.1.1)}) \\ &= \langle T f^\dagger, \psi_\gamma^x \rangle_Y \\ &= \langle g, \psi_\gamma^x \rangle_Y. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Aquí es importante observar que el producto interno $\langle g, \psi_\gamma^x \rangle_Y$, conocido ψ_γ^x , puede calcularse a partir del dato g . En consecuencia, el problema de resolver (4.0.1) se transforma en el problema de resolver (4.1.1).

Si $m_\gamma^x \notin R(T^*)$, entonces elegimos ψ_γ^x como el elemento en Y que minimiza $\|T^* \psi_\gamma^x - m_\gamma^x\|_X$ lo cual, en virtud del Teorema 2.11, es equivalente a resolver la ecuación normal

$$TT^* \psi_\gamma^x = T m_\gamma^x. \quad (4.1.3)$$

Como ya sabemos, esta ecuación tiene solución si y solo si $m_\gamma^x \in D((T^*)^\dagger) = R(T^*) \oplus R(T^*)^\perp$ en cuyo caso podemos forzar unicidad tomando

$$\psi_\gamma^x = (T^*)^\dagger m_\gamma^x. \quad (4.1.4)$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 4.1. Sean X un espacio de funciones sobre Ω , $T \in L(X, Y)$, $x \in \Omega$, $m_\gamma^x \in X$ y ψ_γ^x la correspondiente solución de (4.1.1) si $m_\gamma^x \in R(T^*)$ o, con más

generalidad, ψ_γ^x solución de (4.1.3) si $m_\gamma^x \in D\left((T^*)^\dagger\right) = R(T^*) \oplus R(T^*)^\perp$. Definimos la **inversa aproximada** del operador T como el operador lineal $S_\gamma : Y \rightarrow X$ dado por

$$(S_\gamma g)(x) \doteq \langle g, \psi_\gamma^x \rangle_Y, \quad g \in Y \quad (4.1.5)$$

Aquí ψ_γ^x recibe el nombre de **núcleo de reconstrucción** en el punto $x \in \Omega$.

Observación 4.2. El operador S_γ definido por (4.1.5) no necesariamente es acotado (continuo) para cualquier $\gamma > 0$. Es importante observar sin embargo que S_γ no depende de los datos; sólo depende del núcleo de reconstrucción ψ_γ^x el cual, a su vez, depende solo del operador T (i.e. del modelo) y del molificador m_γ^x seleccionado, de modo que S_γ puede ser precalculado, antes de disponer de los datos g .

El siguiente es el resultado mas importante de esta sección.

Teorema 4.3. Consideremos la ecuación (4.0.1) donde X es un espacio de funciones sobre Ω y $T \in L(X, Y)$. Si $g \in D(T^\dagger)$, entonces la inversa aproximada S_γ mapea g en la versión molificada por m_γ^x de la mejor solución aproximada $f^\dagger = T^\dagger g$ de (4.0.1), esto es,

$$(S_\gamma g)(x) = \langle f^\dagger(\cdot), m_\gamma^x(\cdot) \rangle_X.$$

DEMOSTRACION. Si $m_\gamma^x \in R(T^*)$ y $g \in R(T)$, este resultado se sigue inmediatamente a partir de la definición de S_γ y de la ecuación (4.1.2). Consideremos entonces el operador S_γ definido por (4.1.5) con ψ_γ^x solución de (4.1.3). Supongamos que $R(T)$ es denso en Y (si no lo es reemplazamos Y por $\overline{R(T)}$). En consecuencia, $Y = \overline{R(T)} = \overline{R(TT^*)} = N(TT^*)^\perp$. Luego, existe $(TT^*)^{-1}$ y por lo tanto

$$(TT^*)^{-1} = (TT^*)^\dagger. \quad (4.1.6)$$

Luego, de (4.1.3) se sigue que

$$\psi_\gamma^x = (TT^*)^{-1} T m_\gamma^x. \quad (4.1.7)$$

Sea ahora $g \in D(T^\dagger) = R(T) \oplus R(T)^\perp = R(T)$ (pues $R(T)$ es denso en Y). Entonces

$$\begin{aligned} (S_\gamma g)(x) &= \langle g, \psi_\gamma^x \rangle_Y \quad (\text{por (4.1.5)}) \\ &= \langle g, (TT^*)^{-1} T m_\gamma^x \rangle_Y \quad (\text{por (4.1.7)}) \\ &= \langle g, (T^*)^\dagger m_\gamma^x \rangle_Y \quad (\text{por (2.1.20) y (4.1.6)}) \\ &= \langle g, (T^\dagger)^* m_\gamma^x \rangle_Y \quad (\text{Lema 3.19}). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Ahora, como por hipótesis $T \in L(X, Y)$, se tiene que también $T^* \in L(Y, X)$ y por lo tanto $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$ es un operador lineal densamente definido (ver Proposición 2.4).

Se sigue entonces que $(T^\dagger)^{**}$ es una extensión de T^\dagger (ver Teorema A.36-a)), esto es, $(T^\dagger)^{**} |_{D(T^\dagger)} = T^\dagger$. Ya que $g \in R(T) = D(T^\dagger)$ de (4.1.8) tenemos que

$$\begin{aligned} (S_\gamma g)(x) &= \langle (T^\dagger)^{**} g, m_\gamma^x \rangle_X \\ &= \langle T^\dagger g, m_\gamma^x \rangle_X \\ &= \langle f^\dagger, m_\gamma^x \rangle_X, \end{aligned}$$

tal como queríamos probar. ■

Así, el **método de la inversa aproximada** permite calcular (puntualmente) una versión molificada de f^\dagger , $(E_\gamma f^\dagger)(x)$, a través del producto interno del dato g con el núcleo de reconstrucción ψ_γ^x . A tal versión molificada de f^\dagger la denotaremos con $f_\gamma(x)$, esto es, $f_\gamma(x) \doteq (S_\gamma g)(x) = \langle g, \psi_\gamma^x \rangle$.

El método de la inversa aproximada tiene las siguientes importantes ventajas con respecto a otros métodos tradicionales:

- i) No es necesario discretizar el dato g como en los métodos por proyección.
- ii) Se puede variar arbitrariamente el punto de reconstrucción x a los efectos de aproximar f^\dagger en puntos de especial interés.
- iii) Si bien la ecuación (4.1.1) es tan mal condicionada como (4.0.1) (pues $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$) se tiene la ventaja de que el lado izquierdo se conoce de manera exacta. Por lo tanto, se puede resolver mejor por regularización en el caso que no se pueda resolver analíticamente.
- iv) En la ecuación (4.1.1) sólo el molificador depende del parámetro γ , en consecuencia, un cambio de γ no influye en el operador de tal ecuación.
- v) La determinación del núcleo de reconstrucción ψ_γ^x es independiente del dato g , en consecuencia, puede precalcularse antes de contar efectivamente con el dato g . Más aún, el mismo núcleo de reconstrucción puede utilizarse para diferentes datos g .
- vi) Con m_γ^x adecuadamente elegido, la molificación de f^\dagger reduce el efecto de las componentes de alta frecuencia las cuales, como vimos en los capítulos previos, son muy sensibles a errores.
- vii) La inversión se realiza a través del cálculo de un producto interno por lo que, en el caso de problemas en dimensiones grandes, el método es muy apropiado para su cálculo mediante procesamiento en paralelo.

Observación 4.4. 1) En el método de la inversa aproximada, la molificación tiene lugar en el espacio de las soluciones. También es posible molificar directamente en el espacio de los datos (ver por ejemplo Murio [25]).

2) Hasta donde sabemos, aún no existen métodos ni algoritmos para la elección óptima del parámetro de reconstrucción γ . De todos modos cuando se tienen mediciones con ruido g^δ , al igual que el parámetro de regularización en los métodos tradicionales, aquí γ está relacionado implícitamente con el nivel de ruido δ . En esos casos siempre es posible utilizar el método de prueba y error para encontrar un parámetro de reconstrucción “razonable”.

3) La elección del molificador depende de la naturaleza del problema a resolver y de la factibilidad del cómputo del núcleo de reconstrucción. Por ejemplo, si $X = L_2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, molificadores usuales son:

$$m_\gamma^x(t) \doteq \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^d \text{sinc}(\gamma(x-t)) \quad (4.1.9)$$

llamado *filtro de banda limitada* (o *filtro "pasabaja"*), el cual elimina las componentes de alta frecuencia de la solución. También se utilizan usualmente molificadores de decaimiento rápido gaussianos del tipo

$$m_\gamma^x(t) \doteq (2\pi)^{-n/2} \gamma^{-n} e^{-\frac{|x-t|^2}{2\gamma^2}} \quad (4.1.10)$$

y molificadores de promedios locales del tipo

$$m_\gamma^x(t) \doteq \frac{n}{\text{vol}(S^{n-1})\gamma^n} \chi_{B_\gamma(0)}(x-t) \quad (4.1.11)$$

donde $\chi_{B_\gamma(0)}$ es la función característica sobre la bola de radio γ y centro en el origen de \mathbb{R}^n y $\text{vol}(S^{n-1})$ es la medida de la superficie de la bola unitaria en \mathbb{R}^n .

Es importante observar que si T es un operador compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$, T^* también es compacto con sistema singular $(\sigma_n; u_n, v_n)$. Entonces, en este caso, el núcleo de reconstrucción tiene la forma

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^x &= (T^*)^\dagger m_\gamma^x(\cdot) \quad (\text{de (4.1.4)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \langle m_\gamma^x(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_X u_n \quad (\text{por (2.2.10)}). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

En consecuencia, la inversa aproximada puede escribirse como

$$\begin{aligned} (S_\gamma g)(x) &= \langle g, \psi_\gamma^x \rangle_Y \quad (\text{de (4.1.5)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \langle m_\gamma^x(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_X \langle g, u_n \rangle_Y. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Esta expresión tiene el aspecto de un método de filtro (3.4.1), y en efecto lo es si pueden elegirse la función filtro $F(\gamma, \sigma)$ y el molificador m_γ^x de modo que satisfagan la siguiente relación:

$$F(\gamma, \sigma_n) v_n(x) = \langle m_\gamma^x(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_X.$$

Analizaremos más en detalle esta conexión entre la inversa aproximada y los métodos de regularización de filtro en la siguiente sección (Teorema 4.7).

A los efectos de ilustrar mejor el uso del método de la inversa aproximada consideraremos el siguiente ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.5. Sea $T : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ definido por

$$(Tf)(t) \doteq \int_0^t f(s)ds, \quad t \in (0, 1), \quad f \in L_2(0, 1). \quad (4.1.14)$$

Claramente este operador es lineal y compacto (ver Teorema A.45) y, como puede verificarse inmediatamente, su adjunto es

$$(T^*g)(t) = \int_t^1 g(s)ds. \quad (4.1.15)$$

Calculemos el sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$ asociado al operador T . En virtud de (4.1.14) y (4.1.15), el problema de autovalores $T^*Tv = \lambda v$ es equivalente a

$$\lambda v(t) = \int_t^1 \left(\int_0^s v(r)dr \right) ds, \quad t \in (0, 1).$$

A su vez, derivando dos veces, vemos que, para $\lambda \neq 0$, esto es equivalente al problema de autovalores:

$$\begin{cases} \lambda v'' + v = 0 & \text{en } (0, 1), \\ v(1) = v'(0) = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son $v_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2}t\right)$ y $\lambda_n = \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}$ para $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sqrt{\lambda_n} = \frac{2}{\pi(2n-1)}, \quad v_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{t}{\sigma_n}\right), \\ u_n(t) &= \frac{1}{\sigma_n} (Tv_n)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right). \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Para la aplicación del método de la inversa aproximada a la ecuación $Tf = g$ (la cual tiene obviamente como solución exacta a $f = g'$) consideremos un molificador de tipo convolución de promedios locales del tipo (4.1.11),

$$m_\gamma^x(t) \doteq \frac{1}{2\gamma} \chi_{[-\gamma, \gamma]}(x-t). \quad (4.1.17)$$

¿Cuál es el resultado que se obtiene de la aplicación del método de la inversa aproximada en este caso y con este molificador?. Para responder esta pregunta, notemos que

$$\begin{aligned} (S_\gamma g)(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \langle m_\gamma^x(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \quad (\text{por (4.1.13)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \left(\int_0^1 m_\gamma^x(t) v_n(t) dt \right) \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \left(\frac{1}{2\gamma} \int_{x-\gamma}^{x+\gamma} v_n(t) dt \right) \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \quad (\text{por (4.1.17)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma}{\sigma_n} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left(\frac{x}{\sigma_n} \right) \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \quad (\text{de (4.1.16)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\gamma-x}{\sigma_n} \right) + \sin \left(\frac{\gamma+x}{\sigma_n} \right) \right] \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \frac{1}{2\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x+\gamma) - u_n(x-\gamma)] \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} \quad (\text{de (4.1.16)}) \\
&= \frac{1}{2\gamma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} u_n(x+\gamma) - \sum_{n=1}^{\infty} \langle g(\cdot), u_n(\cdot) \rangle_{L_2(0,1)} u_n(x-\gamma) \right] \\
&= \frac{1}{2\gamma} [g(x+\gamma) - g(x-\gamma)],
\end{aligned}$$

lo cual es claramente una aproximación por diferencias finitas centrales de $g'(x)$ con paso $\Delta x = \gamma$.

4.2. Relación entre la inversa aproximada y los métodos de filtro

En los capítulos precedentes vimos que, cuando el problema a resolver $Tf = g$ es mal condicionado (T^\dagger no acotado), es necesario aplicar métodos de regularización para poder aproximar las soluciones de manera estable. En la sección 3.3 estudiamos los métodos de regularización por proyección sobre subespacios de dimensión finita. En la sección 3.4 definimos los métodos de filtro, aplicables sólo en el caso en que T es compacto. Luego, en la sección 3.5 vimos una generalización de tales métodos, los llamados métodos continuos de regularización. Como casos particulares vimos el método de Tikhonov-Phillips y el método de expansión en valores singulares truncada. En el siguiente teorema probaremos que, en el caso en que T es compacto, los métodos de filtro pueden verse como casos especiales del método de la inversa aproximada.

Teorema 4.6. Sean X un espacio de funciones, $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto, $(\sigma_n; v_n, u_n)$ el sistema singular asociado a T y $\{R_\gamma\}_{\gamma>0}$ una regularización por filtro para T^\dagger , esto es,

$$(R_\gamma g)(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\gamma, \sigma_n)}{\sigma_n} \langle g, u_n \rangle_Y v_n(\cdot).$$

Entonces este método coincide con el método de la inversa aproximada cuando el molificador se define por

$$m_\gamma^x(t) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} F(\gamma, \sigma_n) v_n(x) v_n(t). \quad (4.2.1)$$

DEMOSTRACION. Puesto que T es compacto, por (4.1.12) sabemos que el núcleo de reconstrucción tiene la forma

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \langle m_\gamma^x(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_X u_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} F(\gamma, \sigma_m) v_m(x) \langle v_m(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_X \right) u_n \quad (\text{de (4.2.1)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} F(\gamma, \sigma_n) v_n(x) u_n \quad (\text{pues } \{v_n\} \text{ es ortonormal}). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Luego, la inversa aproximada tiene la forma

$$\begin{aligned} (S_\gamma g)(x) &= \langle g, \psi_\gamma^x \rangle_Y \quad (\text{por (4.1.5)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} F(\gamma, \sigma_n) v_n(x) \langle g, u_n \rangle_Y \quad (\text{por (4.2.2)}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(S_\gamma g)(\cdot) = (R_\gamma g)(\cdot)$, como queríamos probar. ■

Una consecuencia importante de este teorema es que, en el caso en que el operador T es compacto, el método de Tikhonov-Phillips (ver Ejemplo 3.32) y el método de expansión en valores singulares truncada (ver Ejemplo 3.31) son casos particulares del método de la inversa aproximada. Los correspondientes molificadores tienen la forma:

$$m_\gamma^x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \gamma} v_n(x) v_n(t),$$

y

$$m_\gamma^x(t) = \sum_{n: \sigma_n^2 \geq \gamma} v_n(x) v_n(t),$$

respectivamente.

Así, por ejemplo, si T es el operador compacto del Ejemplo 4.5, en el primer caso tenemos

$$\begin{aligned} m_\gamma^x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2/\pi}{1 + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4}\gamma} \cos\left(\frac{x}{\sigma_n}\right) \cos\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/\pi}{1 + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4}\gamma} \left[\cos\left(\frac{x-t}{\sigma_n}\right) + \cos\left(\frac{x+t}{\sigma_n}\right) \right], \end{aligned}$$

y en el segundo caso

$$\begin{aligned} m_\gamma^x(t) &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \gamma} \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{x}{\sigma_n}\right) \cos\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) \\ &= \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \gamma} \frac{1}{\pi} \left[\cos\left(\frac{x-t}{\sigma_n}\right) + \cos\left(\frac{x+t}{\sigma_n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, como los molificadores son en general funciones de dos variables (no necesariamente de tipo convolución) y pueden ser distintos para diferentes elecciones del punto de reconstrucción x , no siempre es posible escribir la inversa aproximada como un método de filtro. En este sentido tenemos el siguiente resultado preciso.

