



Universidad Nacional de Tucumán
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Departamento de Matemática

Tesis para obtener al grado académico de Magister en Matemática

**Cohomología de nilradicales de
subálgebras parabólicas**

Isabel del Valle Lomas

Director: Dr. Paulo Andrés Tirao
Directora Asociada: Dra. Amelia del Valle Barrionuevo

2014

Resumen

El teorema de Kostant describe la cohomología del nilradical de cada subálgebra parabólica de un álgebra de Lie semisimple compleja utilizando la teoría de representaciones. Describe su descomposición como suma de representaciones irreducibles del factor de Levi de la parabólica. Esta suma está parametrizada por un cierto subconjunto, definido combinatoriamente, de su grupo de Weyl. Esta descripción no permite calcular la dimensión de la cohomología de manera directa.

Las subálgebras parabólicas de un álgebra semisimple de rango n dada están definidas por subconjuntos de raíces simples. Dado un subconjunto de raíces simples dado de rango n éste se identifica naturalmente con un subconjunto de raíces simples de rango m para todo $m \geq n$. Así ese subconjunto dado da lugar a una familia numerable de subálgebras parabólicas. El problema general es entender como evoluciona la dimensión de la cohomología de los nilradicales de estas familias y en particular entender su comportamiento asintótico.

En este trabajo consideramos los nilradicales de las subálgebras parabólicas de A_n parametrizadas por subconjuntos π_0 de dos raíces simples consecutivas, para todo n .

Estudiamos diversos casos.

(1) $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ y en correspondencia con este, por similitudes encontradas al desarrollar el trabajo, estudiamos también el álgebra de Heisenberg,

(2) $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$,

cuya cohomología ya fue calculada de manera independiente a la descripción dada por Kostant.

Además estudiamos también los nilradicales determinados por

(3) $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ y

(4) $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$.

El trabajo se desarrolla en 6 capítulos. Los tres primeros contienen los conceptos necesarios para comprender el tema. En particular el segundo contiene la definición de cohomología de álgebras de Lie, los conceptos fundamentales y algunos ejemplos.

En el Capítulo 4 realizamos una descripción exhaustiva y detallada de los espacios de cohomología a estudiar; describimos su descomposición a través de los vectores de peso máximo y presentamos diversas fórmulas para el cálculo de su dimensión. Utilizando los resultados pudimos encontrar una fórmula cerrada para la dimensión de la cohomología en el caso (1). Para el caso (3) correspondiente a $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, caso mucho más difícil que el anterior, proponemos una fórmula no cerrada expresada como una suma combinatoria. Dedicamos una sección del Capítulo 4 al cálculo con computadora de estas dimensiones. Vale decir que son astronómicas.

El capítulo 5 está dedicado al estudio del comportamiento asintótico para los distintos casos expuestos en el Capítulo 4. Utilizando la fórmula de Stirling para la aproximación del factorial se describe el comportamiento asintótico de la dimensión de la cohomología para los casos (1) y (2).

Para el caso (3), en el que las fórmulas para determinar la cohomología total no son cerradas, el estudio del comportamiento asintótico se realizó a partir del análisis de estas fórmulas y de los datos experimentales obtenidos. Encontramos aproximaciones a partir

de las cuales conjeturamos el comportamiento asintótico buscado. Para el caso (4) los resultados buscados se obtienen a partir de las similitudes con el caso (3).

El Capítulo 6 es una breve exposición de los algoritmos computacionales utilizados, para comprender la descripción realizada por Kostant y para obtener los resultados que permitieron elaborar las conjeturas presentadas.

Índice general

Resumen	1
Introducción	5
Capítulo 1. Álgebras de Lie	7
1. Definiciones y ejemplos	7
2. Álgebras solubles y nilpotentes	9
3. Los Teoremas de Ado, Engel y Lie	10
4. Álgebras de Lie simples y semisimples	11
4.1. Espacios de peso generalizados	12
4.2. Subálgebras de Cartan	12
4.3. Raíces	13
4.4. Positividad y orden simple	15
5. Grupo de Weyl	18
6. Subálgebras parabólicas	20
7. Data para las álgebras simples clásicas	22
Capítulo 2. Cohomología de álgebras de Lie	25
1. Cocadena compleja	25
2. Espacios de cohomología	28
Capítulo 3. Representaciones de álgebras semisimples. Teorema de Kostant	33
1. Pesos	33
2. Teorema de Peso Máximo	33
3. Cohomología de nilradicales. Teorema de Kostant	34
Capítulo 4. Cohomología de nilradicales de subálgebras parabólicas de tipo A_n	37
1. Subálgebra parabólica \mathfrak{p} con nilradical 2-pasos nilpotente.	37
2. Cohomología trivial del nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica.	42
2.1. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$	42
2.2. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$	46
2.3. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$.	59
2.4. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$	66
2.5. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$	80
3. Conclusiones	90
3.1. Caso 1: $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ y Caso 2: $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$	90
3.2. Caso 3: $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ y Caso 4: $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$	90
4. Tablas de Cohomología Total, Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$	91

Capítulo 5. Comportamiento asintótico de la cohomología total	101
1. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$.	
Para el Caso 1, $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$	101
2. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$.	
Para el Caso 2, $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$	103
3. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$.	
Para el Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$	103
3.1. Cota superior	106
3.2. Cota inferior	110
3.3. Conjetura	115
3.4. Cálculos aproximados utilizando programas de Maple	118
3.5. Cuadro comparativo	120
4. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$.	
Para el Caso 4, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$	121
Capítulo 6. Programas y experimentación con Maple	123
1. El conjunto W^1	123
1.1. Dimensión del nilradical	123
1.2. Cardinal del conjunto W^1	123
1.3. Elementos del conjunto W^1 para $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_{h+1} - e_{h+2}\}$	124
2. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$	124
2.1. Conjunto W^1	125
2.2. Grado cohomológico de cada elemento de W^1	126
2.3. Dimensión de cada representación irreducible	126
2.4. Cohomología total	127
2.5. Cálculo aproximado de Cohomología total	127
Bibliografía	129

Introducción

La teoría de Lie es un área de la matemática en continuo estudio, que ocupa un lugar destacado en álgebra, geometría y en otras ramas de las ciencias particularmente en física. Las álgebras de Lie y sus generalizaciones constituyen una muy importante línea actual de investigación.

Este trabajo se enmarca en la teoría de álgebras de Lie complejas de dimensión finita. Más precisamente en la clase de álgebras de Lie nilpotentes, clase ésta muy diferente de la clase de álgebras de Lie semisimples.

La cohomología de álgebras de Lie es un invariante que por un lado es, en principio, calculable y por el otro codifica elementos estructurales a un nivel que hace de la cohomología un invariante destacado. Es relevante en la teoría de representaciones, en la teoría de deformaciones, en geometría y otras aplicaciones.

A pesar de ser un invariante definido por el álgebra lineal y que en algunos casos se puede calcular, es muy poco lo que se sabe en general. No hay métodos generales para describirla ni entenderla. El cálculo de la cohomología de un álgebra de Lie es un problema muy amplio aún sin resolver. Hay muchísimos problemas sin respuesta sobre la cohomología de álgebras de Lie o relacionados con ella.

Cuando el álgebra es semisimple y de dimensión finita, el problema está muy entendido, la cohomología es cero para toda representación irreducible finita no trivial y la cohomología con coeficientes triviales es el espacio de invariantes en el álgebra exterior de la representación coadjunta. Ahora, para las álgebras solubles y nilpotentes es muy poco lo que se conoce, la mayoría de los resultados encontrados sólo cubren casos particulares. Un caso excepcional es el famoso resultado de Kostant de 1961, que describe la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de $H^*(\mathfrak{n}, V)$, donde \mathfrak{n} es el nilradical de una subálgebra parabólica de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} , \mathfrak{g}_1 es un factor de Levi y V es una representación irreducible de dimensión finita de \mathfrak{g} , restringida a \mathfrak{n} . A pesar de la generalidad del teorema de Kostant, no es inmediato obtener descripciones explícitas en casos particulares. Tampoco es posible determinar la dimensión de los espacios de cohomología descriptos.

En este trabajo estudiamos el comportamiento asintótico de la dimensión de la cohomología total de sucesiones de nilradicales de subálgebras parabólicas de álgebras de Lie semisimples complejas, la teoría de representaciones constituye una herramienta fundamental, pues permite describir la cohomología a partir de subconjuntos del grupo Weyl.

Los casos estudiados corresponden todos a nilradicales dos pasos nilpotentes de subálgebras parabólicas de álgebras simples de tipo A_n y toda álgebra parabólica dos pasos nilpotente está parametrizada por subconjuntos de dos raíces simples.

Álgebras de Lie

En este capítulo resumimos los conceptos básicos de la teoría de álgebras de Lie y enunciamos resultados utilizados en este trabajo, poniendo especial énfasis en las álgebras de Lie simples y semisimples. Para mayores referencias, podemos consultar [1],[3],[4] entre otros.

1. Definiciones y ejemplos

DEFINICIÓN 1.1. *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un espacio vectorial en el que se define una operación, llamada corchete*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que satisface los siguientes axiomas:

- (a) es bilineal,
- (b) es antisimétrica y
- (c) verifica la identidad de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0, \text{ para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Un subespacio vectorial \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} si la operación corchete es cerrada en \mathfrak{h} , es decir $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Si un subespacio vectorial \mathfrak{h} cumple que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ se dice que \mathfrak{h} es ideal de \mathfrak{g} . Es claro que todo ideal de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es subálgebra de Lie.

Además, decimos que un álgebra de Lie \mathfrak{g} es **abeliana** si el corchete es nulo, es decir si $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

EJEMPLOS 1.2.

1. El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ es el espacio de los endomorfismos en V , con la operación corchete definida de la siguiente manera

$$\forall f, g \in \mathfrak{gl}(V) \quad [f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

2. El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ es el espacio de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en el cuerpo \mathbb{K} y la operación corchete es:

$$\forall X, Y \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad [X, Y] = XY - YX.$$

3. Los siguientes son ejemplos de subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : \text{tr}(X) = 0\}$.
- $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0\}$, el espacio de las matrices antisimétricas.

- \mathfrak{d} , el espacio de las matrices diagonales, que es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.
- \mathfrak{t}_n , el espacio de las matrices triangulares superiores.
- \mathfrak{t}_n^+ , el espacio de las matrices triangulares superiores estrictas.

DEFINICIÓN 1.3. Sean \mathfrak{g} y \mathfrak{h} álgebras de Lie. Un homomorfismo de álgebras de Lie es una transformación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ que preserva la operación corchete. Es decir:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad \varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)].$$

Si el homomorfismo es invertible se dice isomorfismo y si además $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ se dice automorfismo.

Un homomorfismo definido entre \mathfrak{g} y $\mathfrak{gl}(V)$ se denomina **representación** de \mathfrak{g} en V . V es el espacio de la representación y su dimensión es la dimensión de la representación.

Una representación φ se dice fiel si $\ker(\varphi) = 0$ ($\mathfrak{g} \simeq \text{im}(\varphi)$).

Una representación φ se dice irreducible si no tiene subespacios del espacio de la representación, invariantes por φ .

Se entiende que un subespacio invariante por la representación (φ, V) , es un subespacio vectorial U de V tal que $(\varphi X)(U) \subset U$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

EJEMPLOS 1.4.

1. La aplicación traza

$$\text{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

es un homomorfismo, pues \mathbb{K} es un álgebra de Lie abeliana y $\text{tr}(XY - YX) = 0$ para cualquier par de matrices X, Y .

2. Si V es un espacio vectorial de dimensión n , $\mathfrak{gl}(V)$ es isomorfo a $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.
3. Sólo hay dos álgebras de Lie de dimensión dos, salvo isomorfismos, el álgebra abeliana y el álgebra que admite una base $\{X, Y\}$, para la cual el único corchete no nulo es $[X, Y] = X$.
4. Si $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es homomorfismo de álgebras de Lie, el $\ker(\varphi)$ es ideal de \mathfrak{g} y la $\text{im}(\varphi)$ es subálgebra de \mathfrak{h} .
5. Si \mathfrak{g} es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, la inclusión define trivialmente, una representación de \mathfrak{g} en V que se denomina representación canónica.

DEFINICIÓN 1.5. El centro de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es el ideal

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

EJEMPLO 1.6 (Representación adjunta).

A partir de un elemento X perteneciente al álgebra de Lie \mathfrak{g} se puede definir la aplicación $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $\forall Y \in \mathfrak{g} \quad \text{ad}_X(Y) = [X, Y]$. De la bilinealidad del corchete se desprende que ad_X es un operador lineal, lo que permite definir la aplicación $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ que a cada X le asigna ad_X .

Observemos que: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$\text{ad}_{[X, Y]}(Z) = [[X, Y], Z],$$

por la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} \text{ad}_{[X, Y]}(Z) &= -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] \\ &= [X, [Y, Z]] + [[X, Z], Y] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= \text{ad}_X[Y, Z] - \text{ad}_Y[X, Z] \\ &= \text{ad}_X \circ \text{ad}_Y(Z) - \text{ad}_Y \circ \text{ad}_X(Z) \\ &= [\text{ad}_X, \text{ad}_Y](Z). \end{aligned}$$

Se verifica entonces, que $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\text{ad}[X, Y] = [\text{ad } X, \text{ad } Y],$$

es decir, ad es una representación de \mathfrak{g} en \mathfrak{g} , la representación adjunta.

Como

$$\begin{aligned} \ker(\text{ad}) &= \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad } X = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0\}, \end{aligned}$$

el kernel de la representación adjunta es el centro del álgebra de Lie \mathfrak{g} .

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \ker(\text{ad}).$$

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} y dos subconjuntos A y B de \mathfrak{g} , denotaremos $[A, B]$ a la subálgebra generada por $\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}$, es decir:

$$[A, B] = \text{span}\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

2. Álgebras solubles y nilpotentes

Series de ideales.

A partir de un álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita, se pueden definir las siguientes subálgebras:

- Sea

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^j = [\mathfrak{g}^{j-1}, \mathfrak{g}^{j-1}], \forall j \geq 1.$$

Es fácil verificar que la sucesión así definida, es una sucesión decreciente de ideales de \mathfrak{g} ,

$$\mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \cdots,$$

que se denomina serie derivada de \mathfrak{g} y sus elementos, álgebras derivadas de \mathfrak{g} .

Se dice que \mathfrak{g} es **soluble** si alguna de sus álgebras derivadas se anula. Si k es el menor valor que hace $\mathfrak{g}^k = 0$, el álgebra es soluble en k -pasos.

- Sea

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_j = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{j-1}], \forall j \geq 1.$$

Es fácil verificar que la sucesión así definida, es una sucesión decreciente de ideales de \mathfrak{g} ,

$$\mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \cdots,$$

que se denomina serie central descendente de \mathfrak{g} .

Se dice que \mathfrak{g} es **nilpotente** si alguna de las álgebras, de la serie central descendente, se anula. Si k es el menor valor que hace $\mathfrak{g}_k = 0$, el álgebra es k -pasos nilpotente.

Se puede probar utilizando el método de inducción, que $\forall j, \mathfrak{g}^j \subseteq \mathfrak{g}_j$ y en consecuencia, toda álgebra nilpotente es soluble.

EJEMPLO 1.7.

1. El álgebra \mathfrak{t}_n es n -pasos soluble.
2. El álgebra \mathfrak{t}_n^+ es $(n - 1)$ -pasos nilpotente

PROPOSICIÓN 1.8. *El centro de un álgebra de Lie nilpotente es no trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Para un álgebra de Lie \mathfrak{g} , $(k + 1)$ -pasos nilpotente; $\mathfrak{g}_{k+1} = 0$ y $\mathfrak{g}_k \neq 0$.

Entonces, si $Y \neq 0 \in \mathfrak{g}_k$,

$$\forall X \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_{k+1} = 0,$$

por lo tanto $Y \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$.

Luego

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \supset \mathfrak{g}_k \neq 0.$$

□

PROPOSICIÓN 1.9. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Si \mathfrak{I} y \mathfrak{J} son ideales solubles de \mathfrak{g} , entonces $\mathfrak{I} + \mathfrak{J}$ también lo es.*

Se llama **radical** del álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita, al único ideal soluble maximal contenido en \mathfrak{g} y denotamos $Rad\mathfrak{g}$.

3. Los Teoremas de Ado, Engel y Lie

Los siguientes teoremas proporcionan resultados muy importantes en la teoría de álgebras de Lie de dimensión finita.

En todos los casos, \mathbb{K} es un cuerpo de característica cero.

TEOREMA 1.10 (Ado). *Toda álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{K} admite una representación fiel. Es decir, el álgebra es isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.*

TEOREMA 1.11 (Engel). Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de endomorfismos nilpotentes de V . Entonces

- (a) \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente,
- (b) existe $v \neq 0$ en V tal que $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y
- (c) en una base adecuada de V , para todo $X \in \mathfrak{g}$, la matriz de X es triangular superior estricta.

COROLARIO 1.12 (Engel). Sea \mathfrak{g} es un álgebra de Lie. Si para todo $X \in \mathfrak{g}$ ad_X es nilpotente, entonces \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente.

El Teorema de Engel proporciona una condición suficiente para que endomorfismos de un álgebra de Lie, compartan un mismo vector propio asociado al valor propio cero.

TEOREMA 1.13 (Lie). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{K} algebraicamente cerrado. Sea \mathfrak{g} una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$. Si $V \neq 0$, entonces V contiene un vector propio común a todos los endomorfismos de V .

COROLARIO 1.14 (Lie). Sea \mathfrak{g} una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$, V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Existe una base de V tal que, la matriz de cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ es triangular superior.

En lo que sigue vamos a considerar álgebras de Lie de dimensión finita, sobre el cuerpo \mathbb{C} .

4. Álgebras de Lie simples y semisimples

DEFINICIÓN 1.15. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice **simple** si no es abeliana y sus únicos ideales son 0 y \mathfrak{g} .

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice **semisimple** si no tiene ideales solubles no nulos.

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es **reductiva** si y sólo si $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \text{Rad}\mathfrak{g}$.

EJEMPLOS 1.16. Los siguientes son ejemplos de álgebras de Lie simples:

1. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$.
2. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 3$.
3. $\mathfrak{sp} = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) : X\bar{J} + \bar{J}A^t = 0\}$, $n \geq 1$, matrices simpléctica, donde

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \text{ y } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

TEOREMA 1.17. *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es semisimple si y sólo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ con \mathfrak{g}_i ideales simples de \mathfrak{g} .*

COROLARIO 1.18.

Si \mathfrak{g} es simple, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Toda álgebra de Lie simple es semisimple.

Toda álgebra de Lie semisimple tiene centro 0.

TEOREMA 1.19. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie reductiva entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ con $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ semisimple y $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ abeliano.*

4.1. Espacios de peso generalizados.

Sea \mathfrak{h} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{C} y φ una representación de \mathfrak{h} sobre el espacio vectorial complejo V . Para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ se puede determinar el conjunto

$$V_{\lambda} = \{v \in V : (\varphi(H) - \lambda(H)1)^n v = 0, \quad \forall H \in \mathfrak{h} \text{ y algún } n = n(H, v)\}.$$

El funcional λ se llama **peso** si el conjunto $V_{\lambda} \neq 0$, en este caso V_{λ} se denomina **espacio de peso generalizado** y sus elementos **vectores peso generalizados**.

PROPOSICIÓN 1.20. *Sea \mathfrak{h} un álgebra de Lie nilpotente sobre \mathbb{C} y φ una representación de \mathfrak{h} en un espacio vectorial complejo V de dimensión finita, entonces existe una cantidad finita de pesos generalizados, cada espacio peso generalizado es estable bajo $\varphi(\mathfrak{h})$ y V es la suma directa de todos los espacios peso generalizados.*

OBSERVACIÓN 1.21.

- (a) *La descomposición de V como suma directa de los espacios peso generalizados se llama una descomposición espacio peso de V .*
- (b) *Los pesos no necesariamente son linealmente independientes.*
- (c) *Como \mathfrak{h} es nilpotente es soluble, entonces, por el Teorema de Lie, existe una base de V para la que $\varphi(\mathfrak{h})$ es triangularizable simultáneamente. Los pesos generalizados son las distintas entradas diagonales como funciones en \mathfrak{h} . Para obtener la descomposición en suma directa es necesaria la condición de nilpotencia de \mathfrak{h} .*

4.2. Subálgebras de Cartan.

DEFINICIÓN 1.22. *Una subálgebra de Lie nilpotente \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} compleja de dimensión finita, es una subálgebra de Cartan si $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$.*

Sean \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja de dimensión finita y \mathfrak{h} una subálgebra nilpotente de \mathfrak{g} . Considerando la representación adjunta, los **espacio de peso generalizado** de \mathfrak{g} relativo a $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ de peso $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, son los conjuntos

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} : (\text{ad}_H - \alpha(H)1)^n X = 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h} \text{ y algún } n = n(H, X)\} \neq \{0\}.$$

TEOREMA 1.23. Si \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre \mathbb{C} de dimensión finita y si \mathfrak{h} es una subálgebra de Lie nilpotente, entonces los espacios de pesos generalizados de \mathfrak{g} relativos a $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ satisfacen:

- (a) $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_{\alpha}$,
- (b) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$,
- (c) $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ (donde se entiende que $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$ si $\alpha + \beta$ no es un peso generalizado).

Si $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, el álgebra \mathfrak{h} de la que habla este teorema, es una **subálgebra de Cartan** de \mathfrak{g} .

PROPOSICIÓN 1.24. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie semisimple compleja y \mathfrak{h} es una subálgebra de Cartan, entonces \mathfrak{h} es abeliana.

PROPOSICIÓN 1.25. En un álgebra de Lie semisimple compleja \mathfrak{g} , una subálgebra es de Cartan, si es maximal entre todas las subálgebras abelianas \mathfrak{h} para las que $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ es diagonalizable simultáneamente.

EJEMPLO 1.26.

1. Toda álgebra de Lie nilpotente es en sí misma una subálgebra de Cartan.
2. Una subálgebra de Cartan del álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, es el álgebra de matrices diagonales de orden n .

4.3. Raíces.

Un sistema de raíces abstractos en un espacio vectorial V de dimensión finita con un producto interno real \langle, \rangle y norma al cuadrado $|\cdot|^2$, es un conjunto finito Δ de elementos no nulos de V tal que:

- (a) Δ genera V ,
- (b) las transformaciones ortogonales $s_{\alpha}(\varphi) = \varphi - 2\frac{\langle \varphi, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \alpha$ para $\alpha \in \Delta$, llevan Δ en sí mismo,
- (c) $2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}$ siempre que $\alpha, \beta \in \Delta$.

Un sistema de raíces abstracto se dice **reducido** si $\alpha \in \Delta$ implica $2\alpha \notin \Delta$.

Dos sistemas de raíces abstractos Δ en V y Δ' en V' , son **isomorfos** si existe un isomorfismo de espacios vectoriales de V en V' que llevan Δ en Δ' y preservan los enteros $2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$ para $\alpha, \beta \in \Delta$.

Además, decimos que un sistema de raíces abstracto Δ es **reducible** si Δ admite una descomposición no trivial disjunta $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ con todo elemento de Δ' ortogonal a todo elemento de Δ'' . Decimos que Δ es **irreducible** si no admite tal descomposición.

Sea ahora \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja y \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} .

Los pesos generalizados no nulos de $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ en \mathfrak{g} se llaman **raíces** de \mathfrak{g} con respecto a \mathfrak{h} , el conjunto de raíces se denota $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ o simplemente Δ . Así:

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\} : \exists X \in \mathfrak{g} - \{0\} \quad \text{y} \quad \forall H \in \mathfrak{h} \quad \text{ad}_H X = \alpha(H)X\}.$$

La descomposición del álgebra de Lie a partir de los pesos generalizados, como consecuencia del teorema 1.23, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Esta descomposición se llama la descomposición espacio raíz de \mathfrak{g} con respecto a \mathfrak{h} . Los elementos de \mathfrak{g}_{α} se llaman vectores raíz para la raíz α .

PROPOSICIÓN 1.27.

- (a) El conjunto de raíces $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ genera \mathfrak{h}^* (sobre \mathbb{C}).
- (b) Si $\alpha \in \Delta$, la dimensión de \mathfrak{g}_{α} es 1.
- (c) Si $\alpha \in \Delta$ entonces $(-\alpha) \in \Delta$.

Como consecuencia de esta proposición, es suficiente tomar $n = 1$ en la definición de espacio peso.

Así:

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}_H X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Un sistema de raíces se puede entender como un conjunto de vectores en un espacio euclidiano con el producto interno usual, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si V es el \mathbb{R} -espacio lineal generado por Δ en \mathfrak{h}^* , entonces V es una forma real del espacio vectorial \mathfrak{h}^* . Si \mathfrak{h}_0 es la forma real del espacio vectorial \mathfrak{h} se puede probar que $\mathfrak{h}_0^* = V$.

$$\alpha \in \Delta \Rightarrow \forall H \in \mathfrak{h}_0, \quad \alpha(H) \in \mathbb{R}.$$

Bajo estas consideraciones:

- (a) Δ genera \mathfrak{h}_0^* (sobre \mathbb{R}),
- (b) las transformaciones ortogonales $s_{\alpha}(\varphi) = \varphi - 2 \frac{\langle \varphi, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \alpha \quad \alpha \in \Delta$, llevan Δ en sí mismo,
- (c) $2 \frac{\langle \varphi, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}$, siempre que $\alpha, \beta \in \Delta$.

Las álgebras de Lie simples complejas están clasificadas en cuatro grupos A_n, B_n, C_n y D_n , llamadas álgebras de Lie simples clásicas y sólo hay cinco excepcionales E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 .

Los sistemas de raíces reducidos para las familias clásicas son:

	Espacio Vectorial	Sistema de raíces	\mathfrak{g}
A_n	$V = \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i, \text{ con } \sum a_i e_i = 0\}$	$\Delta = \{e_i - e_j : i \neq j\}$	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$
B_n	$V = \{\sum_{i=1}^n a_i e_i\}$	$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i < j\} \cup \{\pm e_i\}$	$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$
C_n	$V = \{\sum_{i=1}^n a_i e_i\}$	$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i < j\} \cup \{\pm 2e_i\}$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$
D_n	$V = \{\sum_{i=1}^n a_i e_i\}$	$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i < j\}$	$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$

Para concluir esta sección enunciaremos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1.28. *El sistema de raíces Δ de un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita \mathfrak{g} con respecto a una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} es irreducible como un sistema de raíces abstracto si y sólo si \mathfrak{g} es simple.*

4.4. Positividad y orden simple.

Introduciremos en \mathfrak{h}_0^* una noción **orden simple** ($>$), que se preserva bajo la suma y multiplicación por escalares positivos, la forma de hacerlo es introduciendo una noción de positividad que consiste en seleccionar un subconjunto de elementos no nulos de \mathfrak{h}_0^* como positivos.

Con $\alpha > 0$ indicaremos que el elemento α es positivo y diremos que $\alpha > \beta$ ó $\beta < \alpha$ si $\alpha - \beta$ es positivo.

Para establecer un orden es necesario que se cumplan las siguientes propiedades:

- (a) para todo elemento no nulo α exactamente un elemento de $\{\alpha, -\alpha\}$ es positivo.
- (b) la suma de elementos positivos es positivo y todo múltiplo positivo de un elemento positivo es positivo.

Teniendo en cuenta estos requerimientos, una forma de definir la positividad es en términos de un **orden lexicográfico**. Fijamos un conjunto generador $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de \mathfrak{h}_0^* y definimos la positividad de la siguiente manera: decimos que $\beta > 0$ si existe un índice k tal que $\langle \beta, \alpha_i \rangle = 0$ para todo $i : 1 \leq i \leq (k-1)$ y $\langle \beta, \alpha_k \rangle > 0$.

Como \mathfrak{h}_0^* es dual de \mathfrak{h}_0 , de manera equivalente, si fijamos un conjunto generador H_1, H_2, \dots, H_m de \mathfrak{h}_0 y definimos la positividad de la siguiente forma: un elemento $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ es mayor que 0 si existe un índice k tal que $\alpha(H_i) = 0$ para todo $i : 1 \leq i \leq (k-1)$ y $\alpha(H_k) > 0$.

Establecida una noción de positividad en el conjunto de raíces, diremos que una raíz α es **simple** si $\alpha > 0$ y si no se puede escribir como suma de dos raíces positivas.

Una noción de positividad permite descomponer el conjunto de las raíces en positivas y negativas,

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-.$$

En consecuencia, toda álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita admite según un álgebra de Cartán \mathfrak{h} , una descomposición en espacio raíz

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

llamada descomposición triangular de \mathfrak{g} .

La siguiente proposición es un resultado más general y sumamente útil en el momento de aplicar las nociones de positividad.

PROPOSICIÓN 1.29. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, con producto interior, en el que se define una noción de positividad. Si $\dim V = m$, existen m raíces simples $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ y son linealmente independientes. Si β es una raíz que se escribe como $\beta = x_1\alpha_1 + \dots + x_m\alpha_m$, entonces todos los x_j no nulos tienen el mismo signo y son enteros.*

Las raíces simples y las positivas para las familias clásicas son:

	Raíces positivas	Raíces simples
A_n	$\{e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq (n+1)\}$	$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_n - e_{(n+1)}\}$
B_n	$\{e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i, 1 \leq i \leq n\}$	$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{(n-1)} - e_n, e_n\}$
C_n	$\{e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2e_i, 1 \leq i \leq n\}$	$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{(n-1)} - e_n, 2e_n\}$
D_n	$\{e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq n\}$	$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{(n-1)} - e_n, e_{(n-1)} + e_n\}$

EJEMPLO 1.30. *Descomposición de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ en espacios-raíces. Una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} , es la subálgebra abeliana determinada por las matrices diagonales de traza nula \mathfrak{h} .*

Si \mathfrak{h}_0 es el álgebra de las matrices diagonales reales en \mathfrak{g} entonces,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\mathfrak{h}_0.$$

Llamemos E_{ij} a la matriz de tipo $(n+1) \times (n+1)$ que tiene todas sus entradas nulas salvo un 1 en la fila i columna j

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $e_i \in \mathfrak{h}^*$ el funcional lineal que lee la i -ésima entrada de una matriz diagonal,

$$e_i \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+1} \end{pmatrix} = a_i.$$

Para cada $H \in \mathfrak{h}$, el operador ad_H es diagonalizado por una base de \mathfrak{g} formada por las matrices E_{ij} con $1 \leq i \neq j \leq n+1$ y $E_{ii} - E_{n+1, n+1}$, con $1 \leq i \leq n$.

Si calculamos:

$$\text{ad}_H E_{ij} = [H, E_{i,j}] = (e_i(H) - e_j(H)) E_{ij},$$

vemos que E_{ij} es un autovector simultáneo para todos los ad_H con autovalor $e_i(H) - e_j(H)$, evidentemente $e_i - e_j \in \mathfrak{h}^*$, por lo tanto los $e_i - e_j$ son las raíces de \mathfrak{g} en \mathfrak{h} .

Entonces:

$$\forall i \neq j, \quad e_i - e_j \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$

$$\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}_H X = (e_i - e_j)(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\} = \mathbb{C}E_{ij},$$

y en consecuencia:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{e_i - e_j}.$$

Observemos que, si i, j, k y r son diferentes entre sí se tiene:

$$\begin{array}{ll} [E_{ij}, E_{jk}] = E_{ik} & \text{y la suma de las raíces, } e_i - e_j + e_j - e_k = e_i - e_k \in \Delta \\ [E_{ij}, E_{ki}] = -E_{kj} & \text{y la suma de las raíces, } e_i - e_j + e_k - e_i = e_k - e_j \in \Delta \\ [E_{ij}, E_{rk}] = 0 & \text{y la suma de las raíces, } e_i - e_j + e_r - e_k \notin \Delta \\ [E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj} \in \mathfrak{h} & \text{y la suma de las raíces, } e_i - e_j + e_j - e_i = 0. \end{array}$$

Con estos resultados, generalizando a los espacios raíces:

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \in \Delta \\ = 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin \Delta \text{ y } \alpha + \beta \neq 0. \\ \subseteq \mathfrak{h} & \text{si } \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Es importante notar que si $\alpha \in \Delta$ entonces para todo $H \in \mathfrak{h}_0$, $\alpha(H) \in \mathbb{R}$, esto permite por restricción considerar que $\Delta \subset \mathfrak{h}_0^*$.

Observemos también que toda matriz $H = \text{diag}\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \in \mathfrak{h}$, verifica que $a_1 + \dots + a_{n+1} = 0$, y como:

$$\sum_{i=1}^{n+1} e_i(H) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n+1} e_i = 0.$$

Además, todo funcional $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ se puede expresar de manera única en función de los $n+1$ e_i :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} c_i e_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0.$$

Considerando los escalares reales, los funcionales e_1, e_2, \dots, e_{n+1} generan el espacio real \mathfrak{h}_0^* .

