Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán

Tesis para optar al grado de Magister en Matemática

Movimientos Proyectivos Libres de Fuerza en la Esfera

María Marcela Lazarte

Director: Dr. Marcos Salvai
Codirector: Dr. Adrián Will

S. M. de Tucumán, agosto de 2007

Resumen

En el espíritu de la descripción clásica de los movimientos libres de fuerza de un cuerpo rígido en el espacio euclidiano usando una métrica invariante en $SO\,(3)$, estudiamos movimientos proyectivos libres de fuerza de la esfera.

Considérese la acción canónica de $G = Sl\,(n+1,\mathbb{R})$ en S^n por transformaciones proyectivas, es decir $g \cdot q = g\,(q)\,/\,|g\,(q)|$ para $g \in G$ y $q \in S^n$. Supóngase que la esfera tiene inicialmente una distribución homogénea de masa y que las partículas pueden moverse sólo de tal manera que dos configuraciones difieren en una transformación proyectiva. Existe una métrica riemanniana en G que satisface que una curva en G es geodésica, si y sólo si (pensada como un movimiento proyectivo) es libre de fuerza, es decir, es un punto crítico de la funcional energía cinética.

Se prueba que esa métrica no es completa (en particular no invariante, como sucede en general con movimientos no rígidos). Se estudian aquellos movimientos proyectivos libres de fuerza de la esfera que pueden ser descritos en términos de la estructura de Lie del espacio de configuraciones G. Más precisamente, encontramos subgrupos H de G totalmente geodésicos (un movimiento libre inicialmente tangente a H permanece en H) y en particular, hallamos geodésicas de G por la identidad que son reparametrizaciones de subgrupos monoparamétricos. En contraste con la situación análoga para movimientos conformes de la esfera, el grupo de isometrías no es totalmente geodésico en G si $n > 1$.

Contenidos

Introducción

Lo que se presenta a continuación es el resultado del trabajo de tesis de la Lic. María Marcela Lazarte como alumna de la Maestría en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán. El director de tesis es el Dr. Marcos Salvai, de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba y el codirector el Dr. Adrián Will, que se desempeña en la Facultad donde se realiza la tesis.

La comisión de seguimiento está integrada por el director, el codirector, la Dra. Isabel Dotti, y la Lic. Estela López.

Se mencionan a continuación resultados anteriores relacionados con el tema de la presente tesis.

Inicialmente, siguiendo la idea de la descripción clásica de los movimientos libres de fuerza de un cuerpo rígido en el espacio euclidiano mediante una métrica invariante en [Ar, Apéndice 2], en [DoZi, Na, S2, Zi] se introduce una métrica riemanniana apropiada en $SO_o\,(n,1)$ $(n=2,3)$ para estudiar la dinámica de un cuerpo rígido en los espacios hiperbólicos de dimensión 2 y 3.

Luego se tiene la publicación de Marcos Salvai [S2]. En ella se define una métrica apropiada para el grupo de Lie de los difeomorfismos directamente conformes de S^n, que satisface que una curva suave en el grupo es una geodésica si y sólo si es un movimiento conforme libre de fuerzas. Esta métrica resulta no completa. Se encuentran ejemplos explícitos de movimientos conformes libres de fuerzas, y más generalmente, subgrupos totalmente geodésicos, en particular $SO(n+1)$.

Esta tesis surge siguiendo como modelo el trabajo [S2] ya mencionado, pero para el caso proyectivo en vez del conforme. Está estructurada en cuatro capítulos, de la siguiente manera:

En el primer capítulo, titulado Preliminares, se detallan los conceptos previos necesarios para poder utilizar ciertas técnicas en la búsqueda de resultados. Son conceptos básicos de Geometría Riemanniana, como el de subvariedades totalmente geodésicas y las propiedades de las mismas que se necesitará usar a lo largo del trabajo, así como algunos resultados técnicos que serán de utilidad y simplificarán la exposición de los resultados principales. Se expone un resultado que resultará central en la búsqueda de geodésicas: Cada componente conexa del conjunto de puntos fijos de una isometría es una subvariedad totalmente geodésica.

En el segundo capítulo, se presenta una acción de $Gl_+(n+1,\mathbb{R})$ en la esfera, y se describen las transformaciones directamente proyectivas y los movimientos proyectivos de S^n, asociados a esta acción. Es importante notar que nos restringimos a $G = Sl(n+1,\mathbb{R})$ con el fin que dicha acción sea efectiva. Esta acción resultará de capital importancia para el resto del trabajo.

En el tercer capítulo, se desarrolla el trabajo en sí. Se define el concepto de energía de movimientos proyectivos y la noción de movimiento proyectivo libre de fuerza de S^n y se propone una métrica en G tal que estos movimiento se identifican con geodésicas de G. Se consigue una serie de subvariedades totalmente geodésicas usando la técnica de buscar puntos fijos de isometrías. En particular se logra llegar a la reparametrización de una geodésica. Finalmente se prueba que el subgrupo $K = SO(n+1)$ de isometrías de la esfera que preservan orientación, no es totalmente geodésico en G si $n > 1$. En particular, si n es par, ninguna geodésica por la identidad en K (excepto la constante), es una geodésica de G. Esto contrasta con el caso conforme estudiado en [S2].

En el cuarto capítulo se resumen las conclusiones y se proponen algunos interrogantes que surgen a partir del presente trabajo y que se podrían resolver en futuras investigaciones.

CAPITULO 1

Preliminares

Escribimos a continuación conceptos básicos de Geometría Riemanniana, cuya referencia es [doC]. Por funciones suaves o diferenciables entendemos funciones de clase C^∞. La norma usual de $\mathbb{R}^n$ la denotaremos por $|\ \ |$, pues reservamos $\|\ \ \|$ para la norma asociada a una métrica riemanniana que definiremos en la sección 3.2.

1.1 Subvariedades totalmente geodésicas

La importancia de este concepto radica en lo siguiente: Más adelante, cuando pensemos las geodésicas como movimientos libres de fuerza, si una subvariedad H del grupo de transformaciones conformes es totalmente geodésica, significa que movimientos inicialmente tangentes a H permanencen en H. Además, esta noción será de gran importancia para el la búsqueda de geodésicas.

Definición Si M es una variedad riemanniana, una subvariedad S de M con la métrica inducida se dice *totalmente geodésica* si las geodésicas de S son geodésicas de M.

Ejemplo 1) Si $M = \mathbb{R}^n$, entonces $S = \mathbb{R}^k$ con $k \leq n$ es una subvariedad totalmente geodésica de M.

2) Si $M = \mathbb{R}^3$, entonces $S = S^2$ no es totalmente geodésica y ninguna geodésica no constante de S^2 es geodésica de M.

3) Un cilindro S no es una subvariedad totalmente geodésica de $\mathbb{R}^3$ pero las generatrices de S son geodésicas de S y de $\mathbb{R}^3$.

Propiedades 1) Las componentes conexas de una subvariedad totalmente geodésica son totalmente geodésicas. Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y $S = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$, entonces las componentes conexas de S son $S_+ = \{(x, 0) \mid x > 0\}$ y $S_- = \{(x, 0) \mid x < 0\}$, que son subvariedades totalmente geodésicas.

2) Si S es una subvariedad conexa totalmente geodésica de dimensión uno de una variedad riemanniana M, digamos la imagen de una curva regular σ, entonces existe una reparametrización γ de σ tal que γ es geodésica en M.

3) La intersección de subvariedades totalmente geodésicas incrustadas es una subvariedad totalmente geodésica.

4) Si M es totalmente geodésica en N y N es totalmente geodésica en P, entonces M es totalmente geodésica en P.

1.2 Puntos fijos de isometrías

Al buscar subvariedades totalmente geodésicas, una herramienta muy valiosa es buscar isometrías de la variedad y el conjunto de sus puntos fijos. Esto se debe a que este conjunto constituirá, según veremos más adelante una subvariedad totalmente geodésica.

Definición Dadas dos variedades riemannianas $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ y $(N, \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$, un difeomorfismo $F : M \to N$ se dice que es una *isometría* si $\langle v, w\rangle_p = \langle\langle dF_p v, dF_p w\rangle\rangle_{F(p)}$ para todo $p \in M$.

Propiedades 1) Un difeomorfismo $F : M \to N$ es una isometría si y sólo si para toda curva diferenciable $\sigma : [a, b] \to M$, la curva $F \circ \sigma : [a, b] \to N$ tiene la misma longitud que σ.

2) El conjunto de las isometrías es un grupo bajo la composición.

3) Si $F : M \to N$ es una isometría y γ es una geodésica de M, entonces $F \circ \gamma$ es una geodésica de N.

Ejemplo 1) Las isometrías de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $T \circ O$, con T una traslación y O una transformación ortogonal (rotación o reflexión).

2) Si $M = N$ es el hiperboloide de revolución de una hoja con eje vertical, las isometrías son la reflexión respecto del plano x-y, las reflexiones respecto de planos que contengan al eje z y las rotaciones alrededor del eje z.

3) Si $M = N$ es el cilindro, las isometrías son las mismas que en el hiperboloide más traslaciones en la dirección del eje z y reflexiones respecto de planos paralelos al plano x-y.