Teorema 4.7. *Sean X un espacio de funciones, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto y $(\sigma_n; v_n, u_n)$ el correspondiente sistema singular asociado a T . Supongamos que el molificador m_γ^x puede escribirse en la forma*

$$m_\gamma^x(t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} m_{\gamma,ij} v_j(x) v_i(t). \quad (4.2.3)$$

Entonces el método de la inversa aproximada con molificador m_γ^x es un método de regularización por filtro, con filtro $F(\gamma, \sigma)$, si y sólo si el filtro satisface

$$m_{\gamma,ij} = F(\gamma, \sigma_j) \delta_{ij}, \quad \text{para } i, j \in \mathbb{N},$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

DEMOSTRACION. Puesto que T es compacto, de (4.1.12) sabemos que el núcleo de reconstrucción ψ_γ^x puede escribirse en términos del molificador m_γ^x como

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \langle m_\gamma^x(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_X u_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} m_{\gamma,ij} v_j(x) \langle v_i(\cdot), v_n(\cdot) \rangle_X \right) u_n \quad (\text{por (4.2.3)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{\gamma,nj} v_j(x) \right) u_n \quad (\text{pues } \{v_n\} \text{ es ortonormal}). \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

Así, la inversa aproximada toma la forma

$$\begin{aligned} (S_\gamma g)(x) &= \langle g, \psi_\gamma^x \rangle_Y \quad (\text{por (4.1.5)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{\gamma,nj} v_j(x) \right) \langle g, u_n \rangle_Y \quad (\text{por (4.2.4)}), \end{aligned}$$

lo cual constituye un método de regularización por filtro con filtro $F(\gamma, \sigma)$ si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{\gamma, nj} v_j(x) = F(\gamma, \sigma_n) v_n(x) \quad \forall x, \forall n,$$

es decir, si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{\gamma, nj} v_j = F(\gamma, \sigma_n) v_n.$$

La ortogonalidad de los v_n (ver Teorema A.17) finalmente implica que $\forall n, j \in \mathbb{N}$,

$$m_{\gamma, nj} = \langle F(\gamma, \sigma_n) v_n(\cdot), v_j(\cdot) \rangle_X = F(\gamma, \sigma_n) \delta_{nj},$$

como queríamos probar ■

En este caso, el molificador puede escribirse en términos del filtro como $m_{\gamma}^x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F(\gamma, \sigma_n) v_n(x) v_n(t)$, en consonancia con el resultado del Teorema 4.6.

4.3. Relación entre la inversa aproximada y el método de Backus-Gilbert

En esta sección nos proponemos estudiar la conexión existente entre el método de la inversa aproximada y el **método de Backus-Gilbert**, introducido originalmente por G. E. Backus y J. G. Gilbert en 1967 (ver [4], [5], [6]) en el contexto del estudio de ciertos problemas geofísicos. Este método se utiliza para tratar problemas de momentos del tipo

$$\langle f, k_i \rangle_X = g_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3.1)$$

donde $g_i \in \mathbb{R}$ y $k_i \in X = L_2(\Omega)$ están dadas. El problema consiste en reconstruir (aproximar) f a partir de la información (4.3.1). A continuación presentamos brevemente el método de Backus-Gilbert.

Observar que (4.3.1) tiene la forma

$$\int_{\Omega} k_i(t) f(t) dt = g_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3.2)$$

lo cual puede pensarse como el resultado de una discretización de la ecuación integral de Fredholm de primera especie

$$\int_{\Omega} k(x, t) f(t) dt = g(x) \quad (4.3.3)$$

usando los puntos de colocación x_1, \dots, x_n y donde $k_i(t) \doteq k(x_i, t)$ y $g_i \doteq g(x_i)$. Recordemos que en la Sección 3.3 (Ejemplo 3.27) analizamos la relación entre las

soluciones por colocación de cuadrados mínimos o discretización de momentos y las soluciones por proyección de cuadrados mínimos dual para este tipo de ecuaciones. Allí probamos que si $\{k_1, \dots, k_n\}$ es un conjunto linealmente independiente en $L_2(\Omega)$ entonces la “solución de momentos” f_n es una combinación lineal finita de dichas funciones k_i .

Para $X = L_2(\Omega)$ e $Y = \mathbb{R}^n$ definimos ahora el operador $T : X \rightarrow Y$ como

$$(Tf)_i \doteq \int_{\Omega} k_i(t)f(t)dt, \quad i = 1, \dots, n, \quad f \in L_2(\Omega), \quad (4.3.4)$$

de modo que (4.3.2) puede escribirse en la forma $Tf = g$ con $g \doteq (g_1, \dots, g_n)^T$. En el método de Backus-Gilbert se busca una inversa a izquierda “aproximada”, llamémosle S_{BG} . Esto es, se busca determinar un operador lineal $S_{\text{BG}} : \mathbb{R}^n \rightarrow L_2(\Omega)$ tal que

$$S_{\text{BG}}Tf \sim f, \quad \forall f \in L_2(\Omega). \quad (4.3.5)$$

La forma general de un operador lineal S_{BG} de \mathbb{R}^n en $L_2(\Omega)$ es

$$(S_{\text{BG}}g)(x) \doteq \sum_{i=1}^n g_i v_i(x), \quad x \in \Omega, \quad g = (g_i) \in \mathbb{R}^n, \quad (4.3.6)$$

para ciertas funciones $v_i \in L_2(\Omega)$ las cuales se determinan a partir del requerimiento (4.3.5). En este contexto, las funciones $v_i, i = 1, 2, \dots, n$, se conocen como “las funciones base de Backus-Gilbert”. Observar que

$$\begin{aligned} (S_{\text{BG}}Tf)(x) &= \sum_{i=1}^n (Tf)_i v_i(x) \quad (\text{por (4.3.6)}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} k_i(t)f(t)dt \right) v_i(x) \quad (\text{por (4.3.4)}) \\ &= \int_{\Omega} f(t) \left(\sum_{i=1}^n k_i(t)v_i(x) \right) dt. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Por lo tanto, para satisfacer (4.3.5) las funciones v_i deben determinarse de modo que $m_n^x(t) \doteq \sum_{i=1}^n v_i(x)k_i(t) \sim \delta(x-t)$ (en algún sentido) pues $\int_{\Omega} f(t)\delta(x-t)dt = f(x)$. Así, la condición (4.3.5) nos conduce al problema de aproximar la función delta de Dirac $\delta(x-t)$ por una combinación lineal de la forma $\sum_{i=1}^n v_i(x)k_i(t)$. La propuesta del método de Backus-Gilbert se basa en un criterio de minimización puntual: dado $x \in \Omega$ arbitrario pero fijo, se determinan los valores $v_i(x) \doteq v_i$, para $i = 1, \dots, n$, que minimizan el funcional

$$(v_1(x), \dots, v_n(x)) \rightarrow \int_{\Omega} |x-t|^2 \left| \sum_{i=1}^n k_i(t)v_i(x) \right|^2 dt, \quad (4.3.8)$$

sujeto a la condición

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n k_i(t) v_i(x) \right) dt = 1. \quad (4.3.9)$$

Observar que si $f \equiv 1$, la condición (4.3.9) garantiza que

$$\begin{aligned} (S_{\text{BG}} T f)(x) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n k_i(t) v_i(x) \right) dt && \text{(por (4.3.7))} \\ &= 1 && \text{(por (4.3.9))} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Usando notación matricial podemos reescribir las condiciones anteriores como

$$\text{Minimizar el funcional: } (v_1(x), \dots, v_n(x)) \rightarrow v(x)^T G(x) v(x) \quad (4.3.10)$$

sujeto a

$$\gamma \cdot v = 1, \quad (4.3.11)$$

donde $v(x) \doteq (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$, $G(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} G(x)_{ij} &\doteq \int_{\Omega} |x-t|^2 k_i(t) k_j(t) dt, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \gamma_i &\doteq \int_{\Omega} k_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Los valores $v_i(x)$ que resuelven (4.3.10)-(4.3.11) se calculan utilizando multiplicadores de Lagrange. En efecto, el problema (4.3.10)-(4.3.11) (para $x \in \Omega$ fijo) es equivalente al problema:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } v \in \mathbb{R}^n \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \text{ con} \\ &G(x) v + \lambda \gamma = 0, \\ &\gamma^T v = 1, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} G(x) & \gamma \\ \gamma^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.12)$$

La relación (4.3.12), para $x \in \Omega$ fijo, constituye un sistema de $n+1$ ecuaciones en $n+1$ incógnitas. Si suponemos que las funciones k_i son linealmente independientes, entonces no es difícil probar que la matriz $\begin{pmatrix} G(x) & \gamma \\ \gamma^T & 0 \end{pmatrix}$ es inversible y por lo tanto (4.3.12) tiene una única solución $(v(x), \lambda)^T$. La correspondiente solución aproximada del problema (4.3.2) dada por el método de Backus-Gilbert es entonces

$$f_n(x) \doteq (S_{\text{BG}} g)(x) = \sum_{i=1}^n g_i v_i(x). \quad (4.3.13)$$

Aquí es importante observar que

$$\begin{aligned}
 (S_{\text{BG}}g)(x) &= \langle g, v(x) \rangle_Y \\
 &= \sum_{i=1}^n g_i v_i(x) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} k_i(t) f(t) dt \right) v_i(x) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n v_i(x) k_i(t) \right) f(t) dt \\
 &= \langle m_n^x, f \rangle_X.
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que el método de Backus-Gilbert constituye también un caso particular del método de la inversa aproximada con molificador dado por $m_n^x(t) = \sum_{i=1}^n v_i(x) k_i(t)$ y en el que el correspondiente núcleo de reconstrucción es precisamente el vector formado por las funciones base de Backus-Gilbert, i.e. $\psi_n^x = v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))^T$.

En este punto son importantes las siguientes tres observaciones:

i) El parámetro n (o más precisamente $1/n$) hace aquí las veces de parámetro de reconstrucción.

ii) La imposición de que S_{BG} sea lineal resulta en el hecho que m_n^x sea combinación lineal de las funciones $k_i(t)$ lo cual a su vez es equivalente a pedir que $m_n^x \in R(T^*)$, donde T es el operador dado por (4.3.4). Más aún, es claro que

$$m_n^x(\cdot) = T^*v(x) = T^*\psi_n^x$$

que es precisamente la relación entre molificador y núcleo de reconstrucción en el método de la inversa aproximada.

iii) También es importante observar que, al igual que en el método de la inversa aproximada, el cálculo de las funciones base de Backus-Gilbert, y en consecuencia del operador S_{BG} , no requiere del conocimiento de los datos del problema (i.e. del conocimiento de g).

En cuanto a las diferencias entre estos dos métodos, observar que la matriz de la ecuación (4.3.12), a través de la cual se calculan las $v_i(x)$, depende del punto de reconstrucción x mientras que en la ecuación $T^*v = m_\gamma^x$ (ó, en el caso más general, $TT^*v = Tm_\gamma^x$) a través de la cual se calcula el núcleo de reconstrucción ψ_γ^x , el punto x sólo interviene en el lado derecho. Esto hace que el método de Backus-Gilbert requiera un mayor esfuerzo computacional puesto que si se cambia el punto de reconstrucción x cambia la matriz y deben recomenzarse los cálculos.

4.4. Aplicación del método de la inversa aproximada a un problema inverso en conducción de calor

En muchas áreas de transferencia de calor frecuentemente se necesita determinar la temperatura y el flujo de calor en la superficie de un cuerpo a partir de mediciones en lugares accesibles del interior del mismo, lo cual constituye un problema inverso en conducción de calor.

En esta sección consideraremos el particular problema inverso unidimensional de determinar el flujo de calor en el lado derecho de la frontera ($x = 1$) a partir de mediciones de la temperatura y/o el flujo de calor en el lado izquierdo de la frontera ($x = 0$). Este problema se conoce como “*la ecuación lateral del calor*” o “*la ecuación del calor hacia un costado*” (“*sideways heat equation*”). Veremos cómo en este caso la inversa aproximada nos provee de un método muy eficiente y fácilmente implementable desde el punto de vista computacional, para reconstruir este flujo. Es bien sabido que este problema es severamente mal condicionado, en consecuencia, pequeñas perturbaciones en el dato pueden causar errores extremadamente grandes en la solución (ver Sección 1.2).

Consideremos el problema de conducción de calor en un dominio unidimensional $\Omega = (0, 1)$, térmicamente aislado en la frontera izquierda, con flujo en la frontera derecha y distribución inicial conocidos. Suponiendo propiedades térmicas constantes y usando cantidades adimensionales, este problema puede escribirse como:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t && \text{para } 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u_x(1, t) &= f(t) && 0 \leq t \leq T \\ u_x(0, t) &= 0 && 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= 0 && 0 \leq x \leq 1, \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

con $f \in L_2(0, T)$ dada (por simplicidad en la notación y como es usual, aquí los sub-índices “ x ” y “ t ” denotan derivadas parciales). Denotemos con $Q_T \doteq (0, 1) \times (0, T)$. A los efectos de formalizar el concepto de “*solución débil*” de (4.4.1) definiremos previamente los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} H^{1,0}(Q_T) &= \{u \in L_2(Q_T) : u_x \in L_2(Q_T)\} \\ H^{1,1}(Q_T) &= \{u \in L_2(Q_T) : u_x \in L_2(Q_T) \text{ y } u_t \in L_2(Q_T)\} \\ V^{1,0}(Q_T) &= C([0, T]; L_2(0, 1)) \cap L_2((0, T); H^1(0, 1)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C([0, T]; L_2(0, 1)) &= \{h : [0, T] \longrightarrow L_2(0, 1) : h \text{ es continua en } [0, T]\} \\ L_2((0, T); H^1(0, 1)) &= \left\{ h : (0, T) \longrightarrow H^1(0, 1) : \int_0^T \|h(t)\|_{H^1(0,1)}^2 dt < \infty \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^1(0,1) &= \{h \in L_2(0,1) : h' \in L_2(0,1)\} \\ \|h\|_{H^1(0,1)}^2 &= \|h\|_{L_2(0,1)}^2 + \|h'\|_{L_2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Definición 4.8. Diremos que una función $u = u(x, t)$ es una **solución débil** del problema (4.4.1) si $u \in V^{1,0}(Q_T)$ y satisface la identidad

$$\int_{Q_T} (-uh_t + u_x h_x) dx dt = \int_0^T f(t)h(1, t) dt$$

para todo $h \in H^{1,1}(Q_T)$, $h(x, T) \equiv 0$.

Teorema 4.9. Dado el problema (4.4.1), para todo $f \in L_2(0, T)$ existe una única solución débil en $V^{1,0}(Q_T)$.

DEMOSTRACION: ver Dinh N. Hao [15]. ■

A continuación definimos el operador $T_1 : L_2(0, T) \rightarrow L_2(0, T)$ mediante

$$T_1 f \doteq u|_{x=0} = u(0, \cdot) \quad (4.4.2)$$

donde $f \in L_2(0, T)$ es el flujo en (4.4.1) y u la correspondiente solución débil. Observemos que este operador está bien definido pues por el Teorema 4.9 la solución débil existe y es única y además $V^{1,0}(Q_T) \subset H^{1,0}(Q_T) \hookrightarrow L_2([0, T]; C(0, 1))$ (para esta última inmersión ver por ejemplo J. P. Aubin [2]) de modo que toda solución débil es uniformemente continua sobre $(0, 1)$ y tiene una única extensión uniformemente continua sobre $[0, 1]$. Además, es claramente lineal y uno a uno (esto último como consecuencia de la unicidad de la solución débil).

Nuestro interés consiste en calcular el flujo f conocida la temperatura en la frontera izquierda $u(0, t) \doteq g(t)$. Es decir, queremos resolver el problema inverso

$$T_1 f = g, \quad (4.4.3)$$

con $g \in L_2(0, T)$ dada. Para aplicar el método de la inversa aproximada necesitamos calcular primero el operador adjunto T_1^* a fin de resolver la ecuación (4.1.1) para el cálculo del núcleo de reconstrucción. Definimos primero el correspondiente problema adjunto a (4.4.1)

$$\begin{aligned} v_{xx} &= -v_{t'} && \text{para } 0 < x < 1, 0 < t' < T, \\ v(x, T) &= 0 && 0 \leq x \leq 1, \\ v_x(1, t') &= 0 && 0 \leq t' \leq T, \\ v_x(0, t') &= -\tilde{f}(t') && 0 \leq t' \leq T, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

con $\tilde{f} \in L_2(0, T)$ dada.

Definición 4.13. Diremos que una función $v = v(x, t')$ es una **solución débil** del problema (4.4.4) si $v \in V^{1,0}(Q_T)$ y satisface identidad

$$\int_{Q_T} (vh_{t'} + v_x h_x) dx dt' = \int_0^T \tilde{f}(t')h(0, t') dt'$$

para toda $h \in H^{1,1}(Q_T)$, $h(x, 0) \equiv 0$.

Puede verse inmediatamente que si en el problema (4.4.4) reemplazamos t' por la variable $t = T - t'$ obtenemos el mismo problema que (4.4.1). Por lo tanto, en virtud del Teorema 4.9, para toda $\tilde{f} \in L_2(0, T)$ existe una única solución débil v de (4.4.4). En consecuencia, el operador $T_2 : L_2(0, T) \rightarrow L_2(0, T)$ definido por

$$T_2 \tilde{f} \doteq v|_{x=1} = v(1, \cdot) \quad (4.4.5)$$

donde $-\tilde{f} \in L_2(0, T)$ es el flujo a izquierda (dato) en (4.4.4) y v su correspondiente solución débil, está bien definido.

Teorema 4.14. El operador T_2 definido por (4.4.5) es el operador adjunto del operador T_1 definido por (4.4.2) con respecto al producto interno en $L_2(0, T)$.

