

Homología de Álgebras asociadas a un quiver cíclico

Silvina Ruth Gómez

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

Junio de 2011

Director: Dr. Leandro Cagliero

Codirector: Dra. Amelia Barrionuevo

Índice general

Resumen	III
Introducción	V
1. Conceptos básicos	1
1.1. Álgebras	1
1.2. Álgebras de Lie	2
1.2.1. Álgebras de Lie de derivaciones	5
1.2.2. Álgebras de Lie abstractas	5
1.3. Representaciones	6
1.3.1. Representación adjunta	8
1.3.2. Construcción de representaciones	9
1.3.3. Álgebras de Lie semisimples	12
1.4. Criterio para semisimplicidad	13
1.5. Descomposición de representaciones	16
1.5.1. Teorema de Weyl	17
1.6. Homología trivial	22
2. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2)$	27
2.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2)$	27
2.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2)$	34
2.3. Representaciones de $\mathfrak{gl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2)$	39
3. Homología de $\mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$	43
3.1. $\mathfrak{gl}(2, A_N(n))$, $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}Q(n)_0)$ y $\mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$	43
3.2. La acción de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_n)$ en $\mathfrak{gl}(2, A_n^+(n))$	45
3.3. Descomposición de $\bigwedge^2 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$, $\bigwedge^3 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$	47

3.3.1. Descomposición de $\wedge^2 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$	47
3.3.2. Descomposición de $\wedge^3 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$	50
3.4. Análisis de $H_1(\mathfrak{n}), H_2(\mathfrak{n})$	52
3.5. Conclusiones	60
Bibliografía	61

Resumen

Un quiver es un grafo orientado en el que se permiten múltiples flechas y caminos. Dado un quiver Q con vértices Q_0 y flechas Q_1 se define *el álgebra de caminos* asociada a Q como

$$\mathbb{C}Q = \mathbb{C}Q_0 \oplus \mathbb{C}Q_1 \oplus \mathbb{C}Q_2 \oplus \dots$$

donde Q_j es el conjunto de caminos de longitud j y $\mathbb{C}Q_j$ es el espacio vectorial generado por Q_j . En $\mathbb{C}Q$ el producto de dos caminos α y β es la yuxtaposición de ellos, si el final de α es el comienzo de β ; cero en caso contrario. El álgebra $\mathbb{C}Q$ resulta un álgebra asociativa graduada con unidad.

Sea (Q_j) el ideal bilátero generado por Q_j . Un álgebra A se dice *álgebra de caminos truncada* si existe un quiver Q y un natural N tal que A es isomorfa al cociente $A = \mathbb{C}Q/(Q_N)$. Dada un álgebra asociativa A , sea $\mathfrak{gl}(n, A)$ el álgebra de Lie de matrices $n \times n$ con coeficientes en A .

Sea $Q(n)$ el quiver cíclico de n vértices, y sea $A_N(n) = \mathbb{C}Q(n)/(Q(n)_N)$ el álgebra de caminos truncada que resulta de dividir por el ideal de caminos de longitud mayor o igual a N . Sean

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, A_N(n)) \quad \text{y} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$$

donde $A_N^+(n)$ es el ideal de $A_N(n)$ generado por las flechas. Se tiene que \mathfrak{n} es el radical nilpotente de \mathfrak{g} y que $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^n \ltimes \mathfrak{n}$. En particular $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^n$ actúa en \mathfrak{n} y por lo tanto lo hace en la homología $H_*(\mathfrak{n})$.

Dados $n = 3$ y $N = 3$, en este trabajo se describirá la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^3$ -módulo de los primeros grupos de homología $H_0(\mathfrak{n})$, $H_1(\mathfrak{n})$ y $H_2(\mathfrak{n})$.

Introducción

Breve reseña histórica

Las álgebras de Lie constituyen la base de la teoría de Lie. Esta teoría tiene sus orígenes en la década de 1870 a partir de la idea de abordar las ecuaciones diferenciales bajo el mismo punto de vista que aplicó Galois para ecuaciones algebraicas. El programa propuesto por Sophus Lie y Felix Klein, consistía en estudiar las ecuaciones diferenciales a través de sus grupos de simetrías. Este problema puso en evidencia a los grupos continuos de transformaciones para los cuales fue creada, a lo largo de los años, una extensa teoría con ramificaciones en las más diversas áreas de la matemática y sus aplicaciones. Ver más detalles en notas del capítulo 1 del libro *Álgebras de Lie* de [Sa].

El punto de partida en la creación de este vasto campo del conocimiento matemático fue el descubrimiento, realizado por S. Lie, de los grupos infinitesimales o, como decimos en la actualidad, de las álgebras de Lie. El término “álgebra de Lie” se fue popularizando a partir de la década de 1920 como se pueden ver en los trabajos de Hermann Weyl.

Los “grupos infinitesimales” fueron considerados, al principio, como objetos concretos asociados a grupos de transformaciones. Uno de los programas de S. Lie era el de clasificar a los grupos de transformaciones actuando en un determinado espacio. A fines del siglo XIX el problema había sido dividido en dos: el de clasificar el objeto abstracto que corresponde al álgebra de Lie y posteriormente analizar las acciones de los grupos correspondientes.

Los primeros resultados de la teoría, que fueron posteriormente denominados teoremas de Lie, establecen una relación entre los grupos de las transformaciones, denominados actualmente grupos de Lie, y las álgebras de Lie, a través de la aplicación exponencial. Esos teoremas mostraron desde el comienzo una de las características de la teoría de Lie, que es la de comparar los conceptos complementarios de los grupos y de las álgebras de Lie. Pues los grupos de Lie son de naturaleza geométrica mientras que las álgebras de Lie son objetos algebraicos por excelencia.

Principales resultados de la tesis

Este trabajo se ha estructurado en tres capítulos. En el capítulo uno se definen los conceptos básicos: álgebra, álgebra de Lie, ideales, álgebra de Lie soluble, álgebra de Lie semisimple, homomorfismo, representaciones y descomposición de representaciones. Además se enuncian resultados, entre ellos el criterio para semisimplicidad y el teorema de Weyl. Termina con la definición de homología trivial y se demuestra una propiedad entre las derivaciones y el

operador de borde.

En el capítulo dos, comenzamos definiendo *vector de peso máximo*, concepto importante en la clasificación de representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2)$ de dimensión finita, Teorema 2.1.3; luego se generaliza para las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2)$, Teorema 2.2.2. Para ello se introduce notación: X_i, Y_i, H_i, I_i , que denota a las n -uplas con i -ésima componente igual a la matrices X, Y, H, I respectivamente y cero en las restantes. Finalmente se enuncia el Teorema 2.3.2 referido a las representaciones irreducibles de $\mathfrak{gl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2)$:

Sea (π, V) una representación de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$, tal que los endomorfismos $\pi(I_i)$ diagonalizan. Entonces (π, V) es completamente reducible.

Este teorema nos afirma lo siguiente:

1. V es suma directa de subespacios invariantes e irreducibles, es decir, $V = \bigoplus_i V_i$.
2. Para cada irreducible V_i , existe un único, salvo múltiplo escalar, vector v_i llamado **vector de peso máximo**, y existen n -uplas $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}) \in \mathbb{N}_0^n$ y $\mu_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in}) \in \mathbb{C}^n$, llamadas **pesos** del vector de peso máximo, tales que

$$\pi(X_j)(v_i) = 0, \text{ para todo } i, j,$$

$$\pi(H_j)(v_i) = \lambda_{ij}v_i,$$

$$\pi(I_j)(v_i) = \mu_{ij}v_i.$$
3. La componente irreducible V_i se denotará

$$V_{\lambda_i}^{\mu_i} = V_{\lambda_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{in}\varepsilon_n}^{\mu_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + \mu_{in}\varepsilon_n}$$

donde $\{\varepsilon_j : j = 1, \dots, n\}$ es la base canónica de \mathbb{C}^n .

A lo largo de este capítulo se presentan ejemplos de descomposición de representaciones, los cuales nos serán de utilidad en el análisis que se realizará en el capítulo tres.

En el capítulo tres, se desarrolla el trabajo en sí, el cual consiste en describir la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^3$ -módulo de los grupos de homología trivial $H_0(\mathfrak{n}), H_1(\mathfrak{n})$ y $H_2(\mathfrak{n})$, donde $\mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$, y $\mathfrak{l} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_1) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_2) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_3)$. A continuación resumimos los principales resultados.

La estructura del álgebra de Lie \mathfrak{n} por la acción de \mathfrak{l} es $\mathfrak{n} \cong \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq 3} V_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$.

La estructura de $\bigwedge^2 \mathfrak{n}$ por la acción de \mathfrak{l} tiene las siguientes componentes irreducibles:

en todos los casos $i, j, k = 1, 2, 3$

$$V_{2\varepsilon_i}^{2\varepsilon_i - 2\varepsilon_j}, V_{2\varepsilon_j}^{2\varepsilon_i - 2\varepsilon_j}, V_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}, i \neq j,$$

$$V_{2\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k}^{2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k}, V_{\varepsilon_j + \varepsilon_k}^{2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k}, i \neq j \neq k, j < k$$

$$V_{\varepsilon_i + \varepsilon_k + 2\varepsilon_j}^{\varepsilon_i + \varepsilon_k - 2\varepsilon_j}, V_{\varepsilon_i + \varepsilon_k}^{\varepsilon_i + \varepsilon_k - 2\varepsilon_j}, i \neq j \neq k, i < k$$

$$V_{2\varepsilon_i + 2\varepsilon_j}^0, i < j$$

$$2 \times V_{2\varepsilon_i}^0, \text{ para todo } i$$

$$3 \times V_0^0,$$

$$V_{\varepsilon_i+2\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_k}, \quad i \neq j \neq k$$

La estructura de $\bigwedge^3 \mathfrak{n}$ por la acción de \mathfrak{l} tiene las siguientes componentes irreducibles:

en todos los casos $i, j, k = 1, 2, 3$

$$\bigwedge^3 (V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}), \quad i \neq j$$

$$V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^0, \quad i < j < k$$

$$V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j}^0, \quad i < j$$

$$V_{2\varepsilon_i}^0, \quad \text{para todo } i$$

$$V_0^0,$$

para las siguientes componentes la variación de los índices es $i \neq j \neq k$, donde

si $i = 1, 3 \quad j < k$; si $i = 2 \quad j > k$

$$V_{3\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}, \quad V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}, \quad V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k},$$

$$V_{3\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k}, \quad V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k}, \quad V_{\varepsilon_i+2\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k},$$

$$V_{\varepsilon_i+3\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}, \quad V_{\varepsilon_i+3\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}, \quad 2 \times V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}, \quad 2 \times V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j},$$

$$V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}, \quad V_{2\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}, \quad V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}, \quad V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k},$$

$$V_{2\varepsilon_i}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}, \quad V_{2\varepsilon_j}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}, \quad V_{2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}, \quad V_0^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k},$$

$$V_{2\varepsilon_i+3\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k}, \quad V_{3\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k}, \quad 2 \times V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k}, \quad 2 \times V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k}.$$

El principal resultado de esta tesis es el siguiente teorema:

Teorema 3.4.2

Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$. Entonces la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^3$ -módulo de los primeros grupos de homología de \mathfrak{n} es:

$$H_0(\mathfrak{n}) = \mathbb{C},$$

$$H_1(\mathfrak{n}) = V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \oplus V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{-\varepsilon_1+\varepsilon_3},$$

$$H_2(\mathfrak{n}) = 2 \times V_0^0 \oplus \bigoplus_i V_{2\varepsilon_i}^0 \oplus V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2} \oplus V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2} \oplus V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3} \oplus V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3} \oplus V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1} \oplus V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1} \oplus$$

$$\oplus V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \oplus V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}.$$

Para probar este teorema realizamos los siguientes pasos. Calculamos la descomposición de \mathfrak{n} por la acción de \mathfrak{l} con n y N arbitrarios. A continuación particularizamos para el caso $n = 3$ y $N = 3$ y desarrollamos un análisis detallado de cómo obtener la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^3$ -módulo de $\bigwedge^2 \mathfrak{n}, \bigwedge^3 \mathfrak{n}$, usando resultados obtenidos en el capítulo dos. Se calculó explícitamente los vectores de peso máximo y se evaluó la diferencial en cada vector maximal. Conseguimos así una base de vectores maximales de la imagen de d_{i+1} y del núcleo de d_i . Finalmente comparamos dichas bases y obtuvimos la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^3$ -módulo de $H_1(\mathfrak{n})$ y $H_2(\mathfrak{n})$.

Importancia del problema

Existen numerosos problemas de matemática que se reducen al cálculo de los grupos de (co)homología de ciertos objetos relacionados con el problema original. En particular, la comprensión en detalle de la cohomología de las álgebras de Lie nilpotentes contribuye a la resolución de difíciles problemas de geometría. Dos trabajos fundamentales en el área son [Bo] y [No]. Una herramienta importante para calcular los grupos de homología $H_*(\mathfrak{n})$ de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} es estudiar la acción del grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathfrak{n})$ en $H_*(\mathfrak{n})$. El problema de esta tesis encuadra en tal situación pues $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^n$ es la parte reductiva de $\text{Aut}(\mathfrak{n})$, con $\mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$.

El problema de calcular la (co)homología del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, A)$ ha sido muy estudiado. Originalmente Loday, Quillen y Tsygan consideran el caso en que A tiene unidad y $n = \infty$. Ellos descubren la relación que tiene $H_*(\mathfrak{gl}(\infty, A))$ con la homología cíclica de A y encuentran las primeras obstrucciones para la estabilización. Más tarde Hanlon considera la estabilización de las componentes irreducibles de la acción de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ y recientemente Cortiñas demuestra las extensiones de estos resultados para álgebras unitales. Un análisis de este problema se puede encontrar en el libro [Lo].

Nuestro interés fue estudiar para el caso en que $n = 2$, que por un lado es el más básico, pero por otro es el que contiene todas las obstrucciones que desaparecen cuando $n = \infty$.

Agradecimientos

Quiero dedicar este último párrafo para agradecer a mi director de tesis Dr. Leandro Cagliero, su dedicación, generosidad y paciencia para conmigo, por darme siempre animo para seguir adelante. También deseo agradecer a todas las personas que directa o indirectamente colaboraron con este trabajo: a mi esposo Jorge Nieto, al Padre Luis Rodríguez de la orden Carmelitas Descalzos, a mis compañeras de maestría Nadina Rojas y Estela Fernández, a mi compañeros de oficina Marcela Lazarte, Amelia Barrionuevo, Adrián Will, a mis compañeras de cátedra Matesa Pacios, Helena Ramasco y Marta Lagarrigue, y por último a la directora de esta carrera Dra. Ana Sfer por el apoyo y acompañamiento brindado.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo k denota un cuerpo arbitrario.

1.1. Álgebras

Definición 1.1.1. Un *álgebra sobre un cuerpo* k o una k -álgebra, es un espacio vectorial A sobre k con otra operación, llamada *multiplicación de vectores*, que asocia a cada par de vectores a, b de A un vector ab en A llamado el producto de a y b tal que:

1. es distributivo con respecto a la adición,

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

2. para todo escalar k en k ,

$$k(ab) = (ka)b = a(kb).$$

Si además el producto es asociativo, $a(bc) = (ab)c$, decimos que A es una k -álgebra *asociativa*. Si existe un elemento 1 en A tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$, entonces A se dice k -álgebra con *unidad* y al elemento 1 se le llama la *unidad* de A . El álgebra A se dice *conmutativa* si $ab = ba$, para todo a y b de A .

Ejemplos 1.1.2.

1. k es una k -álgebra asociativa, conmutativa y con unidad.
2. Sea V un espacio vectorial sobre k . Entonces $\text{End}(V)$, el conjunto de transformaciones lineales de V en V donde el producto es la composición de funciones, es un álgebra sobre k asociativa y con unidad.
3. $M_n(k)$ el espacio vectorial de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en k es un álgebra asociativa y con unidad con el producto usual de matrices.

4. Sea A un álgebra asociativa sobre k y $M_n(k)$ el álgebra asociativa de matrices. Se define una nueva álgebra asociativa $M_n(A)$ la cual consiste de todas las matrices $n \times n$ con entradas en A , donde el producto es el producto usual de matrices. La base canónica de $M_n(k)$ son las matrices elementales E_{ij} con un 1 en el lugar (i, j) y cero en cualquier otro. Una base para $M_n(A)$ son las matrices elementales E_{ij} con entradas en la base del álgebra asociativa A , las cuales denotaremos como E_{ij}^a con a perteneciente a la base de A .

1.2. Álgebras de Lie

Las álgebras de Lie surgen como espacios vectoriales de transformaciones lineales dotadas con una nueva operación la cual en general no es ni conmutativa ni asociativa. Es posible describir este tipo de sistema abstractamente en pocos axiomas.

Definición 1.2.1. Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} es un espacio vectorial sobre k , con una operación $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ llamada corchete, que satisface las siguientes propiedades:

1. La operación corchete es bilineal.
2. $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
3. *Identidad de Jacobi*

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \text{ para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Si aplicamos las propiedades 1 y 2 al siguiente corchete $[X + Y, X + Y]$, obtenemos:

$$0 = [X + Y, X + Y] = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y].$$

Por lo tanto

$$[X, Y] = -[Y, X], \tag{1.1}$$

es decir, el corchete es antisimétrico.

Recíprocamente, esta última condición implicará $2[X, X] = 0$ de manera que si el cuerpo es de característica distinta de 2, $[X, X] = 0$.

La *dimensión* de un álgebra de Lie es la dimensión como espacio vectorial sobre k . En esta tesis se supondrá siempre que estamos trabajando con álgebras de Lie cuyo espacio vectorial sobre k , es de dimensión finita, a menos que se establezca otra cosa.

Definición 1.2.2. Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie. Un *homomorfismo* entre $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ es una transformación lineal $F : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que $F([X, Y]) = [F(X), F(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_1$. Si F es una biyección diremos que F es un *isomorfismo* de álgebras de Lie, en este caso \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 se dicen álgebras de Lie *isomorfas*.

Definición 1.2.3. Un subespacio \mathfrak{h} de \mathfrak{g} es una *subálgebra* de Lie de \mathfrak{g} si

$$[X, Y] \in \mathfrak{h}, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{h}.$$

Definición 1.2.4. Un subespacio \mathfrak{h} de \mathfrak{g} es un *ideal* si

$$[X, Y] \in \mathfrak{h}, \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}.$$

Ejemplos 1.2.5. A continuación algunos ejemplos de álgebras de Lie, subálgebras e ideales.

1. A toda álgebra asociativa A se le puede dar una estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete de la siguiente manera:

$$[a, b] = ab - ba$$

para todo $a, b \in A$. Es fácil verificar que A , con esta operación, es un álgebra de Lie. $[\]$ es bilineal porque lo es el producto definido en A . $[a, a] = a.a - a.a = 0$.

$$\begin{aligned} [[a, b], c] + [[c, a], b] + [[b, c], a] &= (ab - ba)c - c(ab - ba) + \\ &\quad (ca - ac)b - b(ca - ac) + \\ &\quad (bc - cb)a - a(bc - cb) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Sea $M_n(k)$ el espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$ sobre k . En la sección anterior vimos que es un álgebra asociativa, por lo tanto es un álgebra de Lie con el corchete así definido:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Denotamos a $M_n(k)$ con este nuevo producto como $\mathfrak{gl}(n, k)$. La dimensión de esta álgebra es n^2 .

3. Sea V un espacio vectorial sobre k . Como ya mencionamos, $\text{End}(V)$ es un álgebra asociativa, siendo el producto la composición de funciones. Entonces $\text{End}(V)$ es un álgebra de Lie con corchete

$$[X, Y] = XY - YX.$$

A esta álgebra de Lie la denotamos con $\mathfrak{gl}(V)$ para distinguirla de su estructura de álgebra asociativa, y la llamamos *álgebra lineal general* porque está asociada al *grupo lineal general* $GL(V)$ que consiste de todos los endomorfismos inversibles de V . Si V es de dimensión finita, digamos n , y fijamos una base para él, $\mathfrak{gl}(V)$ es isomorfa al álgebra de Lie de las matrices cuadradas de tamaño $\dim V \times \dim V$, es decir, a $\mathfrak{gl}(n, k)$.

Toda subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ es llamada *álgebra de Lie lineal*.

4. Otra aplicación inmediata del ejemplo 1 sería para el álgebra asociativa $M_n(A)$, la será denotada como $\mathfrak{gl}(n, A)$ para identificarla con su estructura de álgebra de Lie.
5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre k . Denotamos con $\mathfrak{sl}(V)$ o $\mathfrak{sl}(n, k)$, al conjunto de endomorfismos de V que tienen traza cero. Recordemos que la *traza* de una matriz, denotada como Tr , es la suma de los elementos de su diagonal principal. Además todas las matrices semejantes tienen la misma traza y todas las matrices que representan al mismo endomorfismo son semejantes por lo tanto tiene sentido hablar de traza de un endomorfismo. Puesto que $Tr(XY) = Tr(YX)$ y $Tr(X + Y) = Tr(X) + Tr(Y)$, $\mathfrak{sl}(V)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, llamada *álgebra lineal especial*. Su base estándar son todas las matrices E_{ij} con $i \neq j$ junto con las matrices $H_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$ con $1 \leq i \leq n - 1$.
6. Sean \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ la suma directa externa. Definimos en \mathfrak{g} el siguiente corchete:

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2])$$

donde $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ y $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_2$. Con éste \mathfrak{g} es un álgebra de Lie llamada el álgebra de Lie *suma directa* de \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 .

