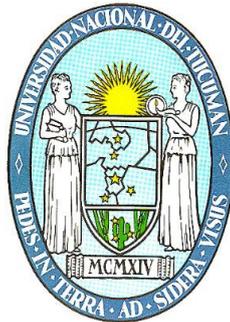


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGIA**



**Tesis de Maestría en Matemática**

**MODELADO DEL FLUJO Y LA PRESION  
EN EL SISTEMA VASCULAR**

**Cecilia Saavedra Fresia**

Director: Dr. Fernando Menzaque

Codirectora: Dra. Ana Sfer

**Marzo de 2019**

Esta Tesis se presenta a consideración de las autoridades de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (FACET) de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT) para optar al grado de Magister en Matemática.

Esta Tesis fue financiada en el marco de los Proyectos de Investigación PIUNT 26/D413, PIUNT 26/E448, PIUNT 26/E550 y PIUNT 26/E614 otorgados por la Secretaría de Ciencia, Arte e Innovación Tecnológica de la UNT y el Proyecto 05/B449 otorgado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba.

Las Becas obtenidas durante el desarrollo de esta tesis fueron otorgadas por Rectorado - Universidad Nacional de Tucumán en Octubre de 2008 y 2009 y por la Secretaría de Ciencia, Arte e Innovación Tecnológica de la Universidad Nacional de Tucumán, Agosto 2011 y Marzo 2017 (esta última como Subsidio para finalización de carreras de maestría).

Cecilia Elizabeth Saavedra Fresia  
Tesisista

Dr. Fernando Menzaque  
Director

Dra. Ana Sfer  
Codirectora

San Miguel de Tucumán, Marzo de 2019

## Trabajo en elaboración

- Comportamiento del flujo y la presión en las arterias pequeñas. Autores: C. Saavedra Fresia, F. Menzaque. Setiembre 2018.

## Presentaciones a Congresos Nacionales e Internacionales

- ***Modelado 1D de la onda de pulso a lo largo de las arterias sistémicas***  
X Congreso Latinoamericano de Biomatemática, Cusco. Agosto de 2017.  
Autores: C. Saavedra Fresia, F. Menzaque.
- ***EDPs no Lineales en el Sistema Vasculor*** - Nonlinear PDEs. IMPA, Río de Janeiro. Junio de 2016. Autores: C. Saavedra Fresia, F. Menzaque.
- ***Estudio de la dinámica del fluido en las arterias grandes*** - 6° Escuela Argentina de Matemática y Biología. La Falda, Cba. Agosto de 2014.  
Autores: C. Saavedra Fresia, F. Menzaque.
- ***Modelado del flujo y la presión en el sistema vascular***  
1° Encuentro Científico de Investigadores de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. UNT. Mayo 2012. Autores: C. Saavedra Fresia, F. Menzaque.
- ***Dinámica de la onda de pulso en las arterias sistémicas***  
5° Escuela Argentina de Matemática y Biología. La Falda, Cba. Julio de 2012.  
Autores: C. Saavedra Fresia, F. Menzaque.
- ***Lax-Wendroff aplicado al sistema vascular***  
IV Congreso Latinoamericano de Matemáticos. Universidad Nacional de Córdoba, Cba. Agosto de 2012.  
Autores: C. Saavedra Fresia, F. Menzaque.

## Becas

- Subsidio para finalización de tesis de Maestría  
Período: Marzo 2017 - Agosto 2017. Resolución N°: 2558 2016 - Otorgada por la Secretaría de Ciencia, Arte e Innovación Tecnológica - UNT.
- Beca para Maestría  
Período: 01-08-11 al 31-07-13. Resolución N°: 1397/11. Otorgada por Secretaría de Ciencia y Técnica - UNT.
- Becas para cursar la Maestría en Matemática de la FaCET.  
Período: 01-10-08 al 31-09-09 y de 01-10-09 al 31-09-10. Resoluciones N°: 3011 008 y 3069 009 respectivamente. Otorgada por Rectorado - UNT.

Dedicada a mis hijos del corazón...  
Mauricio, Indiana y Magali.

Agradezco a quienes confiaron, apoyaron y  
más de una vez renovaron mi energía  
para poder concluir este proyecto.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Breve reseña histórica</b>	<b>VI</b>
<b>Motivación del problema</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. La biomecánica . . . . .	4
1.2. Modelado Matemático . . . . .	5
1.3. Descripción general de la circulación sanguínea . . . . .	5
1.3.1. Presión arterial en la circulación mayor . . . . .	8
1.4. Características de la red arterial sistémica . . . . .	10
1.4.1. Estructura de las arterias . . . . .	10
1.5. Aplicaciones clínicas . . . . .	15
<b>2. Dinámica del fluido en una arteria</b>	<b>17</b>
2.1. Dinámica del flujo sanguíneo . . . . .	17
2.1.1. Consideraciones en una arteria . . . . .	17
2.1.2. Ecuaciones de momento y continuidad . . . . .	19
2.2. Modelo unidimensional . . . . .	26
2.2.1. Modelo 1-D con tres incógnitas . . . . .	26
2.2.2. Modelo 1-D con dos incógnitas . . . . .	28
2.3. Forma conservativa del modelo . . . . .	30
2.4. Análisis del Sistema . . . . .	31
2.5. Adimensionalización de las ecuaciones . . . . .	31
2.6. Conclusiones . . . . .	33
<b>3. Dinámica del fluido en el árbol arterial</b>	<b>34</b>
3.1. Condiciones de borde . . . . .	34
3.1.1. Condición de borde de entrada . . . . .	35
3.1.2. Condiciones de bifurcación . . . . .	36
3.1.3. Condición de borde de salida . . . . .	37
3.2. Conclusiones . . . . .	43

<b>4. Métodos Numéricos</b>	<b>44</b>
4.1. Diferencias Finitas . . . . .	44
4.1.1. Construcción de la malla . . . . .	44
4.1.2. Representación en diferencias . . . . .	45
4.2. Elementos Finitos . . . . .	49
4.3. Volúmenes Finitos . . . . .	51
4.4. Análisis de esquemas numéricos . . . . .	55
4.4.1. Consistencia . . . . .	55
4.4.2. Estabilidad . . . . .	56
4.4.3. Convergencia . . . . .	60
4.5. Conclusiones . . . . .	61
<b>5. Implementación Numérica</b>	<b>62</b>
5.1. Método de Lax-Wendroff . . . . .	62
5.2. Implementación en el árbol arterial . . . . .	64
5.2.1. Interior de la arteria . . . . .	65
5.2.2. Condición de borde en la entrada a la aorta . . . . .	66
5.2.3. Condición de borde de salida . . . . .	67
5.2.4. Condiciones de bifurcación . . . . .	68
5.3. Conclusiones . . . . .	84
<b>6. Resultados y conclusiones</b>	<b>85</b>
6.1. Características del modelo . . . . .	85
6.2. Variación de los parámetros . . . . .	86
6.2.1. Módulo de Young . . . . .	87
6.2.2. Gasto cardíaco . . . . .	87
6.2.3. Período del ciclo cardíaco . . . . .	87
6.3. Conclusiones . . . . .	89
6.3.1. Perspectivas . . . . .	90
<b>Apéndices</b>	<b>92</b>
<b>A.</b>	<b>92</b>
A.1. Datos . . . . .	92
A.2. Constantes arterias . . . . .	93
A.3. Condición inicial . . . . .	94
A.4. Calculo del área de la sección transversal y el flujo en el tiempo $n + 1$ .	95
A.5. Calculo del área de la sección transversal y el flujo en el tiempo intermedio	97
<b>B.</b>	<b>98</b>
B.1. Número de Reynolds . . . . .	98
B.2. Forma conservativa del modelo . . . . .	99
B.3. Análisis del sistema . . . . .	100
B.4. Ley de Laplace - Tensión circunferencial . . . . .	101
B.5. Método de las características . . . . .	102
B.5.1. Analisis curvas características . . . . .	103

B.6. Dominio de dependencia - zona de influencia . . . . .	104
B.7. Vector tensión y tensor de tensiones . . . . .	107
B.8. Modelo básico de Leyes de Conservación escalar . . . . .	109
B.9. Sistemas de Leyes de Conservación . . . . .	111
B.10. Sistema de leyes de conservación hiperbólico lineal . . . . .	112
B.11. Análisis dimensional . . . . .	112
B.11.1. Principio de la homogeneidad dimensional . . . . .	113
B.12. Elección de las funciones de aproximación. . . . .	114
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>

# Resumen

El sistema circulatorio está compuesto por corazón, arterias, venas, capilares entre otros. En particular, en la circulación mayor (o circulación sistémica) las arterias son las encargadas de llevar desde el corazón, sangre oxigenada y nutrientes a las demás partes de cuerpo (órganos, tejidos y músculos).

Por su parte, en cada contracción ventricular el corazón expulsa la sangre al sistema circulatorio y provoca una distensión de la porción inicial de la aorta, que se propaga en forma de onda perdiendo intensidad al desplazarse hacia abajo a lo largo de las paredes arteriales. Este cambio en la forma de la onda es resultado de los cambios en la geometría y la estructura de las arterias debido a las reflexiones que surgen por la forma cónica de las arterias, por las bifurcaciones y por la misma resistencia del árbol arterial.

Si bien el flujo y la presión en las arterias sistémicas se pueden modelar usando un amplio espectro de aproximaciones. Elegir la adecuada para un modelo dado depende de las preguntas que se quieran responder, y aunque es posible desarrollar modelos en 3D basados en principios físicos fundamentales, su implementación puede ser compleja con resultados que en general no se pueden obtener en tiempo real.

Este trabajo consiste en analizar un modelo unidimensional no lineal que reproduzca de manera satisfactoria el comportamiento de la onda de pulso y analizar las simplificaciones además de las consideraciones respecto al interior y borde de una arteria. Se consideran las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen el movimiento del fluido en una arteria dada, el movimiento de las paredes de la arteria y la interacción del fluido con las paredes (ecuaciones de momento y continuidad). Para resolverlas se implementa el método de Lax Wendroff que es un método en diferencias finitas de 2 pasos.

La tesis se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se introducen las bases para el estudio del flujo y la presión en el sistema vascular, como el concepto de la biomecánica y en particular el de la hemodinamia. Se expone la importancia del modelado matemático en particular el numérico en la comprensión fisiológica, diagnóstico y desarrollo de prótesis.

Además se describe en forma general el sistema cardiovascular y la circulación sanguínea como también las características de la red sistémica de acuerdo a la estructura de las arterias mediante las propiedades geométricas y de la pared arterial. Finalmente se mencionan algunas aplicaciones clínicas.

En el capítulo 2 se presentan los principios o leyes físicas que gobiernan a la onda de pulso a lo largo de una arteria, las relaciones entre las variables que caracterizan el fenómeno y finalmente el modelo matemático formado por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

En el capítulo 3 se analiza cómo extender el modelo del capítulo anterior a una red arterial, para lo que se consideran las condiciones en la entrada, salida y bifurcaciones.

En el capítulo 4 se describen las opciones para la discretización del dominio del problema, ya que la discretización es el primer paso para calcular la aproximación numérica de la solución que se busca.

En el capítulo 5 se analiza la aplicación del método numérico Lax-Wendroff de dos pasos para resolver problema planteado en el Capítulo 3.

En el capítulo 6 se enuncian las consideraciones y simplificaciones hechas en este trabajo. Se muestra también la influencia de algunos parámetros para lo que se realizaron simulaciones en Octave<sup>1</sup>. Finalmente se propone algunas líneas de investigación en este campo.

En los apéndices, se muestran partes de algunos de los programas implementados y se desarrollan conceptos mencionados en el trabajo, respectivamente.

---

<sup>1</sup>Octave o GNU Octave es un programa y lenguaje de programación para realizar cálculos numéricos. Es considerado el equivalente libre de MATLAB.

# Breve reseña histórica

Los textos tradicionales muestran un conocimiento sobre el pulso arterial, pero proporcionan poca información sobre la mecánica de la onda de pulso, lo que no es llamativo ya que fueron desarrollados milenios antes de la disciplina de la mecánica.

**Galen** (129-210 AD) escribió un libro sobre la predicción del pulso en el que describe 27 variedades de pulsos y sus significados. También informa experimentos de los cuales concluye que las arterias están llenas de sangre. Además llevó a cabo experimentos que lo convencieron de la propiedad pulsátil del corazón que se extiende desde el corazón por las paredes de las arterias pero concluyeron erróneamente que las arterias se expanden como fuelles.

La comprensión moderna del sistema cardiovascular comienza con el trabajo de **William Harvey** (1578-1657) quien publicó su descubrimiento de la circulación de la sangre en (*Una disquisición anatómica sobre el movimiento del corazón y la sangre en los animales*).

Desde ese trabajo, antes de la invención del microscopio, es cierto que Harvey nunca vio los capilares. Solo dijo que debían ser pequeños vasos los que conectan las arterias y las venas. Ésto hace que su descubrimiento sea aún más notable y un hito de razonamiento deductivo, basado en observaciones cuidadosas y una aplicación muy temprana de la conservación de la masa.

En lo que concierne al pulso arterial, Harvey pareció estar de acuerdo con trabajos anteriores sobre que el pulso aparece en todas las arterias simultáneamente, apoyando su afirmación con una cita de Aristóteles<sup>2</sup>.

**Giovanni Borelli** (1608-1679) conocido como el padre de la bioingeniería por sus estudios en músculos, sistemas cardiovascular, respiración, reproducción y muchos otros aspectos del cuerpo, entendió claramente el efecto capacitivo de las arterias elásticas para el flujo sanguíneo (ahora conocido como efecto Windkessel).

**Stephan Hales** (1677-1746) combinó la investigación científica con el servicio eclesiástico. En 1733, se publicó una serie de trabajos con ensayos estadísticos sobre Haemastatics (experimentos acerca de la fuerza de la sangre). Eran observaciones so-

---

<sup>2</sup>Aristóteles dijo: la sangre de todos los animales palpita dentro de sus venas, y por el pulso es enviado a todas partes simultáneamente.

bre la mecánica del sistema cardiovascular que incluyen las primeras medidas de presión arterial en vivo. En uno de los experimentos, analizó la velocidad a la que se expulsa la sangre desde el corazón de una yegua de 10 años y cómo se alteraba por la elasticidad de las arterias.

**Leonard Euler** (1707-1783) dio origen a la mecánica cuantitativa, en particular a la del sistema cardiovascular. En 1755 presentó el ensayo 'On the flow of blood in the arteries' donde estableció las ecuaciones unidimensionales de conservación de masa y momento en un tubo flexible.

**Thomas Young** (1773-1829) fue quien en su trabajo 'Croonian lecture on the functions of the heart and the arteries' estableció la fórmula correcta para la velocidad de la onda en una arteria pero sin dar su deducción. Luego, en otro trabajo dio una deducción extremadamente difícil de seguir que se basó en una analogía con la deducción de Newton de la velocidad del sonido en un gas compresible.

**Joseph Fourier** (1768-1830) no contribuye directamente a la mecánica de las arterias pero su trabajo más notable en 1822 involucra la física del calor, donde afirma que las funciones periódicas se pueden expresar como la superposición de series infinitas de funciones sinusoidales y su observación fue de mucho impacto en la hemodinamia arterial. Esta afirmación no es del todo cierta porque, según Dirichlet, no vale para todas las funciones periódicas sino que vale para las funciones regulares a trozos con un número finito de discontinuidades.

**Louis Poiseuille** (1799-1869) fue quien desarrolló la ley para el flujo en tubos aunque nunca observó las arterias debido a la naturaleza pulsátil del flujo arterial y su compleja anatomía (de las curvas y bifurcaciones). Se convirtió en el punto de referencia para comparar los flujos en tubos.

**Ludwig Hagen** (1797-1884) ingeniero hidráulico alemán, que casi al mismo tiempo que Poiseuille hizo experimentos similares con el flujo de agua en tubos cilíndricos de diámetro 2.55, 4.01 y 5.91 mm que se publicó en 1839.

**George Riemann** (1826-1866) no trabajó en mecánica arterial, pero hizo una contribución muy importante cuando publicó una solución para sistemas ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicos en 1860. Su trabajo proporcionó una solución general para toda una clase de ecuaciones diferenciales parciales no lineales observando que a lo largo de las direcciones definidas por los valores propios de la matriz de coeficientes, es decir las ecuaciones diferenciales parciales se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Moens** (1846-1891) y **Korteweg** (1848-1941) publicaron un trabajo muy útil sobre la velocidad de la onda en las arterias. El análisis de Korteweg muestra que la velocidad de la onda está determinada tanto por la elasticidad de la pared del tubo como de la compresibilidad del fluido. En el caso de la sangre (que es efectivamente

incompresible) en tubos de paredes delgadas, esto reduce a relación generalmente conocida como la ecuación de Moens-Korteweg para la velocidad de la onda.

**E. J. Marey** (1830-1904) incluyó en su libro de medicina un capítulo sobre el flujo sanguíneo arterial "La Circulación de Sangre en el Estado Fisiológico y en la Enfermedad".

**Otto Frank** (1865-1944) fue uno de los gigantes de la fisiología cuantitativa. Trabajó principalmente en el sistema cardiovascular y su trabajo ha tenido un efecto duradero en la práctica de cardiología. Su primera contribución a la mecánica arterial fue la formulación matemática del Efecto Windkessel en su trabajo de 1899 "Las bases del pulso arterial" donde consideró la arteria como un solo compartimiento y utilizó la conservación de la masa para analizar su cambio de volumen durante la diástole.

**John Womersley** (1907-1958) tiene asociado el análisis de las ondas en tubos elásticos. Gran parte de la teoría fue derivada de Gomelka en 1883, que incluye los efectos de la inercia de la pared en la velocidad de la onda.

Parker[19] concluye esta reseña al mencionar que 1960 fue el año de publicación de la primera edición de "Blood Flow in Arteries" de McDonald (1917-1973). La primera edición de ese libro tuvo una circulación limitada, pero una gran influencia. Ese libro marca el comienzo de la modernidad en la era de la mecánica arterial que, posteriormente fue revisado y ampliado como "McDonald's Blood Flow en Arteries", actualmente en su 5ª edición.

# Motivación del problema

Este trabajo está dentro del campo de la biomecánica, que tiene como objetivo utilizar leyes de la mecánica junto con herramientas matemáticas para elaborar modelos del comportamiento de estructuras biológicas como ser, desarrollo de estructuras óseas o fibras musculares, estudio del flujo sanguíneo o pulmonar o el análisis de los distintos órganos de un ser vivo.

La modelización, como herramienta matemática, permite hacer simulaciones para predecir el estado futuro del elemento que se estudia. Además, en los últimos años la ciencia computacional ha experimentado desarrollos explosivos lo que generó avances en muchas áreas de la investigación científica. Es una actividad altamente multidisciplinar, donde el empirismo, el ensayo y la intuición son partes importantes.

En particular, los modelos para el flujo a lo largo de arterias elásticas se han estudiado de manera intensiva durante muchos años. La gran cantidad de modelos propuestos se podrían clasificar según su dimensión. El modelo que se considere depende del fenómeno que se quiere estudiar y de las simplificaciones que se quieran considerar que van desde modelos 3D para la interacción fluido estructura a modelos simplificados o de orden reducido y de modelos de fluidos no-newtonianos complejos a modelos de fluidos newtonianos idealizados.

El estudio de la forma de onda es importante ya que su cambio tiene significado clínico. Por ejemplo, la onda dicrótica (segunda oscilación que se observa durante el ciclo cardíaco) disminuye en la gente que sufre de diabetes o enfermedades vasculares como la arteriosclerosis. La onda dicrótica aparece como resultado de la reflexión de la onda y porque una pequeña cantidad de flujo sanguíneo vuelve al ventrículo izquierdo antes que las válvulas del corazón se cierren completamente.

Además el estudio de la onda dicrótica, la comparación de datos de flujo y presión en diferentes lugares podrían usarse para diagnosticar por ejemplo, la ubicación de una estenosis (término utilizado para denotar la estrechez de un conducto). Por otro lado, los perfiles de las ondas de presión y flujo sanguíneo varían significativamente aún en personas sanas.

Los estudios de cómo los parámetros del modelo deben cambiar reproducen los datos del flujo patológico que podrían ayudar a entender mejor la condición patológica.

El modelado de estos problemas interdisciplinarios permite en este caso, utilizar el lenguaje matemático para cuantificar un fenómeno natural tal como la circulación sanguínea.

Dada la complejidad matemática de estos modelos, salvo en situaciones muy particulares en las cuales se pueden obtener soluciones analíticas, requieren de su resolución numérica con lo cual se hace necesario presentar las diferentes técnicas de discretización. Este tópico tiene alta incidencia en la factibilidad de resolver problemas numéricos ya que de acuerdo al problema en mano y a los recursos computacionales disponibles muestran las diferentes alternativas para su resolución.

# Índice de figuras

1.1.	<i>Distribución de la sangre (en porcentaje de la sangre total) en los distintos componentes del sistema circulatorio. Guyton y Hall[9]. . . . .</i>	6
1.2.	<i>Estructura del corazón y trayecto del flujo sanguíneo a través de las cavidades cardíacas y de las válvulas cardíacas. Guyton y Hall[9]. . . . .</i>	7
1.3.	<i>Cambios en la onda de pulso. <b>S</b>(punto de inicio) El punto de inicio de la onda de pulso arterial. La válvula aórtica se abre y la sangre del ventrículo izquierdo se libera. <b>P</b>(Onda de percusión) La onda causada por la expulsión del ventrículo izquierdo que aumenta la pared arterial linealmente. <b>C</b>(Incisura) Punto final de la fase sistólica, entonces se cierra la válvula. <b>D</b>(Onda dicrotíca) Onda oscilatoria reflectante se produjo por el choque de sangre en la válvula aórtica por una presión arterial de la aorta. Guyton y Hall[9]. . . . .</i>	10
1.4.	<i>Arterias sistémicas. Los números en la figura están referidos en la tabla 1.1. Las ramas con los mismos números son idénticos y se las modela una vez. El flujo sanguíneo entra a las arterias desde el punto A y salen por los puntos marcados con B. Ottesen[18]. . . . .</i>	11
1.5.	<i>Cambios de perfil de la presión aórtica en la arteriosclerosis, estenosis aórtica, conducto arterioso permeable e insuficiencia aórtica. Guyton y Hall[9]. . . . .</i>	15
2.1.	<i>Arteria típica. Ottesen[18]. . . . .</i>	18
2.2.	<i>Superficie sobre la que se integra en la ecuación (2.6) que se puede separar en dos. La primera integra sobre la circunferencia de radio <math>R</math> para <math>\theta \in [0, 2\pi]</math>. La segunda integra a lo largo de la arteria, <math>x \in [0, L]</math>. Como la arteria es cónica, cada parte infinitesimal está dada por <math>dx'</math>. Ottesen[18]. . . . .</i>	22
3.1.	<i>Rama binaria simple que consiste en una arteria padre y dos arterias hijas. Ottesen[18]. . . . .</i>	35
3.2.	<i>Flujo de entrada de la aorta en función del tiempo en tres períodos. Olufsen[17].</i>	36
3.3.	<i>Modelo de resistencia pura. San[20]. . . . .</i>	38
3.4.	<i>El modelo de Windkessel de tres elementos que se usa para predecir la impedancia en las terminales de las arterias grandes. Las resistencias <math>R_1</math> y <math>R_2</math> y el capacitor <math>C_T</math> se deben estimar en cada punto de truncamiento. . . . .</i>	38
3.5.	<i>Sub-árboles pequeños al final de cada arteria terminal. Olufsen[17]. . . . .</i>	42
4.1.	<i>Grilla típica rectangular. Anderson[1] . . . . .</i>	45
4.2.	<i>Placa calentada con una malla de espaciamentos diferentes, dos materiales y diversas condiciones de frontera. Chapra[6]. . . . .</i>	48

4.3.	<i>Comparación entre el método por diferencias finitas y el método del volumen de control.</i> Chapra[6]. . . . .	48
4.4.	<i>Malla de elementos finitos de la pared arterial.</i> Chapra[6] . . . . .	50
4.5.	<i>Ejemplos de discretización.</i> Chapra[6]. . . . .	51
4.6.	<i>Esquema de la malla de volumen finito.</i> Cendón[24]. . . . .	52
4.7.	<i>Representación de una función constante a trozos <math>w^n(x)</math> en un tiempo <math>t^n</math>.</i> Cendón[24]. . . . .	53
4.8.	<i>Proceso de pasar de <math>w_i^n</math> a <math>w_i^{n+1}</math> usando un método explícito en el tiempo.</i> Cendón[24]. . . . .	54
4.9.	<i>Representación de Fourier del error numérico.</i> Nigro[15]. . . . .	58
4.10.	<i>Caso en el que no se cumple la condición CFL.</i> Morton[13]. . . . .	60
5.1.	<i>Mallado espacial y temporal del método de Lax-Wendroff.</i> Anderson[1] . . . .	63
5.2.	<i>Nodos en el interior de la arteria.</i> Ottesen[18]. . . . .	65
5.3.	<i>El círculo denota el punto fantasma marcado con un círculo en la entrada a la aorta.</i> Olufsen[17]. . . . .	66
5.4.	<i>Borde derecho.</i> Olufsen[17]. . . . .	67
6.1.	<i>Ajuste de datos para <math>\frac{Eh}{r_0}</math> donde <math>E</math> es el módulo de Young, <math>h</math> el grosor de la pared y <math>r_0</math> el radio, a la función exponencial en 6.1.</i> Ottesen[18] . . . .	87
6.2.	<i>Flujo en la aorta en función del tiempo para valores cada vez más grandes de módulo de Young . . . . .</i>	88
6.3.	<i>Flujo en la aorta en función del tiempo para valores cada vez más grandes del gasto cardíaco (a comprobar numéricamente). . . . .</i>	88
6.4.	<i>Flujo en la aorta en función del tiempo para valores cada vez más grandes del período. . . . .</i>	89
A.1.	<i>Datos del problema. . . . .</i>	92
A.2.	<i>Datos. Características para cada arteria considerados de Ottesen[18]. . . . .</i>	93
A.3.	<i>En este script se calculan algunas constantes que dependen de cada arteria en el tiempo <math>n</math>. . . . .</i>	93
A.4.	<i>Funciones a partir de las cuales se realizan los cálculos y los datos necesarios. . . . .</i>	94
A.5.	<i>Condición inicial. En este script se calcula el valor del flujo y la presión para cada arteria en el tiempo <math>t = 0</math>. . . . .</i>	94
A.6.	<i>Calcula el flujo y la presión para cada arteria en el tiempo <math>n + 1</math>. . . . .</i>	95
A.7.	<i>Datos y scripts necesarios para los cálculos. . . . .</i>	96
A.8.	<i>Calcula los valores de flujo y del área de la sección transversal para el tiempo <math>n + 1/2</math>. . . . .</i>	97
B.1.	<i>Ley de Laplace . . . . .</i>	101
B.2.	<i>El intervalo de dependencia <math>[P, Q]</math> del punto <math>R</math>(izquierda) y el dominio <math>\bar{B}</math> de influencia del punto <math>P \in \gamma</math>. Las curvas <math>\alpha</math> y <math>\beta</math> son las curvas características. . . . .</i>	103
B.3.	<i>Dominio de dependencia - Zona de influencia del punto <math>P</math>.</i> Nigro[15]. . . . .	105
B.4.	<i>Dominio de dependencia para el caso hiperbólico.</i> Causon[5]. . . . .	105

B.5. Dominio de dependencia para el caso parabólico. Causon[5]. . . . . 106

B.6. Dominio de dependencia para el caso elíptico[5]. . . . . 106

B.7. *Tensiones en un punto en el espacio. Las caras positivas son las que se muestran. Las caras negativas son las opuestas. Mazumdar[12]. . . . . 107*

B.8. Tensión en un punto del espacio. Las caras que se muestran son las positivas. Mazumdar[12]. . . . . 109

# Capítulo 1

## Introducción

En este primer capítulo se introducen las bases para el estudio del flujo y la presión en el sistema vascular.

En la sección 1 se presenta el concepto de biomecánica como una ciencia multidisciplinar y se hace incapié en una de sus ramas: la hemodinamia.

En la sección 2 se expone la importancia del modelado matemático, en particular el numérico para la comprensión fisiológica, diagnóstico y desarrollo de prótesis.

En la sección 3 se describe en forma general el sistema cardiovascular y la circulación sanguínea para llegar al concepto de onda de pulso que será la base del estudio en este trabajo.

En la sección 4 se detallan las características de la red sistémica de acuerdo a la estructura de las arterias mediante las propiedades geométricas.

Por último, en sección 5 se destacan algunas aplicaciones clínicas.

### 1.1. La biomecánica

Fung[8], uno de los fundadores de la biomecánica moderna, define la biomecánica como la mecánica aplicada a la biología que busca entender la mecánica de los sistemas vivientes. Más general, es la aplicación del análisis de cualquier sistema dinámico por lo que la mecánica atañe a la termodinámica, la transferencia de calor y de masa, los métodos de cálculo, etc.

En particular, la biomecánica ayuda a entender el normal funcionamiento de un organismo, predecir cambios debido a alteraciones y proponer métodos de intervención artificial. Así también como diagnóstico, cirugías y prótesis que estén asociadas a ella.

Dentro de la biomecánica, la parte que tiene por objetivo estudiar el movimiento del flujo sanguíneo en el sistema vascular se llama *hemodinamia*. Este estudio no se focaliza únicamente en el movimiento de la sangre (como obtener los campos de velocidad y presión) sino que también en las fuerzas que genera dicho flujo en los elementos sobre los que interactúa, como los vasos sanguíneos o el corazón.

Los trastornos hemodinámicos y las anomalías producidas en los tejidos vasculares son las alteraciones más características que ponen de manifiesto la existencia de una patología. Estos efectos se encuentran correlacionados, en el sentido de que una remodelización en la estructura de una arteria conlleva una modificación en la propagación del pulso sanguíneo a través de ella y, una modificación en la naturaleza del flujo (por ejemplo, de laminar a turbulento) conduce a daños celulares y a posibles inflamaciones de la pared vascular. Por lo que hay que tener en cuenta la relación fluido-estructura. Es decir, la interacción entre la sangre y los vasos sanguíneos define también peculiaridades hemodinámicas del sistema circulatorio lo que dictamina el estado y la integridad de una buena circulación.

## 1.2. Modelado Matemático

En la ciencia médica, debido a la complejidad física y a la difícil accesibilidad experimental de los sistemas biológicos, el modelado matemático juega un papel muy importante. El progreso en la matemática analítica y computacional mejora la interpretación de los sistemas vivientes y las nuevas técnicas como la resonancia magnética para las imágenes médicas han dado lugar a nuevas perspectivas de salud en el que el modelado matemático se vuelve cada vez más importante para predecir el comportamiento del cuerpo humano como respuesta a cambios internos o externos.

En particular, los modelos numéricos permiten la predicción, diagnóstico y tratamiento de enfermedades vasculares tal como lo menciona Van de Vosse<sup>1</sup>. Pero para que un modelo incluya todas las propiedades de un fluido dinámico en las arterias grandes<sup>2</sup> se tendría que pensar en un modelo tridimensional.

Sin embargo, Ottesen[18] menciona que en situaciones clínicas, la presión está medida solamente en ubicaciones discretas en una dimensión, lo que justifica el propósito de este trabajo es estudiar un modelo que pueda predecir fenómenos observables usando tales mediciones es razonable simplificarlo a una dimensión. Además esta restricción lo hace computacionalmente factible.

## 1.3. Descripción general de la circulación sanguínea

Esta sección tiene como referencia al libro de Guyton y Hall, *Tratado de Fisiología Médica 13va edición*.

La circulación sanguínea, como se ve en la Figura 1.1, consta de dos partes, la circulación sistémica y la circulación pulmonar. La parte derecha envía sangre pobre de

---

<sup>1</sup>Mathematical modelling of the cardiovascular system. Publicado en: Journal of Engineering Mathematics 47, 175-183, 2003.

<sup>2</sup>Se entiende por arterias grandes a las arterias con un radio inicial  $r$  tal que  $r > 0,175 \text{ cm}$ .

oxígeno a través de las arterias pulmonares hacia la red vascular del pulmón (circulación menor). La parte izquierda envía sangre oxigenada desde la arteria aorta al resto del cuerpo.

Como la circulación sistémica aporta el flujo sanguíneo (suministrando nutrientes) a todos los tejidos del organismo excepto los pulmones, también se la conoce como circulación mayor o circulación periférica. La trayectoria de la circulación mayor es mucho más larga y está mucho más ramificada que la pulmonar. Por ello, las presiones necesarias para cada una de ellas son diferentes, siendo mayores en la primera.