DEMOSTRACION. Sean $f, \tilde{f} \in L_2(0, T)$ y u, v las correspondientes soluciones débiles de (4.4.1) y (4.4.4), respectivamente. Supongamos que $u, v \in H^{2,1}(Q_T)$ (el caso general puede probarse utilizando un argumento de densidad). Entonces

$$\begin{aligned} \langle T_1 f, \tilde{f} \rangle_{L_2(0, T)} &= \int_0^T u(0, t) (-v_x(0, t)) dt \\ &= - \int_0^T (u(0, t)v_x(0, t) + u_x(0, t)v(0, t)) dt \quad (\text{pues } u_x(0, t) \equiv 0) \\ &= - \int_0^T (uv)_x(0, t) dt. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \langle f, T_2 \tilde{f} \rangle_{L_2(0, T)} &= \int_0^T u_x(1, t)v(1, t) dt \\ &= \int_0^T (u_x(1, t)v(1, t) + u(1, t)v_x(1, t)) dt \quad (\text{pues } v_x(1, t) \equiv 0) \\ &= \int_0^T (uv)_x(1, t) dt. \end{aligned}$$

Luego

$$\langle T_1 f, \tilde{f} \rangle_{L_2(0, T)} + \langle f, T_2 \tilde{f} \rangle_{L_2(0, T)} = \int_0^T [(uv)_x(1, t) - (uv)_x(0, t)] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^1 (uv)_{xx}(x, t) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_0^1 (2u_x v_x + u_{xx} v + u v_{xx}) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_0^1 (2u_x v_x + u_t v - u v_t) \, dx \, dt \\
&= 2 \int_0^T \int_0^1 u_x v_x \, dx \, dt + \int_0^1 \left(v u \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T u v_t \, dt \right) dx \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^T u v_t \, dt \, dx \\
&= 2 \int_0^T \int_0^1 (u_x v_x - u v_t) \, dx \, dt \quad (\text{pues } u|_{t=0} = v|_{t=T} \equiv 0) \\
&= 2 \int_0^T \int_0^1 (u_x v_x + u v_{xx}) \, dx \, dt \quad (\text{pues } v_t = -v_{xx}) \\
&= 2 \int_0^T \int_0^1 (u v_x)_x \, dx \, dt \\
&= 2 \int_0^T (u(1, t) v_x(1, t) - u(0, t) v_x(0, t)) \, dt \\
&= -2 \int_0^T u(0, t) v_x(0, t) \, dt \quad (\text{pues } v_x(1, t) \equiv 0) \\
&= 2 \langle T_1 f, \tilde{f} \rangle_{L_2(0, T)},
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\langle f, T_2 \tilde{f} \rangle_{L_2(0, T)} = \langle T_1 f, \tilde{f} \rangle_{L_2(0, T)}$$

$\forall f, \tilde{f} \in L_2(0, T)$. En consecuencia $T_2 = T_1^*$, como queríamos probar. \blacksquare

Estamos ahora en condiciones de aplicar el método de la inversa aproximada al problema (4.4.3). Para ello, sea $m_\gamma(t, t') = m_\gamma^t(t')$ un molificador dado (aquí “ t ” denota el punto de reconstrucción). La solución molificada de (4.4.3) por el método de la inversa aproximada estará entonces dada por

$$f_\gamma(t) = \langle f, m_\gamma^t \rangle_{L_2(0, T)} = \int_0^T f(t') m_\gamma(t') \, dt'. \quad (4.4.6)$$

Para calcular f_γ resolvemos primero la ecuación

$$T_1^* (-v_x^t(0, t')) = m_\gamma^t(t'),$$

es decir, resolvemos el problema adjunto con $\tilde{f}(t') = m_\gamma^t(t')$. La solución molificada (4.4.6) puede entonces evaluarse mediante

$$f_\gamma(t) = \langle g, -v_x^t(0, \cdot) \rangle_{L_2(0, T)} = \int_0^T g(t') (-v_x^t(0, t')) \, dt',$$

de donde deducimos que el correspondiente núcleo de reconstrucción es simplemente $\psi_\gamma^t(t') = -v_x^t(0, t')$ donde $v(x, t')$ es la solución débil del problema adjunto (4.4.4) con $\tilde{f}(t') = m_\gamma^t(t')$. Dado que el molificador m_γ se conoce de manera exacta, esta solución también puede calcularse en forma exacta. Por ejemplo, si el molificador es suficientemente regular, e.g. de clase $C^\infty([0, T])$, entonces se puede probar (ver [19]) que

$$\begin{aligned} v_x^t(0, t') &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dt'^n} m_\gamma^t(t') \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{\partial^n m_\gamma(t, t')}{\partial t'^n}. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

En el siguiente teorema probaremos que para este ejemplo particular, bajo ciertas condiciones bastante generales sobre el molificador, el método de la inversa aproximada genera una familia de funciones $f_\gamma(\cdot)$ que converge puntualmente a la mejor solución aproximada $f^\dagger(\cdot)$ cuando el nivel de ruido δ converge a cero siempre que $\|g - g^\delta\| \leq \delta$, siendo g^δ el dato con ruido. Esto es, el método de la inversa aproximada es un método de regularización convergente para el problema inverso lateral de conducción de calor.

Para las funciones involucradas usaremos transformada de Fourier, esto es, si $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \mathcal{F}[f](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R}, \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} dw, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Así, si $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$ entonces $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$. Además se cumple que $\|f\|_{L_2} = \|\hat{f}\|_{L_2}$ (identidad de Parseval).

Teorema 4.15. *Supongamos que el molificador m_γ es de tipo convolución, esto es, $m_\gamma(t, t') = m_\gamma(t - t')$ y que satisface las siguientes condiciones:*

- i) $\sup_{w \in \mathbb{R}} \left\{ |\hat{m}_\gamma(w)| |w|^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{|w|}} \right\} \leq C(\gamma) < \infty$,
- ii) para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \sup_{w \in K} \left\{ \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right| \right\} = 0,$$

- iii) $\sup_{w \in \mathbb{R}} \{ |\hat{m}_\gamma(w)| \} \leq M$.

Entonces el método de la inversa aproximada es un método de regularización convergente para el problema inverso lateral en conducción de calor.

DEMOSTRACION. Dado que el molificador es de tipo convolución, utilizaremos indistintamente la notación $-v_x^t(0, t')$ y $-v_x(0, t - t')$ para denotar al núcleo de reconstrucción como función de t' en el punto t , dado por (4.4.7).

En primer lugar observemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n w^n}{(2n-1)!} \hat{m}_\gamma(w)$ es absolutamente convergente pues

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-i)^n w^n}{(2n-1)!} \hat{m}_\gamma(w) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w|^n}{(2n-1)!} |\hat{m}_\gamma(w)| \\
&= |\hat{m}_\gamma(w)| \sum_{n=1, n \text{ impar}}^{\infty} \frac{|w|^{\frac{n+1}{2}}}{n!} \\
&= |\hat{m}_\gamma(w)| |w|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1, n \text{ impar}}^{\infty} \frac{|w|^{\frac{n}{2}}}{n!} \\
&\leq |\hat{m}_\gamma(w)| |w|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|w|^{\frac{n}{2}}}{n!} \\
&= |\hat{m}_\gamma(w)| |w|^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{|w|}} \\
&\leq C(\gamma) \quad (\text{por i}). \tag{4.4.8}
\end{aligned}$$

En consecuencia, aplicando transformada inversa de Fourier a dicha serie obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n w^n}{(2n-1)!} \hat{m}_\gamma(w) \right] (t') &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \mathcal{F}^{-1} [(iw)^n \hat{m}_\gamma(w)] (t') \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{\partial^n m_\gamma(t')}{\partial t'^n} \\
&= v_x(0, t'). \quad (\text{por (4.4.7)})
\end{aligned}$$

Luego, $\hat{v}_x(0, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n w^n}{(2n-1)!} \hat{m}_\gamma(w)$ y por lo tanto, usando la identidad de Parseval tenemos que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\|v_x^t(0, \cdot)\| = \|v_x(0, t - \cdot)\|_{L_2} = \|\hat{v}_x(0, \cdot)\|_{L_2} \leq C(\gamma) \quad (\text{por (4.4.8)}). \tag{4.4.9}$$

Consideremos ahora una función $f \in L_2(\mathbb{R})$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K = K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}-K_\varepsilon} |\hat{f}(w)|^2 dw \leq \varepsilon^2$. Por otro lado, como el conjunto K_ε es compacto, de la condición ii) podemos afirmar que existe $\gamma_\varepsilon > 0$ tal que $\sup_{w \in K_\varepsilon} \{ |1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w)| \} \leq \varepsilon$, $\forall \gamma \leq \gamma_\varepsilon$. Así, para todo $\varepsilon > 0$ existen un conjunto compacto $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ y $\gamma_\varepsilon > 0$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}-K_\varepsilon} |\hat{f}(w)|^2 dw \leq \varepsilon^2 \quad \text{y} \tag{4.4.10}$$

$$\sup_{w \in K_\varepsilon} \left\{ \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right| \right\} \leq \varepsilon, \quad \forall \gamma \leq \gamma_\varepsilon. \tag{4.4.11}$$

Claramente $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo. Entonces para todo $\gamma \in (0, \gamma_\varepsilon]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{f} \left(1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma \right) \right\|_{L_2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(w) \right|^2 \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right|^2 dw \\
&= \int_{K_\varepsilon} \left| \hat{f}(w) \right|^2 \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right|^2 dw + \int_{\mathbb{R} - K_\varepsilon} \left| \hat{f}(w) \right|^2 \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right|^2 dw \\
&\leq \varepsilon^2 \int_{K_\varepsilon} \left| \hat{f}(w) \right|^2 dw + (1 + \sqrt{2\pi} M)^2 \int_{\mathbb{R} - K_\varepsilon} \left| \hat{f}(w) \right|^2 dw \quad (\text{por (4.4.11)}) \\
&\leq \varepsilon^2 \|f\|_{L_2}^2 + \left(1 + \sqrt{2\pi} M \right)^2 \varepsilon^2 \quad (\text{por (4.4.10)}) \\
&= \left(\|f\|_{L_2}^2 + \left(1 + \sqrt{2\pi} M \right)^2 \right) \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Haciendo tender ε a 0^+ (con lo cual $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ y en consecuencia $\gamma \rightarrow 0$) se tiene que

$$\left\| \hat{f} \left(1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma \right) \right\|_{L_2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0^+} 0. \quad (4.4.12)$$

Sean ahora f^\dagger, g y $g^\delta \in L_2(0, T)$ tales que $T_1 f^\dagger = g$ y $\|g - g^\delta\|_{L_2} \leq \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|f^\dagger - \langle -v_x(0, t - \cdot), g^\delta(\cdot) \rangle\|_{L_2} &= \|f^\dagger - \langle -v_x(0, t - \cdot), g(\cdot) \rangle - \\
&\quad \langle -v_x(0, t - \cdot), (g^\delta - g)(\cdot) \rangle\|_{L_2} \\
&\leq \|f^\dagger - \langle -v_x(0, t - \cdot), g(\cdot) \rangle\|_{L_2} + \\
&\quad \|\langle -v_x(0, t - \cdot), (g^\delta - g)(\cdot) \rangle\|_{L_2} \\
&= \left\| \hat{f}^\dagger + \sqrt{2\pi} \hat{v}_x(0, \cdot) \hat{g} \right\|_{L_2} + \\
&\quad \left\| \sqrt{2\pi} \hat{v}_x(0, \cdot) (\hat{g}^\delta - \hat{g}) \right\|_{L_2}, \quad (4.4.13)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la identidad de Parseval y las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} [f^\dagger - \langle -v_x(0, t - \cdot), g(\cdot) \rangle] &= \mathcal{F} [f^\dagger] - \mathcal{F} [\langle -v_x(0, t - \cdot), g(\cdot) \rangle] \\
&= \hat{f}^\dagger - \mathcal{F} [-v_x(0, \cdot) * g(\cdot)] \\
&= \hat{f}^\dagger + \sqrt{2\pi} \mathcal{F} [v_x(0, t - \cdot)] \mathcal{F} [g] \\
&= \hat{f}^\dagger + \sqrt{2\pi} \hat{v}_x(0, \cdot) \hat{g},
\end{aligned}$$

y análogamente,

$$\mathcal{F} [\langle -v_x(0, t - \cdot), (g^\delta - g)(\cdot) \rangle] = \sqrt{2\pi} \hat{v}_x(0, \cdot) (\hat{g}^\delta - \hat{g}).$$

Observar que en estas últimas dos identidades hemos utilizado fuertemente el hecho que m_γ es de tipo convolución.

Además, como $T_1 f^\dagger = g$ se cumple que $\langle f^\dagger(\cdot), m_\gamma(t - \cdot) \rangle = \langle g(\cdot), \psi_\gamma(t - \cdot) \rangle$ (ver (4.1.2)) y en consecuencia, para nuestro problema se tiene que $\langle f^\dagger(\cdot), m_\gamma(t - \cdot) \rangle = \langle g(\cdot), -v_x(0, t - \cdot) \rangle$, esto es, $(f^\dagger * m_\gamma)(t) = -(g * v_x)(t)$. Así, $\mathcal{F}[f^\dagger * m_\gamma] = -\mathcal{F}[g * v_x]$, y por lo tanto $\hat{f}^\dagger \hat{m}_\gamma = -\hat{g} \hat{v}_x$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \hat{f}^\dagger + \sqrt{2\pi} \hat{v}_x(0, \cdot) \hat{g} \right\|_{L_2} &= \left\| \hat{f}^\dagger - \sqrt{2\pi} \hat{f}^\dagger \hat{m}_\gamma \right\|_{L_2} \\ &= \left\| \hat{f}^\dagger \left(1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma \right) \right\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \left\| \hat{v}_x(0, \cdot) (\hat{g}^\delta - \hat{g}) \right\|_{L_2} &\leq \left\| \hat{v}_x(0, \cdot) \right\|_{L_2} \left\| (\hat{g}^\delta - \hat{g}) \right\|_{L_2} \\ &= \left\| v_x(0, t - \cdot) \right\|_{L_2} \left\| (g^\delta - g) \right\|_{L_2} \\ &\leq C(\gamma) \delta. \quad (\text{por (4.4.9) y por hipótesis}). \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Con (4.4.14) y (4.4.15) en (4.4.13) obtenemos entonces la acotación

$$\left\| f^\dagger - \langle -v_x(0, t - \cdot), g^\delta(\cdot) \rangle \right\|_{L_2} \leq \left\| \hat{f}^\dagger \left(1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma \right) \right\|_{L_2} + \sqrt{2\pi} \delta C(\gamma). \quad (4.4.16)$$

Ahora, para $\eta > 0$ definimos el conjunto

$$M_\eta \doteq \left\{ (\gamma, \delta) : \left\| \hat{f}^\dagger \left(1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma \right) \right\|_{L_2} \leq \eta/2 \text{ y } \sqrt{2\pi} \delta C(\gamma) \leq \eta/2 \right\}.$$

Notar que en virtud de (4.4.16) se tiene que

$$\left\| f^\dagger - \langle -v_x(0, t - \cdot), g^\delta(\cdot) \rangle \right\|_{L_2} \leq \eta. \quad (4.4.17)$$

para todo par $(\gamma, \delta) \in M_\eta$. Observar además que para todo $\eta > 0$ el conjunto M_η es no vacío. En efecto, dado $\eta > 0$ como $f^\dagger \in L_2(0, T)$, por (4.4.12) sabemos que existe $\gamma_0 > 0$ tal que $\left\| \hat{f}^\dagger \left(1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma \right) \right\|_{L_2} \leq \eta/2$ para todo $\gamma < \gamma_0$. Por otro lado, ya que $C(\gamma_0) < \infty$ eligiendo δ tal que $0 < \delta \leq \frac{\eta}{2\sqrt{2\pi}C(\gamma_0)}$ se tiene que $\sqrt{2\pi} \delta C(\gamma_0) \leq \eta/2$.

Así, en virtud de (4.4.17) tenemos que

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ (\gamma, \delta) \in M_\eta}} \left\| f^\dagger - \langle -v_x(0, t - \cdot), g^\delta(\cdot) \rangle \right\|_{L_2} = 0.$$

Llamando $f_\gamma^\delta(t) = \langle -v_x(0, t - \cdot), g^\delta(\cdot) \rangle_{L_2(0, T)}$ concluimos finalmente que

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ (\gamma, \delta) \in M_\eta}} \left\| f^\dagger - f_\gamma^\delta \right\|_{L_2} = 0.$$

Observar que si $(\gamma, \delta) \in M_\eta$ entonces cuando $\eta \rightarrow 0$ necesariamente $\delta \rightarrow 0$. ■

Así, el método de la inversa aproximada define un método de regularización convergente para el problema inverso lateral en conducción de calor.

Corolario 4.16. *La inversa aproximada obtenida a partir del molificador gaussiano $m_\gamma(t, \cdot)$ definido por*

$$m_\gamma(t, t') = m_\gamma(t - t') = (2\pi)^{-1/2} \gamma^{-1} e^{-\frac{|t-t'|^2}{2\gamma^2}} \quad (4.4.18)$$

define un método de regularización convergente para el problema inverso lateral en conducción de calor.

DEMOSTRACION. Es suficiente con verificar que el molificador (4.4.18) satisface las hipótesis del Teorema 4.15. Para ello calculemos primero su transformada de Fourier. Es conocido que

$$\mathcal{F} \left[e^{-at^2} \right] = (2a)^{-1/2} e^{-\frac{w^2}{4a}}, \quad a > 0. \quad (4.4.19)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{m}_\gamma(w) &= \mathcal{F} [m_\gamma(t)] \\ &= (2\pi)^{-1/2} \gamma^{-1} \mathcal{F} \left[e^{-\frac{|t|^2}{2\gamma^2}} \right] \quad (\text{de (4.4.18)}) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \gamma^{-1} \left(2 \frac{1}{2\gamma^2} \right)^{-1/2} e^{-\frac{w^2}{4 \frac{1}{2\gamma^2}}} \quad (\text{de (4.4.19) con } a = \frac{1}{2\gamma^2}) \\ &= (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{\gamma^2 w^2}{2}}. \end{aligned}$$

La condición *i)* del Teorema 4.15 es inmediata puesto que

$$|\hat{m}_\gamma(w)| |w|^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{|w|}} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} |w|^{\frac{1}{2}} e^{\left(-\frac{\gamma^2 w^2}{2} + \sqrt{|w|}\right)}$$

es claramente una función continua de w para todo $w \in \mathbb{R}$ que se anula en $w = 0$ y en $w = \infty$.