De acuerdo a la noción de positividad dada, se puede establecer un orden en \mathfrak{h}_0^* .

Diremos que $\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} c_i e_i \in \mathfrak{h}_0^*$ (se verifica entonces que , $\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$) es positivo si el primer coeficiente no nulo es mayor que cero, es decir $c_k > 0$ y $\forall i : 1 \leq i \leq (k-1), c_i = 0$. Esta definición de positividad determina un orden simple en el conjunto de raíces.

Con la noción de orden establecida, las raíces positivas están ordenadas de la siguiente manera:

$$e_1 - e_n > e_1 - e_{n-1} > \dots > e_1 - e_2 > e_2 - e_n > e_2 - e_{n-1} > \dots > e_2 - e_3 > \dots > e_{n-1} - e_n > 0.$$

5. Grupo de Weyl

DEFINICIÓN 1.31. Sea Δ un sistema de raíces en un espacio vectorial real de dimensión finita V , con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El grupo de Weyl de Δ , es el subgrupo finito del grupo ortogonal sobre V generado por las reflexiones s_α con $\alpha \in \Delta$ que se denota $W(\Delta)$. Donde, $\forall \beta \in \Delta \quad s_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \alpha$.

Se puede probar que para cualquier transformación ortogonal r de V y $\alpha \in \Delta$, $s_{r\alpha} = r s_\alpha r^{-1}$.

Efectivamente,

$$s_{r\alpha}(r\varphi) = r\varphi - 2 \frac{\langle r\varphi, r\alpha \rangle}{|r\alpha|^2} r\alpha = r(s_\alpha\varphi) = r(s_\alpha r^{-1} r\varphi),$$

por lo tanto

$$s_{r\alpha} = r s_\alpha r^{-1}.$$

En consecuencia, si $r \in W$ y $\beta = r\alpha$, entonces $s_\beta = r s_\alpha r^{-1}$.

Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita l , si introducimos una noción de positividad en V y Δ^+ es el conjunto de raíces positivas, por la proposición 1.29 queda determinado un conjunto $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ de raíces simples y se tiene que todo elemento $\alpha \in \Delta$ se pueden expresar a partir de π como

$$\alpha = \sum_i c_i \alpha_i, \quad \text{con todos los escalares } c_i \text{ que sean no nulos, del mismo signo.}$$

El siguiente lema da una caracterización de los sistemas de raíces simples.

LEMA 1.32. *Sea $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un sistema de raíces simples y $\alpha > 0$ con $\alpha \in \Delta$, entonces*

$$s_{\alpha_i}(\alpha) \begin{cases} = -\alpha & \text{si } \alpha = \alpha_i \text{ ó } \alpha = 2\alpha_i \\ > 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

PROPOSICIÓN 1.33. *Sea $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un sistema de raíces simples. Entonces $W(\Delta)$ esta generado por las reflexiones de raíces s_{α_i} con $\alpha_i \in \pi$. Si α es una raíz reducida, entonces existe $\alpha_j \in \pi$ y $s \in W$ tal que $s\alpha_j = \alpha$.*

Dado un sistema de raíces positivas Δ^+ y π el correspondiente sistema de raíces simples, un elemento $\lambda \in V$ se dice **dominante**, si $\langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq 0$ para todo $\alpha_i \in \pi$.

Se puede probar que para todo $v \in V$ existe $w \in W(\Delta)$ tal que wv es dominante.

PROPOSICIÓN 1.34. *Dado un sistema positivo Δ^+ para un sistema de raíces reducido Δ . Si α es una raíz simple y ρ la semisuma de todas las raíces positivas, entonces*

$$2 \frac{\langle \rho, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} = 1 \quad \text{y} \quad s_\alpha = \rho - \alpha.$$

Se llama **longitud** de un elemento w del grupo de Weyl $W(\Delta)$ relativo a un conjunto de raíces simples π , al número de raíces negativas α tales que $w\alpha > 0$ y se denota $l(w)$. De manera equivalente, $l(w)$ es el menor entero k tal que w puede escribirse como producto de reflexiones en raíces simples, $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$.

PROPOSICIÓN 1.35. *Sea $W(\Delta)$ un grupo de Weyl y π un sistema de raíces simples para Δ , sistema de raíces reducido. Si α es una raíz simple y $w \in W$, entonces*

$$l(w)s_\alpha = \begin{cases} l(w) - 1 & \text{si } w\alpha < 0 \\ l(w) + 1 & \text{si } w\alpha > 0 \end{cases}.$$

Para las álgebras de Lie simples clásicas y los sistemas de raíces simples mencionados en el cuadro 4.3, los Grupos de Weyl son:

- Para A_n , $W(\Delta)$ son todas las permutaciones de e_1, e_2, \dots, e_{n+1} .
- Para B_n y C_n , $W(\Delta)$ esta generado por todas las permutaciones de e_1, e_2, \dots, e_n y todos los cambios de signo de los coeficientes de e_1, e_2, \dots, e_n
- Para D_n , $W(\Delta)$ esta generado por todas las permutaciones de e_1, e_2, \dots, e_n y todos los cambios de signos pares.

6. Subálgebras parabólicas

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple de dimensión finita y sea

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+,$$

una descomposición triangular de \mathfrak{g} , donde \mathfrak{h} es una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} , $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ es el conjunto de raíces de \mathfrak{g} con respecto a \mathfrak{h} , $\mathfrak{g}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$.

Una subálgebra de **Borel** de \mathfrak{g} es una subálgebra $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$.

Una subálgebra \mathfrak{p} de \mathfrak{g} que contiene una subálgebra de Borel se llama **subálgebra parabólica** de \mathfrak{g} .

Sabiendo que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$, que los espacios raíces \mathfrak{g}_α tienen dimensión 1 y que π_0 es un subconjunto del conjunto de raíces simples π , toda subálgebra parabólica tiene la forma

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \tau} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde τ es un subconjunto de Δ que contiene a Δ^+ , determinado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau &= \Delta^+ \cup \{\alpha \in \Delta : \alpha \text{ tiene coordenada nula en todos los elementos de } \pi_0\} \\ &= \Delta^+ \cup \{\alpha \in \Delta : \alpha \in \text{span}(\pi - \pi_0)\}. \end{aligned}$$

Observemos:

- si $\tau = \Delta^+$ la subálgebra parabólica es $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$, es decir $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$
- si $\pi_0 = \{\}$ entonces $\tau = \Delta$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$

Se puede afirmar:

PROPOSICIÓN 1.36. *Sea \mathfrak{g} semisimple y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$ una descomposición triangular de \mathfrak{g} .*

Entonces las subálgebras parabólicas que contienen a $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$ están parametrizadas por los subconjuntos π_0 del conjunto de raíces simples π asociadas a la descomposición. En particular \mathfrak{g} tiene $2^{\dim \mathfrak{h}}$ subálgebras parabólicas que contienen a $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$.

Veamos ahora como se realizan las parametrizaciones de \mathfrak{p} para un álgebra \mathfrak{g} .

Sea $\pi_0 \subset \pi$, si llamamos:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{\alpha \in \Delta : \alpha \text{ tiene coordenada nula en todos los elementos de } \pi_0\} \\ &= \tau \cap -\tau, \end{aligned}$$

$$\Delta_1^+ = \{\alpha \in \Delta^+ : \alpha \text{ tiene coordenada nula en todos los elementos de } \pi_0\},$$

$$\begin{aligned} \Delta_n^+ &= \{\alpha \in \Delta^+ : \alpha \text{ tiene alguna coordenada no nula en los elementos de } \pi_0\} \\ &= \tau \cap (-\tau)^c, \end{aligned}$$

entonces $\Delta^+ = \Delta_1^+ \cup \Delta_n^+$.

Utilizando estos subconjuntos de raíces positivas podemos determinar las siguientes subálgebras de \mathfrak{g} ,

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \Delta_1^+} \mathfrak{g}_\alpha \bigoplus_{\alpha \in \Delta_1^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \tau \cap -\tau} \mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \tau \cap (-\tau)^c} \mathfrak{g}_\alpha,$$

la subálgebra parabólica asociada a π_0 es : $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{n} \simeq \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$.

Se puede probar que en la subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{n}$;

- \mathfrak{g}_1 es una subálgebra reductiva de \mathfrak{g} , por lo tanto $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \mathfrak{z}_1$ con centro $\mathfrak{z}_1 = \bigcap_{\alpha \in \tau \cap -\tau} \ker \alpha \subseteq \mathfrak{h}$.
 $\mathfrak{g}_1^{ss} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ es la parte semisimple de \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{z}_1 es abeliano.
- \mathfrak{n} es el radical nilpotente de \mathfrak{p} .

En esta descomposición de las álgebras parabólicas, \mathfrak{g}_1 se denomina comúnmente el factor de Levi de \mathfrak{p} .

El nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica tiene una descomposición en espacios raíces como \mathfrak{g}_1 -módulo y cada espacio raíz es \mathfrak{g}_1 -irreducible.

PROPOSICIÓN 1.37 (Kostant). *La clase de nilpotencia de \mathfrak{n} es la suma de los coeficientes de las raíces simples que parametrizan la correspondiente parabólica, que aparecen en la raíz más larga de \mathfrak{g} .*

EJEMPLOS 1.38.

1. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y sea $\pi_0 = \{e_k - e_{k+1}\}$. Entonces

$$\mathfrak{p} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{n} \\ \hline 0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \end{array} \quad \text{y } \mathfrak{n} \text{ es abeliana.}$$

2. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y sea $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$. Entonces

$$\mathfrak{p} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{n} & \mathfrak{n} \\ \hline & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{n} \\ \hline 0 & & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \end{array} \quad \text{y } \mathfrak{n} \text{ es 2-pasos nilpotente}$$

7. Data para las álgebras simples clásicas

En esta sección daremos información acerca de los sistemas de raíces irreducibles de las álgebras de Lie simples clásicas A_n , B_n , C_n y D_n . En todos los casos los sistemas de raíces pueden ser considerados como subespacios de algún \mathbb{R}^k y $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ es la correspondiente base ortonormal estándar.

- A_n para $n \geq 1$:

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i, : \sum a_i e_i = 0 \right\},$$

$$\Delta = \{e_i - e_j : i \neq j\},$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}),$$

$$\Delta^+ = \{e_i - e_j : i < j\},$$

$$|\Delta| = n(n+1),$$

$$\dim \mathfrak{g} = n(n+2),$$

$$\pi = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Toda raíz positiva se puede expresar como suma de simples de la siguiente manera:

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j).$$

Por lo tanto, la raíz mas larga es:

$$e_1 - e_{n+1}.$$

La semisuma de toda las raíces positivas es:

$$\rho = \frac{1}{2} (ne_1 + (n-2)e_2 + \dots - (n-2)e_n - ne_{n+1}).$$

- B_n para $n \geq 2$:

$$V = \mathbb{R}^n,$$

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i < j\} \cup \{\pm e_i\}, \quad |\Delta| = 2n^2,$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}), \quad \dim \mathfrak{g} = n(2n+1),$$

$$\Delta^+ = \{e_i \pm e_j : i < j\} \cup \{e_i\}, \quad \pi = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n\}.$$

Toda raíz positiva se puede expresar como suma de simples de la siguiente manera:

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j),$$

$$e_i + e_j = (e_i - e_{i+1}) + \dots + (e_{j-1} - e_j) + 2(e_j - e_{j+1}) + \dots + 2(e_{n-1} - e_n) + 2e_n,$$

$$e_i = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{n-1} - e_n) + e_n.$$

Por lo tanto, la raíz mas larga es:

$$e_1 + e_2.$$

La semisuma de toda las raíces positivas es:

$$\rho = \left(n - \frac{1}{2}\right) e_1 + \left(n - \frac{3}{2}\right) e_2 + \cdots + \frac{1}{2} e_n.$$

■ C_n para $n \geq 3$:

$$V = \mathbb{R}^n,$$

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i < j\} \cup \{\pm 2e_i\}, \quad |\Delta| = 2n^2,$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}), \quad \dim \mathfrak{g} = n(2n + 1),$$

$$\Delta^+ = \{e_i \pm e_j : i < j\} \cup \{2e_i\}, \quad \pi = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{2e_n\}.$$

Toda raíz positiva se puede expresar como suma de simples de la siguiente manera:

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j),$$

$$e_i + e_j = (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j) + 2(e_j - e_{j+1}) + \cdots + 2(e_{n-1} - e_n) + 2e_n,$$

$$2e_i = 2(e_i - e_{i+1}) + 2(e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + 2(e_{n-1} - e_n) + 2e_n.$$

Por lo tanto, la raíz mas larga es:

$$2e_1.$$

La semisuma de toda las raíces positivas es:

$$\rho = ne_1 + (n - 1)e_2 + \cdots + 1e_n.$$

■ D_n para $n \geq 4$:

$$V = \mathbb{R}^n,$$

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i < j\}, \quad |\Delta| = 2n(n - 1),$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}), \quad \dim \mathfrak{g} = n(2n - 1),$$

$$\Delta^+ = \{e_i \pm e_j : i < j\}, \quad \pi = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{e_{n-1} + e_n\}.$$

Toda raíz positiva se puede expresar como suma de simples de la siguiente manera:

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j),$$

$$e_i + e_j = (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j) + 2(e_j - e_{j+1}) + \cdots + 2(e_{n-2} - e_{n-1}) + (e_{n-1} - e_n) + (e_{n-1} + e_n).$$

Por lo tanto, la raíz mas larga es:

$$e_1 + e_2.$$

La semisuma de toda las raíces positivas es:

$$\rho = (n - 1)e_1 + (n - 2)e_2 + \cdots + 1e_{n-1}.$$

Cohomología de álgebras de Lie

En este capítulo vamos a definir cohomología de álgebras de Lie. Damos los conceptos fundamentales, enunciamos resultados y desarrollamos algunos ejemplos. Las demostraciones de los resultados se pueden consultar en [5], entre otros.

1. Cocadena compleja

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{C} y (φ, V) una representación de \mathfrak{g} .

DEFINICIÓN 2.1. Una **p -cocadena** de \mathfrak{g} en V es una función

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}}_p \longrightarrow V$$

p -lineal y alternante.

El conjunto de las cocadenas de orden p $C^p(\mathfrak{g}, V)$, es un espacio vectorial. Por ejemplo: $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$ es el espacio de las aplicaciones constantes.

$C^1(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, V)$ es el espacio de las transformaciones lineales.

En general entonces, $C^p(\mathfrak{g}, V)$ es el espacio de las funciones p -lineales ω , que para toda permutación σ de p elementos satisface $\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) = (-1)^{\text{sig}(\sigma)} \omega(X_1, \dots, X_p)$, donde $\text{sig}(\sigma)$ es el signo de la permutación que es 0 o 1 si σ es producto de una cantidad par o impar de transposiciones.

El espacio $\Lambda^p \mathfrak{g}$ es un \mathfrak{g} -módulo, considerando la representación $ad^{\otimes p}$. Como $C^p(\mathfrak{g}, V)$ es **isomorfo** al espacio $Hom(\Lambda^p \mathfrak{g}, V)$, el espacio de las p -cocadenas es de manera natural, un \mathfrak{g} -módulo.

Para $X \in \mathfrak{g}$, la acción de X se denotará $\theta(X)$, así para $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, V)$ se tiene:

(1)

$$(\theta(X) \omega)(X_1, X_2, \dots, X_p) = \varphi(X) \omega(X_1, X_2, \dots, X_p) - \sum_{j=1}^p \omega(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_p).$$

Llamaremos a $\theta(X)$, la **derivativa de Lie** de ω relativa a X .

La derivativa de una 0-cocadena coincide con la representación φ .

Si ω es una 1-cocadena, entonces

$$\theta(X) \omega(Y) = \varphi(X) \omega(Y) - \omega([X, Y]).$$

Se define también, el operador **producto interior**:

$$\iota(X) : C^p(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{p-1}(\mathfrak{g}, V)$$

tal que

$$(2) \quad (\iota(X) \omega)(X_1, X_2, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

(Donde $\iota(X)v = 0$ para $v \in V$).

El siguiente lema relaciona los dos operadores definidos.

LEMA 2.2. *Para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ se tiene:*

$$(3) \quad [\theta(X), \iota(Y)] = \iota([X, Y]).$$

DEMOSTRACIÓN. Para el caso de una 0-cocadena, se verifica trivialmente pues se anulan ambos miembros de la ecuación.

Si consideramos ω una $(p+1)$ -cocadena se tiene que:

$$\begin{aligned} (\iota(Y) \theta(X)\omega)(X_1, \dots, X_p) &= (\theta(X) \omega)(Y, X_1, \dots, X_p), \\ &= \varphi(X) \omega(Y, X_1, \dots, X_p) - \omega([X, Y], X_1, \dots, X_p) + \\ &\quad - \sum_{j=1}^p \omega(Y, X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_p), \\ &= -(\iota([X, Y]) \omega)(X_1, \dots, X_p) + (\theta(X) \iota(Y) \omega)(X_1, \dots, X_p). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\iota([X, Y]) \omega)(X_1, \dots, X_p) = (\theta(X) \iota(Y) \omega - \iota(Y) \theta(X)\omega)(X_1, \dots, X_p).$$

Con esto queda probada la ecuación (3) □

OBSERVACIÓN 2.3.

Si ω es una p -cocadena, entonces

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_p) = \iota(X_p) \dots \iota(X_1)\omega.$$

A partir de esta identidad, vemos que un operador lineal en $C^(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(\mathfrak{g}, V)$, está completamente determinado por su acción en $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$ y su relación con el operador de producto interior.*

Entre las cocadenas de orden p y las de orden $p+1$, se puede definir un operador lineal d , llamado **operador de coborde**, de la siguiente forma:

$$d : C^p(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g}, V) \quad \text{con } p \geq 0$$

tal que:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \varphi(X_i) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}), \end{aligned}$$

donde $\widehat{}$ significa que el correspondiente elemento debe ser omitido. Llamaremos coborde de ω a la $p+1$ -cocadena $d\omega$.

En los casos de menor orden su expresión es:

■

$$\begin{aligned} d : C^0(\mathfrak{g}, V) = V &\rightarrow C^1(\mathfrak{g}, V) \\ \text{para cada } \omega \in V \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad d\omega(X) &= \varphi(X)\omega, \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} d : C^1(\mathfrak{g}, V) &\rightarrow C^2(\mathfrak{g}, V) \\ \text{para todo } \omega \in C^1(\mathfrak{g}, V) \text{ y } X, Y \in \mathfrak{g} \\ d\omega(X, Y) &= \varphi(X)\omega(Y) - \varphi(Y)\omega(X) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

■

$$d : C^2(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^3(\mathfrak{g}, V)$$

$$\begin{aligned} d_2\omega(X, Y, Z) &= \varphi(X)\omega(Y, Z) - \varphi(Y)\omega(X, Z) + \varphi(Z)\omega(X, Y) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X), \end{aligned}$$

para todo $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, V)$ y $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Enunciemos importantes resultados.

LEMA 2.4. *Para todo $X \in \mathfrak{g}$*

1. *El operador d verifica:*

$$d \circ \iota(X) + \iota(X) \circ d = \theta(X).$$

2. *La derivativa de Lie conmuta con el operador de coborde:*

$$d \theta(X) = \theta(X) d.$$

LEMA 2.5. *El operador de coborde d satisface que $d^2 = 0$.*

Asumiendo que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{C} y que (φ, V) es una representación, hay una identificación natural de $C^p(\mathfrak{g}, V) = (\Lambda^p \mathfrak{g}) \otimes V$ como un \mathfrak{g} -módulo.

Para $V = \mathbb{C}$ y \mathfrak{g} actuando de manera trivial $C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \Lambda^p \mathfrak{g}^*$. En este caso denotaremos d_0 al operador de coborde y $\theta_0(X)$ la derivativa de Lie.

Para $\xi \in \mathfrak{g}^*$, el operador producto exterior es la aplicación:

$$\epsilon(\xi) : \Lambda^p \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{p+1} \mathfrak{g}^*$$

tal que

$$\epsilon(\xi)\omega(X_0, \dots, X_p) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \langle \xi, X_j \rangle \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p).$$

Recordemos que los operadores de producto interior y exterior satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \iota(X)\iota(Y) + \iota(Y)\iota(X) &= 0, \\ \epsilon(\xi)\epsilon(\eta) + \epsilon(\eta)\epsilon(\xi) &= 0, \\ \iota(X)\epsilon(\xi) + \epsilon(\xi)\iota(X) &= \langle \xi, X \rangle, \end{aligned}$$

para $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$.

2. Espacios de cohomología

A partir del operador de coborde se obtiene la siguiente relación:

$$\dots \longrightarrow C^{p-1}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_{p-1}} C^p(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_p} C^{p+1}(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \dots$$

Llamaremos **cociclo** de orden p , a toda cocadena que pertenezca al $\ker(d_p)$ y **coborde** de orden p a toda cocadena que pertenezca a $\text{im}(d_{p-1})$.

Denotaremos:

$$Z^p(\mathfrak{g}, V) = \ker(d_p), \quad B^p(\mathfrak{g}, V) = \text{im}(d_{p-1}).$$

Como el operador verifica que $d^2 = 0$, $B^p(\mathfrak{g}, V) \subset Z^p(\mathfrak{g}, V)$. Como la derivativa de Lie conmuta con el operador de coborde (Lema 2.4), cada uno de estos espacios es un \mathfrak{g} -submódulo de $C^p(\mathfrak{g}, V)$.

El espacio cociente

$$H^p(\mathfrak{g}, V) = Z^p(\mathfrak{g}, V) / B^p(\mathfrak{g}, V)$$

es el p -ésimo **espacio de cohomología** de \mathfrak{g} con coeficientes en V . Si $\omega \in Z^p(\mathfrak{g}, V)$, la clase de cohomología de ω en $H^p(\mathfrak{g}, V)$ es:

$$[\omega] = \omega + B^p(\mathfrak{g}, V).$$

Definimos:

$$H^*(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(\mathfrak{g}, V),$$

un espacio vectorial graduado. Si $\omega \in Z^p(\mathfrak{g}, V)$ y $X \in \mathfrak{g}$ del Lema 2.4 se sigue que

$$\theta(X) \omega = \iota(X) d\omega + d \iota(X) \omega = d \iota(X) \omega.$$

Entonces: $\theta(X) : Z^p(\mathfrak{g}, V) \rightarrow B^p(\mathfrak{g}, V)$ y \mathfrak{g} actúa por 0 en $H^p(\mathfrak{g}, V)$.

En el caso que se considere la **representación trivial**, (φ, \mathbb{C}) , todas las expresiones se ven simplificadas considerablemente, pues:

$$\text{si } X \in \mathfrak{g}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(X)\lambda = 0$$

por lo tanto $H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y podemos escribir $H^p(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = H^p(\mathfrak{g})$.

EJEMPLOS 2.6.

1. Sea \mathfrak{g} una álgebra abeliana de dimensión finita, $V = \mathbb{C}$ y φ un funcional lineal en \mathfrak{g} .

Como \mathfrak{g} es abeliana,

$$d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \varphi(X_i) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1})$$

Distinguiremos dos casos:

a) φ es la representación trivial. En este caso

$$d_p \omega(X_1, X_2, \dots, X_{p+1}) = 0$$

y por lo tanto $\text{im}(d_p) = 0$, $\ker(d_p) = C^p(\mathfrak{g})$ luego $H^p(\mathfrak{g}) = C^p(\mathfrak{g})$, $\dim H^p(\mathfrak{g}) = \binom{\dim \mathfrak{g}}{p}$ y por lo tanto $H^p(\mathfrak{g})$ es **isomorfo** a $\wedge^p \mathfrak{g}^*$

b) $\varphi \neq 0$.

Para determinar H^1 observemos que $\omega = d_0 \lambda$. Por lo tanto

$$\omega(X) = \varphi(X)\lambda.$$

Como $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\text{im}(d_0) = \{\omega : \omega = \lambda\varphi, \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$$

es decir, $\text{im}(d_0)$ es un subespacio de \mathfrak{g}^* generado por φ .

Sea ahora $\omega \in C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$.

$$d_1 \omega(X, Y) = \varphi(X)\omega(Y) - \varphi(Y)\omega(X),$$

por lo tanto: $\omega \in \ker(d_1)$ si y sólo si

$$\varphi(X)\omega(Y) = \varphi(Y)\omega(X).$$

Fijado un Y de manera que $\varphi(Y) \neq 0$,

$$\omega(X) = \frac{\omega(Y)}{\varphi(Y)} \varphi(X), \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g},$$

es decir que ω es combinación lineal de φ , luego $\ker(d_1) = \text{im}(d_0)$ y por lo tanto $H^1 = 0$.

2. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Heisenberg y sea $\{X, Y, Z\}$ una base de \mathfrak{g} tal que, el único corchete no nulo se tiene para $[X, Y] = Z$.

Si φ es la representación trivial, se tiene la siguiente relación:

$$C^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_2} C^3(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_3} C^4(\mathfrak{g}) = 0.$$

$$\text{im}(d_0) = 0,$$

$$d_1\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = -\omega(Z),$$

luego, $\dim \ker(d_1) = 2$, por lo tanto $\dim H^1 = 2$.

Ahora: si $\omega \in C^2$ entonces $d_2\omega \in C^3$ y

$$\begin{aligned} d_2\omega(X, Y, Z) &= -\omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) \\ &= -\omega(Z, Z) \text{ y como } \omega \text{ es altermante} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $\ker(d_2) = C^2$ y su dimensión es entonces 3.

Por otro lado, $d_1\omega \in \text{im}(d_1)$ y cumple que $d_1\omega(X, Y) = \omega(Z)$, y es 0 en todo otro caso. Por lo tanto $\dim \text{im}(d_1) = 1$ y $\dim H^2 = 3 - 1 = 2$.

El $\ker(d_3) = C^3$ y como $d_2\omega = 0$ entonces $H^3 = C^3$ cuya dimensión 1.

3. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y φ la representación trivial. Usando la base usual $\{X, H, Y\}$,

- $d_0v(\cdot) = \varphi(\cdot)v = 0$,
- $d_1\omega(X, H) = -\omega[X, H] = 2\omega(X)$,
- $d_1\omega(X, Y) = -\omega[X, Y] = -\omega(H)$,
 $d_1\omega(H, Y) = -\omega[H, Y] = 2\omega(Y)$.

De estas igualdades se tiene que $\dim \text{im}(d_1) = 3 = \dim \ker(d_2)$. Si $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es una base dual de la base $\{X, H, Y\}$, $d\omega$ recorre una base $\{\alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma\}$ de $\Lambda^2 \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} d_2\omega(X, H, Y) &= -\omega([X, H], Y) + \omega([X, Y], H) - \omega([H, Y], X) \\ &= 2\omega(X, Y) + 2\omega(Y, X) \\ &= 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto, $d_2 = 0$.

- $d_3 = 0$ pues $C^4 = 0$.

De estas observaciones sobre d , se tiene que $H^1 = 0$, $H^2 = 0$, $H^3 = \mathbb{C}^3$ y $H^p = 0$ para todo $p \geq 4$

Consideremos ahora un álgebra de Lie \mathfrak{b} y un ideal $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$. Sea (φ, V) un \mathfrak{b} -módulo, V es un \mathfrak{n} -módulo por restricción. Si $X \in \mathfrak{b}$ y $\omega \in C^p(\mathfrak{n}, V)$ entonces la expresión

$$(4) \quad \varphi(X)\omega(X_1, X_2, \dots, X_p) - \sum_{j=1}^p \omega(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_p)$$

esta bien definida para $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{n}$, a partir de que $[\mathfrak{b}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$.

Definamos $\theta(X)\omega \in C^p(\mathfrak{n}, V)$ como la p -cocadena cuyo valor, para (X_1, X_2, \dots, X_p) esta dado por la expresión (4).

Esta definición es consistente con la dada anteriormente en (1), para el caso en que X también sea un elemento de \mathfrak{n} y es justamente, la acción natural de \mathfrak{b} sobre $Hom(\Lambda^p \mathfrak{n}, V)$.

LEMA 2.7. Para $X, Y \in \mathfrak{b}$

$$\theta([X, Y]) = \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X).$$

En consecuencia $(C^*(\mathfrak{n}, V), \theta)$ es un \mathfrak{b} -módulo.

DEMOSTRACIÓN. Este enunciado es una consecuencia directa del hecho que \mathfrak{n} es un ideal de \mathfrak{b} y de la identificación $C^p(\mathfrak{n}, v) \simeq Hom(\Lambda^p \mathfrak{n}, V)$. \square

PROPOSICIÓN 2.8.

Sea \mathfrak{b} un álgebra de Lie y sea (φ, V) un \mathfrak{b} -módulo. Sea $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$ un ideal. Los espacios $Z^p(\mathfrak{n}, V)$ y $B^p(\mathfrak{n}, V)$ son invariantes bajo $\theta(\mathfrak{b})$ y $\theta(\mathfrak{n})Z^p(\mathfrak{n}, V) \subset B^p(\mathfrak{n}, V)$.

Por lo tanto, el espacio \mathfrak{n} -cohomológico $H^p(\mathfrak{n}, V)$ tiene estructura natural, como un $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$ -módulo.

DEMOSTRACIÓN. Por se \mathfrak{n} ideal de \mathfrak{b} y por definición $\theta(X)\omega \in C^p(\mathfrak{n}, V)$, para todo $X \in \mathfrak{b}$. Resta entonces mostrar que:

- $\forall X \in \mathfrak{b}$ y $\omega \in Z^p(\mathfrak{n}, V)$, por el Lema 2.4, se tiene que

$$d\theta(X)\omega = \theta(X)d\omega,$$

y como $d\omega = 0$, entonces

$$d\theta(X)\omega = 0,$$

por lo tanto

$$\theta(\mathfrak{b})Z^p(\mathfrak{n}, V) \subset Z^p(\mathfrak{n}, V).$$

- Por definición de $B^p(\mathfrak{n}, V)$, para todo $\omega \in B^p(\mathfrak{n}, V)$, $\exists \omega' \in C^{p-1}(\mathfrak{n}, V) : d\omega' = \omega$. Utilizando el Lema 2.4, podemos concluir que: $\forall X \in \mathfrak{b}$ y $\omega \in B^p(\mathfrak{n}, V)$,

$$\theta(X)\omega = \theta(X)d\omega' = d\theta(X)\omega',$$

luego

$$\theta(X)\omega \in B^p(\mathfrak{n}, V),$$

por lo tanto

$$\theta(\mathfrak{b})B^p(\mathfrak{n}, V) \subset B^p(\mathfrak{n}, V).$$

- La afirmación $\theta(\mathfrak{n})Z^p(\mathfrak{n}, V) \subset B^p(\mathfrak{n}, V)$, es consecuencia también del Lema 2.4 pues, $\forall X \in \mathfrak{n}$ y $\omega \in Z^p(\mathfrak{n}, V)$,

$$\theta(X) \omega = \iota(X) d\omega + d \iota(X) \omega,$$

$$\theta(X) \omega = \iota(X) 0 + d \iota(X) \omega,$$

$$\theta(X) \omega = d(\iota(X) \omega),$$

por lo tanto $\theta(X) \omega \in B^p(\mathfrak{n}, V)$.

Todo esto permite asegurar que $H^p(\mathfrak{n}, V)$ es un b -módulo con \mathfrak{n} actuando trivialmente sobre $H^p(\mathfrak{n}, V)$, por lo tanto la acción de \mathfrak{b} induce la acción de $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$ sobre $H^p(\mathfrak{n}, v)$. \square

Representaciones de álgebras semisimples. Teorema de Kostant

1. Pesos

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan y φ una representación en el espacio vectorial complejo V de dimensión finita. En el Capítulo 1, Sección 4.1 hemos definido los espacios peso generalizados

$$V_\lambda = \{v \in V : (\varphi(H) - \lambda(H)1)^n v = 0, \quad \forall H \in \mathfrak{h} \text{ y algún } n = n(H, v) \neq 0,$$

determinados por $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ y vimos que cuando el espacio de la representación es de dimensión finita, V es suma directa de sus espacios peso generalizados.

Si en particular $n = 1$, el correspondiente espacio

$$\{v \in V : \varphi(H)v = \lambda(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h}\} \neq 0,$$

se llama espacio **peso** de peso λ y resulta ser un subespacio de V_λ . Los elementos del espacio peso se llaman vectores peso.

La siguiente proposición resume resultados relativo a los pesos.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el correspondiente conjunto de raíces y sea \mathfrak{h}_0 la forma real del álgebra de Lie \mathfrak{h} .*

Si φ es una representación de \mathfrak{g} sobre el espacio vectorial complejo de dimensión finita V , entonces:

- (a) $\varphi(\mathfrak{h})$ actúa diagonalmente sobre V , de tal forma que todo vector peso generalizado es un vector peso y V es suma directa de los espacios peso,
- (b) todo peso es a valores reales en \mathfrak{h}_0 y es algebraicamente integral,
- (c) las raíces y pesos están relacionados por $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$.