Si f es una isometría de la variedad riemanniana M, denotamos mediante

$$\mathrm{Fix}\,(f) = \{q \in M \mid f\,(q) = q\}$$

el conjunto de los puntos fijos de f.

Proposición 1 *Si f es una isometría de M y $\mathrm{Fix}\,(f)$ es no vacío, entonces cada componente conexa de $\mathrm{Fix}\,(f)$ es una subvariedad totalmente geodésica de M.*

Antes de demostrar la Proposición damos unos ejemplos y probamos un lema.

Ejemplo Sean

$$F_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Si $M = \mathbb{R}^3$, entonces el conjunto de puntos fijos de F_1 resulta ser el plano $x = 0$.

2) Si $M = \mathbb{R}^3$, entonces el conjunto de puntos fijos de F_2 resulta ser el eje z.

3) Si M es el hiperboloide de revolución de una hoja alrededor del eje x, entonces el conjunto de puntos fijos de F_1 es la circunferencia que resulta de intersecar el hiperboloide con el plano $x = 0$.

4) Si M es la silla de montar

$$M = \{(x, y, y^2 - x^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

entonces el conjunto de puntos fijos de F_1 es

$$\{\left(0, y, y^2\right) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

que resulta una variedad totalmente geodésica de dimensión uno.

Notar que la curva $y \mapsto (0, y, y^2)$ no es geodésica de M, pero una reparametrización de rapidez unitaria sí lo es.

Lema 2 *Sean f una isometría de M, F una componente conexa de* $\mathrm{Fix}\,(f)$*, $p \in F$ y $V_p = \{X \in T_pM \mid df_pX = X\}$. Entonces*

a) *La geodésica maximal por p en M con velocidad $X \in V_p$ está contenida en F.*

b) *Para todo $q \in F$ en una bola normal alrededor de p, el único segmento geodésico que une p con q y se mantiene dentro de la bola, está contenido en F.*

Prueba. a) Sea γ la geodésica maximal en M con $\gamma\,(0) = p$ y $\dot{\gamma}\,(0) = X$. Si $\sigma = f \circ \gamma$, entonces $\sigma\,(0) = f\,(p) = p$, $\dot{\sigma}\,(0) = df_p\,(\dot{\gamma}\,(0)) = df_p\,(X) = X$ y además σ es geodésica por ser f una isometría. Por unicidad de la geodésica maximal con velocidad inicial dada se tiene que $\sigma = \gamma$. Luego la imagen de γ está contenida en F.

b) Sea $q \in B_r(p) \cap F$, donde $B_r(p)$ es una bola normal. Existe un único $v \in B_r(0)$ tal que $q = \exp_p(v) = \gamma_v(1)$ (denotamos por γ_v la geodésica con velocidad inicial v). Si $u = df_p(v)$, como f es isometría, se cumple que $|u| = |v| < r$ y $\sigma = f \circ \gamma_v$ es geodésica. Por otra parte

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= (f \circ \gamma_v)(0) = f(p) = p, \\ \dot{\sigma}(0) &= df_{\gamma(0)} \dot{\gamma_v}(0) = df_p(v) = u, \end{aligned}$$

y además

$$\sigma(1) = (f \circ \gamma_v)(1) = f(q) = q$$

pues $q \in F$. Por lo tanto

$$q = \exp_p(u)$$

es decir,

$$\exp_p(u) = \exp_p(v)$$

y de allí $u = v \in V_p$. En consecuencia,

$$\gamma_v([0,1]) \subset F$$

por la primera parte del lema. $\square$

Prueba de la Proposición 1. Reproducimos, completando algunos detalles, la prueba dada en [Ol].

Sean F una componente conexa de $\operatorname{Fix}(f)$, $p \in F$ y V_p como en el Lema 2. Por el apartado (a) de ese Lema,

$$\exp_p(V_p) \subset F.$$

Si $q \in F$ está en una bola normal $B_r(p)$ de M, la única geodésica en este entorno que los une permanece en F por el Lema 2 (b). Por lo tanto,

$$\exp_p(B_r(0) \cap V_p) = B_r(p) \cap F.$$

Ahora como V_p es un subespacio de T_pM, $\exp_p\big|_{B_r(0)}$ es un difeomorfismo y p es arbitrario, resulta que F es una subvariedad de M y $T_pF = V_p$.

Por último, sea $\gamma : I \to F$ la única geodésica en F con $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = X \in T_pF$. Como $T_pF = V_p$ y $\exp_p(V_p) \subset F$, la unicidad de la geodésica implica que γ es geodésica en M. $\square$

Sea S^n la esfera de centro cero y radio uno en $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $\{e_0, \ldots, e_n\}$ la base canónica de este último.

Proposición 3 *Las isometrías de S^n son exactamente las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Prueba. Sea f una isometría de S^n. Veamos que existe $A \in O(n+1)$ tal que $f = A|_{S^n}$. Sean $v = f(e_0)$ y $h = df_{e_0}$. Sabemos que $T_{e_0}S^n = e_0^{\perp}$ y $T_vS^n = v^{\perp}$, así que como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal del complemento ortogonal de e_0, se cumple que $\{he_1, \ldots, he_n\}$ es una base ortonormal de $v^{\perp}$, por ser f una isometría.

Si definimos el operador lineal A de $\mathbb{R}^{n+1}$ como el que cumple

$$\begin{aligned} A(e_0) &= f(e_0) = v \\ A(e_i) &= he_i \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., n$ observamos que A extiende a h.

Por otro lado, A lleva la base ortonormal $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ en la base ortonormal $\{v, he_1, \ldots, he_n\}$. Luego $A \in O(n+1)$.

Definimos ahora $g = A^{-1}|_{S^n} \circ f$, que es una isometría de la esfera (por ser composición de isometrías). Tenemos que

$$\begin{aligned} dg_{e_0} &= \left(dA|_{S^n}\right)_v^{-1} \circ h \\ &= A^{-1} \circ A|_{e_0^{\perp}} \\ &= \mathrm{id}|_{e_0^{\perp}}. \end{aligned}$$

Luego g es una isometría que deja fijo e_0 y cumple que $dg_{e_0} = \mathrm{id}$. Por el Lema 2 (a), g fija las geodésicas que parten de e_0. Como éstas cubren toda la esfera, g es la identidad en S^n. $\square$

CAPITULO 2

Transfomaciones proyectivas de la esfera

Sea M una variedad riemanniana. Un difeomorfismo F de M se dice *proyectivo* si para toda geodésica γ de M se cumple que $F \circ \gamma$ es una reparametrización (no necesariamente por longitud de arco) de una geodésica de M. Si M está orientada, una transformación proyectiva de M se denomina *directamente proyectiva* si preserva la orientación.

Dados $p \in S^n$ y $A \in Gl_+(n+1, \mathbb{R})$,

$$Gl_+(n+1, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \mid \det A > 0\},$$

definimos

$$A \cdot p = Ap/ \left| Ap \right| .$$

Proposición 4 *Toda transformación directamente proyectiva de la esfera es de la forma $p \mapsto A \cdot p$ para cierto $A \in Gl_+(n+1, \mathbb{R})$.*

Prueba. Agradecemos a Vladimir Matveev que nos comunicó el resultado y un esquema de la prueba, basada en ideas de Beltrami (ver [Ma]).

Si $F : S^n \to S^n$ es una transformación de la forma $F(w) = Aw/ \left| Aw \right|, w \in S^n, A \in Gl_+(n+1, \mathbb{R})$, claramente F resulta una transformación directamente proyectiva, pues lleva círculos máximos en círculos máximos.

Sean $S^n_+ = \{q \in S^n \mid q_0 > 0\}$ y $\alpha : S^n_+ \to \mathbb{R}^n$, la proyección central desde el centro de la esfera al plano $q_0 = 1$, seguida de la proyección ortogonal sobre $\mathbb{R}^n$, cuya expresión resulta

$$\alpha(ce_0 + u) = u/c,$$

donde $\langle e_0, u\rangle = 0$.

Claramente, α lleva geodésicas de la semiesfera a rectas en $\mathbb{R}^n$ y su inversa es

$$\alpha^{-1}(u) = (e_0 + u) \,/\, |e_0 + u| \,.$$

Dada una transformación directamente proyectiva F, llevará esferas ecuatoriales en esferas ecuatoriales, ya que es posible definir la noción de "esferas ecuatoriales" en términos de geodésicas como subvariedades totalmente geodésicas maximales. Luego F lleva hemisferios en hemisferios.