Para la condición *ii)*, dado $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto elijamos $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $K \subset [-b, b]$. Entonces

$$\begin{aligned} \sup_{w \in K} \left\{ \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right| \right\} &\leq \sup_{w \in [-b, b]} \left\{ \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right| \right\} \\ &= \sup_{w \in [-b, b]} \left\{ \left| 1 - e^{-\frac{\gamma^2 w^2}{2}} \right| \right\} \\ &= 1 - e^{-\frac{\gamma^2 b^2}{2}}. \end{aligned}$$

Luego, $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \sup_{w \in K} \left\{ \left| 1 - \sqrt{2\pi} \hat{m}_\gamma(w) \right| \right\} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \sup_{w \in K} \left\{ \left| 1 - e^{-\frac{\gamma^2 w^2}{2}} \right| \right\} \leq \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \left(1 - e^{-\frac{\gamma^2 w^2}{2}} \right) = 0$. Por lo tanto se satisface la condición *ii)*.

Finalmente, la condición *iii*) se satisface trivialmente pues

$$|\hat{m}_\gamma(w)| = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{\gamma^2 w^2}{2}} \leq (2\pi)^{-1/2}, \forall w \in \mathbb{R}.$$

■

En el capítulo siguiente presentaremos ejemplos y resultados numéricos para este caso, obtenidos con este molificador gaussiano para diferentes flujos a derecha.

Capítulo 5

Ejemplos y resultados numéricos

5.1. Resolución numérica del problema inverso asociado a la ecuación lateral del calor por el método de la inversa aproximada

Consideremos nuevamente el problema (4.4.1):

$$\begin{aligned}u_{xx} &= u_t && \text{para } 0 < x < 1, 0 < t < T \\u_x(1, t) &= f(t) && 0 \leq t \leq T \\u_x(0, t) &= 0 && 0 \leq t \leq T \\u(x, 0) &= 0 && 0 \leq x \leq 1,\end{aligned}$$

EJEMPLO 1: Supongamos que $T = 1$ y que el flujo en $x = 1$ es el pulso rectangular $f(t) = \chi_{[0,4,0,6]}(t)$.

La Figura 5.1 muestra este flujo mientras que la Figura 5.2 muestra la evolución de la temperatura $u(x, t)$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ obtenida con este flujo (aproximada numéricamente utilizando diferencias finitas).

Queremos utilizar el método de la inversa aproximada para reconstruir (aproximar numéricamente) el flujo $f(\cdot)$ teniendo como dato la temperatura en la frontera izquierda $g(t) \doteq u(0, t)$, o mediciones con ruido de ésta.

En la Figura 5.3 se muestra esta función g . A los efectos de poder hacer uso de la expresión (4.4.7) para el núcleo de reconstrucción, utilizaremos un molificador suave gaussiano de tipo convolución

$$m_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} e^{-\frac{t^2}{2\gamma^2}}. \quad (5.1.1)$$

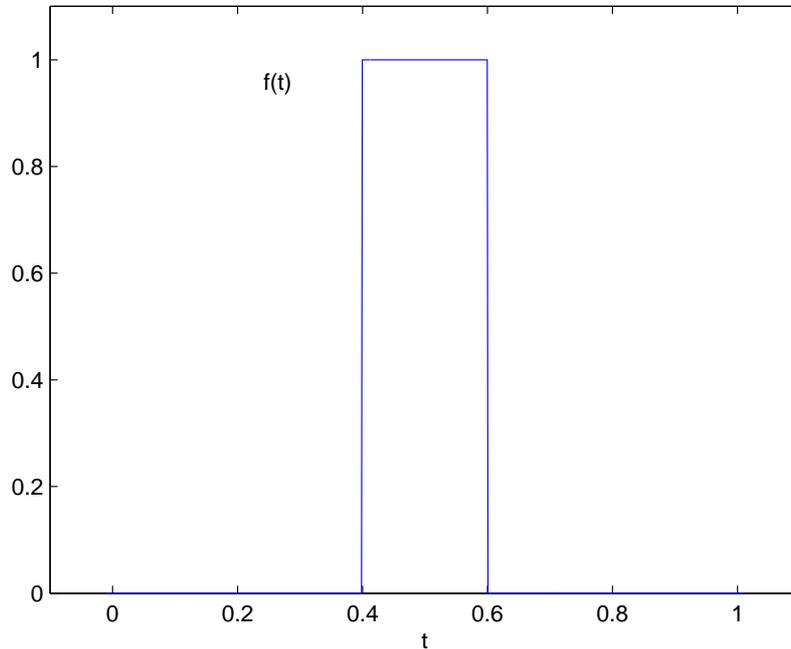


Figura 5.1: Flujo $f(t)$ en $x = 1$ para el Ejemplo 1.

En la Figura 5.4 se muestra el correspondiente núcleo de reconstrucción $\psi_\gamma(t)$ para $\gamma = 5 \times 10^{-3}$, obtenido con este molificador. En la Figura 5.5 se muestra el flujo reconstruido con este núcleo. A los efectos puramente numéricos, para este ejemplo se tomaron $N = 12$ nodos para x en $[0, 1]$ y $M = 1000$ nodos para t en $[0, T] = [0, 1]$. A los efectos de aproximar el núcleo de reconstrucción ψ_γ por su expresión (4.4.7) se truncó la serie tomando sólo los 20 primeros términos de esta expresión.

En la Figura 5.5 se observa una muy buena aproximación del flujo excepto en los puntos de discontinuidad dónde, como es propio de todos los métodos de regularización, la inversa aproximada tiende a suavizar las discontinuidades.

Es importante aquí remarcar que para este problema no es posible obtener en forma explícita el sistema singular asociado a $T_1^* T_1$ dónde T_1 es el operador definido por (4.4.2), por lo que la resolución de este problema inverso por métodos clásicos (e.g. Tikhonov-Phillips, TSVD, etc.) es bastante engorrosa desde el punto de vista numérico. En segundo lugar es importante remarcar que el núcleo de reconstrucción $\psi_\gamma(t)$ obtenido que se muestra en la Figura 5.4 sirve ahora para reconstruir absolutamente cualquier otro flujo $f(t)$, como mostramos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2: Consideramos ahora el mismo problema anterior pero ahora con flujo $f(t)$ dado por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0,2,0,4] \text{ ó } t \in [0,6,0,8] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

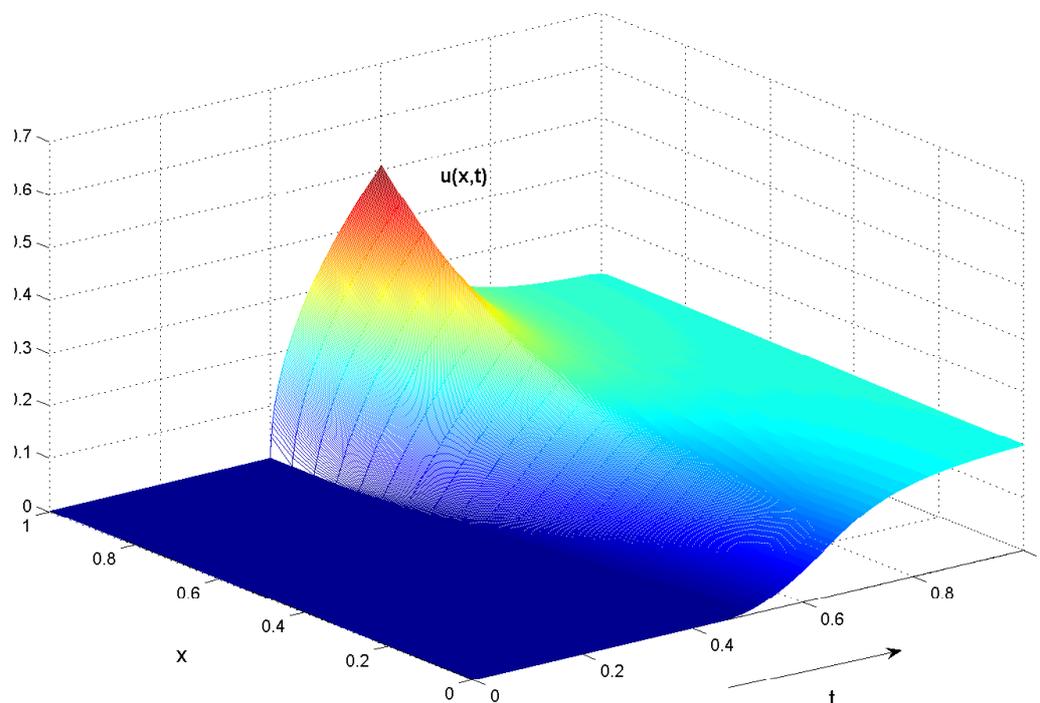


Figura 5.2: Temperatura $u(x, t)$ obtenida con el flujo f de la Figura 5.1. Ejemplo 1.

En la Figura 5.6 se muestra la evolución de la temperatura para este flujo mientras que en la Figura 5.7 se muestra la función $g(t) = u(0, t)$ para este caso. La Figura 5.8 muestra el flujo reconstruido en este caso. Nuevamente observar que se obtiene una muy buena aproximación excepto en los puntos de discontinuidad donde el método tiende a suavizar las discontinuidades.

EJEMPLO 3: En este ejemplo, a los efectos de mostrar que el método de la inversa aproximada es robusto ante la presencia de ruido, consideraremos el caso en que nuestro dato, i.e. la función $g(t)$ está contaminada con algún tipo de ruido. Para ello consideraremos el mismo ejemplo anterior pero ahora nuestro dato estará contaminado por ruido uniforme del orden del 1% de $\|g\|_\infty$, es decir $g^\delta(t) = u(0, t) + r(t)$ donde $r(t)$ es un ruido uniformemente distribuido en $[-\delta, \delta]$, donde $\delta = 0,01 \times \sup_{t \in [0,1]} g(t)$. De todos modos, es importante remarcar aquí que también en todos los casos anteriores nuestro dato no era exacto debido a los errores de discretización. En la Figura 5.9 se muestra el dato contaminado con ruido g^δ , que utilizaremos para la reconstrucción. En este caso, es importante recordar que la adecuada elección del parámetro de reconstrucción (el parámetro de regularización en los métodos espectrales) es crucial para obtener un buen resultado. Un parámetro de reconstrucción muy grande resultará en una mala aproximación pues en tal caso el molificador es un mal aproximante puntual

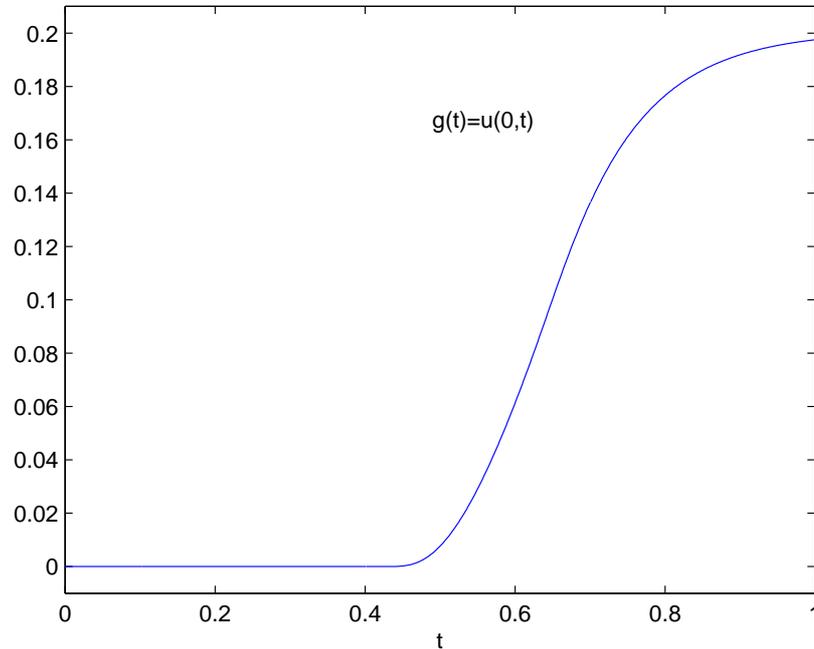


Figura 5.3: La temperatura en el extremo izquierdo para el Ejemplo 1: dato $g(t) = u(0, t)$ del problema inverso. Ejemplo 1.

y un parámetro de reconstrucción muy pequeño también resultará en una mala aproximación pues en tal caso estaremos permitiendo la propagación de las componentes del ruido en las altas frecuencias que, como sabemos son muy perjudiciales. En este último caso, es esperable observar oscilaciones de frecuencia y amplitud cada vez mayores, a medida que el parámetro de reconstrucción tiende a cero, alejándose de su valor óptimo. Es oportuno mencionar aquí que, si bien existen métodos para aproximar los valores óptimos de los parámetros de regularización para métodos espectrales generales (e.g. el Principio de Discrepancia de Morozov [24], [33], [34], el método de la curva “L” de Hansen [13], el método de validación cruzada generalizada de Wahba [36], etc.), aún no se conocen métodos similares para la inversa aproximada. En la Figura 5.10 se muestran el flujo exacto y las reconstrucciones f_γ^δ obtenidas con tres valores diferentes de γ : 0.016, 0.03 y 0.1. Se observa que, por las razones antes mencionadas, $\gamma = 0.1$ y $\gamma = 0.016$ producen aproximaciones pobres de $f(t)$, mientras que para $\gamma = 0.03$ la aproximación es razonablemente buena, teniendo en cuenta la presencia del ruido en el dato. Es razonable suponer que el parámetro de reconstrucción óptimo es aproximadamente igual a 0.03. En la Figura 5.11 se muestran los tres núcleos de reconstrucción para estos tres valores de γ .

EJEMPLO 4: En este caso, repetimos el ejemplo anterior agregando ahora 5% de ruido a nuestro dado $g(t)$; es decir, $g^\delta(t) = u(0, t) + r(t)$ donde $r(t)$ es un ruido uniformemente distribuido en $[-\delta, \delta]$, donde $\delta = 0,05 \times \sup_{t \in [0,1]} g(t)$. La Figura 5.12 muestra este dato perturbado $g^\delta(t)$, mientras que en la Figura 5.13 se muestran el flujo

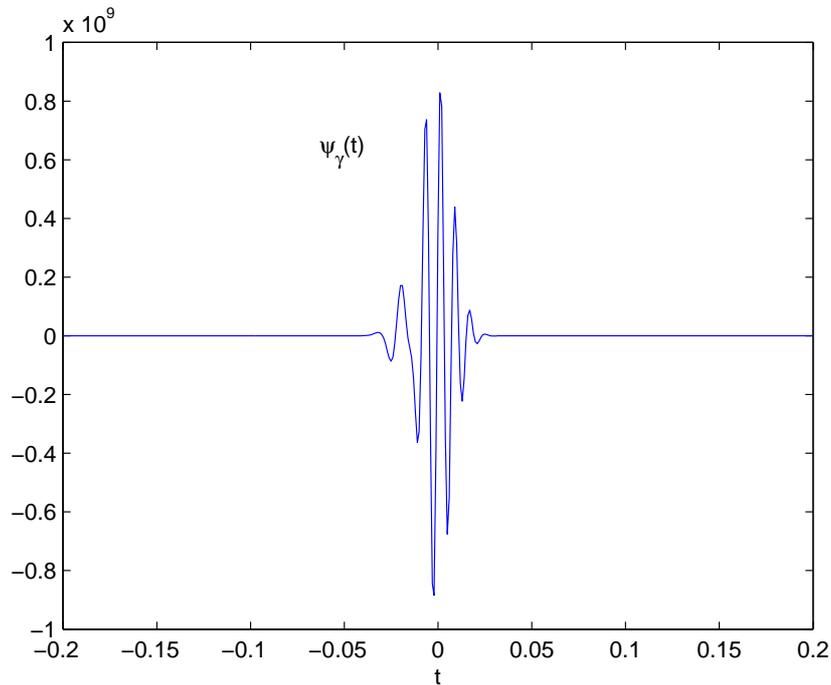


Figura 5.4: El núcleo de reconstrucción $\psi_\gamma(t)$ obtenido con el molificador (5.1.1), para $\gamma = 5 \times 10^{-3}$. Ejemplo 1.

exacto $f(t)$ y los flujos reconstruidos f_γ^δ para tres valores diferentes de γ : 0.025, 0.04 y 0.1. Nuevamente, $\gamma = 0.04$ produce la mejor aproximación para este nivel de ruido.