2. Teorema de Peso Máximo

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja y \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan que determinan el conjunto de raíces $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, el grupo de Weyl $W(\Delta)$ y \mathfrak{h}_0 . \mathfrak{h}_0 es la forma real de \mathfrak{h} , es decir el espacio donde todas las raíces son funcionales reales. Sea π el sistema de raíces simples que resulta de considerar en \mathfrak{h}_0^* una noción de orden de la forma usual.

Si φ es una representación de \mathfrak{g} en un espacio vectorial complejo de dimensión finita V , entonces los pesos de V están en \mathfrak{h}_0^* , por la Proposición 3.1.

El peso más grande en el orden definido en \mathfrak{h}_0^* , se llama **peso máximo** de φ . El teorema de Peso Máximo clasifica, salvo isomorfismos, las representaciones irreducibles de \mathfrak{g} .

TEOREMA 3.2 (Peso Máximo). *Salvo equivalencias, las representaciones irreducibles de dimensión finita φ de \mathfrak{g} están en correspondencia uno a uno con los funcionales lineales dominantes algebraicamente integrales $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. λ es el peso máximo de φ_λ y tiene las siguientes propiedades:*

- (a) λ depende sólo del sistema simple π y no del orden usado,
- (b) el espacio peso V_λ es unidimensional,
- (c) cada vector raíz E_α , para una raíz $\alpha \in \Delta^+$, anula los elementos de V_λ , los elementos de V_λ son los únicos con esta propiedad,
- (d) todo peso de φ_λ es de la forma $\lambda - \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$ con los enteros $n_i \geq 0$ y $\alpha_i \in \pi$,
- (e) cada espacio peso V_μ para φ_λ tiene $\dim V_{w\mu} = \dim V_\mu$ para todo w del grupo de Weyl $W(\Delta)$. Cada peso μ tiene $|\mu| \leq |\lambda|$ con la igualdad sólo si μ está en la órbita $W(\Delta)\lambda$.

Fórmula de la dimensión de Weyl

Para determinar la dimensión de los espacios de cohomología utilizaremos el teorema formulado por Weyl cuyo enunciado es el siguiente.

TEOREMA 3.3 (Fórmula para la dimensión de Weyl). *Sea V una representación irreducible de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} , con peso máximo λ .*

Entonces

$$\dim V = \frac{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (\lambda + \rho, \alpha)}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (\rho, \alpha)}$$

donde $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$.

No haremos la demostración, y notaremos que la expresión es sencilla cuando se utilizan bases de pesos fundamentales.

3. Cohomología de nilradicales. Teorema de Kostant

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan y sea $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ una subálgebra parabólica de \mathfrak{g} .

El nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica tiene una descomposición en espacios raíces como \mathfrak{g}_1 -módulo, donde las raíces están definidas por la acción del centro de \mathfrak{g}_1 .

Dada una representación irreducible $(\varphi^\lambda, V^\lambda)$ de \mathfrak{g} de peso máximo λ , Kostant describe la estructura como \mathfrak{g}_1 -módulo de la cohomología de \mathfrak{n} con coeficientes en V^λ considerada como \mathfrak{n} -módulo por restricción.

Sea W el grupo de Weyl de \mathfrak{g} y $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$. Denotemos X_α^* a un vector de \mathfrak{n}^* de peso α y X_α a un vector de \mathfrak{n} de peso α .

TEOREMA 3.4 (Kostant). *La descomposición de $H^*(\mathfrak{n}, V^\lambda)$ como suma directa de representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 es*

$$H^*(\mathfrak{n}, V^\lambda) \simeq \bigoplus_{w \in W^1} V_1^{w(\lambda+\rho)-\rho}$$

donde $V_1^{w(\lambda+\rho)-\rho}$ es la representación irreducible de \mathfrak{g}_1 de peso máximo $w(\lambda + \rho) - \rho \in \Lambda_1^+$ y

$$\begin{aligned} W^1 &= \{w \in W : w^{-1}\Delta_1^+ \subset \Delta^+\} \\ &= \{w \in W : w\Lambda^+ \subset \Lambda_1^+\} \\ &= \{w \in W : w\Delta^- \cap \Delta^+ \subset \Delta_{\mathfrak{n}}^+\}. \end{aligned}$$

Además:

- (1) Si $w \in W^1$, sea $w = w_1 \cdots w_l$ la factorización mínima de w como producto de reflexiones simples de W , entonces $|w\Delta^- \cap \Delta^+| = l$, l es el grado cohomológico de w .
- (2) Si $w \in W^1$, $w\Delta^- \cap \Delta^+ = \{\alpha_1 \cdots \alpha_l\} \subset \Delta_{\mathfrak{n}}^+$ y sea $v \in V^\lambda$ un vector de peso máximo, de peso $w\lambda$. Entonces

$$X_{-\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge X_{-\alpha_l}^* \otimes v \in \wedge^l \mathfrak{n}^* \otimes V^\lambda$$

es un cociclo representante de la clase de cohomología \mathfrak{g}_1^+ de peso $w(\lambda + \rho) - \rho \in \Lambda_1^+$ y $V_1^{w(\lambda+\rho)-\rho}$ es un submódulo de $H^l(\mathfrak{n}, V^\lambda)$

- (3) En el conjunto $\{w(\lambda + \rho) - \rho : w \in W^1\}$ no hay repeticiones. En particular \mathfrak{g}_1 actúa en $H^*(\mathfrak{n}, V^\lambda)$ libre de multiplicidad. Más aun, este conjunto es

$$\{\lambda_1 \in \Lambda_1^+ : (\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\lambda_1 + \rho, \lambda_1 + \rho)\}$$

- (4) la cantidad de \mathfrak{g}_1 -módulos irreducibles que aparece en $H^l(\mathfrak{n}, V^\lambda)$ es independiente de $\lambda \in \Lambda^+$, es el número de elementos W^1 que tiene dimensión l . Hay entonces $|W^1|$ representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 en todo $H^*(\mathfrak{n}, V^\lambda)$

Cohomología de nilradicales de subálgebras parabólicas de tipo A_n

En el capítulo anterior presentamos la descripción de Kostant de la cohomología de los nilradicales de subálgebras parabólicas de álgebras de Lie semisimples, por medio de la teoría de representaciones. En este capítulo aplicamos este resultado a la descripción detallada de la cohomología de los nilradicales que nos interesan. Para esto desarrollamos todos los cálculos necesarios.

Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección estudiamos en detalle las álgebras parabólicas de A_n parametrizadas por dos raíces simples y sus nilradicales. En la segunda sección, describimos su cohomología a partir del teorema de Kostant. Primero describimos el caso general y luego estudiamos en particular cada una de las parabólicas determinadas por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$, $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ y $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$. Para estos casos encontramos fórmulas que permiten calcular la dimensión de los espacios de cohomología a partir de las cuales, en el siguiente capítulo, estudiaremos el comportamiento asintótico de la dimensión total de la cohomología para n creciendo a infinito. Para el caso correspondiente a $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, la fórmula encontrada no es cerrada y no es suficiente para determinar el comportamiento asintótico buscado. Por esto, una tercera sección está dedicada al cálculo explícito con computadora de las dimensiones de cohomología para valores de n hasta 4000. Cabe destacar que para $n = 4000$ la dimensión de la cohomología es enorme, igual aproximadamente a 10^{3600} .

1. Subálgebra parabólica \mathfrak{p} con nilradical 2-pasos nilpotente.

Recordemos que toda subálgebra parabólica \mathfrak{p} de un álgebra de Lie semisimple compleja \mathfrak{g} de dimensión finita, está parametrizada por un subconjunto π_0 del conjunto de raíces simples.

Para el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, que es un álgebra de Lie simple de tipo A_n y \mathfrak{h} la subálgebra de Cartan, el conjunto de raíces es:

$$\Delta = \{\pm(e_i - e_j) : 1 \leq i < j \leq n+1\} = \Delta^+ \cup \Delta^-,$$

el conjunto de las raíces positivas es:

$$\begin{aligned} \Delta^+ = \{ & e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n, e_1 - e_{n+1}, \\ & e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_n, e_2 - e_{n+1}, \\ & \dots \\ & e_{n-1} - e_n, e_{n-1} - e_{n+1}, \\ & e_n - e_{n+1} \} \end{aligned}$$

y el conjunto de las raíces simples es:

$$\pi = \{e_i - e_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n\};$$

la dimensión del álgebra de Lie \mathfrak{g} es $(n+1)(n+1) - 1 = n^2 + 2n$ y la dimensión de \mathfrak{h} es n .

Toda raíz positiva se puede escribir utilizando las raíces simples de la siguiente manera:

$$\text{si } i < j \quad e_i - e_j = \sum_{k=i}^{j-1} (e_k - e_{k+1}),$$

la raíz mas larga para esta álgebra es $e_1 - e_{n+1}$, y su expresión en función de las raíces simples es:

$$e_1 - e_{n+1} = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) + \dots + (e_n - e_{n+1}).$$

Las subálgebras parabólicas cuyo nilradical es 2-pasos nilpotente, están parametrizadas por subconjuntos π_0 formados por dos raíces simples. Hay entonces $\binom{n}{2}$ parabólicas con nilradical 2-pasos nilpotente.

Para las álgebras de Lie de tipo A_n , el grupo de Weyl W es isomorfo al grupo de las permutaciones de $n+1$ elementos S_{n+1} y su acción sobre el grupo de raíces Δ esta dada por

$$\sigma(e_i - e_j) = e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)}.$$

Para $h, k : 1 \leq h < k \leq n$, sea $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$ una parametrización para la subálgebra parabólica \mathfrak{p} . De acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 1, Sección 6

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}.$$

Para esta parametrización:

$$\begin{aligned} \Delta_1^+ &= \{\alpha \in \Delta^+ : \alpha \in \text{span}(\pi - \pi_0)\} \\ &= \{e_i - e_j : 1 \leq i < j \leq h\} \cup \{e_i - e_j : h+1 \leq i < j \leq k\} \cup \{e_i - e_j : k+1 \leq i < j \leq n+1\}, \end{aligned}$$

explícitamente:

$$\begin{aligned} \Delta_1^+ &= \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_h, \\ &\quad e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_h, \\ &\quad \dots \\ &\quad e_{h-1} - e_h\} \\ &\cup \{e_{h+1} - e_{h+2}, e_{h+1} - e_{h+3}, \dots, e_{h+1} - e_k, \\ &\quad e_{h+2} - e_{h+3}, \dots, e_{h+2} - e_k, \\ &\quad \dots \\ &\quad e_{k-1} - e_k\} \\ &\cup \{e_{k+1} - e_{k+2}, e_{k+1} - e_{k+3}, \dots, e_{k+1} - e_{n+1}, \\ &\quad e_{k+2} - e_{k+3}, \dots, e_{k+2} - e_{n+1}, \\ &\quad \dots \\ &\quad e_n - e_{n+1}, \} \end{aligned}$$

$$\Delta_{\mathfrak{n}}^+ = \{\alpha \in \Delta^+ : \alpha \notin \text{span}(\pi - \pi_0)\},$$

que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} &= \overbrace{\{e_i - e_j : 1 \leq i \leq h, h+1 \leq j \leq k\}}^{\Delta_X} \cup \overbrace{\{e_i - e_j : h+1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n+1\}}^{\Delta_Y} \\ &\cup \overbrace{\{e_i - e_j : 1 \leq i \leq h, k+1 \leq j \leq n+1\}}^{\Delta_{\mathfrak{z}}}, \end{aligned}$$

explícitamente:

$$\Delta_{\mathfrak{n}}^+ = \left\{ \begin{array}{l} e_1 - e_{h+1}, \dots, e_1 - e_k, \\ e_2 - e_{h+1}, \dots, e_2 - e_k, \\ \vdots \\ e_h - e_{h+1}, \dots, e_h - e_k \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} e_{h+1} - e_{k+1}, \dots, e_{h+1} - e_{n+1}, \\ e_{h+2} - e_{k+1}, \dots, e_{h+2} - e_{n+1}, \\ \vdots \\ e_k - e_{k+1}, \dots, e_k - e_{n+1} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} e_1 - e_{k+1}, \dots, e_1 - e_{n+1}, \\ e_2 - e_{k+1}, \dots, e_2 - e_{n+1}, \\ \vdots \\ e_h - e_{k+1}, \dots, e_h - e_{n+1} \end{array} \right\}.$$

La expresión del nilradical como suma de espacios raíces es:

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{n}}^+} \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{z} \oplus V \subset \mathfrak{g}^+ \quad \text{con} \quad V = X \oplus Y,$$

donde

$$X = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_X} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad Y = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{z} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Explícitamente,

$$X = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq h \\ h+1 \leq j \leq k}} \mathbb{C}E_{ij}, \quad Y = \bigoplus_{\substack{h+1 \leq i \leq k \\ k+1 \leq j \leq n+1}} \mathbb{C}E_{ij}, \quad \mathfrak{z} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq h \\ k+1 \leq j \leq n+1}} \mathbb{C}E_{ij}.$$

Una base para \mathfrak{n} es el conjunto

$$\begin{aligned} &\{E_{ij} : 1 \leq i \leq h, h+1 \leq j \leq k\} \cup \{E_{ij} : h+1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n+1\} \\ &\cup \{E_{ij} : 1 \leq i \leq h, k+1 \leq j \leq n+1\}, \end{aligned}$$

como $[E_{ir}, E_{sj}] = \delta_{rs}E_{ij} - \delta_{ji}E_{sr}$,

los únicos corchetes no nulos en la estructura de \mathfrak{n} se obtienen en el espacio

$$[X, Y] = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq h \\ k+1 \leq j \leq n+1}} \mathbb{C}E_{ij} = \mathfrak{z}.$$

El nilradical \mathfrak{n} , como álgebra de Lie, está entonces generado por $X \oplus Y$ y \mathfrak{z} es el centro de \mathfrak{n} .

El número de raíces en Δ_X es $h.(k - h)$, en Δ_y es $(k - h).(n + 1 - k)$ y en \mathfrak{z} es $h.(n + 1 - k)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dim V &= h.(k - h) + (k - h).(n + 1 - k), \\ \dim \mathfrak{z} &= h.(n + 1 - k), \\ \dim \mathfrak{n} &= h.(k - h) + (k - h).(n + 1 - k) + h.(n + 1 - k). \end{aligned}$$

Renombrando los elementos de la base para generalizar resultados,

$$\begin{aligned} \{E_{ij}, : 1 \leq i \leq h, h + 1 \leq j \leq k\} &= \{x_{ij} : 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq k - h\}, \\ \{E_{ij} : h + 1 \leq i \leq k, k + 1 \leq j \leq n + 1\} &= \{y_{ij} : 1 \leq i \leq k - h, 1 \leq j \leq n + 1 - k\}, \\ \{E_{ij} : 1 \leq i \leq h, k + 1 \leq j \leq n + 1\} &= \{z_{ij} : 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq n + 1 - k\}, \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \langle \{x_{ij} : 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq k - h\} \cup \{y_{ij} : 1 \leq i \leq k - h, 1 \leq j \leq n + 1 - k\} \\ &\quad \cup \{z_{ij} : 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq n + 1 - k\} \rangle, \end{aligned}$$

y los únicos corchetes no nulos en esta estructura se obtienen para:

$$[x_{ir}, y_{sj}] = \delta_{rs} z_{ij}.$$

En el siguiente esquema gráfico representamos la subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{C})$.

\mathfrak{g}_1	x_{11}	\dots	$x_{1(k-h)}$	z_{11}	\dots	$z_{1(n+1-k)}$
		\dots			\dots	
	x_{h1}	\dots	$x_{h(k-h)}$	z_{h1}	\dots	$z_{h(n+1-k)}$
$\mathfrak{p} =$	\mathfrak{g}_1			y_{11}	\dots	$y_{1(n+1-k)}$
					\dots	
				$y_{(k-h)1}$	\dots	$y_{(k-h)(n+1-k)}$
				\mathfrak{g}_1		

El factor de Levi $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \mathfrak{z}_1$, en función de los espacios raíces tiene la siguiente descomposición:

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_1^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_1^+} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq h \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{ij} \oplus \bigoplus_{\substack{h+1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{ij} \oplus \bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{ij}.$$

La parte semisimple $\mathfrak{g}_1^{ss} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$

$$\mathfrak{g}_1^{ss} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq h \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{ij} \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq h \\ i \neq j}} \mathbb{C}(E_{ii} - E_{jj}) \oplus \bigoplus_{\substack{h+1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{ij} \oplus \bigoplus_{\substack{h+1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{C}(E_{ii} - E_{jj}) \oplus$$

$$\bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} E_{ij} \oplus \bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}(E_{ii} - E_{jj}).$$

El espacio resultante tienen tres bloques de ordenes, h , $k - h$ y $n + 1 - k$, cada bloque es de traza cero. Por lo tanto:

$$\mathfrak{g}_1^{ss} \simeq \mathfrak{sl}(h) \oplus \mathfrak{sl}(k - h) \oplus \mathfrak{sl}(n + 1 - k).$$

El centro de \mathfrak{g}_1 es

$$\mathfrak{z}_1 = \bigcap_{\alpha \in \Delta_1} \ker \alpha = \bigcap_{\substack{1 \leq i, j \leq h \\ i \neq j}} \ker(e_i - e_j) \cap \bigcap_{\substack{h+1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \ker(e_i - e_j) \cap \bigcap_{\substack{k+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \ker(e_i - e_j),$$

entonces, para una matriz diagonal $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_{n+1})$ tal que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$ se cumple que,

$$H \in \mathfrak{z}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} H \in \bigcap_{\substack{1 \leq i, j \leq h \\ i \neq j}} \ker(e_i - e_j) \\ H \in \bigcap_{\substack{h+1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \ker(e_i - e_j) \\ H \in \bigcap_{\substack{k+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \ker(e_i - e_j) \end{cases}$$

como

$$(5) \quad H \in \ker(e_i - e_j) \subset \mathfrak{h} \Leftrightarrow (e_i - e_j)H = a_i - a_j = 0,$$

se tiene entonces,

$$H \in \mathfrak{z}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \cdots = a_h \\ a_{h+1} = \cdots = a_k \\ a_{k+1} = \cdots = a_{n+1} \end{cases} .$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{z}_1 = \left\{ H = \text{diag}(\overbrace{a, \dots, a}^{h\text{-veces}}, \overbrace{b, \dots, b}^{(k-h)\text{-veces}}, \overbrace{c, \dots, c}^{(n+1-k)\text{-veces}}) : h.a + (k-h).b + (n+1-k).c = 0 \right\} .$$

2. Cohomología trivial del nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica.

El teorema de Kostant describe la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de la cohomología del nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica parametrizada por un subconjunto W^1 del grupo de Weyl, donde cada representación irreducible corresponde a un elemento del conjunto W^1 .

Para utilizar el teorema de Kostant, el primer paso a dar es determinar el conjunto

$$W^1 = \{ \sigma \in W : \sigma^{-1} \Delta_1^+ \subset \Delta^+ \} .$$

Ya mencionamos que para el álgebra con la que estamos trabajando (tipo A_n), el grupo de Weyl W es isomorfo a S_{n+1} . El siguiente paso es encontrar los vectores de peso máximo de las representaciones irreducibles que aparecen, que en el caso de la cohomología trivial son de la forma $\sigma\rho - \rho$.

2.1. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$.

En esta subsección determinaremos los elementos mencionados en el teorema de Kostant para el caso en el que la subálgebra parabólica \mathfrak{p} este parametrizada por un subconjunto de dos raíces simples $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$, para h, k tales que $1 \leq h < k \leq n+1$.

TEOREMA 4.1. *Sea \mathfrak{p} la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$, entonces el subconjunto W^1 es*

$$W^1 = \left\{ \sigma \in S_{n+1} : \begin{cases} \sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(2) < \cdots < \sigma^{-1}(h) \\ \sigma^{-1}(h+1) < \sigma^{-1}(h+2) < \cdots < \sigma^{-1}(k) \\ \sigma^{-1}(k+1) < \sigma^{-1}(k+2) < \cdots < \sigma^{-1}(n+1) \end{cases} \right\} .$$

DEMOSTRACIÓN. Como $W \simeq S_{n+1}$, por el teorema de Kostant

$$W^1 = \{ \sigma \in S_{n+1} : \sigma^{-1} \Delta_1^+ \subset \Delta^+ \} .$$

Las permutaciones del conjunto W^1 son entonces, funciones $\sigma : I_{n+1} \rightarrow I_{n+1}$ tales que

$$\forall e_i - e_j \in \Delta_1^+, \sigma^{-1}(e_i - e_j) \in \Delta^+ .$$

Como

$$\Delta_1^+ = \{e_i - e_j : 1 \leq i < j \leq h\} \cup \{e_i - e_j : h+1 \leq i < j \leq k\} \cup \{e_i - e_j : k+1 \leq i < j \leq n+1\},$$

por la acción del grupo de Weyl en el subconjunto de raíces se tiene que,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}\Delta_1^+ = & \{e_{\sigma^{-1}(i)} - e_{\sigma^{-1}(j)} : 1 \leq i < j \leq h\} \cup \\ & \{e_{\sigma^{-1}(i)} - e_{\sigma^{-1}(j)} : h+1 \leq i < j \leq k\} \cup \{e_{\sigma^{-1}(i)} - e_{\sigma^{-1}(j)} : k+1 \leq i < j \leq n+1\}, \end{aligned}$$

pero $\sigma^{-1}\Delta_1^+$ debe ser un conjunto de raíces positivas y esto se cumple siempre que $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$ para $1 \leq i < j \leq h$, $h+1 \leq i < j \leq k$ y $k+1 \leq i < j \leq n+1$.

□

El teorema asegura que las permutaciones pertenecientes a W^1 , están caracterizadas por sus inversas; en las que el dominio esta dividido en tres sectores (en correspondencia con los bloques que determina el factor de Levy) y en cada uno de estos sectores σ^{-1} es creciente.

En el siguiente lema calcularemos el cardinal del conjunto W^1 , es decir el número de representaciones irreducibles para la descomposición de la cohomología.

LEMA 4.2. *El cardinal del conjunto W^1 que denotaremos $|W^1|$, es $\binom{n+1}{h} \binom{n+1-h}{k-h}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.1, toda $\sigma \in W^1$ es de la forma

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & h & h+1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n+1 \\ \sigma^{-1}(1) & \cdots & \sigma^{-1}(h) & \sigma^{-1}(h+1) & \cdots & \sigma^{-1}(k) & \sigma^{-1}(k+1) & \cdots & \sigma^{-1}(n+1) \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(1) &< \sigma^{-1}(2) < \cdots < \sigma^{-1}(h), \\ \sigma^{-1}(h+1) &< \sigma^{-1}(h+2) < \cdots < \sigma^{-1}(k) \text{ y} \\ \sigma^{-1}(k+1) &< \sigma^{-1}(k+2) < \cdots < \sigma^{-1}(n+1), \end{aligned}$$

por lo tanto, determinar el número de elementos W^1 se reduce a un simple cálculo combinatorio.

En consecuencia, el número de permutaciones diferentes que se pueden determinar bajo estas condiciones es $\binom{n+1}{h} \binom{n+1-h}{k-h}$. □

Otro resultado necesario para poder aplicar el teorema de Kostant en el cálculo de la cohomología trivial, es determinar el vector de peso máximo $\sigma\rho - \rho$ de cada representación irreducible de \mathfrak{g}_1 .

TEOREMA 4.3. *Para cada permutación $\sigma \in W^1$, el vector de peso máximo correspondiente se puede obtener de la siguiente manera:*

$$\sigma\rho - \rho = \sum_{i=1}^{n+1} (i - \sigma^{-1}(i)) e_i,$$

con ρ la semisuma de todas las raíces positivas.

DEMOSTRACIÓN. La semisuma de todas las raíces positivas para las álgebras de tipo A_n es,

$$\rho = \frac{1}{2} (ne_1 + (n-2)e_2 + \cdots - (n-2)e_n - ne_{n+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (n+2-2i)e_i.$$

Por lo tanto, para $\sigma \in W^1$

$$\begin{aligned} \sigma\rho - \rho &= \sigma \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (n-2i+2) e_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (n-2i+2) e_i, \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (n-2i+2) e_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n+1} (n-2i+2) e_i \right), \\ &\text{como } \sigma \text{ es una biyección, si } \sigma(i) = j, \text{ entonces} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (n-2\sigma^{-1}(j)+2) e_j - \sum_{i=1}^{n+1} (n-2i+2) e_i \right), \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (n-2\sigma^{-1}(i)+2) e_i - \sum_{i=1}^{n+1} (n-2i+2) e_i \right), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (-2\sigma^{-1}(i)+2i) e_i, \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (i - \sigma^{-1}(i)) e_i. \end{aligned}$$

□

Basta entonces, determinar las permutaciones inversas para obtener los vectores de peso máximo.

Queda ahora demostrar como podemos calcular la dimensión de una representación irreducible utilizando los resultados que hemos obtenidos hasta el momento.

TEOREMA 4.4. *La dimensión de una representación irreducible de peso máximo $\sigma\rho - \rho$ es:*

$$\dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \prod_{(e_i - e_j) \in \Delta_1^+} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $V_1^{\sigma\rho-\rho}$ una representación irreducible de peso máximo $\sigma\rho - \rho$, por la fórmula de Weyl para el cálculo de la dimensión se tiene:

$$\dim V_1^{\sigma\rho-\rho} = \frac{\prod_{\alpha \in \Delta_1^+} ((\sigma\rho - \rho) + \rho, \alpha)}{\prod_{\alpha \in \Delta_1^+} (\rho, \alpha)}$$

Para cada $\alpha = (e_i - e_j) \in \Delta_1^+$,

$$\begin{aligned} (\sigma\rho - \rho + \rho, \alpha) &= (\sigma\rho, \alpha), \\ &= \left(\sigma \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n+1} (n - 2r + 2) e_r, e_i - e_j \right), \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n+1} (n - 2r + 2) e_{\sigma(r)}, e_i - e_j \right), \\ &\text{como } \sigma \text{ es una biyección, si } \sigma(r) = s, \text{ entonces} \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n+1} (n - 2\sigma^{-1}(s) + 2) e_s, e_i - e_j \right), \\ (6) \quad &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n+1} (n - 2\sigma^{-1}(s) + 2) (e_s, e_i - e_j), \\ &\text{como } (e_s, e_i - e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } s = i, \\ -1, & \text{si } s = j, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}, \text{ entonces} \\ &= \frac{1}{2} (n - 2\sigma^{-1}(i) + 2) - \frac{1}{2} (n - 2\sigma^{-1}(j) + 2), \\ &= \sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\rho, \alpha) &= \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n+1} (n - 2r + 2) e_r, e_i - e_j \right), \\ (7) \quad &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n+1} (n - 2r + 2) (e_r, e_i - e_j), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n+1} (n - 2r + 2) (e_r, e_i - e_j), \\ &= j - i. \end{aligned}$$

De los resultados obtenidos en (6) y (7), se tiene entonces que:

$$\dim V_1^{\sigma\rho-\rho} = \prod_{(e_i - e_j) \in \Delta_1^+} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

□

2.2. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$.

Vamos a desarrollar el caso particular de una subálgebra parabólica

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n},$$

parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ contenida en un álgebra de tipo A_n , para $n \geq 2$.

Para este conjunto π_0 , como se detallo en la Sección 1, la descomposición del conjunto de las raíces es:

$$\begin{aligned} \Delta_1^+ = \{ & e_3 - e_4, e_3 - e_5, \dots, e_3 - e_{n+1}, \\ & e_4 - e_5, \dots, e_4 - e_{n+1}, \\ & \dots \\ & e_n - e_{n+1} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_n^+ = \{ & e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_{n+1}, \\ & e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_{n+1} \}, \end{aligned}$$

y la expresión del nilradical como suma de espacios raíces es:

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{z} \oplus V, \quad \text{con } V = X \oplus Y \quad \text{y } \mathfrak{z} \text{ el centro de } \mathfrak{n}.$$

Llamando

$$\Delta_X = \{e_1 - e_2\}, \quad \Delta_Y = \{e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_{n+1}\} \quad \text{y} \quad \Delta_{\mathfrak{z}} = \{e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_{n+1}\},$$

cada espacio se puede expresar como suma directa de los espacios raíces correspondientes de la siguiente manera:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_X} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{y} \quad \mathfrak{z} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

El álgebra \mathfrak{n} está generada entonces por una base

$$\{x, y_1, \dots, y_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}\},$$

donde los únicos corchetes no nulos se obtienen para

$$[x, y_i] = z_i,$$

y las dimensiones de cada uno de los espacios son:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dim V &= n, \\ \dim \mathfrak{z} &= n - 1, \\ \dim \mathfrak{n} &= 2n - 1. \end{aligned}$$

En el siguiente esquema gráfico representamos la subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$.

$$\mathfrak{p} =$$

\mathfrak{g}_1	x	z_1	\cdots	$z_{(n-1)}$
	\mathfrak{g}_1	y_1	\cdots	$y_{(n-1)}$
\mathfrak{g}_1				

Para este caso, el conjunto W^1 esta formado por las permutaciones σ del intervalo inicial I_{n+1} que cumplen la siguiente condición:

$$\forall i, j : 3 \leq i < j \leq n+1, \quad \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j),$$

y el Lema 4.2 asegura que el número de representaciones irreducibles es

$$|W^1| = \binom{n+1}{1} \binom{n}{2-1} = n(n+1).$$

Enunciemos el siguiente teorema que define a las permutaciones de W^1 .

TEOREMA 4.5. *Los elementos de W^1 son permutaciones del intervalo inicial I_{n+1} , $\sigma_{m,M}$ y $\overline{\sigma}_{m,M}$ con m, M tal que $1 \leq m < M \leq n+1$ que verifican las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \sigma_{m,M}(m) &= 1, \\ \sigma_{m,M}(M) &= 2, \\ 3 \leq \sigma_{m,M}(i) < \sigma_{m,M}(j) \leq n+1, \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}, \\ \overline{\sigma}_{m,M}(m) &= 2, \\ \overline{\sigma}_{m,M}(M) &= 1, \\ 3 \leq \overline{\sigma}_{m,M}(i) < \overline{\sigma}_{m,M}(j) \leq n+1, \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.1, el conjunto W^1 esta formado por las permutaciones σ del intervalo inicial I_{n+1} que verifican:

$$\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \quad \forall i, j : 3 \leq i < j \leq n+1,$$

es decir que, para cada $m, M : 1 \leq m < M \leq n + 1$ se pueden determinar dos permutaciones diferentes, $\sigma_{m,M}$ y $\overline{\sigma_{m,M}}$, que cumplen con las condiciones mencionadas.

De manera explícita entonces:

$$\sigma_{m,M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m+1 & m+2 & \cdots & M & M+1 & \cdots & n+1 \\ m & M & 1 & \cdots & m-1 & m+1 & \cdots & M-1 & M+1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\sigma_{m,M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & M & M+1 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & m+1 & 1 & m+2 & \cdots & 2 & M+1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{\sigma_{m,M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m+1 & m+2 & \cdots & M & M+1 & \cdots & n+1 \\ M & m & 1 & \cdots & m-1 & m+1 & \cdots & M-1 & M+1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\overline{\sigma_{m,M}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & M & M+1 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & m+1 & 2 & m+2 & \cdots & 1 & M+1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, fijados m y M las permutaciones deben verificar las siguiente condiciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{m,M}(m) &= 1, \\ \sigma_{m,M}(M) &= 2, \\ 3 \leq \sigma_{m,M}(i) < \sigma_{m,M}(j) \leq n+1, \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{m,M}}(m) &= 2, \\ \overline{\sigma_{m,M}}(M) &= 1, \\ 3 \leq \overline{\sigma_{m,M}}(i) < \overline{\sigma_{m,M}}(j) \leq n+1, \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}. \end{aligned}$$

□

Un resultado importante al determinar los grupos de cohomología es el grado cohomológico l de cada representación irreducible, que en su Teorema, Kostant mostró que es el cardinal del conjunto de raíces negativas que bajo la acción de σ son positivas, es decir $|\sigma\Delta^- \cap \Delta^+| = l$.

En el siguiente lema daremos una expresión para calcular l .

LEMA 4.6. *Para $\sigma_{m,M}$ y $\overline{\sigma_{m,M}} \in W^1$, se cumple que:*

$$l(\sigma_{m,M}) = m + M - 3 \quad y \quad l(\overline{\sigma_{m,M}}) = m + M - 2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$(9) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & \cdots & M & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1\acute{o}(2) & \cdots & 2\acute{o}(1) & \cdots & n+1 \end{pmatrix} \in W^1,$$

con $1 \leq m < M \leq n + 1$.