7. Si \mathfrak{g} es álgebra de Lie y A es un álgebra asociativa y conmutativa, el producto tensorial $\mathfrak{g} \otimes A$ es álgebra de Lie con corchete definido como $[X \otimes a, Y \otimes a'] = [X, Y] \otimes a.a'$
8. Sea A álgebra asociativa y conmutativa. $\mathfrak{gl}(n, A)$ es isomorfa a $\mathfrak{gl}(n, k) \otimes A$. El isomorfismo viene dado por la asignación $X^a \xrightarrow{\phi} X \otimes a$.
9. Obviamente el subespacio nulo y \mathfrak{g} son ideales de \mathfrak{g} .
10. Si $F : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo, es fácil verificar que:
 - a) $\ker F$ es un ideal,
 - b) $\text{im } F$ es una subálgebra.
11. El subespacio $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ llamado el *centro* del álgebra de Lie es un ideal de \mathfrak{g} . En el centro de un álgebra de Lie están todos sus elementos que conmutan con toda el álgebra.
12. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, llamamos *álgebra derivada* de \mathfrak{g} , denotada por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, al subespacio de todas las combinaciones lineales de los corchetes $[X; Y]$. Es claramente un ideal de \mathfrak{g} .
13. Si i, j son ideales de \mathfrak{g} , el subespacio $i+j$ es un ideal de \mathfrak{g} y $[i, j] = \{\sum [X, Y] | X \in i, Y \in j\}$ es un ideal de \mathfrak{g} .

Cocientes y teoremas de isomorfismo

Definición 1.2.6. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideal. En el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, se define

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]},$$

donde \bar{X} denota a la clase $X + \mathfrak{h}$.

Como es usual en la construcción de cocientes, se debe mostrar que la definición del corchete es independiente de la elección de los representantes, y que efectivamente define en el cociente una estructura de álgebra de Lie. La verificación de estos hechos se realiza sin mayores inconvenientes. Además, la proyección canónica

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ X &\mapsto \bar{X} \end{aligned}$$

es un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie.

Teorema 1.2.7. Sea $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Entonces,

$$\mathfrak{g}/\ker \psi \approx \text{im } \psi.$$

El isomorfismo está dado por $\bar{X} \in \mathfrak{g}/\ker \psi \mapsto \psi(X)$.

Teorema 1.2.8. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ideales de \mathfrak{g} . Entonces,

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \approx \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

El isomorfismo se obtiene pasando al cociente el homomorfismo

$$X_1 + X_2 \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \mapsto \overline{X_2} \in \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

1.2.1. Álgebras de Lie de derivaciones

Algunas álgebras de Lie de transformaciones lineales surgen como derivaciones de un álgebra.

Definición 1.2.9. Sea A una k -álgebra. Se llama *derivación* de A a una transformación lineal $\delta : A \rightarrow A$, que satisface la regla del producto:

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \quad a, b \in A.$$

Denotamos con $\text{Der}(A)$ al conjunto de todas las derivaciones de A .

Es fácil verificar que el conjunto $\text{Der}(A)$ es un subespacio vectorial de $\text{End}(A)$ y que el corchete de dos derivaciones es otra derivación. Por lo tanto $\text{Der}(A)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(A)$.

Puesto que toda álgebra de Lie \mathfrak{g} es una k -álgebra, donde el producto es el corchete, $\text{Der}(\mathfrak{g})$ está definida.

Ejemplo 1.2.10. Algunas derivaciones surgen con cierta naturalidad como la que sigue.

Sea \mathfrak{g} álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$. La transformación lineal $\text{ad}X: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que asigna a cada $Y \in \mathfrak{g}$ el corchete $[X, Y]$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, cumple con la regla del producto. Esto se deduce al reescribir la identidad de Jacobi aplicando la antisimetría del corchete:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ \text{ad}X([Y, Z]) &= [\text{ad}X(Y), Z] + [Y, \text{ad}X(Z)]. \end{aligned}$$

Definición 1.2.11. Se llaman derivaciones *interiores* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , a todas las derivaciones $\text{ad}X$, para toda $X \in \mathfrak{g}$. Cualquier otra se denomina derivación *externa*.

1.2.2. Álgebras de Lie abstractas

A veces es necesario mirar álgebras de Lie abstractamente, lo cual se aclarará con la siguiente definición.

Definición 1.2.12. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ una base de \mathfrak{g} . Los escalares $\Gamma_{ij}^r \in k$ que verifican $[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^n \Gamma_{ij}^r X_r$ se llaman *coeficientes de estructura* de \mathfrak{g} respecto de la base B .

Es fácil demostrar que las propiedades del corchete equivalen a la siguientes propiedades de los coeficientes de estructura.

- 1) $\Gamma_{ii}^r = 0 = \Gamma_{ij}^r + \Gamma_{ji}^r$,
- 2) $\sum_{r,m=0}^n (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^m + \Gamma_{jl}^r \Gamma_{ri}^m + \Gamma_{li}^r \Gamma_{rj}^m) = 0$ para todo $i, j, l = 1, \dots, n$.

Recíprocamente, dado \mathfrak{g} un espacio vectorial, $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ una base de \mathfrak{g} y un conjunto $\{\Gamma_{ij}^r \in k : i, j, r = 1, \dots, n\}$ cuyos elementos cumplen 1) y 2) es posible definir en \mathfrak{g} una estructura de álgebra de Lie extendiendo bilinealmente la siguiente definición del corchete dada para los vectores de la base

$$[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^n \Gamma_{ij}^r X_r$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. En este caso los escalares Γ_{ij}^r son los coeficientes de estructura de \mathfrak{g} respecto de la base B . Además, por la condición 1), $\Gamma_{ij}^r = -\Gamma_{ji}^r$ para todo i, j . Por lo tanto, es suficiente conocer Γ_{ij}^r para $i < j$.

Estos hechos dicen que para conocer un álgebra de Lie, salvo isomorfismo, es suficiente conocer los corchetes entre los vectores de una base, lo que llamamos *tabla de multiplicar*, sin importar la naturaleza de sus elementos.

Ejemplos 1.2.13.

1. Si V es un espacio vectorial arbitrario de dimensión finita sobre k , podemos definir en V el corchete $[X, Y] = 0$, para todo $X, Y \in V$. Las álgebras de Lie que tienen esta multiplicación trivial, se llaman *abelianas*.
2. Sea V un espacio vectorial sobre k , con base $\{X, H, Y\}$ y tabla de multiplicar:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Este espacio vectorial, con el producto así definido tiene estructura de álgebra de Lie.

1.3. Representaciones

Definición 1.3.1. Sea V un espacio vectorial sobre k y \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre el mismo cuerpo k . Una *representación* de \mathfrak{g} en V es el par (π, V) donde π es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

V se denomina el *espacio de representación* y su dimensión es la *dimensión de la representación*. Una representación se dice *fiel* si π es inyectiva.

La noción de representación nos da la idea de describir o representar las álgebras de Lie como álgebras de transformaciones lineales. En el caso de las representaciones fieles, $\mathfrak{g} \simeq \text{im } \pi$ y por lo tanto el álgebra se puede ver como una subálgebra de transformaciones lineales o matrices si la dimensión de V es finita. La idea de ver a toda álgebra de Lie como subálgebra

de transformaciones lineales se cumple para las álgebras de Lie de dimensión finita. Esto se debe a un conocido resultado, el teorema de Ado, el cual afirma que toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una representación fiel también de dimensión finita.

Ejemplos 1.3.2.

1. La aplicación

$$\begin{aligned}\pi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ X &\mapsto 0\end{aligned}$$

es la representación trivial.

2. Sea \mathfrak{g} una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, la identidad define una representación de \mathfrak{g} en V , denominada representación canónica.
3. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión dos, con una base $\{X, Y\}$ y tabla de multiplicar $[X, Y] = Y$. La transformación lineal

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$$

que asigna

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \pi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

define una representación fiel de \mathfrak{g} en V . Su imagen es:

$$\text{im } \pi = \left\{ \begin{pmatrix} a/2 & b \\ 0 & -a/2 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{k} \right\}$$

4. La aplicación

$$\begin{aligned}\pi_1 : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{k}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2a & 2b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

es una representación de $\mathfrak{sl}(2)$ en V . En efecto, sea la base canónica $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ donde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus coeficientes de estructura están dados por

$$[H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y \quad [X, Y] = H.$$

Los transformados de los elementos de la base canónica

$$\pi_1(X) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_1(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \pi_1(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

forman una base de $\text{im } \pi$ que tiene los mismos coeficientes de estructura.

5. La aplicación

$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathfrak{sl}(2, k) &\longrightarrow \text{Der}(\mathfrak{sl}(2, k)) \\ X &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ Y &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

también es una representación de $\mathfrak{sl}(2, k)$ en $\mathfrak{sl}(2, k)$, basta verificar que $\pi_2(X), \pi_2(H), \pi_2(Y)$ tienen la misma tabla de multiplicar.

Representaciones equivalentes

Sean π_1 y π_2 dos representaciones de una misma álgebra de Lie \mathfrak{g} en los espacios V_1 y V_2 respectivamente. Estas representaciones se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo lineal $P : V_1 \rightarrow V_2$ tal que:

$$\pi_2(X) \circ P = P \circ \pi_1(X)$$

para cualquier $X \in \mathfrak{g}$. Recíprocamente, dados una representación π_1 y un isomorfismo lineal P , definiendo π_2 a partir de la expresión de arriba, se obtiene una representación equivalente a π_1 . El isomorfismo que realiza la equivalencia entre las representaciones se denomina *operador de intercambio* entre π_1 y π_2 .

Ejemplo 1.3.3. Las representaciones π_1 y π_2 de $\mathfrak{sl}(2, k)$ en un espacio V de dimensión 3 y en $\mathfrak{sl}(2, k)$ respectivamente, dadas en los ejemplos anteriores son equivalentes. Si denotamos una base de V como $\{v_1, v_2, v_3\}$ y tomamos la base canónica de $\mathfrak{sl}(2, k)$, el isomorfismo P que existe entre V y $\mathfrak{sl}(2, k)$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} P : V &\longrightarrow \mathfrak{sl}(2, k) \\ v_1 &\longmapsto X \\ v_2 &\longmapsto -H \\ v_3 &\longmapsto -Y \end{aligned}$$

y satisface $\pi_2(X) \circ P = P \circ \pi_1(X)$ para todo $X \in \mathfrak{sl}(2)$.

1.3.1. Representación adjunta

Definición 1.3.4. Dado un elemento X en el álgebra de Lie \mathfrak{g} , consideremos la transformación lineal

$$\begin{aligned} \text{ad}(X) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto \text{ad}(X)(Y) = [X, Y]. \end{aligned}$$

La aplicación

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto \text{ad}(X) \end{aligned}$$

define una representación de \mathfrak{g} en \mathfrak{g} , denominada *representación adjunta*.

La linealidad de ad proviene de la bilinealidad del corchete. Mientras que la propiedad de homomorfismo de ad es equivalente a la identidad de Jacobi. Recordemos que $\text{ad}(X)$ es una derivación de \mathfrak{g} , llamada *derivación interior*, por lo que la representación adjunta puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

El núcleo de la representación adjunta es el *centro* de \mathfrak{g} pues:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 = \text{ad}(X)(Y) \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Ejemplo 1.3.5. La representación π_2 del Ejemplo 1.3.2[5] es la adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$.

Producto semidirecto

Sean \mathfrak{g} y \mathfrak{h} dos álgebras de Lie y π una representación de \mathfrak{g} en \mathfrak{h} tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$ $\pi(X)$ es una derivación de \mathfrak{h} . Se define en el producto cartesiano $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ el siguiente corchete

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [(Y_1, Y_2)] + \pi(X_1)(Y_2) - \pi(X_2)(Y_1)).$$

Con este corchete, $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie que se descompone en suma directa

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = (\mathfrak{g} \times 0) \oplus (0 \times \mathfrak{h})$$

de una subálgebra isomorfa a \mathfrak{g} y un ideal isomorfo a \mathfrak{h} . La notación para el producto semidirecto es $\mathfrak{g} \ltimes_{\pi} \mathfrak{h}$.

Si un álgebra de Lie \mathfrak{g} es suma directa de una subálgebra \mathfrak{h} y un ideal \mathfrak{i} , entonces ésta es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{h} \ltimes_{\pi} \mathfrak{i}$, donde la representación de \mathfrak{h} en \mathfrak{i} está dada por la restricción de la representación adjunta de \mathfrak{g} sobre \mathfrak{h} , lo cual es posible porque \mathfrak{i} es un ideal.

1.3.2. Construcción de representaciones

Suma directa de representaciones

Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie y π_1, \dots, π_n representaciones de \mathfrak{g} en V_1, \dots, V_n respectivamente. Definimos

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) \\ X &\mapsto \pi(X) = \pi_1(X) \oplus \dots \oplus \pi_n(X). \end{aligned}$$

Se puede verificar que π define una representación en $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ denominada la *suma directa* de las representaciones π_i . En el caso particular en que $n = 2$ la suma directa es

$$\pi(X)(v, w) = (\pi_1(X)(v), \pi_2(X)(w)).$$

Producto tensorial de representaciones

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y π_i , con $i = 1 \dots n$, representaciones de \mathfrak{g} en V_i . Se define

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n)$$

por

$$\pi(X)(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) = \pi_1(X)(v_1) \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n + \dots + v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes \pi_n(X)(v_n).$$

Entonces π define una representación de \mathfrak{g} en $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Este es el *producto tensorial* de las representaciones.

En el caso particular en que $n = 2$ el producto tensorial es:

$$\pi(X)(v \otimes w) = \pi_1(X)(v) \otimes w + v \otimes \pi_2(X)(w).$$

Vale la pena observar que la aplicación $\pi(X) = \pi_1(X) \otimes \pi_2(X)$ no define una representación ya que no es lineal. Sin embargo será denotada por $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n$ la representación definida en el producto tensorial a pesar de ser una notación que permita una interpretación equivocada.

Sean ahora $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie y π_i las representaciones de \mathfrak{g}_i en V_i con $i = 1, \dots, n$. Se define una nueva representación de la suma directa en el producto tensorial:

$$\pi_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \pi_n : \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$$

donde

$$\pi_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \pi_n(X_1, \dots, X_n)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_i v_1 \otimes \dots \otimes \pi_i(X_i)(v_i) \otimes \dots \otimes v_n$$

Por ejemplo, en el caso particular en que $n = 2$ tendremos:

$$\pi_1 \widehat{\otimes} \pi_2(X_1, X_2)(v \otimes w) = \pi_1(X_1)(v) \otimes w + v \otimes \pi_2(X_2)(w).$$

Producto exterior de representaciones

Sea π una representación de \mathfrak{g} en V . Se define una nueva representación de \mathfrak{g} en el álgebra exterior $\Lambda^n V$ de la siguiente manera

$$\Lambda^n \pi(X)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \sum_i v_1 \wedge \dots \wedge \pi(X)(v_i) \wedge \dots \wedge v_n.$$

Restricción de representaciones

Sea π una representación de \mathfrak{g} en V y supongamos que W sea un subespacio *invariante* por π , es decir,

$$\pi(X)W \subset W, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} \pi|_W : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(W) \\ X &\longmapsto \pi(X)|_W \end{aligned}$$

define una representación de \mathfrak{g} en W .

Sea π una representación de \mathfrak{g} en V y \mathfrak{h} una subálgebra de \mathfrak{g} . La aplicación

$$\begin{aligned}\pi|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ X &\longmapsto \pi(X)\end{aligned}$$

define una representación de \mathfrak{h} en V .

Cociente de representaciones

Sea π una representación de \mathfrak{g} en V y $W \subset V$ un subespacio invariante por la representación. La aplicación

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V/W) \\ X &\longmapsto \tilde{\pi}(X)\end{aligned}$$

es una representación, donde la transformación lineal $\tilde{\pi}(X) : V/W \rightarrow V/W$ se define como

$$\tilde{\pi}(X)(\bar{v}) = \overline{\pi(X)(v)}.$$

Representación dual

Dada una representación π de \mathfrak{g} en V , se puede definir una representación π^* de \mathfrak{g} en el dual V^* de V mediante la fórmula

$$\pi(X)(f)(v) = -(f \circ \pi(X))(v) \quad \text{con } f \in V^*, \text{ para todo } v \in V.$$

Representación en $\text{End}(V)$

Dado un espacio vectorial V sobre k , existe un isomorfismo estándar entre los espacios vectoriales $V^* \otimes V$ y $\text{End}(V)$ que asigna al tensor $f \otimes v$ el endomorfismo de V

$$\begin{aligned}V &\longrightarrow V \\ w &\longmapsto f(w)v.\end{aligned}$$

Si π es una representación de \mathfrak{g} en V , existe π^* representación de \mathfrak{g} en V^* y $\pi^* \otimes \pi$ representación de \mathfrak{g} en el producto tensorial $V^* \otimes V$, en la forma antes descrita. Por lo tanto, se puede definir una representación ϕ de \mathfrak{g} en $\text{End}(V)$, vía el isomorfismo arriba expuesto. Esta representación se puede describir directamente como

$$(\phi(X)(f))(v) = \pi(X)(f(v)) - f(\pi(X)(v))$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$, $f \in \text{End}(V)$ y $v \in V$.

De manera mas general, si π_1 y π_2 son dos representaciones de \mathfrak{g} en V y W respectivamente, se puede definir una representación ϕ de \mathfrak{g} en el espacio vectorial $\text{Hom}(V, W)$ de las transformaciones lineales, de la siguiente manera:

$$(\phi(X)(f))(v) = \pi_2(X)(f(v)) - f(\pi_1(X)(v))$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$, $f \in \text{Hom}(V, W)$ y $v \in V$. Esta representación proviene del isomorfismo entre $\text{Hom}(V, W)$ y $V^* \otimes W$.

1.3.3. Álgebras de Lie semisimples

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , definimos una sucesión de ideales de \mathfrak{g} , llamada *serie derivada*, de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \dots, \mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}].$$

Llamamos a \mathfrak{g} *soluble* si $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ para algún n .

Toda álgebra de Lie abeliana es soluble. El centro de un algebra de Lie es un ideal soluble.

Proposición 1.3.1. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie.*

(a) *Si \mathfrak{g} es soluble, entonces lo serán toda subálgebra e imagen homomórfica de \mathfrak{g} .*

(b) *Si \mathfrak{i} es un ideal soluble de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ es soluble, entonces \mathfrak{g} es soluble.*

(c) *Si $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ son ideales solubles de \mathfrak{g} , entonces $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ es soluble.*

Demostración.

- a) Por definición de álgebra derivada, si \mathfrak{h} es subálgebra de \mathfrak{g} se prueba por inducción sobre n que $\mathfrak{h}^{(n)} \subset \mathfrak{g}^{(n)}$. De donde se sigue que \mathfrak{h} es soluble si \mathfrak{g} es soluble. Análogamente, si $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{l}$ es un epimorfismo, aplicando inducción sobre n se muestra que $\phi(\mathfrak{g}^{(n)}) = \mathfrak{l}^{(n)}$. Con lo cual si $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ para algún n , $0 = \phi(\mathfrak{g}^{(n)}) = \mathfrak{l}^{(n)}$.
- b) Supongamos que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^{(m)} = 0$ para algún m , consideremos la proyección canónica $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$, la cual es un epimorfismo y le apliquemos el resultado usado en el apartado a), es decir, $\pi(\mathfrak{g}^{(m)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^{(m)}$. Encontramos que $\pi(\mathfrak{g}^{(m)}) = 0$ lo cual implica que $\mathfrak{g}^{(m)} \subset \mathfrak{i}$. Como $\mathfrak{g}^{(m)}$ es un ideal de \mathfrak{g} contenido en \mathfrak{i} , es una subálgebra del ideal \mathfrak{i} el cual por hipótesis es soluble. Por apartado a), $\mathfrak{g}^{(m)}$ es soluble, es decir, que $(\mathfrak{g}^{(m)})^{(n)} = 0$. Pero $(\mathfrak{g}^{(m)})^{(n)} = \mathfrak{g}^{(m+n)}$.
- c) Por uno de los teoremas de homomorfismo estándar (Teorema 1.2.8) existe un isomorfismo entre $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}/\mathfrak{j}$ e $\mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$. Como \mathfrak{i} es soluble, por el apartado a) lo será $\mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ por ser su imagen homomórfica. Luego $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}/\mathfrak{j}$ será también soluble por el apartado a). Por otro lado \mathfrak{j} es un ideal de $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$. Tenemos \mathfrak{j} ideal soluble de $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$, $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}/\mathfrak{j}$ soluble, por apartado b) $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ es soluble.

□

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie arbitraria y \mathfrak{s} un ideal soluble maximal de \mathfrak{g} , es decir, no hay otro ideal soluble mayor que esté contenido en \mathfrak{g} . Si \mathfrak{i} es cualquier otro ideal soluble de \mathfrak{g} , entonces por el apartado c) de la proposición anterior sabemos que $\mathfrak{s} + \mathfrak{i}$ es soluble pero como \mathfrak{s} es maximal debe ocurrir $\mathfrak{s} + \mathfrak{i} = \mathfrak{s}$ lo que implica $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{s}$. Esto prueba la unicidad del ideal soluble maximal, llamado el *radical* de \mathfrak{g} y denotado por $\text{Rad}\mathfrak{g}$.

Definición 1.3.6. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice *semisimple* si $\text{Rad}\mathfrak{g} = 0$.

Definición 1.3.7. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice *simple* si $\dim \mathfrak{g} \neq 1$ y los únicos ideales de \mathfrak{g} son el nulo y \mathfrak{g} .

Es inmediato, a partir de la definición, que las álgebras de dimensión uno, no son semisimples. Mientras que aquellas que no tienen ideales propios si lo son. En efecto, sea \mathfrak{g} un álgebra simple. Como $\text{Rad}\mathfrak{g}$ es un ideal, éste debe ser 0 o \mathfrak{g} . En el primer caso, \mathfrak{g} es semisimple como queríamos probar. En el segundo caso, si $\text{Rad}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ entonces \mathfrak{g} es soluble, y por lo tanto, $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$. Como \mathfrak{g}' también es un ideal de \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}' = 0$, pero entonces resulta ser \mathfrak{g} un álgebra abeliana. Esto sería imposible si la dimensión de \mathfrak{g} es mayor o igual a 2 , pues todo subespacio de un álgebra abeliana es un ideal. Luego $\dim\mathfrak{g} = 1$, pero esto contradice que \mathfrak{g} es simple. La contradicción viene de suponer que $\text{Rad}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, por lo tanto las álgebras simples son semisimples.