EJEMPLO 5: Es importante recordar que el método de la inversa aproximada, al igual que todos los métodos de molificación, actúan mitigando (“molificando”) la influencia de las componentes de alta frecuencia. Sin embargo, en los ejemplos anteriores se vio cómo el método permite reconstruir en forma razonable flujos discontinuos (los que no pueden aproximarse bien sin considerar sus componentes de alta frecuencia) aún en presencia de ruidos del orden del 5%. Si el flujo a reconstruir es suave, el método permite reconstrucciones razonables aún en presencia de niveles de ruido muy altos. En este ejemplo consideramos el caso en que el flujo es de clase C^∞ con soporte compacto en $[0, 1]$. Más precisamente,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-16(t-\frac{1}{2})^2}}, & \text{si } |t - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{si } |t - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

La Figura 5.14 muestra este flujo mientras que en la Figura 5.15 muestra la evolución de la temperatura $u(x, t)$ obtenida para este flujo. A continuación consideramos la función $g(t) = u(0, t)$ para $t \in [0, 1]$, y le sumamos un ruido del orden del 20%, es decir, consideramos

$$g^\delta(t) = g(t) + r(t), \quad (5.1.4)$$

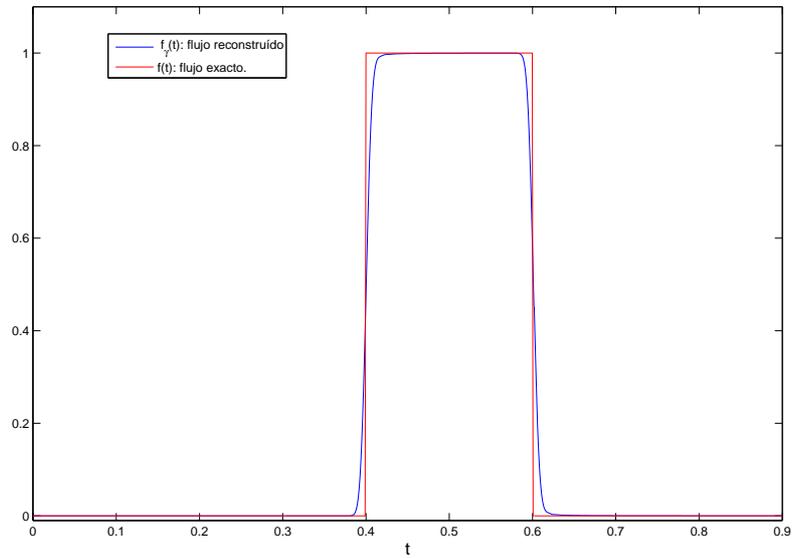


Figura 5.5: Flujo $f_\gamma(t)$ reconstruido por el método de la inversa aproximada y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 1.

dónde para cada $t \in [0, 1]$, $r(t)$ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[-\delta, \delta]$, siendo $\delta = 0.2 \times \|g\|_\infty$. En la Figura 5.16 se muestra esta función g^δ . A continuación aplicamos el método de la inversa aproximada con el molificador gaussiano (4.1.10) utilizando como dato de nuestro problema inverso la función “contaminada” (por ruido) g^δ . En la Figura 5.17 se presentan el flujo reconstruido con $\gamma = 0.045$ y el flujo exacto. Se ve como aún en este caso extremo de datos contaminados por altos niveles de ruido, el método es capaz de extraer considerable información sobre el flujo.

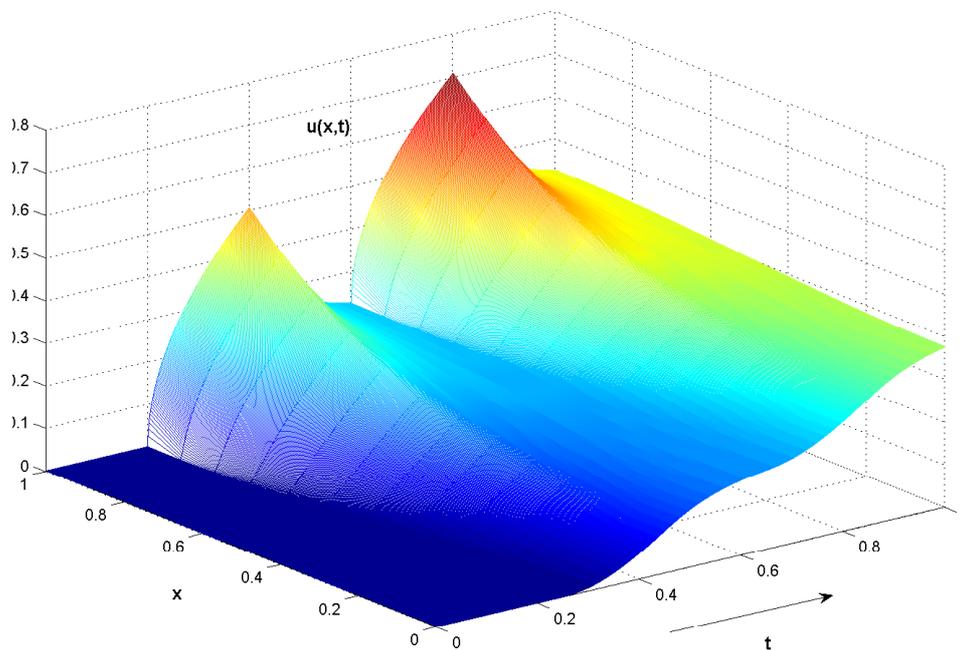


Figura 5.6: La temperatura $u(x,t)$, solución de (4.4.1), obtenida con el flujo $f(t)$ dado por (5.1.2). Ejemplo 2.

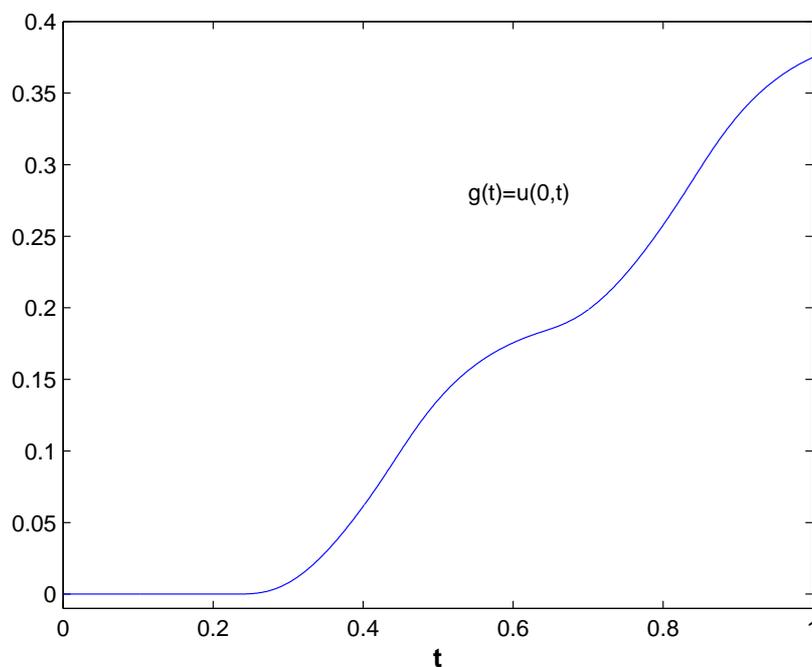


Figura 5.7: La temperatura en el extremo izquierdo para el Ejemplo 2: dato $g(t) = u(0,t)$ del problema inverso. Ejemplo 2.

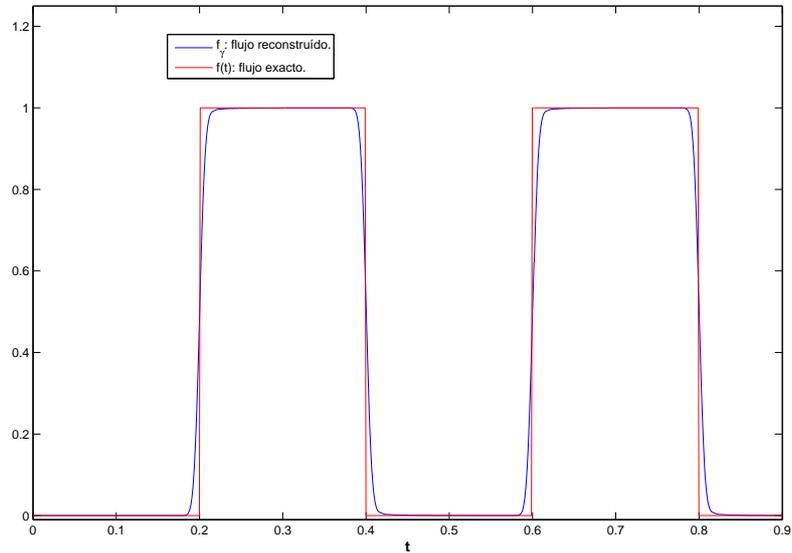


Figura 5.8: Flujo $f_\gamma(t)$ reconstruido por el método de la inversa aproximada y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 2.

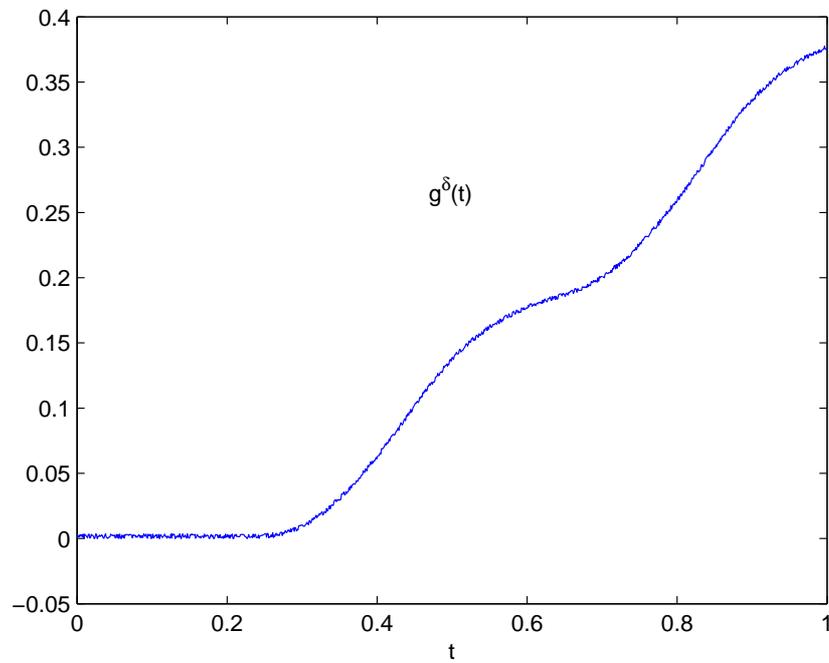


Figura 5.9: Dato $g^\delta(t)$ del Ejemplo 3, igual al dato exacto perturbado con 1 % de ruido.

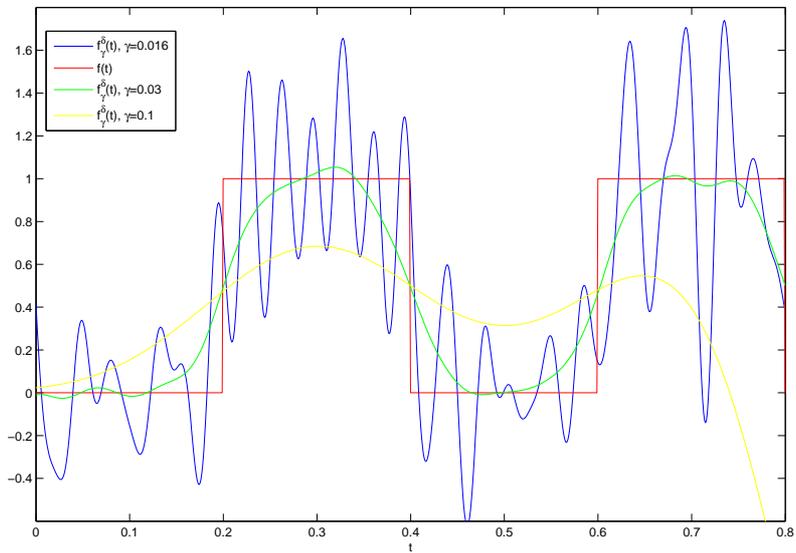


Figura 5.10: Flujos $f_\gamma^\delta(t)$ reconstruidos a partir de datos perturbados con 1% de ruido, utilizando el método de la inversa aproximada, con diferentes valores de γ y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 3.

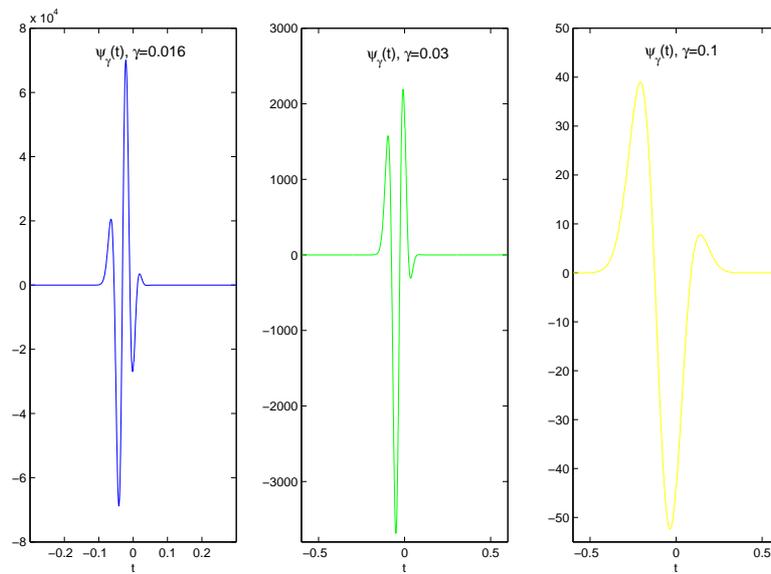


Figura 5.11: Núcleos de reconstrucción ψ_γ para diferentes valores de γ . Ejemplo 3.

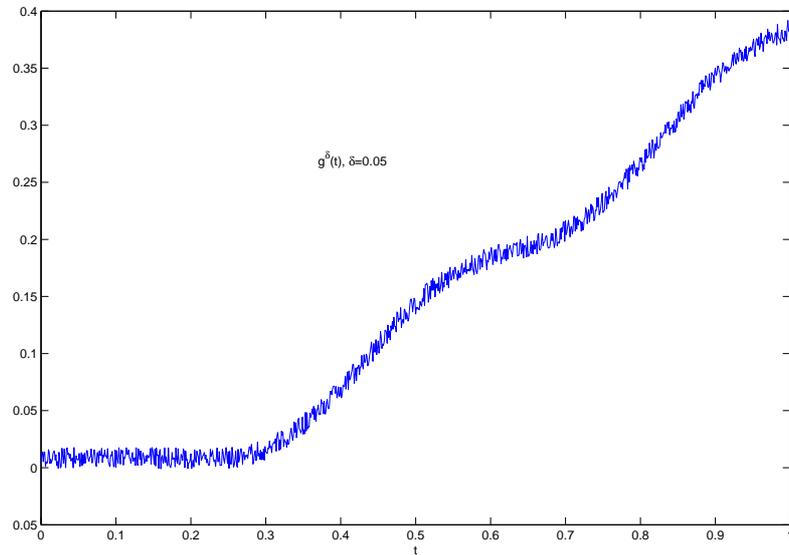


Figura 5.12: Dato $g^\delta(t)$ para el Ejemplo 4, igual al dato exacto perturbado con 5% de ruido.

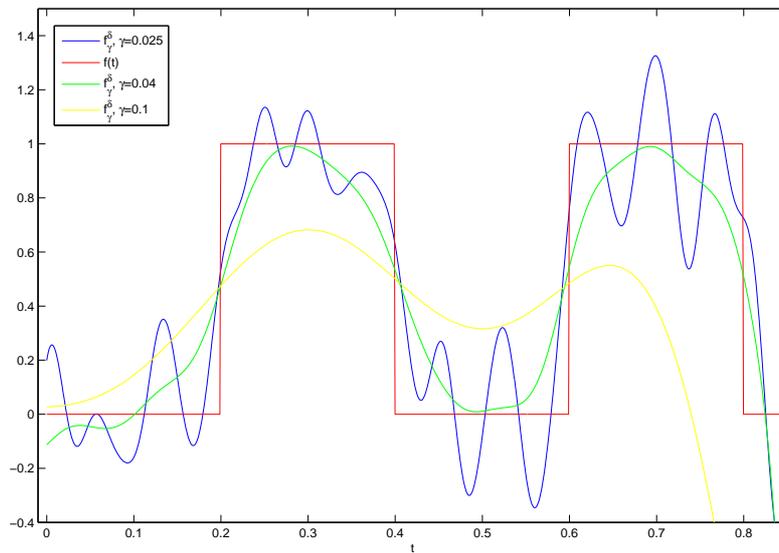


Figura 5.13: Flujos $f_\gamma^\delta(t)$ reconstruidos a partir de datos perturbados con 5% de ruido, utilizando el método de la inversa aproximada, con diferentes valores de γ y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 4.

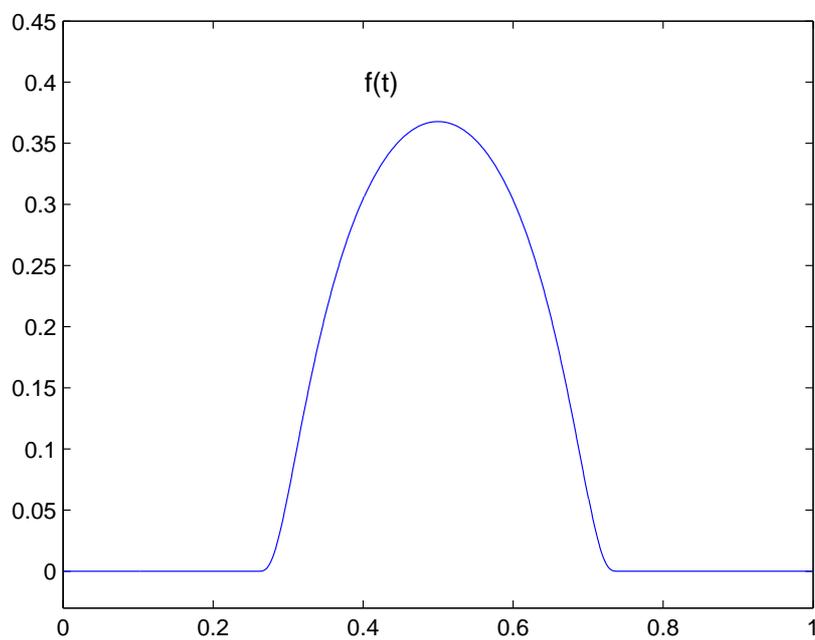


Figura 5.14: El flujo $f(t)$ de clase C^∞ dado por (5.1.3) para el Ejemplo 5.