Sea ϕ una rotación tal que $\phi \circ F$ lleva el hemisferio S^n_+ en sí mismo. La composición $\alpha \circ \phi \circ F \circ \alpha^{-1}$ lleva rectas de $\mathbb{R}^n$ en rectas de $\mathbb{R}^n$, y por [Be, Corollary 2.6.5] resulta una transformación afín, es decir, existe una transformación B de $\mathbb{R}^n$, $B(z) = Tz + b$, con $T \in Gl_+(n)$ y $b \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\alpha \circ \phi \circ F \circ \alpha^{-1} = B.$$

Luego

$$F|_{S^n_+} = \phi^{-1} \circ \left(\alpha^{-1} \circ B \circ \alpha\right). \tag{2.1}$$

Veamos que para todo $q \in S^n_+$ se cumple que $(\alpha^{-1} \circ B \circ \alpha)(q) = C \cdot q$, donde C es el isomorfismo de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por $C(e_0) = e_0 + b$ y $C(u) = T(u)$ para $\langle u, e_0\rangle = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\alpha^{-1} \circ B \circ \alpha\right)(ce_0 + u) &= \alpha^{-1}\left(B\left(u/c\right)\right) \\
&= \alpha^{-1}\left(T\left(u/c\right) + b\right) \\
&= \left(e_0 + T\left(u/c\right) + b\right) / \left|e_0 + T\left(u/c\right) + b\right| \\
&= \left(ce_0 + cb + T\left(u\right)\right) / \left|ce_0 + cb + T\left(u\right)\right| \\
&= C \cdot \left(ce_0 + u\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, por (2.1), tenemos entonces que para todo $q \in S^n_+$ se cumple

$$\begin{aligned} F(q) &= \phi^{-1}(C \cdot q) \\ &= \phi^{-1}(C(q) / |C(q)|) \\ &= \left(\phi^{-1} \circ C\right)(q) / \left|\left(\phi^{-1} \circ C\right)(q)\right| \\ &= \left(\phi^{-1} \circ C\right) \cdot q, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad vale pues ϕ es ortogonal. Resulta así que $F|_{S^n_+}$ tiene la forma deseada. Con el mismo razonamiento se puede tomar otro casquete que tenga intersección no vacía con S^n_+ y se obtiene por continuidad que $F(q) = (\phi^{-1} \circ C) \cdot q$ para todo $q \in S^n$. $\square$

Definición Una acción α de un grupo G en un conjunto S es una función $\alpha : G \times S \to S$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(\mathrm{id}, p) &= p \\ \alpha(gh, p) &= \alpha(g, \alpha(h, p)) \end{aligned}$$

para todo $p \in S$ y $g, h \in G$.

Si se fija $g \in G$, la aplicación de S dada por $p \mapsto \alpha(g, p)$ es una biyección, pues se tiene que la aplicación $q \mapsto \alpha(g^{-1}, q)$ es su inversa . En efecto

$$\alpha\left(g^{-1}, \alpha(g, p)\right) = \alpha\left(g^{-1}g, p\right) = \alpha(\mathrm{id}, p) = p$$

y por otra parte

$$\alpha\left(g, \alpha\left(g^{-1}, p\right)\right) = \alpha\left(gg^{-1}, p\right) = \alpha(\mathrm{id}, p) = p$$

para todo $p \in S$.

Definición Una acción α se dice *efectiva* si $\alpha(g, p) = p$ para todo $p \in S$ sólo si $g = \mathrm{id}$.

El grupo $Gl_+ (n+1, \mathbb{R})$ actúa en la esfera S^n mediante

$$A \cdot p = Ap / |Ap| , \tag{2.2}$$

para $A \in Gl_+(n+1, \mathbb{R})$ y $p \in S^n$.

Cada $A \in Gl_+(n+1, \mathbb{R})$, según la Proposición 4, induce una transformación proyectiva de la esfera.

Esta acción de $Gl_+ (n+1, \mathbb{R})$ en S^n no es efectiva, ya que si tomamos $\lambda \neq 0$, tendríamos que $\lambda I \cdot p = p$ para todo $p \in S^n$, y $\lambda I \neq I$. Para subsanar ese problema, puede restringirse la acción al subgrupo $Sl\,(n+1, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n+1, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

Proposición 5 *La acción restringida a $Sl\,(n+1, \mathbb{R})$ es efectiva. Además, éste es el mayor subgrupo de $Gl_+ (n+1, \mathbb{R})$ que contiene a $Sl\,(n+1, \mathbb{R})$ para el cual vale esta propiedad.*

Prueba. Si $A \in Sl\,(n+1, \mathbb{R})$ cumple que $A \cdot p = Ap / |Ap| = p$ para todo $p \in S^n$, en particular lo hace para $p = e_i$ con $i = 0, \ldots, n$, de donde se deduce que A es una matriz diagonal $A = \operatorname{diag}(a_0, \ldots, a_n)$. Por otra parte, tomando

$$p = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^{n} e_i$$

y llamando

$$C = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{i=0}^{n} a_i e_i \right| ,$$

se tiene que

$$A \cdot p = \frac{Ap}{C} = \frac{1}{C\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^{n} a_i\, e_i = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^{n} e_i = p,$$

de donde $a_i = C$ para todo $i = 0, \ldots, n$. De este modo A resulta un múltiplo positivo de la matriz identidad. Por último, $A = I$ pues $\det A = 1$.

Supongamos que existe un subgrupo G_1 de $Gl_+ (n+1, \mathbb{R})$ que contiene a $Sl\,(n+1, \mathbb{R})$ tal que la acción en la esfera es efectiva. Sea $g \in G_1$ y $h =$

$g/\sqrt[n+1]{\det g} \in Sl\,(n+1,\mathbb{R}) \subset G_1$. Tenemos entonces que $hg^{-1} = I/\sqrt[n+1]{\det g}$, que fija todos los puntos de S^n. Luego $\sqrt[n+1]{\det g} = 1$ y en consecuencia $g \in Sl\,(n+1,\mathbb{R})$. □

Ejemplo a) Si $n=1$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in Gl_+\,(2,\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9x^2+4y^2}} \begin{pmatrix} 3x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Los puntos fijos de esta transformación proyectiva son $(1,0)$,$(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$.

b) Si se toma $A = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\operatorname{sen}\eta \\ \operatorname{sen}\eta & \cos\eta \end{pmatrix} \in Sl\,(2,\mathbb{R})$, la acción de A no tendrá ningún punto fijo y además será una transformación rígida.

Notación De ahora en adelante denotaremos $G = Sl\,(n+1,\mathbb{R})$ y nos referiremos a las transformaciones directamente proyectivas simplemente como proyectivas.

Una curva en G, es decir una función suave $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$, puede verse mediante la acción proyectiva definida en (2.2) como una *curva de posiciones o de configuraciones* de partículas de S^n, y la llamaremos *movimiento proyectivo.*

Ejemplo Sean $\gamma : (0,+\infty) \to Sl\,(2,\mathbb{R})$ y $\beta : \mathbb{R} \to Sl\,(2,\mathbb{R})$ definidas por

$$\gamma\,(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Consideremos el movimiento proyectivo de S^1 inducido por γ . Para $t=1$ tendremos la identidad. Para $t \to 0^+$, los puntos de la circunferencia con segunda coordenada positiva tienden a desplazarse hacia el $(0,1)$ y los de segunda coordenada negativa hacia el $(0,-1)$. Cuando t tiende a infinito, los puntos tienden a acumularse en $(1,0)$ o $(-1,0)$. A lo largo de todo el proceso, los puntos $(0,1)$,$(0,-1)$,$(1,0)$ y $(-1,0)$ quedan fijos.

b) Para el movimiento proyectivo de S^1 inducido por β, en $t=0$ tendremos la identidad. Los puntos $(1,0)$ y el $(-1,0)$ están fijos a lo largo de todo el proceso. Cuando t tiende a infinito los puntos tienden a acumularse en $(1,0)$ y cuando tiende a menos infinito se acumulan en $(-1,0)$.

CAPITULO 3

Movimientos proyectivos libres de fuerzas de la esfera

En el espíritu de la descripción clásica de los movimientos libres de fuerzas de un cuerpo rígido en el espacio euclidiano usando una métrica invariante en $SO\,(3)$ [Ar, Apéndice 2], métricas riemannianas adecuadas en $SO_o\,(n,1)$ $(n=2,3)$ han demostrado ser útiles para estudiar la dinámica de un cuerpo rigido en los espacios hiperbólicos de dimensiones 2 y 3 [DoZi, Na, S1, Zi]. Más recientemente, M. Salvai estudió en [S2] movimientos conformes libres de fuerza en S^n usando una métrica riemanniana conveniente en el grupo de sus transformaciones conformes. En este trabajo definimos una métrica apropiada en $Sl\,(n+1,\mathbb{R})$ para estudiar los movimientos proyectivos libres de fuerza de la esfera S^n.

Sea S^n la esfera unitaria centrada en el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica usual y $G = Sl(n+1,\mathbb{R})$ que actúa efectivamente en S^n por transformaciones proyectivas de la manera definida en (2.2).

Supongamos que la esfera tiene inicialmente una distribución homogénea de masa de densidad constante 1 y que a las partículas les está permitido moverse sólo de tal forma que dos configuraciones difieran en una transformación proyectiva. El espacio de configuraciones puede identificarse naturalmente con G.

La noción de energía de movimientos proyectivos y la definición de la métrica en G que sigue son similares a los de la situación conforme, estudiada en [S2]. La escribimos con todo detalle para tener una descripción completa y autocontenida.