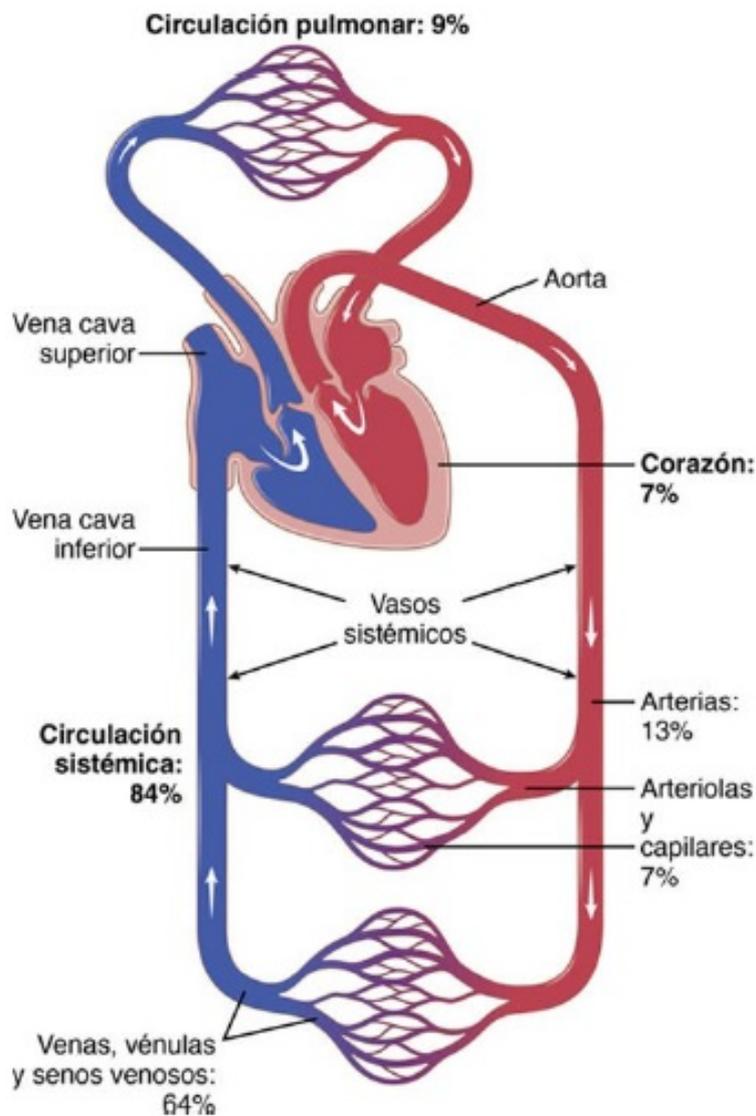


Figura 1.1: Distribución de la sangre (en porcentaje de la sangre total) en los distintos componentes del sistema circulatorio. Guyton y Hall[9].

La circulación mayor está formado por el corazón, arterias, venas y capilares. El corazón actúa como una bomba aspirante (parte derecha) e impelente (parte izquierda) y es el encargado de crear el impulso necesario para que la sangre irrigue los tejidos. Ambas partes funcionan simultáneamente y se encuentran conectados a dos sistemas distintos de distribución, como lo muestra la Figura 1.2.

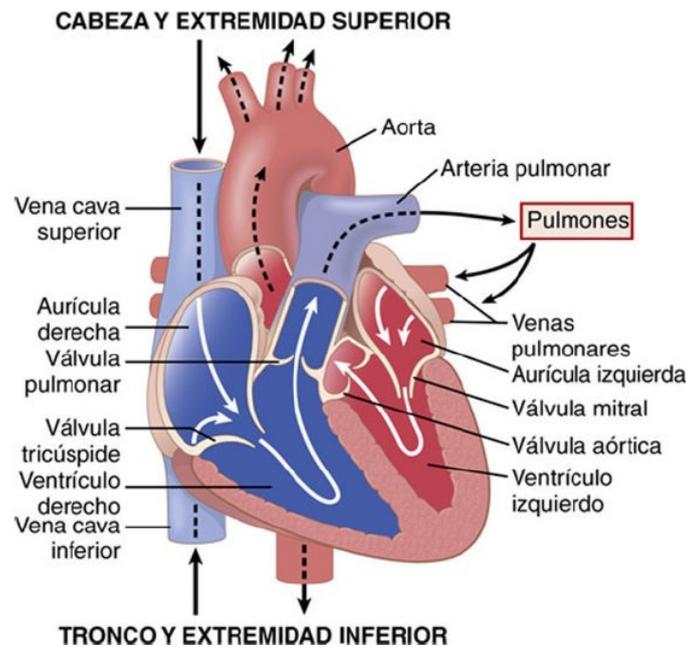


Figura 1.2: Estructura del corazón y trayecto del flujo sanguíneo a través de las cavidades cardíacas y de las válvulas cardíacas. Guyton y Hall[9].

La función de las arterias consiste en transportar la sangre con una presión alta hacia los tejidos, motivo por el cual las arterias tienen paredes vasculares fuertes y un flujo sanguíneo importante con una velocidad alta.

Las arteriolas son las últimas ramas pequeñas del sistema arterial y actúan controlando los conductos a través de los cuales se libera la sangre en los capilares. Las arteriolas tienen paredes musculares fuertes que pueden contraerse por completo o que pueden, al relajarse, dilatar los vasos varias veces, con lo que pueden alterar mucho el flujo sanguíneo en cada lecho tisular en respuesta a sus necesidades.

La función de los capilares consiste en el intercambio de líquidos, nutrientes, electrolitos, hormonas y otras sustancias en la sangre y en el líquido intersticial. Para cumplir esta función, las paredes del capilar son finas y tienen poros capilares diminutos, que son permeables al agua y a otras moléculas pequeñas. Luego, las vénulas recogen la sangre de los capilares y después se reúnen gradualmente formando venas de tamaño progresivamente mayor.

Las venas funcionan como conductos para el transporte de sangre que vuelve desde las vénulas al corazón; igualmente importante es que sirven como una reserva de sangre extra. Como la presión del sistema venoso es muy baja, las paredes de las venas son finas. Aún así, tienen una fuerza muscular suficiente para contraerse o expandirse y, de esa forma actuar como reservorio controlable de sangre extra, mucha o poca dependiendo de las necesidades de la circulación.

Es importante resaltar que, de forma rigurosa, no se puede hablar de una única red de vasos sanguíneos sino de una red de vasos asociada a cada actividad ya que el número de capilares abiertos no siempre es el mismo, depende de la demanda de sangre de un músculo o un órgano con respecto al esfuerzo que esté desarrollando y por lo tanto de la energía que tenga que emplear. Luego, cuando un órgano está en situación de trabajo elevado muchos de los capilares que en situación normal estaban cerrados ahora se abren para que circule también sangre por ellos. Ésta es una forma inteligente del cuerpo humano para poder incrementar el caudal de flujo sin tener que elevar demasiado la presión ya que al aumentar el número de capilares funcionales aumenta el área total de éstos, por lo que disminuye la resistencia y aumenta el caudal para un mismo gradiente de presión.

En este trabajo no se considera el fenómeno mencionado para los capilares ya que el modelo en estudio comprende las primeras veintitres generaciones de arterias (arterias grandes), donde la primera de ellas comprende a la aorta y las arterias ilíacas, la segunda y tercera generación contienen a las bifurcaciones de esos conductos, .

### 1.3.1. Presión arterial en la circulación mayor

Si se toma como punto de partida el ventrículo izquierdo, la sangre limpia y oxigenada es impulsada a la arteria aorta<sup>3</sup> por una contracción muscular del ventrículo llamada sístole. Simultáneamente a esto, se cierra la válvula mitral y se abre la aorta. El corazón tiene un instante de reposo en el que se dilata, lo que se conoce como diástole<sup>4</sup>.

El movimiento de la sangre por los vasos es bastante complejo. La pared de la aorta, análogamente a todas las arterias, posee mucha elasticidad: su módulo de Young es  $10^5$  veces mayor que el módulo de Young de los metales. Por esta causa, cuando la sangre entra a la aorta, la misma comienza a ensancharse y sigue ensanchándose hasta el momento en que la afluencia de sangre cesa. Acto seguido, las fuerzas elásticas de la pared ensanchada de la aorta, tendiendo a hacerla regresar a las dimensiones iniciales, expulsan la sangre a la porción de la arteria más alejada del corazón (la corriente inversa está prevenida por una válvula). Esta porción de arteria se ensancha y todo se

---

<sup>3</sup>La presión media en la aorta es alta, en torno a los 100 *mmHg*.

<sup>4</sup>Como el bombeo cardíaco es pulsátil, la presión arterial alterna entre una presión sistólica de 120 *mmHg* y una diastólica de 80 *mmHg*.

repite de nuevo.

Para poder manejar este fluido sanguíneo se requiere de una fuerza capaz de vencer la resistencia a la circulación. Dicha fuerza es producto de la actividad cíclica del corazón la cual determina una presión que se denomina presión arterial.

La presión arterial ejerce una fuerza de distensión que empuja la pared de la arteria hacia afuera, y es contrarrestada por una fuerza de contención que corresponde, precisamente, a la tensión de la pared del vaso. Esa distensión que comienza en la porción inicial de la aorta y se propaga en forma de onda es la **onda de pulso** que va perdiendo intensidad al desplazarse hacia abajo a lo largo de las paredes arteriales y que va sufriendo cambios en su forma como resultado de los cambios en la geometría y la estructura de las arterias.

La **onda de pulso** orienta sobre la frecuencia cardíaca permitiendo establecer si es normal, menor (bradicardia) o mayor (taquicardia). Estas irregularidades indican trastornos en el ritmo de las contracciones ventriculares (extrasístoles, arritmia ventricular). Además, su evaluación orienta también acerca de la calidad de la pared arterial ya que la onda de pulso depende no sólo de la elasticidad de la pared arterial sino también de la fuerza contráctil del miocardio, la altura de esta onda informa acerca de la presión diferencial que clínicamente tiene valor como predictora de riesgo de enfermedad cardiovascular.

La Figura 1.3 muestra los cambios en la onda de pulso en una arteria. Se observa una curva que se eleva y ésta coincide con la expulsión de la sangre durante el sístole ventricular. Una vez que la curva alcanza cierta altura, decae en la parte final del sístole y más rápidamente todavía al iniciarse el diástole. Durante el resto del diástole, la curva desciende lentamente y está interrumpida por una incisura. Ésta es causada por el reflujo de sangre durante el diástole hacia la aorta, reflujo que produce una pequeña distensión aórtica (ya que las válvulas aórticas están cerradas) que se transmiten hacia la periferia, originando la incisura.

En general, cuanto mayor sea el volumen sistólico, más cantidad de sangre deberá acomodarse en el árbol arterial con cada latido y, por lo tanto, mayores serán el aumento y el descenso de la presión durante la diástole y la sístole, con lo que la presión de pulso será mayor. Por el contrario, cuanto menor sea la compliancia del sistema arterial, mayor será el aumento de la presión para un volumen sistólico dado que se bombee hacia las arterias.

El modelo que se analiza en este trabajo permitirá estudiar el cambio de las ondas de presión y de flujo al propagarse a lo largo de la red arterial que se considera.

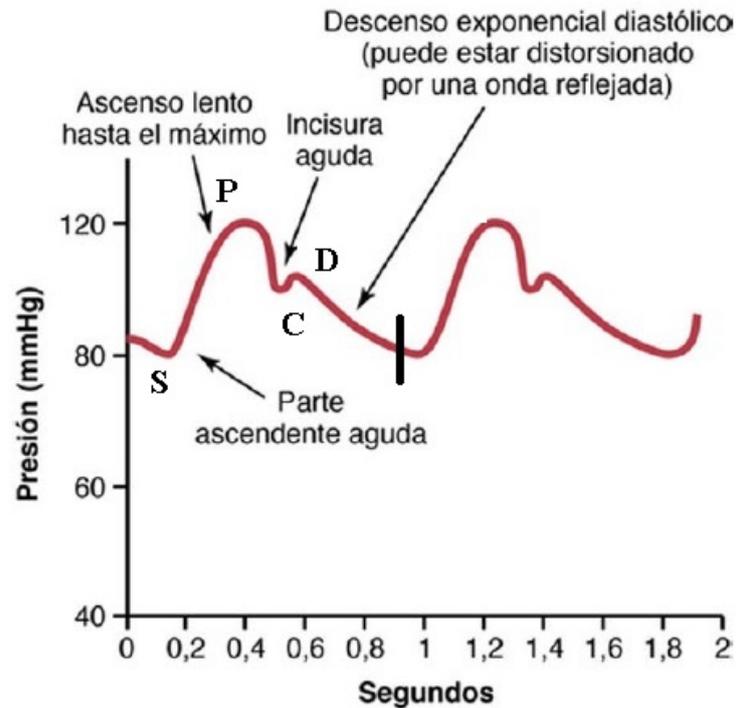


Figura 1.3: Cambios en la onda de pulso. **S**(punto de inicio) El punto de inicio de la onda de pulso arterial. La válvula aórtica se abre y la sangre del ventrículo izquierdo se libera. **P**(Onda de percusión) La onda causada por la expulsión del ventrículo izquierdo que aumenta la pared arterial linealmente. **C**(Incisura) Punto final de la fase sistólica, entonces se cierra la válvula. **D**(Onda dicrótica) Onda oscilatoria reflectante se produjo por el choque de sangre en la válvula aórtica por una presión arterial de la aorta. Guyton y Hall[9].

## 1.4. Características de la red arterial sistémica

### 1.4.1. Estructura de las arterias

Ottesen[18] caracteriza al sistema arterial como una sofisticada red de arterias caracterizada por sus:

- propiedades geométricas (diámetro y longitud) y
- propiedades estructurales (grosor de las paredes y módulo de Young).

#### Propiedades geométricas

En cada bifurcación del árbol arterial se tiene que el área de la sección transversal en la parte superior de cada arteria hija es más pequeña que la de la parte inferior de la arteria padre. Sin embargo, la suma del área de las secciones transversales de las dos arterias hijas es mayor que el área de la sección transversal de la arteria padre.

El modelo estandar para las arterias grandes lo muestra la Figura 1.4 con las dimensiones que se presentan en la Tabla 1.1 de Ottesen[18].

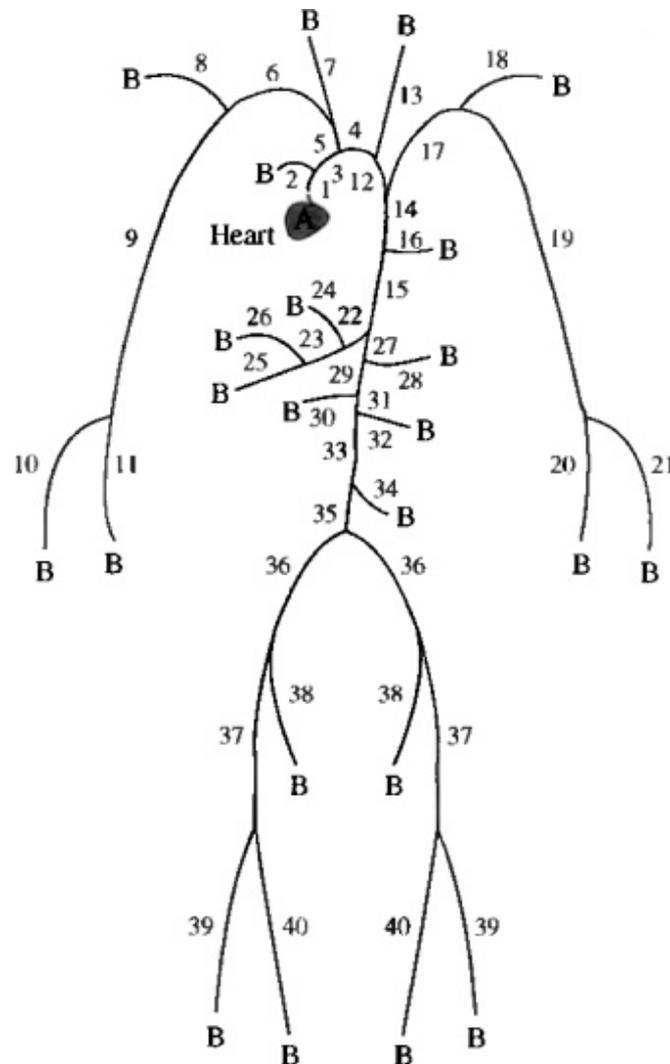


Figura 1.4: Arterias sistémicas. Los números en la figura están referidos en la tabla 1.1. Las ramas con los mismos números son idénticas y se las modela una vez. El flujo sanguíneo entra a las arterias desde el punto A y salen por los puntos marcados con B. Ottesen[18].

Además, supone que:

- La aorta y las arterias ilíaca, femoral, subclaviana y branquial tienen un radio que disminuye a velocidad exponencial constante.
- El cuerpo es simétrico en el sentido de que aquellas arterias que están en ambos lados del cuerpo tienen las mismas dimensiones. Esta simetría proporciona una ventaja computacional porque las entradas a las arterias hijas son idénticas esto es  $q_p = 2q_d$  donde  $q_p$  es el flujo en la arteria padre y  $q_d$  el flujo en la arteria hija.

	Arteria	$L$ [cm]	$r_{top}$ [cm]	$r_{bot}$ [cm]
1	Aorta ascendente	1.00	1.525	1.502
3	Aorta ascendente	3.00	1.502	1.420
4	Arteria aórtica	3.00	1.420	1.342
12	Arteria aórtica	4.00	1.342	1.246
14	Aorta torácica	5.50	1.246	1.124
15	Aorta torácica	10.50	1.124	0.924
27	Aorta abdominal	5.25	0.924	0.838
29	Aorta abdominal	1.50	0.838	0.814
31	Aorta abdominal	1.50	0.814	0.792
33	Aorta abdominal	12.50	0.792	0.627
35	Aorta abdominal	8.00	0.627	0.550
36	Ilíaca externa	5.75	0.400	0.370
37	Femoral	14.50	0.370	0.314
40	Femoral	44.25	0.314	0.200
38	Ilíaca interna	5.75	0.200	0.200
39	Femoral profunda	11.25	0.200	0.200
2	Coronarias	10.00	0.350	0.350
5	Braquiocefálica	3.50	0.950	0.700
6,17	Subclavia der, izq	3.50	0.425	0.407
9,19	Braquial der, izq	39.75	0.407	0.250
10,21	Radial der, izq	22.00	0.175	0.175
11,20	Ulnar der, izq	22.25	0.175	0.175
8,18	Vertebral der, izq	13.50	0.200	0.200
7	Carótida com. der.	16.75	0.525	0.400
13	Carótida com. izq.	19.25	0.525	0.400
16	Intercostales	7.25	0.630	0.500
28	Mesentérica superior	5.00	0.400	0.350
22	Celiac axis	2.00	0.350	0.300
23	Hepática	2.00	0.300	0.250
24	Hepática	6.50	0.275	0.250
25	Gástrica	5.75	0.175	0.150
26	Esplénica	5.50	0.200	0.200
30,32	Renal der, izq	3.00	0.275	0.275
34	Mesentérica inferior	3.75	0.200	0.175

Tabla 1.1: Datos de la longitud y radios de las arterias que se consideran. Ottesen[18].

- Las arterias coronarias, cada una con una sección transversal de área  $A_1$  y longitud  $L$  se puede agrupar en una rama de longitud  $L$  y área de sección transversal  $A_2 = \sqrt{2}A_1$ . Esta relación se basa en permitir que el flujo en la arteria agrupada es dos veces el flujo en la coronaria suponiendo que el flujo es de Poiseuille es decir, es un flujo viscoso con regimen laminar. Esta misma aproximación se aplica en las arterias intercostales.

En este caso, las ramas se juntan para reducir el número de segmentos arteriales. Hay aproximadamente de 10 a 15 arterias intercostales, todas pequeñas. Al modelar cada una de ellas por separado se podría incrementar el tiempo computacional considerablemente.

- Las arterias renales se modelan por separado. Si bien se podría pensar en unir las usando el criterio de las arterias coronarias (ya que están cerca una de la otra) se lo hace por separado debido a la magnitud del flujo de salida.

### Propiedades estructurales de las paredes

Una característica muy importante del aparato vascular es que todos los vasos sanguíneos son distensibles. La naturaleza distensible de las arterias permite acomodarse al gasto pulsátil del corazón<sup>5</sup> y superar las pulsaciones de la presión. Esta capacidad proporciona un flujo de sangre continuo y homogéneo a través de los vasos sanguíneos muy pequeños de los tejidos.

La distensibilidad vascular (o elasticidad vascular) se expresa como el incremento fraccionado del volumen por cada milímetro de mercurio que aumenta la presión, es decir:

$$\text{distensibilidad} = \frac{\text{aumento de volumen}}{\text{aumento de presión} \times \text{volumen original}} \quad (1.1)$$

Las paredes de las arterias son más gruesas y bastante más fuertes que las de las venas (las venas son unas ocho veces más distensibles que las arterias) es decir, un incremento dado de la presión provoca un incremento de sangre ocho veces mayor en una vena que en una arteria de tamaño comparable.

En los estudios hemodinámicos es mucho más importante conocer la compliancia vascular que es la cantidad total de sangre que se puede almacenar en una porción dada de la circulación por cada milímetro de mercurio que aumente la presión que conocer la distensibilidad de cada vaso en particular<sup>6</sup>. Es decir:

$$\text{compliancia vascular} = \frac{\text{aumento de volumen}}{\text{aumento de presión}} \quad (1.2)$$

---

<sup>5</sup>Gasto cardíaco: es la cantidad de sangre que los ventrículos expulsan cada minuto. El gasto cardíaco se modifica al cambiar el volumen que se expulsa en cada latido (volumen de eyección ó volumen sistólico) ó al cambiar la frecuencia cardíaca. Guyton y Hall[9]

<sup>6</sup>Compliancia y distensibilidad son dos conceptos muy diferentes. Un vaso muy distensible que tiene un volumen pequeño puede tener una compliancia mucho menor que un vaso mucho menos distensible que tenga un volumen grande, porque compliancia es igual a distensibilidad por volumen. Guyton y Hall[9]

que Ottesen[18] expresa para una arteria dada como:

$$c = \frac{dV}{dp} \approx \frac{3A_0L}{2} \frac{r_0}{Eh}, \quad (1.3)$$

donde:

- $c$  es la compliancia vascular o flexibilidad de la pared,
- $V$  es el volumen del segmento que se considera,
- $p$  es la presión del flujo sobre la pared,
- $r_0$  es el radio,
- $A_0 = \pi r_0^2$  es el área de la sección transversal,
- $L$  es la longitud
- $E$  el módulo de Young y
- $h$  es el grosor de la pared.

En el caso de la aorta y arterias grandes la capa elástica es mayor y la capa formada por fibras musculares es menor, lo que proporciona características elásticas importantes<sup>7</sup>.

Luego, los modelos de interacción flujo sanguíneo-pared arterial solo incluyen la arteria aorta y unas cuantas decenas de arterias principales porque para el resto de los vasos, los modelos que se estudiarán en este trabajo no serían realistas.

Por otro lado, si bien el corazón impulsa un cierto volumen de sangre, parte de ese volumen queda almacenado en las arterias debido a que la presión produce una extensión radial en éstas. Esto es, las arterias al ser flexibles se deforman aumentando el diámetro y como posteriormente (durante la diástole) el corazón no bombea sangre, en principio se cortarían el flujo sanguíneo. Pero lo que sucede es que la sangre antes almacenada en las arterias ahora es impulsada por éstas. Las arterias se contraen, empleando la energía elástica almacenada durante la sístole en impulsar la sangre, favoreciendo así la continuidad del flujo.

En definitiva la elasticidad de las arterias actúa como un regulador del flujo.

---

<sup>7</sup>En cambio, en las arterias menores y arteriolas es al revés por lo que resultan un tanto más rígidas. El que la pared de las arterias más pequeñas y arteriolas no tengan una naturaleza elástica no significa que no se deformen. Las fibras musculares responden a estímulos nerviosos, contrayéndose y así disminuyendo la luz del vaso. Posteriormente se relajan de nuevo y la luz recupera su forma original. Este mecanismo es necesario para regular el caudal y presión en el sistema cardiovascular. Lo interesante de esto es que ahora la pared arterial interacciona con el sistema nervioso en vez de hacerlo con el flujo sanguíneo.

### Relación entre la distensibilidad y las pulsaciones de la presión arterial

Una oleada de sangre llena las arterias con cada latido cardíaco. Si no fuera por la distensibilidad del sistema arterial, toda esta sangre nueva tendría que fluir a través de los vasos sanguíneos periféricos casi instantáneamente, sólo en la sístole cardíaca y no se produciría flujo durante la diástole. No obstante, la compliancia del árbol arterial reduce las pulsaciones de la presión hasta que prácticamente desaparecen en el momento en que la sangre alcanza los capilares, por lo que el flujo sanguíneo tisular es principalmente continuo con un escaso carácter pulsátil.

## 1.5. Aplicaciones clínicas

Los perfiles de las ondas de presión y flujo sanguíneo varían significativamente aún en personas sanas. Los cálculos de los perfiles de flujo y presión podrían usarse como una herramienta de diagnóstico. Por ejemplo, se podrían comparar los datos de flujo medidos de un paciente con datos de flujo de una persona sana, tal como se puede observar en la Figura 1.5.

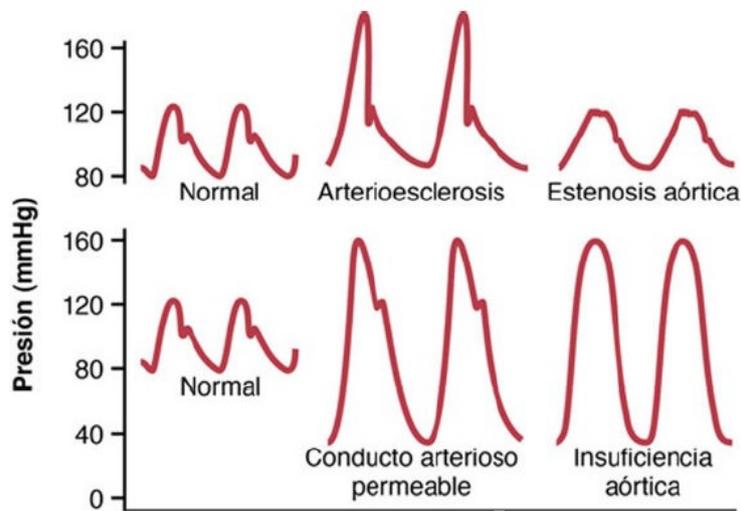


Figura 1.5: Cambios de perfil de la presión aórtica en la arteriosclerosis, estenosis aórtica, conducto arterioso permeable e insuficiencia aórtica. Guyton y Hall[9].

Los estudios de cómo deben cambiar los parámetros del modelo que reproducen los datos del flujo patológico podrían ayudar a entender mejor la condición patológica del paciente.

Olufsen[17] por ejemplo, analiza la onda dicrótica (segunda oscilación que se observa durante el ciclo cardíaco) que disminuye en la gente que sufre de diabetes o enfermedades vasculares como la arteriosclerosis. Esta onda aparece como resultado

de la reflexión de la misma, como una pequeña cantidad de flujo sanguíneo vuelve al ventrículo izquierdo antes que las válvulas del corazón se cierren completamente.

La persona con arterias rígidas presenta una onda dicrótica menos pronunciada debido al incremento de su presión sistólica (máxima presión arterial que coincide con la contracción del ventrículo izquierdo). Además, el estudio de la onda dicrótica y la comparación de datos de flujo y presión en diferentes lugares podrían usarse para diagnosticar por ejemplo, la ubicación de estenosis que es un término utilizado para denotar la estrechez o el estrechamiento de la luz de un orificio o conducto, tanto de origen adquirido como congénito. Lo que sugiere que si se observa de manera regular cambios en la forma de la onda de pulso se puede detectar enfermedades vasculares.

Es decir, los modelos de comportamiento del flujo sanguíneo y las simulaciones computacionales tienen su aplicación en entornos clínicos de importancia, como ser:

- a) Prevención de enfermedades vasculares: En este caso, si una persona es sometida a revisión y se simula el flujo sanguíneo, podrán detectarse anomalías en éste y así poder actuar para corregirlas<sup>8</sup>.
- b) Diagnóstico de enfermedades vasculares: Mediante la simulación del flujo sanguíneo de un paciente se puede obtener información sobre éste y así poder descubrir las patologías relacionadas con sus variables mecánicas.
- c) Intervención quirúrgica en el sistema cardiovascular: El hecho de conocer el comportamiento del flujo sanguíneo es de ayuda para el diseño y la introducción de dispositivos en los vasos, ya que se conocería a priori a qué acciones mecánicas van a estar sometidos dichos dispositivos<sup>9</sup>.

---

<sup>8</sup>American Journal of Roentgenology. 2000;174: 1657 – 1665. 10,2214/ajr.174,6,1741657.

<sup>9</sup>Warsaw (2005). Advanced Course and Workshop on blood flow BF 2005 - (PP.361 – 402).

# Capítulo 2

## Dinámica del fluido en una arteria

En este capítulo se presentan los principios o leyes físicas que gobiernan a la onda de pulso a lo largo de una arteria, las relaciones entre las variables que caracterizan el fenómeno y finalmente el modelo matemático formado por un sistema de ecuaciones diferenciales que será el punto de partida hacia la búsqueda de soluciones a diversos problemas clínicos.

En la sección 1 se introducen las características de una arteria típica, las consideraciones que se realizan con respecto a la forma de la arteria, el tipo de flujo que encierra, parámetros involucrados, etc. A continuación se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen el flujo mediante la leyes de conservación de donde se deduce un modelo tridimensional.

En la sección 2 se hacen suposiciones para en primer lugar, deducir el modelo unidimensional con tres incógnitas y en la subsección siguiente se introduce la ecuación de estado que permite escribir el modelo con dos incógnitas.

En la sección 3 se analiza el modelo unidimensional en forma conservativa.

En la sección 4 se presenta y analiza el sistema de EDPs obtenido en la sección anterior y en la sección 5 se adimensionaliza el modelo en estudio.

### 2.1. Dinámica del flujo sanguíneo

#### 2.1.1. Consideraciones en una arteria

En este trabajo, al igual que Ottesen[18], se considera a la arteria como una superficie  $S$  elástica, tubular y rotacionalmente simétrica con terminales en los planos  $x = 0$  y  $x = L$ , como muestra en la Figura 2.1. Además, se supone que

- $S$  se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = (v_x, v_r, v_\theta)$  donde  $x$  es la coordenada longitudinal y  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares;
- $S$  encierra un volumen  $V$  lleno de un fluido incompresible que se mueve con una velocidad  $\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\theta)$ .

Se debe observar que tanto  $u_i$  como  $v_i$  con  $i = x, r, \theta, t$  ( $t$ : tiempo) y que la superficie  $S$  por lo general no se mueve a la misma velocidad que el fluido es decir,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son generalmente diferentes;

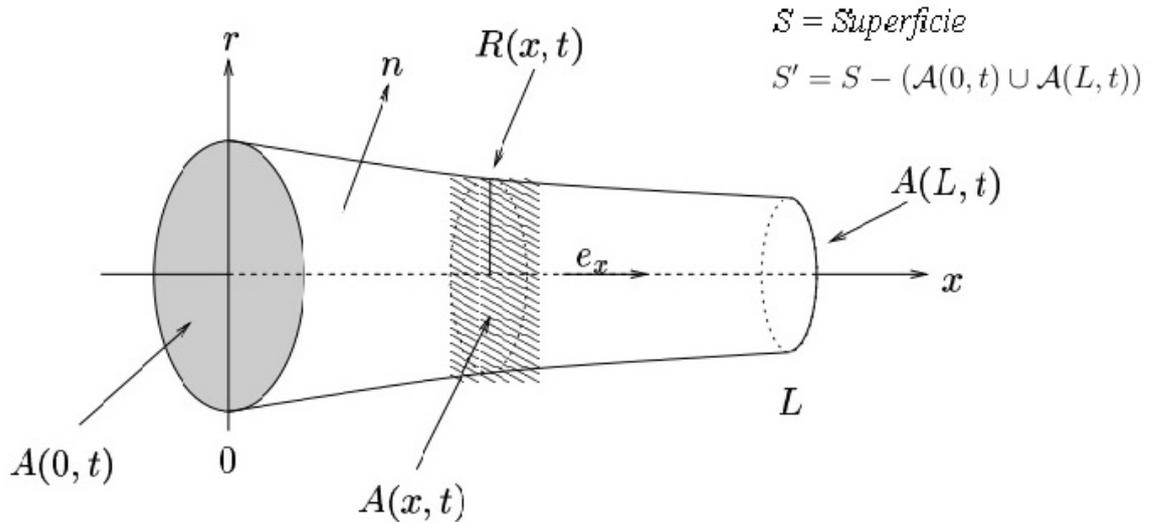


Figura 2.1: Arteria típica. Ottesen[18].

- $\rho = 1,055 \text{ gr/cm}^3$  es la densidad constante del fluido;
- $\mu = 0,049 \text{ g/(cm.seg)}$  es la viscosidad constante del fluido;
- $p(x, r, \theta, t)$  es la presión del fluido;
- $r_0(x)$  es el radio de la arteria donde la presión transmural es cero es decir, donde la diferencia de presiones (interior y exterior) es cero;
- $R(x, t)$  es el radio de la arteria, decrece exponencialmente a lo largo de la arteria;
- $A(x, t) = \pi[R(x, t)]^2$  es el área de la sección transversal. En particular, en las superficies terminales de  $S$  toma los valores  $A(0, t)$  y  $A(L, t)$  respectivamente;
- $\mathcal{A}(x, t) = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R(x, t), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  es el conjunto de puntos tales que por ejemplo, el área de  $\mathcal{A}(x, t)$  es  $A(x, t)$ ;

- $\mathbf{v} = 0$  en los planos  $\mathcal{A}(0, t)$  y  $\mathcal{A}(L, t)$ ;
- $\vec{\mathbf{n}}$  es el vector normal a la superficie  $S$ ;
- $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  son los vectores unitarios en las direcciones  $x, r, \theta$  respectivamente.

Las relaciones dinámicas que describen el movimiento de un fluido están relacionadas esencialmente con la respuesta de una parte específica de masa de fluido a las influencias externas.

Para deducir las ecuaciones que predicen el flujo y la presión en las arterias grandes Olufsen[17] usa las leyes de conservación (de volumen y  $x$ -momento).

## 2.1.2. Ecuaciones de momento y continuidad

### Conservación del volumen

La ecuación de continuidad es la expresión del principio de conservación de volumen. Esta ley se cumple con independencia de la naturaleza del fluido o de las fuerzas que actúen sobre él.

Dicha ley establece que la cantidad de sangre que entra en una arteria al cabo de un pequeño periodo de tiempo  $dt$  es la misma que sale por el otro extremo, la cual se representa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V dV + \iint_S (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (2.1)$$

donde

- $V$ : es el volumen encerrado entre los planos  $x = 0$  y  $x = L$ ,
- $\mathbf{u}$ : es la velocidad del fluido,
- $S$  es la superficie de la arteria de manera que  $S' = S - (\mathcal{A}(0, t) \cup \mathcal{A}(L, t))$ ,
- $\mathbf{v}$ : velocidad a la que se mueve la superficie  $S$ ,
- $\mathbf{n}$ : vector normal a la superficie  $S$ .