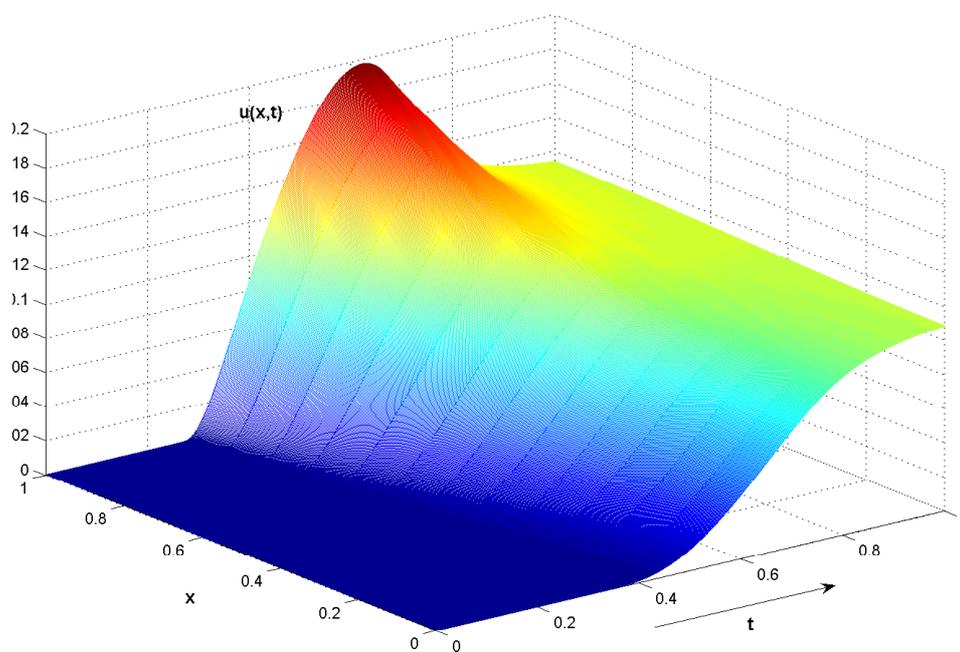


Figura 5.15: La temperatura $u(x,t)$, solución de (4.4.1), obtenida con el flujo $f(t)$ dado por (5.1.3). Ejemplo 5.

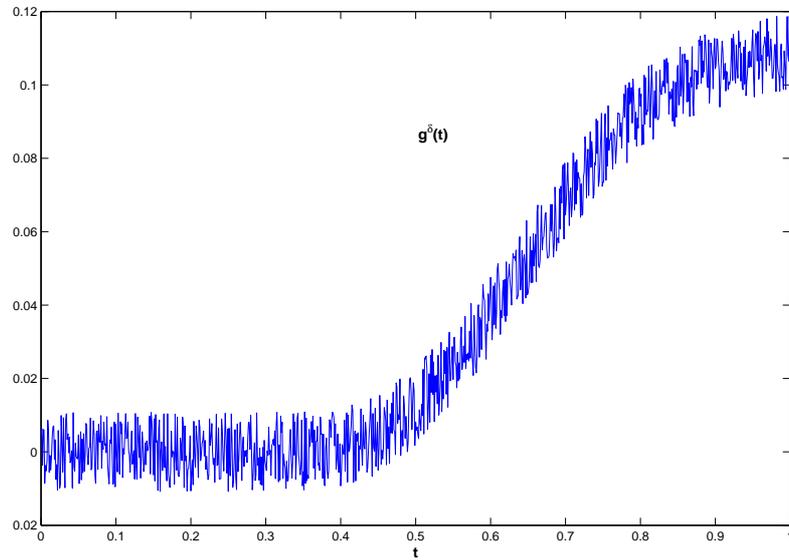


Figura 5.16: Dato $g^\delta(t)$ para el Ejemplo 5, igual al dato exacto perturbado con 20% de ruido.

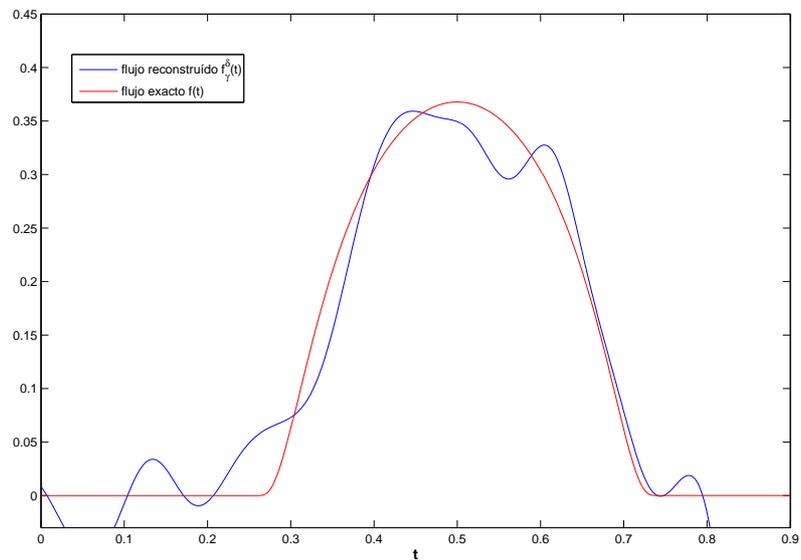


Figura 5.17: Flujo $f_\gamma^\delta(t)$ reconstruido a partir del dato perturbado con 20% de ruido, utilizando el método de la inversa aproximada, con $\gamma = 0.045$, y flujo exacto $f(t)$. Ejemplo 5.

Capítulo 6

Conclusiones, contribuciones y trabajos futuros

6.1. Conclusiones

En este trabajo hemos realizado un estudio general sobre problemas inversos y métodos de regularización para problemas inversos mal condicionados.

En primer lugar, en el Capítulo 1 se presentaron los postulados de Hadamard y se estudiaron la naturaleza y características de los problemas inversos a través de algunos ejemplos motivadores. Posteriormente, en el Capítulo 2, se procedió a desarrollar un marco adecuado para el estudio de ecuaciones lineales mal condicionadas en espacios de dimensión infinita. Esto incluyó el estudio de la inversa generalizada de Moore-Penrose, su descomposición en valores singulares para el caso de operadores compactos, el criterio de Picard, y su relación con las soluciones de cuadrados mínimos. Este análisis fué de fundamental importancia pues, como se vio, constituye el nexo que vincula a la inversa de Moore-Penrose con el método clásico de cuadrados mínimos en dimensión infinita y con la Teoría Espectral. En la Sección 2.3 se procedió a hacer una breve introducción a la Teoría Espectral y al Cálculo Funcional (familias espectrales, función de un operador compacto, Desigualdad de Interpolación, etc.), con el objeto de proveer un andamiaje matemático adecuado para el tratamiento de los problemas que fueron tratados luego.

En el Capítulo 3 se introdujeron las herramientas matemáticas clásicas de la teoría de regularización para problemas mal condicionados: regularización, regla de elección de parámetros, método de regularización convergente para ecuaciones lineales mal condicionadas y su relación con la inversa generalizada de Moore-Penrose. Utilizando las

herramientas del Análisis Espectral, se analizó la convergencia de métodos de regularización en espacios de Hilbert. En la Sección 3.2 se estudiaron órdenes de optimalidad y su relación con conjuntos fuente definidos en términos de operadores y con condiciones de regularidad sobre las soluciones. Se presentaron condiciones suficientes para convergencia y convergencia óptima. En la Sección 3.3 se estudiaron dos métodos de regularización por proyección: proyección de cuadrados mínimos y proyección de cuadrados mínimos dual y para ambos métodos se analizaron condiciones suficientes para la convergencia de las correspondientes sucesiones. También se presentó un resultado recíproco en el que se dedujeron condiciones de regularidad de la solución exacta a partir de información sobre la sucesión de soluciones de mínimos cuadrados y se obtuvieron órdenes de convergencia para el caso de operadores compactos. Para el caso compacto, se observó además que el popular método de expansión en valores singulares truncada resulta ser un caso particular del método de mínimos cuadrados dual.

6.2. Contribuciones

La inclusión de los Capítulos 1 a 3 de esta tesis tuvo dos objetivos principales: en primer lugar se trató de reflejar el estado del arte sobre el tratamiento matemático de los problemas inversos y los métodos de regularización y en segundo lugar se introdujo un andamiaje matemático adecuado para el tratamiento de los problemas y temas que se abordaron posteriormente. Es oportuno señalar que la mayoría de resultados contenidos en estos capítulos no son nuevos, a pesar de que, como ya lo mencionamos, el estudio formal de todas las herramientas matemáticas que permiten el adecuado tratamiento de estos problemas es bastante moderna. De todos modos, en todos los casos las demostraciones y desarrollos presentados son propios y en todos ellos se ha tratado de mantener el enfoque particular adoptado a lo largo de esta tesis, del tratamiento mediante las herramientas de la Teoría Espectral de Operadores en espacios de Hilbert.

Se describen a continuación los principales aportes de este trabajo de tesis. Al final de la Sección 3.3 se presentó un ejemplo de aplicación para aproximar la solución de una ecuación integral de Fredholm de primera especie, conocido como “colocación de cuadrados mínimos” o “método de discretización de momentos”. Aquí se probó que este método es un caso particular del método de regularización por proyección de cuadrados mínimos dual y que, si el conjunto de puntos de colocación es denso, entonces la correspondiente sucesión de soluciones aproximantes converge a la solución exacta. Este resultado constituye un aporte significativo en lo que respecta a la aproximación de las soluciones de ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase, las que, como vimos, aparecen en una amplia variedad de aplicaciones en Medicina, procesamiento de señales e imágenes, problemas de transferencia de calor, problemas de fluorescencia, etc.

En las Secciones 3.4 y 3.5 se presentaron los métodos de regularización mediante filtros y métodos espectrales, respectivamente, y las relaciones entre los mismos. Aquí

se demostró como los métodos clásicos (tales como Tikhonov-Phillips, TSVD, etc.) quedan subsumidos bajo esta teoría general mediante una adecuada elección de los filtros.

En el Capítulo 4 se introdujo la teoría más moderna de los métodos de molificación y, en particular, se analizó en detalle el “método de la inversa aproximada” y su relación con los métodos de filtro. Aquí se probó que para el caso de operadores compactos, todo método de filtro constituye una inversa aproximada con un cierto molificador definido en términos del filtro (Teor. 4.6). Como consecuencia de este resultado se demostró que los clásicos métodos de Tikhonov-Phillips y TSVD son también inversas aproximadas en el caso compacto. Recíprocamente, se probó que, si el molificador “factoriza”, entonces el método de la inversa aproximada es también un método de filtro (Teor. 4.7). En la Sección 4.3 se presentó el método de Backus-Gilbert (comúnmente utilizado en problemas de Geología) y se probó que éste es un caso particular del método de la inversa aproximada. En la Sección 4.4 se aplicó el método de la inversa aproximada a la resolución un problema de difusión inverso severamente mal condicionado: la ecuación lateral del calor o “sideways heat equation”. Para este problema se dio una demostración sencilla de que el operador asociado al problema adjunto es efectivamente el operador adjunto (Teor. 4.14). En este caso particular se probó la convergencia para ciertos molificadores de decaimiento rápido, que incluyen a los molificadores Gaussianos (Teor. 4.15 y Corolario 4.16). Todos estos constituyen aportes nuevos y significativos a los temas de estudio.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentaron varios resultados numéricos en los cuales se utilizó el método de la inversa aproximada con molificadores Gaussianos para reconstruir el flujo de frontera en la ecuación lateral de calor unidimensional. En ellos se reconstruyeron diferentes flujos y se mostró la robustez del método ante la presencia de ruidos en los datos. También los resultados de esta sección son muy significativos pues ponen de manifiesto la importancia que tienen las herramientas matemáticas previamente analizadas y desarrolladas en el análisis de problemas concretos.

6.3. Trabajos Futuros

Esperamos y confiamos que al terminar de leer esta tesis, el lector tenga en claro y esté convencido de que el tema problemas inversos constituye una gran área dentro de la Matemática Aplicada, con varias aristas y facetas, que van desde el estudio y análisis de conceptos y problemas matemáticos sumamente abstractos hasta la aplicación concreta de las herramientas y métodos en problemas particulares en áreas y disciplinas muy diversas. En todo este amplísimo rango existen numerosos problemas abiertos y áreas fértiles para futuros desarrollos. Entre ellas mencionamos solo algunas, en las que pretendemos incursionar y continuar investigando en el futuro cercano:

- Estudio, derivación e implementación computacional de reglas de elección de parámetros para métodos de regularización.

- Estudio del concepto de “calificación” como orden de convergencia óptimo para métodos de regularización generales.
- Determinación de reglas de elección del parámetro de reconstrucción para el método de la inversa aproximada.
- Aplicaciones del método de la inversa aproximada a problemas de conducción de calor con molificadores no gaussianos.
- Aplicaciones de los métodos de regularización al estudio del procesamiento y restauración de imágenes.
- Estudio de los métodos de variación acotada como generalización del método de Tikhonov-Phillips y sus aplicaciones en problemas de detección de borde.

Apéndice: resultados básicos del análisis funcional

En este apéndice compilamos algunas de las definiciones y de los teoremas más importantes del análisis funcional. Los resultados que se presentan son bastante conocidos y pueden encontrarse en la mayoría de los textos sobre el tema. En este trabajo, tales resultados fueron extraídos de los siguientes textos: J. Weidmann [37], G. Bachman y L. Narici [3], J. Conway [7] y W. Rudin [28].

A.1. Espacios normados y espacios de Hilbert

Definición A.1. (Norma, Espacio Normado)

Sea X un espacio vectorial sobre el campo $F = \mathbb{R}$ ó $F = \mathbb{C}$. Una **norma** sobre X es un mapeo

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

con las siguientes propiedades:

- i) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
- ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$ (desigualdad triangular),
- iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $x \in X$ y $\alpha \in F$.

Un espacio vectorial X con una norma sobre él, $\|\cdot\|_X$, se llama **espacio normado** y se denota $(X, \|\cdot\|_X)$. Si en el contexto en el que se usa es claro a cuál norma nos referimos, escribimos simplemente X y usamos $\|\cdot\|$ para la norma.

Definición A.2. (Producto Interno, Espacio de Pre-Hilbert)

Sea X un espacio vectorial sobre el campo $F = \mathbb{R}$ ó $F = \mathbb{C}$. Un **producto interno** es un mapeo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow F$$

tal que, para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in F$ se satisface:

- i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,
- ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Un espacio vectorial X con un producto interno se llama **espacio con producto interno** ó, **espacio de pre-Hilbert** .

Las propiedades i) y ii) implican que:

- iv) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ para todo $x, y, z \in X$,
- v) $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in F$.

Usando el producto interno podemos transformar un espacio con producto interno X en un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ definiendo la norma inducida como:

$$\|x\|_X \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

En consecuencia, un espacio con producto interno es un particular espacio normado. Algunas propiedades de los productos internos y sus normas inducidas son:

- a) si $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in X$, entonces $y = 0$,
- b) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz),
- c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$ (regla del palelogramo).

Todo espacio normado tiene una topología inducida por la norma, esto es, podemos definir conjuntos abiertos, cerrados y compactos, sucesiones convergentes, funciones continuas, etc. En tales espacios, a la bola centrada en x de radio r la denotaremos

$$B_r(x) \doteq \{y \in X : \|y - x\| < r\}.$$

Definición A.3. Sea X un espacio normado.

i) Un conjunto $M \subset X$ es **abierto** si para todo $x \in M$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset M$. El conjunto $M \subset X$ es **cerrado** si $X \setminus M$ es abierto.

ii) Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ se dice **acotada** si existe una constante $c > 0$ tal que $\|x_n\| \leq c$ para todo n . La sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es **convergente** (convergencia fuerte)

si existe $x \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Al límite lo denotamos como $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ó, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy** para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$.

iii) Sea la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. El punto $x \in X$ se llama **punto de acumulación** si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a x .

iv) Un conjunto $M \subset X$ es **compacto** si toda sucesión en M tiene un punto de acumulación en M .

Se puede probar que un conjunto M es cerrado si y sólo si toda sucesión en M convergente, tiene su punto límite en M .

Definición A.4. Sean X un espacio normado y M un subconjunto de X .

i) El **interior de M** se define como

$$M^\circ \doteq \{x \in X : \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ con } B_\varepsilon(x) \subset M\}.$$

ii) La **clausura de M** se define como

$$\overline{M} \doteq \left\{ x \in X : \text{existe } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M \text{ con } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\},$$

esto es, la clausura es el mayor cerrado que contiene a M .

iii) M es **acotado** en X si $\sup_{x \in \overline{M}} \{\|x\|_X\} < \infty$.

iv) M es **denso** en X si $\overline{M} = X$.

Se puede probar que un conjunto M es denso en X si y sólo si para todo conjunto $A \subset X$, A abierto es tal que $A \cap M \neq \emptyset$.

Teorema A.5 ([3]). Sean X un espacio normado, M y N subconjuntos de X . Entonces:

a) M es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$, y M es abierto si y sólo si $M = M^\circ$.

b) Si M es un subespacio, entonces \overline{M} también es un subespacio.

c) Si M es compacto, entonces M es cerrado y acotado. (En espacios de dimensión finita el resultado inverso es válido).

d) Si $M \subset N$, entonces $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Definición A.6. (Espacio de Banach, Espacio de Hilbert)

Un espacio normado X se llama **completo** ó, **espacio de Banach** si toda sucesión de Cauchy es convergente en X . Un espacio de pre-Hilbert completo se llama **espacio de Hilbert**.