Ejemplos 1.3.8.

1. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ es simple. Sean

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la base canónica de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Los corchetes entre estas matrices están dados por

$$[H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y, [X, Y] = H.$$

Si \mathfrak{h} es un ideal no nulo, tomemos $Z = aX + bH + cY \in \mathfrak{h}$. Entonces

$$[X, Z] = -2bX + cH \in \mathfrak{h}, [X, [X, Z]] = -2cX \in \mathfrak{h}.$$

Es decir, $X \in \mathfrak{h}$. Como $H = -[Y, X] \in \mathfrak{h}$ e $Y = \frac{1}{2}[Y, H] \in \mathfrak{h}$ concluimos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$.

2. En general, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ es simple si el cuerpo no es de característica dos. La verificación es semejante al caso $n = 2$.

El centro de un álgebra es un ideal abeliano, y por lo tanto soluble. Por este motivo, el centro de un álgebra semisimple es necesariamente nulo. Como el centro de un álgebra cualquiera coincide con el núcleo de la representación adjunta, la representación adjunta de un álgebra semisimple es fiel. Por eso toda álgebra semisimple se puede ver como una subálgebra de transformaciones lineales.

1.4. Criterio para semisimplicidad

Definición 1.4.1. Se llama *forma de Killing* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , a la forma bilineal definida por $\kappa(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

La forma de Killing es simétrica y también asociativa en el siguiente sentido $\kappa([X, Y], Z) = \kappa(X, [Y, Z])$, esto se sigue de la identidad $\text{tr}([X, Y]Z) = \text{tr}(X[Y, Z])$ que se verifica para endomorfismos X, Y, Z de un espacio vectorial de dimensión finita.

Lema 1.4.2. Sea I un ideal de \mathfrak{g} . Si κ es la forma de Killing de \mathfrak{g} y κ_I la forma de Killing de I entonces $\kappa_I = \kappa|_{I \times I}$.

Demostración. Recordemos el siguiente resultado del algebra lineal: si W es un subespacio de un espacio vectorial V (dim finita), y ϕ es un endomorfismo de V que mapea V en W , entonces $\text{tr}(\phi) = \text{tr}(\phi|_W)$. Esto se justifica extendiendo una base de W a una base de V y mirando la matriz resultante. Ahora si $X, Y \in I$ la composición $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ es un endomorfismo de \mathfrak{g} que mapea \mathfrak{g} en I , por lo tanto su traza $\kappa(X, Y)$ coincide con la traza de $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)|_I = \text{ad}(X)|_I \text{ad}(Y)|_I$, es decir, con $\kappa_I(X, Y)$.

□

Definición 1.4.3. Una forma bilineal simétrica $\beta(X, Y)$ se dice no degenerada si su radical \mathfrak{s} es 0, donde $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \beta(X, Y) = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\}$.

Como la forma de Killing es asociativa su radical resulta un ideal del álgebra de Lie.

Recordemos que en un álgebra de Lie semisimple su radical soluble es $\text{Rad}\mathfrak{g} = 0$. Esto es equivalente a pedir que \mathfrak{g} no tenga ideales abelianos no nulos. En efecto, cualquier ideal abeliano debe estar en el radical, recíprocamente, el radical contiene un ideal abeliano de \mathfrak{g} , el último término no nulo de la serie derivada de $\text{Rad}\mathfrak{g}$.

Teorema 1.4.4. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. \mathfrak{g} es semisimple si y sólo si su forma de Killing es no degenerada.

Demostración. Supongamos primero que $\text{Rad}\mathfrak{g} = 0$. Sea \mathfrak{s} el radical de κ . Por definición de \mathfrak{s} tenemos $\text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 0 \forall X \in \mathfrak{s}, Y \in \mathfrak{g}$, en particular $\forall Y \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. Por el criterio de Cartan \mathfrak{s} es soluble, pero como es un ideal de \mathfrak{g} , resulta entonces $\mathfrak{s} \subset \text{Rad}\mathfrak{g} = 0$. Luego κ es no degenerada.

Sea $\mathfrak{s} = 0$. Para probar que \mathfrak{g} es semisimple, será suficiente probar que todo ideal abeliano I de \mathfrak{g} está contenido en \mathfrak{s} . Supongamos que $X \in I, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ mapea $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow I$ y $(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))^2$ manda \mathfrak{g} al $[I, I] = 0$. Esto dice que el endomorfismo $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ es nilpotente, y por lo tanto su traza es cero. Luego $\text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 0 = \kappa(X, Y) \forall X \in I, Y \in \mathfrak{g}$. De modo que $I \subset \mathfrak{s} = 0$. □

Una herramienta práctica del álgebra lineal para chequear la no degeneración de una forma bilineal es como sigue. Fijemos una base de X_1, X_2, \dots, X_n de \mathfrak{g} . Entonces κ es no degenerada si y solo si la matriz $n \times n$ cuya i, j entrada es $\kappa(X_i, X_j)$ tiene determinante no nulo. A modo de ejemplo consideremos los siguientes.

Ejemplos 1.4.5.

1. Sabemos que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ es simple y por lo tanto semisimple. Sin embargo calculemos su forma de Killing y verifiquemos que efectivamente es no degenerada.

Consideremos la base estándar en el orden $B = \{X, H, Y\}$. Sus adjuntas son

$$[\text{ad}(H)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad [\text{ad}(X)]_B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\text{ad}(Y)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto κ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es -128 .

2. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ con base ordenada $\tilde{B} = \{(X, 0), (H, 0), (Y, 0), (0, X), (0, H), (0, Y)\}$. Las adjuntas de los vectores de la base son

$$\begin{aligned} [\text{ad}((X, 0))]_{\tilde{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\text{ad}(X)]_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, [\text{ad}((H, 0))]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} [\text{ad}(H)]_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [\text{ad}((Y, 0))]_{\tilde{B}} &= \begin{pmatrix} [\text{ad}(Y)]_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, [\text{ad}((0, X))]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\text{ad}(X)]_B \end{pmatrix}, \\ [\text{ad}((0, H))]_{\tilde{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\text{ad}(H)]_B \end{pmatrix}, [\text{ad}((0, Y))]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\text{ad}(Y)]_B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz de la forma de Killing es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es -128^2 , por lo tanto $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ es semisimple.

Antes de continuar con el siguiente teorema, hacemos dos observaciones. La primera: $\text{ad } \mathfrak{g}$ es un ideal en $\text{Der}(\mathfrak{g})$. La demostración depende de la igualdad $[\delta, \text{ad}(X)] = \text{ad}(\delta X), \forall X \in \mathfrak{g}, \delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$. La segunda: la imagen homomórfica de un álgebra semisimple es semisimple.

Teorema 1.4.6. *Si \mathfrak{g} es semisimple, entonces toda derivación de \mathfrak{g} es interior.*

Demostración. Puesto que \mathfrak{g} es semisimple, $Z(\mathfrak{g}) = 0$. Por lo tanto $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{ad } \mathfrak{g}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie. Luego $\text{ad } \mathfrak{g}$ es semisimple y por lo tanto su forma de Killing es no degenerada. Llamemos $M = \text{ad } \mathfrak{g}$ y $D = \text{Der}(\mathfrak{g})$, y recordemos que $[M, D] \subset M$. Por ser M ideal κ_M es la restricción a $M \times M$ de la forma de Killing κ_D de D . Consideremos el subespacio de D ortogonal a M respecto de la forma de Killing κ_D , es decir, $M^\perp = \{\delta \in D \mid \kappa_D(\delta, \text{ad}(X)) = 0 \forall \text{ad}(X) \in M\}$. Por ser κ_M no degenerada, resulta $M^\perp \cap M = 0$. Esto dice que M^\perp es el complemento de M , luego $D = M^\perp \oplus M$ y como ambos son ideales de D , $[M^\perp, M] = 0$. Si $\delta \in M^\perp$, entonces $\text{ad}(\delta X) = 0 \forall X \in \mathfrak{g}$ y, pues $[\delta, \text{ad}(X)] = 0 = \text{ad}(\delta X)$. Como ad es inyectiva $\delta X = 0 \forall X \in \mathfrak{g}$ pero entonces $\delta = 0$. En conclusión $M^\perp = 0, \text{Der } \mathfrak{g} = M = \text{ad } \mathfrak{g}$. \square

A partir de este Teorema y del hecho que garantiza que las componentes semisimples y nilpotentes de una derivación son también derivaciones (lo cual aceptamos sin demostración) se obtiene la siguiente descomposición de los elementos de un álgebra semisimple, a la cual llamaremos *descomposición abstracta de Jordan*.

Corolario 1.4.7. *Sea \mathfrak{g} álgebra de Lie semisimple, $X \in \mathfrak{g}$. Entonces, X se descompone de manera única en*

$$X = X_s + X_n$$

con $X_s, X_n \in \mathfrak{g}$ tales que $\text{ad}(X_s)$ es semisimple, $\text{ad}(X_n)$ es nilpotente y

$$[X_s, X_n] = [X, X_s] = [X, X_n] = 0.$$

Demostración. Tomamos la descomposición de Jordan de $\text{ad}(X) = S + N$, con S, N derivaciones de \mathfrak{g} , que conmutan entre sí y con $\text{ad}(X)$. Como toda derivación de \mathfrak{g} es interna (Teorema 1.4.6) y la representación adjunta es inyectiva, existen únicos elementos $X_s, X_n \in \mathfrak{g}$ tales que $S = \text{ad}(X_s)$ y $N = \text{ad}(X_n)$. De ahí que

$$\text{ad}(X - X_s - X_n) = 0$$

pero por ser inyectiva ad , se obtiene $X = X_s + X_n$. Como $[S, N] = 0 = [\text{ad}(X_s), \text{ad}(X_n)] = \text{ad}([X_s, X_n])$, se obtiene $[X_s, X_n] = 0$.

□

Llamamos a X_s, X_n las partes *semisimples* y *nilpotentes* de X .

1.5. Descomposición de representaciones

En esta sección k es un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero.

Definición 1.5.1. Una representación π de \mathfrak{g} en V es irreducible si los únicos subespacios invariantes por π son el subespacio nulo y V .

Una representación π es completamente reducible si V se descompone como

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

donde cada subespacio V_i es invariante por π y la restricción de π en V_i es irreducible.

Proposición 1.5.1. Sea π una representación de dimensión finita de \mathfrak{g} en V . Entonces π es completamente reducible si y sólo si todo subespacio invariante admite un complemento invariante.

Demostración. Asumamos que todo subespacio invariante de V tiene complemento invariante. Si V es irreducible no hay nada que probar. Supongamos entonces que V tiene un subespacio invariante, no trivial, W . Existe, por hipótesis, W_1 invariante tal que $V = W \oplus W_1$. Si W y W_1 son irreducibles, obtenemos la descomposición deseada. Supongamos, por lo tanto, que uno de ellos no es irreducible, por ejemplo W . Entonces es posible descomponer W a través de la siguiente afirmación: todo subespacio de W invariante admite complemento invariante en W .

En efecto, sea $W' \subset W$ invariante. Entonces $W' \oplus W_1 \subset V$ es invariante, por ser suma de subespacios invariantes. Por hipótesis, tiene en V un complemento invariante W_2 , es decir, $V = (W' \oplus W_1) \oplus W_2$. El subespacio $(W_1 \oplus W_2) \cap W$ es invariante pues la intersección de subespacios invariantes es invariante. Veamos que

$$W = ((W_1 \oplus W_2) \cap W) \oplus W'.$$

Sea $x \in W'$ y $x \in W_1 \oplus W_2$. Entonces, $x = y + z$ con $y \in W_1$ y $z \in W_2$. Como $z = x - y \in W' \oplus W_1$, de la igualdad se sigue $z = 0$ y $x = y$, de aquí $x \in W' \cap W_1$, de donde se concluye $x = 0$. Esto muestra que la suma $((W_1 \oplus W_2) \cap W) + W'$ es directa. Ahora, dado $x \in W$, se puede escribir $x = x_1 + x_2 + x_3$ con $x_1 \in W'$, $x_2 \in W_1$, $x_3 \in W_2$. Entonces $x_2 + x_3 = x - x_1 \in W$, por lo que $x_2 + x_3 \in (W_1 \oplus W_2) \cap W$, con lo cual mostramos que W es la suma directa que queríamos probar y con esto la validez de la afirmación.

Para la recíproca usamos inducción sobre la dimensión de V . Si la dimensión de V es uno no hay nada que probar. Para dimensiones mayores escribimos

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

donde cada V_i es invariante e irreducible. Sea $W \subset V$ invariante. Cada $W \cap V_i$ es invariante y como los subespacios V_i son irreducibles, la intersección es $\{0\}$ o V_i para todo i . Existen dos posibilidades:

Caso 1) Para algún i , por ejemplo $i = 1$, $W \cap V_1 = V_1$, es decir, $V_1 \subset W$. Entonces,

$$W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)).$$

En efecto, sea $x \in W$ y escribimos $x = x_1 + x_2$ donde $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)$. Como $V_1 \subset W$, $x_1 \in W$, entonces $x_2 \in W$ con lo cual $x_2 \in W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)$. De ahí que

$$W = V_1 + (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)).$$

Esta suma es directa pues $V_1 \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = \{0\}$. Usando la hipótesis inductiva para el espacio $V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$, donde $W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)$ es un subespacio invariante, existe W' invariante tal que

$$V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \oplus W'.$$

Luego $V = W \oplus W'$.

Caso 2) Para todo i , $W \cap V_i = \{0\}$. Entonces la suma invariante $W \oplus V_1$ está en la misma situación del caso 1, por lo cual existe W' invariante tal que

$$V = (W \oplus V_1) \oplus W',$$

pero entonces $V = W \oplus (V_1 \oplus W')$.

□

1.5.1. Teorema de Weyl

Antes de enunciar este importante teorema sobre representaciones de un álgebra de Lie semisimple, vamos a enunciar una serie de resultados que nos serán útiles.

Teorema 1.5.2. *Sea \mathfrak{g} una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, V de dimensión finita. Si $\text{tr}(XY) = 0 \forall X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $Y \in \mathfrak{g}$, entonces \mathfrak{g} es soluble.*

Lema 1.5.3. (Lema de Schur) *Sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ irreducible. Entonces los únicos endomorfismos de V que conmutan con $\pi(X) \forall X \in \mathfrak{g}$ son los escalares.*

Elemento Casimir de una representación

Sea \mathfrak{g} semisimple y π una representación fiel de \mathfrak{g} en V . Definimos la siguiente forma bilineal simétrica

$$\beta(X, Y) = \text{tr}(\pi(X)\pi(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dado que se cumple la identidad

$$\text{tr}([X, Y]Z) = \text{tr}(X[Y, Z])$$

para todo endomorfismo X, Y, Z , β resulta asociativa lo cual implica que su radical \mathfrak{s} sea un ideal de \mathfrak{g} . Además β es no degenerada. En efecto, por definición de \mathfrak{s} tenemos que $\forall X \in \mathfrak{s}, Y \in \mathfrak{g} \beta(X, Y) = 0 = \text{tr}(\pi(X)\pi(Y))$, pero esto es lo mismo que decir, por la inyectividad de π , $\forall \pi(X) \in [\pi(\mathfrak{s}), \pi(\mathfrak{s})]$, $\pi(Y) \in \pi(\mathfrak{s}) \text{tr}(\pi(X)\pi(Y)) = 0$, luego por Teorema 1.5.2 concluimos que $\pi(\mathfrak{s})$ es soluble, como $\pi(\mathfrak{s}) \simeq \mathfrak{s}$, \mathfrak{s} es un ideal soluble de \mathfrak{g} , pero \mathfrak{g} es semisimple, por lo tanto $\mathfrak{s} = 0$.

Ahora consideremos \mathfrak{g} semisimple, β cualquier forma bilineal asociativa, simétrica, no degenerada sobre \mathfrak{g} . Si $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es una base de \mathfrak{g} , existe una única base dual $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ determinada con respecto a β , que satisface $\beta(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ con $i, j = 1, \dots, n$. Si $X \in \mathfrak{g}$, podemos escribir

$$[X, X_i] = \sum_j a_{ij} X_j \quad \text{y} \quad [X, Y_i] = \sum_j b_{ij} Y_j$$

Usando la asociatividad de β , calculamos los escalares a_{ik}

$$\beta([X, X_i], Y_k) = \beta\left(\sum_j a_{ij} X_j, Y_k\right) = \sum_j a_{ij} \beta(X_j, Y_k) = \sum_j a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik}.$$

$$\beta(-[X_i, X], Y_k) = -\beta(X_i, [X, Y_k]) = -\beta\left(X_i, \sum_j b_{kj} Y_j\right) = -\sum_j b_{kj} \beta(X_i, Y_j) = -\sum_j b_{kj} \delta_{ij} = -b_{ki}.$$

y encontramos que $a_{ik} = -b_{ki}$.

Si π es cualquier representación de \mathfrak{g} en V , definimos el siguiente endomorfismo de V

$$c_\pi(\beta) = \sum_i \pi(X_i)\pi(Y_i)$$

con X_i, Y_i vectores de las bases dual respecto a β . Usando la identidad

$$[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z]$$

en $\text{End}(V)$, y el hecho de que $a_{ij} = -b_{ji}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} [\pi(X), c_\pi(\beta)] &= \sum_i [\pi(X), \pi(X_i)\pi(Y_i)] \\ &= \sum_i [\pi(X), \pi(X_i)]\pi(Y_i) + \sum_i \pi(X_i)[\pi(X), \pi(Y_i)] \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \pi(X_j)\pi(Y_i) + \sum_{i,j} b_{ij} \pi(X_i)\pi(Y_j) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \pi(X_j)\pi(Y_i) + \sum_{i,j} (-a_{ji}) \pi(X_i)\pi(Y_j) \\ &= 0 \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

En otras palabras, $c_\pi(\beta)$ es un endomorfismo de V que conmuta con $\pi(\mathfrak{g})$.

Definición 1.5.4. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple, π una representación fiel de \mathfrak{g} en V , con forma bilineal $\beta(X, Y) = \text{tr}(\pi(X)\pi(Y))$. Llamamos *elemento Casimir* de π al endomorfismo $c_\pi(\beta)$. Si fijamos una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de \mathfrak{g} , escribimos simplemente c_π .

Su traza es $\sum_i \text{tr}(\pi(X_i)\pi(Y_i)) = \sum_i \beta(X_i, Y_i) = \sum_i \delta_{ii} = \dim \mathfrak{g}$. En caso de que π sea irreducible, el Lema de Schur 1.5.3 implica que c_π es un escalar; y en este caso vemos que c_π es independiente de la base de \mathfrak{g} que elegimos. Cuando π no es fiel, se hace la siguiente modificación. El núcleo de π es un ideal de \mathfrak{g} , y por lo tanto suma de ideales simples (Corolario..). Sea \mathfrak{h} la suma de los ideales restantes (Teorema...). Entonces la restricción de π a \mathfrak{h} es una representación fiel de \mathfrak{h} en V , y hacemos la construcción precedente, usando bases dual de \mathfrak{h} . El elemento resultante de $\text{End}(V)$ se llama nuevamente elemento Casimir de π , denotado por c_π . Es claro que éste conmuta con $\pi(\mathfrak{g})$ pues $\pi(\mathfrak{g}) = \pi(\mathfrak{h})$.

A menudo es conveniente suponer que estamos tratando con una representación fiel de \mathfrak{g} , lo cual equivale a estudiar las representaciones de algunos ideales semisimples de \mathfrak{g} . Las representaciones irreducibles de un álgebra de Lie simple siempre son fieles, salvo en los espacios vectoriales de dimensión uno, en donde sólo puede actuar trivialmente.

Lema 1.5.5. *Sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} . Entonces $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$. En particular, la representación de \mathfrak{g} en cualquier espacio vectorial de dimensión uno es la trivial.*

Demostración. Como \mathfrak{g} es semisimple entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, por teorema (5.2 del libro). También sabemos que $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$. Luego

$$\pi(\mathfrak{g}) = \pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$$

□

Aquí será conveniente usar el lenguaje de módulos, el cual es equivalente al lenguaje de representaciones. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, V un espacio vectorial dotado de una operación $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ denotada por $X.v$ o Xv , se llama \mathfrak{g} -módulo si satisface las siguientes condiciones:

- (a) $(aX + bY).v = a(X.v) + b(Y.v)$
- (b) $X.(av + bw) = a(X.v) + b(X.w)$
- (c) $[X, Y].v = X.Y.v - Y.X.v$

con $X, Y \in \mathfrak{g}; v, w \in V; a, b \in \mathfrak{k}$.

Si $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de \mathfrak{g} , podemos dar a V la estructura de \mathfrak{g} -módulo a través de la acción

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (X, v) &\mapsto X.v = \pi(X)(v). \end{aligned}$$

Recíprocamente dado un \mathfrak{g} -módulo V , esta última igualdad define una representación

$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Un homomorfismo de \mathfrak{g} -módulos es una transformación lineal $\phi : V \rightarrow W$ tal que $\phi(X.v) = X.\phi(v)$. El núcleo de tal homomorfismo es un \mathfrak{g} -submódulo de V . Decir que W es un \mathfrak{g} -submódulo de V es equivalente a decir W subespacio invariante por π .

Teorema 1.5.6. (Weyl) Sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple. Entonces π es completamente reducible.

Demostración. En la primera parte de la demostración vamos a considerar dos casos: W un subespacio invariante e irreducible de V de codimension uno, W un subespacio invariante de V de codimension uno.

Sea $W \subset V$ es un subespacio invariante e irreducible de codimension uno. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que \mathfrak{g} actúa fielmente sobre V . Sea $c = c_\pi$ el elemento Casimir de π . Por la definición de c tenemos $c(W) \subset W$. Puesto que c conmuta con $\pi(\mathfrak{g})$, c es un endomorfismo de \mathfrak{g} -módulo de V ; luego $\ker c$ y $\text{im } c$ son \mathfrak{g} -submódulos de V . Como V/W tiene dimensión uno \mathfrak{g} actúa trivialmente sobre él, es decir, $\pi(\mathfrak{g})$ mapea V en W y c debe hacerlo de igual forma por ser combinación lineal de productos de elementos $\pi(X)$. De modo que c tiene traza 0 sobre el cociente V/W . Por otro lado, puesto que W es irreducible, por el Lema de Schur, c es multiplicación por un escalar sobre W . Este escalar no puede ser cero, pues esto forzaría a que la traza de c sea cero en contradicción con la conclusión $\text{tr}(c) = \dim \mathfrak{g}$. Se sigue que $\ker c$ es un submódulo de dimensión uno el cual intersecta trivialmente a W , por lo tanto $V = W \oplus \ker c$.