La acción de σ en el conjunto $\Delta^- = \{e_j - e_i : 1 \leq i < j \leq n+1\}$ es

$$\sigma\Delta^- = \{e_{\sigma(j)} - e_{\sigma(i)} : 1 \leq i < j \leq n+1\}.$$

El grado cohomológico de σ es el cardinal del conjunto $\sigma\Delta^- \cap \Delta^+$, es decir es el número de raíces positivas que pertenecen a $\sigma\Delta^-$.

Es decir:

$$|\sigma\Delta^- \cap \Delta^+| = |\{e_{\sigma(j)} - e_{\sigma(i)} : \sigma(i) > \sigma(j), \quad 1 \leq i < j \leq n+1\}|.$$

Por (9), $\forall i, j \in I_{n+1} - \{m, M\} : i < j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$, entonces:

$$|\sigma\Delta^- \cap \Delta^+| = |\{e_{\sigma(m)} - e_{\sigma(i)} : \sigma(i) > \sigma(m), \quad 1 \leq i < m\} \cup \{e_{\sigma(M)} - e_{\sigma(i)} : \sigma(i) > \sigma(M), \quad 1 \leq i < M\}|.$$

Así:

▪ para

$$\sigma_{m,M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & \cdots & M & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & \cdots & 2 & \cdots & n+1 \end{pmatrix},$$

$$|\sigma_{m,M}\Delta^- \cap \Delta^+| = |\{e_1 - e_{\sigma_{m,M}(i)}, \quad 1 \leq i < m\} \cup \{e_2 - e_{\sigma_{m,M}(i)}, \quad 1 \leq i < M, \quad i \neq m\}| = (m-1) + (M-2).$$

Por lo tanto

$$l(\sigma_{m,M}) = m + M - 3.$$

▪ Para

$$\overline{\sigma_{m,M}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & \cdots & M & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & 2 & \cdots & 1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix} \in W^1,$$

$$|\overline{\sigma_{m,M}}\Delta^- \cap \Delta^+| = |\{e_2 - e_{\overline{\sigma_{m,M}}(i)}, \quad 1 \leq i < m\} \cup \{e_1 - e_{\overline{\sigma_{m,M}}(i)}, \quad 1 \leq i < M\}| = (m-1) + (M-1).$$

Por lo tanto

$$l(\overline{\sigma_{m,M}}) = m + M - 2.$$

□

En el siguiente lema determinaremos los vectores de peso máximo correspondientes a cada representación irreducible de \mathfrak{g}_1 en términos del conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$.

LEMA 4.7. *Los vectores de peso máximo correspondientes a las representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 , para cada $m < M$ son de la forma*

$$\sigma_{m,M}\rho - \rho = \left(1 - m, 2 - M, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{M-m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-M} \right)$$

y

$$\overline{\sigma_{m,M}}\rho - \rho = \left(1 - M, 2 - m, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{M-m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-M} \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Este resultado es consecuencia inmediata del Teorema 4.3.

Sean m y M tales que $1 \leq m < M \leq n + 1$ y

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & \cdots & M & \cdots & n + 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1\delta(2) & \cdots & 2\delta(1) & \cdots & n + 1 \end{pmatrix} \in W^1,$$

entonces

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(1) &= m \text{ ó } (M), \\ \sigma^{-1}(2) &= M \text{ ó } (m) \quad \text{y} \\ \sigma^{-1}(i) &< \sigma^{-1}(j), \quad \forall i, j : 3 \leq i < j \leq n + 1, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(\sigma^{-1}(3), \dots, \sigma^{-1}(n + 1)) = \left(\underbrace{1, \dots, m - 1}_{m-1}, \underbrace{m + 1, \dots, M - 1}_{M-m-1}, \underbrace{M + 1, \dots, n + 1}_{n+1-M} \right).$$

Por el Teorema 4.3 los vectores de peso máximo se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma\rho - \rho &= \sum_{i=1}^{n+1} (i - \sigma^{-1}(i))e_i, \\ &= (1 - \sigma^{-1}(1))e_1 + (2 - \sigma^{-1}(2))e_2 + \sum_{i=3}^{m-1+2} (i - \sigma^{-1}(i))e_i \\ &\quad + \sum_{i=m+2}^{m+1-(M-m-1)} (i - \sigma^{-1}(i))e_i + \sum_{i=M+1}^{M-(n+1-M)} (i - \sigma^{-1}(i))e_i, \\ &= (1 - \sigma^{-1}(1))e_1 + (2 - \sigma^{-1}(2))e_2 + \sum_{i=3}^{m+1} 2e_i + \sum_{i=m+2}^M 1e_i + \sum_{i=M+1}^{n+1} 0e_i. \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces:

- Para $\sigma = \sigma_{m,M}$, el vector de peso máximo es

$$\sigma_{m,M}\rho - \rho = \left(1 - m, 2 - M, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{M-m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-M} \right).$$

- Para $\sigma = \overline{\sigma_{m,M}}$, el vector de peso máximo es

$$\overline{\sigma_{m,M}}\rho - \rho = \left(1 - M, 2 - m, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{M-m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-M} \right).$$

□

Con estos resultados es fácil determinar la dimensión de cada espacio irreducible en la descomposición de Kostant. Enunciemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.8. *Para toda permutación σ perteneciente a W^1 , $\sigma = \sigma_{m,M}$ ó $\sigma = \overline{\sigma_{m,M}}$ con $m < M$,*

$$\dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \frac{M - m}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. La fórmula para determinar la dimensión de una representación irreducible de peso máximo $\sigma\rho - \rho$ determinada por el Teorema 4.4 es:

$$\dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \prod_{(e_i - e_j) \in \Delta_1^+} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

Como en este caso

$$\Delta_1^+ = \{e_3 - e_4, e_3 - e_5, \dots, e_3 - e_{n+1}, \\ e_4 - e_5, \dots, e_4 - e_{n+1}, \\ \dots \\ e_n - e_{n+1}\},$$

la expresión para la dimensión es entonces,

$$(10) \quad \dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

Para $\sigma \in W^1$, fijados los enteros m, M , con $1 \leq m < M \leq n + 1$, σ es de la forma

$$\sigma = \sigma_{m,M} \quad \text{ó} \quad \sigma = \overline{\sigma_{m,M}},$$

y sus inversas

$$\sigma_{m,M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m & \cdots & M & \cdots & n+1 \\ m & M & 1 & \cdots & m-2 & \cdots & M-1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\sigma_{m,M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m & \cdots & M & \cdots & n+1 \\ M & m & 1 & \cdots & m-2 & \cdots & M-1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}.$$

Restringiendo el dominio a $I_{n+1} - \{1, 2\}$, $\sigma_{m,M}^{-1} = \overline{\sigma_{m,M}}^{-1}$. Llamando σ^{-1} a esta restricción, se tiene:

$$\sigma^{-1} = \sigma_{m,M}^{-1} = \overline{\sigma_{m,M}}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 4 & \cdots & m+1 & m+2 & \cdots & M & M+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & \cdots & m-1 & m+1 & \cdots & M-1 & M+1 & \cdots & n+1 \end{array} \right).$$

Para desarrollar el numerador de la ecuación (10), tengamos en cuenta que

$$\forall i, j: \quad 3 \leq i < j \leq n+1, \quad \sigma^{-1}(i) = h < \sigma^{-1}(j) = k,$$

con,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(i) &= h \in I_{n+1} - \{m, M\}, \\ \sigma^{-1}(j) &= k \in I_{n+1} - \{m, M\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\prod_{3 \leq i < j \leq n+1} (\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)) = \prod_{\substack{1 \leq h < k \leq n+1 \\ h, k \notin \{m, M\}}} (k - h),$$

como el nombre de las variables no afecta el resultado utilizaremos i, j en lugar de h, k , entonces

$$\prod_{3 \leq i < j \leq n+1} (\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{m, M\}}} (j - i),$$

así

$$(11) \quad \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} = \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{m, M\}}} (j - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}.$$

En la siguiente lista están todos los factores $(j - i)$, tales que $1 \leq i < j \leq n+1$.

Con $\widehat{(\cdot)}$ se señalaron los que no están en el numerador de la expresión que debemos calcular.

$$\begin{array}{cccccccc} (2-1) & (3-1) & \cdots & \widehat{(m-1)} & (m+1-1) & \cdots & \widehat{(M-1)} & (M+1-1) & \cdots & (n+1-1) \\ & (3-2) & \cdots & \widehat{(m-2)} & (m+1-2) & \cdots & \widehat{(M-2)} & (M+1-2) & \cdots & (n+1-2) \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \widehat{(m-(m-1))} & (m+1-(m-1)) & \cdots & \widehat{(M-(m-1))} & (M+1-(m-1)) & \cdots & (n+1-(m-1)) \\ & & & & \widehat{(m+1-m)} & \cdots & \widehat{(M-m)} & (M+1-m) & \cdots & (n+1-m) \\ & & & & & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \widehat{(M-(M-1))} & (M+1-(M-1)) & \cdots & (n+1-(M-1)) \\ & & & & & & & \widehat{(M+1-M)} & \cdots & (n+1-M) \\ & & & & & & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & & & (n+1-1) \end{array}$$

Teniendo en cuenta los factores, que no aparecen en el numerador, el cociente (11) se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
 \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} &= \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{m, M\}}} (j - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}, \\
 &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n+1} (j - i) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (m - i) \cdot \prod_{i=1}^{M-1} (M - i) \cdot \prod_{\substack{j=m+1 \\ j \neq M}}^{n+1} (j - m) \cdot \prod_{j=M+1}^{n+1} (j - M)}, \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^2 \prod_{j=i+1}^{n+1} (j - i) \cdot \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n+1} (j - i) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (m - i) \cdot \prod_{i=1}^{M-1} (M - i) \cdot \prod_{\substack{j=m+1 \\ j \neq M}}^{n+1} (j - m) \cdot \prod_{j=M+1}^{n+1} (j - M)}, \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^2 \prod_{j=i+1}^{n+1} (j - i)}{\prod_{i=1}^{m-1} (m - i) \cdot \prod_{i=1}^{M-1} (M - i) \cdot \prod_{\substack{j=m+1 \\ j \neq M}}^{n+1} (j - m) \cdot \prod_{j=M+1}^{n+1} (j - M)}, \\
 &= \frac{(M - m) \prod_{i=1}^2 \prod_{j=i+1}^{n+1} (j - i)}{\prod_{i=1}^{m-1} (m - i) \cdot \prod_{i=1}^{M-1} (M - i) \cdot \prod_{j=m+1}^{n+1} (j - m) \cdot \prod_{j=M+1}^{n+1} (j - M)}, \\
 &= \frac{(M - m) \prod_{j=1+1}^{n+1} (j - 1) \cdot \prod_{j=2+1}^{n+1} (j - 2)}{\prod_{i=1}^{m-1} (m - i) \cdot \prod_{i=1}^{M-1} (M - i) \cdot \prod_{j=m+1}^{n+1} (j - m) \cdot \prod_{j=M+1}^{n+1} (j - M)}, \\
 &= \frac{(M - m) n! (n - 1)!}{(m - 1)! (M - 1)! (n + 1 - m)! (n + 1 - M)!}, \\
 &= \frac{(M - m)}{n} \binom{n}{m - 1} \binom{n}{M - 1}.
 \end{aligned}$$

Probamos entonces que:

$$\dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \frac{(M - m)}{n} \binom{n}{m - 1} \binom{n}{M - 1}.$$

□

En el siguiente teorema vamos a determinar la dimensión del espacio $H^p(\mathfrak{n})$ para $p = 0, \dots, \dim \mathfrak{n}$, utilizando las herramientas que hemos obtenido en esta subsección. Este es un resultado ya conocido como los Números de Betti, ver [8].

TEOREMA 4.9 (Números de Betti). *Sea \mathfrak{n} , el nilradical de la subálgebra parabólica parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$.*

Para $0 \leq p \leq \dim \mathfrak{n}$

$$\dim H^p(\mathfrak{n}) = \binom{n}{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para el nilradical \mathfrak{n} , los espacios de cohomología trivial son $H^p(\mathfrak{n})$, con $0 \leq p \leq \dim \mathfrak{n}$.

El Teorema de Kostant afirma que,

$$\dim H^p(\mathfrak{n}) = \sum_{\substack{\sigma \in W^1: \\ l(\sigma) = p}} \dim V_1^{\sigma\rho - \rho},$$

y en el Teorema 4.8 mostramos que para

$$\sigma = \sigma_{m,M} \quad \text{ó} \quad \sigma = \overline{\sigma_{m,M}}, \quad \text{con} \quad 1 \leq m < M \leq n+1,$$

$$\dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \frac{M-m}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1}.$$

La fórmula para la dimensión se puede expresar también de la siguiente manera,

$$\frac{M-m}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1} = \frac{M-1}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1} - \frac{m-1}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1},$$

y utilizando resultados de la teoría de números combinatorios, para $m \geq 2$ y $M \geq 2$ se tiene:

$$\frac{M-m}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1} = \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{M-2} - \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{M-1}.$$

Sabiendo que el grado cohomológico para cada elemento de W^1 es,

$$l(\sigma_{m,M}) = m + M - 3 \quad \text{y} \quad l(\overline{\sigma_{m,M}}) = m + M - 2,$$

para determinar todas las permutaciones de grado p que contribuyen a la dimensión de $H^p(\mathfrak{n})$ es suficiente obtener los pares (m, M) que verifican alguna de las dos posibilidades $m + M - 3 = p$ ó $m + M - 2 = p$.

Por lo tanto:

(1) Para $m + M - 3 = p \Rightarrow M = p + 3 - m$, entonces

$$m < M \Rightarrow m \leq M - 1 \Rightarrow m \leq p + 2 - m \Rightarrow m \leq \frac{p+2}{2}.$$

Hay $\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$ permutaciones de la forma $\sigma_{m,p+3-m}$
--

(2) Para $m + M - 2 = p \Rightarrow M = p + 2 - m$, entonces

$$m < M \Rightarrow m \leq M - 1 \Rightarrow m \leq p + 1 - m \Rightarrow m \leq \frac{p + 1}{2}.$$

Hay $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$ permutaciones de la forma $\overline{\sigma_{m,p+2-m}}$

Teniendo en cuenta todo lo mencionado, la dimensión del espacio cohomológico de grado p se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dim H^p(\mathfrak{n}) &= \sum_{\substack{\sigma \in W^1: \\ l(\sigma)=p}} \dim V_1^{\sigma\rho-\rho}, \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in W^1: \\ l(\sigma)=p}} \frac{M-m}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1}, \\ &= \frac{p+1}{n} \binom{n}{0} \binom{n}{p+1} + \sum_{\substack{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor \\ M=p+3-m}} \left[\binom{n}{m-1} \binom{n-1}{M-2} - \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{M-1} \right] \\ &\quad + \frac{p}{n} \binom{n}{0} \binom{n}{p} + \sum_{\substack{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor \\ M=p+2-m}} \left[\binom{n}{m-1} \binom{n-1}{M-2} - \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{M-1} \right], \\ &= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} + \sum_{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor} \left[\binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p+1-m} - \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+2-m} \right] \\ &\quad + \sum_{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor} \left[\binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p-m} - \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m} \right], \\ &= \binom{n}{p} + \sum_{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p+1-m} - \sum_{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+2-m} \\ &\quad + \sum_{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p-m} - \sum_{2 \leq m \leq \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m}. \end{aligned}$$

El límite superior de cada suma depende del hecho que p sea par o impar.

(1) Consideremos primero el caso que p sea par, $\left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor = \frac{p}{2} + 1$ y $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor = \frac{p}{2}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\dim H^p(\mathfrak{n}) &= \binom{n}{p} + \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}+1} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p+1-m} - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}+1} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+2-m} \\
&\quad + \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p-m} - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m}, \\
&= \binom{n}{p} + \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p+1-m}}_{(1)} + \binom{n}{\frac{p}{2}+1-1} \binom{n-1}{p+1-(\frac{p}{2}+1)} \\
&\quad - \sum_{1 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n-1}{m+1-2} \binom{n}{p+2-(m+1)} + \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p-m}}_{(2)} \\
&\quad - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m},
\end{aligned}$$

sumando (1) y (2)

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{p} + \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n}{p+1-m} + \binom{n}{\frac{p}{2}} \binom{n-1}{\frac{p}{2}} \\
&\quad - \binom{n-1}{1-1} \binom{n}{p-1+1} - \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n-1}{m-1} \binom{n}{p-m+1}}_{(3)} \\
&\quad - \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m}}_{(4)},
\end{aligned}$$

sumando (3) y (4)

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{p} + \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n}{p+1-m} + \binom{n}{\frac{p}{2}} \binom{n-1}{\frac{p}{2}} \\
&\quad - \binom{n}{p} - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n}{p-m+1}, \\
&= \binom{n}{\frac{p}{2}} \binom{n-1}{\frac{p}{2}}, \quad \text{como } p \text{ es par} \\
&= \binom{n}{[\frac{p+1}{2}]} \binom{n-1}{[\frac{p}{2}]}.
\end{aligned}$$

(2) si p es impar: $\left[\frac{p+2}{2}\right] = \left[\frac{p+1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{p+1}{2}$ y $\left[\frac{p+1}{2}\right] = \frac{p+1}{2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \dim H^p(\mathfrak{n}) &= \binom{n}{p} + \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p+1-m}}_{(1)} - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+2-m} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n-1}{p-m}}_{(2)} - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m}, \end{aligned}$$

sumando (1) y (2)

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{p} + \sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n}{p+1-m} - \sum_{1 \leq m \leq \frac{p+1}{2}-1} \binom{n-1}{m-1} \binom{n}{p+1-m} \\ &\quad - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m}, \\ &= \binom{n}{p} + \sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n}{p+1-m} - \binom{n-1}{0} \binom{n}{p} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n-1}{m-1} \binom{n}{p+1-m}}_{(3)} + \binom{n-1}{\frac{p+1}{2}-1} \binom{n}{p+1-\frac{p+1}{2}} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n-1}{m-2} \binom{n}{p+1-m}}_{(4)}, \end{aligned}$$

sumando (3) y (4)

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{p} + \sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n}{p+1-m} - \binom{n}{p} \\ &\quad - \sum_{2 \leq m \leq \frac{p+1}{2}} \binom{n}{m-1} \binom{n}{p+1-m} + \binom{n-1}{\frac{p-1}{2}} \binom{n}{\frac{p+1}{2}}, \\ &= \binom{n}{\frac{p+1}{2}} \binom{n-1}{\frac{p-1}{2}}, \quad \text{como } p \text{ es impar} \\ &= \binom{n}{\left[\frac{p+1}{2}\right]} \binom{n-1}{\left[\frac{p}{2}\right]}. \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\forall p : 0 \leq p \leq \dim \mathfrak{n} = 2n - 1$$

$$\dim H^p(\mathfrak{n}) = \binom{n}{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}.$$

□

Para un álgebra de Lie de tipo A_n , el nilradical \mathfrak{n} de la subálgebra parabólica parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ tiene dimensión $2n - 1$. Los espacios de cohomología trivial para este nilradical son $H^0(\mathfrak{n}), H^1(\mathfrak{n}), \dots, H^{2n-1}(\mathfrak{n})$, a partir de estos, cuyas dimensiones son conocidas, determinaremos la $\dim H^*(\mathfrak{n})$.

TEOREMA 4.10. *Si \mathfrak{n} es el nilradical de la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$, entonces*

$$\dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para la subálgebra de Lie \mathfrak{n} correspondiente al conjunto $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$, los espacios cohomológicos son $H^p(\mathfrak{n})$ con $p = 0, \dots, \dim \mathfrak{n}$ y vimos en (8) que la dimensión de \mathfrak{n} es $2n - 1 = 2(n - 1) + 1$.

Por la Dualidad de Poincaré se cumple que:

$$\forall p : 0 \leq p \leq n - 1, \quad \dim H^p(\mathfrak{n}) = \dim H^{2n-1-p}(\mathfrak{n}).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dim H^*(\mathfrak{n}) &= \sum_{0 \leq p \leq 2n-1} \dim H^p(\mathfrak{n}), \\ &\text{considerando la paridad de } p \text{ se tiene} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2n-1 \\ \text{con } p \text{ par}}} \dim H^p(\mathfrak{n}) + \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2n-1 \\ \text{con } p \text{ impar}}} \dim H^p(\mathfrak{n}), \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} \dim H^{2i}(\mathfrak{n}) + \sum_{1 \leq i \leq n} \dim H^{2i-1}(\mathfrak{n}), \\ &\text{aplicando Poincare en la segunda suma} \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} \dim H^{2i}(\mathfrak{n}) + \sum_{1 \leq i \leq n} \dim H^{2n-1-(2i-1)}(\mathfrak{n}), \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} \dim H^{2i}(\mathfrak{n}) + \sum_{1 \leq i \leq n} \dim H^{2(n-i)}(\mathfrak{n}), \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} \dim H^{2i}(\mathfrak{n}) + \sum_{0 \leq j \leq n-1} \dim H^{2j}(\mathfrak{n}), \\ &= 2 \sum_{0 \leq i \leq n-1} \dim H^{2i}(\mathfrak{n}). \end{aligned}$$

Aplicando el resultado del Teorema 4.9,

$$\begin{aligned} \dim H^*(\mathfrak{n}) &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{\lfloor \frac{2i+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{\lfloor \frac{2i}{2} \rfloor}, \\ &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i}, \end{aligned}$$

reemplazando el segundo factor por su combinatorio complementario

$$= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{n-1-i},$$

de la fórmula para suma de expresiones con combinatorios

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \binom{m}{r-i} &= \binom{n+m}{r}, \text{ se tiene:} \\ &= 2 \binom{n+n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1},$$

que es el resultado propuesto. □

Con este teorema concluimos esta subsección.

La fórmula obtenida para el cálculo de la dimensión de cohomología total es el objetivo principal en este capítulo, en general para referirnos a $\dim H^*(\mathfrak{n})$ utilizaremos $TH(n)$, dando relevancia a n correspondiente el álgebra en la que estamos trabajando, tipo A_n .

2.3. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$.

En esta subsección estudiaremos la subálgebra parabólica

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n},$$

parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$, contenida en un álgebra de tipo A_n con $n \geq 2$. Para este conjunto π_0 la descomposición del conjunto de las raíces es:

$$\begin{aligned} \Delta_1^+ &= \{e_2 - e_3, e_2 - e_4, \dots, e_2 - e_n, \\ &\quad e_3 - e_4, \dots, e_3 - e_n, \\ &\quad \dots \\ &\quad e_{n-1} - e_n\}, \end{aligned}$$

$$\Delta_n^+ = \{e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n\} \cup \{e_2 - e_{n+1}, e_3 - e_{n+1}, \dots, e_n - e_{n+1}\} \cup \{e_1 - e_{n+1}\}.$$

El nilradical \mathfrak{n} para este caso, es conocido como **álgebra de Heisenberg** y tiene la siguiente descomposición como suma de espacios raíces,

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{n}}^+} \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{z} \oplus V, \quad \text{con} \quad V = X \oplus Y \quad \text{y} \quad \mathfrak{z} \text{ el centro de } \mathfrak{n}.$$

Como vimos en la Sección 1, $\Delta_{\mathfrak{n}}^+$ es unión de

$$\Delta_X = \{e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n\}, \quad \Delta_Y = \{e_2 - e_{n+1}, e_3 - e_{n+1}, \dots, e_n - e_{n+1}\}$$

y $\Delta_{\mathfrak{z}} = \{e_1 - e_{n+1}\},$

y cada espacio se puede expresar en función de los espacios raíces correspondientes de la siguiente manera:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_X} \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{z} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Para esta descomposición, una base para \mathfrak{n} es :

$$\{x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, z\},$$

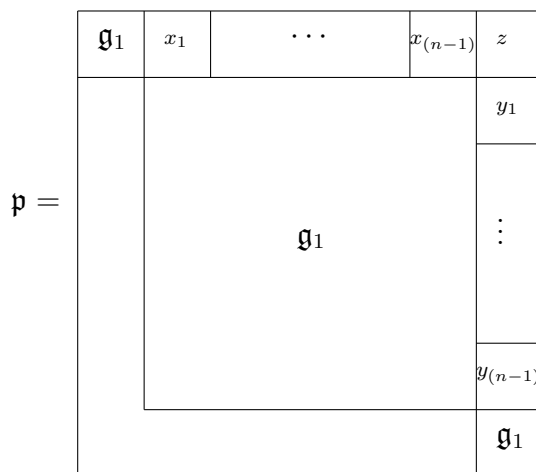
con coeficiente de estructura:

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij}z.$$

La dimensión de cada espacio es:

$$(12) \quad \begin{aligned} \dim V &= 2(n - 1), \\ \dim \mathfrak{z} &= 1, \\ \dim \mathfrak{n} &= 2n - 1 = 2(n - 1) + 1, \end{aligned}$$

En el siguiente esquema gráfico, representamos la subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{C})$.



Mostramos en el Teorema 4.1 que el conjunto W^1 es, en este caso, el de las permutaciones σ del intervalo inicial I_{n+1} que verifican:

$$\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \quad \forall i, j : 2 \leq i < j \leq n,$$

es decir que, para cada $m, M : 1 \leq m < M \leq n + 1$ se pueden determinar dos permutaciones diferentes, $\sigma_{m,M}$ y $\overline{\sigma_{m,M}}$, explícitamente sus inversas son:

$$\sigma_{m,M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots & m & m+1 & \cdots & M-1 & M & \cdots & n & n+1 \\ m & 1 & 2 \cdots & m-1 & m+1 & \cdots & M-1 & M+1 & \cdots & n+1 & M \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{\sigma_{m,M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots & m & m+1 & \cdots & M-1 & M & \cdots & n & n+1 \\ M & 1 & 2 \cdots & m-1 & m+1 & \cdots & M-1 & M+1 & \cdots & n+1 & m \end{pmatrix}.$$

El número de representaciones irreducibles para la descomposición de la cohomología es

$$|W^1| = \binom{n+1}{1} \binom{n}{n-1} = n(n+1).$$

OBSERVACIÓN 4.11.

El álgebra de Heisenberg, \mathfrak{n} correspondiente al subconjunto de raíces simples $\{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$ tiene la misma dimensión que el nilradical de la parabólica estudiada en la subsección anterior ($\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$), pero no son álgebras de Lie isomorfas. Aun así, tienen el mismo número de representaciones irreducibles en la descomposición de Kostant.

El siguiente teorema, pone de manifiesto la forma explícita de cada elemento de W^1 .

TEOREMA 4.12. *Los elementos de W^1 para el caso del álgebra parabólica parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$, son las permutaciones del intervalo inicial I_{n+1} , $\sigma_{m,M}$ y $\overline{\sigma_{m,M}}$ con m, M tal que $1 \leq m < M \leq n + 1$; que verifican las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \sigma_{m,M}(m) &= 1, \\ \sigma_{m,M}(M) &= n + 1, \\ 2 \leq \sigma_{m,M}(i) < \sigma_{m,M}(j) \leq n, & \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}, \\ \overline{\sigma_{m,M}}(m) &= n + 1, \\ \overline{\sigma_{m,M}}(M) &= 1, \\ 2 \leq \overline{\sigma_{m,M}}(i) < \overline{\sigma_{m,M}}(j) \leq n, & \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Los fundamentos para la demostración de este enunciados son los mismos que los del Teorema 4.5. La demostración esta desarrollada, sólo para dejar expresada de manera explícita la forma de las permutaciones y sus inversas.

El conjunto W^1 esta formado por las permutaciones σ del intervalo inicial I_{n+1} que verifican:

$$\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \quad \forall i, j : 2 \leq i < j \leq n,$$

por lo tanto, para cada $m, M : 1 \leq m < M \leq n + 1$ se pueden determinar dos permutaciones diferentes, $\sigma_{m,M}$ y $\overline{\sigma_{m,M}}$ que cumplen con las condiciones mencionadas. De manera explícita entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_{m,M}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m & m+1 & \cdots & M-1 & M & \cdots & n & n+1 \\ m & 1 & 2 & \cdots & m-1 & m+1 & \cdots & M-1 & M+1 & \cdots & n+1 & M \end{pmatrix} \implies \\ \sigma_{m,M} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & M-1 & M & M+1 & \cdots & n+1 \\ 2 & 3 & \cdots & m & 1 & m+1 & \cdots & M-1 & n+1 & M & \cdots & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{m,M}}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m & m+1 & \cdots & M-1 & M & \cdots & n & n+1 \\ M & 1 & 2 & \cdots & m-1 & m+1 & \cdots & M-1 & M+1 & \cdots & n+1 & m \end{pmatrix} \implies \\ \overline{\sigma_{m,M}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & M-1 & M & M+1 & \cdots & n+1 \\ 2 & 3 & \cdots & m & n+1 & m+1 & \cdots & M-1 & 1 & M & \cdots & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conclusión, fijados m y M las permutaciones deben verificar las siguiente condiciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{m,M}(m) &= 1, \\ \sigma_{m,M}(M) &= n+1, \\ 2 \leq \sigma_{m,M}(i) < \sigma_{m,M}(j) \leq n, & \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{m,M}}(m) &= n+1, \\ \overline{\sigma_{m,M}}(M) &= 1, \\ 2 \leq \overline{\sigma_{m,M}}(i) < \overline{\sigma_{m,M}}(j) \leq n, & \quad \forall i < j \in I_{n+1} - \{m, M\}. \end{aligned}$$

□

En el siguiente lema determinaremos los vectores de peso máximo correspondientes a cada representación irreducible de \mathfrak{g}_1 en términos del conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$.

Este resultado es una consecuencia trivial del teorema 4.3

LEMA 4.13. *Los vectores de peso máximo correspondientes a las representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 , para cada $m < M$ son de la forma*

$$\sigma_{m,M}\rho - \rho = \left(1 - m, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-m-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-M}, n + 1 - M \right)$$

y

$$\overline{\sigma_{m,M}}\rho - \rho = \left(1 - M, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-m-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-M}, n + 1 - m \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean m y M tales que $1 \leq m < M \leq n + 1$, las permutaciones de W^1 correspondientes son $\sigma_{m,M}$ y $\overline{\sigma_{m,M}}$.

Por 4.3 los vectores de peso máximo se pueden calcular como:

$$\sigma\rho - \rho = \sum_{i=1}^{n+1} (i - \sigma^{-1}(i))e_i,$$

así:

- para $\sigma_{m,M}$ se tiene que:

$$\sigma_{m,M}^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} 1 & 2 & \dots & m-1 & m & & m+1 & \dots & M-1 & & M & M+1 & \dots & n & & n+1 \\ \hline m & 1 & \dots & m-2 & m-1 & & m+1 & \dots & M-1 & & M+1 & M+2 & \dots & n+1 & & M \end{array} \right),$$

por lo tanto

$$\sigma_{m,M}\rho - \rho = \left(1 - m, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-m-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-M}, n + 1 - M \right).$$

- para $\overline{\sigma_{m,M}}$ se tiene que:

$$\overline{\sigma_{m,M}}^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} 1 & 2 & \dots & m-1 & m & & m+1 & \dots & M-1 & & M & M+1 & \dots & n & & n+1 \\ \hline M & 1 & \dots & m-2 & m-1 & & m+1 & \dots & M-1 & & M+1 & M+2 & \dots & n+1 & & m \end{array} \right),$$

por lo tanto

$$\overline{\sigma_{m,M}}\rho - \rho = \left(1 - M, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-m-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-M}, n + 1 - m \right)$$

□

De manera equivalente al caso estudiado en la Subsección 2.2, la dimensión de cada representación irreducible sólo depende de los valores m y M que caracterizan al correspondiente elemento de W^1 y del valor n , según el álgebra A_n en la que estemos trabajando. El siguiente teorema expone este resultado.

TEOREMA 4.14. *Sea \mathfrak{n} el nilradical de la subálgebra parabólica parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$.*

Para toda permutación σ perteneciente a W^1 , $\sigma = \sigma_{m,M}$ ó $\sigma = \overline{\sigma_{m,M}}$ con $1 \leq m < M \leq (n+1)$,

$$\dim V_1^{\sigma\rho-\rho} = \frac{M-m}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1}.$$

No haremos la demostración de este teorema, pues el desarrollo algebraico es similar al del caso de la Subsección 2.2.

Este resultado es otra coincidencia que comparte el álgebra de Heisenberg que estamos estudiando con el caso de la Subsección 2.2. Como consecuencia de este resultado y del Teorema 4.12, para el álgebra de Heisenberg de dimensión $2(n-1) + 1$ la cohomología total es

$$(13) \quad TH(n) = \dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

Por otra parte, si utilizamos las fórmulas dadas en el paper [8], que afirman que para $0 \leq p \leq n$, la dimensión del p -grupo de cohomología para el álgebra de Heisenberg \mathfrak{n} de dimensión $2(n-1) + 1$ es $\binom{2(n-1)}{p} - \binom{2(n-1)}{p-2}$, (se asume que $\binom{p}{q} = 0$, a menos que, $0 \leq q \leq p$), podemos calcular la cohomología total para esta álgebra, arribando efectivamente, a idéntico resultado.