Todo espacio normado ó, de pre-Hilbert X puede ser completado, esto es, existe un menor \tilde{X} espacio de Banach ó, de Hilbert, respectivamente, que extiende a X . Es decir, para todo $x, y \in X$ se cumple que $\|x\|_X = \|x\|_{\tilde{X}}$ ó, $\langle x, y \rangle_X = \langle x, y \rangle_{\tilde{X}}$, respectivamente. La formalización de ésto la daremos a través del siguiente teorema.

Teorema A.7 ([3]). *Sea X un espacio normado con norma $\|\cdot\|_X$. Entonces existe un espacio de Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ y un mapeo lineal inyectivo $T : X \rightarrow \tilde{X}$ tal que $T(X)$ es denso en \tilde{X} y $\|Tx\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$ para todo $x \in X$, esto es, T preserva la norma. El espacio \tilde{X} se llama la completación de X .*

Definición A.8. (Espacio Separable)

Un espacio normado X se llama **separable** si existe un subconjunto $M \subset X$, denso y numerable.

Definición A.9. (Complemento Ortogonal)

Sea X un espacio de pre-Hilbert.

i) Dos elementos $x, y \in X$ se llaman **ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$. En símbolos $x \perp y$.

ii) Un elemento $x \in X$ se llama **ortogonal al subconjunto** M de X si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in M$. En símbolos $x \perp M$.

iii) Dos subconjuntos M y N de X se dicen **ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in M, y \in N$. En símbolos $M \perp N$.

iv) Sea $M \subset X$ un subconjunto. El **complemento ortogonal** de M se define como

$$M^\perp \doteq \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M\}.$$

Proposición A.10 ([37]). *Sea X un espacio de pre-Hilbert. Entonces:*

a) $\{0\}^\perp = X$ y $X^\perp = \{0\}$, esto es, 0 es el único elemento ortogonal a todo elemento del espacio X .

b) Para todo subconjunto $M \subset X$, el conjunto M^\perp es un subespacio cerrado de X y $M \subset (M^\perp)^\perp$.

c) Si $A \subset B$, entonces $B^\perp \subset A^\perp$.

Definición A.11. Un subconjunto M de un espacio vectorial se dice **convexo** si para $x, y \in M$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ se tiene que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$.

Cualquier subespacio es obviamente convexo.

Teorema A.12 ([37]). Sean X un espacio de Hilbert y M un subconjunto no vacío de X cerrado y convexo. Entonces, para cada $x \in X$ existe un único $x_0 \in M$ tal que

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \{\|x - y\|\}.$$

Si el conjunto convexo en el teorema precedente es un subespacio cerrado de X , se puede decir más.

Teorema A.13 ([7]). Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert X , $x \in X$ y x_0 es el único elemento de M tal que $\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \{\|x - y\|\}$, entonces $x - x_0 \in M^\perp$. Inversamente, si $x_0 \in M$ es tal que $x - x_0 \in M^\perp$, entonces $\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \{\|x - y\|\}$.

El siguiente teorema es un resultado fundamental en la teoría de espacios de Hilbert.

Teorema A.14 ([37]). **(Teorema de Proyección)**

Sean X un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de X . Entonces $M = (M^\perp)^\perp$. Todo $x \in X$ posee una única descomposición de la forma $x = x_0 + x_1$ con $x_0 \in M$ y $x_1 \in M^\perp$. El elemento x_0 se llama la **proyección ortogonal de x sobre M** .

El operador $P : X \rightarrow M$ definido por $Px \doteq x_0$, se llama la **proyección ortogonal de X sobre M** y tiene las siguientes propiedades:

- a) $Px = x$ para todo $x \in M$, esto es, $P^2 = P$;
- b) $\|x - Px\| \leq \|x - z\|$ para todo $z \in M$.

Dado $x \in X$, de la condición b) se desprende que $Px (\in M)$ es la mejor aproximación de x al subespacio cerrado M . Además, para el operador proyección se cumple que, $N(P) = M^\perp$ y $R(P) = M$.

Como consecuencia de este teorema podemos afirmar que: si X es un espacio de Hilbert y M es un subespacio cerrado, entonces

$$X = M \oplus M^\perp$$

ya que $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Teorema A.15 ([3]). Sea X un espacio de Hilbert y sean M y N subespacios cerrados ortogonales de X . Entonces $M + N$ es un subespacio cerrado de X .

A.2. Sistemas ortonormales

Definición A.16. (Sistema Ortonormal, Sistema Completo)

Sea X un espacio de Hilbert. Un conjunto numerable de elementos de X , $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, se llama **sistema ortonormal** si para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\langle x_n, x_m \rangle = \delta_{nm},$$

siendo δ_{nm} la delta de Kronecker.

El sistema ortonormal A se llama **completo** (en X) ó, **sistema ortonormal maximal** (en X), si no existe B sistema ortonormal tal que $A \subsetneq B$.

El siguiente teorema proporciona un resultado de convergencia en espacios de Hilbert.

Teorema A.17 ([3]). (Teorema de Riesz-Fischer)

Sean X un espacio de Hilbert sobre F y $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal. Entonces, si $\alpha_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge si y sólo si $\{\alpha_n\} \in l_2$ (esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$);
- si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = x$, entonces $\alpha_n = \langle x, x_n \rangle$ y $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

Todo espacio de Hilbert separable posee un sistema ortonormal completo ([37]).

Para cualquier conjunto $B \subset X$, el **subespacio de X expandido por B** se define como

$$\text{span } B \doteq \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in F, x_k \in B, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Teorema A.18 ([3]). Sea X un espacio de Hilbert, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ un sistema ortonormal. Entonces:

- Todo subconjunto finito de A es linealmente independiente.
- A es completo (en X) si y sólo si $\text{span } A$ es denso en X .
- A es completo (en X) si y sólo si para todo $x \in X$ vale la identidad de Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

d) A es completo (en X) si y sólo si todo $x \in X$ tiene una expansión de Fourier (generalizada) de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$$

donde la convergencia se entiende en la norma de X .

A.3. Operadores lineales, acotados y compactos

En esta sección, X e Y son al menos espacios normados (sobre el campo F). El operador $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ es **lineal**, esto es,

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty, \quad \forall x, y \in D(T), \alpha \in F.$$

En consecuencia $N(T)$ y $R(T)$ son subespacios de X e Y respectivamente ([37]).

Se dice que el operador lineal T es **densamente definido** si $D(T)$ es denso en X , esto es, si $\overline{D(T)} = X$.

Definición A.19. (Acotación, Norma de T)

El operador lineal T se llama **acotado** si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X, \quad \forall x \in D(T).$$

La menor de estas constantes se llama la **norma** de T , esto es,

$$\|T\| \doteq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (\text{A.3.1})$$

De la definición de norma se deduce que, si T es un operador (lineal) acotado, entonces

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X, \quad \forall x \in D(T).$$

La continuidad y la acotación son conceptos equivalentes para operadores lineales.

Teorema A.20 ([37]). *Sea T un operador lineal. Entonces T es continuo si y sólo si T es acotado.*

Teorema A.21 ([37]). **(Extensión por Continuidad)**

Sea $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador acotado, X espacio normado, Y espacio de Banach. Entonces, existe una única \tilde{T} extensión acotada de T a $\overline{D(T)}$ tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Podemos afirmar entonces que: todo operador acotado densamente definido puede ser extendido, en forma única, a todo el espacio sin perder acotación.

Definición A.22. La función k se dice **debilmente singular** en $[a, b] \times [a, b]$ si está definida y es continua para todo $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$, $t \neq s$, y existen constantes $c > 0$ y $\alpha \in [0, 1)$ tales que

$$|k(t, s)| \leq \frac{c}{|t - s|^\alpha}, \quad \forall t, s \in [a, b], t \neq s.$$

Teorema A.23 ([37]).

a) Si $k \in L_2((c, d) \times (a, b))$, entonces el operador integral T de $L_2(a, b)$ en $L_2(c, d)$ definido por

$$(Tx)(t) \doteq \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad t \in (c, d), \quad x \in L_2(a, b), \quad (\text{A.3.2})$$

está bien definido, es lineal y acotado.

b) Si k es continua en $[c, d] \times [a, b]$, entonces el operador integral T de $C[a, b]$ en $C[c, d]$ definido por

$$(Tx)(t) \doteq \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad t \in [c, d], \quad x \in C[a, b],$$

está bien definido, es lineal y acotado.

c) Si k es débilmente singular en $[a, b] \times [a, b]$, entonces el operador integral T definido por (A.3.2) para $[c, d] = [a, b]$ está bien definido, es lineal y acotado como operador en $L_2(a, b)$ ó, en $C[a, b]$.

El espacio que consiste de todos los operadores lineales acotados entre los espacios normados X e Y , definidos sobre todo X que denotamos por $L(X, Y)$, esto es,

$$L(X, Y) \doteq \{T : D(T) \subset X \rightarrow Y : T \text{ es lineal y acotado, } D(T) = X\}$$

es un espacio normado con la norma dada por (A.3.1) ([37]). Cuando $X = Y$ se nota simplemente $L(X)$.

Si $T_1 \in L(X, Y)$ y $T_2 \in L(Y, Z)$, entonces $T_2T_1 \in L(X, Z)$ y además $\|T_2T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|$ ([37]).

Teorema A.24 ([37]). Si $T \in L(X, Y)$, entonces $N(T)$ es un subespacio cerrado de X .

Para el caso especial en que $Y = F$, denotaremos por $X' \doteq L(X, F)$ al espacio dual de X . A sus elementos los notaremos por ℓ . Análogamente, el espacio $(X')'$ se llama el bidual de X . El encajamiento natural $J : X \rightarrow (X')'$, definido por

$$(Jx)(\ell) \doteq \ell(x), \quad x \in X, \quad \ell \in X',$$

es lineal, acotado, uno a uno, y satisface $\|(Jx)\|_{(X')'} = \|x\|_X, \forall x \in X$.

Definición A.25. (Espacio Reflexivo)

Si el mapeo J es sobre $(X')'$, entonces X se llama **reflexivo**.

La introducción del espacio X' conduce a un nuevo concepto de convergencia de una sucesión.

Definición A.26. (Convergencia Débil)

i) Una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio normado X **converge débilmente** a $x \in X$ si $\ell(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(x)$ para todo $\ell \in X'$. Lo denotamos $x_n \xrightarrow{w} x$.

ii) Una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio normado X se dice **sucesión de Cauchy débil** si $\{\ell(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy para todo $\ell \in X'$.

Se puede probar que, si existe el límite débil, es único ([3]). Además, la convergencia débil no implica la convergencia fuerte; el recíproco es válido ([3]). En espacios de dimensión finita convergencia fuerte es equivalente a convergencia débil ([3]).

El siguiente resultado da una caracterización para el espacio dual de un espacios de Hilbert.

Teorema A.27 ([37] y [7]). (Teorema de Representación de Riesz)

Sea X un espacio de Hilbert. Todo $x \in X$ induce un funcional lineal continuo sobre X , que denotaremos ℓ_x , definido por $\ell_x(y) \doteq \langle y, x \rangle_X$ para todo $y \in X$ (esto es, $\ell_x \in X'$). Además, para todo $\ell \in X'$ existe un único $x_\ell \in X$ tal que $\ell(x) = \langle x, x_\ell \rangle_X$ para todo $x \in X$, y $\|\ell\|_{X'} = \|x_\ell\|_X$.

Como consecuencia de este teorema podemos afirmar que si X es un espacio de Hilbert y $\{x_n\} \subset X$, entonces

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ si y sólo si } \langle x_n - x, z \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall z \in X,$$

y que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy débil si y sólo si $\{\langle x_n, z \rangle\}$ es una sucesión de Cauchy en F para todo $z \in X$. Toda sucesión que converge débilmente es una sucesión de Cauchy débil ([37]).

Del Teorema A.27 también se deduce que *todo espacio de Hilbert es reflexivo* ([3]).

Teorema A.28 ([37]). Sea X un espacio de Hilbert

a) Si $\{x_n\} \subset X$ es tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

b) Toda sucesión de Cauchy débil en X es acotada.

c) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy débil en X , entonces existe $x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$.

Teorema A.29 ([37]). Sea X un espacio de Hilbert. Entonces toda sucesión acotada en X contiene una subsucesión que converge débilmente.

Teorema A.30 ([37]). Sean X e Y espacios de Hilbert y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal tal que $D(T) = X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) T es acotado (esto es, $x_n \rightarrow x$ implica $Tx_n \rightarrow Tx$),

b) $x_n \xrightarrow{w} x$ implica $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

El Teorema A.27 también asegura la existencia de un único operador adjunto para operadores lineales acotados entre espacios de Hilbert.

Definición A.31. (Operador Adjunto de un Operador Acotado)

Sea $T \in L(X, Y)$, donde X e Y son espacios de Hilbert. Entonces existe un único operador $T^* \in L(Y, X)$ que satisface

$$\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^*y \rangle_X, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

El operador T^* se llama el **operador adjunto** de T . Si $X = Y$, el operador T se llama **autoadjunto** si $T^* = T$.

Un operador $T \in L(X)$ autoadjunto se dice **no negativo** si $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$.

Lema A.32 ([7]). Sean $T_1, T_2 \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, donde X, Y y Z son espacios de Hilbert (sobre el campo F). El operador adjunto tiene las siguientes propiedades:

- $I^* = I$, siendo I el operador identidad;
- $(\alpha T_1)^* = \bar{\alpha} T_1^*, \forall \alpha \in F$;
- $\|T_1^*\| = \|T_1\|$;
- $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;
- $(ST_1)^* = T_1^*S^*$;
- $\|T_1^*T_1\| = \|T_1\|^2$.

Teorema A.33 ([7]). Si $T \in L(X, Y)$, donde X e Y son espacios de Hilbert, entonces valen las siguientes igualdades:

- $\overline{R(T)}^\perp = N(T^*)$;
- $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$;
- $\overline{R(T^*)}^\perp = N(T)$;
- $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$.

Teorema A.34 ([37]) Sean X espacio de Hilbert y $P \in L(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- P es una proyección ortogonal,
- $I - P$ es una proyección ortogonal,
- P es idempotente y $R(P) = N(P)^\perp$,
- P es idempotente y autoadjunto.

Además, $R(P) = N(I - P)$ y $N(P) = R(I - P)$.

Observar que si P es proyección ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

Generalicemos la Definición A.31 al caso de operadores no acotados.

Definición A.35. (Operador Adjunto de un Operador no Acotado)

Sean X e Y espacios de Hilbert, $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal densamente definido. Entonces, el **operador adjunto** de T que notaremos $T^* : D(T^*) \subset Y \rightarrow X$ se define como

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \{y \in Y : \text{el funcional } x \rightarrow \langle y, Tx \rangle \text{ es continuo en } D(T)\} \\ &= \{y \in Y : \exists y^* \in X \text{ tal que } \langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, y^* \rangle_X \quad \forall x \in D(T)\} \end{aligned}$$

y

$$T^*y \doteq y^*.$$

T^* así definido es lineal. Diremos que T es **autoadjunto** si $T = T^*$.

En los siguientes resultados sobre las propiedades de los operadores adjuntos que acabamos de definir, usaremos el siguiente concepto: diremos que T_2 **extiende a** T_1 (ó, que T_2 **es una extensión de** T_1) si $D(T_1) \subset D(T_2)$ y $T_2|_{D(T_1)} = T_1$.

Teorema A.36 ([37]). *Sea T un operador lineal densamente definido de X en Y .*

a) *Si T^* también es densamente definido, entonces $(T^*)^*$ es una extensión de T .*

b) $R(T)^\perp = N(T^*)$.

c) T es acotado si y sólo si $T^* \in L(Y, X)$.

d) Si T es acotado, entonces $\|T^*\| = \|T\|$.

e) Si T es acotado, entonces $(T^*)^*$ es una extensión continua de T a todo el espacio X . En particular, si $T \in L(X, Y)$ se tiene que $(T^*)^* = T$.

f) Si T es inyectivo y $R(T)$ es denso, entonces T^* también es inyectivo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Teorema A.37 ([3]). *Sean T_1 y T_2 operadores lineales densamente definidos. Entonces:*

$$a) (\alpha T_1)^* = \bar{\alpha} T_1^*, \quad \forall \alpha \in F; \quad D((\alpha T_1)^*) = \begin{cases} D(T_1^*) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ X & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}.$$

b) Si T_2 extiende a T_1 , entonces T_1^* extiende a T_2^* .

c) $(T_1 + T_2)^*$ extiende a $T_1^* + T_2^*$, esto es,

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^* \quad \text{en } D(T_1^* + T_2^*) \subset D((T_1 + T_2)^*).$$

(Observar que $D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$).

d) $(T_1 T_2)^*$ extiende a $T_2^* T_1^*$, esto es,

$$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* \quad \text{en } D(T_2^* T_1^*) \subset D((T_1 T_2)^*).$$

Definición A.38. (Operador Cerrado)

Sea $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal, X e Y espacios normados. Diremos que T es **cerrado** si su grafo, $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$, es un subespacio cerrado de $X \times Y$.

Todo operador acotado es cerrado. Lo recíproco no necesariamente vale. Todo operador autoadjunto es cerrado ([3]).

Los siguientes dos teoremas sobre operadores lineales son muy importantes y se usan frecuentemente en las aplicaciones.