Al analizar los términos de (2.1) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A(x, t) dx,$$

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA &= \iint_{\mathcal{A}(0) \cup \mathcal{A}(L)} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA + \iint_{S'} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA \\ &= \left[ \iint_A u_x \, dA \right]_0^L + \iint_{S'} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA, \end{aligned}$$

por lo que la ecuación de conservación de volumen (2.1) se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A(x, t) \, dx + \left[ \iint_A u_x \, dA \right]_0^L + \iint_{S'} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA = 0 \quad (2.2)$$

Además, para predecir el flujo y la presión a lo largo de la arteria, el momento debe conservarse en dirección longitudinal ( $x$ -dirección).

### Conservación del momento

Esta ley asegura que se cumple la 2ª ley de Newton ( $m \cdot a = F$ ).

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho u_x \, dV + \iint_S \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA + \iint_S (p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) - (\mathbf{d}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x) \, dA = 0 \quad (2.3)$$

donde

- $V$ : volumen encerrado entre los planos  $x = 0$  y  $x = L$ ,
- $\mathbf{u}$ : velocidad del fluido,
- $\mathbf{v}$ : velocidad a la que se mueve la superficie  $S$ ,
- $\mathbf{n}$ : vector normal a la superficie  $S$ ,
- $S$  es la superficie de la arteria tal que  $S' = S - (\mathcal{A}(0, t) \cup \mathcal{A}(L, t))$ ,
- $\rho$ : densidad del fluido,
- $p = p(x, r, \theta, t)$ : presión sanguínea,
- $\mathbf{e}_x$ : vector unitario en dirección longitudinal,
- $\mathbf{d}$ : tensor de corte.

Los dos primeros términos de (2.3) tienen que ver con el transporte de masa a lo largo de la arteria y el transporte a través de la pared arterial. La tercer integral corresponde a la fuerza y comprende un término de presión que describe la presión sanguínea sobre la pared arterial y un término que describe la fricción entre la pared y el fluido. Esto último asegura lo que se conoce como condición de no-deslizamiento (no-slip condition)<sup>1</sup> y que está incluida mediante el tensor de corte  $\mathbf{d}$ .

Al analizar cada término de (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho u_x dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \left( \iint \rho u_x dA \right) dx; \\ \iint_S \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA &= \iint_{A(r) \cup A(L)} \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA + \iint_{S'} \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \left[ \iint_A \rho u_x^2 dA \right]_0^L + \iint_{S'} \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA; \\ \iint_S (p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) - (\mathbf{dn}) \cdot \mathbf{e}_x) dA &= \int_0^L \left( \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA \right) dx - \int_0^L \left( \int_0^{2\pi} (\mathbf{dn}) \cdot \mathbf{e}_x R d\theta \right) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2} dx, \end{aligned}$$

por lo que (2.3) se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \left( \iint_A \rho u_x dA \right) dx + \left[ \iint_A \rho u_x^2 dA \right]_0^L + \iint_{S'} \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA + \\ + \int_0^L \left( \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA \right) dx - \int_0^L \left( \int_0^{2\pi} (\mathbf{dn}) \cdot \mathbf{e}_x R d\theta \right) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2} dx = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde para la última integral de la ecuación (2.4) se tiene en cuenta la Figura B.1.

Por otro lado, Olufsen[17] describe la curva a lo largo de la arteria como

$$\mathbf{f}(x, r) = r - R(x)$$

donde

- $r$  es el radio inicial y

<sup>1</sup>La resistencia al flujo que se tiene que superar proviene de las fuerzas entre las moléculas del fluido (cohesión) y entre el fluido y las superficies límite (adhesión). Scholz[21].

Por lo que la condición de no deslizamiento se refiere más precisamente a la suposición sobre la interfase fluido-sólido o como es en este caso, flujo sanguíneo-pared arterial. La suposición general es que el fluido en contacto con la pared no se mueve en absoluto. Lo que es cierto para las arterias grandes[10].

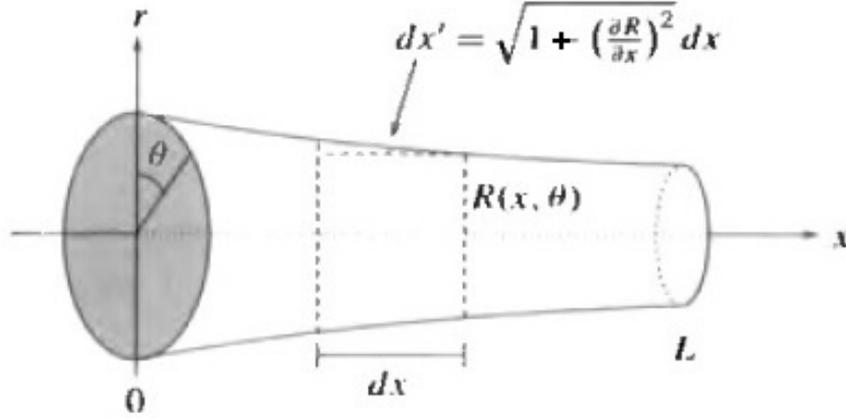


Figura 2.2: Superficie sobre la que se integra en la ecuación (2.6) que se puede separar en dos. La primera integra sobre la circunferencia de radio  $R$  para  $\theta \in [0, 2\pi]$ . La segunda integra a lo largo de la arteria,  $x \in [0, L]$ . Como la arteria es cónica, cada parte infinitesimal está dada por  $dx'$ . Ottesen[18].

- $R(x)$  es el radio a lo largo de la arteria.

Entonces la normal a la superficie tiene la forma

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_x \frac{\partial R}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} (\mathbf{d n}) \cdot \mathbf{e}_x &= \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} -\frac{\partial R}{\partial x} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}} \left[ -\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right]_R. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si las arterias no fueran estrechándose es decir, si la componente de la derivada en dirección normal fuera cero entonces  $u_r = 0$  (entonces  $\frac{\partial u_r}{\partial x} = 0$ ) pero si se supone que

el estrechamiento es muy pequeño se puede despreciar dichos términos. Por lo que la última integral en la ecuación (2.4) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{dn}) \cdot e_x dA &= \int_0^L \left( \int_0^{2\pi} (\mathbf{dn}) \cdot e_x R d\theta \right) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2} dx \\ &= \int_0^L 2\pi\mu R \left[ -2 \frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Además, con la suposición de estrechez pequeña de la arteria se justifica el despreciar también el término  $\frac{\partial R}{\partial x}$  por lo que el stress de corte de la pared se reduce a

$$\int_0^L 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R dx.$$

Entonces, la ecuación (2.6) se puede escribir como

$$\iint_S (\mathbf{dn}) \cdot e_x dA = \int_0^L 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R dx, \quad (2.7)$$

por lo que la ecuación (2.4) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \left( \iint_A \rho u_x dA \right) dx + \left[ \iint_A \rho u_x^2 dA \right]_0^L + \iint_{S'} \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA + \\ + \int_0^L \left( \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA \right) dx - \int_0^L 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R dx = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Luego las ecuaciones que representan la conservación del volumen y la del momento, respectivamente, son

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A dx + \left[ \iint_A u_x dA \right]_0^L + \iint_{S'} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \left( \iint_A \rho u_x dA \right) dx + \left[ \iint_A \rho u_x^2 dA \right]_0^L + \iint_{S'} \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA + \\ + \int_0^L \left( \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA \right) dx - \int_0^L 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R dx = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para escribir las ecuaciones de manera más simple, Ottesen[18] introduce dos funciones  $\Psi$  y  $\Psi_p$  (salida del volumen  $V$  y salida del momento respectivamente, ambas por unidad de longitud) de manera que

$$\int_0^L \Psi(x) dx = \iint_{S'} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA, \quad \int_0^L \Psi_P(x) dx = \iint_{S'} \rho u_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA.$$

Esta notación es conveniente porque tanto  $\Psi$  como  $\Psi_P$  se anulan cuando la componente normal a la velocidad con la que se mueve la superficie es igual a la del fluido es decir, cuando  $(\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{n} = 0$ . Lo que significa que el flujo entra o sale solamente a través de las superficies terminales  $A(0)$  y  $A(L)$ .

Luego, la ecuación (2.9) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A dx + \left[ \iint_A u_x dA \right]_0^L + \int_0^L \psi(x) dx = 0.$$

Al derivar la ecuación anterior con respecto a  $L$ , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A dx \right) + \frac{\partial}{\partial L} \left[ \iint_A u_x dA \right]_0^L + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L \psi(x) dx = 0,$$

y al aplicar la regla de Leibnitz<sup>2</sup> en la primer integral se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial L} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} A dx + \frac{\partial}{\partial L} \iint_A u_x dA + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L \psi(x) dx = 0,$$

y luego el 1er Teorema Fundamental del Cálculo<sup>3</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} A(L, t) + \frac{\partial}{\partial L} \iint_A u_x dA + \psi(L) = 0,$$

entonces, como expresión final de (2.9) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} A + \frac{\partial}{\partial x} \iint_A u_x dA + \psi = 0. \quad (2.11)$$

De la misma manera para la ecuación (2.10) además de considerar (2.7) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \left( \iint_A \rho u_x dA \right) dx + \left[ \iint_A \rho u_x^2 dA \right]_0^L + \int_0^L \psi_P(x) dx + \\ & + \int_0^L \left( \iint \frac{\partial}{\partial x} dA \right) dx - \underbrace{\int_0^L \left( \int_0^{2\pi} (\mathbf{dn}) \cdot \mathbf{e}_x R d\theta \right) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2} dx}_{= \int_S (dn) \mathbf{e}_x dA} = 0. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Bajo el supuesto de  $A(x, t)$  continua con derivada continua  $\frac{\partial A}{\partial t}(x, t)$ .

<sup>3</sup>Spivack[22]

Al derivar la ecuación anterior respecto de  $L$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^L \left( \iint_A \rho u_x dA \right) dx \right) + \frac{\partial}{\partial L} \left[ \iint_A \rho u_x^2 dA \right]_0^L + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L \psi_P(x) dx + \\ + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L \left( \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA \right) dx + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R dx = 0, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^L \left( \iint_A \rho u_x dA \right) dx \right) + \frac{\partial}{\partial L} \iint_A \rho u_x^2 dA + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L \psi_P(x) dx + \\ + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L \left( \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA \right) dx + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^L 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R dx = 0, \end{aligned}$$

luego aplicando el 1º Teorema Fundamental del Cálculo para la tercer, cuarta y quinta integral se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial L} \left( \int_0^L \left( \iint_A \rho u_x dA \right) dx \right) + \frac{\partial}{\partial L} \iint_A \rho u_x^2 dA + \psi_P(L) + \\ + \iint_A \frac{\partial}{\partial x} p(x, L) dA - 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \rho u_x dA + \frac{\partial}{\partial x} \iint_A \rho u_x^2 dA + \psi_P + \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA - 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R = 0 \quad (2.12)$$

Por lo que, con (2.11) y (2.12) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{\partial}{\partial x} \iint_A u_x dA + \psi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \rho u_x dA + \frac{\partial}{\partial x} \iint_A \rho u_x^2 dA + \psi_P + \iint_A \frac{\partial p}{\partial x} dA - 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

que es el sistema que describe el flujo en una arteria típica pero que no constituye un modelo unidimensional ya que involucra la velocidad sobre el área de la sección transversal, por lo que es necesario hacer más suposiciones.

## 2.2. Modelo unidimensional

### 2.2.1. Modelo 1-D con tres incógnitas

Para deducir el modelo unidimensional, Olufsen[17] supone  $p$  y  $\frac{\partial p}{\partial x}$  funciones de  $t$  y  $x$  es decir, presión constante sobre el área de la sección transversal. Por lo que la velocidad promedio sobre el área transversal se puede definir como

$$u = \frac{1}{A} \iint_A u_x dA,$$

además, se define

$$\chi = \frac{1}{Au^2} \iint_A u_x^2 dA.$$

De lo anterior se deduce que

$$\chi Au^2 = \iint_A u_x^2 dA \quad \text{y} \quad Au = \iint_A u_x dA,$$

por lo que el sistema (2.13) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} + \psi &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial(Au)}{\partial t} + \frac{\partial(\chi Au^2)}{\partial x} \right) + A \frac{\partial p}{\partial x} - 2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R + \psi_P &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

que constituyen un modelo unidimensional en las variables  $A$ ,  $p$  y  $u$  pero, para resolverlo es necesario analizar el comportamiento del perfil de velocidad  $u_x^4$ .

De acuerdo a McDonald[14], para un flujo laminar en arterias ligeramente cónicas el perfil de velocidad es más bien plano. Por lo tanto, una buena aproximación es asumir que el perfil de velocidad es plano con un grosor de la pared  $\delta$  de manera que

$$u_x(x, r, \theta, t) = \begin{cases} u & \text{para } r \leq R - \delta \\ \frac{u(R-r)}{\delta} & \text{para } R - \delta < r \leq R \end{cases}$$

donde

- $R$  es el radio de la arteria para un  $x$  determinado,
- $\delta \approx 0,01\text{cm}$  es el grosor de la pared para las arterias grandes que se puede estimar de acuerdo a Lighthill[11],

---

<sup>4</sup>En modelos como los de Anliker[2], Barnard[3] y Forbes[7] se consideró un perfil de velocidad parabólico sin embargo, observaron que el camino más simple de describir la tensión de corte de la pared arterial solo se aplica para flujo estacionario y laminar. Pero en general, el sistema es mucho más dinámico y el perfil de velocidad cambia de acuerdo a las condiciones del flujo.

- $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0,046 \text{ cm}^2/\text{seg}$  es el coeficiente de viscosidad, es una propiedad característica de cada fluido y es además dependiente de la temperatura y la presión,
- $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica que es el coeficiente de proporcionalidad entre el esfuerzo de corte y la velocidad de deformación,
- $\rho$  es la densidad del fluido,
- $\omega$  es la frecuencia angular,
- $T = 1,25 \text{ seg}$  es la longitud del ciclo cardíaco.

De acuerdo a las consideraciones de este trabajo, el borde de la arteria es delgado comparado con su radio por lo que  $(R - \delta < r \leq R)$ .

Luego

$$u_x = \frac{u(R-r)}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial r} = -\frac{u}{\delta}$$

entonces

$$2\pi\mu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R = 2\pi\mu R \left( -\frac{u}{\delta} \right) = -\frac{2\pi\mu u R}{\delta} = -2\pi\nu u R$$

por lo que

$$\chi = \frac{1}{Au^2} \left( \int_0^{R-\delta} u^2 2\pi r dr + \int_{R-\delta}^R \left( \frac{u(R-r)}{\delta} \right)^2 2\pi r dr \right) = 1 - \frac{4\delta}{3R} + \frac{\delta^2}{2R^2} \approx 1.$$

De las definiciones de  $\Psi_{\bar{p}}$  y de  $\Psi$  se tiene que  $\Psi_{\bar{p}} = u\Psi$  entonces,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} + \Psi = 0,$$

$$\frac{\partial(Au)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Au^2) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} + \Psi_{\bar{p}} = 0.$$

Las ecuaciones reescritas en términos del flujo  $q = Au$  y  $\Psi_{\bar{p}} = \frac{q}{A}\Psi$  son

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \Psi = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} + \frac{q}{A} \Psi = 0 \quad (2.16)$$

que constituyen el modelo unidimensional no lineal en las variables  $A$ ,  $p$  y  $q$  para la propagación de la onda del pulso arterial por lo que se necesita una tercer ecuación.

## 2.2.2. Modelo 1-D con dos incógnitas

### Ecuación de estado

La ecuación de estado está basada en la flexibilidad de las arterias y proporciona una relación entre la presión y el área de la sección transversal, lo que servirá para disminuir la cantidad de variables del sistema que se dedujo en la sección anterior.

La pared arterial no es completamente elástica sino que muestra un comportamiento viscoelástico (McDonald[14] y Anliker[2]) lo que significa que hay una demora entre el momento en el que cambia la presión hasta que afecta a la correspondiente área transversal pero, para simplificar el problema no se considera la viscoelasticidad. Esta suposición resulta razonable porque los efectos viscoelásticos son pequeños dentro de los rangos fisiológicos del flujo y la presión (Tardy[23]).

Ottesen[18] estudia el equilibrio de las fuerzas internas y externas que actúan sobre un elemento unidad de la pared para desarrollar una relación entre la presión en la arteria y el área de sección transversal .

Como se supone que las arterias son circulares (deformación simétrica respecto de los ejes), que las paredes son finas ( $\delta \rightarrow 0$ ) y que las arterias están unidas longitudinalmente, las fuerzas externas se reducen a las de tensión circunferencial<sup>5</sup> y además teniendo en cuenta la Ley de Laplace<sup>6</sup>, la tensión circunferencial se puede escribir:

$$\tau_{\theta} = \frac{rp_e}{\delta} = \frac{E_{\theta}}{1 - \sigma_x \sigma_{\theta}} \frac{r - r_0}{r_0} \quad (2.17)$$

donde:

- $r_0$  es el radio de la arteria para presión transmural cero ( $p = p_0$ ),
- $E_{\theta}$  es el módulo de Young en dirección circunferencial,
- $p_e = p - p_0$  es el exceso de presión es decir, la presión de la arteria menos la presión del entorno,
- $\delta$  es el grosor de la pared,
- $\frac{r-r_0}{r}$  es la tensión circunferencial,
- $\sigma_x = \sigma_{\theta} = 0,5$  son los radios de Poisson en dirección longitudinal y circunferencial respectivamente.

---

<sup>5</sup>La tensión circunferencial es un tipo de esfuerzo mecánico que surge en objetos con simetría rotacional. Esta fuerza está contenida en el plano perpendicular al eje de simetría y es perpendicular al radio del objeto. Se representa por  $\tau_{\theta}$ .

<sup>6</sup>La ley de Laplace establece que la tensión parietal (fuerza que tiende a separar a las miofibrillas) es proporcional de modo directo a la presión transmural y al radio del vaso e inversamente proporcional al grosor de la pared vascular.

Como las arterias están unidas longitudinalmente entonces las fuerzas internas y externas están en equilibrio. Y, sin pérdida de generalidad, se puede considerar  $E$  (sin el subíndice).

Si  $p_e = p - p_0$  y  $\sigma_x = \sigma_\theta = 0,5$  entonces (2.17) se puede expresar como

$$\frac{r(p - p_0)}{\delta} = \frac{E}{1 - 0,25} \frac{r - r_0}{r_0}, (p - p_0) = \frac{4E \cdot \delta}{3r} \left( \frac{r - r_0}{r_0} \right). \quad (2.18)$$

Por otro lado, como  $A(x, t) = 2\pi r^2(x)$  entonces  $r(x) = \sqrt{\frac{A}{2\pi}}$  y  $r_0(x) = \sqrt{\frac{A_0}{2\pi}}$  luego

$$p - p_0 = \frac{4E\delta}{3r_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{A_0(x, t)}{A(x, t)}} \right) \quad (2.19)$$

donde  $A_0(x, t)$  es el área de la sección transversal para presión transmural cero.

Además, Ottesen[18] muestra que se puede considerar como relación entre el módulo de Young ( $E$ ), el grosor de la pared ( $\delta$ ) y el radio de la arteria para presión transmural cero ( $r_0$ ) a la expresión de la forma

$$\underbrace{\frac{E\delta}{r_0}}_{f(r_0)} = k_1 e^{k_2 r_0 + k_3}$$

por lo que (2.19) se puede escribir como

$$p(r_0, A) = f(r_0) \left( 1 - \sqrt{\frac{A_0(x, t)}{A(x, t)}} \right) \quad (2.20)$$

de donde

$$A = \frac{A_0 f^2}{(f - p)^2} \quad (2.21)$$

se tiene como expresión que relaciona  $A$  y  $p$ .

Luego el sistema de EDPs no lineales en las variables  $A$  y  $q$  se puede expresar mediante

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= -\psi \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.3. Forma conservativa del modelo

Anderson[1] enuncia que los términos forma conservativa, forma de ley de conservación, forma de conservación y forma de divergencia son todos equivalentes y las EDPs que tienen esta forma tienen la propiedad de que los coeficientes de los términos con derivadas son constantes o, si son variables, sus derivadas no aparecen en la ecuación.

Para escribir el sistema (2.22) en forma conservativa, Ottesen[18] introduce la cantidad  $B$  definida como:

$$B(r_0(x), p(x, t)) = \frac{1}{\rho} \int A(x, t) dp. \quad (2.23)$$

De donde se tiene<sup>7</sup>

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{\partial x}.$$

Al reemplazar (2.16) se tiene

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{\partial x} + \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} + \frac{q}{A} \psi = 0,$$

luego, si se reagrupa

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + B \right) = \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{\partial x} - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} - \frac{q}{A} \psi = 0.$$

Por lo que el sistema (2.22) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= -\psi \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + B \right) &= \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{\partial x} - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} - \frac{q}{A} \psi = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por otro lado, si se tiene en cuenta la ecuación (2.21) y la definición de  $B$  se puede escribir la relación<sup>8</sup>

$$B = \frac{f(r_0)}{\rho} \sqrt{A_0 A}$$

además

$$\frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx}$$

<sup>7</sup>Los cálculos se detallan en la sección B.2 del Apéndice.

<sup>8</sup>Los cálculos se detallan en la sección B.2 del Apéndice.

por lo que el sistema se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{q^2}{A} + \frac{q}{\rho} \sqrt{A_0 A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{-2\pi\nu q R}{\delta A} - \psi \frac{q}{A} + \frac{1}{\rho} \left( 2\sqrt{A} (\sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} f') - A f' \right) \frac{dr_0}{dx} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Si se tiene en cuenta que las arterias en estudio con casi impermeables es decir, las salidas del flujo solo están en los extremos se puede suponer que  $\Psi = \Psi_P = 0$  que lleva al sistema de EDPs no lineales

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{q^2}{A} + \frac{q}{\rho} \sqrt{A_0 A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2\pi\nu q R}{\delta A} + \frac{1}{\rho} \left( 2\sqrt{A} (\sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} f') - A f' \right) \frac{dr_0}{dx} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

formado por las ecuaciones de Navier-Stokes incompresible para un fluido newtoniano en una arteria elástica ligeramente cónica.

## 2.4. Análisis del Sistema

El sistema (2.26) es cuasilineal si se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  dependen de  $(x, t)$  y  $\mathbf{w} = (A, q)^T$ .

Como los valores propios de  $A$  son reales, el sistema es hiperbólico<sup>9</sup>. Anderson[1]. Las ecuaciones hiperbólicas se pueden analizar estudiando sus curvas características que son curvas que transportan información. Olufsen[17].

**Aquí tendría que poner el resultado de los cálculos de las características**

## 2.5. Adimensionalización de las ecuaciones

La adimensionalización permite reducir el número de variables implicadas. Además, si dos flujos poseen la misma geometría relativa, las mismas condiciones de contorno e iniciales adimensionales, la solución adimensional de las ecuaciones es la misma, y se dice que los flujos son dinámicamente semejantes<sup>10</sup>.

Para el modelo en estudio, se consideran los siguientes parámetros característicos:

- $r_c = 1cm$  es el radio característico de las arterias,

<sup>9</sup>Los cálculos se detallan en la sección B.3 del Apéndice B.

<sup>10</sup>Ver sección B.11 del Apéndice.

- $q_c = 10\text{cm}^3/\text{s}$  es el flujo característico a través de la aorta,
- $\rho = 1,06\text{g}/\text{cm}^3$  es la densidad de la sangre,
- $p = \rho \left(\frac{q_c}{r_c^2}\right)^2$  es la presión característica.

que definen las cantidades

$$\begin{aligned} \text{▪ } \tilde{x} &= \frac{x}{r_c}, & \text{▪ } \tilde{q} &= \frac{q}{q_c}, & \text{▪ } \tilde{A} &= \frac{A}{r_c^2}, \\ \text{▪ } \tilde{r}_0 &= \frac{r_0}{r_c}, & \text{▪ } \tilde{t} &= \frac{t q_c}{r_c^3}, & \text{▪ } \tilde{p} &= \frac{p r_c^4}{\rho q_c^2}. \end{aligned}$$

Luego, la forma adimensional de

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A} r_c^2}{\partial \tilde{t} r_c^3 / q_c} + \frac{\partial \tilde{q} q_c}{\partial \tilde{x} r_c} &= 0, \\ \frac{\frac{q_c r_c^2}{r_c^3} \partial \tilde{A}}{\partial \tilde{t}} + \frac{q_c}{r_c} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} &= 0, \end{aligned}$$

multiplicando por  $r_c/q_c$  se tiene

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} = 0.$$

De la misma manera, para la ecuación de momento

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\pi\nu q R}{\delta A},$$

se tiene

$$\frac{\partial(\tilde{q} q_c)}{\partial(\tilde{t} r_c^3 / q_c)} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x} r_c} \left( \frac{\tilde{q}^2 q_c^2}{\tilde{A} r_c^2} \right) + \frac{\tilde{A} r_c^2}{\rho} \frac{\partial(\tilde{p} \rho q_c^2 / r_c^4)}{\partial(\tilde{x} r_c)} = -2\pi\nu \frac{\tilde{q} q_c}{\tilde{A} r_c^2} \frac{\tilde{r} r_c}{\tilde{\delta} r_c}.$$

Al multiplicar por  $r_c^3/q_c^2$  y si se tiene en cuenta que el número de Reynolds<sup>11</sup>  $\mathcal{Re} = \rho q_c / (\mu r_c) = q_c / (\nu r_c)$  se llega a

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{A}} \right) + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{2\pi r}{\delta \mathcal{Re}} \frac{q}{A} \quad (2.27)$$

<sup>11</sup>Ver en la sección B.1 del Apéndice B.

Por lo que (2.25) se puede reescribir como

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + A \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2\pi r}{\delta \mathcal{R}e} \frac{q}{A} \quad (2.29)$$

Luego el sistema en forma conservativa adimensional se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{A} + f\sqrt{A_0 A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\pi r}{\delta \mathcal{R}e} \frac{q}{A} + \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

## 2.6. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los principios o leyes físicas que gobiernan la onda de pulso a lo largo de una arteria, las relaciones entre las variables que caracterizan el fenómeno y finalmente el modelo matemático formado por un sistema de ecuaciones diferenciales.

En la sección 1 se mencionaron las características de lo que se entiende por una arteria típica, las consideraciones que se realizan con respecto a la forma de la arteria, el tipo de flujo que encierra, parámetros involucrados, etc. A continuación, se presentaron las ecuaciones de Navier-Stokes, que son las que describen el flujo mediante la leyes de conservación y se deduce un modelo tridimensional.

En la sección 2 se hicieron las suposiciones necesarias para deducir el modelo unidimensional en las variables  $A$ ,  $p$  y  $q$ , luego se consideró la ecuación de estado que permitió escribir el modelo unidimensional en las variables  $A$  y  $q$ .

En la sección 3 se dedujo el modelo unidimensional en la forma conservativa.

En la sección 4 se analizó el sistema de EDPs obtenido en la sección anterior y se concluyó que es un sistema de EPDs cuasi lineal hiperbólico.

Por último, se adimensionalizó el modelo en estudio.

# Capítulo 3

## Dinámica del fluido en el árbol arterial

El modelo del capítulo anterior predice el flujo y la presión en una arteria pero para estudiar el flujo y la presión en una red arterial se podría pensar en hacer una extensión del modelo anterior. Para ello habría que considerar condiciones en los diferentes tipos de bordes como ser en la entrada de la aorta, bifurcaciones y al final de la red.

Como condición de entrada se considerará una función periódica basada en parámetros fisiológicos relacionada al flujo sanguíneo que proviene del ventrículo izquierdo. Para cada bifurcación se plantearán las ecuaciones donde se considera que no hay fuga de fluido además que la presión es constante y, en cada punto de truncamiento del árbol arterial se impondrán condiciones absorbentes o reflectantes que permitan modelar distintos grados de oclusión.

### 3.1. Condiciones de borde

Al igual que en Ottesen[18] la red en estudio tiene origen en la arteria aorta<sup>1</sup> (arteria de mayor diámetro) y se trunca en arterias (de menor calibre) ubicadas en las extremidades<sup>2</sup>. Debido al truncamiento se deben considerar las condiciones fisiológicas del modelo para así poder cortar el árbol arterial después de algunas generaciones, así como también las condiciones que deben cumplirse en las uniones.

Si bien el árbol arterial tiene una estructura compleja aún cuando el estudio se limita a las arterias grandes, con las suposiciones de que el árbol es binario y que las

---

<sup>1</sup>Existen trabajos donde se considera que el árbol arterial comienza con el corazón como por ejemplo:

- Reymond, Merenda, Perren, Rufernacht, Stergiopulos - 2009. Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree.
- Formaggia, Lamponi, Tuveri, Veneziani. Numerical modeling of 1D Arterial Networks Coupled with a Lumped Parameters Description of the Heart.

Pero que en nuestra formulación esto sería inviable.

<sup>2</sup>A las arterias comprendidas en ese tramo se les hará referencia como arterias grandes.

arterias son unidimensionales se tienen algunas de las simplificaciones.

Como ya se mencionó, para modelar el árbol arterial se deben considerar condiciones para:

- la entrada de la aorta desde el ventrículo izquierdo,
- cada bifurcación y
- las terminales de la red arterial.

Que, respectivamente, se las representa mediante:

- una ecuación para la entrada a la válvula aórtica,
- tres ecuaciones en cada bifurcación: una para la salida de la arteria padre y dos para la entrada de las arterias hijas, tal como se observa en la Figura 3.1 y
- una ecuación que especifica la salida del flujo en la terminal de cada arteria.

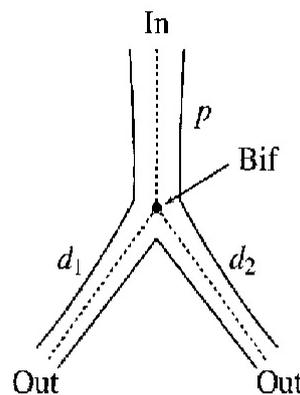


Figura 3.1: Rama binaria simple que consiste en una arteria padre y dos arterias hijas. Ottesen[18].

### 3.1.1. Condición de borde de entrada

En la entrada a la aorta ascendente es necesario especificar el flujo, la presión o una relación entre ambos. De Olufsen[17] se tiene que la forma de la onda de pulso en la aorta ascendente está generada por el flujo que atraviesa la válvula aórtica de manera que

$$q(0, t) = \frac{q_0 t}{\tau^2} e^{-\frac{t^2}{(2\tau^2)}}, \quad 0 \leq t < T \quad (3.1)$$

donde

- $q_0$  es la salida cardíaca<sup>3</sup>,
- $\tau$  es el tiempo en el que se alcanza la salida cardíaca máxima y
- $T$  es la longitud del período cardíaco.

Además hizo las siguientes consideraciones,

- el periodo de  $T = 1,25 \text{ seg}$  (longitud del ciclo cardíaco);
- se suavizó la curva para evitar oscilaciones de altas frecuencias en las simulaciones;
- la curva está a escala de modo que la salida cardíaca se reduce de  $4.14 \text{ l/min}$  a  $4.03 \text{ l/min}$ , una reducción del 3%. Esta escala se justifica ya que no se consideran todas las ramas en el modelo de estudio tampoco toda la sangre,
- la función  $q$  tiene un salto en  $t = T$  pero es del orden de  $10^{-18}$  por lo que se puede despreciar. Además se supone que no hay flujo que vuelva al ventrículo.

Todo esto se puede observar en la Figura 3.2

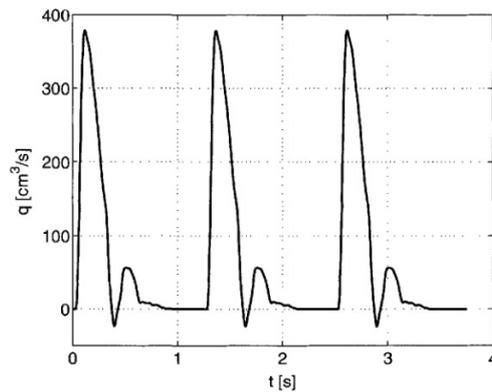


Figura 3.2: Flujo de entrada de la aorta en función del tiempo en tres períodos. Olufsen[17].

### 3.1.2. Condiciones de bifurcación

En cada bifurcación, tal como lo muestra la Figura 3.1, se necesitan tres condiciones: una en la salida de la arteria padre  $p$  y dos en cada entrada de las arterias hijas  $d_1$  y  $d_2$ .

Olufsen[17] las deduce al tener en cuenta, la ecuación de conservación de masa que implica la continuidad del flujo en la interfase de unión de las arterias. Por lo que, si se supone que no hay fuga de fluido, la salida y las entradas están balanceadas entonces

$$q_p = q_{d1} + q_{d2}. \quad (3.2)$$

---

<sup>3</sup>La salida cardíaca o gasto cardíaco es la cantidad de sangre expulsada por el ventrículo izquierdo en la aorta por minuto. Guyton y Hall[9]

Si además supone que la presión es continua en cada bifurcación se tiene

$$p_p = p_{d_1} = p_{d_2}. \quad (3.3)$$

### 3.1.3. Condición de borde de salida

Truncar el árbol arterial en un cierto nivel arteriolar implica incluir condiciones de salida en los puntos de truncamiento.

En diversos trabajos como en Olufsen[17], San[20] se analizan tres modelos en estos puntos:

- Modelo de resistencia pura,
- Modelo Windkessel de tres elementos y
- Modelo árbol estructurado.

#### Modelo de resistencia pura

Una aproximación simple y razonable es suponer que la salida del flujo es proporcional a la presión es decir, la condición de borde está determinada por una carga resistiva pura<sup>4</sup> ya que es natural pensar que en las terminales las cargas son resistivas ya que los diámetros de las arterias en ese nivel causan el carácter de resistiva de la impedancia local para dominar.