3.1 Energía de movimientos proyectivos

Sea γ una curva suave en G, la cual puede pensarse como un movimiento proyectivo de S^n. La energía cinética total $E\left(t\right)$ del movimiento γ en el instante t está dada por

$$E\left(t\right) = \tfrac{1}{2} \int_{S^n} \rho_t\left(q\right) \left|v_t\left(q\right)\right|^2 \, d\mu\left(q\right), \tag{3.1}$$

donde se integra con respecto a la forma de volumen canónica de S^n y, si $q = \gamma\left(t\right)\left(p\right)$ para $p \in S^n$, entonces

$$v_t\left(q\right) = \left.\frac{d}{ds}\right|_t \gamma\left(s\right)\left(p\right) \in T_q S^n, \qquad \rho_t\left(q\right) = 1/\left|\det\left(d\gamma(t)_p\right)\right|$$

son la velocidad de la partícula q y la densidad en q en el instante t, respectivamente. Aplicando la fómula de cambio de variables a (3.1), se obtiene

$$E\left(t\right) = \tfrac{1}{2} \int_{S^n} \left| \left.\frac{d}{ds}\right|_t \gamma\left(s\right)\left(p\right) \right|^2 d\mu\left(p\right). \tag{3.2}$$

La siguiente definición está basada en el principio de acción mínima.

Definición Una curva suave γ en G, pensada como un movimiento proyectivo de S^n, se dice *libre de fuerzas* si es un punto crítico de la funcional de energía cinética.

3.2 Una métrica riemanniana en G

La siguiente Proposición en realidad define dos conceptos que se usarán en el trabajo.

Proposición 6 a) *Dados $g \in G$ y $X \in T_gG$, la función $\widetilde{X} : S^n \to TS^n$,*

$$\widetilde{X}(q) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma(t)(q) \in T_{g(q)}S^n, \tag{3.3}$$

donde γ es cualquier curva suave en G con $\gamma(0) = g$ y $\dot{\gamma}(0) = X$, está bien definida y es suave.

b) *Una métrica Riemanniana en G está definida de la siguiente manera: para $X, Y \in TG$ con el mismo punto base,*

$$\langle X, Y \rangle = \int_{S^n} \langle \widetilde{X}(q), \widetilde{Y}(q) \rangle \, d\mu(q). \tag{3.4}$$

Más aún, una curva en G es una geodésica si y sólo si (pensada como un movimiento proyectivo) es libre de fuerzas.

Observaciones a) Si $X \in T_gG$, entonces $\widetilde{X}$ es un campo vectorial en S^n si y sólo si g es la identidad del grupo.

b) Para cualquier n, la métrica en G no es invariante a derecha ni a izquierda. Si lo fuera, la variedad resultaría homogénea y por lo tanto completa y veremos luego en el Teorema 13 que no es completa.

Demostración de la Proposición 6. Los argumentos son prácticamente los mismos que los de [S2] para movimientos conformes en vez de proyectivos. Los reproducimos con el objetivo de dar una presentación completa.

a) Si $\alpha : G \times S^n \to S^n$ denota la acción de G en S^n, la cual es suave, entonces $\widetilde{X}(q) = (d/dt)_0 \, \alpha(\gamma(t), q) = d\alpha_{(g,q)}(X, 0_q)$, donde 0_q es el cero de T_qS^n. Por lo tanto, $\widetilde{X}$ está bien definida y es suave.

b) Sea $g \in G$. Los cálculos en (a) muestran que para cualquier $q \in S^n$ fijo, la correspondencia $X \in T_gG \mapsto \widetilde{X}(q) \in T_{g(q)}S^n$ es lineal, luego $\langle .,. \rangle_g$ es bilineal. A continuación verificamos que es definida positiva. Claramente, $\|X\| \geq 0$. Si $\|X\| = 0$, por continuidad de $\widetilde{X}$, el campo vectorial $q \mapsto \widehat{X}(q) = (dg^{-1})_q \widetilde{X}(q)$ debe ser idénticamente nulo. Si $X = dL_g(X_o)$, se puede comprobar fácilmente que

$$\widehat{X}(q) = (d/dt)_0 \exp(tX_o)(q)$$

para todo $q \in S^n$. Ya que $s \mapsto \exp(sX_o)$ es un grupo monoparamétrico de difeomorfismos de la esfera, éste es el flujo del campo vectorial $\widehat{X} = 0$. Por lo tanto, $\exp(sX_o)$ es constante y esto implica que X_o (y luego X) es cero, ya que la acción de G es efectiva. Finalmente, la métrica es suave, ya que dado un campo vectorial suave Y en G, la función $\|Y\|^2 : G \to \mathbb{R}$,

$$\|Y(g)\|^2 = \int_{S^n} \left|\widetilde{Y(g)}(q)\right|^2 dq = \int_{S^n} |(d\alpha)(Y(g), 0_q)|^2 \, d\mu(q),$$

es claramente suave.

La segunda afirmación es consecuencia de la caracterización variacional de las geodésicas en una variedad Riemanniana y del hecho que si γ es una curva suave en G, entonces $\|\gamma'(t)\|^2 = 2E(t)$ (ver (3.2)). $\square$

3.3 Subvariedades totalmente geodésicas

Si conseguimos isometrías de G y sus puntos fijos, la Proposición 1 nos ayudaría a encontrar geodésicas de G, o al menos, determinar que permanecen en cierta subvariedad. Una fuente de isometrías de G la obtenemos del siguiente resultado:

Proposición 7 *Sean f, g isometrías de S^n, no necesariamente en G, cuyos determinantes sean iguales, en particular, $fhg \in G$ para todo $h \in G$. Entonces*

a) *$f(h \cdot g(q)) = (fhg) \cdot q$ para todo $q \in S^n$.*

b) *$I_{f,g} : G \to G$, definido por $I_{f,g}(h) = fhg$, es una isometría de G con la métrica dada.*

Prueba. a) Como f es una isometría de S^n, f es lineal y preserva la norma de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} f(h \cdot g(q)) &= f\left(\frac{h(g(q))}{|h(g(q))|}\right) \\ &= \frac{f(h(g(q)))}{|h(g(q))|} \\ &= \frac{f(h(g(q)))}{|f(h(g(q)))|} \\ &= (fhg) \cdot q. \end{aligned}$$

b) Llamamos $I_{f,g} = F$, que está bien definida porque f y g fueron seleccionadas de tal manera que $fhg \in G$ para todo $h \in G$. Claramente F es inyectiva pues f y g tienen inversas, y sobreyectiva pues para todo $h \in G$, $h' = f^{-1}hg^{-1} \in G$ cumple que $F(h') = h$. Para ver que F es diferenciable recurrimos al siguiente diagrama conmutativo (notar que el grupo de isometrías de S^n es $O(n+1) \subset Gl(n+1,\mathbb{R})$):

$$\begin{array}{ccc} Gl(n+1,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\overline{F}} & Gl(n+1,\mathbb{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G & \xrightarrow{F} & G \end{array},$$

donde las flechas hacia arriba denotan la inclusión y $\overline{F}(h) = fhg$. Como G es una subvariedad incrustada, por el lema de factorización, F es diferenciable (y F^{-1} también pues es de la misma forma).

Sea $X \in T_hG$. Sabemos que $dF_h(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F(\gamma(t))$ con γ una curva en G tal que $\gamma(0) = h$ y $\dot{\gamma}(0) = X$. Por (3.4) tenemos que

$$\|dF_hX\|^2 = \int_{S^n} \left|\widetilde{Z}(q)\right|^2 d\mu(q), \tag{3.5}$$

donde dado $q \in S^n$, $Z(q) = dF_hX$. Así, por (3.3), $\widetilde{Z}(q) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \sigma(t) \cdot q$ con σ una curva en G tal que $\sigma(0) = F(h)$ y $\sigma'(0) = dF_hX$. En particular podemos tomar $\sigma = F \circ \gamma$ y entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}(q) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma(t) \cdot q = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t)) \cdot q = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t) \cdot g(q)) = df\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) \cdot g(q)\right),\end{aligned}$$

(hemos usado el primer apartado). Volcando esta expresión en la integral (3.5), realizando el cambio de variable $q' = g(q)$ (que por ser g una isometría de la esfera introduce un factor Jacobiano igual a uno) y considerando que f es una isometría en la esfera, obtenemos

$$\|dF_h X\|^2 = \int_{S^n} \left|\widetilde{X}(q')\right|^2 d\mu(q') = \|X\|^2 .$$

Así, F es una isometría. $\square$

Notación Si $g = f^{-1}$ denotamos por $I_f = I_{f,g}$ la conjugación por f. El contexto siempre permitirá distinguirla de la matriz identidad de orden f.

Corolario 8 *Si f es una isometría de S^n, entonces* $\operatorname{Fix}(I_f)$ *es una subvariedad totalmente geodésica de G.*

Prueba. Inmediata de la Proposición 1 y de que en este caso el conjunto de puntos fijos es un subgrupo de Lie, y por lo tanto una subvariedad (todas las componentes conexas tienen la misma dimensión). $\square$

A continuación encontraremos algunas subvariedades totalmente geodésicas de G.

Tomemos $n = 2m - 1$ y consideremos la inclusión canónica

$$T : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}^{2m\times 2m}, \qquad T(X + iY) = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

con $X, Y \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Sea $Gl_1(m, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{m\times m} \mid |\det A| = 1\}$.