Se prueba por inducción sobre la dimensión que vale la misma igualdad cuando W sea un submódulo de codimension uno. Si W no es irreducible, sea W' un submódulo propio no nulo de W . Éste produce una sucesión exacta de \mathfrak{g} -módulos:

$$0 \rightarrow W/W' \rightarrow V/W' \rightarrow (V/W')/(W/W') \rightarrow 0.$$

Por inducción sobre dimension de W esta sucesión se parte, es decir, existe un \mathfrak{g} -submódulo de V/W' de dimensión uno, digamos \tilde{W}/W' complementario a W/W' . Así conseguimos otra sucesión exacta:

$$0 \rightarrow W' \rightarrow \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}/W' \rightarrow 0.$$

Por inducción, encontramos un \mathfrak{g} -submódulo X , de dimensión uno, complementario a W' en \tilde{W} , es decir, $\tilde{W} = W' \oplus X$. Como $V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}/W'$ las dimensiones de W y X suman la dimension de V y $W \cap X = \{0\}$, por lo tanto $V = W \oplus X$.

Sea ahora W un submódulo de V no nulo distinto de V . Sea $\text{Hom}(V, W)$ el espacio de las transformaciones lineales de V en W , visto como \mathfrak{g} -módulo. Sea \mathcal{V} el subespacio de $\text{Hom}(V, W)$ que contiene a aquellas transformaciones lineales cuya restricción a W es una multiplicación escalar. \mathcal{V} es un \mathfrak{g} -submódulo pues si $f|_W = a \cdot 1_W$ entonces para $X \in \mathfrak{g}, w \in W$ se tiene $(X.f|_W)(w) = X.f|_W(w) - f|_W(X.w) = X.(aw) - a(X.w) = a(X.w) - a(X.w) = 0$, así pues tenemos $X.f|_W = 0$. Sea \mathcal{W} el subespacio de \mathcal{V} que contiene a aquellas transformaciones lineales f cuya restricción sobre W es cero. El cálculo anterior muestra que también \mathcal{W} es un \mathfrak{g} -submódulo de $\text{Hom}(V, W)$ y que \mathfrak{g} mapea \mathcal{V} en \mathcal{W} . Mas aún, \mathcal{V}/\mathcal{W} tiene dimensión uno, porque cada $f \in \mathcal{V}$ está determinado por el escalar $f|_W$. Esto produce la siguiente sucesión: $0 \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{W} \rightarrow 0$, tratada antes. De la primera parte de la demostración encontramos que \mathcal{V} tiene un submódulo complementario a \mathcal{W} de dimensión uno. Sea f la que está en el complemento de \mathcal{W} , y la multipliquemos por un escalar no nulo tal que $f|_W = 1_W$. Como $X.f = 0$ esto implica que $0 = X.f(v) - f(X.v)$, es decir, f es un homomorfismo de \mathfrak{g} -módulos. Por lo tanto $\ker f$ es un submódulo de V . Puesto que f mapea V en W y actúa como 1_W sobre W , resulta sobreyectiva y $\ker f \cup W = 0$, por lo tanto $V = W \oplus \ker f$. \square

El teorema de Weyl es fundamental para el estudio de las representaciones de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} . A continuación mostraremos una aplicación del mismo para justificar que la descomposición abstracta de Jordan es compatible con las diversas representaciones lineales de \mathfrak{g} .

Teorema 1.5.7. *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una álgebra de Lie lineal semisimple, V de dimensión finita. Entonces \mathfrak{g} contiene las partes semisimple y nilpotente de todos sus elementos. En particular, las descomposiciones abstracta y usual de Jordan en \mathfrak{g} coinciden.*

Demostración. La última afirmación de la tesis, se sigue suponiendo que vale la primera porque cada tipo de descomposición Jordan es única.

Sea $X \in \mathfrak{g}$ un elemento arbitrario, con descomposición de Jordan

$$X = X_s + X_n \text{ en } \mathfrak{gl}(V).$$

El problema es sólo mostrar que X_s, X_n están en \mathfrak{g} . Para ello vamos a escribir a \mathfrak{g} como una intersección de subálgebras de Lie. Puesto que $[X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, el corchete $[p(X), \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ para todo polinomio en una indeterminada $p(T)$ sin término constante. Dado que $X_s = p(X)$ y $X_n = q(X)$ son polinomios en X sin término constante, se sigue $[X_s, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ y $[X_n, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$.

Sea N el subespacio de todos los endomorfismos A de V tales que $[A, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$. Se puede verificar rápidamente que es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, y obviamente contiene a \mathfrak{g} como un ideal y $X_s, X_n \in N$.

Sea W un \mathfrak{g} -submódulo de V cualquiera (donde la representación de \mathfrak{g} en V es la identidad). Definimos

$$\mathfrak{g}_W = \{Y \in \mathfrak{gl}(V) \mid Y(W) \subset W, \text{tr}(Y|_W) = 0\}.$$

Estos subespacios son subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Dado que \mathfrak{g} es semisimple, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ entonces todo $X \in \mathfrak{g}$ cumple que $\text{tr}(X|_W) = 0$. Es claro entonces que \mathfrak{g} está en todos los \mathfrak{g}_W . Sea \mathfrak{g}' igual a la intersección de N con todos los \mathfrak{g}_W . \mathfrak{g}' es subálgebra de Lie de N , y contiene a \mathfrak{g} como un ideal porque $[\mathfrak{g}, N] \subset \mathfrak{g}$. También es verdad que si $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_W$ entonces $0 = \text{tr}(X|_W) = \text{tr}(X_s|_W)$ y $\text{tr}(X_n|_W) = 0$, por lo tanto $X_s, X_n \in \mathfrak{g}_W$ para todo W . Esto dice que $X_s, X_n \in \mathfrak{g}'$.

Queda probar $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. Dado que \mathfrak{g}' es un \mathfrak{g} -módulo de dimensión finita (la acción es la restricción de la representación adjunta de $\mathfrak{gl}(V)$ a \mathfrak{g}), el teorema de Weyl nos permite descomponer a \mathfrak{g}' como suma directa de dos \mathfrak{g} -submódulos. Entonces, para \mathfrak{g} , \mathfrak{g} -submódulo de \mathfrak{g}' , existe M \mathfrak{g} -submódulo de \mathfrak{g}' , tal que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus M$. Como $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[M, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ pero $[M, \mathfrak{g}] \subset M$ pues M es \mathfrak{g} -submódulo, luego $[M, \mathfrak{g}] = 0$ porque la suma es directa. Sea ahora W cualquier \mathfrak{g} -submódulo irreducible de V . Si $Y \in M$ entonces $[Y, \mathfrak{g}] = 0$. Por el lema de Schur, Y actúa sobre W como un escalar. Por otro lado, $\text{tr}(Y|_W) = 0$ porque $Y \in \mathfrak{g}_W$. Eso implica que Y actúa sobre W como cero. Por el teorema de Weyl, V se puede escribir como suma directa \mathfrak{g} -submódulos irreducibles, así concluimos que $Y = 0$. Esto dice $M = \{0\}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. □

Corolario 1.5.8. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple, $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de \mathfrak{g} de dimensión finita. Si $X = S + N$ es la descomposición abstracta de Jordan de $X \in \mathfrak{g}$, entonces $\pi(X) = \pi(S) + \pi(N)$ es la descomposición usual de Jordan de $\pi(X)$.*

Demostración. Como $\text{ad}(S)$ es semisimple, existe una base en \mathfrak{g} de autovectores de $\text{ad}(S)$. Sus transformados por π son autovectores de $\text{ad}_{\pi(\mathfrak{g})}(\pi(S))$ y generadores de $\pi(\mathfrak{g})$. Por lo tanto $\text{ad}_{\pi(\mathfrak{g})}(\pi(S))$ es semisimple. Análogamente, $\text{ad}_{\pi(\mathfrak{g})}(\pi(N))$ es nilpotente, porque lo es $\text{ad}(N)$, y conmuta con $\text{ad}_{\pi(\mathfrak{g})}(\pi(S))$. Por lo tanto $\pi(X) = \pi(S) + \pi(N)$ es la descomposición abstracta de Jordan de $\pi(X)$ en el álgebra de Lie semisimple $\pi(\mathfrak{g})$. Aplicando el Teorema 1.5.7 a $\pi(\mathfrak{g})$, ésta es la descomposición usual de Jordan de $\pi(X)$. □

1.6. Homología trivial

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre k de dimensión n . Consideremos la siguiente sucesión de transformaciones lineales

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n \mathfrak{g} \xrightarrow{d_n} \bigwedge^{n-1} \mathfrak{g} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_2} \mathfrak{g} \xrightarrow{d_1} k \longrightarrow 0.$$

donde $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ es la n -ésima potencia exterior de \mathfrak{g} sobre k , y las transformaciones d están definidas por

$$d_p(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_p.$$

El símbolo \widehat{X}_i quiere decir que la variable X_i se ha suprimido.

Observación

(1) $d_1(X) = 0$, $d_2(X \wedge Y) = [X, Y]$ y $d_1 \circ d_2 = 0$.

(2) $d_3(X \wedge Y \wedge Z) = [X, Y] \wedge Z - [X, Z] \wedge Y + [Y, Z] \wedge X$,

$$d_2 \circ d_3(X \wedge Y \wedge Z) = d_2([X, Y] \wedge Z - [X, Z] \wedge Y + [Y, Z] \wedge X) = [[X, Y], Z] - [[X, Z], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \text{ por Jacobi.}$$

En general, se puede demostrar que $d^2 = 0$, es decir, $d_p \circ d_{p+1} = 0$ para todo $p \geq 0$, lo cual equivale a $\text{im } d_{p+1} \subset \ker d_p$. Por lo tanto, esta sucesión de espacios vectoriales junto con las transformaciones así definidas es un complejo llamado el *complejo de Chevalley-Eilenberg*.

Definición 1.6.1. Se llama *grupo de homología* de grado p al espacio cociente

$$H_p(\mathfrak{g}) = \ker d_p / \text{im } d_{p+1}.$$

La *homología trivial* de un álgebra de Lie se define como

$$H_*(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{p=0}^n H_p(\mathfrak{g}).$$

Los grupos de homología de dimensión baja están dados por

- $H_0(\mathfrak{g}) = k/\{0\}$, de aquí $H_0(\mathfrak{g}) = k$.

- $H_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, este grupo se llama abelianización de \mathfrak{g} y también es denotado como \mathfrak{g}_{ab} .

Ejemplos 1.6.2.

1. Sea \mathfrak{g} un álgebra abeliana de dimensión n , queremos calcular la homología trivial. Como \mathfrak{g} es abeliana, los operadores d_p son todos igual a 0, por lo tanto el $\ker d_p = \bigwedge^p \mathfrak{g}$ y $\text{im } d_p = 0$. Luego

$$H_p(\mathfrak{g}) = \bigwedge^p \mathfrak{g} / \{0\} \simeq \bigwedge^p \mathfrak{g}, \quad \dim H_p(\mathfrak{g}) = \binom{n}{p}$$

$$H_*(\mathfrak{g}) = \bigoplus \bigwedge^p \mathfrak{g} \text{ y } \dim H_*(\mathfrak{g}) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

2. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ con base $\{X, Y, H\}$.

Tenemos

$$0 \longrightarrow \bigwedge^3 \mathfrak{sl}(2) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{sl}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

$$\ker d_1 = \mathfrak{sl}(2), \text{ im } d_1 = \{0\}$$

$$\bigwedge^2 \mathfrak{sl}(2) = \langle \{X \wedge Y, X \wedge H, Y \wedge H\} \rangle, \text{ im } d_2 = \langle \{H, -2X, 2Y\} \rangle, \ker d_2 = \{0\}$$

$$\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(2) = \langle \{X \wedge Y \wedge H\} \rangle, \text{ im } d_3 = \{0\}$$

pues $d_3(X \wedge Y \wedge H) = [X, Y] \wedge H - [X, H] \wedge Y + [Y, H] \wedge X = H \wedge H + 2X \wedge Y + 2Y \wedge X = 0$,
luego $\ker d_3 = \{X \wedge Y \wedge H\}$.

Entonces

$$H_0(\mathfrak{sl}(2)) = \mathbb{C},$$

$$H_1(\mathfrak{sl}(2)) = \langle \{X, Y, H\} \rangle / \langle \{H, -2X, 2Y\} \rangle = \{0\},$$

$$H_2(\mathfrak{sl}(2)) = \{0\},$$

$$H_3(\mathfrak{sl}(2)) = \langle \{X \wedge Y \wedge H\} \rangle.$$

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y D una derivación de \mathfrak{g} , es decir,

$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)]$. Sea $D^p : \bigwedge^p \mathfrak{g} \rightarrow \bigwedge^p \mathfrak{g}$ una transformación lineal definida por

$$D^p(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p) = \sum_i X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_i) \wedge \cdots \wedge X_p.$$

Proposición 1.6.3. $d_p \circ D^p = D^{p-1} \circ d_p$, es decir,

$$\bigwedge^p \mathfrak{g} : \xrightarrow{d_p} \bigwedge^{p-1} \mathfrak{g}$$

$$D^p \downarrow \quad \circ \quad \downarrow D^{p-1} \quad \text{el diagrama conmuta.}$$

$$\bigwedge^p \mathfrak{g} \xrightarrow{d_p} \bigwedge^{p-1} \mathfrak{g}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
d_p D^p(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p) &= d_p \left(\sum_k X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_k) \wedge \cdots \wedge X_p \right) = \sum_k d_p(X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_k) \wedge \cdots \wedge X_p) = \\
&= \sum_k \left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq p \\ i \neq k, j \neq k}} (-1)^{i+j-1} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_k) \wedge \cdots \wedge X_p + \right. \\
&+ \sum_{k < j} (-1)^{k+j-1} [D(X_k), X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_p + \sum_{i < k} (-1)^{i+k-1} [X_i, D(X_k)] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_p \left. \right) = \\
&= \sum_k \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_k) \wedge \cdots \wedge X_p + \\
&+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [D(X_i), X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_p + \\
&+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [X_i, D(X_j)] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^{p-1} d_p(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p) &= D^{p-1} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_p \right) = \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} \left(D([X_i, X_j]) \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_p + \sum_k [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_k) \wedge \cdots \wedge X_p \right) = \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} \left([D(X_i), X_j] + [X_i, D(X_j)] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_p + \sum_k [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_k) \wedge \cdots \wedge X_p \right) = \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} [D(X_i), X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_p + \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} [X_i, D(X_j)] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_p + \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_k (-1)^{i+j-1} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge D(X_k) \wedge \cdots \wedge X_p
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la igualdad. □

Como D conmuta con la diferencial d , preserva el $\ker d$ y la $\text{im } d$. En efecto, por la proposición anterior si $d_p(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) = 0$ se tiene que $D^p(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) \in \ker d_p$

$$d_p(D^p(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)) = D^{p-1}(d_p(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)) = 0.$$

Análogamente se justifica la invarianza de la imagen de d_{p+1} por D . Sea $Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_p \in \text{im } d_{p+1} \subset \bigwedge^p \mathfrak{g}$, entonces

$$D^p(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_p) = D^p(d_{p+1}(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p+1})) = d_{p+1}(D^{p+1}(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p+1})) \in \text{im } d_{p+1}.$$

Si $\pi : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ es una representación de $\tilde{\mathfrak{g}}$ en el álgebra de Lie \mathfrak{g} , tal que $\pi(X)$ es derivación de \mathfrak{g} para todo $X \in \mathfrak{g}$, la acción de $\tilde{\mathfrak{g}}$ pasa al espacio cociente $H_p(\mathfrak{g}) = \ker d_p / \text{im } d_{p+1}$

$$\begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{g}} \\ X \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \\ \mapsto \end{array} \begin{array}{l} \text{End}(H_p(\mathfrak{g})) \\ \tilde{\pi}(X) \end{array} \quad \text{donde } \tilde{\pi}(X)(\bar{v}) = \overline{\bigwedge^p \pi(X)(v)}.$$

Capítulo 2

Representaciones de $\mathfrak{sl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2)$

2.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2)$

En esta sección k es un cuerpo algebraicamente cerrado y todas las representaciones se supondrán de dimensión finita sobre k .

Recordemos que $\mathfrak{sl}(2, k)$ tiene base estándar:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y tabla de multiplicar

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Pesos y vector maximal

Sea π una representación arbitraria de $\mathfrak{sl}(2, k)$ en V . Puesto que $\text{ad}(H)$ es diagonal en la base estándar, H es semisimple. Por el Corolario 1.5.8, la descomposición usual de Jordan del endomorfismo que representa a H proviene de la descomposición abstracta de Jordan de H , lo cual implica en este caso que $\pi(H)$ es semisimple, es decir, $\pi(H)$ diagonaliza en alguna base de V . Esto produce una descomposición de V en suma directa de autoespacios

$$V_\lambda = \{v \in V : \pi(H)(v) = \lambda v\}, \quad \lambda \in k.$$

Estos subespacios V_λ aún tienen sentido, y son igual a $\{0\}$, cuando λ no es un autovalor de $\pi(H)$. Cuando $V_\lambda \neq \{0\}$, llamamos a λ un **peso** de H en V y a V_λ un **espacio peso**.

Nos preguntamos cómo actúan X e Y sobre los distintos espacios V_λ . Es decir, nos preguntamos dónde se sitúa en esta descomposición la imagen de un dado vector $v \in V_\lambda$ bajo la acción de X e Y . La respuesta nos la da el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Si $v \in V_\lambda$ entonces $\pi(X)(v) \in V_{\lambda+2}$ y $\pi(Y)(v) \in V_{\lambda-2}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\pi(H)(\pi(X)(v)) &= [\pi(H), \pi(X)](v) + \pi(X)(\pi(H)(v)) \\ &= \pi([H, X])(v) + \lambda\pi(X)(v) \\ &= 2\pi(X)(v) + \lambda\pi(X)(v) \\ &= (2 + \lambda)\pi(X)(v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(H)(\pi(Y)(v)) &= [\pi(H), \pi(Y)](v) + \pi(Y)(\pi(H)(v)) \\ &= \pi([H, Y])(v) + \lambda\pi(Y)(v) \\ &= -2\pi(Y)(v) + \lambda\pi(Y)(v) \\ &= (-2 + \lambda)\pi(Y)(v).\end{aligned}$$

□

Es decir, si v es un autovector por la acción de H con autovalor λ , entonces $\pi(X)(v)$ es también un autovector por H de autovalor $\lambda + 2$ y $\pi(Y)(v)$ es autovector por H de autovalor $\lambda - 2$.

Puesto que la dimensión de V es finita, y la suma es directa

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{k}} V_\lambda$$

como consecuencia de este lema debe existir $V_\lambda \neq 0$ tal que $V_{\lambda+2} = 0$. Diremos en general, que cualquier vector no nulo en V_λ tal que $X.v = 0$ será llamado un **vector maximal** o **vector de peso máximo** de peso λ .

Clasificación de representaciones irreducibles

Supongamos que π es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{k})$ en V . Elegimos un vector maximal, digamos $v_0 \in V_\lambda$ y definimos

$$v_{-1} = 0, \quad v_i = \frac{1}{i!} \pi(Y)^i(v_0) \quad \text{con } i \geq 0$$

Lema 2.1.2.

- (a) $\pi(H)(v_i) = (\lambda - 2i)v_i$
- (b) $\pi(Y)(v_i) = (i + 1)v_{i+1}$
- (c) $\pi(X)(v_i) = (\lambda - i + 1)v_{i-1} \quad \text{con } i \geq 0$

Demostración. (a) Se sigue del lema, por sucesivas aplicaciones de Y al vector v_0 que

$$\pi(H)(\pi(Y)^i(v_0)) = (\lambda - 2i)\pi(Y)^i(v_0).$$

luego

$$\pi(H)(v_i) = \frac{1}{i!} \pi(H)(\pi(Y)^i(v_0)) = \frac{1}{i!} (\lambda - 2i)\pi(Y)^i(v_0) = (\lambda - 2i)v_i$$

(b) Se deduce inmediatamente a partir de la definición de v_i .

$$\pi(Y)(v_i) = \pi(Y)\left(\frac{1}{i!}\pi(Y)^i(v_0)\right) = \frac{1}{i!}\pi(Y)i+1(v_i) = \frac{(i+1)!}{i!}v_{i+1} = (i+1)v_{i+1}.$$

(c) Aplicamos inducción sobre i . Si $i = 0$ vale la igualdad, pues $\pi(X)(v_0) = 0$ y $v_{-1} = 0$ por convención.

Observemos que

$$\begin{aligned} i\pi(X)(v_i) &= \pi(X)\pi(Y)(v_{i-1}) && \text{por definición de } v_i \\ &= [\pi(X), \pi(Y)](v_{i-1}) + \pi(Y)\pi(X)(v_{i-1}) \\ &= \pi(H)(v_{i-1}) + \pi(Y)((\lambda - (i-1) + 1)v_{i-2}) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)\pi(Y)(v_{i-2}) && \text{por (a)} \\ &= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (\lambda - i + 2)(i-1)v_{i-1} && \text{por (b)} \\ &= i(\lambda - i + 1)v_{i-1} \end{aligned}$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad por i , se llega a la igualdad deseada. \square

La fórmula (a) dice que los v_i son vectores propios de $\pi(H)$ de autovalores distintos, por lo tanto, los v_i son linealmente independientes. Como la dimensión de V es finita, llamemos m al menor entero para el cual $v_m \neq 0$ y $v_{m+1} = 0$; y por consiguiente $v_{m+i} = 0$ para todo $i > 0$. Si consideramos las tres fórmulas (a), (b), (c) conjuntamente, éstas nos muestran que el subespacio de V con base $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ es invariante por π , diferente de $\{0\}$. Como π es irreducible, el subespacio debe ser todo V . Si miramos con mayor detenimiento a la fórmula (c), encontraremos que para $i = m + 1$, el lado izquierdo de la fórmula es 0, mientras que el lado derecho es $(\lambda - m)v_m$. Dado que $v_m \neq 0$, concluimos que $\lambda = m$. En otras palabras, el peso de un vector maximal es un entero no negativo, igual a $\dim V - 1$. Llamamos a este peso el **peso máximo** de V .