San[20] usa como condición de borde de salida la relación

$$q = \frac{p}{RA}, \quad (3.4)$$

donde

- $p$  es la presión del flujo;
- $A$  es el área de la sección transversal;
- $R$  es la resistencia;
- $q$  es el flujo.

Sin embargo, no es obvia la elección del valor correcto para la resistencia periférica en los puntos donde terminan las arterias grandes. Además, si se supone al final de la arteria una relación constante entre el flujo y la presión, éstos están forzados a estar en fase, lo que fisiológicamente no es válido para las arterias que consideramos en nuestro modelo. Olufsen[17].

Este modelo no considera los efectos de la elasticidad luego del punto terminal.

Por otro lado, Olufsen[17] muestra que la condición de borde de resistencia pura sólo se puede aplicar si las arterias son suficientemente pequeñas<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Las cargas resistivas son aquellas en las que la electricidad produce calor y no movimiento.

<sup>5</sup>Se entiende por pequeñas a las arterias de área de sección transversal menor a las que se considera en el modelo de este trabajo.

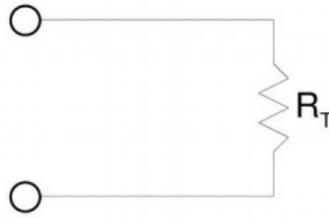


Figura 3.3: Modelo de resistencia pura. San[20].

### Modelo Windkessel de tres elementos

Es un modelo donde se representa la resistencia y la elasticidad de las arterias mediante un modelo de circuito eléctrico que consiste en dos resistencias en serie con una combinación en paralelo de una de las resistencias y un capacitor tal como se muestra la Figura 3.4; las resistencias  $R_1 + R_2$  simulan la resistencia hidráulica total de la arteria y el capacitor  $C_T$  simula la capacidad elástica de la arteria. En este caso, la incógnita es la impedancia  $Z$  en el punto de truncamiento

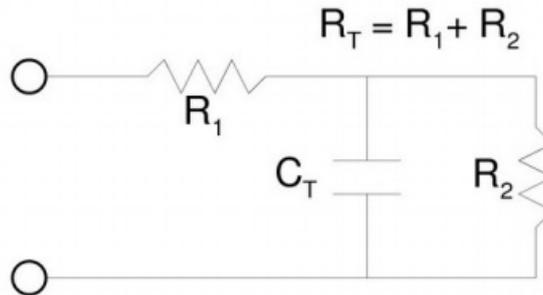


Figura 3.4: El modelo de Windkessel de tres elementos que se usa para predecir la impedancia en las terminales de las arterias grandes. Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  y el capacitor  $C_T$  se deben estimar en cada punto de truncamiento.

La impedancia ( $Z$ ) que depende de la frecuencia ( $w$ ) del modelo de Windkessel está dado por

$$Z_F(\omega) = \frac{R_1 + R_2 + i\omega C_T R_1 R_2}{1 + i\omega C_T R_2} \quad (3.5)$$

donde:

- $Z_F(\omega)$  es la impedancia en el punto de truncamiento,
- $F$  es punto de truncamiento,
- $C_T$  es el volumen compliance y
- $R_1, R_2$  son las resistencias.

donde, para aplicarla como condición de borde se deben especificar los parámetros

- $R_T = R_1 + R_2$  (resistencia periférica total),
- la fracción  $\frac{R_1}{R_T}$  y
- la compliance total  $C_T$ .

Todos estos valores están enlistados en siguiente tabla, presentada en Olufsen[17].  
Donde

- La primer columna se refiere al nivel de resistencia periférica.
- Las dos siguientes columnas da el radio en la raíz y el mínimo para el árbol estructurado.
- La cuarta columna se refiere al módulo de Young y las últimas cuatro columnas dan la resistencia terminal total y la compliance.

A pesar que Ottesen[18] mostró que en este caso el flujo y la presión están casi en fase, el modelo de Windkessel de 3 elementos tampoco incluye los efectos de propagación de la onda, lo que lo llevó a investigar cómo se extiende el dominio físico luego del borde final de las arterias grandes.

Rama	Grupo	$r_{\text{raíz}}, \text{cm}$	$r_{\text{min}}, \text{cm}$	$E, \frac{10^6 \text{gr}}{\text{s}^2 \text{cm}}$	$ R_{T_f} , \frac{10^4 \text{g}}{\text{scm}^4}$	$ R_T , \frac{10^4 \text{g}}{\text{scm}^4}$	$ C_f , \frac{10^{-6} \text{cm}^4 \text{s}^2}{\text{g}}$	$ C , \frac{10^{-6} \text{cm}^4 \text{s}^2}{\text{g}}$
carotida	lento	0.083	0.010	2.5	16.25	13.90	0.19	1.34
interósea	lento	0.091	0.020	1.6	8.68	8.43	0.33	0.22
tibial anterior	lento	0.130	0.010	2.7	5.47	5.59	0.91	3.33
tibial posterior	lento	0.141	0.010	2.7	4.51	4.77	1.23	3.90
radial	lento	0.142	0.010	3.2	4.41	5.28	1.09	3.52
intercostales	muy lento	0.150	0.050	0.3	1.33	1.39	5.43	13.38
mesentérica inferior	medio	0.160	0.002	9.5	6.84	6.88	0.85	2.70
gástrica	medio	0.180	0.002	9.5	5.00	5.41	1.29	3.44
cubital	medio	0.183	0.001	13.0	6.32	6.01	1.08	3.10
vertebral	medio	0.183	0.002	10.0	4.79	5.28	1.32	3.52
femoral	medio	0.186	0.002	8.0	4.65	4.77	1.49	3.90
ilíaca	alta	0.200	0.0005	34.0	6.40	7.94	0.75	2.34
hepática	medio	0.220	0.001	10.5	3.86	3.63	2.38	5.13
renal	lento	0.260	0.010	2.0	1.03	1.13	13.92	16.46
esplénica	medio	0.275	0.001	10.0	2.15	2.32	5.47	8.02
mesentérica superior	alta	0.435	0.0004	11.0	0.92	0.93	23.91	20.00

Tabla 3.1: Datos de los segmentos terminales. Ottesen [18].

### Modelo árbol estructurado

En el estudio del dominio físico luego del truncamiento, Ottesen[18] muestra que las arterias pequeñas forman un árbol asimétrico con un número de generaciones que varían. Luego del borde final de las arterias grandes todas las arterias pequeñas tienen aproximadamente el mismo diámetro. Luego de ese punto se forman bucles y la estructura que describe la geometría pasa a ser más compleja. Por lo que modela las arterias pequeñas como un árbol binario asimétrico y así, una solución semianalítica para el flujo y la presión en este nuevo árbol.

El modelo de árbol estructurado considera en cada terminal como condición de salida la impedancia en la raíz del árbol de arterias pequeñas, tal como lo muestra la Figura 3.5.

Si bien se podría pensar en usar este modelo para el árbol de arterias grandes, Olufsen[17] muestra que no es posible por dos razones:

- a) resolver un modelo no lineal para todo el árbol (arterias grandes más arterias pequeñas) no es factible computacionalmente y
- b) no modela satisfactoriamente la tensión de corte ya que en las arterias pequeñas la tensión de corte es más dominante, entonces no puede tratarse de la misma manera.

Luego se necesita un modelo que sea más simple en algunos sentidos pero al mismo tiempo que modele los bordes en más detalle.

Olufsen[17] modela las arterias pequeñas mediante un árbol binario estructurado asimétrico usando un modelo lineal, donde trata a esos sub-árboles como un árbol estructurado de arterias rectas a las que les corresponden ecuaciones lineales para resolver. De esas soluciones y usando análisis de Fourier determina la impedancia dinámica<sup>6</sup>, de donde se tiene una relación entre el flujo y la presión para cada punto de truncamiento.

---

<sup>6</sup>Impedancia dinámica = resistencia

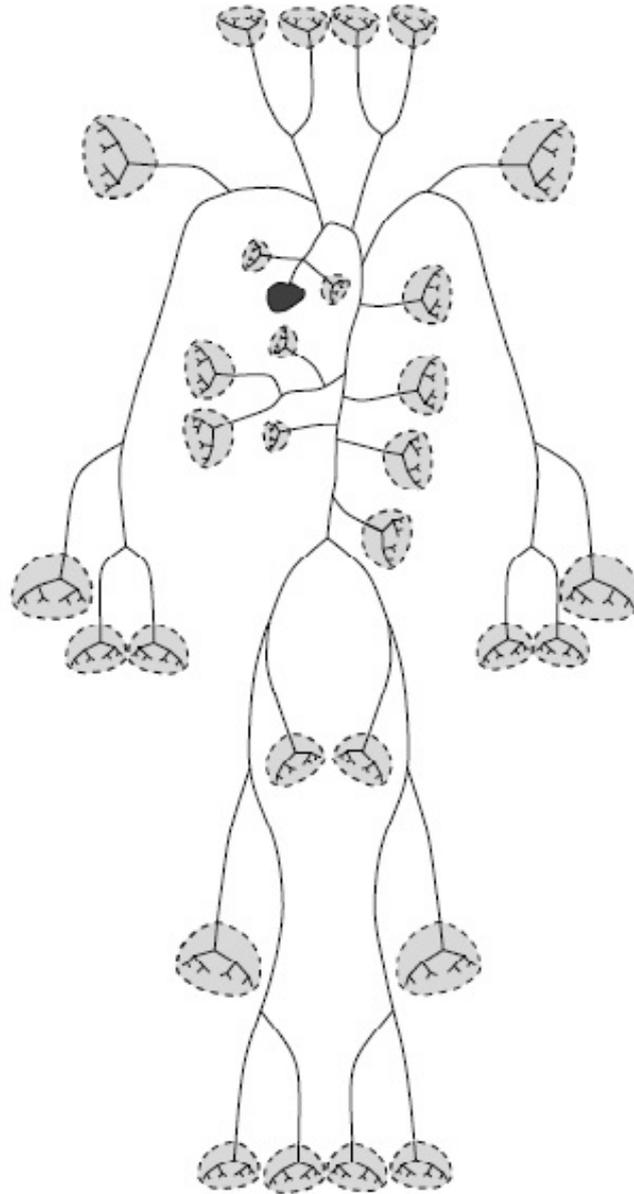


Figura 3.5: Sub-árboles pequeños al final de cada arteria terminal. Olufsen[17].

## 3.2. Conclusiones

En este capítulo se analizó extender el modelo del capítulo dos considerando las condiciones para los diferentes tipos de borde es decir, una en la entrada a la aorta ascendente, una en cada bifurcación y otra en la salida (al final de la arteria donde se truncó el árbol arterial).

En la entrada se consideró una función periódica basada en parámetros fisiológicos; en cada bifurcación se plantearon las ecuaciones basadas en que no hay fuga de fluido y que la presión es constante. Por último, para condición de salida se analizaron los resultados ya obtenidos en diversas bibliografías al aplicar el modelo de resistencia pura, el Windkessel y el árbol estructurado.

El modelo de resistencia pura y el de Windkessel no incluyen los efectos de propagación de la onda en la parte del sistema arterial que se modela. Sin embargo, generalmente la forma de la onda se puede aproximar teniendo valores buenos de la resistencia total y la compliance, pero esas cantidades no son fácilmente medibles y los perfiles del pulso son sensibles a los valores de esos parámetros.

Para superar esos inconvenientes, en el método de árbol estructurado de arterias se une las arterias grandes a un árbol estructurado que representa el remanente del sistema arterial. Esto es, Ottesen[18] utilizó un árbol estructurado unido a las ramas terminales del árbol truncado donde se estima la impedancia de la raíz y se usa un enfoque basado en la linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes asimétricas. Esto proporciona una condición de contorno que mantiene la diferencia de fase entre el flujo y la presión, así como las oscilaciones de alta frecuencia presente en los espectros de impedancia.

Fisiológicamente tiene sentido dividir el modelo en dos partes ya que el rol de las arterias grandes es distribuir la sangre a todas las partes del cuerpo, mientras que el rol de las arterias pequeñas es permitir la perfusión de tejidos específicos. De hecho, en muchos trabajos muestran que las arterias pequeñas están distribuidas de manera óptima y estructurada, de manera que ellas cubren el tejido usando un principio de minimización. También mostraron que las arterias grandes no siguen las mismas reglas. Además, el flujo sanguíneo en las arterias sistémicas grandes está dominado por la inercia, mientras que el flujo sanguíneo en las arterias pequeñas está dominado por la viscosidad.

# Capítulo 4

## Métodos Numéricos

En la dinámica computacional, el primer paso es la discretización espacial del dominio y posteriormente calcular sobre la misma, la aproximación numérica de la solución del problema en cuestión.

Las opciones para la discretización se pueden resumir en tres categorías: diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos.

En este capítulo se describirá brevemente las principales características de cada uno, las que motivan la elección del método que se emplea.

### 4.1. Diferencias Finitas

Este método consiste en reemplazar el dominio del problema continuo por una malla o grilla y las derivadas involucradas por diferencias. De esto resulta una representación algebraica del problema en cuestión.

En particula, una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) se puede representar en diferencias finitas de varias maneras. La elección está relacionada a las características del procedimiento a optimizar es decir, de las ecuaciones involucradas en el problema y de conceptos como error de truncamiento, consistencia y estabilidad del método.

#### 4.1.1. Construcción de la malla

Para reemplazar el dominio del problema continuo se supone que  $u$  es una función sólo de dos variables,  $x$  y  $t$ .

La malla o grilla es el dominio donde  $u(x, t)$  se reemplaza por  $u(i\Delta x, j\Delta t)$ . Los puntos se localizan de acuerdo a los valores de  $i$  y  $j$  de modo de escribir las ecuaciones de diferencias y los puntos vecinos en términos de los puntos genéricos  $(i, j)$ , como lo muestra la Figura 4.1.

Es decir, si se considera  $u_{i,j} = u(x_0, t_0)$  entonces

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, t_0) \quad u_{i-1,j} = u(x_0 - \Delta x, t_0)$$

$$u_{i,j+1} = u(x_0, t_0 + \Delta t) \quad u_{i,j-1} = u(x_0, t_0 - \Delta t)$$

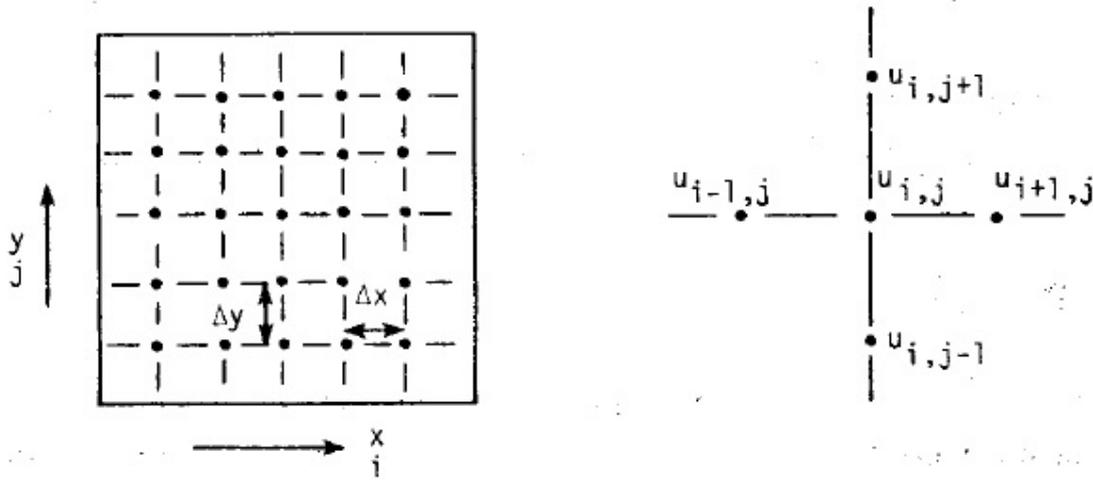


Figura 4.1: Grilla típica rectangular. Anderson[1]

### 4.1.2. Representación en diferencias

Para desarrollar en diferencias las ecuaciones diferenciales, Anderson[1] menciona varios procedimientos. Se puede citar:

- a) expansión en serie de Taylor,
  - b) ajuste polinomial,
  - c) método de la integral y
  - d) aproximación por volumen de control
- a) La expansión en serie de Taylor se basa en la definición de la derivada<sup>1</sup> de una función  $u(x, t)$  en un punto fijo  $(x_0, t_0)$

Ésto es

$$\begin{aligned}
 u(x_0 + \Delta x, t_0) = & u(x_0, t_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x_0} \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \\
 & + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{\psi} \frac{(\Delta x)^n}{n!}, \quad x_0 \leq \psi \leq (x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

<sup>1</sup>La representación en diferencia finita para una derivada se introduce al tener en cuenta la definición de la derivada para función  $u(x, t)$  en  $x = x_0, t = t_0$  como

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)}{\Delta x}.$$

Luego si  $u$  es continua,  $[u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)]/\Delta x$  es una aproximación razonable para  $\partial u/\partial x$  para un  $\Delta x$  suficientemente pequeño.

donde el último término corresponde al residuo.

Al reacomodar los términos de la ecuación (4.1) se puede escribir

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_0, t_0)} = \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x_0} - \dots \quad (4.2)$$

que en notación  $i, j$  se puede escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \text{error de truncamiento} \quad (4.3)$$

donde

- a)  $\frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})}{\Delta x}$  es la representación en diferencia finita de  $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$  y
- b) el error de truncamiento ( $ET$ ) es la diferencia entre la derivada parcial y su representación en diferencia finita.

Se puede caracterizar el comportamiento límite del ET usando la notación de orden  $\mathcal{O}$ , lo que significa  $|ET| \leq K|\Delta x|$  para  $\Delta x \rightarrow 0$ , con  $K$  constante real.

Luego, la expresión (4.3) también se puede escribir

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (4.4)$$

Por otro lado, otras representaciones de diferencias de  $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$  son:

- representación en diferencia hacia atrás

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x),$$

- representación en diferencia central

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

- representación en diferencia hacia adelante

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x).$$

En la mecánica de fluidos y transferencia de calor se involucran derivadas de primer y segundo orden, y generalmente se las representa en sólo dos o tres puntos de la grilla. Dentro de esas restricciones, las aproximaciones más usadas para la derivada primera en una malla en la que  $\Delta x = h = cte$  son

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + \mathcal{O}(h),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \mathcal{O}(h),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Las aproximaciones de tres puntos para la segunda derivada en una grilla uniforme, con  $\Delta x = h = cte$  son

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

- b) El ajuste por polinomios es una técnica que se puede usar en el desarrollo de la representación finita completa de una EDP solo cuando se puede suponer que un polinomio es una buena aproximación de la solución.

En ese caso, el polinomio es ajustado a los puntos vecinos del punto genérico  $(i, j)$  utilizando valores de la función en los puntos de la grilla. Se puede usar un número suficiente de puntos para determinar de manera exacta los coeficientes del polinomio.

Es claro que como uno elige los puntos para aproximar, no hay una única forma de proceder y que además garantice ser, en algún sentido, la mejor aproximación por diferencias, ni mucho menos asegurar que el método numérico resultará estable (en el caso de aplicarlo en un problema de evolución).

- c) El método de la integral tiene como estrategia desarrollar una relación algebraica entre la función incógnita en los puntos de la grilla (espaciada en intervalos  $\Delta x$  y  $\Delta t$ ), integrando la EDP respecto de las variables independientes.

Para integrar ambos miembros de la EDP, se elige el orden de integración de manera que en cada lado se tenga diferenciales exactas y los límites se los elige arbitrariamente (siempre dependientes de  $x_0$  o  $t_0$  según corresponda) teniendo en cuenta que no hay forma de conocer cuál es el intervalo de integración correcto para obtener un método estable.

Además, las herramientas que se utilizan en el cálculo de dichas integrales es el Teorema del Valor Medio para integrales que proporciona una aproximación de una de las integrales y la aproximación en diferencias finitas para la derivada parcial.

- d) El método de volumen de control es un camino alternativo para el caso como en la Figura 4.2 que presenta mallas con diferentes espaciados, diferentes materiales y diversas condiciones de frontera. En la Figura 4.3 se puede ver que el método se parece a la aproximación por puntos, donde los puntos se determinan a través del dominio. No obstante, en lugar de aproximar la EDP en un punto, la aproximación se aplica al volumen que rodea al punto.

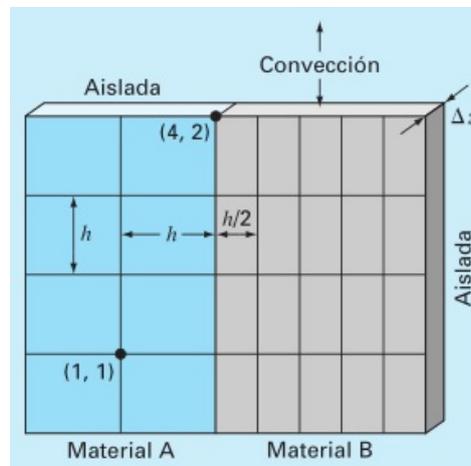


Figura 4.2: Placa calentada con una malla de espaciamientos diferentes, dos materiales y diversas condiciones de frontera. Chapra[6].

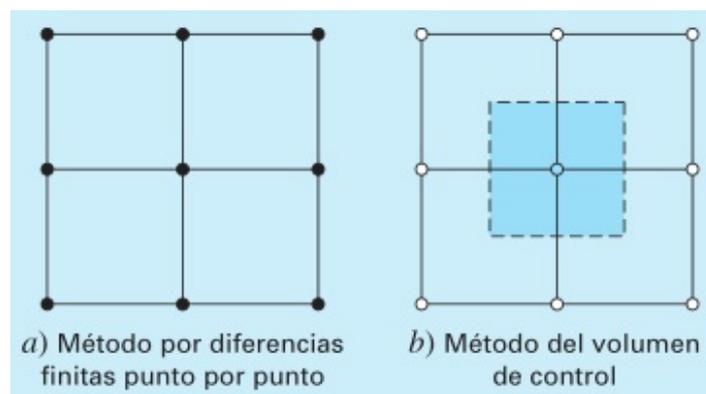


Figura 4.3: Comparación entre el método por diferencias finitas y el método del volumen de control. Chapra[6].

En una malla ortogonal, el volumen está formado por las rectas perpendiculares

que pasan por el punto medio de cada línea que une nodos adyacentes.

Al desarrollar un software general que caracterice los sistemas con fronteras irregulares es mucho más difícil. Si bien para simplificar se podría proponer una malla muy fina. Es frecuente suponer que los nodos cercanos sirven como puntos frontera, y aunque el uso de una malla suficientemente fina puede hacer despreciable algún tipo de discrepancia, ocasiona una desventaja debido a la carga computacional que se introduce al aumentar el número de ecuaciones simultáneas.

Como consecuencia de estas consideraciones, el análisis numérico ha desarrollado métodos alternativos que difieren radicalmente de los métodos por diferencias finitas, como ser el método del elemento finito. Aunque estos métodos son conceptualmente más difíciles, pueden implementarse con mayor facilidad para las fronteras irregulares.

## 4.2. Elementos Finitos

Para el caso de sistemas con una geometría irregular, con condiciones de frontera no usuales o de composición heterogénea, el método de elementos finitos es una alternativa más adecuada. La técnica del elemento finito divide el dominio de la solución en regiones de formas sencillas o elementos.

Se puede desarrollar una solución aproximada de la EDP para cada uno de estos elementos. La solución total se genera uniendo, o ensamblando, las soluciones individuales, teniendo cuidado de asegurar continuidad de las fronteras entre los elementos. De este modo, la EDP se satisface por secciones.

El método de elementos finitos usa el método variacional<sup>2</sup> del cálculo de variaciones para aproximar una solución minimizando una función de error asociada.

La Figura 4.4 muestra el uso de elementos en lugar de una malla rectangular, proporciona una mejor aproximación para sistemas con forma irregular. Además, se pueden generar continuamente valores de las incógnitas a través de todo el dominio de la solución en lugar de puntos aislados.

Chapra[6] da una introducción general al método del elemento finito de manera de poder tener una visión general de los pasos para la solución de un problema.

Aunque las particularidades varían, la implementación del método del elemento finito usualmente sigue un procedimiento estándar paso a paso. Como ser:

1. Discretización: Este paso consiste en dividir el dominio de la solución en elementos finitos según el caso, como lo muestra la Figura 4.5. Los puntos de intersección

---

<sup>2</sup>Como ser el Método Garlekin, el método Garlekin discontinuo, métodos mixtos, etc.

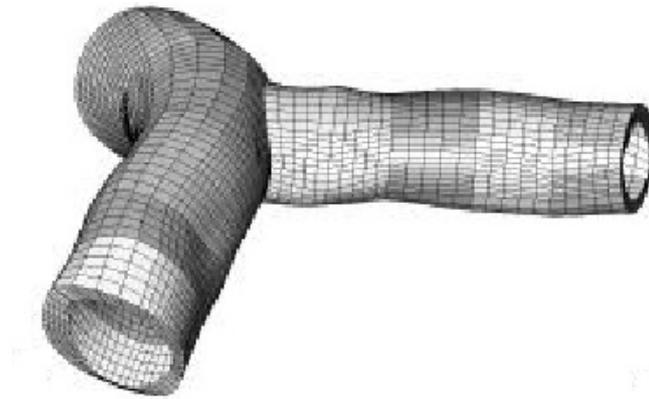


Figura 4.4: *Malla de elementos finitos de la pared arterial.* Chapra[6]

de las líneas que forman los lados de los elementos se conocen como nodos, y los mismos lados se denominan líneas o planos nodales.

2. Ecuaciones de los elementos: Este paso consiste en desarrollar ecuaciones para aproximarla solución de cada elemento y consta de dos partes. La primera es elegir una función apropiada con coeficientes desconocidos que aproximará la solución (generalmente se utilizan polinomios porque matemáticamente son fáciles de manipular)<sup>3</sup>. Segundo, se evalúan los coeficientes de modo que la función aproxime la solución de manera óptima.

Una vez que se ha elegido la función de interpolación, se debe desarrollar la ecuación que rige el comportamiento del elemento. Esta ecuación representa un ajuste de la función a la solución de la ecuación diferencial de que se trate.

Existen varios métodos para este propósito; como ser el método directo, el método de los residuos ponderados y el método variacional.

Los resultados de todos esos métodos son análogos al ajuste de curvas. Sin embargo, en lugar de ajustar funciones a datos, estos métodos especifican relaciones entre las incógnitas de la ecuación que satisfacen de manera óptima la EDP.

3. Ensamble: Una vez obtenidas las ecuaciones de elementos individuales, éstas deben unirse o ensamblarse para caracterizar el comportamiento de todo el sistema. El proceso de ensamble está regido por el concepto de continuidad. Es decir, las soluciones de elementos contiguos se acoplan, de manera que los valores de las incógnitas (y algunas veces las derivadas) en sus nodos comunes sean equivalentes. Así la solución total será continua.

4. Solución: Las soluciones de la ecuación se obtienen con técnicas como por ejemplo

---

<sup>3</sup>Ver sección B.12 del Apéndice.

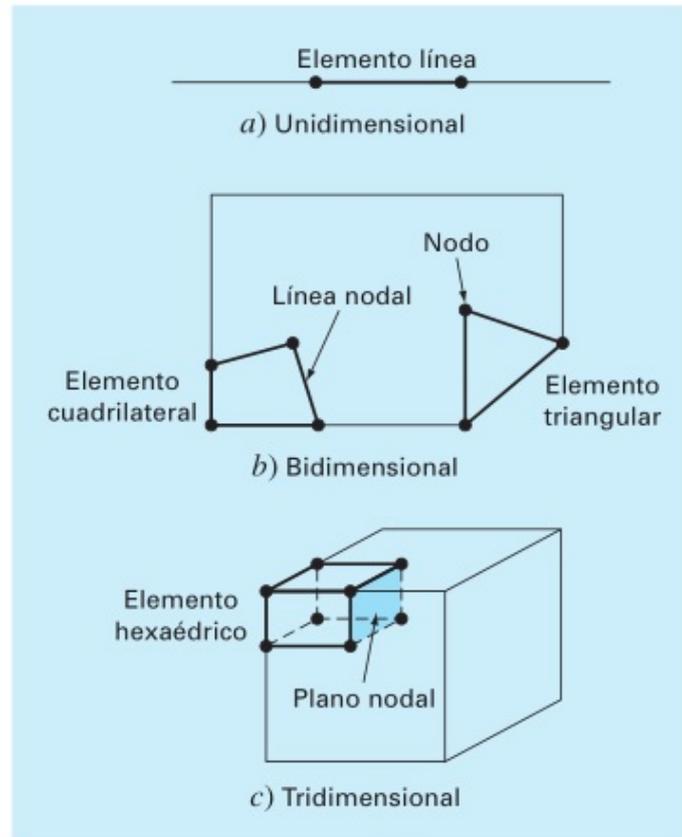


Figura 4.5: *Ejemplos de discretización.* Chapra[6].

la descomposición  $LU$ . En muchos casos, los elementos pueden configurarse de manera que las ecuaciones resultantes sean bandeadas. Así, es posible utilizar los esquemas de solución altamente eficientes para estos sistemas.

Aunque los pasos anteriores son muy generales, son comunes a la mayoría de las implementaciones del método del elemento finito.

### 4.3. Volúmenes Finitos

El método de los volúmenes de finitos permite también, como otra alternativa, resolver numéricamente ecuaciones diferenciales.

El método de volumen finito en una dimensión espacial está basado en la división del dominio espacial en varios intervalos, llamados volúmenes finitos o celdas, y la aproximación de la integral de la variable conservativa  $w^4$  en cada una de ellas. En cada paso se actualiza esos valores usando las aproximaciones del flujo mediante los bordes

<sup>4</sup>Por simplicidad, excepto en la sección de sistemas lineales, se supone que el modelo es escalar y por lo tanto la variable conservativa se denota como  $w$ .

de los volúmenes finitos.

El dominio espacial  $[a, b]$  está discretizado con una malla arbitraria  $\mathcal{C}_{\Delta x}$ , donde:

- $\mathcal{C}_{\Delta x} = \{x_i : i = 1, \dots, M\}$  es el conjunto de nodos,
- $\Delta x$  es la norma de la malla  $\mathcal{C}_{\Delta x}$  definida como  $\Delta x = \sup_{x_i \in \mathcal{C}_{\Delta x}} |x_i - x_{i-1}|$ ,
- la celda o volumen finito  $C_i$  está definido como:

$$C_i = \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \left(x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}, x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right). \quad (4.5)$$

- Por lo tanto, en el caso unidimensional su longitud es  $A_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ , como se ve en la Figura 4.6.

Por simplicidad, se considera en muchos casos una distancia constante entre los nodos, y por lo tanto  $A_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \Delta x = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, M$ .

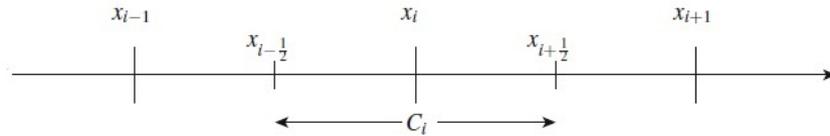


Figura 4.6: Esquema de la malla de volumen finito. Cendón[24].

La integral de la ley de conservación<sup>5</sup>  $w_t + f(w)_x = 0$ , en cada celda  $C_i$ , está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} w(x, t) dx = f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)). \quad (4.6)$$

Integrando 4.6 en la variable tiempo de  $t^n$  a  $t^{n+1}$  se obtiene

$$\int_{C_i} w(x, t^{n+1}) dx - \int_{C_i} w(x, t^n) dx = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (4.7)$$

Al recomodar los términos y dividir por  $\Delta x$  se tiene

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} w(x, t^{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} w(x, t^n) dx - \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right]. \quad (4.8)$$

---

<sup>5</sup>Ver sección B.8 del Apéndice.

La expresión anterior establece exactamente como el valor promedio de  $w$  sobre la celda debe actualizarse dentro de un intervalo de tiempo. Por lo tanto, se define el valor  $w_i^n$  como una aproximación del valor promedio  $w$  sobre cada celda  $C_i$  en el tiempo  $t_n$

$$w_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(x, t^n) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} w(x, t^n) dx, \quad (4.9)$$

de manera que la solución aproximada está dada por la función constante a trozos

$$w^n(x) = w_i^n \quad \text{para } x \in C_i \quad (4.10)$$

que está representada en la Figura 4.7.

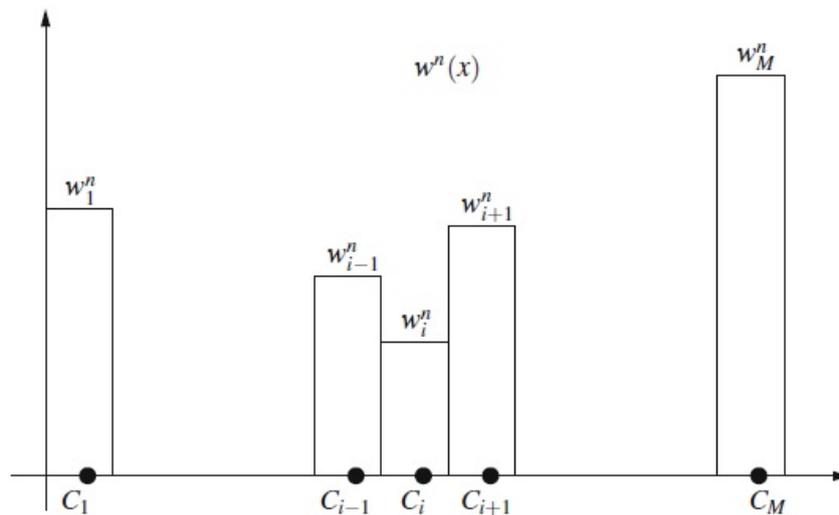


Figura 4.7: Representación de una función constante a trozos  $w^n(x)$  en un tiempo  $t^n$ . Cendón[24].