La restricción de T a $Gl_1(m, \mathbb{C})$, que continuamos llamando T por abuso de notación, tiene su imagen incluida en $Sl(2m, \mathbb{R})$, ya que $\det_{\mathbb{R}}(TA) =$

$|\det_{\mathbb{C}} A|^2$ (ver [Ha], pág 16). Verifiquemos que T es un monomorfismo de grupos. Si $A = X + iY$, $B = Z + iW \in Gl_1(m, \mathbb{C})$, entonces $T(A) = T(B)$ implica que

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & -W \\ W & Z \end{pmatrix},$$

de lo cual se sigue inmediatamente que $X = Z$, $Y = W$, es decir $A = B$. Además

$$\begin{aligned} T(AB) &= T((X + iY)(Z + iW)) \\ &= T(XZ - YW + i(YZ + XW)) \\ &= \begin{pmatrix} XZ - YW & -YZ - XW \\ YZ + XW & XZ - YW \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & -W \\ W & Z \end{pmatrix} \\ &= T(A)\,T(B). \end{aligned}$$

Proposición 9 *El subgrupo $Gl_1(m, \mathbb{C})$ es una subvariedad totalmente geodésica de $Sl(2m, \mathbb{R})$.*

Prueba. Sea $f = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$. Veamos que $\mathrm{Fix}(I_f)$ es la imagen de T, donde T es la inclusión canónica definida en (3.6). Dada $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \in Sl(2m, \mathbb{R})$, calculamos

$$I_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -Z \\ -Y & X \end{pmatrix}.$$

Claramente, $I_f(A) = A$ si y sólo si $W = X$, $Z = -Y$, o sea, si y sólo si A está en la imagen de T. En consecuencia, ésta es una subvariedad totalmente geodésica de $Sl(2m, \mathbb{R})$ por el Corolario 8. $\square$

Ahora obtenemos otra subvariedad totalmente geodésica. Sea $n = 4m - 1$, sea $\mathbb{H}$ el álgebra de división de los cuaterniones y $\mathbb{H}^{m \times m} = \{A + Bi + Cj + Dk \mid$

A, B, C, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}\}$. Sea $S : \mathbb{H}^{m\times m} \to \mathbb{R}^{4m\times 4m}$ la transformación definida por

$$S(U+Vj) = \begin{pmatrix} T(U) & \widetilde{T}(V) \\ -\widetilde{T}(V) & T(U) \end{pmatrix}$$

(escribimos los elementos de $\mathbb{H}$ de la forma $u+vj$, con $u, v \in \mathbb{C}$), donde T es como arriba y $\widetilde{T}(C+Di) = \begin{pmatrix} C & D \\ D & -C \end{pmatrix}$. Observamos que S es inyectiva (pues T y $\widetilde{T}$ lo son), que $S(I_m) = I_{4m}$ y que $S(ZZ') = S(Z)\,S(Z')$ para todo $Z, Z' \in \mathbb{H}^{m\times m}$. En efecto, como

$$T\left(AA' - BB' - CC' - DD' + (AB' + BA' + CD' - DC')\,i\right)$$

es igual a

$$\begin{pmatrix} AA' - BB' - CC' - DD' & -AB' - BA' - CD' + DC' \\ BA' + AB' - DC' + CD' & AA' - BB' - CC' - DD' \end{pmatrix}$$

y

$$\widetilde{T}(AC' - BD' + CA' + DB') + (AD' + BC' - CB' + DA')i$$

es igual a

$$\begin{pmatrix} AC' - BD' + CA' + DB' & AD' + BC' - CB' + DA' \\ AD' + BC' - CB' + DA' & BD' - AC' - DB' - CA' \end{pmatrix}$$

tenemos que,

$$\begin{aligned}
S(ZZ') &= \\
&= S(AA' - BB' - CC' - DD' + (AB' + BA' + CD' - DC')\,i \\
&\quad +(AC' - BD' + CA' + DB')\,j + (AD' + BC' - CB' + DA')k) \\
&= \begin{pmatrix} A & -B & C & D \\ B & A & D & -C \\ -C & -D & A & -B \\ -D & C & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & -B' & C' & D' \\ B' & A' & D' & -C' \\ -C' & -D' & A' & -B' \\ -D' & C' & B' & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T(A+Bi) & \widetilde{T}(C+Di) \\ -\widetilde{T}(C+Di) & T(A+Bi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(A'+B'i) & \widetilde{T}(C'+D'i) \\ -\widetilde{T}(C'+D'i) & T(A'+B'i) \end{pmatrix} \\
&= S(Z)\,S(Z').
\end{aligned}$$

Definimos también el grupo

$$Gl\,(m,\mathbb{H}) = \{A \in \mathbb{H}^{m\times m} \mid \text{existe}\, B \in \mathbb{H}^{m\times m} \text{ con } AB = BA = I\,\}.$$

Por lo anterior, la restricción de S a $Gl\,(m,\mathbb{H})$ tiene su imagen contenida en $Gl\,(4m,\mathbb{R})$ y es un monomorfismo de grupos. Definimos también

$$Sl\,(m,\mathbb{H}) = \{A \in Gl\,(m,\mathbb{H}) \mid \det{}_{\mathbb{R}} S\,(A) = 1\}.$$

Proposición 10 *El subgrupo $Sl\,(m,\mathbb{H})$ es una subvariedad totalmente geodésica de $Sl(4m,\mathbb{R})$.*

Prueba. Veamos que la imagen de S restringida a $Sl\,(m,\mathbb{H})$ es igual a la intersección de $\operatorname{Fix}(I_f)$ con $\operatorname{Fix}(I_\alpha)$, donde

$$f = \begin{pmatrix} 0 & -I_{2m} \\ I_{2m} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\alpha = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto, por el cálculo en la prueba de la Proposición 9 (sólo que la matriz f es de un orden distinto), tenemos que los puntos fijos de I_f en $Sl\,(4m,\mathbb{R})$ son exactamente aquellos de la forma

$$A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

Veamos cuáles de estos están también en $\operatorname{Fix}(I_\alpha)$. Calculamos

$$\begin{aligned} I_\alpha \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -JXJ & -JYJ \\ JYJ & -JXJ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego $I_\alpha(A) = A$ si y sólo si X conmuta con J e Y anticonmuta con J (notar que $J^{-1} = -J$). Pero el conjunto de matrices que conmutan (respectivamente, anticonmutan) con J es la imagen de T (respectivamente, de $\overline{T}$). En consecuencia, la intersección de $\mathrm{Fix}(I_f)$ con $\mathrm{Fix}(I_\alpha)$ es la imagen de S, y resulta entonces una subvariedad totalmente geodésica de $Sl(4n, \mathbb{R})$ por el Corolario 8. □

Una *esfera máxima de* S^n es la intersección de S^n con un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$. Una *bandera de esferas máximas ortogonales en* S^n es un conjunto $\{S_i \mid i = 0, \ldots, l\}$ donde $S_i = S^n \cap V_i$ y V_i $(i = 0, \ldots, l)$ son subespacios ortogonales no triviales de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuya unión genera $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposición 11 *El conjunto de las transformaciones proyectivas de* S^n *que fijan una bandera de esferas máximas ortogonales es una subvariedad totalmente geodésica de* G. *En particular, aquellas que fijan los puntos de la base canónica de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *también lo son.*

Prueba. Podemos suponer que la bandera de esferas máximas está dada por la intersección de S^n con subespacios

$$V_i = \ \mathrm{span}\{e_k \mid k_i \leq k < k_{i+1}\}, \quad 0 \leq i \leq l$$

donde $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{l+1} = n + 1$ y $0 \leq l \leq n$.

Ahora para $1 \leq i \leq l$, sea

$$\begin{aligned} f_i &= \ \mathrm{diag}\,(-I_{k_i}, I_{n-k_i+1}) \\ H_i &= \mathrm{F}ix\,(I_{f_i})\,. \end{aligned}$$

Tenemos que H_i consiste de las matrices $\mathrm{diag}\,(X, Y)$, donde X es una matriz de orden k_i, Y es una matriz de orden $n - k_i + 1$ y $\det X \det Y = 1$, ya que dada $\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix} \in G$, entonces

$$I_{f_i}\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & -Z \\ -W & Y \end{pmatrix}.$$

Por el Corolario 8, H_i, el subgrupo de G que fija los subespacios

$$\text{span}\{e_0, \ldots, e_{k_i-1}\} \text{ y span}\{e_{k_i}, \ldots, e_n\}$$

es totalmente geodésico en G. Por lo tanto, $\cap_{i=1}^{l} H_i$, el subgrupo que fija la bandera de esferas máximas dada, es también totalmente geodésico. Esto se cumple en particular cuando $l = n$ y todas las esferas máximas en la bandera tienen dimensión cero. □

3.4 Una geodésica en G

Vamos a presentar en esta subsección una curva que resulta ser una reparametrización de una geodésica de G. Para ello necesitaremos el lema siguiente.

Sean D^1 el conjunto de todas las matrices diagonales en G, D el conjunto de los elementos de D^1 con coeficientes positivos, y

$$D_i = \{\text{diag}\,(a_0, \ldots, a_n) \in D \mid a_i = a_{i+1}\}.$$

Lema 12 *Los conjuntos D^1, D y D_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ son subvariedades totalmente geodésicas de G.*

Prueba. Como D^1 es el subgrupo de G que fija la base canónica, entonces es una subvariedad totalmente geodésica por la Proposición 11. Llamemos D_0^1 a la componente conexa de D^1 que contiene a la identidad y veamos que $D_0^1 = D$, con lo cual es una subvariedad totalmente geodésica. Dada $A \in D$, podemos unirla a I mediante la curva $\gamma(t) = (1-t)A + tI$ con $0 \leq t \leq 1$, cuya imagen está contenida en D, con lo cual D resulta un conexo que contiene a I. Por otra parte, supongamos que existe $A \in D_0^1$ con $A_{ii} < 0$ para algún i. Como $p_i : D^1 \to \mathbb{R}$ con $p_i(X) = X_{ii}$ es continua, $p_i(A) = A_{ii} < 0$ y $p_i(I) = 1 > 0$, al ser $p_i(D_0^1)$ conexo tendríamos un $X \in D_0^1$ tal que $p_i(X) = 0$, en particular $\det X = 0$. Esto es una contradicción pues $D_0^1 \subset D^1 \subset Sl(n+1, \mathbb{R})$.