Por la fórmula (a), cada peso $\mu = \lambda - 2i$ ocurre con multiplicidad uno, es decir, $\dim V_\mu = 1$ si $V_\mu \neq \{0\}$; esto dice, en particular, que el vector maximal v_0 es el único posible en V , salvo múltiplo escalar.

Además, respecto a la base ordenada $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$, las matrices de los endomorfismos que representan a X, Y, H tienen la siguiente forma:

$$\pi(H) = \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -m+2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -m \end{pmatrix}$$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & m & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que H produce una matriz diagonal, mientras que X e Y producen matrices nilpotentes triangular superior e inferior.

Por otro lado, para arbitrarios $m \geq 0$, las tres fórmulas del Lema 2.1.2 definen una representación irreducible $(\pi_{(m)}, V_{(m)})$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ en un espacio vectorial sobre \mathbb{k} de dimensión $m + 1$, con base $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$. La representación será la que asigne a H, X, Y las matrices de arriba. Ésta es una representación porque los corchetes entre las matrices tienen los mismos coeficientes de estructura de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Es irreducible por lo siguiente. Consideremos un subespacio invariante no nulo W y w un vector de dicho subespacio al cual escribimos como combinación lineal de los vectores de la base de $V_{(m)}$:

$$w = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Si aplicamos $\pi(Y)^m$ a w , éste está en W por ser invariante por $\pi(Y)$. Pero este vector es un múltiplo escalar de v_m . Luego v_m pertenece a W . Ahora aplicamos $\pi(X)$ a v_m sucesivamente y por la forma en que actúa X obtenemos la base de $V_{(m)}$, la cual estará contenida en W pues es invariante por $\pi(X)$. Luego $V_{(m)} = W$.

En consecuencia, siempre existe una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ por cada peso máximo $m = 0, 1, 2, \dots$. En adelante denotaremos y consideraremos base canónica de $V_{(m)}$ al conjunto

$$\{\tilde{v}_m, \tilde{v}_{m-2}, \dots, \tilde{v}_{-m+2}, \tilde{v}_{-m}\},$$

respecto del cual las matrices de $\pi(X)$, $\pi(H)$, $\pi(Y)$ tienen la forma ya mencionada.

Para resumir:

Teorema 2.1.3. *Sea π una representación irreducible de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ en V .*

- (a) *Respecto a H , V es suma directa de espacios pesos V_μ , $\mu = m, m - 2, m - 4, \dots, -m$, donde $m + 1 = \dim V$ y $\dim V_\mu = 1$ para cada μ .*
- (b) *V tiene, salvo múltiplo escalar, un único vector maximal, cuyo peso, llamado el peso máximo de V , es m .*
- (c) *La representación de \mathfrak{g} sobre V está dada explícitamente por las fórmulas de antes, si la base de V se elige en la forma antes descrita. En particular, existe a lo sumo una representación irreducible, salvo isomorfismo, por cada posible dimensión $m + 1$, con $m \geq 0$.*

Corolario 2.1.4. *Sea π cualquier representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ en V . Entonces, los autovalores de $\pi(H)$ sobre V son todos enteros, cada uno ocurre junto con su negativo y en igual número de veces. Además, en cualquier descomposición de V en suma directa de subespacios irreducibles, el número de sumandos es precisamente $\dim V_0 + \dim V_1$.*

Demostración. Si $V = \{0\}$ no hay nada que probar. Supongamos entonces $V \neq \{0\}$, luego por el Teorema de Weyl (1.5.6), V se descompone en suma directa de submódulos irreducibles.

Como $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ actúa en cada uno de los submódulos, aplicando el teorema 2.1.3 a éstos, obtenemos los autovalores de $\pi(H)$ en V a los que hace mención la primera afirmación del corolario.

Para la segunda, observemos que en cada submódulo irreducible los autovalores de H ocurren con multiplicidad uno, por lo tanto tiene una única ocurrencia el peso 0 ó el peso 1 dependiendo de la paridad de m . Luego si V no es irreducible, la cantidad de componentes irreducibles será igual a la multiplicidad del peso 0 mas la multiplicidad del peso 1.

□

Ejemplos 2.1.5. Ejemplos de representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$.

1. Si $\pi = 0$ y $V = \mathbb{C}$ entonces $\mathbb{C} \cong V_{(0)}$ y denotamos a π como $\pi_{(0)}$.
2. Si $\pi = \text{id}$, $V = \mathbb{C}^2$ con $\{x, y\}$ base estándar en la que H diagonaliza, es decir:

$$H(x) = x, \quad H(y) = -y.$$

Luego $V = V_1 \oplus V_{-1}$. Por lo tanto $V \cong V_{(1)}$ e $\text{id} \cong \pi_{(1)}$.

3. Si $V = \text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ con base $\{x^2, xy, y^2\}$, se define la representación $\text{Sym}^2(\pi_{(1)})$ por derivación, es decir, H actúa como:

$$\begin{aligned} \text{Sym}^2(\pi_{(1)})(H)(x^2) &= \text{Sym}^2(\pi_{(1)})(H)(x.x) \\ &= \pi_{(1)}(H)(x).x + x.\pi_{(1)}(H)(x) = x^2 + x^2 = 2.x^2, \end{aligned}$$

$$\text{Sym}^2(\pi_{(1)})(H)(xy) = \pi_{(1)}(H)(x).y + x.\pi_{(1)}(H)(y) = x.y - x.y = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Sym}^2(\pi_{(1)})(H)(y^2) &= \text{Sym}^2(\pi_{(1)})(H)(y.y) \\ &= \pi_{(1)}(H)(y).y + y.\pi_{(1)}(H)(y) = -y.y - y.y = -2.y^2, \end{aligned}$$

de modo que

$$V = V_2 \oplus V_0 \oplus V_{-2}$$

siendo ésta equivalente a la representación irreducible $(\pi_{(2)}, V_{(2)})$, pues todos los autovalores de H tienen multiplicidad uno.

4. Consideremos el caso general $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ cuya base es $\{x^n, x^{n-1}.y, \dots, x.y^{n-1}, y^n\}$, donde la representación $\text{Sym}^n(\pi_{(1)})$ se define igual que antes por derivación. Analizando la acción de H

$$\begin{aligned} \text{Sym}^n(\pi_{(1)})(H)(x^{n-k}.y^k) &= (n-k)\pi_{(1)}(H)(x).x^{n-k-1}.y^k + kx^{n-k}\pi_{(1)}(H)(y).y^{k-1} \\ &= (n-k)x^{n-k}.y^k - kx^{n-k}.y^k = (n-2k)x^{n-k}.y^k. \end{aligned}$$

encontramos que los autovalores de H sobre $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ son exactamente $n, n-2, \dots, -n$, todos con multiplicidad uno. Por lo tanto la representación es irreducible:

$$\text{Sym}^n(\pi_{(1)}) \cong \pi_{(n)}.$$

De peso $\mu = 12$: $u_1 = v_7 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(X)(u_1) &= \pi_{(7)}(X)(v_7) \otimes w_5 + v_7 \otimes \pi_{(5)}(X)(w_5) = 0, \\ (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(H)(u_1) &= \pi_{(7)}(H)(v_7) \otimes w_5 + v_7 \otimes \pi_{(5)}(H)(w_5) = 12v_7 \otimes w_5. \end{aligned}$$

De peso $\mu = 10$: $u_2 = v_7 \otimes w_3 - \frac{5}{7}v_5 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(X)(u_2) &= v_7 \otimes 5w_5 - \frac{5}{7}7v_7 \otimes w_5 = 0, \\ (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(H)(u_2) &= 10v_7 \otimes w_3 - \frac{5}{7}10v_5 \otimes w_5. \end{aligned}$$

De peso $\mu = 8$: $u_3 = v_7 \otimes w_1 - \frac{4}{7}v_5 \otimes w_3 + \frac{10}{21}v_3 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(X)(u_3) &= v_7 \otimes 4w_3 - \frac{4}{7}7v_7 \otimes w_3 + -\frac{4}{7}v_5 \otimes 5w_5 + \frac{10}{21}6v_5 \otimes w_5 \\ &= 0, \\ (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(H)(u_3) &= 8v_7 \otimes w_1 - \frac{4}{7}8v_5 \otimes w_3 + \frac{10}{21}8v_3 \otimes w_5. \end{aligned}$$

Para los siguientes vectores pesos omitiremos mostrar la acción de H .

De peso $\mu = 6$: $u_4 = v_7 \otimes w_{-1} - \frac{3}{7}v_5 \otimes w_1 + \frac{2}{7}v_3 \otimes w_3 - \frac{2}{7}v_1 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(X)(u_4) &= 3v_7 \otimes w_1 - \frac{3}{7}7v_7 \otimes w_1 - \frac{3}{7}4v_5 \otimes w_3 + \\ &+ \frac{2}{7}6v_5 \otimes w_3 + \frac{2}{7}v_3 \otimes 5w_5 - \frac{2}{7}5v_3 \otimes w_5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De peso $\mu = 4$: $u_5 = v_7 \otimes w_{-3} - \frac{2}{7}v_5 \otimes w_{-1} + \frac{1}{7}v_3 \otimes w_1 - \frac{4}{35}v_1 \otimes w_3 + \frac{1}{7}v_{-1} \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(X)(u_5) &= v_7 \otimes 2w_{-1} - \frac{2}{7}7v_7 \otimes w_{-1} - \frac{2}{7}v_5 \otimes 3w_1 + \frac{1}{7}6v_5 \otimes w_1 + \\ &+ \frac{1}{7}v_3 \otimes 4w_3 - \frac{4}{35}5v_3 \otimes w_3 - \frac{4}{35}v_1 \otimes 5w_5 + \frac{1}{7}4v_1 \otimes w_5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De peso $\mu = 2$:

$$u_6 = v_7 \otimes w_{-5} - \frac{1}{7}v_5 \otimes w_{-3} + \frac{1}{21}v_3 \otimes w_{-1} - \frac{1}{35}v_1 \otimes w_1 + \frac{1}{35}v_{-1} \otimes w_3 - \frac{1}{21}v_{-3} \otimes w_5.$$

$$\begin{aligned} (\pi_{(7)} \otimes \pi_{(5)})(X)(u_6) &= v_7 \otimes w_{-3} - \frac{1}{7}7v_7 \otimes w_{-3} - \frac{1}{7}v_5 \otimes 2w_{-1} + \frac{1}{21}6v_5 \otimes w_{-1} \\ &+ \frac{1}{21}v_3 \otimes 3w_1 - \frac{1}{35}5v_3 \otimes w_1 - \frac{1}{35}v_1 \otimes 4w_3 + \frac{1}{35}4v_1 \otimes w_3 + \\ &+ \frac{1}{35}v_{-1} \otimes 5w_5 - \frac{1}{21}3v_{-1} \otimes w_5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

El autovector asociado al autovalor 12 generará una subrepresentación del producto tensorial isomorfa a $V_{(12)}$ la cual justifica la ocurrencia de los autovalores 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12 sólo una vez.

El complemento de $V_{(12)}$ en el producto tensorial, tendrá autovalores: 10 y -10 tomados una vez; 8 y -8 tomados dos veces, 6 y -6 tomados tres veces, 4 y -4 tomados cuatro veces, 2 y -2 tomados cinco veces, y 0 tomado cinco veces. De modo que el complemento contendrá una copia de la representación irreducible $V_{(10)}$, generado por el autovector asociado al autovalor 10. Pero ésta sólo justifica la ocurrencia de los pesos 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, una vez.

Ahora, el complemento de la suma directa $V_{(12)} \oplus V_{(10)}$ en el producto tensorial tendrá autovalores: 8 y -8 tomados una vez, 6 y -6 tomados dos veces, 4 y -4 tomados tres veces, 2 y -2 tomados cuatro veces, y 0 tomado cuatro veces. De modo que el complemento de la suma contendrá una copia de la representación irreducible $V_{(8)}$.

Razonando de igual manera que antes, encontramos que el complemento de $V_{(12)} \oplus V_{(10)} \oplus V_{(8)}$ en el producto tensorial, contendrá una copia de la representación irreducible $V_{(6)}$, la cual justifica la ocurrencia de los autovalores: 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6 tomados una vez; por lo que el complemento de $V_{(12)} \oplus V_{(10)} \oplus V_{(8)} \oplus V_{(6)}$ en el producto tensorial, con autovalores 4 y -4 tomados una vez, 2 y -2 tomados dos veces, 0 tomado dos veces, tendrá una copia de la representación irreducible $V_{(4)}$.

Finalmente, llegamos a la conclusión de que el complemento de $V_{(12)} \oplus V_{(10)} \oplus V_{(8)} \oplus V_{(6)} \oplus V_{(4)}$ tiene autovalores 2, 0, -2, todos con multiplicidad uno; lo cual nos dice que es una copia de $V_{(2)}$. En consecuencia:

$$V_{(7)} \otimes V_{(5)} \cong V_{(12)} \oplus V_{(10)} \oplus V_{(8)} \oplus V_{(6)} \oplus V_{(4)} \oplus V_{(2)}.$$

En general, si $a \geq b$:

$$V_{(a)} \otimes V_{(b)} \cong V_{(a+b)} \oplus V_{(a+b-2)} \oplus \cdots \oplus V_{(a-b)}, \quad (2.1)$$

llamada fórmula de Clebsh-Gordon.

2.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2)$

Consideremos la representación irreducible $(\pi_{(1)}, V_{(1)})$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Pero ahora miremos la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ en el producto tensorial $V_{(1)} \otimes V_{(1)}$. Recordemos que la suma directa actúa en el producto tensorial de la siguiente forma:

$$(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((X, Y))(v \otimes w) = \pi_{(1)}(X)(v) \otimes w + v \otimes \pi_{(1)}(Y)(w).$$

Queremos encontrar las componentes irreducibles del producto tensorial.

Dado que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ es semisimple y $(H, 0)$ y $(0, H)$ son ad-semisimples, los endomorfismos que los representan son diagonalizables y además conmutan entre sí. Luego, éstos diagonalizan simultáneamente en la base canónica $\{v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_{-1}, v_{-1} \otimes v_1, v_{-1} \otimes v_{-1}\}$, lo cual produce una descomposición de $V_{(1)} \otimes V_{(1)}$ en suma directa de autoespacios V_λ . Miremos por ejemplo la acción de $(H, 0)$ y $(0, H)$ sobre el autovector $v_1 \otimes v_1$:

$$\begin{aligned} (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((H, 0))(v_1 \otimes v_1) &= \pi_{(1)}(H)(v_1) \otimes v_1 = v_1 \otimes v_1, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, H))(v_1 \otimes v_1) &= v_1 \otimes \pi_{(1)}(H)(v_1) = v_1 \otimes v_1. \end{aligned}$$

Como era de esperar es vector propio de valor propio 1 en ambos casos. Por ello lo denotaremos como $v_{(1,1)}$ y de manera análoga a los restantes vectores de la base canónica, que como ya dijimos son también vectores propios para $(H, 0)$ y $(0, H)$. Así tendremos:

$$v_1 \otimes v_{-1} = v_{(1,-1)}, \quad v_{-1} \otimes v_1 = v_{(-1,1)}, \quad v_{-1} \otimes v_{-1} = v_{(-1,-1)}.$$

Por lo que podemos escribir:

$$V_{(1)} \otimes V_{(1)} = (V_{(1)} \otimes V_{(1)})_{(1,1)} \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(1)})_{(1,-1)} \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(1)})_{(-1,1)} \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(1)})_{(-1,-1)}.$$

Miremos ahora cómo actúan $(Y, 0)$ y $(0, Y)$ en la base canónica:

$$\begin{aligned} (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((Y, 0))(v_{(1,1)}) &= v_{(-1,1)}, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((Y, 0))(v_{(-1,1)}) &= 0, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((Y, 0))(v_{(1,-1)}) &= v_{(-1,-1)}, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((Y, 0))(v_{(-1,-1)}) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, Y))(v_{(1,1)}) &= v_{(1,-1)}, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, Y))(v_{(-1,1)}) &= v_{(-1,-1)}, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, Y))(v_{(1,-1)}) &= 0, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, Y))(v_{(-1,-1)}) &= 0. \end{aligned}$$

Encontramos que actúan por “traslación”, es decir, mandan un vector propio al nulo, o a otro vector propio, pero de autovalor “menor” que el anterior. Entonces podemos escribir a la base canónica como la generada por las imágenes del vector propio $v_{(1,1)}$ bajo las aplicaciones de $(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((Y, 0))$ y $(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, Y))$. Notemos además que el vector $v_{(1,1)}$ pertenece a la intersección de los núcleos de $(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((X, 0))$ y $(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, X))$. Las matrices de $(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((X, 0))$ y $(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, X))$ respecto de la base canónica son :

$$(\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((X, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, X)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

También podemos leer a partir de la matrices, que los elementos $(X, 0)$ y $(0, X)$, llevan vectores propios al nulo o a otro de autovalor “mayor”, por ejemplo:

$$\begin{aligned} (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((X, 0))(v_{(-1,1)}) &= v_{(1,1)}, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, X))(v_{(-1,-1)}) &= v_{(-1,1)}, \\ (\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)})((0, X))(v_{(-1,1)}) &= 0. \end{aligned}$$

Si W es subespacio invariante no nulo de $V_{(1)} \otimes V_{(1)}$ y tomamos $w \in W$ donde $w = a.v_{(1,1)} + b.v_{(1,-1)} + c.v_{(-1,1)} + d.v_{(-1,-1)}$, al evaluar la acción sobre él de $(Y, 0)$, $(0, Y)$, $(X, 0)$, $(0, X)$ bajo sucesivas aplicaciones, encontramos que $v_{(1,1)}$ está en W y de igual manera los restantes vectores de la base. Por lo tanto, la representación es irreducible. Denotamos al espacio de representación como

$$V_{(1,1)} := V_{(1)} \otimes V_{(1)}.$$

La lectura de este ejercicio, es que el producto tensorial de dos representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ es irreducible por la acción de la suma directa. A continuación, enunciaremos un resultado general.

Sea $(\pi_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_r, V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)$ una representación del producto directo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, donde (π_i, V_i) son representaciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Denotamos con H_i, X_i e Y_i a la i -ésima componente y cero en las restantes. Un vector propio de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ para todos los H_i será denotado como $v_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$ siendo λ_i el peso de H_i . Llamamos **peso** de $v_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$ a la r -upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Definición 2.2.1. Se llama **vector de peso máximo** de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ al vector propio para todos los H_i que pertenece al núcleo simultáneo de los X_i .

Teorema 2.2.2. Sean $(\pi_{(m_i)}, V_{(m_i)})$ con $i = 1, \dots, r$ representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Entonces, $(\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)}, V_{(m_1)} \otimes \cdots \otimes V_{(m_r)})$ es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. $V_{(m_1)} \otimes \cdots \otimes V_{(m_r)}$ está generado por el vector de peso máximo y sus imágenes bajo sucesivas aplicaciones de los Y_i .

Denotamos $V_{(m_1, \dots, m_r)} := V_{(m_1)} \otimes \cdots \otimes V_{(m_r)}$.

Prueba. Sea $W \subset V_{(m_1)} \otimes \cdots \otimes V_{(m_r)}$, $W \neq \{0\}$ un subespacio invariante por $\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)}$. Sabemos que la base canónica de $V_{(m_i)}$ es:

$$\{v_{m_i}, v_{m_i-2}, \dots, v_{-m_i+2}, v_{-m_i}\}$$

y que la base canónica del producto tensorial es el producto tensorial de las bases de los $V_{(m_i)}$. Para probar que $V_{(m_1)} \otimes \cdots \otimes V_{(m_r)}$ es irreducible, basta mostrar que su base canónica está contenida en W .

En primer lugar, notemos que la base canónica del producto tensorial, está conformada por vectores propios de H_i para todo i . En efecto, la acción de H_i sobre cualquier vector de esta base, se reduce a la acción de H en el i -ésimo vector del producto tensorial, el cual es un vector propio de H perteneciente a la base canónica de $V_{(m_i)}$ con peso $m_i - 2k$ para algún k , obteniendo así un múltiplo escalar del producto tensorial.

En segundo lugar, la acción de los X_i sobre un vector propio cualquiera de esta base, consiste en la acción de X sobre el i -ésimo vector v_{m_i-2k} del producto tensorial, siendo esta última, una traslación de dicho vector hacia el vector que lo precede en la base de $V_{(m_i)}$; lo cual significa que X_i manda un vector propio a otro vector propio, de peso "mayor" que el anterior. Es inmediato de aquí, que el vector de peso máximo en el producto tensorial es el producto tensorial de los vectores de peso máximo v_{m_i} .

Finalmente, si repetimos para los Y_i el análisis realizado con las acciones de los H_i y X_i sobre la base canónica del producto tensorial, obtendremos que Y_i manda un vector propio a otro vector propio, de peso "menor" que el anterior.