A continuación, formalizaremos la observación mencionada, realizando la demostración utilizando los resultados del paper citado.

TEOREMA 4.15. *La dimensión del espacio cohomología trivial para el álgebra de Heisenberg \mathfrak{n} de dimensión $2(n-1) + 1$ es*

$$\dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Para el álgebra de Lie de Heisenberg \mathfrak{n} de dimensión $2(n-1) + 1$, como podemos consultar en el paper [8] $\dim(H^p(\mathfrak{n})) = \binom{2(n-1)}{p} - \binom{2(n-1)}{p-2}$, con $0 \leq p \leq (n-1)$, donde por la dualidad de Poincaré, está determinada la dimensión $\dim H^p(\mathfrak{n})$ para $n \leq p \leq 2n-1$; pues $\dim H^p = \dim H^{2n-1-p}$.

Por lo tanto

$$\dim H^*(\mathfrak{n}) = \sum_{p=0}^{2(n-1)+1} H^p(\mathfrak{n}),$$

por la dualidad de Poincaré

$$= 2 \sum_{p=0}^{n-1} H^p(\mathfrak{n}),$$

aplicando el resultado conocido como número de Betti (ver en[8])

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{p=0}^{n-1} \left[\binom{2(n-1)}{p} - \binom{2(n-1)}{p-2} \right], \\ &= 2 \sum_{p=0}^{n-1} \left[\binom{2n-2}{p} - \binom{2n-2}{p-2} \right], \\ &= 2 \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n-2}{p} - 2 \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n-2}{p-2}, \\ &= 2 \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n-2}{p} - 2 \sum_{p=2}^{n-1} \binom{2n-2}{p-2}, \\ &= 2 \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n-2}{p} - 2 \sum_{p=0}^{n-3} \binom{2n-2}{p}, \\ &= 2 \sum_{p=0}^{n-3} \binom{2n-2}{p} + 2 \binom{2n-2}{n-2} + 2 \binom{2n-2}{n-1} - 2 \sum_{p=0}^{n-3} \binom{2n-2}{p}, \\ &= 2 \binom{2n-2}{n-1} + 2 \binom{2n-2}{n-2}, \\ &= 2 \binom{2n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Queda probado entonces que:

$$\dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

□

De estos resultados podemos concluir que los nilradicales correspondientes a los subconjuntos de raíces simples $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ y $\{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$, tienen la misma cohomología total.

2.4. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$.

Consideremos la subálgebra parabólica

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n},$$

parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, contenida en un álgebra de tipo A_n , con $n \geq 3$.

Para este conjunto π_0 , como se explicó en la Sección 1 de este capítulo, la descomposición del conjunto de las raíces es:

$$\Delta_1^+ = \{e_1 - e_2\} \cup \left\{ \begin{array}{l} e_4 - e_5, e_4 - e_6, \dots, e_4 - e_{n+1}, \\ e_5 - e_6, \dots, e_5 - e_{n+1}, \\ \dots \\ e_n - e_{n+1} \end{array} \right\}$$

y

$$\Delta_n^+ = \{e_1 - e_3, e_2 - e_3\} \cup \left\{ \begin{array}{l} e_1 - e_4, \dots, e_1 - e_{n+1}, \\ e_2 - e_4, \dots, e_2 - e_{n+1} \end{array} \right\} \\ \cup \{e_3 - e_4, \dots, e_3 - e_{n+1}\}.$$

La expresión del nilradical como suma de espacios raíces es:

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{z} \oplus V, \quad \text{con} \quad V = X \oplus Y \quad \text{y} \quad \mathfrak{z} \text{ el centro de } \mathfrak{n},$$

llamando

$$\Delta_X = \{e_1 - e_3, e_2 - e_3\}, \quad \Delta_Y = \{e_3 - e_4, \dots, e_3 - e_{n+1}\} \quad \text{y} \\ \Delta_{\mathfrak{z}} = \{e_1 - e_4, \dots, e_1 - e_{n+1}, e_2 - e_4, \dots, e_2 - e_{n+1}\},$$

cada espacio se puede expresar en función de los espacios raíces correspondientes de la siguiente manera:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_X} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{z} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

por lo tanto:

$$(14) \quad \begin{aligned} \dim V &= (n + 1 - 3) + 2 = n, \\ \dim \mathfrak{z} &= 2(n + 1 - 3) = 2n - 4, \\ \dim \mathfrak{n} &= 3n - 4. \end{aligned}$$

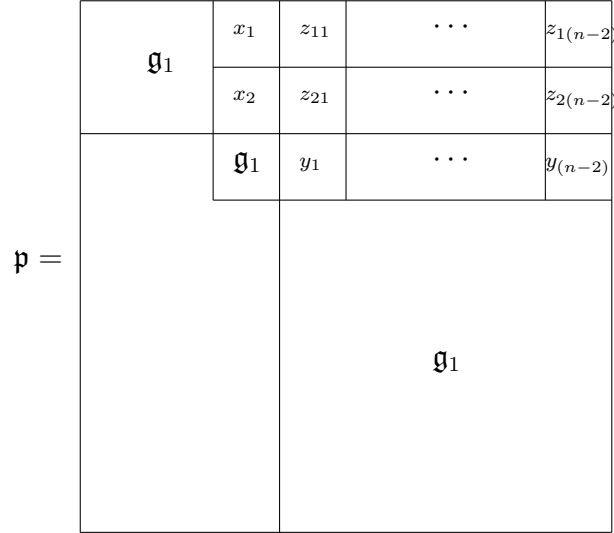
Una base para \mathfrak{n} es :

$$\{x_1, x_2, y_1, \dots, y_{(n-2)}, z_{11}, \dots, z_{1(n-2)}, z_{21}, \dots, z_{2(n-2)}\}$$

donde, los únicos corchetes no nulos se obtienen para:

$$[x_i, y_j] = z_{ij}.$$

En el siguiente esquema gráfico, representamos la subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{C})$.



Para este caso, de acuerdo a lo analizado en el Teorema 4.1 , el conjunto W^1 esta formado por las permutaciones σ del intervalo inicial I_{n+1} que verifican:

$$\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(2), \quad \text{y} \quad \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \quad \forall i, j : 4 \leq i < j \leq n + 1,$$

por lo tanto, dados tres números diferentes, $a_1, a_2, k \in I_{n+1}$ tales que, $a_1 < a_2$, existe una única permutación $\sigma \in W^1$, cuya inversa es:

$$\sigma^{-1}(1, 2, 3, \dots, n + 1) = (a_1, a_2, k, \underbrace{1, 2, \dots, n + 1}_{I_{n+1} - \{a_1, a_2, k\}})$$

Evidentemente, k puede ser menor que a_1 , mayor que a_2 ó, $a_1 < k < a_2$. En algunos casos se hará necesario saber la relación entre a_1, a_2 y k .

Enunciaremos las características de los elementos de W^1 , a través del siguiente teorema.

TEOREMA 4.16. *Para cada terna de números enteros a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$, se pueden determinar tres permutaciones pertenecientes al conjunto W^1 , σ_1, σ_2 y σ_3 tales que:*

$\sigma_1(a) = 1,$	$\sigma_1(b) = 2,$	$\sigma_1(c) = 3,$
$\sigma_2(a) = 1,$	$\sigma_2(b) = 3,$	$\sigma_2(c) = 2,$
$\sigma_3(a) = 3,$	$\sigma_3(b) = 1,$	$\sigma_3(c) = 2,$

y

$$\sigma_1(i) = \sigma_2(i) = \sigma_3(i) = \begin{cases} i+3, & 1 \leq i < a \\ i+2, & a < i < b \\ i+1, & b < i < c \\ i, & c < i \leq n+1. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Tres números diferentes, $a_1, a_2, k \in I_{n+1}$ tales que $a_1 < a_2$, determinan una única permutación $\sigma \in W^1$ que verifique las condiciones del Teorema 4.1, que cumpla que $\sigma^{-1}(1) = a_1$, $\sigma^{-1}(2) = a_2$, $\sigma^{-1}(3) = k$, su inversa es:

$$(15) \quad \sigma^{-1}(1, 2, 3, \dots, n+1) = (a_1, a_2, k, \underbrace{1, 2, \dots, n+1}_{I_{n+1} - \{a_1, a_2, k\}}).$$

Dados entonces, a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n+1$, se pueden determinar tres ternas diferentes, que cumplan con la condición (15). Si con $\widehat{(\cdot)}$ indicamos el elemento que no esta en la lista, las inversas de cada una de estas permutaciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}(1, 2, 3, \dots, n+1) &= (a, b, c, 1, \dots, \widehat{a}, \dots, \widehat{b}, \dots, \widehat{c}, \dots, n+1), \\ \sigma_2^{-1}(1, 2, 3, \dots, n+1) &= (a, c, b, 1, \dots, \widehat{a}, \dots, \widehat{b}, \dots, \widehat{c}, \dots, n+1), \\ \sigma_3^{-1}(1, 2, 3, \dots, n+1) &= (b, c, a, 1, \dots, \widehat{a}, \dots, \widehat{b}, \dots, \widehat{c}, \dots, n+1). \end{aligned}$$

se puede concluir entonces, de forma inmediata que:

■

$$\sigma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & \dots & a-3 & a-2 & a-1 & a & a+1 & \dots & b-2 & b-1 & b & b+1 & \dots & c-1 & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 4 & 5 & \dots & a & a+1 & a+2 & 1 & a+3 & \dots & b & b+1 & 2 & b+2 & \dots & c & 3 & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right),$$

por lo tanto:

$$\sigma_1(a) = 1, \quad \sigma_1(b) = 2, \quad \sigma_1(c) = 3,$$

y

$$\sigma_1(i) = \begin{cases} i+3, & 1 \leq i < a \\ i+2, & a < i < b \\ i+1, & b < i < c \\ i, & c < i \leq n+1. \end{cases}$$

■

$$\sigma_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & \dots & a-3 & a-2 & a-1 & a & a+1 & \dots & b-2 & b-1 & b & b+1 & \dots & c-1 & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 4 & 5 & \dots & a & a+1 & a+2 & 1 & a+3 & \dots & b & b+1 & 3 & b+2 & \dots & c & 2 & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right),$$

por lo tanto:

$$\sigma_2(a) = 1, \quad \sigma_2(b) = 3, \quad \sigma_2(c) = 2,$$

y

$$\sigma_2(i) = \begin{cases} i+3, & 1 \leq i < a \\ i+2, & a < i < b \\ i+1, & b < i < c \\ i, & c < i \leq n+1. \end{cases}$$

■

$$\sigma_3 = \left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & \dots & a-3 & a-2 & a-1 & a & a+1 & \dots & b-2 & b-1 & b & b+1 & \dots & c-1 & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 4 & 5 & \dots & a & a+1 & a+2 & 3 & a+3 & \dots & b & b+1 & 1 & b+2 & \dots & c & 2 & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right),$$

por lo tanto:

$$\sigma_3(a) = 3, \quad \sigma_3(b) = 1, \quad \sigma_3(c) = 2,$$

y

$$\sigma_3(i) = \begin{cases} i+3, & 1 \leq i < a \\ i+2, & a < i < b \\ i+1, & b < i < c \\ i, & c < i \leq n+1. \end{cases}$$

Con lo que queda demostrado este enunciado. \square

Por el Lema 4.2, podemos asegurar que

$$|W^1| = \binom{n+1}{2} \binom{n-1}{1} = \frac{n(n^2-1)}{2},$$

y en el siguiente lema determinaremos el grado cohomológico de cada representación irreducible determinada por los elementos de W^1 , $|\sigma\Delta^- \cap \Delta^+| = l$.

LEMA 4.17. *Para $1 \leq a < b < c \leq n+1$ el grado cohomológico de las permutaciones σ_1, σ_2 y σ_3 , determinadas por a, b, c es*

$$\begin{aligned} l(\sigma_1) &= a + b + c - 6, & l(\sigma_2) &= a + b + c - 5, \\ l(\sigma_3) &= a + b + c - 4. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\sigma \in W^1$, el grado cohomológico de la correspondiente representación irreducibles es el cardinal del conjunto $\sigma\Delta^- \cap \Delta^+$, es decir:

$$l(\sigma) = |\sigma\Delta^- \cap \Delta^+|.$$

Donde

$$\begin{aligned} \Delta^- &= \{e_j - e_i : 1 \leq i < j \leq n+1\}, \\ \sigma\Delta^- &= \{e_{\sigma(j)} - e_{\sigma(i)} : 1 \leq i < j \leq n+1\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sigma\Delta^- \cap \Delta^+ = \{e_{\sigma(j)} - e_{\sigma(i)} : 1 \leq i < j \leq n+1 \text{ y } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Dados a, b, c tal que $1 \leq a < b < c \leq n+1$, por Teorema 4.16

$\forall i, j \in I_{n+1} - \{a, b, c\} : i < j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$, luego

$$\begin{aligned} \sigma\Delta^- \cap \Delta^+ &= \{e_{\sigma(a)} - e_{\sigma(i)} : 1 \leq i < a \text{ y } \sigma(i) > \sigma(a)\} \cup \\ &\cup \{e_{\sigma(b)} - e_{\sigma(i)} : 1 \leq i < b \text{ y } \sigma(i) > \sigma(b)\} \cup \{e_{\sigma(c)} - e_{\sigma(i)} : 1 \leq i < c \text{ y } \sigma(i) > \sigma(c)\}. \end{aligned}$$

Así entonces:

■ para

$$\sigma_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & \dots & a-3 & a-2 & a-1 & | & a & | & a+1 & \dots & b-2 & b-1 & | & b & | & b+1 & \dots & c-1 & | & c & | & c+1 & \dots & n+1 \\ 4 & 5 & \dots & a & a+1 & a+2 & | & 1 & | & a+3 & \dots & b & b+1 & | & 2 & | & b+2 & \dots & c & | & 3 & | & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\Delta^- \cap \Delta^+ &= \{e_1 - e_{\sigma_1(i)} : 1 \leq i < a\} \cup \\ &\cup \{e_2 - e_{\sigma_1(i)} : 1 \leq i < b \text{ y } i \neq a\} \cup \{e_3 - e_{\sigma_1(i)} : 1 \leq i < c \text{ y } i \neq a, i \neq b\}, \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$l(\sigma_1) = (a-1) + (b-2) + (c-3) = a + b + c - 6.$$

■ para

$$\sigma_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & \dots & a-3 & a-2 & a-1 & | & a & | & a+1 & \dots & b-2 & b-1 & | & b & | & b+1 & \dots & c-1 & | & c & | & c+1 & \dots & n+1 \\ 4 & 5 & \dots & a & a+1 & a+2 & | & 1 & | & a+3 & \dots & b & b+1 & | & 3 & | & b+2 & \dots & c & | & 2 & | & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_2\Delta^- \cap \Delta^+ &= \{e_1 - e_{\sigma_2(i)} : 1 \leq i < a\} \cup \\ &\cup \{e_3 - e_{\sigma_2(i)} : 1 \leq i < b \text{ y } i \neq a\} \cup \{e_2 - e_{\sigma_2(i)} : 1 \leq i < c \text{ y } i \neq a\}, \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$l(\sigma_2) = (a-1) + (b-2) + (c-2) = a + b + c - 5.$$

■ para

$$\sigma_3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & \dots & a-3 & a-2 & a-1 & | & a & | & a+1 & \dots & b-2 & b-1 & | & b & | & b+1 & \dots & c-1 & | & c & | & c+1 & \dots & n+1 \\ 4 & 5 & \dots & a & a+1 & a+2 & | & 3 & | & a+3 & \dots & b & b+1 & | & 1 & | & b+2 & \dots & c & | & 2 & | & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_3\Delta^- \cap \Delta^+ &= \{e_3 - e_{\sigma_3(i)} : 1 \leq i < a\} \cup \\ &\cup \{e_1 - e_{\sigma_3(i)} : 1 \leq i < b\} \cup \{e_2 - e_{\sigma_3(i)} : 1 \leq i < c \text{ y } i \neq b\}, \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$l(\sigma_3) = (a-1) + (b-1) + (c-2) = a + b + c - 4.$$

Esto completa la justificación del resultado propuesto. \square

En el siguiente lema determinaremos los vectores de peso máximo correspondientes a cada representación irreducible de \mathfrak{g}_1 en términos de $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$.

LEMA 4.18. *Los vectores de peso máximo correspondientes a las representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 son, para cada $a < b < c$, de la forma:*

$$\sigma_1 \rho - \rho = \left(1 - a, 2 - b, 3 - c, \underbrace{3, \dots, 3}_{a-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{b-a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{c-b-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-c} \right),$$

$$\sigma_2 \rho - \rho = \left(1 - a, 2 - c, 3 - b, \underbrace{3, \dots, 3}_{a-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{b-a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{c-b-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-c} \right)$$

y

$$\sigma_3 \rho - \rho = \left(1 - b, 2 - c, 3 - a, \underbrace{3, \dots, 3}_{a-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{b-a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{c-b-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-c} \right).$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a lo establecido en el Teorema 4.3, el vector de peso máximo correspondiente a una permutación $\sigma \in W^1$ es

$$\sigma \rho - \rho = \sum_{i=1}^{n+1} (i - \sigma^{-1}(i)) e_i.$$

Para cada a, b, c tal que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$, existen tres permutaciones σ_1, σ_2 y σ_3 de W^1 cuyas inversas son:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ a & b & c & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}, \sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ a & c & b & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix} \text{ y} \\ \sigma_3^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ b & c & a & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

evidentemente, $\forall i \in I_{n+1} - \{1, 2, 3\}$, $\sigma_1^{-1}(i) = \sigma_2^{-1}(i) = \sigma_3^{-1}(i)$, así:

$$(4, 5, \dots, n+1) \xrightarrow{\begin{matrix} \sigma_1^{-1} \\ \sigma_2^{-1} \\ \sigma_3^{-1} \end{matrix}} \left(\underbrace{1, \dots, a-1}_{a-1}, \underbrace{a+1, \dots, b-1}_{b-a-1}, \underbrace{b+1, \dots, c-1}_{c-b-1}, \underbrace{c+1, \dots, n+1}_{n+1-c} \right),$$

explícitamente:

$$\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} = \sigma_3^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & 5 & \dots & a+2 & a+3 & \dots & b+1 & b+2 & \dots & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 1 & 2 & \dots & a-1 & a+1 & \dots & b-1 & b+1 & \dots & c-1 & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right).$$

Si σ es cualquiera de estas tres permutaciones, entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma\rho - \rho &= (1 - \sigma^{-1}(1))e_1 + (2 - \sigma^{-1}(2))e_2 + (3 - \sigma^{-1}(3))e_3 + \sum_{i=1+3}^{3+a-1} (i - \sigma^{-1}(i))e_i \\
&+ \sum_{i=a+3}^{a+2+(b-a-1)} (i - \sigma^{-1}(i))e_i + \sum_{i=b+2}^{b+1+(c-b-1)} (i - \sigma^{-1}(i))e_i + \sum_{i=c+1}^{c+(n+1-c)} (i - \sigma^{-1}(i))e_i \\
&= (1 - \sigma^{-1}(1))e_1 + (2 - \sigma^{-1}(2))e_2 + (3 - \sigma^{-1}(3))e_3 + 3 \sum_{i=4}^{a+2} e_i \\
&+ 2 \sum_{i=a+3}^{b+1} e_i + 1 \sum_{i=b+2}^c e_i + 0 \sum_{i=c+1}^{n+1} e_i.
\end{aligned}$$

Los vectores de peso máximo son entonces de la forma:

$$\sigma\rho - \rho = \left(1 - \sigma^{-1}(1), 2 - \sigma^{-1}(2), 3 - \sigma^{-1}(3), \underbrace{3, \dots, 3}_{a-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{b-a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{c-b-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-c} \right)$$

con

$$(1 - \sigma^{-1}(1), 2 - \sigma^{-1}(2), 3 - \sigma^{-1}(3)) = \begin{cases} (1 - a, 2 - b, 3 - c) & \text{para } \sigma = \sigma_1 \\ (1 - a, 2 - c, 3 - b) & \text{para } \sigma = \sigma_2 \\ (1 - b, 2 - c, 3 - a) & \text{para } \sigma = \sigma_3 \end{cases}$$

quedando así demostrado el teorema. \square

Enunciaremos y demostraremos el teorema que determina la dimensión de cada espacio irreducible en la descomposición de Kostant.

TEOREMA 4.19. *Sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in W^1$, determinadas por a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$. Entonces*

$$\dim V_1^{\sigma_1\rho-\rho} = \frac{(b-a)^2(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1},$$

$$\dim V_1^{\sigma_2\rho-\rho} = \frac{(c-a)^2(b-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1},$$

$$\dim V_1^{\sigma_3\rho-\rho} = \frac{(c-b)^2(c-a)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. La fórmula para determinar la dimensión de una representación irreducible de peso máximo $\sigma\rho - \rho$ obtenida en el Teorema 4.4 es:

$$\dim V_1^{\sigma\rho-\rho} = \prod_{(e_i - e_j) \in \Delta_1^+} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

Como en este caso

$$\Delta_1^+ = \{e_1 - e_2\} \cup \{e_4 - e_5, e_4 - e_6, \dots, e_4 - e_{n+1}, \\ e_5 - e_6, \dots, e_5 - e_{n+1}, \\ \dots, \\ e_n - e_{n+1}\},$$

la expresión para la dimensión es entonces

$$(16) \quad \dim V_1^{\sigma\rho-\rho} = \frac{\sigma^{-1}(2) - \sigma^{-1}(1)}{2 - 1} \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

Dados a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$ las inversas de los correspondientes σ_1 , σ_2 y σ_3 , son:

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ a & b & c & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ a & c & b & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ b & c & a & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}.$$

Las tres funciones inversas son iguales en $I_{n+1} - \{1, 2, 3\}$.

Restringiendo el dominio de las permutaciones a $I_{n+1} - \{1, 2, 3\}$, y llamando σ^{-1} , a la restricción, se tiene:

$$(17) \quad \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} = \sigma_3^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & 5 & \dots & a+2 & a+3 & \dots & b+1 & b+2 & \dots & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 1 & 2 & \dots & a-1 & a+1 & \dots & b-1 & b+1 & \dots & c-1 & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right).$$

Para desarrollar el numerador de la ecuación (16), tengamos en cuenta que

$$\forall i, j: \quad 4 \leq i < j \leq n + 1, \quad \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j),$$

$$\sigma^{-1}(i) = h \in I_{n+1} - \{a, b, c\} \text{ y}$$

$$\sigma^{-1}(j) = k \in I_{n+1} - \{a, b, c\}.$$

Por lo tanto:

$$\prod_{4 \leq i < j \leq n+1} (\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)) = \prod_{\substack{1 \leq h < k \leq n+1 \\ h, k \notin \{a, b, c\}}} (k - h),$$

como el nombre de las variables no afecta el resultado utilizaremos i y j en lugar de h y k ,

$$\prod_{4 \leq i < j \leq n+1} (\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{a, b, c\}}} (j - i),$$

$$(18) \quad \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} = \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{a, b, c\}}} (j - i)}{\prod_{4 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}.$$

En la siguiente lista están todos los factores $(j-i)$, con $1 \leq i < j \leq n+1$. Con $\widehat{(j-i)}$ se señalaron los factores que no están en el numerados de la expresión que debemos calcular.

$$\begin{array}{cccccccccccc} (2-1) & (3-1) & \dots & \widehat{(a-1)} & (a+1-1) & \dots & \widehat{(b-1)} & (b+1-1) & \dots & \widehat{(c-1)} & (c+1-1) & \dots & (n+1-1) \\ & (3-2) & \dots & \widehat{(a-2)} & (a+1-2) & \dots & \widehat{(b-2)} & (b+1-2) & \dots & \widehat{(c-2)} & (c+1-2) & \dots & (n+1-2) \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \widehat{(a-(a-1))} & (a+1-(a-1)) & \dots & \widehat{(b-(a-1))} & (b+1-(a-1)) & \dots & \widehat{(c-(a-1))} & (c+1-(a-1)) & \dots & (n+1-(a-1)) \\ & & & & \widehat{(a+1-a)} & \dots & \widehat{(b-a)} & (b+1-a) & \dots & \widehat{(c-a)} & (c+1-a) & \dots & \widehat{(n+1-a)} \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & \widehat{(b-(b-1))} & (b+1-(b-1)) & \dots & \widehat{(c-(b1))} & (c+1-(b-1)) & \dots & (n+1-(b-1)) \\ & & & & & & & \widehat{(b+1-b)} & \dots & \widehat{(c-b)} & (c+1-b) & \dots & \widehat{(n+1-b)} \\ & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & \widehat{(c-(c-1))} & (c+1-(c-1)) & \dots & (n+1-(c-1)) \\ & & & & & & & & & & \widehat{(c+1-c)} & \dots & \widehat{(n+1-c)} \\ & & & & & & & & & & & \dots & (n+1-1) \end{array}$$

Teniendo en cuenta los factores que no aparecen en el numerador, el cociente (18) se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
 \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} &= \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{a, b, c\}}} (j - i)}{\prod_{4 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}, \\
 &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}{\prod_{4 \leq i < j \leq n+1} (j - i) \cdot \prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{\substack{j=a+1 \\ j \neq b, j \neq c}}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{\substack{j=b+1 \\ j \neq c}}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^3 \prod_{j=i+1}^{n+1} (j - i) \cdot \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}{\prod_{4 \leq i < j \leq n+1} (j - i) \cdot \prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{\substack{j=a+1 \\ j \neq b, j \neq c}}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{\substack{j=b+1 \\ j \neq c}}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^3 \prod_{j=i+1}^{n+1} (j - i)}{\prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{\substack{j=a+1 \\ j \neq b, j \neq c}}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{\substack{j=b+1 \\ j \neq c}}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\
 &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b) \prod_{i=1}^3 \prod_{j=i+1}^{n+1} (j - i)}{\prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{j=a+1}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{j=b+1}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\
 &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b) \prod_{j=1+1}^{n+1} (j - 1) \cdot \prod_{j=2+1}^{n+1} (j - 2) \cdot \prod_{j=3+1}^{n+1} (j - 3)}{\prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{j=a+1}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{j=b+1}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\
 &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b) n! (n - 1)! (n - 2)!}{(a - 1)! (b - 1)! (c - 1)! (n + 1 - a)! (n + 1 - b)! (n + 1 - c)!}, \\
 &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b)}{n^2 (n - 1)} \binom{n}{a - 1} \binom{n}{b - 1} \binom{n}{c - 1}.
 \end{aligned}$$

Hemos probado que, para σ_1 , σ_2 y σ_3 ,

$$(19) \quad \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} = \frac{(b - a)(c - a)(c - b)}{n^2 (n - 1)} \binom{n}{a - 1} \binom{n}{b - 1} \binom{n}{c - 1}.$$

Para finalizar la demostración, distinguiremos los tres tipos de permutaciones.

■ Para

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ a & b & c & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_1 \rho - \rho} &= \frac{\sigma_1^{-1}(2) - \sigma_1^{-1}(1)}{2 - 1} \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} \\ &= (b - a) \frac{(b - a)(c - a)(c - b)}{n^2(n - 1)} \binom{n}{a - 1} \binom{n}{b - 1} \binom{n}{c - 1} \end{aligned}$$

■ Para

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ a & c & b & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_2 \rho - \rho} &= \frac{\sigma_2^{-1}(2) - \sigma_2^{-1}(1)}{2 - 1} \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} \\ &= (c - a) \frac{(b - a)(c - a)(c - b)}{n^2(n - 1)} \binom{n}{a - 1} \binom{n}{b - 1} \binom{n}{c - 1} \end{aligned}$$

■ Para

$$\sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n+1 \\ b & c & a & 1 & \dots & a-3 & \dots & b-2 & \dots & c-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_3 \rho - \rho} &= \frac{\sigma_3^{-1}(2) - \sigma_3^{-1}(1)}{2 - 1} \prod_{4 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} \\ &= (c - b) \frac{(b - a)(c - a)(c - b)}{n^2(n - 1)} \binom{n}{a - 1} \binom{n}{b - 1} \binom{n}{c - 1} \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 4.20. *La fórmula para la dimensión de una representación dada por el Teorema 4.19 se puede expresar de forma general, cuando σ es una permutación de cualquiera de los tres tipos σ_1 , σ_2 o σ_3 , es decir:*

para

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ a_1 & a_2 & k & 1 & 2 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$

con $1 \leq a_1 < a_2 \leq n + 1$, $k \neq a_1$ y $k \neq a_2$,

$$(20) \quad \dim V_1^{\sigma\rho-\rho} = (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1}.$$

Para finalizar esta subsección, obtendremos fórmulas para determinar la dimensión del espacio $H^*(\mathfrak{n})$.

TEOREMA 4.21. *La dimensión del espacio de cohomología total para el nilradical de la subálgebra parabólica (contenida en un álgebra de Lie de tipo A_n), parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, que llamaremos TH es*

$$TH(n) = 2 \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \sum_{c=b+1}^{n+1} (c-a)^2 \frac{(c-b)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Kostant sabemos que

$$TH(n) = \dim H^*(\mathfrak{n}) = \sum_{\sigma \in W^1} \dim V_1^{\sigma\rho-\rho},$$

vimos en el Teorema 4.16 que para cada terna de números enteros a, b, c , con $1 \leq a < b < c \leq n+1$ se pueden determinar tres permutaciones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in W^1$ por lo tanto

$$(21) \quad TH(n) = \sum_{1 \leq a < b < c \leq n+1} (\dim V_1^{\sigma_1\rho-\rho} + \dim V_1^{\sigma_2\rho-\rho} + \dim V_1^{\sigma_3\rho-\rho}).$$

En el Teorema 4.19, determinamos la dimensión de la representación irreducible correspondiente a cada una de estas permutaciones, de donde se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_1\rho-\rho} + \dim V_1^{\sigma_2\rho-\rho} + \dim V_1^{\sigma_3\rho-\rho} = \\ \frac{(b-a)^2(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1} + \\ + \frac{(c-a)^2(b-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1} + \\ + \frac{(c-b)^2(c-a)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_1\rho-\rho} + \dim V_1^{\sigma_2\rho-\rho} + \dim V_1^{\sigma_3\rho-\rho} = \\ [(b-a) + (c-a) + (c-b)] \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}, \end{aligned}$$

$$\dim V_1^{\sigma_1 \rho - \rho} + \dim V_1^{\sigma_2 \rho - \rho} + \dim V_1^{\sigma_3 \rho - \rho} = (2c - 2a) \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1},$$

$$(22) \quad \dim V_1^{\sigma_1 \rho - \rho} + \dim V_1^{\sigma_2 \rho - \rho} + \dim V_1^{\sigma_3 \rho - \rho} = 2 \frac{(c-a)^2(b-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}.$$

Reemplazando (22) en (21) se tiene:

$$TH(n) = 2 \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \sum_{c=b+1}^{n+1} (c-a)^2 \frac{(c-b)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}.$$

□

Resultados equivalentes para el cálculo de la dimensión de la cohomología total se enunciarán en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.22. *TH se puede calcular también, utilizando alguna de las dos formulas siguiente:*

$$(23) \quad TH(n) = \sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=a_1+1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1},$$

$$(24) \quad TH(n) = \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Kostant sabemos que

$$TH(n) = \dim H^*(\mathfrak{n}) = \sum_{\sigma \in W^1} \dim V_1^{\sigma \rho - \rho},$$

y vimos que toda $\sigma \in W^1$ esta determinada una terna de números enteros diferentes a_1, a_2, k , con $1 \leq a_1 < a_2 \leq n+1$ y $1 \leq k \leq n+1$, su inversa es

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ a_1 & a_2 & k & 1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

y la dimensión del espacio irreducible correspondiente es

$$\dim V_1^{\sigma \rho - \rho} = (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1}.$$

Por lo tanto:

$$TH(n) = \sum_{\substack{1 \leq a_1 < a_2 \leq n+1 \\ 1 \leq k \leq n+1}} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1 - 1} \binom{n}{a_2 - 1} \binom{n}{k - 1},$$

$$TH(n) = \sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=a_1+1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1 - 1} \binom{n}{a_2 - 1} \binom{n}{k - 1},$$

con lo que queda probado (23).