Sean $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $f =$ diag (R, I_{n-1}). Por el Corolario 8 tenemos que $\mathrm{Fix}\,(I_f)$ es un subgrupo totalmente geodésico en G, y por lo tanto, su intersección con D, que coincide con D_0, es totalmente geodésico en G.

De la misma manera, usando $f_i =$ diag (I_i, R, I_{n-i-2}) $(i = 1, \ldots, n-1)$ se obtiene que D_{i+1} es totalmente geodésico en G. □

Teorema 13 *La curva $\alpha : (0, \infty) \to G$, $\alpha\,(t) = \mathrm{diag}\,(1/t^n, t, \ldots, t)$ en G admite una reparametrización por longitud de arco σ que es geodésica. Además σ tiene longitud finita y es inextendible. En particular, G no es una variedad riemanniana completa.*

Prueba. Se prueba fácilmente por inducción que $\alpha\,(0, \infty) = \cap_{i=1}^{n-1} D_i$. La primera afirmación es entonces consecuencia del lema anterior.

Para verificar la validez de la segunda afirmación, recordemos de (3.4) que

$$\|\dot{\alpha}\,(t)\|^2 = \int_{S^n} \left|\widetilde{X}_t\,(q)\right|^2 d\mu\,(q)\,,$$

donde $\widetilde{X}_t\,(q) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\,\gamma\,(s) \cdot q$, con $\gamma\,(0) = \alpha\,(t)$ y $\dot{\gamma}\,(0) = \dot{\alpha}\,(t)$. Pero entonces se puede tomar

$$\gamma\,(s) = \alpha\,(s+t) = \text{ diag } \left(1/\,(s+t)^n\,, (s+t)\, I_n\right).$$

Sea $q \in S^n$ con $q = (x_0, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma\,(s) \cdot q &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{(s+t)^{2n}} + (s+t)^2\,|p|^2}} \left(\frac{x_0}{(s+t)^n}, (s+t)\,x\right) \\ &= \left(x_0, (s+t)^{n+1}\,x\right) / \sqrt{x_0^2 + (s+t)^{2n+2}\,|x|^2}. \end{aligned}$$

De allí, derivando con respecto a s y tomando norma cuadrada,

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_t\,(q) &= t^n\,(n+1)\,x_0\,\left(-t^{n+1}\,|x|^2\,, x_0 x\right) / \left(x_0^2 + t^{2n+2}\,|x|^2\right)^{3/2}, \\ \left|\widetilde{X}_t\,(q)\right|^2 &= (n+1)^2\,x_0^2\,t^{2n}\,|x|^2 / \left(x_0^2 + t^{2n+2}\,|x|^2\right)^2. \end{aligned}$$

Si ahora integramos, tenemos que

$$\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \int_{S^n} \left|\widetilde{X}_t(q)\right|^2 d\mu(q) = \int_{S^n} \frac{(n+1)^2 x_0^2 t^{2n} |x|^2}{\left(x_0^2 + t^{2n+2}|x|^2\right)^2} d\mu(q). \tag{3.7}$$

Realizamos en la integral el cambio de variables definido por

$$F(\theta, y) = (\operatorname{sen}\theta, y\cos\theta) = (x_0, x),$$

con $(\theta, y) \in (-\pi/2, \pi/2) \times S^{n-1}$. Tomando una base

$$\{\frac{\partial}{\partial\theta}, (0, v_1), \ldots, (0, v_{n-1})\}$$

de $T_{(\theta,y)}((-\pi/2, \pi/2) \times S^{n-1})$, tenemos que

$$\begin{aligned} dF_{(\theta,y)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(\theta,y)}, 0\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 F(\theta+t, y) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\operatorname{sen}(\theta+t), y\cos(\theta+t)) \\ &= (\cos\theta, -y\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

y que si $\alpha_i : \mathbb{R} \to S^{n-1}$ cumple que $\alpha_i(0) = y$ y $\alpha_i{}'(0) = v_i$, entonces

$$\begin{aligned} dF_{(\theta,y)}(0, v_i) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 F(\theta, \alpha_i(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\operatorname{sen}\theta, \alpha_i(t)\cos\theta) \\ &= (0, \alpha_i'(0)\cos\theta) \\ &= (0, v_i\cos\theta) \\ &= \cos\theta\,(0, v_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si tomamos en $T_{F(\theta,y)}S^{n-1}$ la base ortonormal

$$\{(\cos\theta, -y\operatorname{sen}\theta), (0, v_1), \ldots, (0, v_{n-1})\},$$

tendremos que la matriz de la $dF_{(\theta,y)}$ respecto de estas bases ortonormales resulta ser $\operatorname{diag}(1,(\cos\theta)\, I_{n-1})$ y su determinante es $\cos^{n-1}\theta$. Entonces, por (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\dot{\alpha}(t)\|^2 &= \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{S^{n-1}} \frac{(n+1)^2\, t^{2n} \operatorname{sen}^2\theta\, |y\cos\theta|^2}{\left(\operatorname{sen}^2\theta + t^{2n+2}\,|y\cos\theta|^2\right)^2}\cos^{n-1}\theta\, d\nu(y)\; d\theta \\
&= 2(n+1)^2 \operatorname{vol}\left(S^{n-1}\right)\int_0^{\pi/2} \frac{t^{2n}\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta}{\left(\operatorname{sen}^2\theta + t^{2n+2}\cos^2\theta\right)^2}\, d\theta \\
&\leq (n+1)^2 \operatorname{vol}\left(S^{n-1}\right)\int_0^{\pi/2} \frac{t^{2n} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\left(1-\cos^2\theta + t^{2n+2}\cos^2\theta\right)^2}\, d\theta.
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos $u = \cos^2\theta$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\dot{\alpha}(t)\|^2 &\leq (n+1)^2 \operatorname{vol}\left(S^{n-1}\right)\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\left(\left(t^{2n+2}-1\right)u+1\right)^2}\, du \\
&= (n+1)^2 \operatorname{vol}\left(S^{n-1}\right)/t^2.
\end{aligned}$$

Como $\int_1^\infty (1/t^2)\, dt < \infty$, la energía cinética $\int_1^\infty \|\dot{\alpha}(t)\|^2\, dt < \infty$. Además sabemos que la longitud al cuadrado es menor o igual que la energía, con lo cual resulta que la curva $\alpha(t)$ con $t \in [1,\infty)$ tiene longitud finita. La última afirmación del teorema se deduce del hecho de que claramente $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)$ no existe. $\square$

3.5 Movimientos libres proyectivos dentro del grupo de isometrías de la esfera

Sean $K = SO(n+1)$, $\mathfrak{k} = so(n+1)$ el álgebra de Lie de K y $\mathfrak{p}$ el subespacio de las matrices simétricas en $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G. Resulta $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ una descomposición de Cartan, es decir se cumple $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ y $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

Teorema 14 a) *$K \times K$ actúa a izquierda en G, $(h,k) \cdot g = hgk^{-1}$, por isometrías de G. En particular, la métrica en K inducida de G es bi-invariante y entonces sus geodésicas por la identidad son subgrupos mono-paramétricos.*

b) *Para $Z \in \mathfrak{k}$, la geodésica $\sigma(t) = \exp(tZ)$ de K por la identidad es también una geodésica de G si y sólo si $Z = \lambda J$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y $J \in \mathfrak{k}$ con $J^2 = -I$. En particular, si n es par ninguna geodésica por la identidad en K (excepto la curva constante) es una geodésica de G.*

Observación La parte (b) del Teorema 14 contrasta fuertemente con el caso conforme estudiado en [S2], donde se prueba que K es totalmente geodésica en el grupo de las transformaciones directamente conformes de S^n provisto de la métrica dada por la energía cinética.

Para probar este teorema necesitamos mostrar antes una proposición y un lema.

El enunciado de la siguiente proposición es análogo al dado para el caso conforme en [S2], pero la prueba es diferente, por lo que la incluimos.

Proposición 15 *Con respecto a la métrica en G definida en (3.4), $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{p} \rangle = 0$.*

Prueba. Para todo $Y \in \mathfrak{g} \cong T_eG$ y $q \in S^n$ tenemos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tY} q = Yq$$

y

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left| e^{tY} q \right| = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left\langle e^{tY} q, e^{tY} q \right\rangle^{1/2} = \langle Yq, q \rangle ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}(q) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tY} \cdot q \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tY} q / \left| e^{tY} q \right| \\ &= Yq - \langle Yq, q \rangle q. \end{aligned}$$

Sean ahora $Z \in \mathfrak{k}$, $X \in \mathfrak{p}$. Como Z es antisimétrica,

$$\langle Zq, q\rangle = \left\langle -Z^t q, q\right\rangle = \langle -q, Zq\rangle\,,$$

con lo cual resulta $\langle Zq, q\rangle = 0$.