Cendón [24] usa (4.8) para desarrollar un algoritmo explícito para la evolución temporal:

Dado  $w_i^n$ , las aproximaciones promedio sobre cada celda en el tiempo  $t^n$ , se hacen con los valores promedios sobre cada celda en el paso del tiempo siguiente  $t^{n+1}$ , después en el paso del tiempo  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

Si  $w$  es una función suave, entonces la integral de (4.9) coincide con el valor de  $w$  en el nodo de la celda de orden  $O(\Delta x^2)$ . Sin embargo, al trabajar con los promedios sobre las celdas en vez de los valores en los nodos, es más fácil usar propiedades importantes de las leyes de conservación en el desarrollo de los métodos numéricos.

En particular, si el método numérico es conservativo, entonces la solución numérica se asemeja mucho a la solución exacta, que es especialmente importante cuando se trata de calcular correctamente las ondas de choque. Esto es debido al hecho de que  $\sum_{i=1}^M w_i^n \Delta x$  aproxima la integral de  $w$  sobre el dominio espacial  $[a, b]$ , y si se usa un método numérico en forma conservativa, solamente los valores en los bordes  $x = a$  y  $x = b$  hará el cambio de la suma discreta mencionada. La cantidad total de la variable conservativa dentro del dominio computacional se conserva, o por lo menos, los cambios dependerán de las condiciones de borde impuestas.

Sin embargo, en general no se puede evaluar exactamente las integrales de tiempo del lado derecho de 4.8, ya que  $w(x_{i\pm 1/2}, t)$  puede cambiar con el tiempo a lo largo del lado de la celda, y no se tiene la solución exacta para trabajar. Por lo tanto, se debe estudiar los métodos numéricos de la forma

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \tag{4.11}$$

donde  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$  y  $f_{i-\frac{1}{2}}^n$  son aproximaciones de los valores promedios del flujo en el plano  $xt$  a lo largo de las rectas  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$  y  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ , respectivamente, con  $t$  variando entre  $t^n$  y  $t^{n+1}$ :

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)) dt. \tag{4.12}$$

Si se pueden aproximar los valores promedios del flujo en los bordes de las celdas usando los valores de  $w^n(x)$  y la ley de conservación, entonces se tiene una discretización completa del problema de Cauchy. Una interpretación gráfica del método de volumen finito en forma conservativa se muestra en la Figura 4.8.

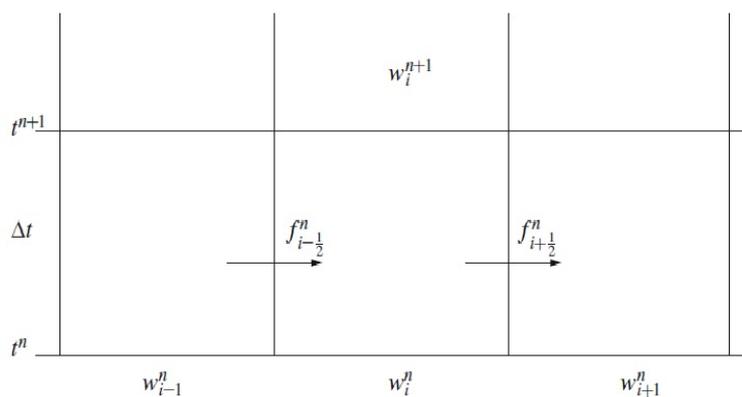


Figura 4.8: *Proceso de pasar de  $w_i^n$  a  $w_i^{n+1}$  usando un método explícito en el tiempo.* Cendón[24].

En los problemas hiperbólicos la información se propaga a una velocidad finita, y por lo tanto, es razonable suponer que se puede obtener  $f_{i-\frac{1}{2}}^n$  basado solamente en los

valores de  $w_{i-1}^n$  y  $w_i^n$ , los valores promedios de ambos bordes  $x_{i-\frac{1}{2}}$ , y para  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$ , usando los valores  $w_i^n$  y  $w_{i+1}^n$ . Por lo tanto, se puede usar una expresión de la forma

$$f_{i-\frac{1}{2}}^n = \phi(w_{i-1}^n, w_i^n), \quad f_{i+\frac{1}{2}}^n = \phi(w_i^n, w_{i+1}^n), \quad (4.13)$$

donde  $\phi$  es una cierta función de flujo numérico.

Usando esta notación el esquema numérico (4.11) se puede escribir

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\phi(w_i^n, w_{i+1}^n) - \phi(w_{i-1}^n, w_i^n)]. \quad (4.14)$$

El método numérico obtenido depende de la elección de la expresión de  $\phi$ , pero en general, cualquier método es un método explícito de tres puntos, lo que significa que el valor de  $w_i^{n+1}$  depende de los valores de  $w_{i-1}^n$ ,  $w_i^n$  y  $w_{i+1}^n$  para el paso del tiempo anterior.

Además, se dice estar en forma conservativa, ya que imita la propiedad (4.8) de la solución exacta: si se suma  $w_i^{n+1}$  definido por (4.8) sobre cualquier celda ( $i = I, \dots, J$ ) y multiplicando por  $\Delta x$ , se obtiene

$$\Delta x \sum_{i=I}^J w_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=I}^J w_i^n - \Delta t \left( f_{J+\frac{1}{2}}^n - f_{I-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (4.15)$$

ya que la suma de los flujos se anula en todas partes excepto en los extremos  $x = x_{I-1/2}$  y  $x = J + 1/2$ .

## 4.4. Análisis de esquemas numéricos

Tal como Nigro[15] expone, la discretización de las variables independientes y de las ecuaciones llevan a un esquema numérico particularmente dependiente del método que se usa. Si bien en el continuo el dominio de dependencia e influencia<sup>6</sup> de un operador abarca regiones extensas del dominio espacial. En el caso discreto, éste se restringe a una zona más acotada y dependerá del orden y tipo de aproximación utilizado.

Antes de aplicar cualquier método se debe llevar a cabo un análisis del mismo para tener una idea de lo que se puede esperar. El análisis clásico incluye tópicos como *consistencia*, *estabilidad* y *convergencia*.

### 4.4.1. Consistencia

La consistencia define una relación entre la ecuación diferencial y el método empleado.

---

<sup>6</sup>Ver la sección B.6 del Apéndice.

Un esquema es consistente si la ecuación discreta tiende al operador diferencial cuando todos los incrementos de las variables independientes tienden a cero. Esto se puede expresar como:

$$L^h u \rightarrow Lu \quad \text{para} \quad \Delta x_j, \Delta t \rightarrow 0 \quad (4.16)$$

donde:

- $L$  es el operador,
- $u$  es la solución exacta del problema,
- $\Delta x_j$  representando los pasos de la malla en todas las direcciones.

Otra manera de interpretar la consistencia del método es como lo expresa Anderson[1]: Una representación en diferencias finitas de una EDP se dice consistente si el error de truncamiento tiende a cero cuando se refina la malla. Esto es

$$\lim_{\text{malla} \rightarrow 0} ET^7 = 0.$$

#### 4.4.2. Estabilidad

Un método numérico estable es uno en el cual los errores de cualquier tipo (redondeo, truncamiento, etc) no crecen a medida que el procedimiento numérico se desarrolla. Es decir, el análisis de estabilidad se basa en la relación que existe entre la solución calculada  $u_i^n$  y la solución exacta de la ecuación discretizada  $\bar{u}_i^n$  por lo que

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \epsilon_i^n, \quad (4.17)$$

donde  $\epsilon_i^n$  es el error.

Por otro lado, así como un operador diferencial acepta una descomposición espectral sobre un espacio de dimensión infinita, el operador discreto acepta una equivalente pero en dimensión finita o sea, representable mediante matrices.

Si se supone que se expresa todas las incógnitas en cada punto del espacio y del tiempo (variables nodales) en un arreglo en el tiempo  $n\Delta t$  que se lo puede expresar como

$$U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_{i-1}^n \\ u_i^n \\ u_{i+1}^n \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

El esquema numérico puede ser escrito en forma de operador  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$U^{n+1} = C.U^n \quad \text{donde} \quad C = C(\Delta x, \Delta t). \quad (4.19)$$

En este caso, Nigro[15] establece la condición de estabilidad como:

*Dada una solución inicial  $U^0$  a tiempo  $t = 0$ , la acción repetida de  $C$  sobre ella produce que*

$$U^n = C^n.U^0$$

*Para que todas las soluciones  $U^n$  permanezcan acotadas y el esquema definido por  $C$  sea estable, el operador  $C$  tiene que ser uniformemente acotado. Esto es, existe una constante  $K$  tal que*

$$\|C^n\| < K \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ 0 \leq n\Delta t \leq T \end{cases} \quad (4.20)$$

para valores fijos de  $\tau$ ,  $T$  y para todo  $n$ .

A continuación, se describe brevemente el método de Von Neumann, uno de los métodos más conocidos para el análisis de estabilidad.

### Método de Von Neumann

Teniendo en cuenta en qué se basa el análisis de estabilidad, se puede mostrar que si se reemplaza (4.17) en la ecuación discretizada queda una ecuación para el error que es idéntica a la original. Esto dice que los errores evolucionan de la misma forma que la solución.

También se podría plantear de manera equivalente teniendo en cuenta la visión de operadores, tal como en (4.19) de manera que

$$e^{n+1} = Ce^n \quad (4.21)$$

donde  $e^n$  un vector equivalente al que se define en (4.18) solo que en lugar de valores nodales contiene errores.

Si las condiciones de borde del problema son periódicas, se puede descomponer al error en series de Fourier para la variable espacial en cada paso de tiempo. Como el dominio tiene longitud finita la representación de Fourier será discreta y sumada sobre un conjunto finito de armónicos.

Sea un dominio de longitud  $L$ , la representación compleja de Fourier refleja la región  $(0, L)$  en  $(-L, L)$  con un rango de frecuencias y longitudes de onda ( $k = 2\pi/\lambda$ ) como el siguiente

$$\begin{aligned} k_{min} &= \pi/L & \lambda_{max} &= 2L \\ k_{max} &= \pi/\Delta x & \lambda_{min} &= 2\Delta x \end{aligned} \quad (4.22)$$

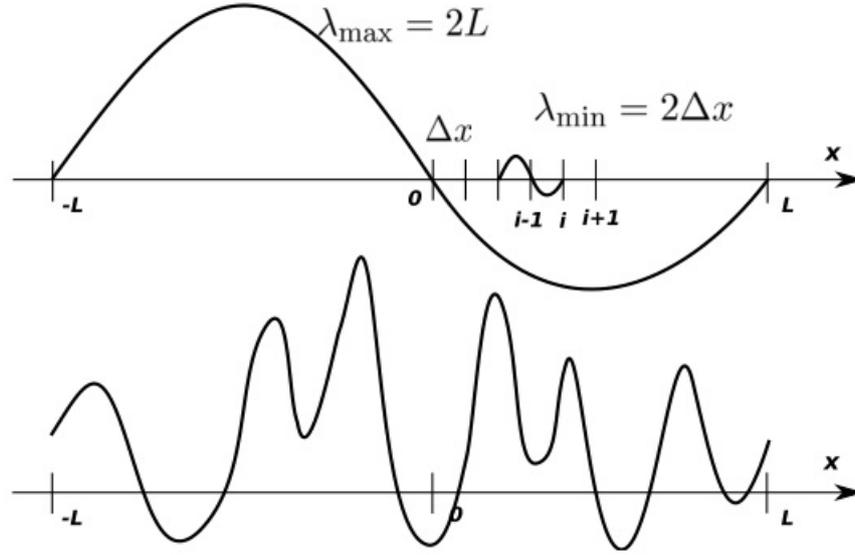


Figura 4.9: Representación de Fourier del error numérico. Nigro[15].

La Figura 4.9 muestra los dos modos extremos, uno que cubre todo el dominio  $2L$  (ondas largas) y el otro que abarca la menor región en la cual se puede representar una onda,  $2\Delta x$ .

Por lo tanto, si se establece que  $\Delta x = L/N$ , con  $N$  el número de nodos en una grilla definida como el conjunto de puntos de coordenadas  $x_i = i\Delta x$  se puede representar todas las armónicas visibles por la grilla como

$$k_j = jk_{min} = j\frac{\pi}{L} = j\frac{\pi}{N\Delta x} \quad j = 0, \dots, N. \quad (4.23)$$

La descomposición en series de Fourier del error es

$$\epsilon_i^n = \sum_{j=-N}^N E_j^n e^{Ik_j \cdot i\Delta x} = \sum_{j=-N}^N E_j^n e^{Iij\pi/N} \quad (4.24)$$

donde

- $I = \sqrt{-1}$  y
- $E_j^n$  es la amplitud de la  $j$ -ésima armónica.

Si se define la fase como

$$\Phi = k_j \cdot \Delta x = \frac{k\pi}{N} \quad (4.25)$$

que cubre el dominio  $(-\pi, \pi)$  en pasos de  $\pi/N$ . La región alrededor de  $\Phi = 0$  corresponden a las bajas frecuencias mientras que las cercanas a  $\Phi = \pi$  están asociadas a las altas frecuencias. Por la linealidad del operador no solamente el error satisface la expresión (4.21) sino cada armónica.

### Factor de amplificación

El hecho de que cada armónica satisfaga la expresión (4.21) implica que existe un desacoplamiento de los modos y que cada uno puede tratarse por separado. Si se considera cada una de ellas  $E_j^n e^{Iij}$  y se la introduce en el esquema en diferencias original e introduciendo el número de Courant  $\sigma$  Nigro[15] prueba que la condición de estabilidad (4.20) se satisface si las amplitudes del error no crecen con el tiempo es decir si

$$|G| = \left| \frac{E^{n+1}}{E^n} \right| \leq 1, \quad \forall \Phi \quad (4.26)$$

La cantidad  $G(\Delta t, \Delta x, k) = \frac{E^{n+1}}{E^n}$  se la define como el factor de amplificación.

La versión geométrica de la condición de estabilidad (4.20) es que el factor de amplificación de todas las armónicas deben ubicarse dentro de un círculo centrado en el origen de radio unitario, lo que está relacionado con la que se denomina condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

### Condición de Courant-Friedrichs-Lewy

La condición de Courant-Friedrichs-Lewy (Condición CFL) establece que para un método convergente el dominio de dependencia de la ecuación diferencial parcial debe estar dentro del dominio de dependencia del método numérico. Morton[13].

Por ejemplo, la Figura 4.10 muestra dos situaciones donde no se cumple la condición.

En general, la condición CFL no es suficiente para la estabilidad. Los métodos que satisfacen esta condición deben ser analizados con una condición suficiente para concluir estabilidad.

Las curvas características  $PQ$  o  $PR$  están fuera del triángulo. Si se considera un refinamiento de la malla donde  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  es constante; entonces el dominio de dependencia triangular sigue siendo el mismo. Pero si se altera las condiciones iniciales en una región pequeña de  $t = 0$  alrededor del punto  $Q$ , esto alterará la solución de la ecuación diferencial en el punto  $P$  ya que la solución es constante a lo largo de la característica  $QP$ . Sin embargo, solución numérica en  $P$  no se alterará ya que los datos que se usan para construir la solución no se cambiaron. Por lo tanto, la solución numérica no puede converger al resultado esperado en  $P$ . Lo mismo pasa si se tiene en cuenta la característica  $RP$ .

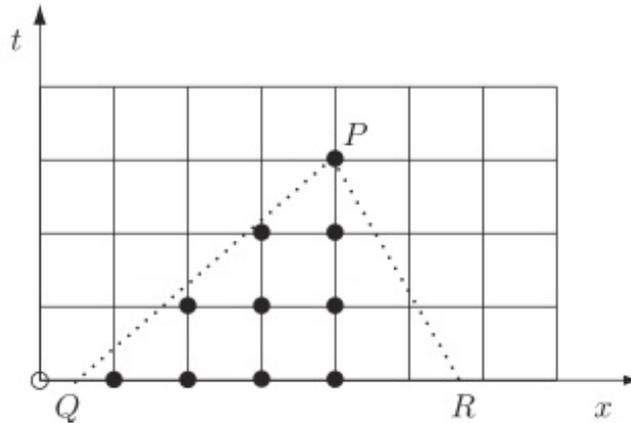


Figura 4.10: Caso en el que no se cumple la condición CFL. Morton[13].

### 4.4.3. Convergencia

La convergencia conecta la solución calculada con la solución exacta de la ecuación diferencial.

Nigro[15] establece de la siguiente forma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \left\| [C(\Delta t)]^n U^0 - \tilde{U}(t) \right\| = 0, \quad \text{con } n\Delta t \text{ fijo.} \quad (4.27)$$

Luego se puede enunciar el teorema de equivalencia de Lax como:

Para un problema de valores iniciales bien planteado y una discretización consistente, la estabilidad es condición necesaria y suficiente para la convergencia.

Por lo que se puede concluir que los pasos necesarios del análisis son:

- La consistencia conduce a la determinación del orden de precisión del esquema y su error de truncamiento.
- La estabilidad brinda información detallada de la distribución en frecuencias del error como función del contenido en frecuencia de la solución calculada.

De esta forma la convergencia queda definida sin necesitar análisis.

Una aproximación en diferencias finitas a una EDP podría ser consistente pero la solución no converger necesariamente a la solución de la EDP. El teorema de Equivalencia de Lax establece que además de la consistencia se necesita contar con la estabilidad del método.

## 4.5. Conclusiones

El método de las diferencias finitas mediante series de Taylor para la discretización de las derivadas de las variables de flujo permite aproximaciones más exactas, sin más que aproximar con más términos de la serie que se obtiene.

Una ventaja importante del método en diferencias finitas es su simplicidad teórica y la posibilidad de aumentar la precisión del método con solo aumentar el orden de aproximación de las derivadas. Requiere una malla estructurada, con lo cual el campo de aplicación se ve reducido a las de geometría sencilla como es la que se considera en este trabajo.

El método de elemento finito implica dividir el dominio en elementos triangulares (2 dimensiones) o tetraédricos (3 dimensiones) generando una malla no estructurada; que dependiendo del tipo de elemento y de la precisión que se quiera se tendrá que definir una malla más o menos fina de elementos.

Por último, el método de volúmenes finitos discretiza las ecuaciones en cada uno de los poliedros del dominio, en los que previamente se realiza una discretización espacial. Si bien este método es mucho más flexible porque puede complementarse con mallas estructuradas y no estructuradas, en el caso que se estudia aquí es equivalente al método de las diferencias finitas ya que la malla que se considera es estructurada y no tiene bordes irregulares.

# Capítulo 5

## Implementación Numérica

En este capítulo se analizará un método para resolver el problema planteado en el Capítulo 2.

El método de Lax-Wendroff de dos pasos es un método en diferencias finitas que resulta viable dadas las características y consideraciones hechas en los primeros capítulos, sin perder de vista la condición para obtener estabilidad del método.

En la sección 1 se hará una descripción del método de mencionado.

En la sección 2 se lo implementará a la red arterial en estudio teniendo en cuenta el interior de la arteria, la condición en la entrada a la arteria aorta, en las bifurcaciones y en cada punto terminal de la red que es donde se cierra el sistema.

### 5.1. Método de Lax-Wendroff

El método de Lax-Wendroff es un método de dos pasos<sup>1</sup> que considera diferencias centradas para la derivada respecto del espacio y hacia adelante para la derivada respecto del tiempo. Este método tiene las propiedades de ser un método consistente de orden 2 y estable es decir, impide que un error introducido mediante cualquier fuente crezca al evolucionar el tiempo.

Además el método requiere las ecuaciones en forma conservativa es decir

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} = S. \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Es un método de dos pasos porque para pasar de  $t = n$  al  $t = n + 1$  primero se evalúan las cantidades en el instante  $t = n + 1/2$  en los puntos de la malla espacial  $x = j - 1/2$  y  $x = j + 1/2$ , para luego calcular a partir de éstos los valores del nodo considerado en el instante actual  $x_j, t_{n+1}$ . El paso intermedio  $n + 1/2$  es necesario para obtener estabilidad en el método.

La Figura 5.1 muestra el mallado que se considera para este método.

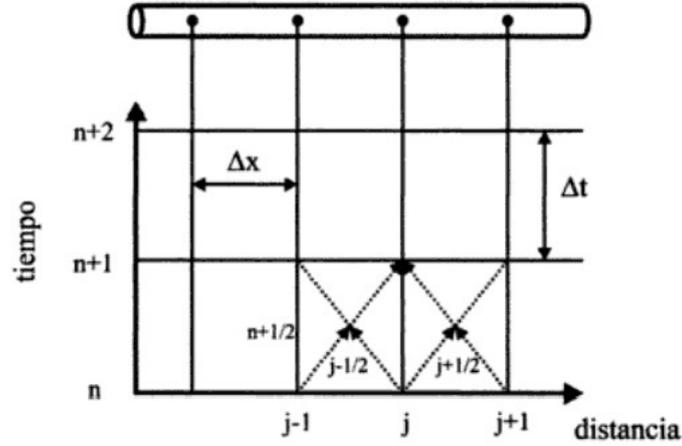


Figura 5.1: Mallado espacial y temporal del método de Lax-Wendroff. Anderson[1]

Si se aproxima la derivada temporal mediante diferencias hacia adelante se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial t}((n+1)\Delta t, m\Delta x) \approx \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

Para la derivada espacial mediante diferencias centradas

$$\frac{\partial R}{\partial x}((n+1/2)\Delta t, m\Delta x) \approx \frac{R_{m+1/2}^{n+1/2} - R_{m-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}, \quad (5.3)$$

y usando la simetría para  $S$ ,

$$S((n+1/2)\Delta t, m\Delta x) \approx \frac{S_{m-1/2}^{n+1/2} + S_{m+1/2}^{n+1/2}}{2}. \quad (5.4)$$

Luego la ecuación 5.1 se puede escribir

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \frac{R_{m+1/2}^{n+1/2} - R_{m-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = \frac{S_{m-1/2}^{n+1/2} + S_{m+1/2}^{n+1/2}}{2} \quad (5.5)$$

por lo que

$$U_m^{n+1} - U_m^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x}(R_{m-1/2}^{n+1/2} - R_{m+1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2}(S_{m-1/2}^{n+1/2} + S_{m+1/2}^{n+1/2}). \quad (5.6)$$

## 5.2. Implementación en el árbol arterial

Para aplicar el método al sistema en estudio (2.26) se expresan

$$\begin{aligned}
 \blacksquare U &= \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix}, \\
 \blacksquare R &= \begin{pmatrix} q^2 \\ \frac{q^2}{A} + \frac{f}{\rho} \sqrt{A_0 A} \end{pmatrix}, \\
 \blacksquare S &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\pi\nu q R}{\delta A} + \frac{1}{\rho} \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} f' \right) - A f' \right) \frac{dr_0}{dx} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

por lo que el sistema a resolver es

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q^2 \\ \frac{q^2}{A} + f \sqrt{A_0 A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\pi r}{\delta Re} \frac{q}{A} + \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

donde

- $A$ : área de la sección transversal de la arteria,
- $q$ : flujo sanguíneo,
- $A_0$ : área de la sección transversal para un punto con presión transmural cero,
- $r_0$ : radio de la arteria en la ubicación de presión transmural cero,
- $r$ : radio de la arteria,
- $f(r_0) = \frac{4Eh}{3r_0}$ ,
- $Re$ : número de Reynolds.

Si bien el sistema (5.7) es válido solo en el interior de una arteria, para considerar el árbol arterial completo además se necesitan condiciones iniciales en la entrada de la aorta, condiciones de salida en el punto donde se trunca el árbol arterial y condiciones en las bifurcaciones.

### 5.2.1. Interior de la arteria

Para este caso los nodos están distribuidos como lo muestra la Figura 5.2

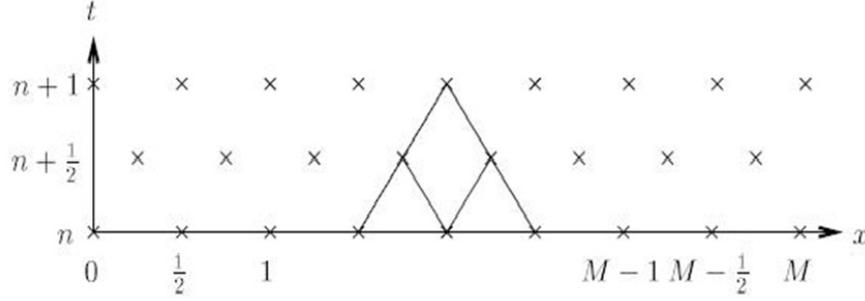


Figura 5.2: Nodos en el interior de la arteria. Ottesen[18].

De la ecuación (5.6) se tiene la expresión para calcular  $U$  en el paso  $m$  y tiempo  $n + 1$  a partir de  $U, R$  y  $S$  en tiempos y pasos anteriores es decir,

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (R_{m-1/2}^{n+1/2} - R_{m+1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2} (S_{m-1/2}^{n+1/2} + S_{m+1/2}^{n+1/2}). \quad (5.8)$$

En la expresión anterior hay cuatro valores de desconocidos  $R$  y  $S$  en tiempo intermedio. Para calcularlos se tiene en cuenta que  $R$  y  $S$  están en función de  $U$

$$\begin{aligned} R &= \left( q, \frac{q^2}{A} + f \sqrt{A_0 A} \right) \\ &= \left( U_2, \frac{U_2^2}{U_1} + f \sqrt{A_0 U_1} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} S &= \left( 0, -\frac{2\pi r_0 q}{\delta \mathcal{R} e A} + \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \right) \\ &= \left( 0, -\frac{2\pi r_0 U_2}{\delta \mathcal{R} e U_1} + \left( 2\sqrt{A_1} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - U_1 \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Luego, para calcular  $U$  en tiempo intermedio se discretiza nuevamente la ecuación (5.1) pero ahora en el punto  $((n + 1/2)\Delta t, (m + 1/2)\Delta x)$  de manera que se cumple

$$U_j^{n+1/2} = \frac{U_{j+1/2}^n + U_{j-1/2}^n}{2} + \Delta t \left( -\frac{R_{j+1/2}^n - R_{j-1/2}^n}{\Delta x} + \frac{S_{j+1/2}^n + S_{j-1/2}^n}{2} \right). \quad (5.11)$$

### 5.2.2. Condición de borde en la entrada a la aorta

En la entrada a la aorta los nodos están distribuidos como lo muestra la siguiente Figura

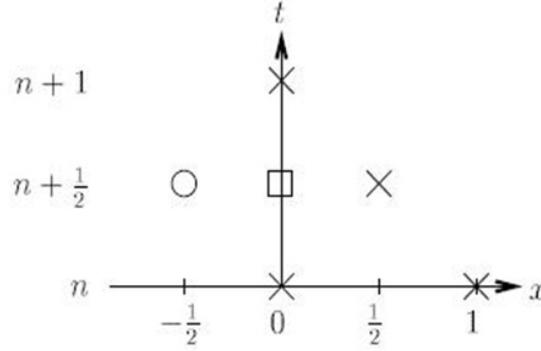


Figura 5.3: El círculo denota el punto fantasma marcado con un círculo en la entrada a la aorta. Olufsen[17].

Olufsen[17] describe el flujo en la entrada a la aorta mediante la función periódica

$$\begin{aligned} q(0, t) &= \frac{\bar{q}_0 t}{\tau} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}, \quad 0 \leq t \leq T \\ q(0, t + jT) &= q(0, t), \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde:

- $\bar{q}_0$ : salida cardíaca,
- $\tau$ : tiempo en el que se alcanzó el gasto cardíaco máximo,
- $T$ : longitud del período cardíaco.

La función tiene un salto en  $t = T$  pero es del orden  $10^{-18}$  así que se lo puede despreciar. Además hay que notar que el flujo de vuelta hacia el ventrículo izquierdo no está incluido.

Por otro lado, para calcular  $A$  se considera la ecuación (5.8) de manera que

$$A_m^{n+1} = A_m^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( R_{1_{m-1/2}}^{n+1/2} - R_{1_{m+1/2}}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( S_{1_{m+1/2}}^{n+1/2} + S_{1_{m-1/2}}^{n+1/2} \right) \quad (5.13)$$

que para  $m = 0$  (borde izquierdo) resulta

$$A_0^{n+1} = A_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( R_{1_{-1/2}}^{n+1/2} - R_{1_{1/2}}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( S_{1_{1/2}}^{n+1/2} + S_{1_{-1/2}}^{n+1/2} \right) \quad (5.14)$$

como además  $R_1 = q$  y  $S_1 = 0$  se obtiene

$$A_0^{n+1} = A_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( q_{-1/2}^{n+1/2} - q_{1/2}^{n+1/2} \right) \quad (5.15)$$

La incógnita en esta expresión es  $q_{-1/2}^{n+1/2}$  y de acuerdo a la Figura 5.3 el flujo en la entrada a la aorta en el tiempo  $n + 1/2$  se lo puede aproximar haciendo el promedio de dos valores en el tiempo  $n$  de manera que

$$q_0^{n+1/2} = \frac{q_{-1/2}^{n+1/2} + q_{1/2}^{n+1/2}}{2}. \quad (5.16)$$

Entonces

$$q_{-1/2}^{n+1/2} = 2q_0^{n+1/2} - q_{1/2}^{n+1/2}. \quad (5.17)$$

### 5.2.3. Condición de borde de salida

En cada punto terminal de la red en estudio los nodos están distribuidos de la siguiente manera

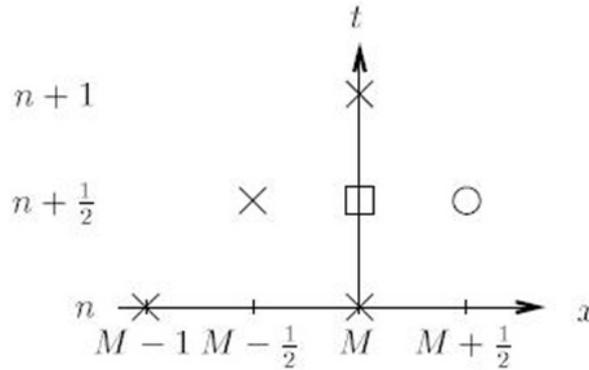


Figura 5.4: Borde derecho. Olufsen[17].

La Figura 5.4 muestra con una cruz los nodos que corresponden a las variables que son conocidas. Para determinar los valores de  $q$  y  $A$  en  $(M, n + 1)$  se necesita agregar un punto fantasma, que está marcado con un círculo y se usa la condición de borde marcado con un cuadrado. De manera similar al borde izquierdo se determina el valor en el punto  $(M, n + 1/2)$  haciendo un promedio con los valores en los puntos  $(M - 1/2, n + 1/2)$  y  $(M + 1/2, n + 1/2)$ .

Al considerar la ecuación (5.8) para  $A$  y  $q$  en el punto terminal  $M$  se tiene

$$A_M^{n+1} = A_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( R_{1M-1/2}^{n+1/2} - R_{1M+1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( S_{1M+1/2}^{n+1/2} + S_{1M-1/2}^{n+1/2} \right) \quad (5.18)$$

pero como  $S_1 = 0$

$$A_M^{n+1} = A_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( R_{1M-1/2}^{n+1/2} - R_{1M+1/2}^{n+1/2} \right). \quad (5.19)$$

Para  $q$  la ecuación (5.8) se puede expresar

$$q_M^{n+1} = q_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( R_{2M-1/2}^{n+1/2} - R_{2M+1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( S_{2M+1/2}^{n+1/2} + S_{2M-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (5.20)$$

De las ecuaciones (5.19) y (5.20) se tienen las incógnitas

$$\begin{aligned} \blacksquare q_M^{n+1}, & & \blacksquare R \left( A_{M+1/2}^{n+1/2}, q_{M+1/2}^{n+1/2} \right), \\ \blacksquare A_M^{n+1}, & & \blacksquare S_2 \left( A_{M+1/2}^{n+1/2}, q_{M+1/2}^{n+1/2} \right). \end{aligned}$$

De la misma manera que para el borde izquierdo, los valores en el tiempo  $n+1$  dependen de los marcados en el tiempo  $n + 1/2$  que se los puede determinar usando el punto fantasma que muestra la Figura 5.4, de manera que

$$q_M^{n+1/2} = \frac{q_{M-1/2}^{n+1/2} + q_{M+1/2}^{n+1/2}}{2} \quad (5.21)$$

$$A_M^{n+1/2} = \frac{A_{M-1/2}^{n+1/2} + A_{M+1/2}^{n+1/2}}{2} \quad (5.22)$$

de donde se obtienen dos incógnitas más  $q_M^{n+1/2}$  y  $A_M^{n+1/2}$ .

#### 5.2.4. Condiciones de bifurcación

En el caso de una bifurcación la situación es como las dos anteriores, hay un borde de salida y dos bordes de entrada por lo que se necesita un punto fantasma a la derecha o a la izquierda según corresponda porque no se puede usar directamente en el segmento padre los valores de los segmentos hijos ni viceversa.