Si ahora en la expresión (23) cambiamos el orden en el que se realizan las sumas,

$$TH(n) = \sum_{a_2=2}^{n+1} \sum_{a_1=1}^{a_2-1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1 - 1} \binom{n}{a_2 - 1} \binom{n}{k - 1},$$

renombrando las variables a sumar, a_1 por a_2 y a_2 por a_1 , se tiene

$$TH(n) = \sum_{a_1=2}^{n+1} \sum_{a_2=1}^{a_1-1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1 - 1} \binom{n}{a_2 - 1} \binom{n}{k - 1},$$

la expresión no varía si se suma a partir de $a_1 = 1$, pues $a_2 < a_1$

$$= \sum_{a_1=1}^{n+1} \sum_{a_2=1}^{a_1-1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1 - 1} \binom{n}{a_2 - 1} \binom{n}{k - 1},$$

si a_2 es igual a a_1 el correspondiente sumando es cero por lo tanto

$$(25) \quad TH(n) = \sum_{a_1=1}^{n+1} \sum_{a_2=1}^{a_1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1 - 1} \binom{n}{a_2 - 1} \binom{n}{k - 1}.$$

Sumando las expresiones (23), (en la que consideramos los sumandos nulos correspondientes a $a_1 = n + 1$) y (25) se tiene:

$$2TH(n) = \sum_{a_1=1}^{n+1} \sum_{a_2=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1 - 1} \binom{n}{a_2 - 1} \binom{n}{k - 1} \Rightarrow$$

$$TH(n) = \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k},$$

que es la formula (24) de la proposición. □

Con este resultado concluimos esta subsección.

2.5. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$.

Consideremos la subálgebra parabólica

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n},$$

parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$, contenida en un álgebra de tipo A_n , con $n \geq 3$.

Para este conjunto π_0 , como se explicó en la Sección 1 de este capítulo, la descomposición del conjunto de las raíces es:

$$\Delta_1^+ = \{e_1 - e_2\} \cup \left\{ \begin{array}{l} e_3 - e_4, e_3 - e_5, \dots, e_3 - e_n, \\ e_4 - e_5, \dots, e_4 - e_n, \\ \dots \\ e_{n-1} - e_n \end{array} \right\}$$

y

$$\Delta_n^+ = \left\{ \begin{array}{l} e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n, \\ e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_n \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} e_1 - e_{n+1}, \\ e_2 - e_{n+1} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} e_3 - e_{n+1}, \\ e_4 - e_{n+1}, \\ \vdots \\ e_n - e_{n+1} \end{array} \right\},$$

la expresión del nilradical como suma de espacios raíces es:

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{z} \oplus V, \quad \text{con } V = X \oplus Y \quad \text{y } \mathfrak{z} \text{ el centro de } \mathfrak{n}.$$

Llamando:

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \{e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n, e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_n\}, \\ \Delta_Y &= \{e_3 - e_{n+1}, e_4 - e_{n+1}, \dots, e_n - e_{n+1}\} \quad \text{y} \\ \Delta_{\mathfrak{z}} &= \{e_1 - e_{n+1}, e_2 - e_{n+1}\}, \end{aligned}$$

cada espacio se puede expresar en función de los espacios raíces correspondientes de la siguiente manera:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_X} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{z} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dim V &= 2(n-2) + (n-2) = 3n-6, \\ \dim \mathfrak{z} &= 2, \\ \dim \mathfrak{n} &= 3n-4. \end{aligned}$$

Una base para \mathfrak{n} es:

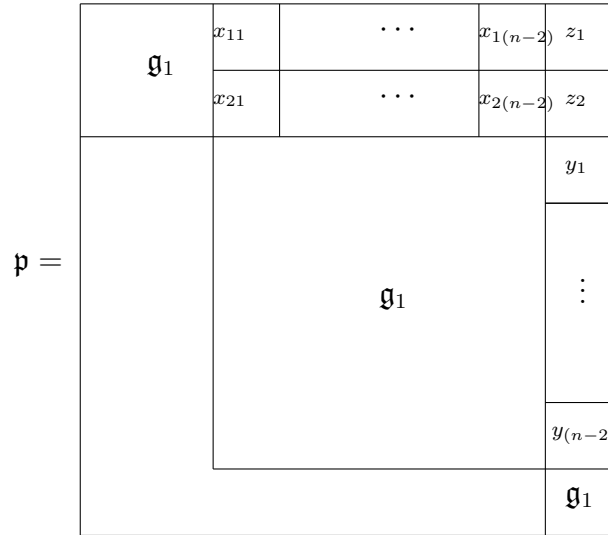
$$\{x_{11}, \dots, x_{1(n-2)}, x_{21}, \dots, x_{2(n-2)}, y_1, \dots, y_{(n-2)}, z_1, z_2\},$$

con coeficientes de estructura:

$$[x_{ij}, y_j] = z_i.$$

La dimensión del nilradical en este caso (caso 4), es igual a la del caso estudiado en la subsección 2.4 para $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ (caso 3), pero no se trata álgebras de Lie isomorfas.

En el siguiente esquema gráfico, representamos la subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$.



Para este caso, de acuerdo a lo analizado en el Teorema 4.1, el conjunto W^1 esta formado por las permutaciones σ del intervalo inicial I_{n+1} que verifican:

$$\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(2), \quad \text{y} \quad \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \quad \forall i, j : 3 \leq i < j \leq n,$$

por lo tanto, dados tres números diferentes, $a_1, a_2, k \in I_{n+1}$ tales que, $a_1 < a_2$, existe una única permutación $\sigma \in W^1$, cuya inversa es:

$$\sigma^{-1}(1, 2, 3, \dots, n+1) = (a_1, a_2, \underbrace{1, 2, \dots, n+1, k}_{I_{n+1} - \{a_1, a_2, k\}})$$

Como en el caso estudiado en la Subsección 2.4 (Caso 3), k puede ser menor que a_1 , mayor que a_2 ó, $a_1 < k < a_2$ y en algunas ocasiones se hará necesario saber la relación entre a_1, a_2 y k .

El Caso 3 y el Caso 4, que estamos considerando, guardan muchas similitudes que dejaremos en evidencia durante el transcurso de esta subsección.

Enunciaremos las características de los elementos de W^1 , a través del siguiente teorema.

TEOREMA 4.23. *Para cada terna de números enteros a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$, se pueden determinar tres permutaciones pertenecientes al conjunto W^1 , σ_1, σ_2 y σ_3 tales que:*

$$\begin{array}{lll} \sigma_1(a) = 1, & \sigma_1(b) = 2, & \sigma_1(c) = n + 1, \\ \sigma_2(a) = 1, & \sigma_2(b) = n + 1, & \sigma_2(c) = 2, \\ \sigma_3(a) = n + 1, & \sigma_3(b) = 1, & \sigma_3(c) = 2, \end{array}$$

y

$$\sigma_1(i) = \sigma_2(i) = \sigma_3(i) = \begin{cases} i + 2, & 1 \leq i < a \\ i + 1, & a < i < b \\ i, & b < i < c \\ i - 1, & c < i \leq n + 1. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Tres números diferentes, $a_1, a_2, k \in I_{n+1}$ tales que $a_1 < a_2$, determinan una única permutación $\sigma \in W^1$ que verifique las condiciones del Teorema 4.1, que cumpla que $\sigma^{-1}(1) = a_1$, $\sigma^{-1}(2) = a_2$, $\sigma^{-1}(n + 1) = k$, su inversa es:

$$(26) \quad \sigma^{-1}(1, 2, \dots, n + 1) = (a_1, a_2, \underbrace{1, 2, \dots, n + 1, k}_{I_{n+1} - \{a_1, a_2, k\}}).$$

Dados entonces, a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$, se pueden determinar tres ternas diferentes, que cumplen con la condición (26), si con $\widehat{(\cdot)}$ indicamos el elemento que no esta en la lista, las inversas de cada una de estas permutaciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}(1, 2, 3, \dots, n + 1) &= (a, b, 1, \dots, \widehat{a}, \dots, \widehat{b}, \dots, \widehat{c}, \dots, n + 1, c), \\ \sigma_2^{-1}(1, 2, 3, \dots, n + 1) &= (a, c, 1, \dots, \widehat{a}, \dots, \widehat{b}, \dots, \widehat{c}, \dots, n + 1, b), \\ \sigma_3^{-1}(1, 2, 3, \dots, n + 1) &= (b, c, 1, \dots, \widehat{a}, \dots, \widehat{b}, \dots, \widehat{c}, \dots, n + 1, a). \end{aligned}$$

se puede concluir entonces, de forma inmediata que:

■

$$\sigma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & \dots & a-2 & a-1 & | & a & a+1 & \dots & b-1 & | & b & b+1 & \dots & c-1 & | & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & \dots & a & a+1 & | & 1 & a+2 & \dots & b & | & 2 & b+2 & \dots & c & | & n+1 & c & \dots & n \end{array} \right),$$

por lo tanto:

$$\sigma_1(a) = 1, \quad \sigma_1(b) = 2, \quad \sigma_1(c) = n + 1,$$

$$\sigma_1(i) = \begin{cases} i + 2, & 1 \leq i < a \\ i + 1, & a < i < b \\ i, & b < i < c \\ i - 1, & c < i \leq n + 1. \end{cases}$$

■

$$\sigma_2 = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc|c|cccc} 1 & 2 & \dots & a-2 & a-1 & | & a & a+1 & \dots & b-1 & | & b & b+1 & \dots & c-1 & | & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & \dots & a & a+1 & | & 1 & a+2 & \dots & b & | & n+1 & b+1 & \dots & c-1 & | & 2 & c & \dots & n \end{array} \right),$$

por lo tanto:

$$\sigma_2(a) = 1, \quad \sigma_2(b) = n + 1, \quad \sigma_2(c) = 2,$$

$$\sigma_2(i) = \begin{cases} i + 2, & 1 \leq i < a \\ i + 1, & a < i < b \\ i, & b < i < c \\ i - 1, & c < i \leq n + 1. \end{cases}$$

■

$$\sigma_3 = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc|c|cccc} 1 & 2 & \dots & a-2 & a-1 & | & a & a+1 & \dots & b-1 & | & b & b+1 & \dots & c-1 & | & c & c+1 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & \dots & a & a+1 & | & n+1 & a+2 & \dots & b & | & 1 & b+1 & \dots & c-1 & | & 2 & c & \dots & n \end{array} \right),$$

por lo tanto:

$$\sigma_3(a) = n + 1, \quad \sigma_3(b) = 1, \quad \sigma_3(c) = 2,$$

$$\sigma_3(i) = \begin{cases} i + 2, & 1 \leq i < a \\ i + 1, & a < i < b \\ i, & b < i < c \\ i - 1, & c < i \leq n + 1. \end{cases}$$

Con lo que queda demostrado este enunciado. □

Por el Lema 4.2, podemos asegurar que

$$|W^1| = \binom{n+1}{2} \binom{n+1-2}{n-2} = \frac{n(n^2-1)}{2},$$

esta es otra coincidencia que presenta este caso con el Caso 3.

En el siguiente lema determinaremos los vectores de peso máximo correspondientes a cada representación irreducible de \mathfrak{g}_1 en términos de $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$.

LEMA 4.24. *Los vectores de peso máximo correspondientes a las representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 son, para cada $a < b < c$, de la forma:*

$$\sigma_1 \rho - \rho = \left(1 - a, 2 - b, \underbrace{2, \dots, 2}_{a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{b-a-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{c-b-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-c}, n + 1 - c \right),$$

$$\sigma_2\rho - \rho = \left(1 - a, 2 - c, \underbrace{2, \dots, 2}_{a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{b-a-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{c-b-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-c}, n + 1 - b \right),$$

y

$$\sigma_3\rho - \rho = \left(1 - b, 2 - c, \underbrace{2, \dots, 2}_{a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{b-a-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{c-b-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-c}, n + 1 - a \right).$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a lo establecido en el Teorema 4.3, el vector de peso máximo correspondiente a una permutación $\sigma \in W^1$ es

$$\sigma\rho - \rho = \sum_{i=1}^{n+1} (i - \sigma^{-1}(i)) e_i.$$

Para cada a, b, c tal que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$, existen tres permutaciones σ_1, σ_2 y σ_3 de W^1 cuyas inversas son:

$$\sigma_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & & & 3 & 4 & \dots & a+1 & & & a+2 & \dots & b & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c & \dots & n & & & n+1 \\ \hline a & b & & & 1 & 2 & \dots & a-1 & & & a+1 & \dots & b-1 & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c+1 & \dots & n+1 & & & c \end{array} \right),$$

$$\sigma_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & & & 3 & 4 & \dots & a+1 & & & a+2 & \dots & b & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c & \dots & n & & & n+1 \\ \hline a & c & & & 1 & 2 & \dots & a-1 & & & a+1 & \dots & b-1 & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c+1 & \dots & n+1 & & & b \end{array} \right),$$

$$\sigma_3^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & & & 3 & 4 & \dots & a+1 & & & a+2 & \dots & b & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c & \dots & n & & & n+1 \\ \hline b & c & & & 1 & 2 & \dots & a-1 & & & a+1 & \dots & b-1 & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c+1 & \dots & n+1 & & & a \end{array} \right),$$

evidentemente, $\forall i \in I_{n+1} - \{1, 2, n + 1\}$, $\sigma_1^{-1}(i) = \sigma_2^{-1}(i) = \sigma_3^{-1}(i)$, así:

$$(3, 4, \dots, n) \xrightarrow{\begin{matrix} \sigma_1^{-1} \\ \sigma_2^{-1} \\ \sigma_3^{-1} \end{matrix}} \left(\underbrace{1, \dots, a-1}_{a-1}, \underbrace{a+1, \dots, b-1}_{b-a-1}, \underbrace{b+1, \dots, c-1}_{c-b-1}, \underbrace{c+1, \dots, n+1}_{n+1-c} \right),$$

explícitamente:

$$\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} = \sigma_3^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} 3 & 4 & \dots & a+1 & & & a+2 & \dots & b & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c & \dots & n & & & n+1 \\ \hline 1 & 2 & \dots & a-1 & & & a+1 & \dots & b-1 & & & b+1 & \dots & c-1 & & & c+1 & \dots & n+1 & & & \end{array} \right).$$

Si σ es cualquiera de estas tres permutaciones, entonces:

$$\begin{aligned}
 \sigma\rho - \rho &= (1 - \sigma^{-1}(1))e_1 + (2 - \sigma^{-1}(2))e_2 + \sum_{i=3}^{a+1} (i - \sigma^{-1}(i))e_i + \sum_{i=a+2}^b (i - \sigma^{-1}(i))e_i \\
 &\quad + \sum_{i=b+1}^{c-1} (i - \sigma^{-1}(i))e_i + \sum_{i=c}^n (i - \sigma^{-1}(i))e_i + (n+1 - \sigma^{-1}(n+1))e_{n+1} \\
 &= (1 - \sigma^{-1}(1))e_1 + (2 - \sigma^{-1}(2))e_2 + 2 \sum_{i=3}^{a+1} e_i + \sum_{i=a+2}^b e_i \\
 &\quad + 0 \sum_{i=b+1}^{c-1} e_i + (-1) \sum_{i=c}^n e_i + (n+1 - \sigma^{-1}(n+1))e_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Los vectores de peso máximo son entonces de la forma:

$$\sigma\rho - \rho = \left(1 - \sigma^{-1}(1), 2 - \sigma^{-1}(2), \underbrace{2, \dots, 2}_{a-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{b-a-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{c-b-1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1-c}, n+1 - \sigma^{-1}(n+1) \right),$$

con

$$(1 - \sigma^{-1}(1), 2 - \sigma^{-1}(2), 3 - \sigma^{-1}(3)) = \begin{cases} (1 - a, 2 - b, n + 1 - c) & \text{para } \sigma = \sigma_1 \\ (1 - a, 2 - c, n + 1 - b) & \text{para } \sigma = \sigma_2 \\ (1 - b, 2 - c, n + 1 - a) & \text{para } \sigma = \sigma_3 \end{cases}$$

quedando así demostrado el teorema. \square

Enunciaremos y demostraremos el teorema que determina la dimensión de cada uno de los espacios irreducibles en la descomposición de Kostant.

De manera equivalente al Caso 3, estudiado en la Subsección 2.4, la dimensión de cada representación irreducible, sólo depende de los valores a, b, c que caracterizan al correspondiente elemento de W^1 y del valor n , según el álgebra A_n en la que estemos trabajando.

TEOREMA 4.25. *Sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in W^1$, determinadas por a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$. Entonces*

$$\begin{aligned}
 \dim V_1^{\sigma_1\rho-\rho} &= \frac{(b-a)^2(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}, \\
 \dim V_1^{\sigma_2\rho-\rho} &= \frac{(c-a)^2(b-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}, \\
 \dim V_1^{\sigma_3\rho-\rho} &= \frac{(c-b)^2(c-a)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}.
 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La fórmula para determinar la dimensión de una representación irreducible de peso máximo $\sigma\rho - \rho$ obtenida en el Teorema 4.4 es:

$$\dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \prod_{(e_i - e_j) \in \Delta_1^+} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

Como en este caso,

$$\Delta_1^+ = \{e_1 - e_2\} \cup \{e_3 - e_4, e_3 - e_5, \dots, e_3 - e_n, \\ e_4 - e_5, \dots, e_4 - e_n, \\ \dots, \\ e_{n-1} - e_n\}$$

la expresión para la dimensión es entonces

$$(27) \quad \dim V_1^{\sigma\rho - \rho} = \frac{\sigma^{-1}(2) - \sigma^{-1}(1)}{2 - 1} \prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i}.$$

Dados a, b, c tales que $1 \leq a < b < c \leq n + 1$ las inversas de las correspondientes σ_1, σ_2 y σ_3 , son:

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n & n+1 \\ a & b & 1 & \dots & a-2 & \dots & b-1 & \dots & c+1 & \dots & n+1 & c \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n & n+1 \\ a & c & 1 & \dots & a-2 & \dots & b-1 & \dots & c+1 & \dots & n+1 & b \end{pmatrix} \quad y$$

$$\sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n & n+1 \\ b & c & 1 & \dots & a-2 & \dots & b-1 & \dots & c+1 & \dots & n+1 & a \end{pmatrix}.$$

Las tres funciones inversas son iguales en $I_{n+1} - \{1, 2, n+1\}$. Restringiendo el dominio de las permutaciones a $I_{n+1} - \{1, 2, n+1\}$ y llamando σ^{-1} a la restricción, se tiene:

$$(28) \quad \sigma^{-1} = \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} = \sigma_3^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 4 & \dots & a+1 & a+2 & \dots & b & b+1 & \dots & c-1 & c & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & a-1 & a+1 & \dots & b-1 & b+1 & \dots & c-1 & c+1 & \dots & n+1 \end{array} \right).$$

Para desarrollar el numerador de la ecuación (27), tengamos en cuenta que

$$\forall i, j: \quad 3 \leq i < j \leq n, \quad \sigma^{-1}(i) = h < \sigma^{-1}(j) = k,$$

con

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(i) &= h \in I_{n+1} - \{a, b, c\} \quad y \\ \sigma^{-1}(j) &= k \in I_{n+1} - \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\prod_{3 \leq i < j \leq n} (\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)) = \prod_{\substack{1 \leq h < k \leq n+1 \\ h, k \notin \{a, b, c\}}} (k - h),$$

como el nombre de las variables no afecta el resultado utilizaremos i, j en lugar de h, k . Así:

$$(29) \quad \prod_{3 \leq i < j \leq n} (\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{a, b, c\}}} (j - i).$$

Resolviendo de forma similar a los casos estudiados anteriormente, teniendo en cuenta los factores que no aparecen en el numerador y el resultado obtenido en (29), el cociente se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} &= \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1 \\ i, j \notin \{a, b, c\}}} (j - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n} (j - i)}, \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n} (j - i) \cdot \prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{\substack{j=a+1 \\ j \neq b, j \neq c}}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{\substack{j=b+1 \\ j \neq c}}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (n + 1 - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n} (j - i) \cdot \prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{\substack{j=a+1 \\ j \neq b, j \neq c}}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{\substack{j=b+1 \\ j \neq c}}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\ &= \frac{\prod_{i=1}^2 \prod_{j=i+1}^n (j - i) \cdot \prod_{3 \leq i < j \leq n} (j - i) \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (n + 1 - i)}{\prod_{3 \leq i < j \leq n} (j - i) \cdot \prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{\substack{j=a+1 \\ j \neq b, j \neq c}}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{\substack{j=b+1 \\ j \neq c}}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\ &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b) \prod_{i=1}^2 \prod_{j=i+1}^n (j - i) \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (n + 1 - i)}{\prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{j=a+1}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{j=b+1}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\ &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b) \prod_{j=1+1}^n (j - 1) \cdot \prod_{j=2+1}^n (j - 2) \cdot \prod_{i=1}^n (n + 1 - i)}{\prod_{i=1}^{a-1} (a - i) \cdot \prod_{i=1}^{b-1} (b - i) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} (c - i) \cdot \prod_{j=a+1}^{n+1} (j - a) \cdot \prod_{j=b+1}^{n+1} (j - b) \cdot \prod_{j=c+1}^{n+1} (j - c)}, \\ &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b)(n - 1)!(n - 2)!n!}{(a - 1)!(b - 1)!(c - 1)!(n + 1 - a)!(n + 1 - b)!(n + 1 - c)!}, \\ &= \frac{(b - a)(c - a)(c - b)}{n^2(n - 1)} \binom{n}{a - 1} \binom{n}{b - 1} \binom{n}{c - 1}. \end{aligned}$$

Hemos probado que, para σ_1 , σ_2 y σ_3 ,

$$(30) \quad \prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j - i} = \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}.$$

Para finalizar la demostración, distinguiremos los tres tipos de permutaciones.

■ Para

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n & n+1 \\ a & b & 1 & \dots & a-2 & \dots & b-1 & \dots & c+1 & \dots & n+1 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_1 \rho - \rho} &= \frac{\sigma_1^{-1}(2) - \sigma_1^{-1}(1)}{2-1} \prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j-i} \\ &= (b-a) \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1} \end{aligned}$$

■ Para

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n & n+1 \\ a & c & 1 & \dots & a-2 & \dots & b-1 & \dots & c+1 & \dots & n+1 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_2 \rho - \rho} &= \frac{\sigma_2^{-1}(2) - \sigma_2^{-1}(1)}{2-1} \prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j-i} \\ &= (c-a) \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1} \end{aligned}$$

■ Para

$$\sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots & n & n+1 \\ b & c & 1 & \dots & a-2 & \dots & b-1 & \dots & c+1 & \dots & n+1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim V_1^{\sigma_3 \rho - \rho} &= \frac{\sigma_3^{-1}(2) - \sigma_3^{-1}(1)}{2-1} \prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i)}{j-i} \\ &= (c-b) \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1} \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 4.26. *Las fórmulas encontradas para determinar la dimensión de cada representación irreducible, coinciden con las del Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$.*

OBSERVACIÓN 4.27. *La fórmula para la dimensión de una representación irreducible dada por el Teorema 4.25, se puede expresar de forma general cuando σ es una permutación de cualquiera de los tres tipos σ_1 , σ_2 o σ_3 . Es decir, si*

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ a_1 & a_2 & 1 & \cdots & n+1 & k \end{pmatrix}$$

con $1 \leq a_1 < a_2 \leq n+1$, $k \neq a_1$ y $k \neq a_2$,

$$(31) \quad \dim V_1^{\sigma\rho-\rho} = (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1}.$$

Para finalizar esta subsección, enunciaremos fórmulas para determinar la dimensión del espacio $H^*(\mathfrak{n})$.

En el Teorema 4.25 encontramos fórmulas para determinar la dimensión de cada representación irreducible para el Caso 4, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$, que coinciden con las determinadas para el Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$. Estas coincidencias nos permiten hacer las siguientes afirmaciones.

TEOREMA 4.28. *La dimensión del espacio de cohomología total para el nilradical de la subálgebra parabólica (contenida en una subálgebra de tipo A_n), parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$, que llamaremos TH es*

$$TH(n) = 2 \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \sum_{c=b+1}^{n+1} (c-a)^2 \frac{(c-b)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}.$$

Un resultado equivalente para el cálculo de la dimensión de la cohomología es:

PROPOSICIÓN 4.29. *TH se puede calcular también, utilizando alguna de las dos fórmulas siguiente:*

$$(32) \quad TH(n) = \sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=a_1+1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1},$$

$$(33) \quad TH(n) = \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}.$$

3. Conclusiones

3.1. Caso 1: $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ y **Caso 2:** $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$.

En la Subsección 2.2 estudiamos el **Caso 1**, correspondiente a la subálgebra parabólica parametrizada por $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ y en la Subsección 2.3 estudiamos el **Caso 2**, correspondiente a la subálgebra parabólica $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$.

En la siguiente tabla expondremos datos relevantes entre estos dos casos, cuyos nilradicales no son isomorfos como álgebras de Lie.

	Caso 1	Caso 2
$\dim \mathfrak{n}$	$2n - 1$	
$\dim \mathfrak{z}$	$n - 1$	1
$\forall m, M:$ $1 \leq m < M \leq n+1$	$\sigma_{m,M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ m & M & 1 & 2 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$ $\overline{\sigma_{m,M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ M & m & 1 & 2 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$	$\sigma_{m,M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ m & 1 & 2 & \cdots & n+1 & M \end{pmatrix}$ $\overline{\sigma_{m,M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ M & 1 & 2 & \cdots & n+1 & m \end{pmatrix}$
$\dim V^{\sigma\rho-\rho}$	$\frac{M-m}{n} \binom{n}{m-1} \binom{n}{M-1}$	
$TH(n)$	$2^{\binom{2n-1}{n-1}}$	

3.2. Caso 3: $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ y **Caso 4:** $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$.

En la Subsección 2.4 estudiamos el **Caso 3**, correspondiente a la subálgebra parabólica parametrizada por $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ y en la subsección 2.5 estudiamos el **Caso 4**, correspondiente a la subálgebra parabólica $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$.

En la siguiente tabla expondremos datos relevantes entre estos dos casos, cuyos nilradicales no son isomorfos como álgebras de Lie.

	Caso 3	Caso 4
$\dim \mathfrak{n}$	$3n - 4$	
$\dim \mathfrak{z}$	$2n - 4$	2
$\forall a, b, c :$ $1 \leq a < b < c \leq n + 1$	$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ a & b & c & 1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$ $\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ a & c & b & 1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$ $\sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ b & c & a & 1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$	$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ a & b & 1 & \dots & n+1 & c \end{pmatrix}$ $\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ a & c & 1 & \dots & n+1 & b \end{pmatrix}$ $\sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ b & c & 1 & \dots & n+1 & a \end{pmatrix}$
$\dim V^{\sigma\rho-\rho}$	$\dim V^{\sigma_1\rho-\rho} = \frac{(b-a)^2(c-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}$ $\dim V^{\sigma_2\rho-\rho} = \frac{(c-a)^2(b-a)(c-b)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}$ $\dim V^{\sigma_3\rho-\rho} = \frac{(c-b)^2(c-a)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}$	
$TH(n)$	$\sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \sum_{c=b+1}^{n+1} \frac{2(c-a)^2(c-b)(b-a)}{n^2(n-1)} \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} \binom{n}{c-1}$	

4. Tablas de Cohomología Total, Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$

Para el caso estudiado en las Subsecciones 2.2 y 2.3, se encontró una fórmula cerrada para determinar la cohomología total y a partir de esta fórmula determinaremos el comportamiento asintótico. Para el caso $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, de las fórmulas de TH obtenidas no es posible estudiar el comportamiento asintótico. Por esto y para entender cualitativamente y ayudar a inferir su comportamiento asintótico calculamos los valores $TH(n)$ para tantos valores de n como fue posible usando la computadora.

En las siguientes tablas volcamos los valores de TH ; la sucesión crece rápidamente alcanzando grandes magnitudes ya para n no tan grandes, como por ejemplo $TH(100) = 2,112827363 \times 10^{87}$. Estos resultados se utilizarán en el siguiente capítulo para estudiar y conjeturar el comportamiento asintótico de TH .

n	TH	n	TH
		51	$2,329653991 \times 10^{43}$
3	20	52	$1,827649143 \times 10^{44}$
4	116	53	$1,434356082 \times 10^{45}$
5	728	54	$1,126102068 \times 10^{46}$
6	4792	55	$8,844012999 \times 10^{46}$
7	32568	56	$6,948104773 \times 10^{47}$
8	$2,26480 \times 10^5$	57	$5,460388430 \times 10^{48}$
9	$1,602392 \times 10^6$	58	$4,292556337 \times 10^{49}$
10	$1,1491016 \times 10^7$	59	$3,375507706 \times 10^{50}$
11	$8,3299112 \times 10^7$	60	$2,655146088 \times 10^{51}$
12	$6,09213640 \times 10^8$	61	$2,089102554 \times 10^{52}$
13	$4,488599200 \times 10^9$	62	$1,644179122 \times 10^{53}$
14	$3,327930016 \times 10^{10}$	63	$1,294352990 \times 10^{54}$
15	$2,480699024 \times 10^{11}$	64	$1,019217679 \times 10^{55}$
16	$1,857810734 \times 10^{12}$	65	$8,027648206 \times 10^{55}$
17	$1,397027248 \times 10^{13}$	66	$6,324316463 \times 10^{56}$
18	$1,054330828 \times 10^{14}$	67	$4,983558856 \times 10^{57}$
19	$7,982602458 \times 10^{14}$	68	$3,927926266 \times 10^{58}$
20	$6,061244005 \times 10^{15}$	69	$3,096577334 \times 10^{59}$
21	$4,614286532 \times 10^{16}$	70	$2,441702005 \times 10^{60}$
22	$3,521002749 \times 10^{17}$	71	$1,925718878 \times 10^{61}$
23	$2,692496279 \times 10^{18}$	72	$1,519078089 \times 10^{62}$
24	$2,062959375 \times 10^{19}$	73	$1,198538209 \times 10^{63}$
25	$1,583444666 \times 10^{20}$	74	$9,458144137 \times 10^{63}$
26	$1,217390676 \times 10^{21}$	75	$7,465175371 \times 10^{64}$
27	$9,373833177 \times 10^{21}$	76	$5,893211299 \times 10^{65}$
28	$7,227964185 \times 10^{22}$	77	$4,653073118 \times 10^{66}$
29	$5,580624823 \times 10^{23}$	78	$3,674528672 \times 10^{67}$
30	$4,313986081 \times 10^{24}$	79	$2,902253959 \times 10^{68}$
31	$3,338632581 \times 10^{25}$	80	$2,292658517 \times 10^{69}$
32	$2,586549345 \times 10^{26}$	81	$1,811389189 \times 10^{70}$
33	$2,005886715 \times 10^{27}$	82	$1,431366738 \times 10^{71}$
34	$1,557038574 \times 10^{28}$	83	$1,131241155 \times 10^{72}$
35	$1,209694817 \times 10^{29}$	84	$8,941760477 \times 10^{72}$
36	$9,406193837 \times 10^{29}$	85	$7,068917567 \times 10^{73}$
37	$7,319706630 \times 10^{30}$	86	$5,589119488 \times 10^{74}$
38	$5,700286430 \times 10^{31}$	87	$4,419702705 \times 10^{75}$
39	$4,442280606 \times 10^{32}$	88	$3,495429502 \times 10^{76}$
40	$3,464223911 \times 10^{33}$	89	$2,764805300 \times 10^{77}$
41	$2,703224411 \times 10^{34}$	90	$2,187176379 \times 10^{78}$
42	$2,110673229 \times 10^{35}$	91	$1,730442142 \times 10^{79}$
43	$1,648960266 \times 10^{36}$	92	$1,369251408 \times 10^{80}$
44	$1,288955926 \times 10^{37}$	93	$1,083580047 \times 10^{81}$
45	$1,008077262 \times 10^{38}$	94	$8,576091060 \times 10^{81}$
46	$7,888008174 \times 10^{38}$	95	$6,788397645 \times 10^{82}$
47	$6,175174413 \times 10^{39}$	96	$5,373950112 \times 10^{83}$
48	$4,836493532 \times 10^{40}$	97	$4,254685317 \times 10^{84}$
49	$3,789685885 \times 10^{41}$	98	$3,368897050 \times 10^{85}$
50	$2,970703148 \times 10^{42}$	99	$2,667801844 \times 10^{86}$