Y calculamos

$$\begin{aligned}
\langle Z, X\rangle &= \int_{S^n} \left\langle \widetilde{Z}\,(q)\,, \widetilde{X}\,(q)\right\rangle \\
&= \int_{S^n} \langle Zq - \langle Zq, q\rangle\, q, Xq - \langle Xq, q\rangle\, q\rangle \\
&= \int_{S^n} \langle Zq, Xq - \langle Xq, q\rangle\, q\rangle \\
&= \int_{S^n} \langle Zq, Xq\rangle - \int_{S^n} \langle Zq, \langle Xq, q\rangle\, q\rangle \\
&= \int_{S^n} \langle Zq, Xq\rangle - \int_{S^n} \langle Xq, q\rangle \langle Zq, q\rangle \\
&= \int_{S^n} \langle Zq, Xq\rangle \\
&= \sum_{i,j,\ell} Z_{ij} X_{i\ell} \int_{S^n} x_j x_\ell
\end{aligned}$$

si $q = (x_0, \ldots, x_n)$.

Ahora bien, $\int_{S^n} x_j x_\ell = 0$ si $j \neq \ell$, ya que $x_j x_\ell$ es una función impar en S^n con respecto a la reflexión que fija $e_j^\perp$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle Z, X\rangle &= \sum_{i,j} Z_{ij} X_{ij} \int_{S^n} x_j^2 \\
&= \sum_{i,j} Z_{ij} X_{ji}^t \int_{S^n} x_0^2 \\
&= \operatorname{tr}\left(ZX^t\right) \int_{S^n} x_0^2,
\end{aligned}$$

que se anula pues $X^t = X$ y $Z + Z^t = 0$. Esto implica que $\operatorname{tr}(ZX^t) = 0$, pues si $i = j$, $Z_{ii} = 0$ por ser Z antisimétrica, y si $i \neq j$, $Z_{ij} X_{ji}^t = -Z_{ji} X_{ij}^t$ $\square$

Lema 16 *Sea $f(t,s)$ una función de un entorno de 0 en $\mathbb{R}^2$ en un espacio vectorial, suave, nunca nula, tal que $\langle f(0), f_s(0)\rangle = 0$ y $|f(0)| = 1$, y sea $h = f/|f|$. Entonces*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 |h_s(t,0)|^2 = 2\langle f_{s,t}(0), f_s(0)\rangle - 2\langle f_t(0), f(0)\rangle |f_s(0)|^2, \tag{3.8}$$

donde los subíndices s,t denotan derivadas parciales respecto de s,t.

Prueba. Como

$$h_s = \left(|f|^2 f_s - \langle f_s, f\rangle f\right) / |f|^3,$$

resulta que

$$\begin{aligned} |h_s|^2 &= \left\langle \frac{f_s}{|f|}, \frac{f_s}{|f|} \right\rangle - 2\left\langle \frac{f_s}{|f|}, \frac{\langle f_s, f\rangle f}{|f|^3} \right\rangle + \left\langle \frac{\langle f_s, f\rangle f}{|f|^3}, \frac{\langle f_s, f\rangle f}{|f|^3} \right\rangle \\ &= A - B, \end{aligned}$$

donde $A = |f_s|^2 / |f|^2$ y $B = \left(\langle f_s, f\rangle / |f|^2\right)^2$. Usando las condiciones para f, se muestra que $(d/dt)|_0 A(t,0)$ es igual al miembro de la derecha de (3.8) y $(d/dt)|_0 B(t,0) = 0$. Con lo cual el lema está probado. □

Prueba del Teorema 14. La prueba de (a) se deduce inmediatamente de la Proposición 7. Probamos ahora (b). La prueba no será simple ya que la métrica en G no es invariante. Denotemos $\gamma_Z(t) = \exp(tZ)$. Por (a), escribiendo $\gamma_Z(t+t_o) = \gamma_Z(t_o)\gamma_Z(t)$, tenemos que γ_Z es una geodésica en G si y solamente si $(\nabla_Z Z)_e = 0$, o lo que es equivalente, $\langle (\nabla_Z Z)_e, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Por la fórmula para la conexión de Levi-Civita resulta que

$$2\langle (\nabla_Z Z)_e, Y_e\rangle = 2Z_e\langle Y, Z\rangle - 2\langle [Z,Y]_e, Z_e\rangle - Y_e\|Z\|^2. \tag{3.9}$$

Ahora bien, como $K \times K$ actúa por isometrías en G por (a), tenemos

$$\langle Y, Z\rangle_{\exp(tZ)} = \left\langle dL_{\exp(tZ)}Y_e, dL_{\exp(tZ)}Z_e\right\rangle = \langle Y_e, Z_e\rangle,$$

para todo t. Luego el primer término del miembro derecho de la ecuación (3.9) es cero.

Veamos ahora que $\langle [Z,Y]_e , Z_e\rangle = 0$. Para esto escribimos $Y = Y_{\mathfrak{k}} + Y_{\mathfrak{p}}$, con $Y_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}$ y $Y_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\langle [Z,Y]_e , Z_e\rangle_g &= \left\langle [Z, Y_{\mathfrak{k}} + Y_{\mathfrak{p}}]_e , Z_e\right\rangle_g \\ &= \langle [Z, Y_{\mathfrak{k}}]_e , Z_e\rangle_g + \left\langle [Z, Y_{\mathfrak{p}}]_e , Z_e\right\rangle_g .\end{aligned}$$

Como $Z \in \mathfrak{k}$ y $Y_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$, $[Z, Y_{\mathfrak{p}}] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es una descomposición de Cartan), resulta por la Proposición 15 que $\left\langle [Z, Y_{\mathfrak{p}}]_e , Z_e\right\rangle = 0$.

Por otra parte por ser la métrica bi-invariante en K, $\langle [Z, Y_{\mathfrak{k}}]_e , Z_e\rangle$ y $Y_{\mathfrak{k}_e} \|Z\|^2$ ambos se anulan. En consecuencia, por (3.9), γ_Z es una geodésica en G si y sólo si $X_e \|Z\|^2 = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}$.

Llamemos $U_t = Z(\exp(tX)) = dL_{\exp(tX)}(Z_e)$. Fijemos por ahora $q \in S^n$ y sea $f(t,s) = \exp(tX)\exp(sZ)\, q$ y $h = f/|f|$. Tenemos que $f(0) = q$, $f_t(0) = Xq$, $f_s(0) = Zq$ y $f_{s,t}(0) = XZq$. Como Z es antisimétrica, f satisface las hipótesis del Lema 16 y entonces tenemos por (3.8) que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left|\frac{\partial h}{\partial s}(t,0)\right|^2 = 2\langle XZq, Zq\rangle - 2\langle Xq, q\rangle\, |Zq|^2 .$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}X_e\left(\|Z\|^2\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \|Z(\exp(tX))\|^2 \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{S^n} \left|\widetilde{U}_t(q)\right|^2 d\mu(q) .\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\widetilde{U}_t(q) = \frac{\partial h}{\partial s}(t,0)$ (tomamos $\gamma_t(s) = e^{tX}e^{sZ}$ en (3.3)), tenemos que

$$X_e\left(\|Z\|^2\right) = 2\int_{S^n} \langle XZq, Zq\rangle - \langle Xq, q\rangle\, |Zq|^2 \, d\mu(q) . \tag{3.10}$$

Al ser Z antisimétrica existe una base ortonormal respecto de la cual tendrá la forma

$$\operatorname{diag}(a_1 J_o, a_2 J_o, \ldots, a_k J_o, 0, \ldots, 0), \qquad J_o = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ver por ejemplo [Li, pág. 199]).

Supongamos primero que $Z = \operatorname{diag}(aJ_o, \pm aJ_o, \ldots, \pm aJ_o)$, en cuyo caso, previa multiplicación por un escalar, podemos tomar Z de tal forma que cumpla $Z^2 = -\operatorname{id}$ y así Z resulta ortogonal. Entonces podemos distribuir la integral y realizar el cambio de variables $p = Zq$ en el primer término, con factor Jacobiano uno. Luego $X_e\left(\|Z\|^2\right) = 0$, ya que $|Zq| = 1$.