Teorema A.39 ([3]). (Principio de la Acotación Uniforme ó, Teorema de Banach-Steinhaus)

Sea la familia $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset L(X, Y)$, donde X es un espacio de Banach, Y un espacio normado y I es un conjunto de índices. Si la familia $\{T_\alpha x\}_{\alpha \in I}$ es acotada para cada x (esto es, para cada $x \in X$ existe una constante M_x , independiente de α , tal que $\|T_\alpha x\| \leq M_x$ para todo $\alpha \in I$), entonces la familia $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha \in I}$ está uniformemente acotada, esto es, existe una constante M , independiente de α , tal que $\|T_\alpha\| \leq M$ para todo $\alpha \in I$.

Teorema A.40 ([7]). (Teorema de la Aplicación Abierta)

Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$ un operador sobre Y . Entonces T es abierto, esto es, $T(U) \subset Y$ es un conjunto abierto en Y , para todos los conjuntos abiertos $U \subset X$.

El Teorema de la Aplicación Abierta tiene distintas aplicaciones. Presentamos a continuación dos de las más importantes.

Teorema A.41 ([7]). (Teorema de la Aplicación Inversa)

Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$ un operador biyectivo. Entonces T^{-1} es acotado (o equivalentemente, continuo), esto es, $T^{-1} \in L(Y, X)$.

Teorema A.42 ([7]). (Teorema del Grafo Cerrado)

Sean X e Y espacios de Banach, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal cerrado, $D(T) = X$. Entonces T es acotado (o equivalentemente, continuo).

Esto es, un operador cerrado entre espacios de Banach definido sobre todo el espacio de salida es acotado.

Definición A.43. (Operador Compacto)

Sean X e Y espacios normados. El operador $K \in L(X, Y)$ es **compacto** si $K(S) \subset Y$ es un conjunto relativamente compacto, para todos los conjuntos acotados $S \subset X$.

Un conjunto $M \subset Y$ se dice **relativamente compacto** si toda sucesión acotada $\{y_n\} \subset M$ tiene un punto de acumulación en \overline{M} , esto es, si la clausura \overline{M} es compacta.

El conjunto de todos los operadores compactos de X en Y es un subespacio cerrado de $L(X, Y)$ tal como se deduce del siguiente teorema.

Teorema A.44 ([3] y [37]).

a) Si $K \in L(X, Y)$ y $\dim R(K) < \infty$, entonces K es compacto.

b) Si K_1 y K_2 son operadores compactos de X en Y , entonces también lo son $K_1 + K_2$ y αK_1 , para todo $\alpha \in F$.

c) Sea $\{K_n\} \subset L(X, Y)$ una sucesión de operadores compactos entre los espacios de Banach X e Y . Sea $K : X \rightarrow Y$ un operador acotado tal que K_n converge a K en la norma del operador, esto es

$$\|K_n - K\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|K_n x - Kx\|}{\|x\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Entonces K es compacto.

d) Si $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, y T ó S es compacto, entonces ST también es compacto.

e) Sea $\{T_n\} \subset L(X, Y)$ una sucesión que converge puntualmente a algún $T \in L(X, Y)$, esto es, $T_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$, para todo $x \in X$. Si $K : Z \rightarrow X$ es compacto, entonces

$$\|T_n K - TK\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

esto es, el operador $T_n K$ converge a TK en la norma del operador.

f) Si X es un espacio de Banach, entonces el operador identidad es compacto si y sólo si $\dim(X) < \infty$.

g) Sean X e Y espacios de Hilbert y $T \in L(X, Y)$. Entonces T es compacto si y sólo si T^* es compacto.

Teorema A.45 ([37]).

a) Si $k \in L_2((c, d) \times (a, b))$, entonces el operador K de $L_2(a, b)$ en $L_2(c, d)$ definido por

$$(Kx)(t) \doteq \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad t \in (c, d), \quad x \in L_2(a, b), \quad (\text{A.3.3})$$

es compacto.

b) Si k es continua en $[c, d] \times [a, b]$ ó, debilmente singular en $[a, b] \times [a, b]$ (en este caso $[c, d] = [a, b]$), entonces el operador K definido por (A.3.3) es compacto como un operador de $C[a, b]$ en $C[c, d]$

A.4. Teoría espectral para operadores compactos en espacios de Hilbert

Definición A.46. (Espectro y Conjunto Resolvente)

Sean X un espacio normado sobre $F = \mathbb{C}$ y $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal. El **espectro** $\sigma(T)$ se define como el conjunto de los números complejos λ tales que el operador $T - \lambda I$ no tiene inverso acotado sobre X . Esto es, $\lambda \in \sigma(T)$ si no existe $(T - \lambda I)^{-1}$ ó, existe $(T - \lambda I)^{-1}$ y no es acotado ó, existe $(T - \lambda I)^{-1}$ y $D((T - \lambda I)^{-1}) = R(T - \lambda I) \neq X$. Aquí, I denota la identidad sobre X .

$\lambda \in \sigma(T)$ se llama un **autovalor** de T si no existe $(T - \lambda I)^{-1}$. En este caso, los elementos no triviales $v \in N(T - \lambda I)$ se llaman los **autovectores** de T correspondientes a λ , y el subespacio $N(T - \lambda I)$ se denomina **autoespacio** (correspondientes a λ).

El conjunto **resolvente** $\rho(T)$ se define como $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, esto es, $\lambda \in \rho(T)$ si $T - \lambda I$ tiene un inverso densamente definido y acotado.

Si $\{v_n, n = 1, \dots, j\} \subset X$ es un conjunto de autovectores correspondientes a diferentes autovalores $\lambda_n \in \mathbb{C}$, entonces $\{v_1, \dots, v_j\}$ es linealmente independientes en X .

Teorema A.47 ([3]). *Sea X un espacio de Hilbert. Si T es autoadjunto, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Los autovectores correspondientes a diferentes autovalores son ortogonales. Además, si $T \in L(X)$ se cumple que:*

- $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$ donde $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ y $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$;
- $\sigma(T) \subset [m, M]$;
- $m, M \in \sigma(T)$;
- $\|T\| = r(T)$ donde $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ se llama el radio espectral de T .

Los operadores compactos tiene un espectro simple. En los dos teoremas que siguen presentamos los resultados más importantes.

Teorema A.48 ([37]). *Sean X un espacio de Hilbert y $K \in L(X)$ un operador compacto y autoadjunto ($K \neq 0$). Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

- El espectro de K consiste sólo de autovalores y posiblemente el 0. Todo autovalor de K es real. K tiene (a lo más) un número infinito numerable de autovalores y 0 es el único posible punto de acumulación.*

b) Para todo autovalor $\lambda \neq 0$ existe sólo un número finito de autovectores linealmente independientes, esto es, los autoespacios son de dimensión finita. Los autovectores que corresponden a autovalores distintos son ortogonales.

Teorema A.49 ([37], [3] y [7]). **(Teorema Espectral para Operadores Compactos y Autoadjuntos)**

Sean X un espacio de Hilbert y $K \in L(X)$ compacto y autoadjunto ($K \neq 0$). Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

a) A los autovalores de K los ordenamos en forma decreciente en valor absoluto, esto es,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq 0,$$

y denotamos por $P_n : X \rightarrow N(K - \lambda_n I)$ a la proyección ortogonal de X sobre el autoespacio correspondiente a λ_n . Si sólo existe un número finito de autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, entonces

$$K = \sum_{n=1}^m \lambda_n P_n.$$

Si existe un número infinito numerable de autovalores, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$), entonces

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

donde la serie converge en la norma del operador. Además

$$\left\| K - \sum_{n=1}^m \lambda_n P_n \right\| = |\lambda_{m+1}|.$$

b) Sea H el subespacio de X expandido por el conjunto de los autovectores que corresponden a los autovalores, $\lambda_n \neq 0$, de K . Entonces

$$X = \overline{H} \oplus N(K).$$

El apartado b) del teorema anterior puede formularse de un modo distinto. Para tratar los casos de un número finito ó infinito de autovalores, introducimos el conjunto de índices $J \subset \mathbb{N}$, donde J es finito en el primer caso y $J = \mathbb{N}$ en el segundo caso. Para todo autovalor $\lambda_n \neq 0$, $n \in J$, elegimos una base ortonormal del correspondiente autoespacio $N(K - \lambda_n I)$. Nuevamente los autovalores se ordenan en la forma

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots > 0.$$

A todo autovalor λ_n le podemos asignar un autovector v_n . Entonces, todo $x \in X$ posee una expansión de Fourier generalizada de la forma

$$x = x_0 + \sum_{n \in J} \langle x, v_n \rangle v_n,$$

para algún $x_0 \in N(K)$ y

$$Kx = \sum_{n \in J} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n.$$

Observar que el conjunto de todos los autovectores $\{v_n\}_{n \in J}$ forman un sistema completo en X si el operador K es uno a uno ($\{v_n\}_{n \in J}$ siempre es completo en $\overline{R(K)}$).

Ahora daremos una caracterización para los autovalores de un operador compacto y normal. El operador $T \in L(X)$, X espacio de Hilbert, se dice **normal** si $TT^* = T^*T$. En particular, todo operador autoadjunto es normal.

Teorema A.50 ([37]). **(Fórmula de Courant-Fischer)**

Sean T un operador compacto y normal sobre el espacio de Hilbert X y $\{\lambda_n\}$ la sucesión de autovalores no nulos de T . Todo autovalor está contado con su multiplicidad y $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ para todo n . Entonces

$$|\lambda_1| = \|T\|$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{M_n} \sup \{ \|Tx\| : x \in M_n^\perp, \|x\| = 1 \} \tag{A.4.1}$$

donde el ínfimo se toma sobre los subespacios M_n de X de dimensión n .

Observación A.51. En el teorema anterior el ínfimo se alcanza cuando M_n es el subespacio generado por los n primeros autovectores del operador T^*T . Además, de (A.4.1) tenemos que:

$$\begin{aligned} |\lambda_{n+1}|^2 &= \inf_{M_n} \sup \{ \|Tx\|^2 : x \in M_n^\perp, \|x\| = 1 \} \\ &= \inf_{M_n} \sup \{ \langle Tx, Tx \rangle : x \in M_n^\perp, \|x\| = 1 \} \\ &= \inf_{M_n} \sup \{ \langle T^*Tx, x \rangle : x \in M_n^\perp, \|x\| = 1 \}. \end{aligned} \tag{A.4.2}$$

El Teorema Espectral para operadores compactos y autoadjuntos tiene una extensión para operadores compactos $K : X \rightarrow Y$, no autoadjuntos. Primero demos la siguiente definición.

Definición A.52. (Valores Singulares)

Sean X e Y espacios de Hilbert y $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto con operador adjunto $K^* : Y \rightarrow X$. Las raíces cuadradas positivas $\sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$, $n \in J$, de los autovalores no nulos λ_n del operador compacto y autoadjunto $K^*K : X \rightarrow X$ (también de KK^*), se llaman **valores singulares** de K . El conjunto de índices J puede ser finito ó infinito.

Notar que los σ_n están bien definidos pues todo autovalor λ de K^*K es no negativo ya que si $K^*Kv = \lambda v$, entonces $\lambda \|v\|^2 = \lambda \langle v, v \rangle = \langle K^*Kv, v \rangle = \langle Kv, Kv \rangle = \|Kv\|^2 \geq 0$ y en consecuencia $\lambda \geq 0$ (más precisamente, el operador K^*K es no negativo). Además, en el caso $J = \mathbb{N}$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

Teorema A.53 ([37]). **(Descomposición en Valores Singulares)**

Sean $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto, $K^* : Y \rightarrow X$ su operador adjunto y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots > 0$ la sucesión de valores singulares positivos de K contados con su multiplicidad. Entonces existen dos sistemas ortonormales completos (en $\overline{R(K^*K)}$ y $\overline{R(KK^*)}$, respectivamente), $\{v_n\}_{n \in J} \subset X$ y $\{u_n\}_{n \in J} \subset Y$, con las siguientes propiedades:

$$Kv_n = \sigma_n u_n \quad y \quad K^*u_n = \sigma_n v_n, \quad \forall n \in J.$$

El sistema $(\sigma_n; v_n, u_n)$ se llama **sistema singular asociado** a K y valen las siguientes igualdades:

$$Kx = \sum_{n \in J} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n, \quad \forall x \in X, \quad (\text{A.4.3})$$

esto es, $\{u_n\}$ expande a $\overline{R(K)} = \overline{R(KK^*)} = N(K^*)^\perp$,

$$K^*y = \sum_{n \in J} \sigma_n \langle y, u_n \rangle v_n, \quad \forall y \in Y,$$

esto es, $\{v_n\}$ expande a $\overline{R(K^*)} = \overline{R(K^*K)} = N(K)^\perp$. Además

$$K^*Kx = \sum_{n \in J} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n, \quad \forall x \in X,$$

y

$$KK^*y = \sum_{n \in J} \sigma_n^2 \langle y, u_n \rangle u_n, \quad \forall y \in Y.$$

Observación A.54. 1) Si $K \in L(X, Y)$ es compacto, entonces $K^* \in L(Y, X)$ es compacto. En este caso, si $(\sigma_n; v_n, u_n)$ es un sistema singular asociado a K , entonces $(\sigma_n; u_n, v_n)$ es un sistema singular asociado a K^* .

2) Si $K \in L(X, X)$ es compacto y autoadjunto y $(\lambda_n; v_n)$ es el autosistema asociado a K , entonces $(\lambda_n^2; v_n, v_n)$ es un sistema singular asociado tanto a K^*K como a KK^* .

Referencias Bibliográficas

- [1] N. I. Akhiezer y I. M. Glazman: *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Volume II. Frederick Ungar Publishing, 1963.
- [2] J. P. Aubin: *Applied Functional Analysis*, Wiley, New York, 1979.
- [3] G. Bachman y L. Narici: *Functional Analysis*. Academic Press, 1966.
- [4] G. E. Backus y J. F. Gilbert: *Numerical Applications of a formalism for geophysical inverse problems*, Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol. 13, 1967, pp 247-276.
- [5] G. E. Backus y J. F. Gilbert: *The resolving power of gross earth data*, Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol. 16, 1968, pp 169-205.
- [6] G. E. Backus y J. F. Gilbert: *Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data*, Phil. Trans. R. Soc. A, Vol 266, 1970, pp 123-192.
- [7] J. B. Conway: *A course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2^a edición, 1994.
- [8] R. Dautray y J. L. Lions: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Volume 3, *Spectral Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [9] Dinh Nho Hao y H. J. Reinhardt: *Recent contributions to linear inverse heat conduction problems*, J. Inverse Ill-Posed Problems 4 (1996), 23-32.
- [10] H. W. Engl, M. Hank y A. Neubauer: *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [11] G. B. Folland: *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [12] J. Hadamard: *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Silliman Lectures Series, Yale University Press, New Haven, 1923.
- [13] P. C. Hansen: *Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-Curve*. SIAM Review, Vol. 34 (1992), 561-580.

- [14] E. Hewitt y K. Stromberg: *Real and Abstract Analysis*. Springer, New York, 1965.
- [15] D. N. Hao: *Methods for inverse heat conduction problems*, en *Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik*, Vol. 43, Frankfurt/Main: Peter Lang, 1998.
- [16] B. James: *Probabilidade: Un Curso em Nível Intermediario*, Segunda Edición, Instituto de Matemática Pure e Aplicada, Projeto Euclides, IMPA, Brasil, 1996.
- [17] J. Keller: *Inverse Problems*. Amer. Math. Monthly 83 (1976), 107-118.
- [18] A. Kirsch: *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [19] D. Lesnik y L. Elliot: *The decomposition approach to inverse heat conduction*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 232, (1999), 82-98.
- [20] A. K. Louis y P. Maass: *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*. Inverse Problems 6 (1990), 427-440.
- [21] A. K. Louis: *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*. Inverse Problems 12 (1996), 175-190.
- [22] A. K. Louis: *A unified approach to regularization methods for linear ill-posed problems*. Inverse Problems 15 (1999), 489-498.
- [23] P. Jonas y A. K. Louis: *Approximate inverse for a one-dimensional inverse heat conduction problem*. Inverse Problems 16 (2000), 175-185.
- [24] V. A. Morozov: *On the solution of functional equations by the method of regularization*. Soviet Math. Dokl., Vol. 7 (1966), 414-417.
- [25] D. A. Murio: *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*. Wiley, New York, 1993.
- [26] D. A. Murio: *Mollification and Space Marching*, en *Inverse Engineering Handbook*. Editado por Keith A. Woodbury, CRC Press, 2003.
- [27] D. L. Phillips: *A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind*. J. Assoc. Comput. 9 (1962), 84-97.
- [28] W. Rudin: *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [29] T. I. Seidman: *Nonconvergence results for the application of least-squares estimation to ill-posed problems*. J. Optim. Theory Appl. 30 (1980), 535-547.
- [30] R. D. Spies, K. G. Temperini: *Arbitrary divergence speed of least-squares method in infinite-dimensional inverse ill-posed problems*. Inverse Problems 22 (2006), 611-626.

- [31] A. N. Tikhonov: *Regularization of incorrectly posed problems*. Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 1624-1627.
- [32] A. N. Tikhonov: *Solution of incorrectly posed problems and the regularization method*. Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 1035-1038.
- [33] G. M. Vainikko: *The discrepancy principle for a class of regularization methods*. USSR Comp. Math. Math. Phys. Vol. 22,3 (1982), 1-19.
- [34] G. M. Vainikko: *The discrepancy principle for a class of regularization methods*. USSR Comp. Math. Math. Phys. Vol. 23,6 (1983), 1-9.
- [35] C. R. Vogel: *Computational Methods for Inverse Problems*, Frontiers in Applied Mathematics. SIAM, 1ª edición, 2002.
- [36] G. Wahba: *Spline models for observational data*. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [37] J. Weidman: *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1980.