n	TH	n	TH
100	$2,112827363 \times 10^{87}$	150	$2,008105012 \times 10^{132}$
101	$1,673470965 \times 10^{88}$	151	$1,595821435 \times 10^{133}$
102	$1,325608288 \times 10^{89}$	152	$1,268239575 \times 10^{134}$
103	$1,050157070 \times 10^{90}$	153	$1,007945821 \times 10^{135}$
104	$8,320214387 \times 10^{90}$	154	$8,011091834 \times 10^{135}$
105	$6,592576657 \times 10^{91}$	155	$6,367436529 \times 10^{136}$
106	$5,224148413 \times 10^{92}$	156	$5,061225581 \times 10^{137}$
107	$4,140137109 \times 10^{93}$	157	$4,023135753 \times 10^{138}$
108	$3,281346667 \times 10^{94}$	158	$3,198095107 \times 10^{139}$
109	$2,600919878 \times 10^{95}$	159	$2,542351142 \times 10^{140}$
110	$2,061762394 \times 10^{96}$	160	$2,021142546 \times 10^{141}$
111	$1,634505429 \times 10^{97}$	161	$1,606850199 \times 10^{142}$
112	$1,295894315 \times 10^{98}$	162	$1,277528690 \times 10^{143}$
113	$1,027513728 \times 10^{99}$	163	$1,015739989 \times 10^{144}$
114	$8,147791317 \times 10^{99}$	164	$8,076270434 \times 10^{144}$
115	$6,461387359 \times 10^{100}$	165	$6,421779192 \times 10^{145}$
116	$5,124419683 \times 10^{101}$	166	$5,106412583 \times 10^{146}$
117	$4,064396487 \times 10^{102}$	167	$4,060619155 \times 10^{147}$
118	$3,223883605 \times 10^{103}$	168	$3,229120499 \times 10^{148}$
119	$2,557372609 \times 10^{104}$	169	$2,567980333 \times 10^{149}$
120	$2,028801269 \times 10^{105}$	170	$2,042275849 \times 10^{150}$
121	$1,609590263 \times 10^{106}$	171	$1,624247463 \times 10^{151}$
122	$1,277088497 \times 10^{107}$	172	$1,291828623 \times 10^{152}$
123	$1,013341878 \times 10^{108}$	173	$1,027477563 \times 10^{153}$
124	$8,041181278 \times 10^{108}$	174	$8,172489250 \times 10^{153}$
125	$6,381343369 \times 10^{109}$	175	$6,500559970 \times 10^{154}$
126	$5,064450379 \times 10^{110}$	176	$5,170843766 \times 10^{155}$
127	$4,019574006 \times 10^{111}$	177	$4,113259760 \times 10^{156}$
128	$3,190471045 \times 10^{112}$	178	$3,272086477 \times 10^{157}$
129	$2,532539533 \times 10^{113}$	179	$2,603017980 \times 10^{158}$
130	$2,010406567 \times 10^{114}$	180	$2,070823898 \times 10^{159}$
131	$1,596016535 \times 10^{115}$	181	$1,647489377 \times 10^{160}$
132	$1,267115830 \times 10^{116}$	182	$1,310736470 \times 10^{161}$
133	$1,006051700 \times 10^{117}$	183	$1,042848699 \times 10^{162}$
134	$7,988200534 \times 10^{117}$	184	$8,297365856 \times 10^{162}$
135	$6,343105384 \times 10^{118}$	185	$6,601947262 \times 10^{163}$
136	$5,037079946 \times 10^{119}$	186	$5,253111236 \times 10^{164}$
137	$4,000178377 \times 10^{120}$	187	$4,179975559 \times 10^{165}$
138	$3,176896932 \times 10^{121}$	188	$3,326161649 \times 10^{166}$
139	$2,523189153 \times 10^{122}$	189	$2,646825395 \times 10^{167}$
140	$2,004098578 \times 10^{123}$	190	$2,106296156 \times 10^{168}$
141	$1,591881060 \times 10^{124}$	191	$1,676199283 \times 10^{169}$
142	$1,264515336 \times 10^{125}$	192	$1,333963088 \times 10^{170}$
143	$1,004521477 \times 10^{126}$	193	$1,061631501 \times 10^{171}$
144	$7,980235187 \times 10^{126}$	194	$8,449197867 \times 10^{171}$
145	$6,340057505 \times 10^{127}$	195	$6,724635427 \times 10^{172}$
146	$5,037226224 \times 10^{128}$	196	$5,352213985 \times 10^{173}$
147	$4,002305011 \times 10^{129}$	197	$4,259999387 \times 10^{174}$
148	$3,180160945 \times 10^{130}$	198	$3,390758300 \times 10^{175}$
149	$2,527015668 \times 10^{131}$	199	$2,698952529 \times 10^{176}$

n	TH	n	TH
200	$2,148348150 \times 10^{177}$	250	$2,452159564 \times 10^{222}$
201	$1,710113645 \times 10^{178}$	251	$1,953901592 \times 10^{223}$
202	$1,361306970 \times 10^{179}$	252	$1,556910181 \times 10^{224}$
203	$1,083671976 \times 10^{180}$	253	$1,240598602 \times 10^{225}$
204	$8,626809164 \times 10^{180}$	254	$9,885663412 \times 10^{225}$
205	$6,867726785 \times 10^{181}$	255	$7,877476219 \times 10^{226}$
206	$5,467467325 \times 10^{182}$	256	$6,277331711 \times 10^{227}$
207	$4,352809397 \times 10^{183}$	257	$5,002299615 \times 10^{228}$
208	$3,465479013 \times 10^{184}$	258	$3,986308585 \times 10^{229}$
209	$2,759096984 \times 10^{185}$	259	$3,176718051 \times 10^{230}$
210	$2,196749995 \times 10^{186}$	260	$2,531587355 \times 10^{231}$
211	$1,749057880 \times 10^{187}$	261	$2,017500290 \times 10^{232}$
212	$1,392635670 \times 10^{188}$	262	$1,607832065 \times 10^{233}$
213	$1,108869764 \times 10^{189}$	263	$1,281368691 \times 10^{234}$
214	$8,829440231 \times 10^{189}$	264	$1,021207100 \times 10^{235}$
215	$7,030647333 \times 10^{190}$	265	$8,138789014 \times 10^{235}$
216	$5,598438102 \times 10^{191}$	266	$6,486522887 \times 10^{236}$
217	$4,458079261 \times 10^{192}$	267	$5,169758700 \times 10^{237}$
218	$3,550078380 \times 10^{193}$	268	$4,120355595 \times 10^{238}$
219	$2,827074572 \times 10^{194}$	269	$3,284015402 \times 10^{239}$
220	$2,251363755 \times 10^{195}$	270	$2,617469858 \times 10^{240}$
221	$1,792928936 \times 10^{196}$	271	$2,086239506 \times 10^{241}$
222	$1,427872408 \times 10^{197}$	272	$1,662848065 \times 10^{242}$
223	$1,137167831 \times 10^{198}$	273	$1,325399671 \times 10^{243}$
224	$9,056668861 \times 10^{198}$	274	$1,056445235 \times 10^{244}$
225	$7,213085728 \times 10^{199}$	275	$8,420791574 \times 10^{244}$
226	$5,744897747 \times 10^{200}$	276	$6,712195606 \times 10^{245}$
227	$4,575642029 \times 10^{201}$	277	$5,350347689 \times 10^{246}$
228	$3,644435187 \times 10^{202}$	278	$4,264862954 \times 10^{247}$
229	$2,902797903 \times 10^{203}$	279	$3,399646714 \times 10^{248}$
230	$2,312126951 \times 10^{204}$	280	$2,709992499 \times 10^{249}$
231	$1,841682601 \times 10^{205}$	281	$2,160269541 \times 10^{250}$
232	$1,466986296 \times 10^{206}$	282	$1,722079944 \times 10^{251}$
233	$1,168544944 \times 10^{207}$	283	$1,372790135 \times 10^{252}$
234	$9,308352201 \times 10^{207}$	284	$1,094360543 \times 10^{253}$
235	$7,414948657 \times 10^{208}$	285	$8,724129422 \times 10^{253}$
236	$5,906787887 \times 10^{209}$	286	$6,954871859 \times 10^{254}$
237	$4,705463650 \times 10^{210}$	287	$5,544488507 \times 10^{255}$
238	$3,748532011 \times 10^{211}$	288	$4,420171575 \times 10^{256}$
239	$2,986260664 \times 10^{212}$	289	$3,523887340 \times 10^{257}$
240	$2,379040459 \times 10^{213}$	290	$2,809377600 \times 10^{258}$
241	$1,895324179 \times 10^{214}$	291	$2,239769834 \times 10^{259}$
242	$1,509985151 \times 10^{215}$	292	$1,785672488 \times 10^{260}$
243	$1,203010135 \times 10^{216}$	293	$1,423656873 \times 10^{261}$
244	$9,584584070 \times 10^{216}$	294	$1,135047198 \times 10^{262}$
245	$7,636327939 \times 10^{217}$	295	$9,049561772 \times 10^{262}$
246	$6,084195008 \times 10^{218}$	296	$7,215163527 \times 10^{263}$
247	$4,847623434 \times 10^{219}$	297	$5,752674168 \times 10^{264}$
248	$3,862440168 \times 10^{220}$	298	$4,586678594 \times 10^{265}$
249	$3,077526024 \times 10^{221}$	299	$3,657057109 \times 10^{266}$

n	TH	n	TH
300	$2,915882671 \times 10^{267}$	350	$3,566592592 \times 10^{312}$
301	$2,324947678 \times 10^{268}$	351	$2,845137350 \times 10^{313}$
302	$1,853792525 \times 10^{269}$	352	$2,269637522 \times 10^{314}$
303	$1,478134120 \times 10^{270}$	353	$1,810561495 \times 10^{315}$
304	$1,178613193 \times 10^{271}$	354	$1,444353671 \times 10^{316}$
305	$9,397957230 \times 10^{271}$	355	$1,152224992 \times 10^{317}$
306	$7,493769128 \times 10^{272}$	356	$9,191882943 \times 10^{317}$
307	$5,975466309 \times 10^{273}$	357	$7,332889023 \times 10^{318}$
308	$4,764835516 \times 10^{274}$	358	$5,849909584 \times 10^{319}$
309	$3,799518928 \times 10^{275}$	359	$4,666879527 \times 10^{320}$
310	$3,029799362 \times 10^{276}$	360	$3,723123154 \times 10^{321}$
311	$2,416037419 \times 10^{277}$	361	$2,970240200 \times 10^{322}$
312	$1,926628333 \times 10^{278}$	362	$2,369622036 \times 10^{323}$
313	$1,536373119 \times 10^{279}$	363	$1,890470516 \times 10^{324}$
314	$1,225180003 \times 10^{280}$	364	$1,508217719 \times 10^{325}$
315	$9,770291336 \times 10^{280}$	365	$1,203265467 \times 10^{326}$
316	$7,791471998 \times 10^{281}$	366	$9,599798851 \times 10^{326}$
317	$6,213493851 \times 10^{282}$	367	$7,658894042 \times 10^{327}$
318	$4,955147224 \times 10^{283}$	368	$6,110450351 \times 10^{328}$
319	$3,951678061 \times 10^{284}$	369	$4,875100699 \times 10^{329}$
320	$3,151452938 \times 10^{285}$	370	$3,889530285 \times 10^{330}$
321	$2,513300086 \times 10^{286}$	371	$3,103229549 \times 10^{331}$
322	$2,004389366 \times 10^{287}$	372	$2,475904035 \times 10^{332}$
323	$1,598541925 \times 10^{288}$	373	$1,975408223 \times 10^{333}$
324	$1,274882452 \times 10^{289}$	374	$1,576097332 \times 10^{334}$
325	$1,016764563 \times 10^{290}$	375	$1,257512530 \times 10^{335}$
326	$8,109139656 \times 10^{290}$	376	$1,003332088 \times 10^{336}$
327	$6,467452579 \times 10^{291}$	377	$8,005346977 \times 10^{336}$
328	$5,158171720 \times 10^{292}$	378	$6,387320077 \times 10^{337}$
329	$4,113981971 \times 10^{293}$	379	$5,096361709 \times 10^{338}$
330	$3,281202190 \times 10^{294}$	380	$4,066350754 \times 10^{339}$
331	$2,617023349 \times 10^{295}$	381	$3,244534849 \times 10^{340}$
332	$2,087306252 \times 10^{296}$	382	$2,588827100 \times 10^{341}$
333	$1,664825421 \times 10^{297}$	383	$2,065649493 \times 10^{342}$
334	$1,327868742 \times 10^{298}$	384	$1,648212414 \times 10^{343}$
335	$1,059120801 \times 10^{299}$	385	$1,315142103 \times 10^{344}$
336	$8,447724173 \times 10^{299}$	386	$1,049385641 \times 10^{345}$
337	$6,738105512 \times 10^{300}$	387	$8,373373680 \times 10^{345}$
338	$5,374520467 \times 10^{301}$	388	$6,681419394 \times 10^{346}$
339	$4,286920639 \times 10^{302}$	389	$5,331383009 \times 10^{347}$
340	$3,419439728 \times 10^{303}$	390	$4,254160871 \times 10^{348}$
341	$2,727521776 \times 10^{304}$	391	$3,394617096 \times 10^{349}$
342	$2,175631021 \times 10^{305}$	392	$2,708759984 \times 10^{350}$
343	$1,735425516 \times 10^{306}$	393	$2,161489286 \times 10^{351}$
344	$1,384300620 \times 10^{307}$	394	$1,724798898 \times 10^{352}$
345	$1,104227415 \times 10^{308}$	395	$1,376342901 \times 10^{353}$
346	$8,808263398 \times 10^{308}$	396	$1,098291485 \times 10^{354}$
347	$7,026283932 \times 10^{309}$	397	$8,764181442 \times 10^{354}$
348	$5,604859262 \times 10^{310}$	398	$6,993713925 \times 10^{355}$
349	$4,471027296 \times 10^{311}$	399	$5,580936919 \times 10^{356}$

n	TH	n	TH
400	$4,453578341 \times 10^{357}$	450	$5,649573161 \times 10^{402}$
401	$3,553970329 \times 10^{358}$	451	$4,509629693 \times 10^{403}$
402	$2,836097809 \times 10^{359}$	452	$3,599716213 \times 10^{404}$
403	$2,263243611 \times 10^{360}$	453	$2,873411170 \times 10^{405}$
404	$1,806109513 \times 10^{361}$	454	$2,293661932 \times 10^{406}$
405	$1,441317045 \times 10^{362}$	455	$1,830893774 \times 10^{407}$
406	$1,150211266 \times 10^{363}$	456	$1,461500573 \times 10^{408}$
407	$9,179063003 \times 10^{363}$	457	$1,166640164 \times 10^{409}$
408	$7,325237507 \times 10^{364}$	458	$9,312728458 \times 10^{409}$
409	$5,845850213 \times 10^{365}$	459	$7,433939624 \times 10^{410}$
410	$4,665264342 \times 10^{366}$	460	$5,934213724 \times 10^{411}$
411	$3,723123289 \times 10^{367}$	461	$4,737065536 \times 10^{412}$
412	$2,971263405 \times 10^{368}$	462	$3,781443790 \times 10^{413}$
413	$2,371250596 \times 10^{369}$	463	$3,018616508 \times 10^{414}$
414	$1,892414654 \times 10^{370}$	464	$2,409684950 \times 10^{415}$
415	$1,510280759 \times 10^{371}$	465	$1,923599288 \times 10^{416}$
416	$1,205317890 \times 10^{372}$	466	$1,535574748 \times 10^{417}$
417	$9,619400995 \times 10^{372}$	467	$1,225827383 \times 10^{418}$
418	$7,677095750 \times 10^{373}$	468	$9,785649800 \times 10^{418}$
419	$6,127006978 \times 10^{374}$	469	$7,811816017 \times 10^{419}$
420	$4,889925814 \times 10^{375}$	470	$6,236146659 \times 10^{420}$
421	$3,902641260 \times 10^{376}$	471	$4,978317638 \times 10^{421}$
422	$3,114708781 \times 10^{377}$	472	$3,974210315 \times 10^{422}$
423	$2,485871672 \times 10^{378}$	473	$3,172641798 \times 10^{423}$
424	$1,984003320 \times 10^{379}$	474	$2,532754997 \times 10^{424}$
425	$1,583465127 \times 10^{380}$	475	$2,021935307 \times 10^{425}$
426	$1,263796127 \times 10^{381}$	476	$1,614147651 \times 10^{426}$
427	$1,008667282 \times 10^{382}$	477	$1,288609060 \times 10^{427}$
428	$8,050469951 \times 10^{382}$	478	$1,028729074 \times 10^{428}$
429	$6,425351743 \times 10^{383}$	479	$8,212639337 \times 10^{428}$
430	$5,128317968 \times 10^{384}$	480	$6,556414216 \times 10^{429}$
431	$4,093128080 \times 10^{385}$	481	$5,234219165 \times 10^{430}$
432	$3,266916738 \times 10^{386}$	482	$4,178681814 \times 10^{431}$
433	$2,607492861 \times 10^{387}$	483	$3,336019454 \times 10^{432}$
434	$2,081184152 \times 10^{388}$	484	$2,663297678 \times 10^{433}$
435	$1,661116919 \times 10^{389}$	485	$2,126242050 \times 10^{434}$
436	$1,325843280 \times 10^{390}$	486	$1,697491249 \times 10^{435}$
437	$1,058245596 \times 10^{391}$	487	$1,355202601 \times 10^{436}$
438	$8,446621345 \times 10^{391}$	488	$1,081938917 \times 10^{437}$
439	$6,741892892 \times 10^{392}$	489	$8,637798819 \times 10^{437}$
440	$5,381247023 \times 10^{393}$	490	$6,896126918 \times 10^{438}$
441	$4,295228328 \times 10^{394}$	491	$5,505657842 \times 10^{439}$
442	$3,428402620 \times 10^{395}$	492	$4,395567910 \times 10^{440}$
443	$2,736526183 \times 10^{396}$	493	$3,509316730 \times 10^{441}$
444	$2,184286560 \times 10^{397}$	494	$2,801766439 \times 10^{442}$
445	$1,743499494 \times 10^{398}$	495	$2,236881990 \times 10^{443}$
446	$1,391669901 \times 10^{399}$	496	$1,785895289 \times 10^{444}$
447	$1,110843376 \times 10^{400}$	497	$1,425839620 \times 10^{445}$
448	$8,866895732 \times 10^{400}$	498	$1,138379655 \times 10^{446}$
449	$7,077706358 \times 10^{401}$	499	$9,088774453 \times 10^{446}$

n	TH	n	TH
500	$7,256467814 \times 10^{447}$	550	$9,414680316 \times 10^{492}$
501	$5,793579356 \times 10^{448}$	551	$7,518066744 \times 10^{493}$
502	$4,625624548 \times 10^{449}$	552	$6,003551058 \times 10^{494}$
503	$3,693137898 \times 10^{450}$	553	$4,794150539 \times 10^{495}$
504	$2,948644312 \times 10^{451}$	554	$3,828393299 \times 10^{496}$
505	$2,354241242 \times 10^{452}$	555	$3,057192915 \times 10^{497}$
506	$1,879668417 \times 10^{453}$	556	$2,441352853 \times 10^{498}$
507	$1,500766834 \times 10^{454}$	557	$1,949573749 \times 10^{499}$
508	$1,198248502 \times 10^{455}$	558	$1,556862240 \times 10^{500}$
509	$9,567142681 \times 10^{455}$	559	$1,243260394 \times 10^{501}$
510	$7,638697039 \times 10^{456}$	560	$9,928311700 \times 10^{501}$
511	$6,098990997 \times 10^{457}$	561	$7,928482916 \times 10^{502}$
512	$4,869656910 \times 10^{458}$	562	$6,331493533 \times 10^{503}$
513	$3,888126580 \times 10^{459}$	563	$5,056192698 \times 10^{504}$
514	$3,104445774 \times 10^{460}$	564	$4,037778010 \times 10^{505}$
515	$2,478731053 \times 10^{461}$	565	$3,224501822 \times 10^{506}$
516	$1,979139363 \times 10^{462}$	566	$2,575041170 \times 10^{507}$
517	$1,580247014 \times 10^{463}$	567	$2,056397582 \times 10^{508}$
518	$1,261755503 \times 10^{464}$	568	$1,642220029 \times 10^{509}$
519	$1,007458249 \times 10^{465}$	569	$1,311465748 \times 10^{510}$
520	$8,044156682 \times 10^{465}$	570	$1,047330867 \times 10^{511}$
521	$6,422965559 \times 10^{466}$	571	$8,363964719 \times 10^{511}$
522	$5,128522526 \times 10^{467}$	572	$6,679467096 \times 10^{512}$
523	$4,094968238 \times 10^{468}$	573	$5,334242636 \times 10^{513}$
524	$3,269718747 \times 10^{469}$	574	$4,259955301 \times 10^{514}$
525	$2,610789401 \times 10^{470}$	575	$3,402033906 \times 10^{515}$
526	$2,084658218 \times 10^{471}$	576	$2,716899340 \times 10^{516}$
527	$1,664560004 \times 10^{472}$	577	$2,169750361 \times 10^{517}$
528	$1,329124348 \times 10^{473}$	578	$1,732795440 \times 10^{518}$
529	$1,061288192 \times 10^{474}$	579	$1,383840781 \times 10^{519}$
530	$8,474276000 \times 10^{474}$	580	$1,105162781 \times 10^{520}$
531	$6,766645503 \times 10^{475}$	581	$8,826076115 \times 10^{520}$
532	$5,403134611 \times 10^{476}$	582	$7,048721871 \times 10^{521}$
533	$4,314392839 \times 10^{477}$	583	$5,629299613 \times 10^{522}$
534	$3,445046721 \times 10^{478}$	584	$4,495723914 \times 10^{523}$
535	$2,750882691 \times 10^{479}$	585	$3,590427625 \times 10^{524}$
536	$2,196597800 \times 10^{480}$	586	$2,867437700 \times 10^{525}$
537	$1,754003807 \times 10^{481}$	587	$2,290040016 \times 10^{526}$
538	$1,400593243 \times 10^{482}$	588	$1,828914544 \times 10^{527}$
539	$1,118394505 \times 10^{483}$	589	$1,460646133 \times 10^{528}$
540	$8,930576987 \times 10^{483}$	590	$1,166535249 \times 10^{529}$
541	$7,131247412 \times 10^{484}$	591	$9,316482408 \times 10^{529}$
542	$5,694465620 \times 10^{485}$	592	$7,440588987 \times 10^{530}$
543	$4,547177702 \times 10^{486}$	593	$5,942427646 \times 10^{531}$
544	$3,631051033 \times 10^{487}$	594	$4,745934350 \times 10^{532}$
545	$2,899507578 \times 10^{488}$	595	$3,790362812 \times 10^{533}$
546	$2,315355103 \times 10^{489}$	596	$3,027199665 \times 10^{534}$
547	$1,848895756 \times 10^{490}$	597	$2,417700915 \times 10^{535}$
548	$1,476415843 \times 10^{491}$	598	$1,930924545 \times 10^{536}$
549	$1,178979940 \times 10^{492}$	599	$1,542159335 \times 10^{537}$

n	TH	n	TH
600	$1,231670111 \times 10^{538}$	650	$1,622605947 \times 10^{583}$
601	$9,836956843 \times 10^{538}$	651	$1,296089749 \times 10^{584}$
602	$7,856485859 \times 10^{539}$	652	$1,035280691 \times 10^{585}$
603	$6,274759719 \times 10^{540}$	653	$8,269555670 \times 10^{585}$
604	$5,011492243 \times 10^{541}$	654	$6,605523710 \times 10^{586}$
605	$4,002563372 \times 10^{542}$	655	$5,276347042 \times 10^{587}$
606	$3,196763875 \times 10^{543}$	656	$4,214639790 \times 10^{588}$
607	$2,553195586 \times 10^{544}$	657	$3,366577244 \times 10^{589}$
608	$2,039195157 \times 10^{545}$	658	$2,689166616 \times 10^{590}$
609	$1,628675911 \times 10^{546}$	659	$2,148067098 \times 10^{591}$
610	$1,300803592 \times 10^{547}$	660	$1,715848644 \times 10^{592}$
611	$1,038938763 \times 10^{548}$	661	$1,370601197 \times 10^{593}$
612	$8,297921803 \times 10^{548}$	662	$1,094823807 \times 10^{594}$
613	$6,627502284 \times 10^{549}$	663	$8,745373259 \times 10^{594}$
614	$5,293361951 \times 10^{550}$	664	$6,985756718 \times 10^{595}$
615	$4,227800150 \times 10^{551}$	665	$5,580197239 \times 10^{596}$
616	$3,376746496 \times 10^{552}$	666	$4,457451493 \times 10^{597}$
617	$2,697016551 \times 10^{553}$	667	$3,560612251 \times 10^{598}$
618	$2,154120072 \times 10^{554}$	668	$2,844223464 \times 10^{599}$
619	$1,720510556 \times 10^{555}$	669	$2,271975910 \times 10^{600}$
620	$1,374187236 \times 10^{556}$	670	$1,814866570 \times 10^{601}$
621	$1,097578548 \times 10^{557}$	671	$1,449728405 \times 10^{602}$
622	$8,766504044 \times 10^{557}$	672	$1,158055999 \times 10^{603}$
623	$7,001940056 \times 10^{558}$	673	$9,250675273 \times 10^{603}$
624	$5,592570397 \times 10^{559}$	674	$7,389554752 \times 10^{604}$
625	$4,466894005 \times 10^{560}$	675	$5,902881481 \times 10^{605}$
626	$3,567803670 \times 10^{561}$	676	$4,715316078 \times 10^{606}$
627	$2,849688291 \times 10^{562}$	677	$3,766678102 \times 10^{607}$
628	$2,276118528 \times 10^{563}$	678	$3,008895836 \times 10^{608}$
629	$1,817998382 \times 10^{564}$	679	$2,403569836 \times 10^{609}$
630	$1,452088913 \times 10^{565}$	680	$1,920026752 \times 10^{610}$
631	$1,159829156 \times 10^{566}$	681	$1,533764758 \times 10^{611}$
632	$9,263944117 \times 10^{566}$	682	$1,225211789 \times 10^{612}$
633	$7,399441135 \times 10^{567}$	683	$9,787336353 \times 10^{612}$
634	$5,910211159 \times 10^{568}$	684	$7,818416321 \times 10^{613}$
635	$4,720719078 \times 10^{569}$	685	$6,245597611 \times 10^{614}$
636	$3,770634135 \times 10^{570}$	686	$4,989191050 \times 10^{615}$
637	$3,011769337 \times 10^{571}$	687	$3,985540188 \times 10^{616}$
638	$2,405636981 \times 10^{572}$	688	$3,183795554 \times 10^{617}$
639	$1,921496259 \times 10^{573}$	689	$2,543337938 \times 10^{618}$
640	$1,534793885 \times 10^{574}$	690	$2,031720127 \times 10^{619}$
641	$1,225918611 \times 10^{575}$	691	$1,623022757 \times 10^{620}$
642	$9,792064703 \times 10^{575}$	692	$1,296540974 \times 10^{621}$
643	$7,821462466 \times 10^{576}$	693	$1,035735330 \times 10^{622}$
644	$6,247448835 \times 10^{577}$	694	$8,273937585 \times 10^{622}$
645	$4,990206285 \times 10^{578}$	695	$6,609621538 \times 10^{623}$
646	$3,985982013 \times 10^{579}$	696	$5,280096322 \times 10^{624}$
647	$3,183854497 \times 10^{580}$	697	$4,218013787 \times 10^{625}$
648	$2,543150889 \times 10^{581}$	698	$3,369574319 \times 10^{626}$
649	$2,031384244 \times 10^{582}$	699	$2,691801163 \times 10^{627}$

n	TH	n	TH
700	$2,150363119 \times 10^{628}$	750	$2,864403048 \times 10^{673}$
701	$1,717835275 \times 10^{629}$	751	$2,288469788 \times 10^{674}$
702	$1,372309643 \times 10^{630}$	752	$1,828340208 \times 10^{675}$
703	$1,096285312 \times 10^{631}$	753	$1,460728846 \times 10^{676}$
704	$8,757818801 \times 10^{631}$	754	$1,167032546 \times 10^{677}$
705	$6,996312386 \times 10^{632}$	755	$9,323888992 \times 10^{677}$
706	$5,589118329 \times 10^{633}$	756	$7,449240290 \times 10^{678}$
707	$4,464967357 \times 10^{634}$	757	$5,951516381 \times 10^{679}$
708	$3,566926347 \times 10^{635}$	758	$4,754929056 \times 10^{680}$
709	$2,849514443 \times 10^{636}$	759	$3,798929259 \times 10^{681}$
710	$2,276399325 \times 10^{637}$	760	$3,035142778 \times 10^{682}$
711	$1,818556908 \times 10^{638}$	761	$2,424922135 \times 10^{683}$
712	$1,452801247 \times 10^{639}$	762	$1,937390743 \times 10^{684}$
713	$1,160610163 \times 10^{640}$	763	$1,547880366 \times 10^{685}$
714	$9,271871190 \times 10^{640}$	764	$1,236682768 \times 10^{686}$
715	$7,407117988 \times 10^{641}$	765	$9,880523870 \times 10^{686}$
716	$5,917414424 \times 10^{642}$	766	$7,894095516 \times 10^{687}$
717	$4,727326051 \times 10^{643}$	767	$6,307039094 \times 10^{688}$
718	$3,776591178 \times 10^{644}$	768	$5,039058588 \times 10^{689}$
719	$3,017068943 \times 10^{645}$	769	$4,026002402 \times 10^{690}$
720	$2,410301302 \times 10^{646}$	770	$3,216617250 \times 10^{691}$
721	$1,925565406 \times 10^{647}$	771	$2,569954750 \times 10^{692}$
722	$1,538317748 \times 10^{648}$	772	$2,053299483 \times 10^{693}$
723	$1,228951263 \times 10^{649}$	773	$1,640513650 \times 10^{694}$
724	$9,818024275 \times 10^{649}$	774	$1,310714568 \times 10^{695}$
725	$7,843580751 \times 10^{650}$	775	$1,047218076 \times 10^{696}$
726	$6,266217564 \times 10^{651}$	776	$8,366943905 \times 10^{696}$
727	$5,006075461 \times 10^{652}$	777	$6,684936811 \times 10^{697}$
728	$3,999356666 \times 10^{653}$	778	$5,341072529 \times 10^{698}$
729	$3,195094455 \times 10^{654}$	779	$4,267370619 \times 10^{699}$
730	$2,552572490 \times 10^{655}$	780	$3,409517833 \times 10^{700}$
731	$2,039263204 \times 10^{656}$	781	$2,724120310 \times 10^{701}$
732	$1,629180844 \times 10^{657}$	782	$2,176508235 \times 10^{702}$
733	$1,301565769 \times 10^{658}$	783	$1,738981877 \times 10^{703}$
734	$1,039833370 \times 10^{659}$	784	$1,389410275 \times 10^{704}$
735	$8,307343910 \times 10^{659}$	785	$1,110111659 \times 10^{705}$
736	$6,636841313 \times 10^{660}$	786	$8,869589628 \times 10^{705}$
737	$5,302265619 \times 10^{661}$	787	$7,086651779 \times 10^{706}$
738	$4,236062183 \times 10^{662}$	788	$5,662123806 \times 10^{707}$
739	$3,384261952 \times 10^{663}$	789	$4,523955554 \times 10^{708}$
740	$2,703749250 \times 10^{664}$	790	$3,614581287 \times 10^{709}$
741	$2,160079058 \times 10^{665}$	791	$2,888007780 \times 10^{710}$
742	$1,725733273 \times 10^{666}$	792	$2,307487815 \times 10^{711}$
743	$1,378727659 \times 10^{667}$	793	$1,843661416 \times 10^{712}$
744	$1,101498960 \times 10^{668}$	794	$1,473070759 \times 10^{713}$
745	$8,800158203 \times 10^{668}$	795	$1,176973650 \times 10^{714}$
746	$7,030685174 \times 10^{669}$	796	$9,403955358 \times 10^{714}$
747	$5,617015260 \times 10^{670}$	797	$7,513720982 \times 10^{715}$
748	$4,487602025 \times 10^{671}$	798	$6,003441084 \times 10^{716}$
749	$3,585286318 \times 10^{672}$	799	$4,796739402 \times 10^{717}$

n	TH
800	$3,832592782 \times 10^{718}$
900	$6,939348990 \times 10^{808}$
1000	$1,272166162 \times 10^{899}$
1100	$2,355790595 \times 10^{989}$
1200	$4,398816521 \times 10^{1079}$
1300	$8,271097776 \times 10^{1169}$
1400	$1,564477105 \times 10^{1260}$
1500	$2,974389166 \times 10^{1350}$
1600	$5,680175198 \times 10^{1440}$
1700	$1,088995705 \times 10^{1531}$
1800	$2,095060406 \times 10^{1621}$
1900	$4,043057502 \times 10^{1711}$
2000	$7,823992247 \times 10^{1801}$
2100	$1,517869252 \times 10^{1892}$
2100	$6,828208354 \times 10^{1895}$
2200	$2,951389596 \times 10^{1982}$
2300	$5,750653813 \times 10^{2072}$
2400	$1,122612553 \times 10^{2163}$
2500	$2,195317871 \times 10^{2253}$
2600	$4,299921676 \times 10^{2343}$
2700	$8,434644156 \times 10^{2433}$
2800	$1,656796932 \times 10^{2524}$
2900	$3,258563819 \times 10^{2614}$
3000	$6,416526748 \times 10^{2704}$
4000	$5,920197537 \times 10^{3607}$

Comportamiento asintótico de la cohomología total

En los capítulos anteriores hemos descrito la cohomología de algunas sucesiones de álgebras de Lie. Entender estas familias como un objeto puede develar importantes estructuras subyacentes. En distintas áreas de la matemática se estudian los fenómenos de estabilización cohomológica.