Ahora supongamos que $Z^2 \neq -\lambda^2 \operatorname{id}$ para todo λ. Después de conjugar por un elemento de K y multiplicar por una constante adecuada, podemos suponer que

$$Z = Z_0 = \operatorname{diag}(J_o, 0, B_0) \quad \text{ó} \quad Z = Z_1 = \operatorname{diag}(J_o, aJ_o, B_1),$$

con $B_0 \in so_{n-2}$, $B_1 \in so_{n-3}$ y $|a| \neq 1$ (el último caso sólo si $n \geq 3$). Sea $X = \operatorname{diag}(0, 1, -1, 0_{n-2}) \in \mathfrak{p}$. Primero consideramos el caso en que $Z = Z_0$ y mostramos que $X_e \|Z_0\|^2 \neq 0$, y entonces γ_{Z_0} no es una geodésica en G. Si $q = (x_0, x_1, x_2, x)$, realizamos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \langle XZ_0q, Z_0q\rangle &= x_0^2, \\ \langle Xq, q\rangle &= x_1^2 - x_2^2, \\ |Z_0q|^2 &= x_0^2 + x_1^2 + |B_0x|^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, el integrando de (3.10) es igual a

$$x_0^2 - \left(x_1^2 - x_2^2\right) x_1^2 - \left(x_1^2 - x_2^2\right)\left(x_0^2 + |B_0x|^2\right),$$

cuyo último término es una función impar en S^n con respecto a la reflexión que fija el hiperplano $x_1 = x_2$. Luego su integral sobre la esfera es cero y en consecuencia

$$\begin{aligned} X_e \|Z_0\|^2 &= 2\int_{S^n} x_0^2 - x_1^4 + x_2^2x_1^2 \\ &= 2\int_{S^n} x_0^2\left(1 - x_0^2 + x_1^2\right) > 0, \end{aligned}$$

ya que claramente $\int_{S^n} x_1^4 = \int_{S^n} x_0^4$ y $\int_{S^n} x_2^2x_1^2 = \int_{S^n} x_0^2x_1^2$, y también $|x_0| \leq 1$.

Un cálculo similar muestra que

$$X_e \left\|Z_1\right\|^2 = \left(1 - a^2\right) X_e \left\|Z_0\right\|^2 ,$$

que no es nulo pues $|a| \neq 1$. $\square$

CAPITULO 4

Conclusiones y líneas futuras de investigación

Resumiendo los resultados y comparando con lo realizado para movimientos conformes en [S2], podemos decir lo siguiente:

Definiendo la métrica apropiada en $G = Sl(n+1, \mathbb{R})$, (la dada por la energía cinética) obtuvimos que la curva $\alpha : (0, \infty) \to G$, $\alpha(t) = \mathrm{diag}(1/t^n, t, \ldots, t)$ admite una reparametrización por longitud de arco σ que es geodésica, lo cual nos da, salvo reparametrización, un movimiento proyectivo libre de fuerza en S^n. Además σ tiene longitud finita y es inextendible, en particular, G no es una variedad riemanniana completa, al igual que en el caso conforme.

Por otra parte mostramos que tomando $n = 2m-1$, el subgrupo $Gl_1(m, \mathbb{C})$ es una subvariedad totalmente geodésica de $Sl(2m, \mathbb{R})$ y para $n = 4m-1$, el subgrupo $Sl(m, \mathbb{H})$ es una subvariedad totalmente geodésica de $Sl(4m, \mathbb{R})$.

Finalmente al estudiar el subgrupo $K = SO(n+1)$ vemos que no es una subvariedad totalmente geodésica, lo cual contrasta con el caso conforme. Más aún, para n par, ninguna geodésica por la identidad en K (excepto la curva constante) es una geodésica de G.

En cuanto a propuestas para futuras investigaciones, sería interesante estudiar con más profundidad la geometría de los grupos $SO_o(n, 1)$ y $Sl(n, \mathbb{R})$ con las métricas dadas por la energía cinética asociadas las respectivas acciones naturales en S^{n-1}, por ejemplo calcular la curvatura seccional, o probar si en alguno de los casos se trata de un producto alabeado.

Por otro lado, los grupos de Lie no compactos $G = O(n,n)$, $U(n,n)$, $Sp(n,n)$ tienen acciones naturales en los grupos de Lie compactos clásicos $K = O(n)$, $U(n)$ y $Sp(n)$, respectivamente. Si consideramos en estos últimos la métrica riemanniana canónica dada por el opuesto de la forma de Killing, sería de interés hallar geodésicas libres de fuerzas en G con la métrica dada por la energía cinética asociada a las acciones mencionadas.

Bibliografía

[Ar] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Math., Vol. 60, Springer, Berlin, 1989.

[Be] M. Berger, *Geometry I*, Springer, Berlin, 1994.

[Do] I. Dotti, *Tópicos de Geometría Riemanniana Homogénea*, Matemática, Serie C, Fa.M.A.F., U.N.C., 1987.

[Ol] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, CRC Research Notes in Mathematics 434, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2003.

[doC] M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[DoZi] P. Dombrowski, J. Zitterbarth, *On the planetary motion in the 3-dimensional standard spaces* M_k^3 *of constant curvature* $k \in \mathbb{R}$, Demonstratio Math. 24 (3-4) (1991) 375–458.

[Ha] F. Harvey, *Spinors and calibrations*, Perspectives in Mathematics 9, Academic Press, Boston, 1990.

[KNI] S. Kobayashi, S. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol I, Interscience Publishers, 1963.

[KNII] S. Kobayashi, S. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol II, Interscience Publishers, 1963.

[Li] E. Lages Lima, *Álgebra Linear*, Matemática Universitaria, Brasil, 1998.

[Ma] V.S. Matveev, *Geometric explanation of the Beltrami theorem*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 3 (2006) 623-629.

[Na] P.T. Nagy, *Dynamical invariants of rigid motions on the hyperbolic plane*, Geom. Dedicata 37 (2) (1991) 125-139.

[S1] M. Salvai, *On the dynamics of a rigid body in the hyperbolic space*, J. Geom. Phys. 36 (2000) 126-139.

[S2] M. Salvai, *Force free conformal motions of the sphere*, Differ. Geom. Appl. 16, No.3, 285-292 (2002).

[Wa] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1983.

[Zi] J. Zitterbarth, *Some remarks on the motion of a rigid body in a space of constant curvature without external forces*, Demonstratio Math. 25 (3-4) (1991) 465-494.

Agradecimientos

Desde el punto de vista de la ejecución de este trabajo de tesis, mis principales pilares fueron Marcos Salvai y Adrián Will. El primero mostró toda su generosidad conmigo al compartir sus ideas y conocimiento, con una transparencia y sencillez que me hicieron sentir extremadamente cómoda al trabajar con él. El segundo fue mi apoyo local permanente desde el comienzo del cursado de la maestría y su compañía se hizo sentir en todo momento. Les quedo profundamente agradecida. Las tres gestoras de esta maestría María Luisa Oliver, Ana María Sfer e Isabel Dotti sin lugar a dudas merecen mi reconocimiento por las horas dedicadas a sacar adelante este proyecto y su permanente apoyo a mi persona. Desde su representación en postgrado Silvia Busab de Abdelnur ha sido una constante guía.

Cronológicamente mis padres fueron los primeros e incansables impulsores hacia mi realización integral. El ejemplo de mi padre es algo que nunca me dejará de alumbrar el camino, en lo humano y en lo profesional. La fuerza y empuje de mi madre me acompañaron más de una vez. Mi amor de hija para ellos. Gracias a mis hermanos por su permanente afecto y reconocimiento a mi esfuerzo.

Mi cobijo constante en los últimos dieciocho años es sin duda mi hermosa familia. Mario, mi marido que me reemplazó tantas veces con tanta generosidad. Mis dos hijos Marcos y Julia. Los tres son los que han sufrido los embates de mis crisis profesionales y han sabido darme el cariño tan necesario para aceptar mis limitaciones y ayudarme a ver mis cualidades. Son mi resultado más preciado y mi contención permanente. A mis queridos suegros les debo el constante aliento, y apoyo en cada una de mis ausencias por viajes o estudio.

En mi camino a través de esa enorme extensión que es la Matemática, es inmensa la lista de gente que aportó algo a favor de mi crecimiento. Durante mi carrera de Licenciatura Clelia Baldres me acompañó en los primeros años. Marta Lagarrigue me condujo en mis últimos años y me dió todas las oportunidades para poder ingresar a la vida universitaria junto a la Sra. de Battig. Mi compañera, actual colega y entrañable amiga Fanny Kaliman. Mis compañeras de cátedra María Teresa Pacios, Helena Ramasco, Amelia Barrionuevo y Silvina Gómez me dieron el espacio y tiempo necesario para perfeccionarme apoyándome tanto laboralmente como humanamente. Leticia Barchini me mostró que se podía seguir más allá de una licenciatura. Roberto Cautelier puso a mi disposición una beca para que concretara esa aspiración, la cual en su momento decidí no aprovechar por cuestiones personales. María Luisa Oliver me posibilitó realizar una pasantía en Córdoba. Cristian Sánchez y Rubén Spies, en distintas etapas sembraron una semilla en Tucumán que permitió abrir una puerta hacia la mejora del departamento de Matemática. Leandro Cagliero, Esther Galina, Jorge Lauret, Estela López, Rubén Spies, Paulo Tirao y Adrián Will, mis profesores y amigos en la maestría, gracias por el tiempo que me han dedicado. Mis compañeras de maestría Isabel Lomas, Cecilia Larrán, Adriana Ramos, Nadina Rojas, Silvina Gómez con las que he compartido mucho y estamos llegando a la meta juntas gracias a que más de una vez me levantaron el ánimo.

Gracias a todos ellos por acompañarme en el camino. Valoro profundamente el conocimiento adquirido, la experiencia y el enriquecimiento como ser humano que pueda haber alcanzado.

Agradezco también a la Universidad Nacional de Tucumán y a la Universidad Nacional de Córdoba los recursos que pusieron a disposición para concretar esta Maestría en Matemática. Espero volcar los logros obtenidos en mis alumnos y así aportar positivamente a la formación de buenos profesionales.