Al igual que en los casos anteriores con los puntos fantasmas se calculan  $(q^i)_{\mathcal{M}}^{n+1/2}$  y  $(A^i)_{\mathcal{M}}^{n+1/2}$  con  $i = p, d_1, d_2$  y  $\mathcal{M} = M$  para la arteria padre y  $\mathcal{M} = 0$  para la arteria hija haciendo promedios

$$(q^i)_{\mathcal{M}}^{n+1/2} = \frac{q_{\mathcal{M}-1/2}^{n+1/2} + q_{\mathcal{M}+1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$(A^i)_{\mathcal{M}}^{n+1/2} = \frac{A_{\mathcal{M}}^{n+1/2} + A_{\mathcal{M}}^{n+1/2}}{2}.$$

En el caso de  $q$

$$(q^p)_M^{n+1/2} = \frac{(q^p)_{M-1/2}^{n+1/2} + (q^p)_{M+1/2}^{n+1/2}}{2}, \quad (5.23)$$

$$(q^{d_1})_0^{n+1/2} = \frac{(q^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_1})_{1/2}^{n+1/2}}{2}, \quad (5.24)$$

$$(q^{d_2})_0^{n+1/2} = \frac{(q^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_2})_{1/2}^{n+1/2}}{2}. \quad (5.25)$$

Para  $A$

$$(A^p)_M^{n+1/2} = \frac{(A^p)_{M-1/2}^{n+1/2} + (A^p)_{M+1/2}^{n+1/2}}{2}, \quad (5.26)$$

$$(A^{d_1})_0^{n+1/2} = \frac{(A^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (A^{d_1})_{1/2}^{n+1/2}}{2}, \quad (5.27)$$

$$(A^{d_2})_0^{n+1/2} = \frac{(A^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} + (A^{d_2})_{1/2}^{n+1/2}}{2}. \quad (5.28)$$

Además, por la conservación del flujo en los niveles  $n + 1/2$  y  $n + 1$  las condiciones que se tienen son

$$(q^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = (q^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2}, \quad (5.29)$$

$$(q^p)_M^{n+1} = (q^{d_1})_0^{n+1} + (q^{d_2})_0^{n+1}. \quad (5.30)$$

La condición de presión continua lleva a

$$(p^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = (p^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = (p^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2},$$

$$(p^p)_M^{n+1} = (p^{d_1})_0^{n+1} = (p^{d_2})_0^{n+1}.$$

Además, como la ecuación de estado establece que

$$p(r_0, A) = \underbrace{\frac{3 Eh}{4 r_0}}_{f(r_0)} \left( 1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right)$$

al reemplazar en las ecuaciones de (5.2.4) se obtiene

$$(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{(A^p)_{M+1/2}^{n+1/2}}} \right) = (f^{d_1})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_1})_0^{n+1}}{(A^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2}}} \right) = (f^{d_2})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_2})_0^{n+1}}{(A^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2}}} \right), \quad (5.31)$$

así como también

$$(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{(A^p)_M^{n+1}}} \right) = (f^{d_1})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_1})_0^{n+1}}{(A^{d_1})_0^{n+1}}} \right) = (f^{d_2})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_2})_0^{n+1}}{(A^{d_2})_0^{n+1}}} \right). \quad (5.32)$$

Luego, con la ecuación (5.8) se puede escribir  $(q^{(i)})_{\mathcal{M}}^{n+1}$  y  $(A^{(i)})_{\mathcal{M}}^{n+1}$ , con  $i = p, d_1, d_2$  y  $\mathcal{M} = M$  para  $i = p$  y 0 para  $i = d_1, d_2$  de manera que

$$(q^p)_M^{n+1} = (q^p)_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} - (R_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} + (S_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (5.33)$$

$$(q^{d_1})_0^{n+1} = (q^{d_1})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} + (S_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (5.34)$$

$$(q^{d_2})_0^{n+1} = (q^{d_2})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} + (S_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (5.35)$$

$$(A^p)_M^{n+1} = (A^p)_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^p)_{M-1/2}^{n+1/2} - (R_1^p)_{M+1/2}^{n+1/2} \right), \quad (5.36)$$

$$(A^{d_1})_0^{n+1} = (A^{d_1})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_1^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} \right) \quad (5.37)$$

$$(A^{d_2})_0^{n+1} = (A^{d_2})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_1^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} \right). \quad (5.38)$$

Por lo que las ecuaciones (5.21), (5.22), (5.29) - (5.38) forman un sistema algebraico de dieciocho ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{l}
(q^p)_M^{n+1/2} = \frac{(q^p)_{M-1/2}^{n+1/2} + (q^p)_{M+1/2}^{n+1/2}}{2} \\
(q^{d_1})_0^{n+1/2} = \frac{(q^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_1})_{1/2}^{n+1/2}}{2} \\
(q^{d_2})_0^{n+1/2} = \frac{(q^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_2})_{1/2}^{n+1/2}}{2} \\
(A^p)_M^{n+1/2} = \frac{(A^p)_{M-1/2}^{n+1/2} + (A^p)_{M+1/2}^{n+1/2}}{2} \\
(A^{d_1})_0^{n+1/2} = \frac{(A^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (A^{d_1})_{1/2}^{n+1/2}}{2} \\
(A^{d_2})_0^{n+1/2} = \frac{(A^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} + (A^{d_2})_{1/2}^{n+1/2}}{2} \\
(q^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = (q^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} \\
(q^p)_M^{n+1} = (q^{d_1})_0^{n+1} + (q^{d_2})_0^{n+1} \\
(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{(A^p)_M^{n+1/2}}} \right) = (f^{d_1})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_1})_0^{n+1}}{(A^{d_1})_0^{n+1/2}}} \right) = (f^{d_2})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_2})_0^{n+1}}{(A^{d_2})_0^{n+1/2}}} \right) \\
(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{(A^p)_M^{n+1}}} \right) = (f^{d_1})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_1})_0^{n+1}}{(A^{d_1})_0^{n+1}}} \right) = (f^{d_2})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_2})_0^{n+1}}{(A^{d_2})_0^{n+1}}} \right) \\
(q^p)_M^{n+1} = (q^p)_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} - (R_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} + (S_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} \right) \\
(q^{d_1})_0^{n+1} = (q^{d_1})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} + (S_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} \right) \\
(q^{d_2})_0^{n+1} = (q^{d_2})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} + (S_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} \right) \\
(A^p)_M^{n+1} = (A^p)_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^p)_{M-1/2}^{n+1/2} - (R_1^p)_{M+1/2}^{n+1/2} \right) \\
(A^{d_1})_0^{n+1} = (A^{d_1})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (R_1^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} \right) \\
(A^{d_2})_0^{n+1} = (A^{d_2})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_1^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} \right)
\end{array} \right.$$

cuyas incógnitas son:

$$\begin{array}{lll}
\blacksquare x_1 = (q^p)_M^{n+1} & \blacksquare x_5 = (q^{d_1})_0^{n+1/2} & \blacksquare x_6 = (q^{(d_1)})_{-1/2}^{n+1/2} \\
\blacksquare x_4 = (q^{d_1})_0^{n+1} & \blacksquare x_8 = (q^{d_2})_0^{n+1/2} & \blacksquare x_9 = (A^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} \\
\blacksquare x_7 = (q^{d_2})_0^{n+1} & \blacksquare x_{11} = (A^p)_M^{n+1/2} & \blacksquare x_{12} = (A^p)_{M+1/2}^{n+1/2} \\
\blacksquare x_{10} = (A^p)_M^{n+1} & \blacksquare x_{14} = (A^{d_1})_0^{n+1/2} & \blacksquare x_{15} = (A^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} \\
\blacksquare x_{13} = (A^{d_1})_0^{n+1} & \blacksquare x_{17} = (A^{d_2})_0^{n+1/2} & \blacksquare x_{18} = (A^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} \\
\blacksquare x_{16} = (A^{d_2})_0^{n+1} & \blacksquare x_2 = (q^p)_M^{n+1/2} & \\
\blacksquare x_2 = (q^p)_M^{n+1/2} & \blacksquare x_3 = (q^p)_{M+1/2}^{n+1/2} & 
\end{array}$$

Para resolver este sistema no lineal se aplica el método de Newton<sup>2</sup> por lo que se necesita conocer los residuos  $((f_r)_1, (f_r)_2, \dots, (f_r)_{18})$ . Para ello se analizan cada una de las ecuaciones.

### Ecuación (5.33)

$$(q^p)_M^{n+1} = (q^p)_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} - (R_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} + (S_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} \right)$$

donde

$$\begin{array}{l}
\blacksquare (q^p)_M^{n+1} = x_1, \\
\blacksquare (q^p)_M^n = a_1, \\
\blacksquare (R_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} = a_2, \\
\blacksquare (S_2^p)_{M-1/2}^{n+1/2} = a_8, \\
\blacksquare (R_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = \left[ \left( \frac{q^2}{A} + f\sqrt{A_0 A} \right)^p \right]_{M+1/2}^{n+1/2}, \\
\blacksquare (S_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = \left[ \left( -\frac{2\pi}{\delta \mathcal{R}e} r_0 \frac{q}{A} + (2\sqrt{A}(\sqrt{\pi}f + \sqrt{A_0}df) - Adf) dr_0 \right)^p \right]_{M+1/2}^{n+1/2}.
\end{array}$$

Si se desarrolla los dos últimos términos de (5.33)

$$\begin{aligned}
(R_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} &= \left[ \frac{(q^p)^2}{A^p} + f^p \sqrt{A_0^p A^p} \right]_{M+1/2}^{n+1/2} \\
&= \frac{(x_3)^2}{x_{12}} + a_3 \sqrt{a_4 x_{12}}
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>El método de Newton es eficiente en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, converge muy rápidamente y proporciona una muy buena precisión en los resultados.

si  $B(M + 1/2, x_{12}) = a_3\sqrt{a_4x_{12}}$  se tiene que

$$(R_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = \frac{(x_3)^2}{x_{12}} + B(M + 1/2, x_{12}).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (S_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} &= -\frac{2\pi}{\delta\mathcal{R}e} \left[ r_0^p \frac{q^p}{A^p} \right]_{M+1/2}^{n+1/2} + \left( 2\sqrt{A^p} \left( \sqrt{\pi} f^p + \sqrt{A_0^p} df^p \right) - dr_0^p \right)_{M+1/2}^{n+1/2} \\ &= -\frac{2\pi}{\delta\mathcal{R}e} a_5 \frac{x_3}{x_{12}} + (2\sqrt{x_{12}}(\sqrt{\pi}a_3 + \sqrt{a_4}a_6) - x_{12}a_6)a_7. \end{aligned}$$

Si

- $F(M + 1/2, x_3, x_{12}) = -\frac{2\pi}{\delta\mathcal{R}e} a_5 \frac{x_3}{x_{12}},$
- $\frac{dB}{dx}(M + 1/2, x_{12}) = \left( \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx} \right)_{M+1/2}^{n+1/2} = (2\sqrt{x_{12}}(\sqrt{\pi}a_3 + \sqrt{a_4}a_6) - x_{12}a_6)a_7,$

se tiene que

$$(S_2^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = F(M + 1/2, x_3, x_{12}) + \frac{dB}{dx}(M + 1/2, x_{12})$$

por lo que la ecuación (5.33) se puede expresar como

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x}}_{=\theta} \left( a_2 - \left( \frac{x_3^2}{x_{12}} + B(M + 1/2, x_{12}) \right) \right) + \\ &\quad + \underbrace{\frac{\Delta t}{2}}_{=\gamma} \left( F(M + 1/2, x_3, x_{12}) + \frac{dB}{dx}(M + 1/2, x_{12}) + a_8 \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Si se toma  $k_1 = a_1 + \theta a_2 + \gamma a_8$  se tiene

$$\begin{aligned} (f_r)_1 &= k_1 - x_1 - \theta \left( \frac{x_3^2}{x_{12}} + B(M + 1/2, x_{12}) \right) + \\ &\quad + \gamma \left( F(M + 1/2, x_3, x_{12}) + \frac{dB}{dx}(M + 1/2, x_{12}) \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

### Ecuación (5.34)

$$(q^{d_1})_0^{n+1} = (q^{d_1})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} + (S_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} \right)$$

donde

- $(q^{d_1})_0^{n+1} = x_4 ;$

- $(q^{d_1})_0^n = a_9$  ;
- $(R_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} = a_{12}$ ;
- $(S_2^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} = a_{13}$ ;
- $(R_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = \left[ \left( \frac{q^2}{A} + f\sqrt{A_0A} \right)^{d_1} \right]_{-1/2}^{n+1/2}$  ;
- $(S_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = \left[ \left( -\frac{2\pi}{\delta\mathcal{R}e} r_0 \frac{q}{A} + (2\sqrt{A}(\sqrt{\pi}f + \sqrt{A_0}df) - A df) dr_0 \right)^{d_1} \right]_{-1/2}^{n+1/2}$ .

Como  $(R_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = \left[ \frac{[q^{d_1}]^2}{A^{d_1}} + f^{d_1} \sqrt{A_0^{d_1} A^{d_1}} \right]_{-1/2}^{n+1/2} = \frac{(x_6)^2}{x_{15}} + a_{10} \sqrt{a_{11} x_{15}}$ ,

$B(-1/2, x_{15}) = a_{10} \sqrt{a_{11} x_{15}}$  por lo que  $(R_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = \frac{(x_6)^2}{x_{15}} + B(-1/2, x_{15})$ .

Entonces

$$\begin{aligned} (S_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} &= -\frac{2\pi}{\delta\mathcal{R}e} \left[ r_0^{d_1} \frac{q^{d_1}}{A^{d_1}} \right]_{-1/2}^{n+1/2} + \left[ \left( 2\sqrt{A^{d_1}} \left( \sqrt{\pi} f^{d_1} + \sqrt{A_0^{d_1}} df^{d_1} \right) - dr_0^{d_1} \right) \right]_{-1/2}^{n+1/2} \\ &= -\frac{2\pi}{\delta\mathcal{R}e} a_{14} \frac{x_6}{x_{15}} + (2\sqrt{x_{15}}(\sqrt{\pi}a_{10} + \sqrt{a_{11}}a_{15}) - x_{15}a_{15})a_{16}. \end{aligned}$$

Si

- $F(-1/2, x_6, x_{15}) = -\frac{2\pi}{\delta\mathcal{R}e} a_{14} \frac{x_6}{x_{15}}$ ;
- $\left( \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx} \right)_{-1/2}^{n+1/2} = \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{15}) = (2\sqrt{x_{15}}(\sqrt{\pi}a_{10} + \sqrt{a_{11}}a_{15}) - x_{15}a_{15})a_{16}$

se tiene  $(S_2^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = F(-1/2, x_6, x_{15}) + \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{15})$

por lo que la ecuación (5.34) queda

$$\begin{aligned} x_4 &= a_9 + \theta \left( \frac{(x_6)^2}{x_{15}} + B(-1/2, x_{15}) - a_{12} \right) + \\ &\quad + \gamma \left( a_{13} + F(-1/2, x_6, x_{15}) + \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{15}) \right). \end{aligned} \tag{5.41}$$

Si se toma  $k_2 = a_9 - \theta a_{12} + \gamma a_{13}$  se tiene

$$\begin{aligned} (f_r)_2 &= k_2 - x_4 + \theta \left( \frac{(x_6)^2}{x_{15}} + B(-1/2, x_{15}) \right) + \\ &\quad + \gamma \left( F(-1/2, x_6, x_{15}) + \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{15}) \right). \end{aligned} \tag{5.42}$$

**Ecuación (5.35)**

$$(q^{d_2})_0^{n+1} = (q^{d_2})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( (S_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} + (S_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} \right)$$

donde

- $(q^{d_2})_0^{n+1} = x_7$  ;
- $(q^{d_2})_0^n = a_{17}$  ;
- $(R_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} = a_{20}$ ;
- $(S_2^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} = a_{21}$ ;
- $(R_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = \left[ \left( \frac{q^2}{A} + f\sqrt{A_0 A} \right)^{d_2} \right]_{-1/2}^{n+1/2}$  ;
- $(S_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = \left[ \left( -\frac{2\pi}{\delta \mathcal{R}e} r_0 \frac{q}{A} + (2\sqrt{A}(\sqrt{\pi}f + \sqrt{A_0}df) - Adf)dr_0 \right)^{d_2} \right]_{-1/2}^{n+1/2}$ .

Como  $(R_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = \left[ \frac{[q^{d_2}]^2}{A^{d_2}} + f^{d_2} \sqrt{A_0^{d_2} A^{d_2}} \right]_{-1/2}^{n+1/2} = \frac{(x_9)^2}{x_{18}} + a_{18} \sqrt{a_{19} x_{18}}$

además  $B(-1/2, x_{18}) = a_{18} \sqrt{a_{19} x_{18}}$  por lo que

$$(R_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = \frac{(x_9)^2}{x_{18}} + B(-1/2, x_{18})$$

entonces

$$\begin{aligned} (S_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} &= -\frac{2\pi}{\delta \mathcal{R}e} \left[ (r_0^{d_2}) \frac{q^{d_2}}{A^{d_2}} \right]_{-1/2}^{n+1/2} + \left[ \left( 2\sqrt{A^{d_2}} \left( \sqrt{\pi} f^{d_2} + \sqrt{A_0^{d_2}} df^{d_2} \right) - dr_0^{d_2} \right) \right]_{-1/2}^{n+1/2} \\ &= -\frac{2\pi}{\delta \mathcal{R}e} a_{22} \frac{x_9}{x_{18}} + (2\sqrt{x_{18}}(\sqrt{\pi}a_{18} + \sqrt{a_{19}a_{23}}) - x_{18}a_{23})a_{24}. \end{aligned}$$

Si

- $F(-1/2, x_9, x_{18}) = -\frac{2\pi}{\delta \mathcal{R}e} a_{22} \frac{x_9}{x_{18}}$ ;
- $\left( \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx} \right)_{-1/2}^{n+1/2} = \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{18}) = (2\sqrt{x_{18}}(\sqrt{\pi}a_{18} + \sqrt{a_{19}a_{23}}) - x_{18}a_{23})a_{24}$

se tiene  $(S_2^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = F(-1/2, x_9, x_{18}) + \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{18})$

por lo que la ecuación (5.35)

$$x_7 = a_{17} + \theta \left( \frac{(x_9)^2}{x_{18}} + B(-1/2, x_{18}) - a_{20} \right) + \gamma \left( a_{21} + F(-1/2, x_9, x_{18}) + \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{18}) \right). \quad (5.43)$$

Si se toma  $k_{2a} = a_{17} - \theta a_{20} + \gamma a_{21}$  se tiene

$$(f_r)_3 = k_{2a} - x_7 + \theta \left( \frac{(x_9)^2}{x_{18}} + B(-1/2, x_{18}) \right) + \gamma \left( F(-1/2, x_9, x_{18}) + \frac{dB}{dx}(-1/2, x_{18}) \right). \quad (5.44)$$

### Ecuación (5.36)

$$(A^p)_M^{n+1} = (A^p)_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^p)_{M-1/2}^{n+1/2} - (R_1^p)_{M+1/2}^{n+1/2} \right)$$

donde

- $(A^p)_M^{n+1} = x_{10}$ ,
- $(A^p)_M^n = a_{25}$ ,
- $(R_1^p)_{M-1/2}^{n+1/2} = a_{26}$ ,
- $(R_1^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = (q^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = x_3$

por lo que la ecuación (5.36) queda

$$x_{10} = a_{25} + \theta(a_{26} - x_3).$$

si se toma  $k_3 = a_{25} + \theta a_{26}$  se tiene

$$(f_r)_4 = k_3 - x_{10} - \theta x_3. \quad (5.45)$$

### Ecuación (5.37)

$$(A^{d1})_0^{n+1} = (A^{d1})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^{d1})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_1^{d1})_{1/2}^{n+1/2} \right)$$

donde

- $(A^{d1})_0^{n+1} = x_{13}$ ,
- $(A^{d1})_0^n = a_{27}$ ,
- $(R_1^{d1})_{-1/2}^{n+1/2} = (q^{d1})_{-1/2}^{n+1/2} = x_6$ ,

$$\blacksquare (R_1^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} = (q^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} = a_{28}$$

por lo que la ecuación (5.37) queda

$$x_{13} = a_{27} + \theta(x_6 - a_{28}).$$

Si se toma  $k_4 = a_{27} - \theta a_{28}$  se tiene

$$(f_r)_5 = k_4 - x_{13} + \theta x_6. \quad (5.46)$$

### Ecuación (5.38)

$$(A^{d_2})_0^{n+1} = (A^{d_2})_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (R_1^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} - (R_1^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} \right)$$

donde

$$\blacksquare (A^{d_2})_0^{n+1} = x_{16},$$

$$\blacksquare (A^{d_2})_0^n = a_{29},$$

$$\blacksquare (R_1^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = (q^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = x_9,$$

$$\blacksquare (R_1^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} = (q^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} = a_{30}$$

por lo que la ecuación (5.38) queda

$$x_{16} = a_{29} + \theta(x_9 - a_{30}).$$

Si se toma  $k_{4a} = a_{29} - \theta a_{30}$  se tiene

$$(f_r)_6 = k_{4a} - x_{16} + \theta x_9. \quad (5.47)$$

### Ecuación (5.23)

$$(q^p)_M^{n+1/2} = \frac{(q^p)_{M-1/2}^{n+1/2} + (q^p)_{M+1/2}^{n+1/2}}{2}$$

donde

$$\blacksquare (q^p)_M^{n+1/2} = x_2,$$

$$\blacksquare (q^p)_{M-1/2}^{n+1/2} = a_{26},$$

$$\blacksquare (q^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = x_3$$

por lo que la ecuación (5.23) queda  $x_2 = \frac{a_{26} + x_3}{2}$ .

Si se toma  $k_5 = \frac{a_{26}}{2}$  se tiene

$$(f_r)_7 = k_5 + x_3/2 - x_2. \quad (5.48)$$

**Ecuación (5.24)**

$$(q^{d_1})_0^{n+1/2} = \frac{(q^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_1})_{1/2}^{n+1/2}}{2}$$

donde

- $(q^{d_1})_0^{n+1/2} = x_5,$
- $(q^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = x_6,$
- $(q^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} = a_{28}$

por lo que la ecuación (5.24) queda  $x_5 = \frac{a_{28} + x_6}{2}.$

Si se toma  $k_6 = \frac{a_{28}}{2}$  se tiene

$$(f_r)_8 = k_6 + x_6/2 - x_5. \quad (5.49)$$

**Ecuación (5.25)**

$$(q^{d_2})_0^{n+1/2} = \frac{(q^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} + (q^{d_2})_{1/2}^{n+1/2}}{2}$$

donde

- $(q^{d_2})_0^{n+1/2} = x_8,$
- $(q^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = x_9,$
- $(q^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} = a_{30}$

por lo que la ecuación (5.25) queda  $x_8 = \frac{a_{30} + x_9}{2}.$

Si se toma  $k_{6a} = \frac{a_{30}}{2}$  se tiene

$$(f_r)_9 = k_{6a} + x_9/2 - x_8. \quad (5.50)$$

**Ecuación (5.26)**

$$(A^p)_M^{n+1/2} = \frac{(A^p)_{M-1/2}^{n+1/2} + (A^p)_{M+1/2}^{n+1/2}}{2}$$

donde

- $(A^p)_M^{n+1/2} = x_{11},$

- $(A^p)_{M-1/2}^{n+1/2} = a_{31}$ ,
- $(A^p)_{M+1/2}^{n+1/2} = x_{12}$

por lo que la ecuación (5.26) queda  $x_{11} = \frac{a_{31} + x_{12}}{2}$ .

Si se toma  $k_7 = \frac{a_{31}}{2}$  se tiene

$$(f_r)_{10} = k_7 + x_{12}/2 - x_{11}. \quad (5.51)$$

### Ecuación (5.27)

$$(A^{d_1})_0^{n+1/2} = \frac{(A^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} + (A^{d_1})_{1/2}^{n+1/2}}{2}$$

donde

- $(A^{d_1})_0^{n+1/2} = x_{14}$ ,
- $(A^{d_1})_{-1/2}^{n+1/2} = x_{15}$ ,
- $(A^{d_1})_{1/2}^{n+1/2} = a_{32}$

por lo que la ecuación (5.27) queda  $x_{14} = \frac{a_{32} + x_{15}}{2}$ .

Si se toma  $k_8 = \frac{a_{32}}{2}$  se tiene

$$(f_r)_{11} = k_8 + x_{15}/2 - x_{14}. \quad (5.52)$$

### Ecuación (5.28)

$$(A^{d_2})_0^{n+1/2} = \frac{(A^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} + (A^{d_2})_{1/2}^{n+1/2}}{2}$$

donde

- $(A^{d_2})_0^{n+1/2} = x_{17}$ ,
- $(A^{d_2})_{-1/2}^{n+1/2} = x_{18}$ ,
- $(A^{d_2})_{1/2}^{n+1/2} = a_{33}$

por lo que la ecuación (5.28) queda  $x_{17} = \frac{a_{33} + x_{18}}{2}$ .

Si se toma  $k_{8a} = \frac{a_{33}}{2}$  se tiene

$$(f_r)_{12} = k_{8a} + x_{18}/2 - x_{17}. \quad (5.53)$$

**Ecuación (5.29)**

$$(q^p)_M^{n+1/2} = (q^{d_1})_0^{n+1/2} + (q^{d_2})_0^{n+1/2}$$

donde

- $(q^p)_M^{n+1/2} = x_2,$
- $(q^{d_1})_0^{n+1/2} = x_5,$
- $(q^{d_2})_0^{n+1/2} = x_8,$

por lo que la ecuación (5.29) queda

$$x_2 = x_5 + x_8, \quad (5.54)$$

entonces

$$(f_r)_{13} = -x_2 + x_5 + x_8. \quad (5.55)$$

**Ecuación (5.30)**

$$(q^p)_M^{n+1} = (q^{d_1})_0^{n+1} + (q^{d_2})_0^{n+1}$$

donde

- $(q^p)_M^{n+1} = x_1,$
- $(q^{d_1})_0^{n+1} = x_4,$
- $(q^{d_2})_0^{n+1} = x_7,$

por lo que la ecuación (5.30) queda

$$x_1 = x_4 + x_7, \quad (5.56)$$

entonces

$$(f_r)_{14} = -x_1 + x_4 + x_7. \quad (5.57)$$

**Ecuación (5.31)**

$$(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{(A^p)_M^{n+1/2}}} \right) = (f^{d_1})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_1})_0^{n+1}}{(A^{d_1})_0^{n+1/2}}} \right)$$

donde

- $(f^p)_M^{n+1} = a_{34},$
- $(A_0^p)_M^{n+1} = a_{35},$

- $(A^p)_M^{n+1/2} = x_{11}$ ,
- $(f^{d_1})_0^{n+1} = a_{36}$ ,
- $(A_0^{d_1})_0^{n+1} = a_{37}$ ,
- $(A^{d_1})_0^{n+1/2} = x_{14}$ ,

por lo que la ecuación (5.31) queda

$$a_{34} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{35}}{x_{11}}} \right) = a_{36} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{37}}{x_{14}}} \right).$$

Si se toma  $k_9 = a_{36} - a_{34}$ ,  $k_{10} = a_{34}\sqrt{a_{35}}$  y  $k_{11} = a_{36}\sqrt{a_{37}}$  se tiene

$$(f_r)_{15} = k_9 + \frac{k_{10}}{\sqrt{x_{11}}} - \frac{k_{11}}{\sqrt{x_{14}}}. \quad (5.58)$$

### Ecuación (5.31)

$$(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{(A^p)_M^{n+1/2}}} \right) = (f^{d_2})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_2})_0^{n+1}}{(A^{d_2})_0^{n+1/2}}} \right)$$

donde

- $(f^{d_2})_0^{n+1} = a_{38}$ ,
- $(A^{d_2})_0^{n+1} = a_{39}$ ,
- $(A^{d_2})_0^{n+1/2} = x_{17}$ ,

por lo que la ecuación (5.31) queda

$$a_{34} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{35}}{x_{11}}} \right) = a_{38} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{39}}{x_{17}}} \right).$$

Si se toma  $k_{9a} = a_{38} - a_{34}$ ,  $k_{10} = a_{34}\sqrt{a_{35}}$  y  $k_{11a} = a_{38}\sqrt{a_{39}}$  se tiene

$$(f_r)_{16} = k_{9a} + \frac{k_{10}}{\sqrt{x_{11}}} - \frac{k_{11a}}{\sqrt{x_{17}}}. \quad (5.59)$$

### Ecuación (5.32)

$$(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{(A^p)_M^{n+1}}} \right) = (f^{d_1})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_1})_0^{n+1}}{(A^{d_1})_0^{n+1}}} \right)$$

donde

- $(f^p)_M^{n+1} = a_{34}$ ,
- $(A^p)_M^{n+1} = a_{35}$ ,
- $(A^p)_M^{n+1} = x_{10}$ ,
- $(f^{d_1})_0^{n+1} = a_{36}$ ,
- $(A^{d_1})_0^{n+1} = a_{37}$ ,
- $(A^{d_1})_0^{n+1} = x_{13}$ ,

por lo que la ecuación (5.32) queda

$$a_{34} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{35}}{x_{10}}} \right) = a_{36} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{37}}{x_{13}}} \right).$$

Si se toma  $k_9 = a_{36} - a_{34}$ ,  $k_{10} = a_{34}\sqrt{a_{35}}$  y  $k_{11} = a_{36}\sqrt{a_{37}}$  se tiene

$$(f_r)_{17} = k_9 + \frac{k_{10}}{\sqrt{x_{10}}} - \frac{k_{11}}{\sqrt{x_{13}}}. \quad (5.60)$$

### Ecuación (5.32)

$$(f^p)_M^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^p)_M^{n+1}}{x_{10}}} \right) = (f^{d_2})_0^{n+1} \left( 1 - \sqrt{\frac{(A_0^{d_2})_0^{n+1}}{(A^{d_2})_0^{n+1/2}}} \right)$$

donde

- $(f^{d_2})_0^{n+1} = a_{38}$ ,
- $(A^{d_2})_0^{n+1} = a_{39}$ ,
- $(A^{d_2})_0^{n+1/2} = x_{16}$ ,

por lo que la ecuación (5.32) queda

$$a_{34} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{35}}{x_{10}}} \right) = a_{38} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_{39}}{x_{16}}} \right).$$

Si se toma  $k_{9a} = a_{38} - a_{34}$ ,  $k_{10a} = a_{34}\sqrt{a_{35}}$  y  $k_{11a} = a_{38}\sqrt{a_{39}}$  se tiene

$$(f_r)_{18} = k_{9a} + \frac{k_{10a}}{\sqrt{x_{10}}} - \frac{k_{11a}}{\sqrt{x_{16}}}. \quad (5.61)$$

Teniendo en cuenta  $(f_r)_1, \dots, (f_r)_{18}$  y derivándolos respecto de  $x_1, \dots, x_{18}$ , la matriz jacobiana  $Df_r$  es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_6 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_7 & 0 & 0 & \xi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{10} & 0 & 0 & \xi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

- $\xi_1 = -\theta_1 \frac{2x_3}{x_{12}} + \gamma \frac{dF(M + 1/2, x_3, x_{12})}{dx_3}$
- $\xi_2 = \theta_1 \left( \frac{(x_3)^2}{(x_{12})^2} - \frac{dB(M + 1/2, x_{12})}{dx_{12}} \right) + \gamma \left( \frac{dF(M + 1/2, x_3, x_{12})}{dx_{12}} + \frac{d^2B(M + 1/2, x_{12})}{dxdx_{12}} \right)$
- $\xi_3 = \theta_2 \frac{2x_6}{x_{15}} + \gamma \frac{dF(-1/2, x_6, x_{15})}{dx_6}$
- $\xi_4 = \theta_2 \left( -\frac{(x_6)^2}{(x_{15})^2} + \frac{dB(-1/2, x_{15})}{dx_{15}} \right) + \gamma \left( \frac{dF(-1/2, x_6, x_{15})}{dx_{15}} + \frac{d^2B(-1/2, x_{15})}{dxdx_{15}} \right)$
- $\xi_5 = \theta_3 \frac{2x_9}{x_{18}} + \gamma \frac{dF(-1/2, x_9, x_{18})}{dx_9},$
- $\xi_6 = \theta_3 \left( -\frac{(x_9)^2}{(x_{18})^2} + \frac{dB(-1/2, x_{18})}{dx_{18}} \right) + \gamma \left( \frac{dF(-1/2, x_9, x_{18})}{dx_{18}} + \frac{d^2B(-1/2, x_{18})}{dxdx_{18}} \right),$
- $\xi_7 = \frac{d(f_r)_{15}}{dx_{11}} = -\frac{k_{10}}{2}(x_{11})^{3/2} = -\frac{a_{34}}{2} \sqrt{\frac{a_{35}}{(x_{11})^3}},$
- $\xi_8 = \frac{d(f_r)_{15}}{dx_{14}} = \frac{k_{11}}{2}(x_{14})^{3/2} = -\frac{a_{36}}{2} \sqrt{\frac{a_{37}}{(x_{14})^3}},$

- $\xi_9 = \frac{d(f_r)_{16}}{dx_{17}} = \frac{a_{38}}{2} \sqrt{\frac{a_{39}}{(x_{17})^3}},$
- $\xi_{10} = \frac{d(f_r)_{17}}{dx_{10}} = -\frac{a_{34}}{2} \sqrt{\frac{a_{35}}{(x_{10})^3}},$
- $\xi_{11} = \frac{d(f_r)_{17}}{dx_{11}} = \frac{a_{36}}{2} \sqrt{\frac{a_{37}}{(x_{13})^3}},$
- $\xi_{12} = \frac{d(f_r)_{18}}{dx_{16}} = \frac{a_{38}}{2} \sqrt{\frac{a_{39}}{(x_{16})^3}},$

con

- $\frac{dB(l, x_i)}{dx_i} = \frac{f(r_0)_l}{2} \sqrt{\frac{(A_0)_l}{x_i}},$
- $\frac{d^2B(l, x_i)}{dx dx_i} = \left( \frac{1}{2\sqrt{x_i}} \left( f(r_0)_l \sqrt{\pi} + \left( \frac{df}{dr_0} \right)_l \sqrt{(A_0)_l} \right) - \left( \frac{df}{dr_0} \right)_l \right) \left( \frac{dr_0}{dx} \right)_l,$
- $\frac{dF(l, x_{i1}, x_{i2})}{dx_{i2}} = \frac{2\pi(r_0)_l}{\delta\mathcal{R}} \frac{x_{i1}}{(x_{i2})^2},$
- $\frac{dF(l, x_{i1}, x_{i2})}{dx_{i1}} = \frac{-2\pi(r_0)_l}{\delta\mathcal{R}} \frac{1}{x_{i2}}.$

### 5.3. Conclusiones

Para la resolución numérica del sistema hiperbólico se implementó el esquema de diferencias finitas conservativo, de segundo orden de precisión de dos pasos de Lax-Wendroff.