Tomemos $w \in W$, y lo escribamos como combinación lineal de los vectores de la base de $V_{(m_1)} \otimes \cdots \otimes V_{(m_r)}$, es decir,

$$w = \sum_{\lambda \in P_r} a_\lambda u_\lambda$$

donde

$$P_r = \{\lambda \in \mathbb{Z}^r : \lambda_i = m_i, m_i - 2, \dots, -m_i + 2, -m_i, i = 1, \dots, r\},$$

$$u_\lambda = v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_r}, \quad v_{\lambda_i} \in V_{(m_i)}.$$

Como W es invariante, $\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)}(X_i)(w) \in W$, para todo $i = 1, \dots, r$. En particular estará:

$$\begin{aligned} (\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)})(X_1)(w) &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} (\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)})(X_1)(u_{\lambda}) \\ &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} \pi_{(m_1)}(X)(v_{\lambda_1}) \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_r} \\ &= \sum_{\substack{\lambda, \\ \lambda_1 = m_1}} a_{\lambda} \pi_{(m_1)}(X)(v_{m_1}) \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_r} + \cdots + \\ &+ \sum_{\substack{\lambda, \\ \lambda_1 = -m_1}} a_{\lambda} \pi_{(m_1)}(X)(v_{-m_1}) \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_r}. \end{aligned}$$

De la igualdad, observamos que si aplicamos sucesivamente $(\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)})(X_1)$ a w las veces que sea necesario hasta trasladar a todos los vectores propios v_{m_1-2k} al vector de peso máximo v_{m_1} , tendremos un nuevo vector w' de W de la forma:

$$w' = \sum_{\substack{\lambda, \\ \lambda_1 = m_1}} a'_{\lambda} v_{m_1} \otimes v_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_r}.$$

Ahora, calculemos

$$(\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)})(X_2)(w') = \sum_{\lambda} a'_{\lambda} v_{m_1} \otimes \pi_{(m_2)}(X)(v_{\lambda_2}) \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_r}.$$

Procedemos igual que con X_1 , es decir, aplicamos sucesivamente $(\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)})(X_2)$ a w' hasta obtener un nuevo vector w'' de W de la forma:

$$w'' = \sum_{\lambda} a''_{\lambda} v_{m_1} \otimes v_{m_2} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_r}.$$

Continuando de esta manera con los restantes X_i encontramos que el vector de peso máximo de la base canónica

$$v_{m_1} \otimes v_{m_2} \otimes \cdots \otimes v_{m_r} \in W.$$

A partir de allí, mediante sucesivas aplicaciones de Y_i obtenemos la base del producto tensorial, por la forma en que éstos actúan como ya lo mencionamos, y todas pertenecen a W por ser éste invariante. □

Observaciones

1. La representación irreducible $\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ posee un único vector de peso máximo, salvo múltiplo escalar. La unicidad se deduce fácilmente de la unicidad del vector de peso máximo en cada representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$.

2. Toda representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ es isomorfa a una

$(\pi_{(m_1)} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \pi_{(m_r)}, V_{(m_1)} \otimes \cdots \otimes V_{(m_r)})$ con $m_i \in \mathbb{Z}^+$ para $i = 1, \dots, r$. Este resultado se acepta sin demostración.

A continuación veamos dos ejemplos de cómo descomponer en irreducibles $\Lambda^2(V \otimes W)$ por la acción $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$.

Ejemplos 2.2.3.

1. Sea $(\pi_{(2)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)}, V_{(2)} \otimes V_{(1)})$ la representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$.

Queremos encontrar las componentes irreducibles de $\Lambda^2(V_{(2)} \otimes V_{(1)})$. Recordemos que

$$\bigwedge^2 \pi(X, Y)(v_1 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_2) = \pi(X, Y)(v_1 \otimes w_1) \wedge v_2 \otimes w_2 + v_1 \otimes w_1 \wedge \pi(X, Y)(v_2 \otimes w_2)$$

donde π denota a $\pi_{(2)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)}$.

Sean $\{v_2, v_0, v_{-2}\}$ y $\{w_1, w_{-1}\}$ las bases canónicas de $V_{(2)}$ y $V_{(1)}$, y sea

$$\{v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_{-1}, v_0 \otimes w_1, v_0 \otimes w_{-1}, v_{-2} \otimes w_1, v_{-2} \otimes w_{-1}\}$$

la base del producto tensorial $V_{(2)} \otimes V_{(1)}$. Buscamos los vectores del álgebra exterior que estén en la intersección de los núcleos de $\bigwedge^2 \pi(X_1)$ y $\bigwedge^2 \pi(X_2)$, y que sean autovectores por la acción de H_1 y H_2 , es decir, buscamos los vectores de peso máximo. Si denotamos con μ_1 y μ_2 los pesos de $\bigwedge^2 \pi(H_1)$ y $\bigwedge^2 \pi(H_2)$ respectivamente, dichos vectores son:

De pesos $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$: $u_1 = v_2 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_{-1}$.

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \pi(X_1)(u_1) &= \pi_{(2)}(X)(v_2) \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_{-1} + v_2 \otimes w_1 \wedge \pi_{(2)}(X)(v_2) \otimes w_{-1} \\ &= 0 \wedge v_2 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_1 \wedge 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \pi(X_2)(u_1) &= v_2 \otimes \pi_{(1)}(X)(w_1) \wedge v_2 \otimes w_{-1} + v_2 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes \pi_{(1)}(X)(w_{-1}) \\ &= v_2 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \pi(H_1)(u_1) &= \pi_{(2)}(H)(v_2) \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_{-1} + v_2 \otimes w_1 \wedge \pi_{(2)}(H)(v_2) \otimes w_{-1} \\ &= 4v_2 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \pi(H_2)(u_1) &= v_2 \otimes \pi_{(1)}(H)(w_1) \wedge v_2 \otimes w_{-1} + v_2 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes \pi_{(1)}(H)(w_{-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De pesos $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$: $u_2 = v_2 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_1$.

$$\bigwedge^2 \pi(X_1)(u_2) = v_2 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_1 = 0,$$

$$\bigwedge^2 \pi(X_2)(u_2) = 0,$$

$$\bigwedge^2 \pi(H_1)(u_2) = 2v_2 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_1,$$

$$\bigwedge^2 \pi(H_2)(u_2) = 2v_2 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_1.$$

De pesos $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$u_3 = v_2 \otimes w_1 \wedge v_{-2} \otimes w_{-1} - v_2 \otimes w_{-1} \wedge v_{-2} \otimes w_1 - v_0 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_{-1}.$$

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \pi(X_1)(u_3) &= v_2 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_{-1} - v_2 \otimes w_{-1} \wedge v_0 \otimes w_1 + \\ &\quad - v_2 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_{-1} - v_0 \otimes w_1 \wedge v_2 \otimes w_{-1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \pi(X_2)(u_3) &= v_2 \otimes w_1 \wedge v_{-2} \otimes w_1 - v_2 \otimes w_1 \wedge v_{-2} \otimes w_1 + \\ &\quad - v_0 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\bigwedge^2 \pi(H_1)(u_3) = 0,$$

$$\bigwedge^2 \pi(H_2)(u_3) = 0.$$

Hemos encontrado tres vectores de peso máximo, lo cual nos dice que la representación no es irreducible. El vector de peso $(4, 0)$ generará una subrepresentación isomorfa a $V_{(4,0)}$, el vector de peso $(2, 2)$ generará una subrepresentación isomorfa a $V_{(2,2)}$ y el vector de peso $(0, 0)$ una isomorfa a $V_{(0,0)}$. Luego $\bigwedge^2(V_{(2)} \otimes V_{(1)}) \cong V_{(4,0)} \oplus V_{(2,2)} \oplus V_{(0,0)}$.

2. Queremos las componentes irreducibles de $\bigwedge^2(V_{(0)} \otimes V_{(1)})$, $\bigwedge^2(V_{(1)} \otimes V_{(0)})$ y $\bigwedge^2(V_{(1)} \otimes V_{(1)})$.

Base canónica de $V_{(0)} = \{v_0\}$, base canónica de $V_{(1)} = \{w_1, w_{-1}\}$.

Procedemos como antes, buscando los vectores peso máximo. μ_1 denotará el peso de H_1 y μ_2 el peso de H_2 .

Para $\bigwedge^2(V_{(0)} \otimes V_{(1)})$, su base es $\{v_0 \otimes w_1 \wedge v_0 \otimes w_{-1}\}$, y por lo tanto, hay un único vector maximal, él mismo con pesos $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$. Luego, $\bigwedge^2(V_{(0)} \otimes V_{(1)}) \cong V_{(0,0)}$.

Para $\bigwedge^2(V_{(1)} \otimes V_{(0)})$, al igual que antes, hay un único vector maximal $w_1 \otimes v_0 \wedge w_{-1} \otimes v_0$, con pesos $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$. Luego, $\bigwedge^2(V_{(1)} \otimes V_{(0)}) \cong V_{(0,0)}$.

Para $\bigwedge^2(V_{(1)} \otimes V_{(1)})$, π denota a $\pi_{(1)} \widehat{\otimes} \pi_{(1)}$, y los vectores maximales son dos:

De pesos $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, w_1 \otimes w_1 \wedge w_1 \otimes w_{-1}$.

De pesos $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, w_1 \otimes w_1 \wedge w_{-1} \otimes w_1$.

Luego

$$\bigwedge^2(V_{(1)} \otimes V_{(1)}) \cong V_{(2,0)} \oplus V_{(0,2)}.$$

2.3. Representaciones de $\mathfrak{gl}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2)$

Dado que el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, k)$ no es semisimple, no toda representación de ella es completamente reducible. Por ejemplo, si consideramos la representación

$$\pi : \mathfrak{gl}(2, k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V), V = \mathbb{C}^2$$

tal que

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\pi(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\pi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\pi(I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Si la representación fuese completamente reducible, todo subespacio invariante de V tendría un complemento invariante, lo cual no ocurre aquí pues los únicos subespacios invariantes son el nulo, $\langle e_1 \rangle$ y \mathbb{C}^2 , y $\langle e_1 \rangle$ no tiene complemento invariante.

Con este sencillo ejemplo queremos introducir el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Sea (π, V) una representación de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$ tal que $\pi(I)$ es diagonalizable. Entonces (π, V) es completamente reducible.*

Prueba. Dado que $\pi(I)$ es diagonalizable, V se descompone en suma directa de autoespacios V_{μ_i} . Como $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ conmuta con la identidad, $\pi|_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})}$ preserva la descomposición. Luego hacemos actuar $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ en cada uno de los autoespacios V_{μ_i} , obteniendo una descomposición de V_{μ_i} en suma directa de subespacios invariantes e irreducibles

$$V_{\mu_i} = \bigoplus_n V_{(n)}^{(\mu_i)}.$$

Luego

$$V = \bigoplus_j V_{(n_j)}^{(\mu_j)}.$$

□

Notemos que en la demostración hemos indexado a las componentes irreducibles con un nuevo índice (μ_j) siendo éste el autovalor correspondiente a la matriz identidad, al cual llamaremos también **peso** del vector de peso máximo. Vale decir, en una representación irreducible de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$ el vector de peso máximo tiene dos pesos, cada uno debido a la acción de H e I .

Este teorema se generaliza para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$ (n veces). Aquí indicaremos con I_i a la n -upla que tiene en la i -ésima componente a la matriz identidad y cero en las restantes.

Teorema 2.3.2. *Sea (π, V) una representación de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$, tal que los endomorfismos $\pi(I_i)$ diagonalizan. Entonces (π, V) es completamente reducible.*

Como las identidades I_i conmutan entre si, por ser π representación resulta inmediato la conmutatividad de los $\pi(I_i)$; entonces al ser diagonales $\pi(I_i)$ y conmutar diagonalizan

simultáneamente, es decir, existe una base de vectores propios simultanea. Luego, la demostración es análoga a la del Teorema 2.3.1, cambiando $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ por $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ subálgebra semisimple de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$.

Lo que dice la tesis del Teorema 2.3.2 es lo siguiente:

1. V es suma directa de subespacios invariantes e irreducibles, es decir, $V = \bigoplus_i V_i$.
2. Cada V_i tiene un único vector de peso máximo, salvo múltiplo escalar.
3. Una base de V_i se obtiene por sucesivas aplicaciones de los endomorfismos $\pi(Y_i)$ al vector de peso máximo.
4. Si v_i es el vector de peso máximo en V_i

$$\pi(X_j)(v_i) = 0 \quad \text{para todo } i, j,$$

$$\pi(H_j)(v_i) = \lambda_{ij}v_i, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{N}_0,$$

$$\pi(I_j)(v_i) = \mu_{ij}v_i, \quad \mu_{ij} \in \mathbb{C}.$$
5. Existen n -uplas $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}) \in N_0^n$ y $\mu_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in}) \in \mathbb{C}^n$ llamadas **pesos** del vector de peso máximo.
6. La componente irreducible V_i se denota $V_{\lambda_i}^{\mu_i}$ donde

$$V_{\lambda_i}^{\mu_i} = V_{\lambda_{i1}\varepsilon_1 + \dots + \lambda_{in}\varepsilon_n}^{\mu_{i1}\varepsilon_1 + \dots + \mu_{in}\varepsilon_n} = V_{(\lambda_{i1})}^{(\mu_{i1})} \otimes \dots \otimes V_{(\lambda_{in})}^{(\mu_{in})}.$$

siendo $\{\varepsilon_j : j = 1, \dots, n\}$ la base canónica de \mathbb{C}^n .

Ejemplos 2.3.3.

1. Consideremos la representación adjunta de la suma directa $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$. Nos preguntamos si \mathfrak{g} es completamente reducible.

$\text{ad}(I_1), \text{ad}(I_2)$ son diagonales?

Tomemos la siguiente base de \mathfrak{g} .

$$B = \{X_1, H_1, Y_1, I_1, X_2, H_2, Y_2, I_2\}.$$

$[\text{ad}(I_1)]_B = 0, [\text{ad}(I_2)]_B = 0$, obviamente conmutan entre si.

Luego, $(\text{ad}, \mathfrak{g})$ es completamente reducible. Calculemos sus componentes.

Busquemos la intersección de los núcleos de X_1 y X_2 .

$$[\text{ad}(X_1)]_B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [\text{ad}(X_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(X_1) \cap \ker(X_2) = \{X_1, X_2, I_1, I_2\}.$$

Ahora busquemos en $\ker(X_1) \cap \ker(X_2)$ los vectores propios de H_1 y H_2 .

$$\begin{aligned} [H_1, X_1] &= 2X_1, [H_1, X_2] = 0, [H_1, I_1] = 0, [H_1, I_2] = 0 \\ [H_2, X_1] &= 0, [H_2, X_2] = 2X_2, [H_2, I_1] = 0, [H_2, I_2] = 0. \end{aligned}$$

Encontramos que existen cuatro vectores de peso máximo, con pesos λ igual a

$$\lambda_1 = (2, 0), \lambda_2 = (0, 2), \lambda_3 = \lambda_4 = (0, 0).$$

Los pesos μ en todos los casos dan cero, pues la identidad conmuta con todo $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$. Es decir, $\mu_1 = (0, 0) = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$.

Finalmente concluimos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) &= (\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}))_{(2,0)}^0 \oplus (\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}))_{(0,2)}^0 \\ &\quad \oplus (\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}))_0^0 \oplus (\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}))_0^0 \\ &\cong V_{2\varepsilon_1}^0 \oplus V_{2\varepsilon_2}^0 \oplus 2 \times V_0^0. \end{aligned}$$

2. Sea $(\pi, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2})$ la representación irreducible de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$. Es decir,

$$\{v_{(1,1)}, v_{(1,-1)}, v_{(-1,1)}, v_{(-1,-1)}\}$$

es la base en la que diagonalizan simultáneamente H_1, H_2, I_1, I_2 .

Queremos encontrar la descomposición de la representación $(\bigwedge^2 \pi, \bigwedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2})$. La base de $\bigwedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$ es

$$\begin{aligned} B &= \{v_{(1,1)} \wedge v_{(1,-1)}, v_{(1,1)} \wedge v_{(-1,1)}, v_{(1,1)} \wedge v_{(-1,-1)}, \\ &\quad v_{(1,-1)} \wedge v_{(-1,1)}, v_{(1,-1)} \wedge v_{(-1,-1)}, v_{(-1,1)} \wedge v_{(-1,-1)}\}. \end{aligned}$$

En esta base diagonalizan simultáneamente I_1, I_2 .

$$[\bigwedge^2 \pi(I_1)]_B = \text{diag}(2, 2, 2, 2, 2, 2), [\bigwedge^2 \pi(I_2)]_B = \text{diag}(-2, -2, -2, -2, -2, -2).$$

Encontramos que el espacio de representación es un autoespacio de valor propio 2 para I_1 y -2 para I_2 . La descomposición se obtiene a partir de la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ en este autoespacio. En el ejemplo 2.2.3.2 ya dijimos que existen dos vectores de peso máximo

$$v_{(1,1)} \wedge v_{(1,-1)}, \text{ de pesos } \lambda_1 = (2, 0), \mu_1 = (2, -2)$$

$$v_{(1,1)} \wedge v_{(-1,1)}, \text{ de pesos } \lambda_2 = (0, 2), \mu_2 = (2, -2).$$

Luego

$$\bigwedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \cong V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2} \oplus V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2}.$$

Capítulo 3

Homología de $\mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$

3.1. Las álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(2, A_N(n))$, $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}Q(n)_0)$ y $\mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$

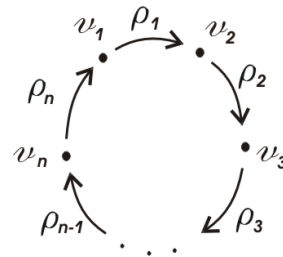
Las álgebras de Lie que vamos a describir, tienen como elementos matrices cuadradas de tamaño 2×2 con entradas en un álgebra asociativa. Comenzamos entonces definiendo estas álgebras asociativas.

Un *quiver* Q es $(Q_0, Q_1, s, t : Q_1 \rightarrow Q_0)$ donde:

- (a) Q_0 es un conjunto finito de vértices.
- (b) Q_1 es un conjunto finito de flechas.
- (c) Una flecha ρ empieza en el vértice $s(\rho)$ y termina en el vértice $t(\rho)$.

Un *quiver cíclico* $Q(n)$ es un quiver de n vértices y n flechas donde

$$\begin{aligned} s(\rho_i) = v_i \quad t(\rho_i) = v_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ s(\rho_n) = v_n \quad t(\rho_n) = v_1. \end{aligned}$$



Dado un quiver Q , se llama *camino* a una sucesión de flechas $\rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_m}$, las cuales satisfacen $t(\rho_{i_j}) = s(\rho_{i_{j+1}})$ con $j = 1, \dots, m-1$. Un camino trivial es un vértice del quiver. Llamamos *longitud* de un camino a la cantidad de flechas que lo componen. Denotamos con Q_l al conjunto de caminos de longitud l .

En un quiver cíclico $Q(n)$, los caminos de $Q(n)_l$ se denotarán con α_{ij}^l , donde el subíndice ij indica a los vértices v_i y v_j donde comienza y termina respectivamente dicho camino.

El álgebra de caminos $\mathbb{C}Q$ asociada a un quiver Q , es el espacio vectorial sobre \mathbb{C}

$$\mathbb{C}Q = \mathbb{C}Q_0 \oplus \mathbb{C}Q_1 \oplus \mathbb{C}Q_2 \oplus \cdots$$

donde $\mathbb{C}Q_j$ es el espacio generado por Q_j y el producto de dos caminos α y β es la yuxtaposición de ellos, si el final de α es el comienzo de β ; o cero en caso contrario.

Observaciones:

- (a) El álgebra de caminos es un álgebra asociativa, no es difícil verificar que $(\alpha\beta)\delta = \alpha(\beta\delta)$.
- (b) Los v_i son idempotentes y ortogonales, es decir, $v_i^2 = v_i$ y $v_i v_j = 0$ para $i \neq j$.
- (c) $\mathbb{C}Q$ tiene unidad dada por $1 = \sum_{i=1}^n v_i$.

Consideremos el álgebra de caminos asociada al quiver cíclico $Q(n)$

$$\mathbb{C}Q(n) = \mathbb{C}Q(n)_0 \oplus \mathbb{C}Q(n)_1 \oplus \mathbb{C}Q(n)_2 \oplus \dots$$

Sea $\bigoplus_{j \geq N} \mathbb{C}Q(n)_j$ el ideal bilátero de $\mathbb{C}Q(n)$, de caminos de longitud mayor o igual a N . Llamamos *álgebra de caminos truncada* en N al cociente

$$A_N(n) = \mathbb{C}Q(n) / \bigoplus_{j \geq N} \mathbb{C}Q(n)_j$$

por lo que

$$A_N(n) \simeq \mathbb{C}Q(n)_0 \oplus \mathbb{C}Q(n)_1 \oplus \mathbb{C}Q(n)_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}Q(n)_{N-1}$$

como espacio vectorial. A través de este isomorfismo, identificaremos de ahora en adelante, los elementos de $\mathbb{C}Q(n)$ con su respectiva clase de equivalencia en $A_N(n)$.

Llamamos $A_N^+(n)$ al ideal de $A_N(n)$ generado por las flechas. Vale decir que como espacio vectorial es

$$A_N^+(n) \simeq \mathbb{C}Q(n)_1 \oplus \mathbb{C}Q(n)_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}Q(n)_{N-1}.$$

Dado que $A_N(n)$ es álgebra asociativa y $\mathbb{C}Q(n)_0$ y $A_N^+(n)$ son subálgebras de $A_N(n)$, las álgebras asociativas $\mathfrak{gl}(2, A_N(n))$, $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}Q(n)_0)$ y $\mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$ son álgebras de Lie (ver los detalles en el Capítulo 1, Ejemplos 1.1.24 y 1.2.5 1) con corchete, en todos los casos, dado por

$$[A, B] = A.B - B.A$$

siendo A y B matrices 2×2 con entradas en $A_N(n)$, $\mathbb{C}Q(n)_0$ y $A_N(n)^+$, respectivamente.

Llamemos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, A_N(n)), \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}Q(n)_0), \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_N^+(n)).$$

La base de \mathfrak{g} es el conjunto de las matrices elementales E_{rs} de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ con entradas en la base de $A_N(n)$. Como la base de $A_N(n)$ es $Q(n)_0 \cup Q(n)_1 \cup \cdots \cup Q(n)_{N-1}$ tendremos:

$$B = \bigcup_{l=1}^{N-1} \{E_{rs}^{\alpha_{ij}^l} : i, j = 1, \dots, n; r, s = 1, 2\} \cup \{E_{rs}^{v_i} : i = 1, \dots, n; r, s = 1, 2\}.$$

La dimensión de \mathfrak{g} es $4.N.n$. Notemos también que para todo i , $\mathbb{C}\{v_i\}$ es subálgebra asociativa de $\mathbb{C}Q(n)_0$, luego $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_i)$ es subálgebra de Lie de \mathfrak{l} para todo i y

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_1) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_n) \cong \underbrace{\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})}_{n \text{ veces}}$$

como álgebras de Lie, con dimensión $4.n$.