El empleo de un esquema de diferencias está justificado dada la suavidad de las soluciones siempre y cuando se trabaje bajo condiciones fisiológicas normales; bajo otro tipo de condiciones, la aparición de discontinuidades en las soluciones invalidará el modelo y se tendrá que usar otra técnica de resolución numérica como la de volumen finito.

La implementación se realizó considerando el interior de la arteria, la entrada a la aorta, el borde izquierdo de las arterias donde se trunca la red y la bifurcación. Como entrada de flujo se consideró una función periódica y para determinar el área de la sección transversal en ese punto se tuvo en cuenta la discretización del problema. Por último, en la bifurcación se tuvo en cuenta una salida y dos entradas además de las condiciones de conservación del flujo y continuidad de la presión, generándose un sistema no lineal de 18 ecuaciones que se resolvió por el método de Newton.

# Capítulo 6

## Resultados y conclusiones

Este capítulo se divide en tres secciones.

En la sección 1 se enuncian características del flujo y parámetros considerados en el capítulo 2. Éstos se reflejan en datos de un paciente típico.

En la sección 2 se analiza el impacto de la variación de algunos parámetros importantes.

Por último se exponen las conclusiones y se menciona las líneas futuras de investigación.

### 6.1. Características del modelo

Tal como se mencionó en el capítulo 1, las principales características del pulso arterial son:

- la presión máxima de las arterias grandes se incrementa desde el corazón hacia la periferia debido a la forma cónica de las arterias,
- la presión media de las arterias decae de acuerdo a la distribución de la impedancia de flujo de la red vascular<sup>1</sup>,
- la inclinación del perfil de presión entrante aumenta hacia la periferia. Este es un resultado de la dependencia de la presión de la velocidad de propagación de la onda tal que la parte de la onda con mayor presión viaja más rápido que la que tiene menor presión y,
- la onda dicrótica reflejada se separa de la onda de presión entrante y es más prominente en la periferia que en las proximidades.

Los resultados que se muestran en este trabajo representan las soluciones de las ecuaciones de la dinámica del fluido adimensional (5.7) junto a la ecuación de estado (2.20) y las condiciones de borde.

---

<sup>1</sup>Noordergraaf, A. (1978). *Circulatory System Dynamics*, Academic Press, San Diego, USA.

Se consideró

- la arteria como una superficie  $S$  elástica, tubular y rotacionalmente simétrica con terminales en los planos  $x = 0$  y  $x = L$ , cuyos datos geométricos para las arterias grandes están descritos en la Tabla 1.1.
- El radio mínimo está elegido como  $0,175 \text{ cm}$  para el árbol sistémico.
- La relación entre el módulo de Young, el grosor de la pared y el radio es  $\frac{Eh}{r_0}$ .
- La viscosidad se mantiene constante ya que los efectos viscoelásticos son pequeños dentro de los rangos fisiológicos del flujo y presión.

Sin embargo, como en la vida real los resultados de los perfiles de flujo y presión varían significativamente entre seres humanos sanos, un modelo para un caso particular podría requerir una investigación de los parámetros del paciente en cuestión.

## 6.2. Variación de los parámetros

En el modelo de arterias grandes se incluyen parámetros que afectan su comportamiento en varios sentidos. Estos son:

- La relación del módulo de Young ( $E$ ), con el grosor de la pared ( $h$ ) y el radio de la arteria ( $r_0$ ):

$$\frac{Eh}{r_0} = k_1 \exp(k_2 r_0) + k_3, \quad (6.1)$$

donde  $k_1 = 2,00 \times 10^7 \text{ g/s}^2/\text{cm}$ ,  $k_2 = -22,53 \text{ cm}^{-1}$ , y  $k_3 = 0,87 \times 10^6 \text{ g/s}^2/\text{cm}$  se muestra en la Figura 6.1.

- El gasto cardíaco, que es  $3,5 \text{ l/min}$  para nuestro modelo estándar y  $2,5 \text{ l/min}$  para el modelo usando los datos Stergiopulos<sup>2</sup>.
- El período del ciclo cardíaco  $T = 1 \text{ seg}$ .

Estos parámetros son en estado sano. Sin embargo, sus alteraciones se podrían usar para simular diversos estados de enfermedad tales como la rigidez arterial lo que es uno de los indicadores de diabetes. Por lo tanto, el propósito de las siguientes secciones es analizar cómo reacciona el modelo en estudio a las variaciones de los parámetros arriba mencionados.

---

<sup>2</sup>Stergiopulos, N., Young, D. y Rogge, T. (1992). Computer simulation of arterial flow with applications to arterial and aortic stenosis, J Biomech 25: 1477-1488.

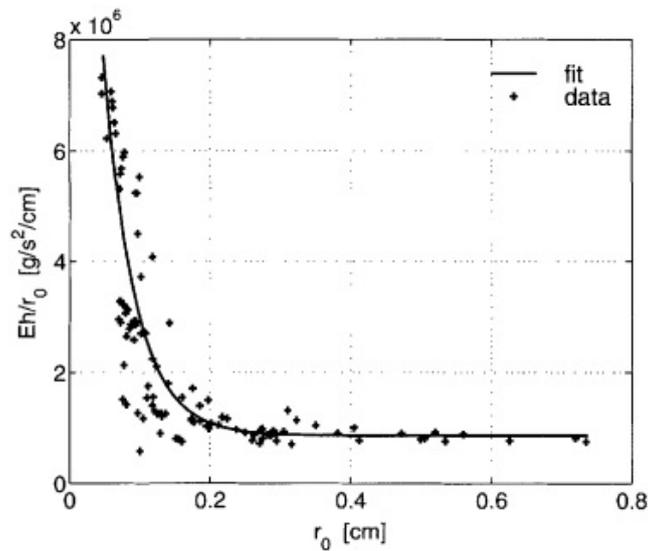


Figura 6.1: Ajuste de datos para  $\frac{Eh}{r_0}$  donde  $E$  es el módulo de Young,  $h$  el grosor de la pared y  $r_0$  el radio, a la función exponencial en 6.1. Ottesen[18]

### 6.2.1. Módulo de Young

Un incremento en el módulo de Young y por lo tanto del parámetro  $\frac{Eh}{r_0}$  corresponde a rigidez de la arteria. esto produce un incremento en la presión sistólica y una onda dicrótica atenuada como lo ilustra la Figura 6.2.

Al incrementar  $\frac{Eh}{r_0}$ , el límite  $\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{Eh}{r_0}$  se incrementa de  $0,87 \times 10^6 \text{ g}/(\text{s}^2 \cdot \text{cm})$  a  $2 \times 10^6 \text{ g}/(\text{s}^2 \cdot \text{cm})$  como muestra la Figura 6.1.

### 6.2.2. Gasto cardíaco

Un incremento en el gasto cardíaco causa un incremento tanto en la presión sistólica como en las ondas reflejadas cuya gráfica sería como la de la Figura 6.3.

### 6.2.3. Período del ciclo cardíaco

En este trabajo se tomó  $T = 1 \text{ seg}$ . Un incremento en el período implica que hay menos explosión de sangre en las arterias por minuto y con el fin de mantener un gasto cardíaco dado debe ingresar más sangre a la aorta en cada sístole lo que implica que la presión sistólica aumente y las ondas que se reflejan se hacen más pronunciadas. Un mayor período provoca un incremento en la presión. Esto se muestra en la Figura 6.4.

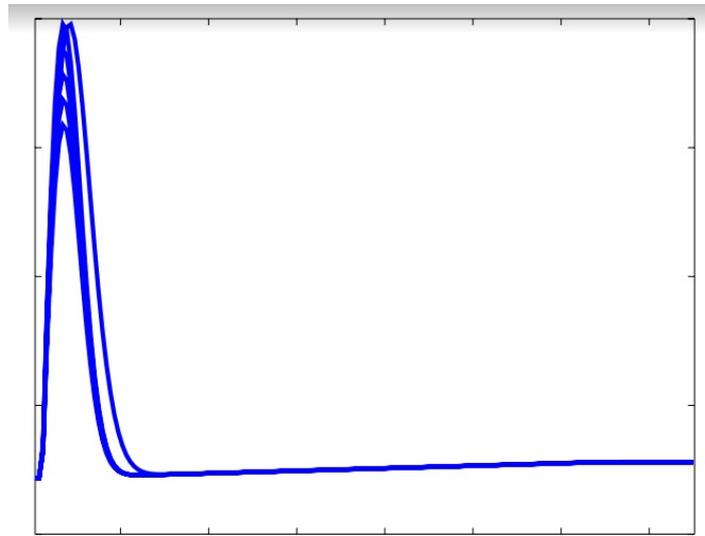


Figura 6.2: Flujo en la aorta en función del tiempo para valores cada vez más grandes de módulo de Young .

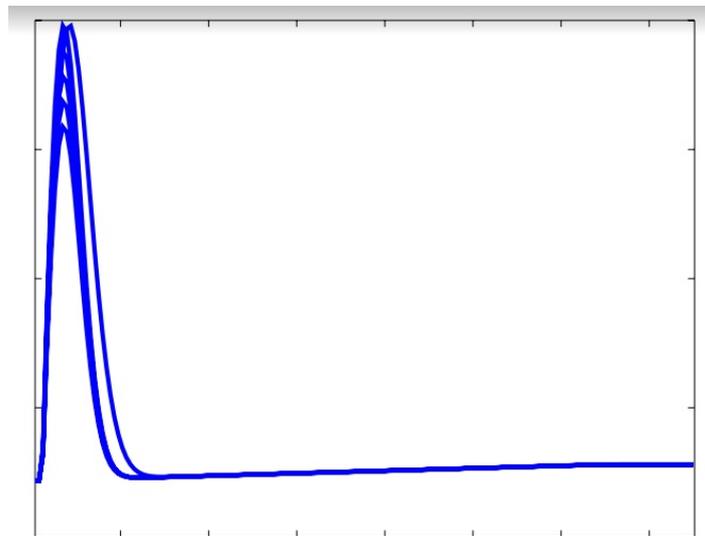


Figura 6.3: Flujo en la aorta en función del tiempo para valores cada vez más grandes del gasto cardíaco (a comprobar numéricamente).

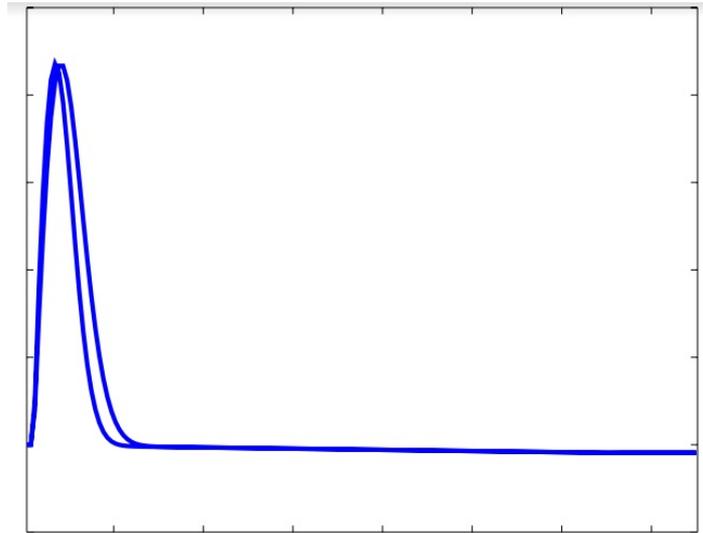


Figura 6.4: Flujo en la aorta en función del tiempo para valores cada vez más grandes del período.

### 6.3. Conclusiones

El propósito de este trabajo fue analizar un modelo matemático que permita predecir el flujo y la presión en las arterias sistémicas grandes humanas basado en principios fisiológicos. Para ello se tomó un modelo de la dinámica del fluido a lo largo de las arterias grandes de Ottesen[18], el cual involucra las ecuaciones de Navier Stokes combinadas a una ecuación de estado que relaciona la presión con el área de la sección transversal de la arteria.

En la primer sección de este capítulo se mencionó que los resultados de los perfiles de flujo y presión tienen todas las características correctas como ser,

- la presión sistólica aumenta a medida que se aleja del corazón,
- la presión media cae lentamente,
- la inclinación del perfil de presión entrante aumenta hacia la periferia, y
- la velocidad de la propagación de la onda dicrótica reflejada es más lenta que la de la onda principal, y por lo tanto la onda dicrótica se separa de la onda principal periféricamente.

Para ello, fue necesario reducir la salida cardíaca a  $3,5 \text{ l/min}$ . Esta es una consecuencia natural del hecho que no incluye todas las ramas de las arterias por lo que no se puede tener en cuenta todo el gasto cardíaco.

Se usó una función estrictamente positiva para generar el perfil de entrada y aún así observar las ondas reflejadas que se esperaba. Por lo que se puede concluir que el factor

principal que crea las reflexiones de la onda no es la aparición de un flujo negativo en el ventrículo izquierdo, sino la disminución gradual y las bifurcaciones de los vasos combinados con la resistencia periférica.

El análisis del comportamiento del modelo bajo ciertas variaciones muestran que estos parámetros afectan al modelo como se espera.

Para los parámetros el sistema en general es decir: gasto cardíaco, longitud del período, módulo de Young, y geometría de las arterias grandes se ve que el modelo se comporta como se esperaba.

Un incremento del gasto cardíaco causa un incremento de la presión sistólica así como las ondas reflejadas más pronunciadas.

Un incremento en el período implica que hay pocas ráfagas de sangre en las arterias por minuto y para mantener un gasto cardíaco dado más sangre entra a la aorta en cada sístole. Lo significa que la presión sistólica aumenta y la que las ondas reflejadas se vuelven más pronunciadas.

Si bien en la mayoría de los casos se usa un modelo muy simple del módulo de Young se puede observar el comportamiento cuando cambia el parámetro. En los resultados se observa que cuando se deje crecer a  $Yh/r_0$  con el decrecimiento del radio de la arteria causa un incremento en la presión sistólica y una atenuación de las ondas reflejadas. Si el modelo se usa para estudiar un comportamiento local de cambios en la elasticidad arterial, esta función se debería modelar más cuidadosamente.

Los datos geométricos de base para las arterias grandes también tuvieron impactos en los resultados. Las dimensiones de las arterias grandes en humanos varían considerablemente, por ejemplo será la aorta de un hombre de 2m de altura más larga que la de una mujer que mide 1.5m? Sin embargo para ambos, los perfiles de presión tiene las mismas características de personas sanas.

### 6.3.1. Perspectivas

Se podría modificar y mejorar el modelo arterial que se presenta en este trabajo. A continuación se dará una idea de algunos de estos.

#### Módulo de Young y ecuación de estado

Si bien se usó una ecuación de estado simple (basada en la teoría de la elasticidad) donde  $Yh/r_0$  decrece exponencialmente con un incremento del radio, la dependencia funcional entre el módulo de Young, el grosor de la pared y el radio se podría pensar en mejorarlo. Sin embargo, no se debe perder de vista que no es fisiológicamente correcto usar un modelo puramente elástico para la pared arterial.

### Situaciones patológicas

Para validar el modelo arterial, se debería estudiar una serie de situaciones patológicas.

Dado que el modelo que se analizó se basa en el supuesto de flujo laminar, no sería adecuado para estudiar los fenómenos relacionados con la aterosclerosis, ya que estos a menudo dan lugar a vórtices y turbulencias. Sin embargo, sería interesante estudiar los efectos que surgen de los cambios en la pared vascular, lo que está relacionado al envejecimiento, diabetes, vasoconstricción o vaso-dilatación.

Por otro lado, así como se puede analizar fenómenos resultantes de la rigidez de las arterias, también se debería estudiar lo contrario es decir, la vasodilatación. En este caso, el límite de  $Yh/r_0$  debería decrecer cuando  $r_0 \rightarrow 0$  como resultado de la rigidez de las arterias más chicas tales como las femorales y radiales pero con solo un pequeño cambio en la elasticidad de las arterias más grandes como la aorta. Esto debería resultar en una reducción de la presión sistólica y una reducción de las reflexiones de la onda porque se debe a un desfazaje en las primeras reflexiones (Nichols y O'Rourke, 1998). Sin embargo, si uno desea estudiar las implicaciones para arterias específicas es decir, cambios más locales, se debería incorporar un modelo más sofisticado de la elasticidad de la pared arterial.

# Apéndice A

En este apéndice se muestran partes de algunos scripts diseñados en Octave a lo largo de este trabajo.

## A.1. Datos

```
datos.m
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 % Datos del sistema arterial utilizados para resolver el problema. Se asume que el arbol arterial es un arbol binario.
3
4 %Las arterias son numeradas desde 1 a Narterias
5
6 % L      es un vector columna, L(i) es la longitud de la i-ésima arteria.
7
8 % rtop   es un vector columna, rtop(i) es el radio en el extremo inicial de la i-ésima arteria.
9
10 % rbot   es un vector columna, rbot(i) es el radio en el extremo final de la i-ésima arteria.
11 %
12 % siguiente es una matriz, la i-ésima fila indica los índices de las
13 %          arterias en las que se divide la i-ésima arteria.
14 %          siguiente(i,1) es la que está a la derecha y
15 %          siguiente(i,2) es la que está a la izquierda.
16 %          siguiente(i,1)=siguiente(i,2)=0 indica que la arteria i
17 %          es terminal, es decir no se divide.
18
19 % t0     es el corrimiento que hacemos en la función que define el ciclo cardíaco
20
21 % h      es el grosor de la pared arterial medido en cm
22
23 %ps y pd es la presión sistólica y diastólica respectivamente
24
25 %Re     es el número de Reynolds
26
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Figura A.1: Datos del problema.

```

29 function datos(NA)
30
31 global M L d rtop rbot anterior siguiente h Narterias Reynolds ps pd t0 k1 k2 k3 mu p0 deltat;
32
33 L1=[1 10 3 3 3.5 3.5 16.75 13.5 39.75 22 22.25 4 19.25 5.5 10.5 7.25 3.5 13.5 39.75 22.25 22 2 2 6.5 5.75 5.5 5.25
34     5 1.5 3 1.5 3 12.5 3.75 8 5.75 14.5 4.5 11.25 44.25 5.75 15.75 32 32 7 17 17 7];
35
36 rtop1=[1.525 0.350 1.502 1.420 0.950 0.425 0.525 0.200 0.407 0.175 0.175 1.342 0.525 1.246 1.124 0.630 0.425
37         0.200 0.407 0.175 0.175 0.350 0.300 0.275 0.175 0.200 0.924 0.400 0.838 0.275 0.814 0.275 0.792 0.200
38         0.627 0.400 0.370 0.200 0.200 0.314 0.275 0.275 0.125 0.125 0.100 0.200 0.200 0.100];
39
40 rbot1=[1.502 0.300 1.420 1.342 0.700 0.407 0.400 0.200 0.250 0.175 0.175 1.246 0.400 1.124 0.924 0.500 0.407
41         0.200 0.250 0.175 0.175 0.300 0.250 0.250 0.150 0.200 0.838 0.350 0.814 0.275 0.792 0.275 0.627 0.175
42         0.550 0.370 0.314 0.200 0.200 0.200 0.200 0.125 0.125 0.100 0.200 0.200 0.100];
43
44 anterior1=[0; 1; 1; 3; 3; 5; 5; 6; 6; 9; 9; 4; 4; 12; 14; 14; 12; 17; 17; 19; 19; 15; 22; 22; 23; 23; 15; 27; 27; 29; 29;
45            31; 31; 33; 33; 35; 36; 36; 37; 37; 7; 13; 40; 40; 11; 11; 20; 20];
46
47 siguiente1=[ 2 3; 0 0; 4 5; 12 13; 7 6; 8 9; 41 41; 0 0; 10 11; 0 0; 45 46; 14 17; 42 42; 15 16; 22 27; 0 0;
48             19 18; 0 0; 20 21; 47 48; 0 0; 24 23; 26 25; 0 0; 0 0; 0 0; 29 28; 0 0; 30 31; 0 0; 33 32; 0 0;
49             35 34; 0 0; 36 36; 37 38; 39 40; 0 0; 0 0; 44 43; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0];
50
51 ps=80; pd=120; Re=1500; mu=0.049;
52
53 h1=[0.163 0.163 0.163 0.132 0.086 0.067 0.063 0.045 0.050 0.043 0.049 0.027 0.063 0.116 0.116 0.067 0.067 0.045
54     0.050 0.049 0.043 0.064 0.049 0.049 0.045 0.054 0.080 0.069 0.080 0.053 0.108 0.069 0.108 0.043 0.080 0.055
55     0.050 0.040 0.049 0.050 0.026 0.042 0.045 0.020 0.028 0.462 0.046 0.028];
56 end
    
```

Figura A.2: Datos. Características para cada arteria considerada obtenidos de Ottesen[18].

## A.2. Constantes arterias

```

constantes_arteria.m
1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  % Calcula los valores de las funciones r0, A0, Y, f, df, dr0, r1 para los valores rbot,rtop,var,L correspondiente a una determinada arteria.
3
4  % r0 radio de la arteria para presión transmural cero.
5  % A0 área de la sección transversal de la arteria con presión transmural cero.
6  % Y módulo de Young
7  % f 4*E*h/3*r0
8  % df derivada de f
9  % dr0 derivada de dr0 respecto de x
10 % r1 radio a lo largo de la arteria, le da la forma cónica
11
12 % Se calculan (size(var)+4) valores de cada función correspondientes a puntos igualmente espaciados de la arteria en estudio.
13
14 % Los últimos 4 valores corresponden los valores de las funciones los puntos -1/2, 1/2, M-1/2 y M+1/2 que los necesito para resolver
15 % bifurcación.
16
17 % Los valores que se calculan NO dependen del tiempo pero si del paso (M)
18
19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    
```

Figura A.3: En este script se calculan algunas constantes que dependen de cada arteria en el tiempo  $n$ .

```

19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20
21 % Los cálculos se hacen a partir de:
22
23 % r0=rtop*(rbot/rtop)^x, donde x=nodo*L/(M+1)
24 % A0=pi*(r0)^2,
25 % Y=(r0*(k1*exp(k2*r0)+k3))/h;
26 % f=4*Y*h/(3*r0);
27 % df=-4/3*Y*h/(r0)^2;
28 % dr0=rtop*(rbot/rtop)^x*log(rbot/rtop)
29 % r1=rtop*exp(-k*x)
30
31 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
32
33 % Datos:
34
35 % rtop radio al comienzo de la arteria.
36 % rbot radio al final de la arteria.
37 % var índices de los nodos a considerar.
38 % L longitud de la arteria.
39 % M cantidad de intervalos en la discretización de la arteria.
40
41 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Figura A.4: Funciones a partir de las cuales se realizan los cálculos y los datos necesarios.

### A.3. Condición inicial

```

condicion_inicial.m
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2
3 % Aquí calculo para cada arteria U, R y S (datos que usaré para seguir con las iteraciones) para el tiempo inicial (t=1 en Octave).
4 % Pero como las arterias están unidas, al terminar una y comenzar la otra debe haber algún tipo de relación que deba cumplirse.
5
6 % q0 salida cardiaca para una persona adulta, 70 kg. con vasos sanguíneos normales y sin hipertensión (mmHg)
7
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9
10 % Datos:
11
12 % t0 = para que la función no tenga saltos
13 % d = es la matriz de puntos que se utilizaron para la interpolación
14 % tc = duración del ciclo
15 % ps = presión sistólica
16 % pd = presión diastólica
17 % r0, A0, f, df, dr0, r1, Y = cantidades que se calcularon en funciones
18
19 % Resultados:
20
21 % U para t=0, lo que significa que tendré U(i,:;1) (dos filas, en los pasos de 1 a M+1, para todas las arterias en el tiempo inicial)
22
23 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Figura A.5: Condición inicial. En este script se calcula el valor del flujo y la presión para cada arteria en el tiempo  $t = 0$ .

### A.4. Calculo del área de la sección transversal y el flujo en el tiempo $n + 1$

```

calculo_A_q.m
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 % Calcula presión y flujo para el en el árbol arterial definido en datos.m
3
4 % Datos:
5
6 % N1      intervalos de tiempo
7 % M1      intervalos en los que se divide cada arteria
8 % dt1     paso temporal
9 % tc1     duración del ciclo cardíaco(para comenzar pondremos 0.8)
10 % dt1     delta t
11 % t01     corrimiento del tiempo
12
13 % calculo_q0      modela el flujo en la entrada de cada una de las arterias para cualquier tiempo t
14
15 % condición inicial  calculo U=(A,q) para todo M con t=0
16
17 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
18
19 % Variables:
20
21 % UT dimension 2,M+1 pasos ,Narterias (# de arterias), tiempo N+1
22 % RT dimension 2,M+1,Narterias,N+1
23 % ST dimension 2,M+1,Narterias,N+1
24
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    
```

Figura A.6: Calcula el flujo y la presión para cada arteria en el tiempo  $n + 1$ .

```

26 function [UT,RT,ST]= calculo_A_q(N1,M1,NA1,dt1,tc1,t01,etapa,verb1,graf1,rango1,dir,qxt,Q01)
27
28 global M deltat q0 NA tc t0;
29
30 global L d rtop rbot anterior siguiente h Narterias Reynolds ps pd t0 k1 k2 k3;
31 global mu p0 dtdxarray Q0 vp;
32
33 global r0 A0 Y f df dr0 r1;
34 global r0I A0I YI fI dfI dr0I r1I;
35
36 UT = zeros(2,M+1,Narterias,N+1);
37 RT = zeros(2,M+1,Narterias,N+1);
38 ST = zeros(2,M+1,Narterias,N+1);
39
40 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41 [r0,A0,f,df,dr0,r1,Y]= constantes_arteria(var);
42 [r0I,A0I,fI,dfI,dr0I,r1I,YI]= constantes_arteria(var2-1.5);
43 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
44
45 [q0] = calculo_q0(t0,tc);
46 if (etapa == 0)
47     [UT(1, :, :), UT(2, :, :)] = condicion_inicial();
48 else
49     [UT(1, :, :), UT(2, :, :)] = condicion_inicial_continuacion(dir);
50 end
51 [RT(:, :, :), ST(:, :, :)] = RI_SI(UT(:, :, :), r0, A0, f, df, dr0);
52 end
    
```

Figura A.7: Datos y scripts necesarios para los cálculos.

## A.5. Calculo del área de la sección transversal y el flujo en el tiempo intermedio