Con respecto a \mathfrak{n} podemos decir

$$\mathfrak{n} \simeq \bigoplus_{j=1}^{N-1} M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}Q(n)_j$$

como espacio vectorial, con dimensión $4.n.(N-1)$; y es el radical nilpotente de \mathfrak{g} , $N-1$ pasos.

Por último

$$\mathfrak{gl}(2, A_N(n)) = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}Q(n)_0) \oplus \mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$$

como espacio vectorial. Luego

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{l} \ltimes \mathfrak{n}.$$

Recordemos que para definir este producto semidirecto la representación π de \mathfrak{l} en \mathfrak{n} es

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{l} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}) \\ X &\rightarrow \text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{l})} \Big|_{\mathfrak{l}} \Big|_{\mathfrak{n}}. \end{aligned}$$

3.2. La acción de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_n)$ en $\mathfrak{gl}(2, A_n^+(n))$

Dado que $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_1) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}v_n)$ es isomorfa al producto directo $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ y los $\pi(I_r)$ diagonalizan, siendo π la representación definida arriba e $I_r = E_{11}^{v_r} + E_{22}^{v_r}$, por el Teorema 2.4.2, la representación π es completamente reducible.

Una de las conclusiones que se obtiene a partir de la demostración del Teorema 2.4.2, es que las componentes irreducibles del espacio de representación V son las que provienen por la acción del álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ en la base de vectores propios de V en la que diagonalizan simultáneamente los $\pi(I_r)$. Es por esto que en nuestro caso, buscaremos las componentes irreducibles de \mathfrak{n} mirando directamente la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}Q(n)_0) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}v_1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}v_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}v_n)$, en vista de que las identidades I_r preservarán dicha descomposición y no aportarán componentes irreducibles.

Para ello, comenzamos buscando los vectores maximales de \mathfrak{n} , es decir, los que están en el núcleo simultáneo de los $\pi(X_r)$, con $r = 1, \dots, n$, siendo

$$X_r = E_{12}^{v_r},$$

y que además sean vectores propios de los $\pi(H_r)$ con $r = 1, \dots, n$, siendo

$$H_r = E_{11}^{v_r} - E_{22}^{v_r}.$$

De esta manera encontramos el siguiente conjunto de vectores de peso máximo

$$\{E_{12}^{\alpha_{ij}^l}\} \text{ con } i, j = 1, \dots, n, i \neq j, l = 1, \dots, n-1.$$

Los pesos de estos vectores para cada H_r son:

- a) 0 si $r \neq i, j$
 b) 1 si $r = i$ ó $r = j$.

Esto se deduce fácilmente al calcular

$$\begin{aligned} [H_r, E_{12}^{\alpha_{ij}^l}] &= (E_{11}^{v_r} - E_{22}^{v_r}) \cdot E_{12}^{\alpha_{ij}^l} - E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \cdot (E_{11}^{v_r} - E_{22}^{v_r}) \\ &= E_{12}^{v_r \alpha_{ij}^l} + E_{12}^{\alpha_{ij}^l v_r}. \end{aligned}$$

Recordemos que en el Teorema 2.4.2, λ denota al vector cuyas componentes son los pesos por la acción de cada H en las representaciones irreducibles de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$. En nuestro caso de estudio λ tiene componentes

$$\lambda = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, \dots, 0, \underbrace{1}_j, \dots, 0) = \varepsilon_i + \varepsilon_j.$$

A continuación, completaremos la base de una componente irreducible, aplicando sucesivamente al vector maximal los endomorfismos $\pi(Y_r) = \pi(E_{21}^{v_r})$, con $r = 1, \dots, n$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \pi(Y_r)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}) &= [Y_r, E_{12}^{\alpha_{ij}^l}] = E_{21}^{v_r} \cdot E_{12}^{\alpha_{ij}^l} - E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \cdot E_{21}^{v_r} \\ &= E_{22}^{v_r \alpha_{ij}^l} - E_{11}^{\alpha_{ij}^l v_r}, \end{aligned}$$

y esto da

$$E_{22}^{\alpha_{ij}^l} \text{ si } r = i \quad \text{ó} \quad -E_{11}^{\alpha_{ij}^l} \text{ si } r = j \quad \text{ó} \quad 0 \text{ si } r \neq i, j;$$

mientras que

$$\begin{aligned} \pi(Y_r)(\pi(Y_i)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l})) &= [Y_r, E_{22}^{\alpha_{ij}^l}] = -E_{22}^{\alpha_{ij}^l} \cdot E_{21}^{v_r} = -E_{21}^{\alpha_{ij}^l \cdot v_r} \\ &= -E_{21}^{\alpha_{ij}^l} \text{ si } r = j \quad \text{ó} \quad 0 \text{ si } r \neq j. \\ \pi(Y_r)(\pi(Y_j)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l})) &= [Y_r, -E_{11}^{\alpha_{ij}^l}] = -E_{21}^{v_r} \cdot E_{11}^{\alpha_{ij}^l} \\ &= -E_{21}^{v_r \cdot \alpha_{ij}^l} = -E_{21}^{\alpha_{ij}^l} \text{ si } r = i \quad \text{ó} \quad 0 \text{ si } r \neq i. \end{aligned}$$

Este último resultado nos dice que hemos completado la base, pues si aplicamos nuevamente los $\pi(Y_r)$ obtendremos el vector nulo. Concluimos que la base de una componente irreducible con vector de peso máximo $E_{12}^{\alpha_{ij}^l}$, es:

$$\begin{aligned} \{E_{12}^{\alpha_{ij}^l}, \pi(Y_i)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}), \pi(Y_j)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}), \pi(Y_i)(\pi(Y_j)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}))\} &= \\ = \{E_{12}^{\alpha_{ij}^l}, E_{22}^{\alpha_{ij}^l}, -E_{11}^{\alpha_{ij}^l}, -E_{21}^{\alpha_{ij}^l}\} \end{aligned}$$

ordenada según si $i < j$. Si $i > j$ el orden será

$$\{E_{12}^{\alpha_{ij}^l}, \pi(Y_j)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}), \pi(Y_i)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}), \pi(Y_i)(\pi(Y_j)(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}))\}$$

es decir,

$$\{E_{12}^{\alpha_{ij}^l}, -E_{11}^{\alpha_{ij}^l}, E_{22}^{\alpha_{ij}^l}, -E_{21}^{\alpha_{ij}^l}\}.$$

Para terminar de caracterizar a dicha componente irreducible faltaría calcular el vector μ cuyas componentes son los pesos de la identidades I_r . Nos fijamos entonces cómo actúa la identidad $I_r = E_{11}^{v_r} + E_{22}^{v_r}$ en el vector de peso máximo,

$$[I_r, E_{12}^{\alpha_{ij}^l}] = E_{12}^{v_r \alpha_{ij}^l} - E_{12}^{\alpha_{ij}^l v_r},$$

Si $r \neq i, j$ el corchete da cero. Si $r = i$ obtenemos $E_{12}^{\alpha_{ij}^l}$. Si $r = j$ obtenemos $-E_{12}^{\alpha_{ij}^l}$. Por lo tanto

$$\mu = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_j, \dots, 0) = \varepsilon_i - \varepsilon_j.$$

Finalmente podemos decir:

1. Cada componente irreducible de \mathfrak{n} es

$$\mathfrak{n}_{(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_j, 0, \dots, 0)}^{(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_j, 0, \dots, 0)} \cong V_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}^{\varepsilon_i + \varepsilon_j},$$

donde $V_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}^{\varepsilon_i + \varepsilon_j}$ es una representación irreducible de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.

2. Cada componente irreducible tiene vector de peso máximo $E_{12}^{\alpha_{ij}^l}$ y está generada por $\langle \{E_{12}^{\alpha_{ij}^l}, E_{22}^{\alpha_{ij}^l}, -E_{11}^{\alpha_{ij}^l}, -E_{21}^{\alpha_{ij}^l}\} \rangle$

3. La descomposición de \mathfrak{n} por la acción de \mathfrak{l} es

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{n}_{(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_j, 0, \dots, 0)}^{(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_j, 0, \dots, 0)} = \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{gl}(2) \otimes \langle \alpha_{ij}^l \rangle \cong \bigoplus_{i \neq j} V_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}^{\varepsilon_i + \varepsilon_j}.$$

3.3. Descomposición de $\wedge^2 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3)), \wedge^3 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$

Consideremos el caso $n = 3$ y $N = 3$. La descomposición de $\mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$ será ordenada de la siguiente manera

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3)) = V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \oplus V_{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \oplus V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \oplus V_{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_3 - \varepsilon_2},$$

es decir, los sumandos están ordenados primero por longitudes de los caminos, de menor a mayor, y luego, según el vértice donde comienza cada camino.

3.3.1. Descomposición de $\wedge^2 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$

En $\wedge^2 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3)) \cong \wedge^2 \left(\bigoplus_{i \neq j} V_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}^{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \right)$ aparecen los siguientes productos:

- a) $\wedge^2 V_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$, con $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, cuya descomposición por la acción de \mathfrak{l} es:

$V_{2\varepsilon_i}^{2\varepsilon_i - 2\varepsilon_j} \oplus V_{2\varepsilon_j}^{2\varepsilon_i - 2\varepsilon_j}$, con vectores de peso máximo $E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^l}$, $E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^l}$ respectivamente,

si $i < j$; y $E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^l}$, $E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^l}$, si $i > j$. Esta descomposición se calculó en el ejemplo 2 de la sección 2.3.3.

Luego

	Componentes irreducibles	Vectores de peso máximo
$\bigwedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2}$	$E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{12}^1}, E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{12}^1}$
$\bigwedge^2 V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3}$	$E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{23}^1}, E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1}$
$\bigwedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1}$	$E_{12}^{\alpha_{31}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{31}^1}, E_{12}^{\alpha_{31}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1}$
$\bigwedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}$	$E_{12}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{13}^2}, E_{12}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{13}^2}$
$\bigwedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}$	$E_{12}^{\alpha_{21}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{21}^2}, E_{12}^{\alpha_{21}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{21}^2}$
$\bigwedge^2 V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$	$V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}$	$E_{12}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{32}^2}, E_{12}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{32}^2}$

b) Tensores entre dos componentes irreducibles, los cuales se presentan en la siguiente tabla.

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	-	(1)	(2)	(4)	(5)	(6)
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	-	-	(3)	(7)	(8)	(9)
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	-	-	-	(10)	(11)	(12)
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	-	-	-	-	(13)	(14)
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	-	-	-	-	-	(15)
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$	-	-	-	-	-	-

En esta tabla aparecen dos tipos de producto, uno en el cual los vectores maximales de dos componentes distintas tienen caminos que coinciden en un solo vértice; y otro donde los caminos coinciden en los dos vértices. Es decir, cualquiera sea el producto, hay coincidencia en al menos un vértice, lo cual implica aplicar fórmula de Clebsh-Gordon, en los vértices comunes, para calcular las componentes irreducibles.

Están en el primer caso todos los tensores excepto (5), (9), (10).

- (4), (8), (12):

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_k} = V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k} \oplus V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k},$$

con vectores de peso máximo

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ik}^2},$$

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge \pi(E_{21}^{v_i})(E_{12}^{\alpha_{ik}^2}) - \pi(E_{21}^{v_i})(E_{12}^{\alpha_{ij}^1}) \wedge E_{12}^{\alpha_{ik}^2} = E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ik}^2} - E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ik}^2}$$

respectivamente.

Luego

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	(5)	(6)
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	(7)	$V_{2\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	(9)
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	(10)	(11)	$V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$

- (6), (7), (11):

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_k+\varepsilon_j}^{\varepsilon_k-\varepsilon_j} = V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k+2\varepsilon_j}^{\varepsilon_i+\varepsilon_k-2\varepsilon_j} \oplus V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i+\varepsilon_k-2\varepsilon_j},$$

con vectores de peso máximo

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2},$$

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{kj}^2}) - \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ij}^1}) \wedge E_{12}^{\alpha_{ik}^2} = -E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{kj}^2} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2}$$

respectivamente.

Luego

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	(5)	$V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_3-2\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	(9)
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	(10)	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$

- (5), (9) y (10):

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_j-\varepsilon_i} = V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j}^0 \oplus V_{2\varepsilon_i}^0 \oplus V_{2\varepsilon_j}^0 \oplus V_0^0,$$

con vectores de peso máximo

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ji}^2},$$

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ji}^2}) - \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ij}^1}) \wedge E_{12}^{\alpha_{ji}^2} = E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ji}^2} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ji}^2},$$

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge \pi(E_{21}^{v_i})(E_{12}^{\alpha_{ji}^2}) - \pi(E_{21}^{v_i})(E_{12}^{\alpha_{ij}^1}) \wedge E_{12}^{\alpha_{ji}^2} = -E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ji}^2} - E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ji}^2},$$

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge \pi(E_{21}^{v_i})\pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ji}^2}) - \pi(E_{21}^{v_i})(E_{12}^{\alpha_{ij}^1}) \wedge \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ji}^2}) - \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ij}^1}) \wedge \pi(E_{21}^{v_i})(E_{12}^{\alpha_{ji}^2}) +$$

$$\pi(E_{21}^{v_i})\pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ij}^1}) \wedge E_{12}^{\alpha_{ji}^2} = -E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{ji}^2} - E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ji}^2} - E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ji}^2} - E_{21}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ji}^2},$$

respectivamente.

Finalmente completamos una parte de la tabla.

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_2}^0, V_0^0$	$V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_3-2\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_3}^0, V_0^0$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_3}^0, V_0^0$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$

Tabla 3.1: Descomposición de (4) al (12).

- (1), (2), (3), (13), (14), (15):

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} = V_{\varepsilon_i+2\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_k} \oplus V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_k},$$

con vectores de peso máximo,

$$E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^r},$$

$E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{jk}^r}) - \pi(E_{21}^{v_j})(E_{12}^{\alpha_{ij}^l}) \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^r} = E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^r} + E_{11}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^r}$
respectivamente, con $l = r = 1, 2$.

Luego

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	-	$V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	-	-	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$

Tabla 3.2: Descomposición de (1), (2), (3) con $l = r = 1$.

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	-	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	-	-	$V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$

Tabla 3.3: Descomposición de (13), (14), (15) con $l = r = 2$.

3.3.2. Descomposición de $\wedge^3 \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$

En $\wedge^3 \mathfrak{n} \cong \wedge^3 \left(\bigoplus_{i \neq j} V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \right)$ tenemos:

- $\wedge^3 V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, los cuales son irreducibles, pero no nos interesa conocer los pesos porque aquí el corchete da siempre cero.
- $\wedge^2 V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_k+\varepsilon_r}^{\varepsilon_k-\varepsilon_r}$.

Presentamos la tabla correspondiente a todos los tensores de este tipo.

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$\wedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	-	(1)	(2)	0	0	0
$\wedge^2 V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	(3)	-	(4)	0	0	0
$\wedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	(5)	(6)	-	0	0	0
$\wedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	0	0	0	-	0	0
$\wedge^2 V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	0	0	0	0	-	0
$\wedge^2 V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$	0	0	0	0	0	-

De todos los que aparecen en la tabla, sólo nos interesa la descomposición de aquellos, en donde el corchete entre matrices de dos componentes distintas, dé una matriz con camino de longitud menor a 3, es decir, el corchete dé distinto de cero. Los tensores numerados son los que responden a nuestro interés. A continuación, mostramos la descomposición de los mismos.

$$\wedge^2 V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} = V_{3\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k} \oplus V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k} \oplus V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k},$$

$$\Lambda^2 V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_k+\varepsilon_i}^{\varepsilon_k-\varepsilon_i} = V_{3\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k} \oplus V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k} \oplus V_{\varepsilon_i+2\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k}.$$

Entonces

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$\Lambda^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	-	$V_{3\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3},$ $V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{3\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3},$ $V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3}$
$\Lambda^2 V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{3\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-2\varepsilon_3+\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-2\varepsilon_3+\varepsilon_1},$ $V_{\varepsilon_2+2\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-2\varepsilon_3+\varepsilon_1}$	-	$V_{3\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{-\varepsilon_3+2\varepsilon_2-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{-\varepsilon_3+2\varepsilon_2-\varepsilon_1},$ $V_{\varepsilon_3+2\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{-\varepsilon_3+2\varepsilon_2-\varepsilon_1}$
$\Lambda^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{3\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2},$ $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{3\varepsilon_3+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-2\varepsilon_1+\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_3+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-2\varepsilon_1+\varepsilon_2},$ $V_{\varepsilon_3+2\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-2\varepsilon_1+\varepsilon_2}$	-

3. Tensores de tres componentes distintas.

Estos tensores se pueden separar en los siguientes casos.

a) camino de longitud 1 \otimes camino de longitud 1 \otimes camino de longitud 1.

El único tensor de este tipo es:

$$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \otimes V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{-\varepsilon_1+\varepsilon_3}$$

con componentes irreducibles

$$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_3}^0, V_0^0.$$

b) longitud 1 \otimes longitud 1 \otimes longitud 2.

La siguiente tabla nos muestra todos los tensores de este tipo.

$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \otimes V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \otimes V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \otimes V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \otimes V_{\varepsilon_3+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \otimes V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \otimes V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$

Los nueve tensores que aparecen se resumen en tres casos.

Primera fila de tensores

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \otimes V_{\varepsilon_k+\varepsilon_j}^{\varepsilon_k-\varepsilon_j} = V_{\varepsilon_i+3\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \oplus V_{\varepsilon_i+3\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \oplus 2 \times V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \oplus 2 \times V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}.$$

Segunda fila de tensores

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \otimes V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_k} = V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k} \oplus V_{2\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k} \oplus V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k} \oplus V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k} \oplus$$

$$V_{2\varepsilon_i}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k} \oplus V_{2\varepsilon_j}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k} \oplus V_{2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k} \oplus V_0^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}.$$

Tercera fila de tensores

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \otimes V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \otimes V_{\varepsilon_j+\varepsilon_i}^{\varepsilon_j-\varepsilon_i} = V_{2\varepsilon_i+3\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \oplus V_{3\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \oplus 2 \times V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \oplus 2 \times V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_j-\varepsilon_k}.$$

A continuación, mostramos en detalle las componentes irreducibles de cada uno.

$V_{\varepsilon_1+3\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+3\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2},$ $2 \times V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, 2 \times V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+3\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+3\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3},$ $2 \times V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, 2 \times V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_3+3\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_3+3\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1},$ $2 \times V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, 2 \times V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3},$ $V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3},$ $V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3},$ $V_0^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1},$ $V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1},$ $V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1},$ $V_0^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2},$ $V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2},$ $V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2},$ $V_0^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}$
$V_{2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{3\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3},$ $2 \times V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, 2 \times V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+3\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, V_{3\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1},$ $2 \times V_{2\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, 2 \times V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3+3\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{3\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2},$ $2 \times V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, 2 \times V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$

c) longitudud 1 \otimes longitudud 2 \otimes longitudud 2.

No nos interesa la descomposición de éstos, pues el corchete entre matrices de componentes distintas, da matrices con caminos de longitud mayor o igual a tres, es decir, da cero.

d) longitudud 2 \otimes longitudud 2 \otimes longitudud 2.

En estos tensores ocurre lo mismo que en el caso anterior.

3.4. Análisis de $H_1(\mathfrak{n}), H_2(\mathfrak{n})$

Recordemos que dada la sucesión de transformaciones lineales

$$\bigwedge^3 \mathfrak{n} \xrightarrow{d_3} \bigwedge^2 \mathfrak{n} \xrightarrow{d_2} \bigwedge^1 \mathfrak{n} \xrightarrow{d_1} \mathfrak{k} \xrightarrow{d_0} 0$$

donde

$$d_1(X) = 0,$$

$$d_2(X \wedge Y) = [X, Y],$$

$$d_3(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) = [X_1, X_2] \wedge X_3 - [X_1, X_3] \wedge X_2 + [X_2, X_3] \wedge X_1,$$

y tal que $d_p \circ d_{p+1} = 0$, se llama grupo de homología trivial de grado p , al espacio cociente $H_p(\mathfrak{n}) = \ker d_p / \text{im } d_{p+1}$.

Dado que $\pi(X) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{l}}(X)|_{\mathfrak{n}}$ es derivación de \mathfrak{n} y $\wedge^p \pi(X)$ es derivación de $\wedge^p \mathfrak{n}$ por construcción, resulta

$$[\wedge^{(p-1)} \pi(X)] \circ d_p = d_p \circ [\wedge^p \pi(X)] \quad \forall X \in \mathfrak{l}, \text{ es decir,}$$

$$\begin{array}{ccc} \wedge^p \mathfrak{n} & \xrightarrow{d_p} & \wedge^{(p-1)} \mathfrak{n} \\ \wedge^p \pi(X) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \wedge^{(p-1)} \pi(X) \\ \wedge^p \mathfrak{n} & \xrightarrow{d_p} & \wedge^{(p-1)} \mathfrak{n} \end{array}$$

el diagrama conmuta.

En consecuencia, $\wedge^p \pi(X)$ preserva $\ker d_p$ y $\text{im } d_{p+1}$ para todo p y para todo $X \in \mathfrak{l}$. Es decir, \mathfrak{l} también actúa en dichos subespacios. Por lo tanto se puede definir una acción de \mathfrak{l} en $H_p(\mathfrak{n})$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathfrak{l} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(H_p(\mathfrak{n})) \\ X &\longmapsto \tilde{\pi}(X) = \overline{\wedge^p \pi(X)}|_{\ker d_p} \end{aligned}$$

Para un dado p los endomorfismos $\wedge^p \pi(I_j)$ restringidos tanto al núcleo de d_p como a la imagen de d_{p+1} diagonalizan, lo cual implica la existencia de una base de vectores maximales en ambos subespacios. Este hecho nos facilita la búsqueda de una base del grupo de homología trivial H_p . En efecto, si tomamos una base de la imagen de d_p respecto de la cual se descompone en irreducibles, llamemos B_{im} , y la completamos a una base del núcleo $B_{\text{ker}} = B_{\text{im}} \cup B_H$ respecto de la cual se descompone en irreducibles, la base del espacio cociente $\ker d_p / \text{im } d_{p+1}$ es el conjunto de las clases de equivalencia de los vectores de B_H , digamos \overline{B}_H . Luego la matriz $[\tilde{\pi}(I_j)]_{\overline{B}_H}$ es diagonal para todo j , pues las matrices de los endomorfismos $\wedge^p \pi(I_j)|_{\ker d_p}$ resultan diagonales respecto a $B_{\text{ker}} = B_{\text{im}} \cup B_H$.

$$\left[\wedge^p \pi(I_j) \Big|_{\ker d_p} \right]_{B_{\text{ker}}} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ \left[\wedge^p \pi(I_j) \Big|_{\text{im } d_{p+1}} \right]_{B_{\text{im}}} & & & \\ & & * & \\ & & & * \\ 0 \quad \dots & & & * \end{pmatrix}$$

Por otro lado, como $[I_i, I_j] = 0$ para todo i, j ; los endomorfismos $\tilde{\pi}(I_j)$ conmutan entre si. Por lo tanto la representación $(\tilde{\pi}, H_p(\mathfrak{n}))$ es completamente reducible por la acción de \mathfrak{l} . La base en la que se descompone es precisamente \overline{B}_H .

A continuación, procederemos a calcular los grupos de homología $H_1(\mathfrak{n})$ y $H_2(\mathfrak{n})$. Es decir, vamos a buscar la base de vectores maximales del espacio cociente. El siguiente resultado nos facilitará la búsqueda.

Proposición 3.4.1. *Dadas dos representaciones de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$ completamente reducibles (π_1, V) y (π_2, W) , con $T : V \rightarrow W$ homomorfismo de \mathfrak{g} -módulos, es decir,*

$$T(\pi_1(Z)(v)) = \pi_2(Z)(T(v)) \quad \forall Z \in \mathfrak{g},$$

se cumple que

- a) *si v es vector maximal de V de peso λ y $T(v) \neq 0$ entonces $T(v)$ es vector maximal de W de peso λ .*
- b) *Si $V = \bigoplus V_i$ es la descomposición en irreducibles de V y v es un vector maximal de V_i tal que $T(v) = 0$ entonces $T(V_i) = 0$.*

Demostración.

- a) Si v es vector maximal de V , entonces

$$\pi_2(X_i)(T(v)) = T(\pi_1(X_i)(v)) = 0,$$

$$\pi_2(H_i)(T(v)) = T(\pi_1(H_i)(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v).$$

- b) La base de V_i se construye por sucesivas aplicaciones de los endomorfismos $\pi_1(Y_i)$ al vector maximal v , y como T conmuta con $\pi_1(Y_i)$ se tiene que

$$T(\pi_1(Y_i)\pi_1(Y_j)\dots\pi_1(Y_k)(v)) = \pi_2(Y_i)\pi_2(Y_j)\dots\pi_2(Y_k)(T(v)) = 0.$$

□

Como ya mencionamos antes, la diferencial conmuta con las derivaciones, por lo tanto vale la proposición para las derivaciones $\bigwedge^3 \pi(X)$, $\bigwedge^2 \pi(X)$ y $\pi(X)$.

Esta proposición nos permite encontrar de forma rápida algunos vectores de peso máximo que estarán en el núcleo de d_2 , como así también aquellos que estarán en la imagen de d_3 .

El grupo de Homología $H_1(\mathfrak{n})$

Dado que $d_1 = 0$, tenemos que

$$\ker d_1 = \mathfrak{n} = V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \oplus V_{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \oplus V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \oplus V_{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}^{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}.$$

Notemos que los pesos no tienen multiplicidad, y recordemos que las tres primeras componentes tienen vector de peso máximo $E_{12}^{\alpha_{ij}^1}$, y las otras tres $E_{12}^{\alpha_{ij}^2}$.

Ya sabemos cuál es la base vectores maximales del núcleo de d_1 . Nos falta encontrar la base vectores maximales de la imagen de d_2 , para luego compararlas y realizar el cociente.

Procedamos a evaluar d_2 en los vectores maximales de $\bigwedge^2 \mathfrak{n}$. Recordemos sus componentes irreducibles.

$V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2}$	$V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}$
$V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}$
$V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}$

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_2}^0, V_0^0$	$V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_3-2\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_3}^0, V_0^0$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_3}^0, V_0^0$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	-	$V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	-	-	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	-	$V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	-	-	$V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$

En la descomposición de $\wedge^2 \mathfrak{n}$ aparecen pesos que no están en la descomposición de \mathfrak{n} ; por lo tanto dichas componentes van a cero.

Por otro lado, en las dos últimas tablas aparecen los seis pesos de \mathfrak{n} . Evaluando en los correspondientes vectores maximales encontramos el siguiente resultado.

$$\begin{aligned}
d_2(E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^r} + E_{11}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^r}) &= d_2(E_{12}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^r}) + d_2(E_{11}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^r}) \\
&= [E_{12}^{\alpha_{ij}^l}, E_{22}^{\alpha_{jk}^r}] + [E_{11}^{\alpha_{ij}^l} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^r}] \\
&= E_{12}^{\alpha_{ik}^{l+r}} + E_{12}^{\alpha_{ik}^{l+r}} \\
&= 2E_{12}^{\alpha_{ik}^{l+r}}.
\end{aligned}$$

Como las longitudes $l, r \geq 1$ tendremos $l+r \geq 2$, es decir, el transformado da un vector de peso máximo con camino de longitud mayor o igual a 2. Esto dice que los tres vectores

de peso máximo de \mathfrak{n} con caminos de longitud 2, los cuales corresponden a los pesos $\mu = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, están en la imagen de d_2 . Los tres vectores de peso máximo de \mathfrak{n} con caminos de longitud 1 y que corresponden a los pesos $\mu = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_1$, no están en la imagen de d_2 , pues los tres posibles candidatos de $\bigwedge^2 \mathfrak{n}$ se transforman en el nulo (dan longitud 4).

La siguiente tabla compara las bases de vectores maximales.

Base de vectores maximales de $\text{im } d_2$	Base de vectores maximales de $\text{ker } d_1$
	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$
	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$
	$V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$
$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$
$V_{\varepsilon_3+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_3+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}$

Después de haber evaluado la diferencial sobre todos los vectores dominantes de $\bigwedge^2 \mathfrak{n}$, podemos afirmar:

- a) *Las únicas componentes irreducibles de \mathfrak{n} que no están en la imagen de d_2 son las que tienen caminos de longitud uno,*

$$H_1(\mathfrak{n}) = V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \oplus V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{-\varepsilon_1+\varepsilon_3}.$$

- b) *En el núcleo de d_2 finalmente están:*

siendo $i, j, k = 1, 2, 3$

$$V_{2\varepsilon_i}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_j}, V_{2\varepsilon_j}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_j}, i \neq j$$

$$V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}, V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}, i \neq j \neq k, j < k$$

$$V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{-2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}, V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{-2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}, i \neq j \neq k, j < k$$

$$V_{2\varepsilon_i+2\varepsilon_j}^0, i < j$$

$$2 \times V_{2\varepsilon_i}^0,$$

$$3 \times V_0^0,$$

$$V_{\varepsilon_i+2\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_k}, i \neq j \neq k$$

$$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}.$$

El grupo de Homología $H_2(\mathfrak{n})$

Necesitamos obtener la base de vectores maximales de $\text{im } d_2$. Obtenida la base, la comparemos con la del $\text{ker } d_2$ y realizaremos el cociente.

A continuación mostramos la evaluación de d_3 en los vectores maximales de las tablas de descomposición de $\bigwedge^3 \mathfrak{n}$.

\otimes	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$\wedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	-	$V_{3\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3},$ $V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{3\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3},$ $V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3}$
$\wedge^2 V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{3\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-2\varepsilon_3+\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-2\varepsilon_3+\varepsilon_1},$ $V_{\varepsilon_2+2\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-2\varepsilon_3+\varepsilon_1}$	-	$V_{3\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1},$ $V_{\varepsilon_3+2\varepsilon_2+\varepsilon_1}^{2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$\wedge^2 V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{3\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2},$ $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{3\varepsilon_3+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-2\varepsilon_1+\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_3+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-2\varepsilon_1+\varepsilon_2},$ $V_{\varepsilon_3+2\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-2\varepsilon_1+\varepsilon_2}$	-

En esta tabla hay seis tipos de componentes, de los cuales sólo dos no aparecen en $\ker d_2$, por lo tanto $d_3\left(V_{3\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}\right) = 0$ y $d_3\left(V_{3\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k}\right) = 0$.

Luego, evaluamos en los vectores maximales de los pesos que sí aparecen.

$$V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k} \text{ tiene vector maximal } E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^1},$$

$$d_3\left(E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^1}\right) = -E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ik}^2}, \text{ vector maximal del ker } d_2.$$

$$V_{\varepsilon_i+2\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k} \text{ tiene vector maximal } E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ki}^1},$$

$$d_3\left(E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ki}^1}\right) = E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2}, \text{ vector maximal del ker } d_2.$$

$$V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k} \text{ tiene vector maximal } E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^1} + E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^1},$$

$$d_3\left(E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^1} + E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^1}\right) = 2E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ik}^2} - E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ik}^2},$$

vector maximal del ker d_2 .

$$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-2\varepsilon_j+\varepsilon_k} \text{ tiene vector maximal } E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ki}^1} + E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ki}^1} + E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ki}^1}$$

$$d_3\left(E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ki}^1} + E_{22}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ki}^1} + E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ki}^1}\right) = -2E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2} - E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{kj}^2},$$

vector maximal del ker d_2 .

Teníamos además las componentes que provienen de los tensores $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, de los cuales sólo nos interesaron calcular las correspondientes a los casos 3a y 3b, pues los restantes están en el ker d_3 .

Caso 3a: longitud 1 \otimes longitud 1 \otimes longitud 1

$$d_3\left(V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0\right) = 0, \text{ este peso no está en ker } d_2.$$

$$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^0 \text{ tiene vector de peso máximo } E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1} + E_{11}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1},$$

$$d_3\left(E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1} + E_{11}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1}\right) = 2E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1} \text{ vector maximal del ker } d_2.$$

Ocurre lo mismo con los vectores maximales de las componentes $V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0$.

$V_{2\varepsilon_3}^0$ tiene vector maximal

$$E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} + E_{11}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} + E_{22}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1} + E_{21}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1},$$

$$d_3(E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} + E_{11}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} + E_{22}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1} + E_{21}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1}) =$$

$$2(E_{12}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} + E_{22}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1}) + 2(E_{12}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} + E_{11}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1}) \text{ suma de vectores maximales.}$$

Lo mismo sucede con los vectores maximales de $V_{2\varepsilon_1}^0$ y $V_{2\varepsilon_2}^0$.

V_0^0 tiene vector maximal

$$v_0 = E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{31}^1} + E_{11}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{31}^1} + E_{12}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} + E_{11}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} +$$

$$E_{22}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{31}^1} + E_{21}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{31}^1} + E_{22}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1} + E_{21}^{\alpha_{12}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{23}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1},$$

$$d_3(v_0) = 2(E_{12}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{21}^{\alpha_{31}^1} + E_{11}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{31}^1} + E_{22}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{31}^1} + E_{21}^{\alpha_{13}^2} \wedge E_{12}^{\alpha_{31}^1})$$

$$+ 2(E_{12}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{21}^{\alpha_{23}^1} + E_{11}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{23}^1} + E_{22}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{23}^1} + E_{21}^{\alpha_{32}^2} \wedge E_{12}^{\alpha_{23}^1})$$

$$+ 2(E_{12}^{\alpha_{21}^2} \wedge E_{21}^{\alpha_{12}^1} + E_{11}^{\alpha_{21}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{12}^1} + E_{22}^{\alpha_{21}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{12}^1} + E_{21}^{\alpha_{21}^2} \wedge E_{12}^{\alpha_{12}^1}), \text{ suma de tres vectores maximales.}$$

Caso 3b: longitud 1 \otimes longitud 1 \otimes longitud 2

$V_{\varepsilon_1+3\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{\varepsilon_1+3\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2},$ $2 \times V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, 2 \times V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$	$V_{\varepsilon_2+3\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{\varepsilon_2+3\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$ $2 \times V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, 2 \times V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{\varepsilon_3+3\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_3+3\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$ $2 \times V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, 2 \times V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$
$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3},$ $V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3},$ $V_{2\varepsilon_1}^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_2}^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}, V_{2\varepsilon_3}^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3},$ $V_0^{-2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1},$ $V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_1}^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1},$ $V_{2\varepsilon_2}^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_3}^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}, V_{2\varepsilon_1}^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1},$ $V_0^{-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2},$ $V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_1}^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_3+2\varepsilon_2}^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2},$ $V_{2\varepsilon_3}^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_1}^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}, V_{2\varepsilon_2}^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2},$ $V_0^{-2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}$
$V_{2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, V_{3\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3},$ $2 \times V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, 2 \times V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}$	$V_{2\varepsilon_2+3\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, V_{3\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1},$ $2 \times V_{2\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}, 2 \times V_{\varepsilon_3+\varepsilon_1}^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}$	$V_{2\varepsilon_3+3\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, V_{3\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2},$ $2 \times V_{2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, 2 \times V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$

Si observamos con detenimiento, en la primera y tercera fila aparecen repeticiones de pesos que están en $\ker d_2$. Es el caso de:

- $V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, con multiplicidad cuatro, siendo un vector maximal
 $E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2},$
 $d_3(E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2}) = 2E_{12}^{\alpha_{ik}^2} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2}$ vector maximal del $\ker d_2$.
- $V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, con multiplicidad cuatro, siendo un vector maximal
 $v = E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{kj}^2} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{kj}^2} + E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{21}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2} + E_{11}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2},$
 $d_3(v) = 2(E_{12}^{\alpha_{ik}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{kj}^2} + E_{11}^{\alpha_{ik}^2} \wedge E_{12}^{\alpha_{kj}^2})$ vector maximal del $\ker d_2$.

En la segunda fila los únicos pesos del núcleo que aparecen son $V_{2\varepsilon_i}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}$, $V_{2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}$ y corresponden, en el núcleo, a los vectores de peso máximo que tienen caminos de longitud dos.

En $V_{2\varepsilon_i}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}$ está el vector $E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ik}^2}$ que no es maximal pero su imagen da vector maximal del ker d_2 .

$$d_3\left(E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{11}^{\alpha_{ik}^2}\right) = E_{12}^{\alpha_{ik}^2} \wedge E_{11}^{\alpha_{ki}^2}.$$

Análogamente en $V_{2\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-2\varepsilon_k}$ tenemos $E_{12}^{\alpha_{ij}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{jk}^1} \wedge E_{22}^{\alpha_{ik}^2}$ cuya imagen es $E_{12}^{\alpha_{ik}^2} \wedge E_{22}^{\alpha_{ki}^2}$ vector maximal del núcleo.

Los restantes pesos de la tabla que no hemos analizado, son los que no aparecen en ker d_2 , los cuales obviamente se transforman en el nulo.

Después de haber evaluado la diferencial d_3 sobre $\bigwedge^3 \mathfrak{n}$ presentamos un cuadro comparativo de las respectivas bases de vectores maximales del ker d_2 e im d_3 .

Base de vectores maximales de im d_3	Base de vectores maximales de ker d_2
V_0^0 , su maximal es suma de los tres vectores maximales del núcleo	V_0^0, V_0^0, V_0^0 , longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^0$	$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2}^0$, longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^0$	$V_{2\varepsilon_1+2\varepsilon_3}^0$, longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0$	$V_{2\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^0$, longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{2\varepsilon_i}^0$, su maximal es suma de los dos vectores maximales del núcleo, $i = 1, 2, 3$	$V_{2\varepsilon_i}^0, V_{2\varepsilon_i}^0$, longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_3}^0$	$V_{2\varepsilon_1-2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_3}^0$, longitudes $l = r = 2$
$V_{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_2}^0$	$V_{2\varepsilon_2-2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_2}^0$, longitudes $l = r = 2$
$V_{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_3}^0$	$V_{2\varepsilon_3-2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_3}^0$, longitudes $l = r = 2$
	$V_{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2}^0, V_{2\varepsilon_2}^0$, longitudes $l = r = 1$
	$V_{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3}^0, V_{2\varepsilon_3}^0$, longitudes $l = r = 1$
	$V_{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1}^0, V_{2\varepsilon_1}^0$, longitudes $l = r = 1$
	$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, longitudes $l = r = 1$
$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, longitudes $l = r = 2$	$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j+2\varepsilon_k}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, longitudes $l = r = 2$
$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, longitudes $l = r = 2$	$V_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, longitudes $l = r = 2$
$V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}$, $i \neq j \neq k$ $j < k$ longitudes $l = 1, r = 2$	$V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}$, $i \neq j \neq k$ $j < k$ longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}$, $i \neq j \neq k$ $j < k$ longitudes $l = 1, r = 2$	$V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k}$, $i \neq j \neq k$ $j < k$ longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{-2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}$, $i \neq j \neq k$ $j < k$ longitudes $l = 1, r = 2$	$V_{2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{-2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}$, $i = 1, 2, 3$ $i \neq j \neq k$ longitudes $l = 1, r = 2$
$V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{-2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}$, $i = 1, 2, 3$ $i \neq j \neq k$ longitudes $l = 1, r = 2$	$V_{\varepsilon_j+\varepsilon_k}^{-2\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k}$, $i \neq j \neq k$ $j < k$ longitudes $l = 1, r = 2$

Afirmamos que

$$\begin{aligned}
H_2(\mathfrak{n}) = & 2 \times V_0^0 \oplus \\
& V_{2\varepsilon_1}^0 \oplus V_{2\varepsilon_2}^0 \oplus V_{2\varepsilon_3}^0 \oplus \\
& V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2} \oplus V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2} \oplus \\
& V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3} \oplus V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3} \oplus \\
& V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1} \oplus V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1} \\
& V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \oplus V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}.
\end{aligned}$$

Todo el análisis realizado a lo largo de este capítulo se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.2. *Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_3^+(3))$. Entonces la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^3$ -módulo de los primeros grupos de homología trivial de \mathfrak{n} es:*

$$\begin{aligned}
H_0(\mathfrak{n}) &= \mathbb{C}, \\
H_1(\mathfrak{n}) &= V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \oplus V_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}^{-\varepsilon_1+\varepsilon_3}, \\
H_2(\mathfrak{n}) &= 2 \times V_0^0 \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq 3} V_{2\varepsilon_i}^0 \oplus V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2} \oplus V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_1-2\varepsilon_2} \oplus V_{2\varepsilon_2}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3} \oplus V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_2-2\varepsilon_3} \oplus V_{2\varepsilon_3}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1} \oplus \\
& V_{2\varepsilon_1}^{2\varepsilon_3-2\varepsilon_1} \oplus V_{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \oplus V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \oplus V_{2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}^{\varepsilon_3-\varepsilon_2}.
\end{aligned}$$

3.5. Conclusiones y líneas futuras de investigación

Para cerrar este capítulo podemos decir lo siguiente:

Nuestro objetivo era estudiar los *grupos de homología trivial* del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$, con n y N arbitrarios, donde $A_N^+(n)$ es el radical nilpotente de $A_N(n)$ que es el álgebra asociativa de caminos truncada en N asociada al quiver cíclico $Q(n)$.

La herramienta fundamental para atacar el problema, fue usar la acción del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^n$ en los grupos de homología trivial, juntamente con la teoría de representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^n$.

En una primera instancia, obtuvimos la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^n$ -módulo de $\bigwedge^k \mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$ para $k = 0, 1, 2$ y para n y N arbitrarios, la cual no se incluyó en este trabajo. En vistas de la complejidad de la estructura de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})^n$ -módulo de $\bigwedge^k \mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$, con $k = 3$, decidimos considerar el caso $n = N = 3$.

En cuanto a propuestas para futuras investigaciones, sería interesante considerar quivers de cualquier longitud, otros truncamientos o grados mayores de homología. Nosotros hemos continuado analizando el caso $n = 3$ con $N = 4, 5$ con el objetivo de llegar a inferir para un $N > 3$. Nos encontramos con grandes desafíos por sortear. Entre ellos podemos mencionar: aparición de pesos con multiplicidad en la descomposición de $\mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(2, A_N^+(n))$; identificar y organizar los productos tensoriales entre las distintas componentes irreducibles de \mathfrak{n} y así obtener la descomposición de $\bigwedge^2 \mathfrak{n}$ y $\bigwedge^3 \mathfrak{n}$; y contar la multiplicidad de los pesos que aparecen. Todo esto ha sido estudiado, y a pesar de que las cuentas se complican considerablemente, esperamos obtener nuevos resultados.

Bibliografía

- [Fu] Fulton, William y Harris, Joe *Representation Theory*, Springer Verlag, New York (1996).
- [Sa] San Martin, Luis A. B. *Álgebras de Lie*, Unicamp, Barao Geraldo, (1999).
- [Bo] Bott, R., *Homogeneous vector bundles*, Ann. Math., **66(2)** (1957), 203-248 .
- [Ga] Gabriel, P., *Indecomposable representations, II*, Symposia Matematica 2(Inst. nazionale dialta Matematica (1973), 81–104.
- [Hu] Humphreys, P., *Introduction to Lie algebras and representation theory*, GTM, New York, Springer-Verlag, (1972).
- [Lo] Loday, J-L., *Cyclic homology*, Springer Verlag, Berlin, (1992).
- [No] Nomizu K., *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math., **59** (1954), 531-538.
- [Bi] Birkhoff, G., *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices*, Ann. of Math. (2), Vol. **38**, (1937), 526-532.
- [Ja] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York, (1962).