```

calculo_UI.m
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %
3 % Calcula los valores U en el tiempo n+1/2, en los puntos interiores de cada arteria a partir de los valores de las funciones en el tiempo n.
4 %
5 % Los resultados son matrices de orden 2xMxNarterias, correspondientes a la discretización en los puntos interiores de una arteria.
6 %
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8 % Datos:
9 %
10 % U   matriz de dimensión 2x(M+1)xNarterias, en el tiempo n
11 % R   matriz de dimensión 2x(M+1)xNarterias, en el tiempo n
12 % S   matriz de dimensión 2x(M+1)xNarterias, en el tiempo n
13 % deltat paso en en tiempo
14 % r0   radio de la vena para presión transmural cero
15 % A0   área de la sección transversal de la arteria con presión transmural cero
16 % f    4*y*h/(3*r0)
17 % df   derivada de f
18 % dr0  derivada de r0
19 % r1   radio a lo largo de la arteria, depende de x y de t
20 % L    longitud de la arteria
21 % M    cantidad de intervalos en la discretización de la arteria
22 %
23 % Resultados:
24 %
25 % UI: U en el tiempo n+1/2 en los nodos interiores
26 %
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    
```

Figura A.8: Calcula los valores de flujo y del área de la sección transversal para el tiempo  $n + 1/2$ .

# Apéndice B

## B.1. Número de Reynolds

El punto en el cual se produce el cambio de régimen laminar a turbulento viene definido por el número de Reynolds. En la sangre se considera que el número de Reynolds para alcanzar dicha velocidad crítica es de 2000, lo cual sólo tiene lugar de forma fisiológica durante la sístole<sup>1</sup> en la aorta ascendente y a la salida de algunas bifurcaciones, así como de forma patológica a la salida de una estenosis.

Mazumdar[12] y Nigro[15] el número de Reynolds se define como:

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (\text{B.1})$$

donde

- $\rho$  es la densidad del fluido,
- $v$  es la velocidad media del flujo sanguíneo,
- $d$  es el diámetro del vaso,
- $\nu$  es la viscosidad cinemática y
- $\mu$  es la viscosidad de la sangre.

El número de Reynolds sirve para caracterizar el patrón de flujo. La expresión (B.1) representa la relación entre las fuerzas inerciales (numerador) con las fuerzas viscosas (denominador).

A partir de  $\mathcal{R}e = 1200$  comienzan las oscilaciones y se establece turbulencia cuando  $\mathcal{R}e$  es mayor a 2000.

Desde el punto de vista de la mecánica de los fluidos, se justifica el uso del modelo del flujo laminar ya que el rango arterial desde el arco aórtico y sus ramificaciones a estudiar se encuentran entre 400 y 1500 por debajo del límite aceptado para la transición a la turbulencia.

---

<sup>1</sup>Movimiento de contracción del corazón y de las arterias para empujar la sangre que contienen.

## B.2. Forma conservativa del modelo

Si se define

$$B(r_0(x), p(x, t)) = \frac{1}{\rho} \int A(x, t) dp. \quad (\text{B.2})$$

Derivando ambos miembros se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx} + \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{\rho} \int A(x, t) dp, \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int A(x, t) dp, \\ &= \frac{A(x, t)}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int dp, \\ &= \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx}.$$

Al reemplazar (2.16) se tiene

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx} + \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} + \frac{q}{A} \psi = 0,$$

luego, si se reagrupa

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + B \right) = \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx} - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} - \frac{q}{A} \psi = 0.$$

Luego, el sistema (2.22) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\psi \\ , \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + B \right) &= \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dx} - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} - \frac{q}{A} \psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Por otro lado, si se tiene en cuenta (2.21) y la definición de  $B$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\rho} \int A dp = \frac{1}{\rho} \int \frac{A_0 f^2(r_0)}{(p - f(r_0))^2} dp \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{f^2(r_0) A_0}{(f(r_0) - p)} = \frac{f(r_0) A_0}{\rho(1 - p/f(r_0))} \\ &= \frac{f(r_0)}{\rho} \sqrt{A_0 A}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{dr_0}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{2\pi r_0 f + A_0 \frac{df}{dr_0}}{1 - p/f} + \frac{A_0 f}{f(1 - p/f)^2} \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx}.\end{aligned}$$

### B.3. Análisis del sistema

El sistema (2.26) es cuasilíneo si se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  dependen de  $(x, t)$  y  $\mathbf{w} = (A, q)^T$ .

De

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A}, \tag{B.5}$$

se tiene que si se desarrollan los términos  $\frac{\partial p}{\partial x}$  y  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right)$  se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial x}(r_0, A) = \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) = 2 \frac{q}{A} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q^2}{A^2} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right).$$

Por lo que la segunda ecuación del sistema (2.22) se puede expresar como

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{q}{A} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q^2}{A^2} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{A}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} \right] = - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A},$$

que reagrupando,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{q}{A} \frac{\partial q}{\partial x} + \left( \frac{A}{q} \frac{\partial p}{\partial A} - \frac{q^2}{A} \right) \frac{\partial A}{\partial x} = - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x}.$$

Luego  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  quedan definidos como:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{A^2} + \frac{A}{q} \frac{\partial p}{\partial A} & 2 \frac{q}{A} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\pi\nu q R}{\delta A} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, al analizar los valores propios de  $A$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{q^2}{A^2} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} & \lambda - 2\frac{q}{A} \end{vmatrix} &= \lambda(\lambda - 2\frac{q}{A}) + \frac{q^2}{A^2} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} = 0 \\ &= \lambda^2 - 2\frac{q}{A}\lambda + \frac{q^2}{A^2} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo que } \Delta = \left(-2\frac{q}{A}\right)^2 - 4\left(\frac{q^2}{A^2} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A}\right) > 0$$

lo que implica que los valores propios de  $A$  son reales entonces el sistema es hiperbólico.

## B.4. Ley de Laplace - Tensión circunferencial

La ley de Laplace establece que la tensión parietal  $T$  es directamente proporcional a la presión transmural  $P$  y al radio del vaso  $r$  e inversamente proporcional al grosor de la pared vascular  $\delta$ , de manera que

$$T = \frac{R r}{\delta}$$

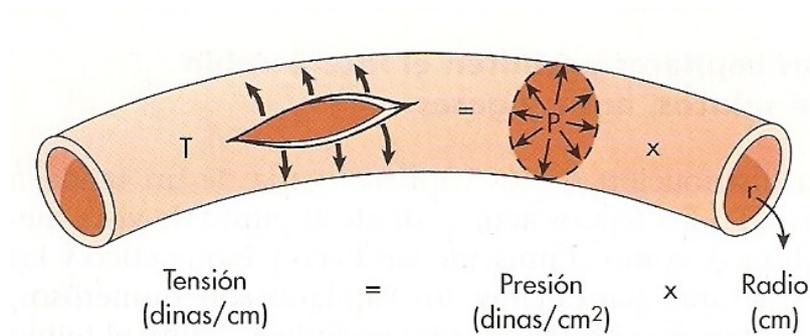


Figura B.1: Ley de Laplace

Por ejemplo, si se tiene una gran presión transmural  $P$  y se quisiera que estuviera (esta misma presión) en un vaso sanguíneo sin producir gran tensión parietal entonces el vaso sanguíneo tiene que tener un radio pequeño o una pared muy gruesa para soportar esa gran presión  $P$  sin producir una gran tensión superficial  $T$ .

## B.5. Método de las características

La consideración de las características de una ecuación, o sistema de ecuaciones, es esencial en cualquier desarrollo o estudio de métodos numéricos para ecuaciones hiperbólicas ya que las curvas características se pueden definir como curvas que transportan información. Cualquier perturbación que se produzca será transmitida por las velocidades características que están directamente relacionadas con las curvas características. Morton[13].

Estas curvas poseen relevancia en el análisis de problemas con condiciones iniciales determinadas. Sin embargo, también se aplican a problemas que no poseen dependencia del tiempo, en los cuales las condiciones de contorno trabajan matemáticamente en forma similar a las condiciones iniciales.

Anderson[1] considera el sistema de ecuaciones lineal

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + [B] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{r} = 0 \quad (\text{B.6})$$

donde por simplicidad supone que

- las matrices  $[A]$  y  $[B]$  son funciones de  $t, x, y$ ,
- la variable dependiente  $\mathbf{u}$  es un vector columna incógnito y
- el vector  $\mathbf{r}$  depende de  $\mathbf{u}, \mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

El sistema (B.6) se dice hiperbólico en un punto  $(x, t)$  si los valores propios de  $A$  son reales y distintos<sup>2</sup>.

Si se considera el siguiente sistema

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.7})$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios  $\lambda$  de la matriz  $[A]$  se determinan de

$$\det |[A] - \lambda[I]| = 0$$

---

<sup>2</sup>Morton[13] define un sistema como hiperbólico si los valores propios de  $[A]$  son reales y si  $[A]$  se puede escribir como  $[T][\lambda][T]^{-1}$  donde  $[\lambda]$  es una matriz diagonal de valores propios de  $[A]$  y  $[T]^{-1}$  es la matriz de los valores propios por izquierda. Lo mismo se puede decir del comportamiento del sistema en las variables  $(y, t)$  con respecto a la matriz  $B$

de modo que

$$\begin{vmatrix} -\lambda & c \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - c^2 = 0.$$

Por lo que las raíces de la ecuación característica son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +c \\ \lambda_2 &= -c. \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones diferenciales características son

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= +c \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 &= -c. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones dado es hiperbólico y se observa que los valores propios de  $[A]$  representan las ecuaciones diferenciales características de la ecuación (B.7).

En este caso, en cada punto del dominio de definición existen dos direcciones características diferentes. Si la matriz  $[A]$  es continua, entonces los campos de direcciones son continuos sobre el dominio considerado. Estos campos de direcciones definen dos familias de curvas, llamadas características del sistema (B.7). Las características son portadores de información de la solución; en otras palabras, a lo largo de las características se realizan fenómenos físicos de propagación. Además, las curvas características son las que determinan el dominio de dependencia y la zona de influencia como lo muestra la Figura B.2.

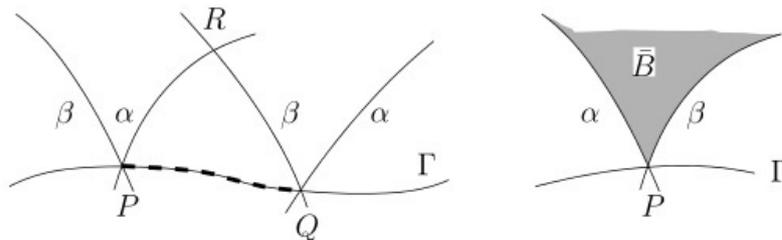


Figura B.2: El intervalo de dependencia  $[P, Q]$  del punto  $R$ (izquierda) y el dominio  $\bar{B}$  de influencia del punto  $P \in \gamma$ . Las curvas  $\alpha$  y  $\beta$  son las curvas características.

### B.5.1. Análisis curvas características

Estos cálculos sirven si se tiene el análisis de las características del sistema que se realizó en la sección de análisis del sistema.

Si se considera que

- $f(r_0) = \frac{4Eh}{3r_0} = \frac{4}{3}(k_1 e^{k_2 r_0} + k_3)$  y
- $\frac{df}{dr_0} = \frac{4}{3}(k_1 k_2 e^{k_2 r_0})$

entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{q} \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} &= \frac{A}{\rho} \left( \frac{df}{dr_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) - f \sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{dr_0}{dx} \\
 &= \frac{A}{q} \left( \left( 1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \frac{df}{dr_0} \frac{dr_0}{dx} - \frac{A}{q} f \sqrt{\frac{\pi}{A}} \frac{dr_0}{dx} \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left( (A - \sqrt{AA_0}) \frac{df}{dr_0} \frac{dr_0}{dx} - f \sqrt{A\pi} \frac{dr_0}{dx} \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left( \sqrt{A} \frac{df}{dr_0} \frac{dr_0}{dx} - \sqrt{AA_0} \frac{df}{dr_0} \frac{dr_0}{dx} - f \sqrt{A\pi} \frac{dr_0}{dx} \right)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Entonces si

- $c_1 = \frac{df}{dr_0} \frac{dr_0}{dx}$  y
- $c_2 = -\sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \frac{dr_0}{dx} - f \sqrt{\pi} \frac{dr_0}{dx}$

se tiene que

$$\frac{A}{q} \frac{dp}{dr_0} \frac{dr_0}{dx} = \frac{c_1 + \sqrt{A}c_2}{\rho}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} - \frac{2\pi\nu q R}{\delta A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c_1 + \sqrt{A}c_2}{\rho} - \frac{c_3}{A} \end{pmatrix}$$

con  $c_3 = \frac{2\pi\nu q R}{\delta A}$ .

## B.6. Dominio de dependencia - zona de influencia

Las propiedades de propagación de los problemas hiperbólicos tienen importantes consecuencias respecto a la forma en que la información se propaga o transmite por todo el dominio.

Si se considera el caso escalar bidimensional, éste generará dos características en el caso hiperbólico donde cada una se representa por una familia de curvas. Si se toma un miembro de cada familia y se toma un punto  $P$  donde se intersectan (como lo muestra la Figura B.3), se ve que ambas características dejan una región aguas arriba que afectará la solución en el punto  $P$  y una zona de aguas abajo que dependerá del valor de la función en el punto  $P$ . Si se mira desde el punto  $P$ , la primera se llama *zona de dependencia* del punto  $P$  y la segunda *zona de influencia*.

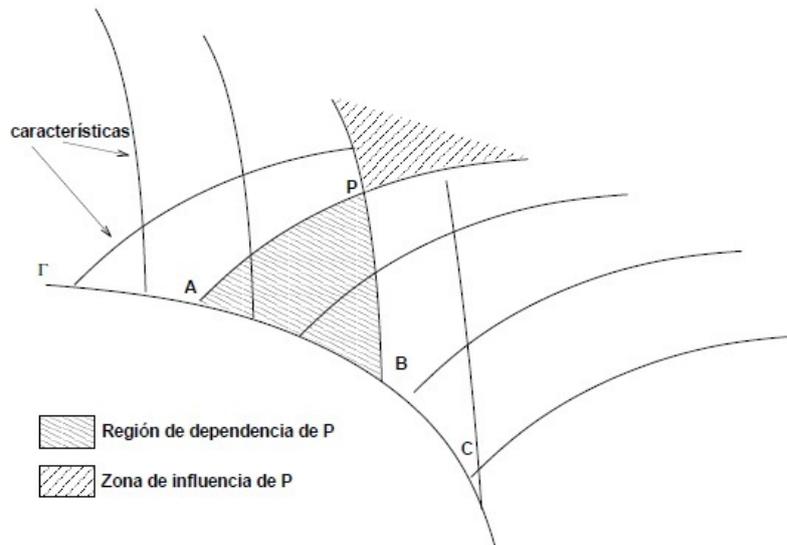


Figura B.3: Dominio de dependencia - Zona de influencia del punto P. Nigro[15].

Las diferencias entre los tipos de EDPs se pueden mostrar con sus respectivos dominios de dependencia. Por ejemplo en el caso hiperbólico, que se muestra en la Figura B.4, el punto  $P(x_0, t_0)$  está influenciado por los puntos en la región entre las dos características y  $t < t_0$ . Esta region se llama dominio de dependencia<sup>3</sup>. Por otro lado, el punto  $P$  influencia en los puntos que están en la zona de influencia<sup>4</sup>.

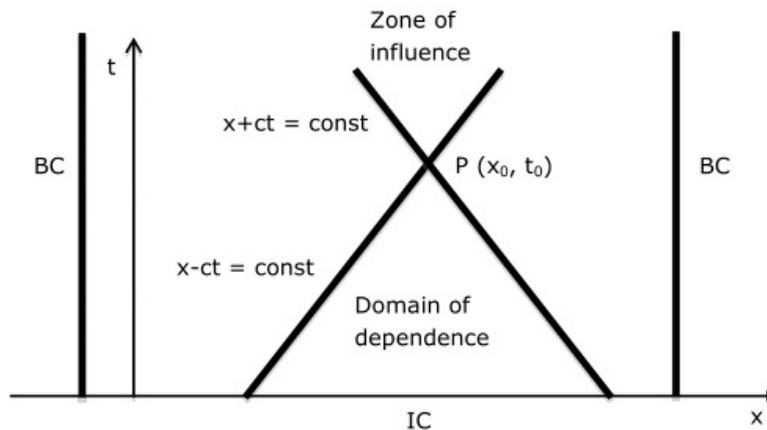


Figura B.4: Dominio de dependencia para el caso hiperbólico. Causon[5].

<sup>3</sup>El comportamiento de la solución de la EDP depende solamente de los datos especificados en el dominio de dependencia, es decir una modificación en los datos iniciales fuera de esa zona no afecta el valor de la solución.

<sup>4</sup>Es decir, una modificación de las condiciones iniciales en  $P$  afecta solamente a los puntos en la zona de influencia.

De la misma manera, se tiene para los casos parabólicos y elípticos como lo muestran las Figuras B.5 y B.5 respectivamente.

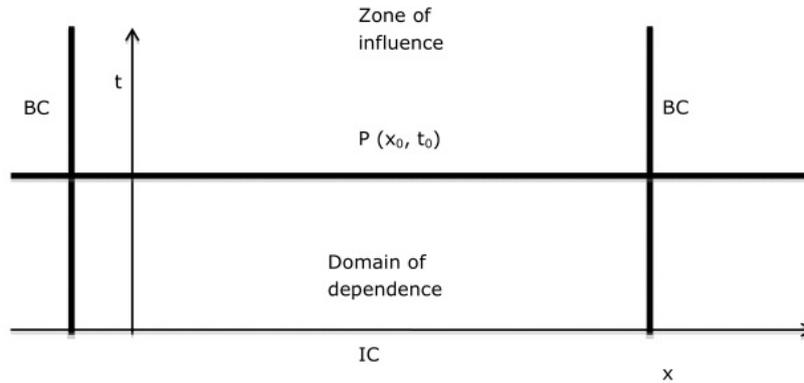


Figura B.5: Dominio de dependencia para el caso parabólico. Causon[5].

En el caso de problemas parabólicos ambas características degeneran en una (el rango del sistema no es completo) y en este caso la zona de dependencia cae sobre la característica mientras que la de influencia es la región completa aguas abajo de la característica.

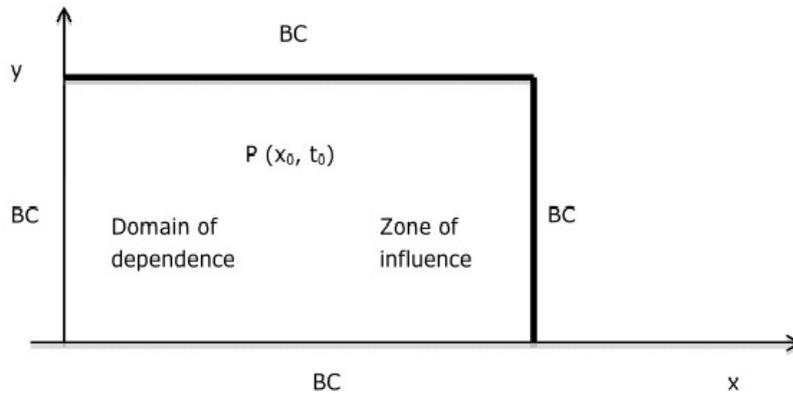


Figura B.6: Dominio de dependencia para el caso elíptico[5].

En el caso elíptico no existe superficie característica que separe el dominio en zonas de dependencia e influencia. Esto produce que la zona de influencia, la de dependencia y el dominio coincidan y la información se propaga en todas las direcciones.

## B.7. Vector tensión y tensor de tensiones

Ockendon[16] define el tensor de tensión superficial  $\sigma$  para un fluido incompresible como,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}$$

donde

- $i$  denota la cara donde actúa la tensión (la cara está indicada como el plano perpendicular al eje del subíndice correspondiente(ver Figura B.7)),
- $j$  denota la dirección de la tensión,
- $-p\delta_{ij}$  es la parte isotrópica, que tiene sentido en el fluido invíscido,
- $d_{ij}$  es la parte no-isotrópica, también denominada tensor de tensión de desviación y que está relacionada directamente con el movimiento del fluido [4].

Ockendon[16] tiene como expresión general para  $\mathbf{d}$  a

$$d_{i,j} = \lambda\delta_{i,j}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

donde  $\lambda$  es la viscosidad de volumen, que mide la respuesta a los cambios de volumen y es irrelevante para fluidos incompresibles,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido, que mide la respuesta del fluido al cizallamiento y extensión.

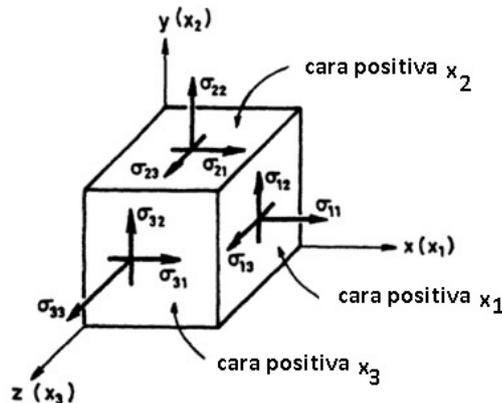


Figura B.7: Tensiones en un punto en el espacio. Las caras positivas son las que se muestran. Las caras negativas son las opuestas. Mazumdar[12].

La parte isotrópica del tensor  $-p\delta_{ij}$  ya está incorporada en el cuarto término de la ecuación (2.4).

Si se supone que no hay turbulencia ( $u_\theta = 0$ ) entonces, de acuerdo a Batchelor [4] el tensor de tensión de desviación  $\mathbf{d}$  puede expresarse como

$$\mathbf{d} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}_R$$

En un fluido, las fuerzas se dividen en dos tipos, las fuerzas externas (gravitacional, fuerza del cuerpo, etc) y las fuerzas internas.

Las fuerzas externas son fuerzas que actúan sobre alguna porción local de fluido y puede expresar como fuerza por unidad de masa  $\mathbf{F}$ , con un volumen de fluido  $\delta V$  que tiene una masa  $\rho\delta V$  asociada a una fuerza externa  $\mathbf{F}\rho\delta V$ .

Las fuerzas internas son fuerzas que se deben a la interacción entre las partículas de fluido vecinas. Se pueden expresar como fuerza por unidad de área o stress y se ejercen a través del borde de la superficie entre los elementos.

Sea  $S$  una superficie entre el fluido considerado y el fluido externo (que podría ser fluido del mismo tipo) y  $dS$  un elemento de  $S$  con una normal  $\hat{\mathbf{n}}$ . Sea  $T$  el vector stress (fuerza por unidad de área) que da la fuerza entre los fluidos internos y externos. Entonces las fuerzas internas que actúan entre las secciones del fluido del elemento de superficie  $dS$  es

$$(\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{T}^n dS \tag{B.9}$$

En el caso tridimensional, la descripción completa de esas fuerzas requiere vectores en tres direcciones mutuamente perpendiculares es decir, se necesitan nueve componentes del tipo  $\sigma_{i,j}$  (con  $i, j = 1, 2, 3$ ). Esa matriz  $(\sigma_{i,j})$  es llamada tensor de tensión y cada  $\sigma_{i,j}$  corresponde a la componente de la fuerza por unidad de área. El primer subíndice denota la cara donde actúa la tensión, y el segundo subíndice denota la dirección de la tensión. La cara se indica como el plano perpendicular al eje que indica el subíndice. Por ejemplo, la tercera cara es perpendicular al eje  $z$  o  $x_3$  (como se muestra en la Figura B.8).

En notación de tensores,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^n dS &= T^j n_j dS \\ &= \sigma_{i,j} n_j dS \\ &= \sigma_{i,j} dS_j. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Si se considera un fluido viscoso, y suponiendo además la simetría del tensor de tensiones es decir,

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i} \tag{B.11}$$

que luego, usando la relación Newtoniana para la parte viscosa se obtiene

$$\sigma_{i,j} = -p \delta_{i,j} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{B.12}$$

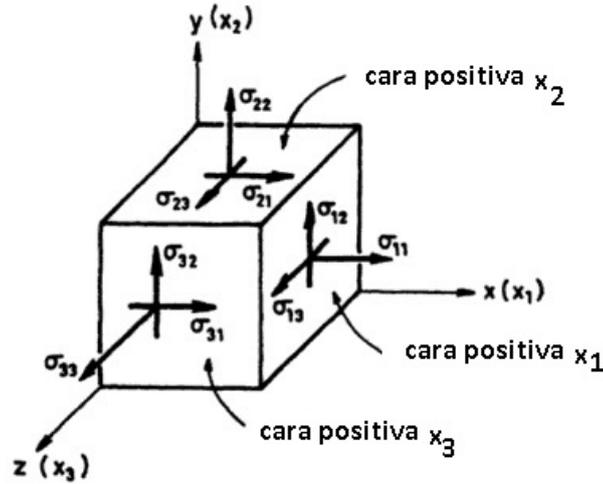


Figura B.8: Tensión en un punto del espacio. Las caras que se muestran son las positivas. Mazumdar[12].

donde

- $u_i$ : velocidad del fluido en la dirección  $x_i$ ,
- $p$ : presión que actúa sobre la superficie (presión hidrostática),
- $\mu$ : coeficiente de viscosidad
- 

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si en otro caso} \end{cases}$$

## B.8. Modelo básico de Leyes de Conservación escalar

El modelo básico de leyes de conservación escalar presentado en Vázquez[24], es un modelo que considera una cantidad  $w(x, t)$  que en principio, puede representar la densidad de una cierta magnitud. Por simplicidad se supone que está uniformemente distribuída en cada sección de un tubo de sección constante  $A$ . Las dimensiones de  $w$  son:

$$[w] = \frac{\text{magnitud}}{\text{volumen}} \quad (\text{B.13})$$

Si se considera un segmento arbitrario de un tubo  $V_I$ , con  $I = [a, b]$  y la cantidad total de  $w$  en  $V_I$  es

$$\iiint_{V_I} dx dy dz = \int_a^b w(x, t) A dx = A \int_a^b w(x, t) dx.$$

Si se supone que hay movimiento de partículas dentro del tubo y se llama  $f = f(x, t)$  al flujo de  $w$  en  $x$  en un tiempo  $t$ . Esto es,  $f$  representa la cantidad de  $w$  que atraviesa la sección  $x$  en un tiempo  $t$  por unidad de tiempo y de volumen. Además, las dimensiones de  $f$  son:

$$[f] = \frac{\text{magnitud x longitud}}{\text{volumen x tiempo}} = [\text{densidad}]x[\text{velocidad}] \quad (\text{B.14})$$

En el tiempo  $t^5$ , la cantidad total de  $w$  que entra  $V_I$ , es la cantidad total que entra en  $x = a$ , menos la cantidad que sale a través  $x = b$  esto es,

$$\text{flujo total de la cantidad } w \text{ en } V_I \text{ en el tiempo } t = Af(a, t) - Af(b, t). \quad (\text{B.15})$$

Además si se supone que  $w$  se puede crear o destruir en la sección  $x$  en el tiempo  $t$ , y esa creación o destrucción está dada por  $g = g(x, t)$ . Las dimensiones de la fuente o sumidero  $g$  son:

$$[g] = \frac{\text{magnitud}}{\text{volumen x tiempo}}. \quad (\text{B.16})$$

Dado  $g$  se puede calcular la creación o destrucción de  $w$  en  $V_I$  como:

$$\text{velocidad de crecimiento o decrecimiento de } w \text{ en } V_I = \int_a^b g(x, t) A dx. \quad (\text{B.17})$$

Entonces, con todas las consideraciones anteriores, la ley de conservación para  $w$  (en cualquier intervalo espacial  $I$ ) se puede formular como:

velocidad de cambio de  $w$  en  $I =$  flujo total de  $w$  en  $I +$  velocidad de crecimiento o decrecimiento de  $w$  en  $I$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b w(x, t) A dx = Af(a, t) - Af(b, t) + \int_a^b g(x, t) A dx \quad (\text{B.18})$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b w(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t) + \int_a^b g(x, t) dx, \quad (\text{B.19})$$

que es la **ley de conservación integral**.

Si las funciones  $w$ ,  $f$  y  $g$  son suaves, es decir si verifica:

$$\text{i) } \int_a^b f_x(x, t) dx = f(b, t) - f(a, t)$$

$$\text{ii) } \frac{d}{dt} \int_a^b w(x, t) dx = \int_a^b w_t(x, t) dx$$

---

<sup>5</sup>Se considera un flujo positivo de izquierda a derecha y negativo un flujo en la dirección opuesta.

Entonces la ley de conservación se puede escribir como:

$$\int_a^b [w_t(x, t) + f_x(x, t) - g(x, t)] dx = 0, \quad \forall I = [a, b] \quad (\text{B.20})$$

y como se satisface para todo intervalo  $[a, b]$ , se puede decir que

$$w_t(x, t) + f_x(x, t) - g(x, t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (\text{B.21})$$

que es la **ley de conservación diferencial**.

**Observación B.8.1.** ■ Se supuso que  $f$  o  $g$  son funciones de  $x$  y  $t$ , pero podría también haber una dependencia explícita de  $w$ , la variable conservativa. Ésto es lo que lleva al modelo lineal o no lineal.

- Se desconocen dos variables  $w$  y  $f$  pero se tiene una ecuación. Por lo que se necesita otra ecuación que las relacione, y es la que se conoce como *ecuación de estado*.

## B.9. Sistemas de Leyes de Conservación

En Vásquez[24], se define un **sistema de leyes de conservación** como aquel en el que la velocidad de cambio de una cierta cantidad contenida en una región es igual al flujo total a través de los límites de esa región.

Para una variable espacial, las ecuaciones de tales sistemas tienen la forma:

$$w_t(x, t) + f_x(w(x, t)) = 0, \quad (\text{B.22})$$

donde  $w$  es el vector de variables conservativas o variables de estado, que dependen de la posición  $x$  y del tiempo  $t$ , y la función  $f$  representa el flujo convectivo.

Generalizando se tiene:

**Definición B.9.1.** Sea  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^p$  y sea  $\mathbf{f}$  una función suave de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^p$ :

$$\mathbf{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

La forma general de un sistema de leyes de conservación es

$$\mathbf{w}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{w}))_x = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (\text{B.23})$$

donde  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_p)$ , el vector de variables conservativas, es la función vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} : \mathbb{R} \times [0, \infty) &\longrightarrow \Omega, \\ (x, t) &\longrightarrow (w_1, \dots, w_p). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

El conjunto  $\Omega$  se llama conjunto de estados y la función  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)$  flujo físico ( $f_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ).

Formalmente, el sistema B.23 representa la conservación de las cantidades  $w_1, w_2, \dots, w_p$ . Si se considera un intervalo arbitrario  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  y se integra B.23 sobre  $I$ , donde se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_I \mathbf{w}(x, t) dx = \mathbf{f}(\mathbf{w}(a, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{w}(b, t)).$$

Por lo tanto, la variación de  $\int_I \mathbf{w}(x, t) dx$  respecto del tiempo es igual al flujo neto a través de los bordes  $\mathbf{f}(\mathbf{w}(a)) - \mathbf{f}(\mathbf{w}(b))$ .

## B.10. Sistema de leyes de conservación hiperbólico lineal

**Definición B.10.1.** Un sistema de la forma (B.23), para una función de flujo cualquiera  $f$ , se define su matriz Jacobiana  $A$  como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial w_k}(\mathbf{w}) \right)_{1 \leq i, k \leq p}, \quad (\text{B.25})$$

donde  $f_i$  es la componente  $i$ -ésima de la función flujo. Además se dice que el sistema B.23 es *hiperbólico* si la matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{w})$  tiene  $p$  valores propios reales  $\lambda_1(\mathbf{w}) \leq \lambda_2(\mathbf{w}) \leq \dots \leq \lambda_p(\mathbf{w})$ , y los correspondientes  $p$  vectores propios son linealmente independientes. Además, si todos los valores propios son diferentes, se dice que el sistema es *estrictamente hiperbólico*.

Luego, para el caso unidimensional, un sistema de leyes de conservación tiene la forma:

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{A}\mathbf{w}_x = 0, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad (\text{B.26})$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz  $p \times p$  de coeficientes constantes y cuyos  $p$  valores propios reales con sus correspondientes vectores propios asociados linealmente independientes.

## B.11. Análisis dimensional

Tal como enuncia White[25], muchos problemas prácticos de fluidos son complejos tanto geométrica como físicamente para ser resueltos analíticamente. Se los debe probar mediante experimentos o aproximados por la dinámica de fluido computacional. Los resultados se presentan como datos experimentales o datos numéricos y curvas ajustadas. Éstos podrían generalizarse mucho más si estuvieran expresados en forma más compacta. Ése es el objetivo del análisis dimensional.

Esta técnica es un pilar importante en la mecánica de fluidos y es también muy utilizada en otros campos de la ingeniería, de la ciencias físicas, biológicas, médicas y sociales.

Los datos que resultan de experimentos y se muestran en una tabla de salida, o en varias de ellas pero se las puede reducir a un único conjunto de curvas cuando se adimensionalizan de manera conveniente. La técnica de hacer eso es el análisis dimensional.

Un análisis dimensional, básicamente es un método para reducir el número y la complejidad de las variables experimentales que afectan un fenómeno físico dado mediante la aplicación de un tipo de técnica de compactación. Si un fenómeno depende de  $n$  variables dimensionales, el análisis dimensional reducirá el problema a apenas  $k$  variables *adimensionales* y la reducción dependerá de la complejidad del problema.

### B.11.1. Principio de la homogeneidad dimensional

Para llevar a cabo la reducción de variables, se debe tener en cuenta un axioma de la física. Esa regla, el principio de la homogeneidad dimensional se puede enunciar de la siguiente manera:

*Si una ecuación expresa realmente una relación apropiada entre variables en un proceso físico, ella será dimensionalmente homogénea esto es, cada uno de sus términos tendrá las mismas dimensiones.*

Cabe observar que algunas variables físicas son naturalmente adimensionales<sup>6</sup> debido al hecho de que están definidas como razones entre cantidades dimensionales.

El motivo subyacente en el análisis dimensional es que cualquier ecuación dimensionalmente homogénea se puede escribir en forma adimensional equivalente, más compacta. En general, existe más de un método para presentar datos o teorías en forma adimensional, lo que puede profundizarse en White[25].

#### Ejemplo

Si se considera la ecuación del desplazamiento de un cuerpo en caída libre,

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{B.27})$$

Entre las magnitudes que intervienen, están las variables  $S$  y  $t$ , además de los parámetros  $S_0$ ,  $V_0$ ,  $g$  que son las magnitudes cuyo efecto sobre las variables se desea conocer.

Para adimensionalizar, en principio se necesita saber cuántas dimensiones están contenidas entre nuestras variables y parámetros. Para ello se tiene en cuenta que

- $[S] = [S_0] = L$  ,
- $[t] = T$ ,

---

<sup>6</sup>Como por ejemplo *Re*: número de Reynolds, *Eu*: número de Euler o *Fr*: número de Froude.

- $[V_0] = L/T$ ,
- $[g] = t/T^{-2}$ .

lo que muestra son dos, la longitud  $L$  y el tiempo  $T$ .

De entre los parámetros, se seleccionan dos para que sean los *parámetros de escala* usados en la definición de variables adimensionales. Esta elección no afecta el contenido de los datos, apenas es una manera de representarlos.

En este ejemplo, de los tres parámetros se selecciona dos cualesquiera para que sean los parámetros de escala. Las opciones posible son:

- $(S_0, V_0)$ ,
- $(V_0, g)$ ,
- $(S_0, g)$ .

Si se considera la primera opción, entonces  $(S_0, V_0)$  son los parámetros de escala que se usan para definir el desplazamiento y el tiempo adimensionales\* es decir

- $S^* = \frac{S}{S_0}$ ,
- $t^* = \frac{V_0 t}{S_0}$ .

y reemplazando en la ecuación original se tiene

$$S^* = 1 + t^* + \frac{1}{2}\alpha t^{*2} \quad \text{con} \quad \alpha = g \frac{S_0}{V_0^2} \quad (\text{B.28})$$

Este resultado muestra un parámetro adimensional  $\alpha$  que incluye el efecto de la gravedad y en cuanto al problema original que tenía cinco magnitudes, se pudo representar mediante una ecuación con tres magnitudes y esa reducción  $5 - 3 = 2$  tiene que ver con la cantidad de dimensiones fundamentales del problema, en este caso  $L$  y  $T$ .

El fundamento del método del análisis dimensional se apoya en dos hipótesis:

1. una relación física propuesta y dimensionalmente homogénea y
2. todas las variables relevantes fueron incluídas en la relación propuesta.

## B.12. Elección de las funciones de aproximación.

Chapra[6] muestra que para el caso unidimensional, la alternativa más sencilla es un polinomio de primer grado

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (\text{B.29})$$

donde

- $u$  es la variable dependiente,
- $x$  la variable independiente,
- $a_0$  y  $a_1$  constantes.

Esta función debe pasar a través de los valores de  $u$  en los puntos extremos del elemento en  $x_1$  y  $x_2$ . Por lo tanto

- $u_1 = a_0 + a_1x_1$ ,
- $u_2 = a_0 + a_1x_2$ ,

donde  $u_1 = u(x_1)$  y  $u_2 = u(x_2)$ . De estas ecuaciones, al usar la regla de Cramer, se obtiene

$$a_0 = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1} \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

Si se sustituyen estos resultados en la ecuación B.31 y luego se reagrupan, se puede escribir como

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 \tag{B.30}$$

donde

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \tag{B.31}$$

y

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{B.32}$$

La ecuación B.30 se conoce como una función de aproximación, o de forma, y  $N_1$ ,  $N_2$  se denominan funciones de interpolación. En realidad, la ecuación B.30 es el polinomio de interpolación de primer grado de Lagrange. Esta ecuación permite predecir valores intermedios (para interpolar) entre valores dados  $u_1$  y  $u_2$  en los nodos.

# Bibliografía

- [1] Dale A. Anderson, John C. Tannehill, and Richard H. Pletcher. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. Hemisphere Pub. Corp. ; McGraw-Hill, Washington : New York, 1984.
- [2] Max Anliker, Robert L. Rockwell, and Eric Ogden. Nonlinear analysis of flow pulses and shock waves in arteries. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 22(2):217–246, March 1971.
- [3] A.C. L. Barnard, W.A. Hunt, W.P. Timlake, and E. Varley. A Theory of Fluid Flow in Compliant Tubes. *Biophysical Journal*, 6(6):717–724, November 1966.
- [4] G. K Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1973.
- [5] D. M Causon. Introductory finite difference methods for PDEs, 2010. OCLC: 927420689.
- [6] Steven C Chapra, Raymond P Canale, and Juan Carlos Del Valle Sotelo. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill, México, etc, 2008. OCLC: 645164906.
- [7] L. K. Forbes. On the evolution of shock-waves in mathematical models of the aorta. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 22(03):257, January 1981.
- [8] Y. C Fung. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. Springer, Place of publication not identified, 1993. OCLC: 968449734.
- [9] John E Hall. *Guyton y Hall. Tratado de fisiología médica*. 2016. OCLC: 953858932.
- [10] John K.-J. Li. *Dynamics of the vascular system*. Number 1 in Series on bioengineering & biomedical engineering. World Scientific, New Jersey, 2004. OCLC: 248797912.
- [11] M. J. Lighthill. *Mathematical biofluidynamics*. Number 17 in CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.
- [12] Jagannath Mazumdar. *Biofluid mechanics*. World Scientific, New Jersey, second edition edition, 2016.

- [13] K. W Morton and D. F Mayers. *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, UK; New York, 2005. OCLC: 59759508.
- [14] Wilmer W. Nichols, Wilmer W. Nichols, and Donald A. McDonald, editors. *McDonald's blood flow in arteries: theoretic, experimental, and clinical principles*. Hodder Arnold, London, 6th ed edition, 2011.
- [15] Norberto Nigro and Mario Storti. *Métodos Numéricos en Fenómenos de Transporte*.
- [16] Hilary Ockendon and John R. Ockendon. *Viscous flow*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. OCLC: 832289119.
- [17] M S Olufsen. Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries. *The American journal of physiology*, 276(1 Pt 2):H257–268, January 1999.
- [18] Johnny T. Ottesen. *Applied mathematical models in human physiology*. SIAM monographs on mathematical modeling and computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2004.
- [19] Kim H. Parker. A brief history of arterial wave mechanics. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 47(2):111–118, February 2009.
- [20] Omer San and Anne E. Staples. An improved model for reduced-order physiological fluid flows. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 12(03):1250052, June 2012.
- [21] Hans Scholz. *Arteriovenous access surgery: ensuring adequate vascular access for hemodialysis*. 2015. OCLC: 898122051.
- [22] Spivack, Michael. *Cálculo Infinitesimal*.
- [23] Meister Tardy, F Perret, H R Brunner, and M Arditi. Non-invasive estimate of the mechanical properties of peripheral arteries from ultrasonic and photoplethysmographic measurements. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, 12(1):39–54, February 1991.
- [24] M. Elena Vázquez-Cendón. *Solving hyperbolic equations with finite volume methods*. Number 90 in Unitext - Matematica per il 3+2. Springer, Cham, 2015. OCLC: 935876600.
- [25] Frank M White. *Mecánica de fluidos*. MacGraw-Hill, Madrid [etc, 2010. OCLC: 688382638.