En este capítulo analizamos el comportamiento asintótico de la cohomología total de los nilradicales de las álgebras parabólicas estudiadas en el capítulo anterior. El capítulo está estructurado en tres secciones, la sección 1 corresponde al caso determinado por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ y la sección 2 corresponde al caso $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$ (cuyo nilradical es el álgebra de Heisenberg de dimensión $2n+1$). En estos dos casos obtuvimos una fórmula cerrada, la misma en ambos casos. A partir de ésta determinamos el comportamiento asintótico buscado.

En la sección 3 se estudia el caso correspondiente a $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, como para este caso no se pudo determinar una fórmula cerrada para la cohomología total, el comportamiento asintótico se infirió de los datos experimentales. Encontramos aproximaciones a partir de las cuales conjeturamos el comportamiento asintótico buscado.

1. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$.

Para el Caso 1, $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$

En el Teorema 4.10 determinamos una fórmula para calcular la dimensión del espacio de cohomología para el nilradical de una subálgebra parabólica parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$,

$$\dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

Para determinar el comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$, utilizaremos la fórmula de Stirling que es una aproximación asintótica de la función factorial,

$$(34) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

TEOREMA 5.1. *Sea $TH(n)$ la dimensión del espacio de cohomología total para el nilradical de la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, determinada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$. La sucesión $TH(n)$ es asintótica a $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si el álgebra parabólica $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, está determinada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$,

$$TH(n) = \dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1} = 2 \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n)!}.$$

Aplicando la aproximación asintótica de Stirling a cada factorial se tiene:

$$(2n-1)! \sim \sqrt{2\pi(2n-1)} \left(\frac{2n-1}{e}\right)^{(2n-1)}, \quad (n-1)! \sim \sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{(n-1)},$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Luego

$$\begin{aligned} TH(n) &= 2 \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n)!} \sim \frac{2 \sqrt{2\pi(2n-1)} \left(\frac{2n-1}{e}\right)^{(2n-1)}}{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{(n-1)} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2n-1)^{2n-1} e^{n-1} e^n \sqrt{2n-1}}{(n-1)^{n-1} n^n e^{2n-1} \sqrt{(n-1)n}} \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2n-1)^{2n} (n-1) (2n)^{2n} n^n e^{2n-1} \sqrt{2n-1}}{(2n-1)(n-1)^n (2n)^{2n} n^n n^n e^{2n-1} \sqrt{(n-1)n}} \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n} (n-1) (2n)^{2n}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n (2n-1) n^{2n}} \sqrt{\frac{2n-1}{(n-1)n}} \end{aligned}$$

como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$

$$\begin{aligned} TH(n) &\sim 2 \frac{2^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e}{e} \frac{(n-1)}{(2n-1)} \sqrt{\frac{2n-1}{(n-1)n}} \\ &\sim 2 \frac{2^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n-1}{(2n-1)n}} \\ &\sim 2 \frac{2^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(2-\frac{1}{n})n}} \\ &\sim 2 \frac{2^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(1-\frac{1}{n})}{(2-\frac{1}{n})n}} \\ &\sim 2 \frac{2^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{1}{2n}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$TH(n) \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

□

Llamaremos:

$$(35) \quad AsintTH(n) = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

En la Tabla 1, podemos observar para algunos valores de n , $TH(n)$, el correspondiente valor obtenido con la función asintótica, $AsintTH$, y el cociente entre estos.

TABLA 1. Caso $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$

n	TH	$AsintTH$	$TH / AsintTH$
1000	$2,048151627 \times 10^{600}$	$2,048407661 \times 10^{600}$	0,9998750080
2000	$1,662897875 \times 10^{1202}$	$1,663001809 \times 10^{1202}$	0,9999375021
3000	$1,558907421 \times 10^{1804}$	$1,558972377 \times 10^{1804}$	0,9999583340
4000	$1,550053929 \times 10^{2406}$	$1,550102368 \times 10^{2406}$	0,9999687509
5000	$1,591790264 \times 10^{3008}$	$1,591830058 \times 10^{3008}$	0,9999750001
6000	$1,668354582 \times 10^{3610}$	$1,668389340 \times 10^{3610}$	0,9999791664
7000	$1,773403593 \times 10^{4212}$	$1,773435261 \times 10^{4212}$	0,9999821430
8000	$1,904600561 \times 10^{4814}$	$1,904630320 \times 10^{4814}$	0,9999843748
9000	$2,061672741 \times 10^{5416}$	$2,061701375 \times 10^{5416}$	0,9999861112
10000	$2,245602663 \times 10^{6018}$	$2,245630733 \times 10^{6018}$	0,9999875003

2. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$.

Para el Caso 2, $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$

Para este caso, la fórmula determinada para el cálculo de la cohomología total (Teorema 4.15), es la misma que para el Caso 1, $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$, a pesar que los nilradicales correspondientes a cada caso no son isomorfos.

$$\dim H^*(\mathfrak{n}) = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

En el siguiente teorema enunciaremos el comportamiento asintótico de la cohomología total, que es evidentemente igual a la del caso $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ como consecuencia inmediata de lo antes mencionado.

TEOREMA 5.2. *Sea $TH(n)$ la dimensión del espacio de cohomología total para el nilradical de la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, determinada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$. La sucesión $TH(n)$ es asintótica a $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.*

3. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(\mathfrak{n})$.

Para el Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$

En el Teorema 4.21 y la Proposición 4.22 determinamos fórmulas para calcular la dimensión del espacio de cohomología TH , para el nilradical de una subálgebra parabólica

$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{sl}(n+1)$ parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ (recordemos que para este caso $n \geq 3$).

Observemos en las Figuras 1 y 2, para la fórmula (23) de la Proposición 4.22

$$TH(n) = \sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=a_1+1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{(a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1}}_{F_{a_1}^n(a_2, k)},$$

el comportamiento de la función $F_{a_1}^n$, para diferentes valores de n y a_1 .

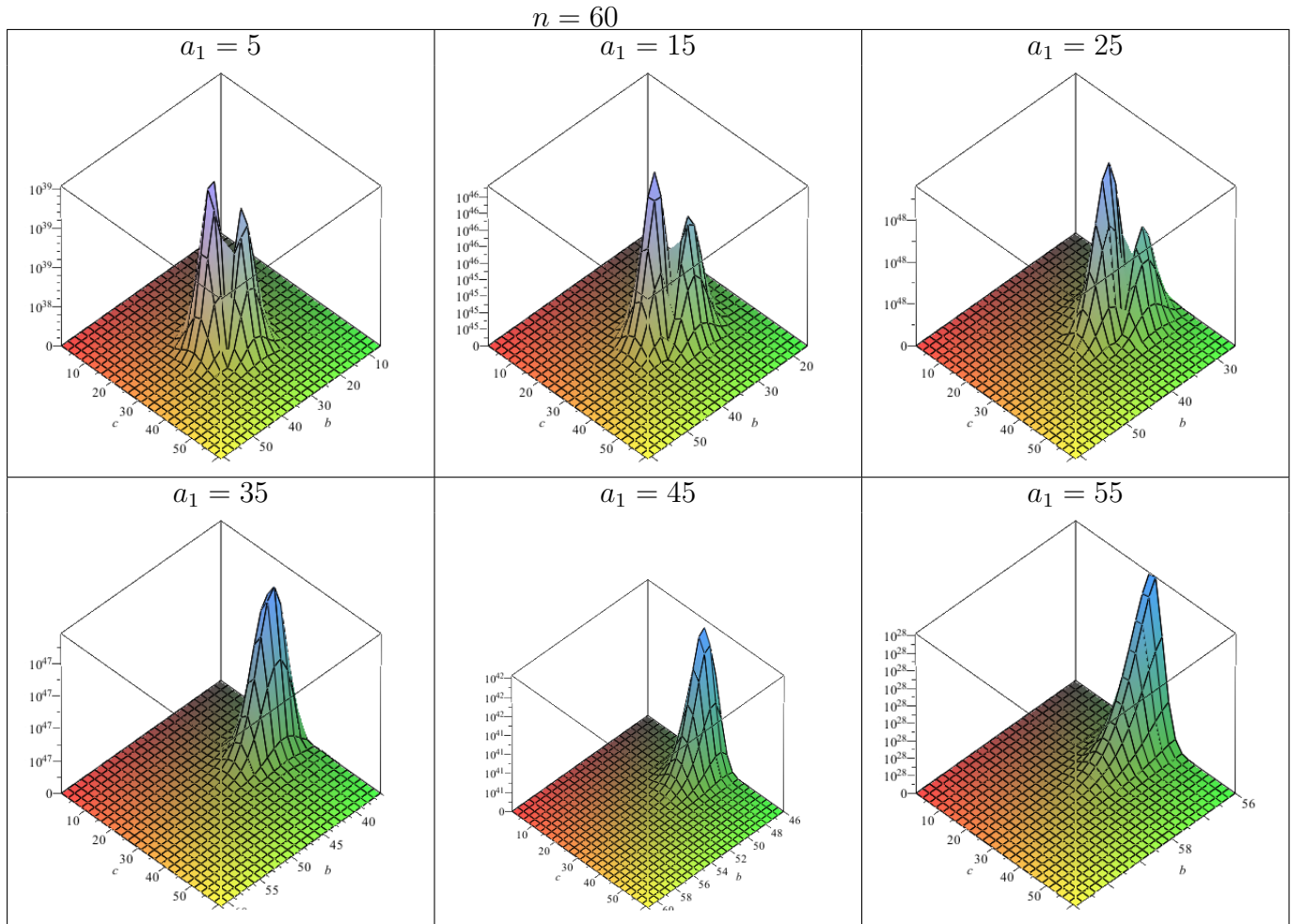


FIGURA 1. $F_{a_1}^{60}(a_2, k) = (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1}$

Dadas las características de esta fórmula, no ha sido posible determinar el resultado de las sumas para obtener una expresión cerrada que permita calcular TH . Por esta razón es que para determinar el comportamiento asintótico encontramos aproximaciones a partir de las cuales conjeturamos el comportamiento buscado.

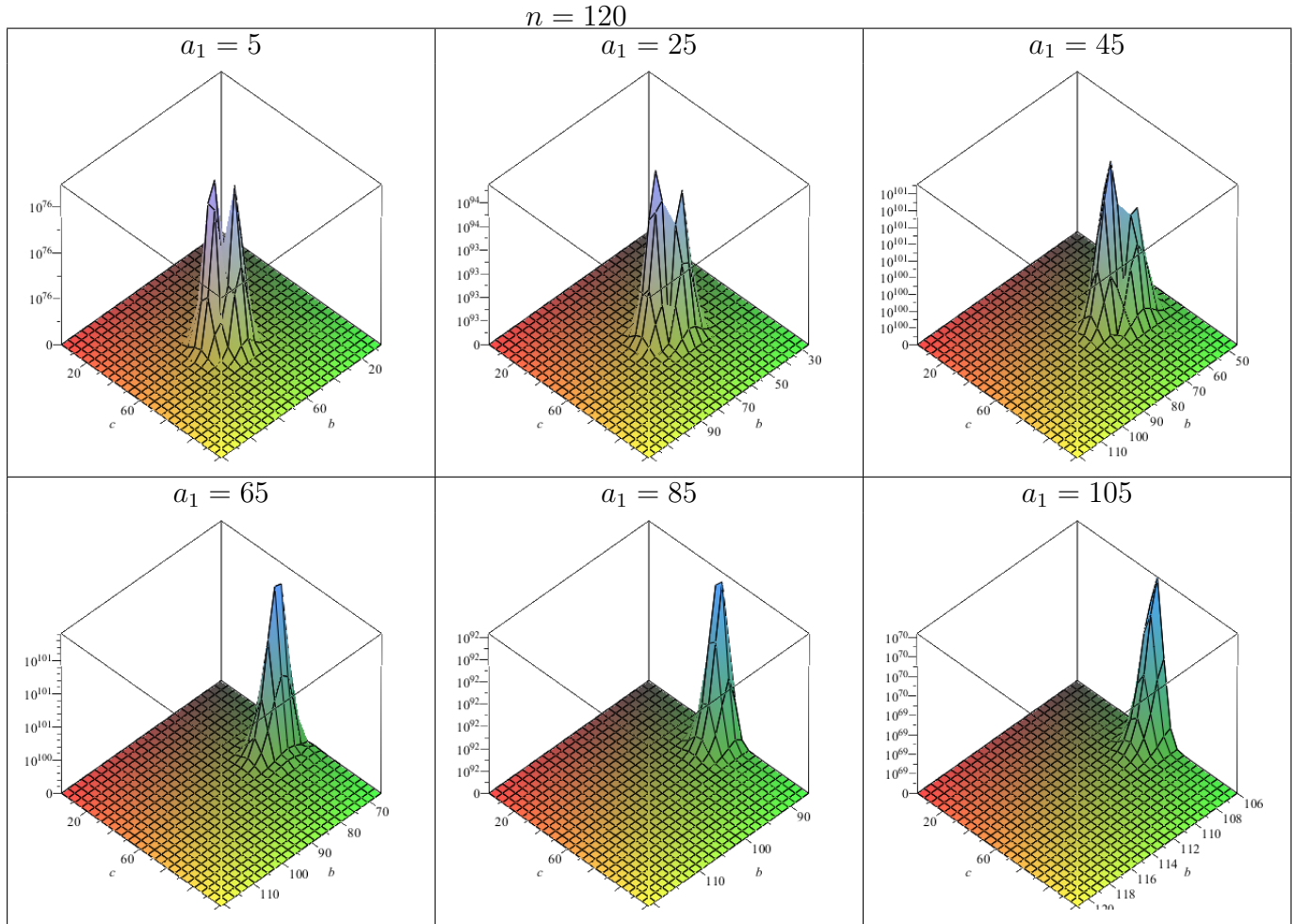


FIGURA 2. $F_{a_1}^{120}(a_2, k) = (a_2 - a_1)^2 \frac{|k-a_1||k-a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1}$

Las siguientes igualdades (consultar [6]) se utilizaran en esta sección:

$$(36) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$(37) \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1},$$

$$(38) \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) 2^{n-2},$$

$$(39) \quad \sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3) 2^{n-3},$$

y

$$(40) \quad \sum_{k=0}^n k^4 \binom{n}{k} = n(n+1)(n^2+5n-2)2^{n-4}.$$

En el caso que estamos considerando, \mathfrak{n} es el nilradical de una subálgebra parabólica de un álgebra de Lie de tipo A_n . El álgebra parabólica esta parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ y n es un natural mayor o igual a 3.

TH es la dimensión del espacio de cohomología total para la representación trivial. Para evidenciar el valor de n , hablaremos de la sucesión $TH(n)$ y entendemos que $n \geq 3$.

3.1. Cota superior.

Con el objetivo de estudiar el comportamiento de la cohomología total, encontramos una función que acota superiormente a TH .

TEOREMA 5.3. *Si $TH(n)$ es la dimensión del espacio de cohomología total para el nilradical de la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ determinada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, entonces*

$$TH(n) \leq \frac{2^{3n-4}(3n-1)}{n(n-1)}.$$

DEMOSTRACIÓN. La fórmula (24) (de la Proposición 4.22) para determinar la cohomología para el Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ es

$$TH(n) = \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}.$$

Para cada a_1 y a_2 , números enteros entre 0 y n , definamos las funciones que dependen de esos parámetros,

$$f_{a_1 a_2}(k) = |k - a_1||k - a_2| = \begin{cases} -(k - a_1)(k - a_2), & \text{si } a_1 \leq k \leq a_2, \\ (k - a_1)(k - a_2), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

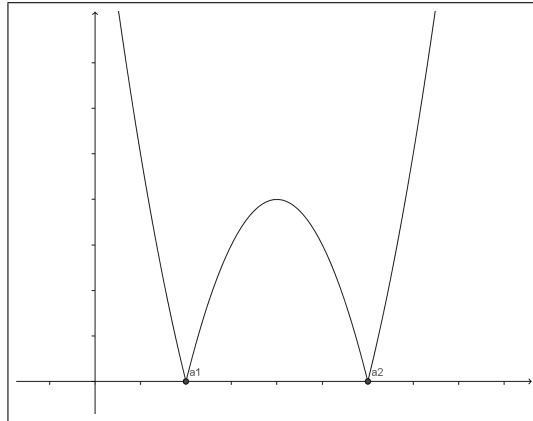


FIGURA 3. $f_{a_1 a_2}(k) = |k - a_1||k - a_2|$

Si consideramos la parábola, que depende de los parámetros a_1 y a_2 , cuya ecuación es

$$p_{a_1 a_2}(k) = (k - a_1)(k - a_2) + 2 \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2,$$

se verifica que $\forall k$, $f_{a_1 a_2}(k) \leq p_{a_1 a_2}(k)$.

Por lo tanto, para todo k entero, entre 0 y n ,

$$(41) \quad (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k} \leq (a_2 - a_1)^2 \frac{(k - a_1)(k - a_2) + 2 \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}.$$

Observemos en la Figura 4, la representación gráfica de las dos funciones, $f_{a_1 a_2}$ y $p_{a_1 a_2}$, para valores determinados de los parámetros.

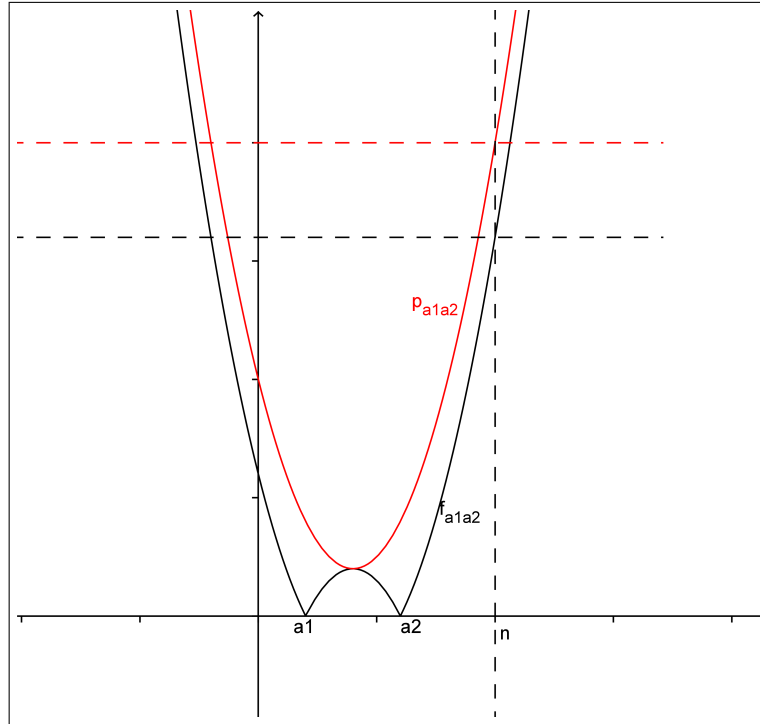


FIGURA 4. $f_{a_1 a_2}(k) = |k - a_1||k - a_2|$ y $p_{a_1 a_2}(k) = (k - a_1)(k - a_2) + 2 \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2$

De la desigualdad (41) se sigue entonces que:

$$TH(n) \leq \frac{1}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \left((k - a_1)(k - a_2) + 2 \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2 \right) \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k},$$

por lo tanto

$$TH(n) \leq \frac{1}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n (a_2 - a_1)^2 \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \sum_{k=0}^n \left(k^2 - k(a_1 + a_2) + \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \right) \binom{n}{k},$$

aplicando las fórmulas (36),(37)y (38) para la variable k , se obtiene,

$$\leq \frac{1}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n (a_2 - a_1)^2 \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \left(2^{n-2}n(n+1) - 2^{n-1}n(a_1 + a_2) + 2^n \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \right),$$

$$\leq \frac{1}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n (a_2 - a_1)^2 \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \left[2^{n-1}a_2^2 - 2^{n-1}na_2 + \right. \\ \left. + (2^{n-2}n(n+1) - 2^{n-1}na_1 + 2^{n-1}a_1^2) \right],$$

$$\leq \frac{2^{n-2}}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n (a_2 - a_1)^2 \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \left[2a_2^2 - 2na_2 + (n(n+1) - 2na_1 + 2a_1^2) \right],$$

$$\leq \frac{2^{n-2}}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \binom{n}{a_1} \sum_{a_2=0}^n \left[2a_2^4 + (-2n - 4a_1)a_2^3 + (4a_1^2 + 2na - 1 + n + n^2)a_2^2 + \right. \\ \left. + (-4a_1^3 + 2na_1^2 - 2na_1 - 2n^2a_1)a_2 + (2a_1^4 - 2na_1^3 + na_1^2 + n^2a_1^2) \right] \binom{n}{a_2},$$

aplicando las fórmulas (36),(37), (38), (39) y (40) para la variable a_2 ,

$$\leq \frac{2^{n-2}}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \binom{n}{a_1} \left[2 \cdot 2^{n-4}n(n+1)(n^2 + 5n - 2) + (-2n - 4a_1) 2^{n-3}n^2(3+n) + \right. \\ \left. + (4a_1^2 + 2na - 1 + n + n^2) 2^{n-2}n(n+1) + (-4a_1^3 + 2na_1^2 - 2na_1 - 2n^2a_1) n 2^{n-1} + \right. \\ \left. + (2a_1^4 - 2na_1^3 + na_1^2 + n^2a_1^2) 2^n \right],$$

$$\leq \frac{2^{2n-2}}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \binom{n}{a_1} \left[2a_1^4 - 4na_1^3 + a_1^2(3n^2 + 2n) + a_1(-n^3 - 2n^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{4}n + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{8}n^4 \right],$$

aplicando nuevamente las fórmulas (36),(37), (38),(39) y (40) ahora para la variable a_1 , se o

$$\leq \frac{2^{2n-2}}{2n^2(n-1)} \left[2 \cdot 2^{n-4}n(n+1)(n^2 + 5n - 2) - 4n 2^{n-3}n^2(n+3) + 2^{n-2}n(n+1)(3n^2 + 2n) + \right. \\ \left. + 2^{n-1}n(-n^3 - 2n^2) + 2^n \left(-\frac{1}{4}n + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{8}n^4 \right) \right],$$

$$\leq \frac{2^{2n-2}}{2n^2(n-1)} 2^{n-1}n(3n-1).$$

Podemos entonces concluir que, $TH(n) \leq \frac{2^{3n-4}(3n-1)}{n(n-1)}$. □

Llamemos $THsup$ a la sucesión que determina este teorema,

$$(42) \quad \forall n \geq 3, \quad THsup(n) = \frac{2^{3n-4}(3n-1)}{n(n-1)}$$

Las Tablas 2 y 3, muestran para cada n , el valor exacto de TH , el valor determinado por la función $THsup$ y el cociente entre estos dos resultados.

TABLA 2. Función cota superior

n	TH	$THsup$	$THsup/TH$
100	$2,112827363 \times 10^{87}$	$3,845162607 \times 10^{87}$	1,819913295
110	$2,061762394 \times 10^{96}$	$3,751071145 \times 10^{96}$	1,819351811
120	$2,028801269 \times 10^{105}$	$3,690155756 \times 10^{105}$	1,818884783
130	$2,010406567 \times 10^{114}$	$3,655904689 \times 10^{114}$	1,818490225
140	$2,004098578 \times 10^{123}$	$3,643756806 \times 10^{123}$	1,818152483
150	$2,008105012 \times 10^{132}$	$3,650453996 \times 10^{132}$	1,817860109
160	$2,021142546 \times 10^{141}$	$3,673637863 \times 10^{141}$	1,817604538
170	$2,042275849 \times 10^{150}$	$3,711589713 \times 10^{150}$	1,817379231
180	$2,070823898 \times 10^{159}$	$3,763057938 \times 10^{159}$	1,817179115
190	$2,106296156 \times 10^{168}$	$3,827140509 \times 10^{168}$	1,817000187
200	$2,148348150 \times 10^{177}$	$3,903203244 \times 10^{177}$	1,816839251
210	$2,196749995 \times 10^{186}$	$3,990821932 \times 10^{186}$	1,816693725
220	$2,251363755 \times 10^{195}$	$4,089740709 \times 10^{195}$	1,816561495
230	$2,312126951 \times 10^{204}$	$4,199841775 \times 10^{204}$	1,816440820
240	$2,379040459 \times 10^{213}$	$4,321123145 \times 10^{213}$	1,816330247
250	$2,452159564 \times 10^{222}$	$4,453682234 \times 10^{222}$	1,816228560
260	$2,531587355 \times 10^{231}$	$4,597703713 \times 10^{231}$	1,816134728
270	$2,617469858 \times 10^{240}$	$4,753450575 \times 10^{240}$	1,816047876
280	$2,709992499 \times 10^{249}$	$4,921257632 \times 10^{249}$	1,815967252
290	$2,809377600 \times 10^{258}$	$5,101526898 \times 10^{258}$	1,815892210
300	$2,915882671 \times 10^{267}$	$5,294724454 \times 10^{267}$	1,815822189
310	$3,029799362 \times 10^{276}$	$5,501378497 \times 10^{276}$	1,815756702
320	$3,151452938 \times 10^{285}$	$5,722078356 \times 10^{285}$	1,815695322
330	$3,281202190 \times 10^{294}$	$5,957474313 \times 10^{294}$	1,815637674
340	$3,419439728 \times 10^{303}$	$6,208278106 \times 10^{303}$	1,815583429
350	$3,566592592 \times 10^{312}$	$6,475264028 \times 10^{312}$	1,815532294
360	$3,723123154 \times 10^{321}$	$6,759270545 \times 10^{321}$	1,815484008
370	$3,889530285 \times 10^{330}$	$7,061202402 \times 10^{330}$	1,815438340
380	$4,066350754 \times 10^{339}$	$7,382033161 \times 10^{339}$	1,815395082
390	$4,254160871 \times 10^{348}$	$7,722808164 \times 10^{348}$	1,815354049
400	$4,453578341 \times 10^{357}$	$8,084647896 \times 10^{357}$	1,815315074
410	$4,665264342 \times 10^{366}$	$8,468751748 \times 10^{366}$	1,815278005
420	$4,889925814 \times 10^{375}$	$8,876402166 \times 10^{375}$	1,815242706
430	$5,128317968 \times 10^{384}$	$9,308969202 \times 10^{384}$	1,815209053
440	$5,381247023 \times 10^{393}$	$9,767915470 \times 10^{393}$	1,815176933

OBSERVACIÓN 5.4. De los valores expuestos en las tablas, vemos que a medida que se incrementa el valor de n , el cociente $\frac{THsup}{TH}$ disminuye, tendiendo a 1,813 . Este resultado permite asegurar que TH no crece más rápidamente que $THsup$.

TABLA 3. Función cota superior

n	TH	$THsup$	$THsup/TH$
450	$5,649573161 \times 10^{402}$	$1,025480151 \times 10^{403}$	1,815146245
460	$5,934213724 \times 10^{411}$	$1,077129158 \times 10^{412}$	1,815116894
470	$6,236146659 \times 10^{420}$	$1,131915993 \times 10^{421}$	1,815088795
480	$6,556414216 \times 10^{429}$	$1,190029745 \times 10^{430}$	1,815061870
490	$6,896126918 \times 10^{438}$	$1,251671893 \times 10^{439}$	1,815036046
500	$7,256467814 \times 10^{447}$	$1,317057077 \times 10^{448}$	1,815011257
510	$7,638697039 \times 10^{456}$	$1,386413920 \times 10^{457}$	1,814987442
520	$8,044156682 \times 10^{465}$	$1,459985918 \times 10^{466}$	1,814964546
530	$8,474276000 \times 10^{474}$	$1,538032380 \times 10^{475}$	1,814942515
540	$8,930576987 \times 10^{483}$	$1,620829441 \times 10^{484}$	1,814921302
550	$9,414680316 \times 10^{492}$	$1,708671142 \times 10^{493}$	1,814900862
560	$9,928311700 \times 10^{501}$	$1,801870579 \times 10^{502}$	1,814881153
570	$1,047330867 \times 10^{511}$	$1,900761135 \times 10^{511}$	1,814862137
580	$1,105162781 \times 10^{520}$	$2,005697797 \times 10^{520}$	1,814843778
590	$1,166535249 \times 10^{529}$	$2,117058550 \times 10^{529}$	1,814826043
600	$1,231670111 \times 10^{538}$	$2,235245880 \times 10^{538}$	1,814808900
610	$1,300803592 \times 10^{547}$	$2,360688369 \times 10^{547}$	1,814792320
620	$1,374187236 \times 10^{556}$	$2,493842395 \times 10^{556}$	1,814776276
630	$1,452088913 \times 10^{565}$	$2,635193953 \times 10^{565}$	1,814760742
640	$1,534793885 \times 10^{574}$	$2,785260594 \times 10^{574}$	1,814745694
650	$1,622605947 \times 10^{583}$	$2,944593491 \times 10^{583}$	1,814731110
660	$1,715848644 \times 10^{592}$	$3,113779651 \times 10^{592}$	1,814716969
670	$1,814866570 \times 10^{601}$	$3,293444265 \times 10^{601}$	1,814703251
680	$1,920026752 \times 10^{610}$	$3,484253225 \times 10^{610}$	1,814689937
690	$2,031720127 \times 10^{619}$	$3,686915802 \times 10^{619}$	1,814677009
700	$2,150363119 \times 10^{628}$	$3,902187510 \times 10^{628}$	1,814664451
710	$2,276399325 \times 10^{637}$	$4,130873152 \times 10^{637}$	1,814652248
720	$2,410301302 \times 10^{646}$	$4,373830080 \times 10^{646}$	1,814640384
730	$2,552572490 \times 10^{655}$	$4,631971671 \times 10^{655}$	1,814628846
740	$2,703749250 \times 10^{664}$	$4,906271028 \times 10^{664}$	1,814617620
750	$2,864403048 \times 10^{673}$	$5,197764943 \times 10^{673}$	1,814606693
760	$3,035142778 \times 10^{682}$	$5,507558112 \times 10^{682}$	1,814596055
770	$3,216617250 \times 10^{691}$	$5,836827643 \times 10^{691}$	1,814585693
780	$3,409517833 \times 10^{700}$	$6,186827860 \times 10^{700}$	1,814575598
790	$3,614581287 \times 10^{709}$	$6,558895435 \times 10^{709}$	1,814565758

OBSERVACIÓN 5.5. *Es trivial verificar que: $\forall n > 3$, $THsup < 2^{\dim(n)} = 2^{3n-4}$, por lo tanto*

$$\forall n > 3, \quad TH \leq THsup < 2^{\dim(n)}$$

3.2. Cota inferior.

En la fórmula (24) de la Proposición 4.22 para determinar la cohomología,

$$TH(n) = \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k},$$

la dificultad en el cálculo de las sumas está en la expresión afectada por el valor absoluto.

Si $k \neq a_1$ y $k \neq a_2$

$$1 \leq |k - a_1| \quad \text{y} \quad 1 \leq |k - a_2|$$

y en consecuencia, todos los sumandos para los que $k \neq a_1$ y $k \neq a_2$, verifican que:

$$(43) \quad \frac{(a_2 - a_1)^2}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k} \leq (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k},$$

por lo tanto

$$(44) \quad \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq a_1, k \neq a_2}}^n \frac{(a_2 - a_1)^2}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k} \leq \\ \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1||k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k} = TH(n).$$

Sumando la expresión $\frac{1}{2} \frac{(a_2 - a_1)^2}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}$, sobre todos los k , obtenemos la sucesión que llamaremos F ,

$$F(n) = \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{(a_2 - a_1)^2}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k},$$

que no podemos afirmar que es menor que TH .

Resolvamos las sumas, para obtener una fórmula cerrada para F

$$\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{(a_2 - a_1)^2}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

aplicando la fórmula (36), sobre la variable k ,

$$= \frac{2^n}{2n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n (a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2}$$

aplicando las fórmulas (36),(37)y (38) para la variable a_2 ,

$$= \frac{2^{n-1}}{n^2(n-1)} \sum_{a_1=0}^n (a_1^2 2^n - 2a_1 n 2^{n-1} + 2^{n-2} n(n+1)) \binom{n}{a_1}$$

aplicando las fórmulas (36),(37) y (38) para la variable a_1 ,

$$= \frac{2^{n-1}}{n^2(n-1)} [2^{n-2} n(n+1) 2^n - 2n 2^{n-1} n 2^{n-1} + 2^n 2^{n-2} n(n+1)]$$

resolviendo las operaciones correspondientes,

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{n-1}}{n^2(n-1)} [2^{2n-1} n(n+1) - n^2 2^{2n-1}] \\
&= \frac{2^{n-1}}{n^2(n-1)} 2^{2n-1} (n(n+1) - n^2) \\
&= \frac{2^{3n-2}}{n(n-1)},
\end{aligned}$$

luego:

$$(45) \quad F(n) = \frac{2^{3n-2}}{n(n-1)}.$$

OBSERVACIÓN 5.6. Para determinar F hemos sumado sobre todos los k ; están sumados los términos correspondientes a $k = a_1$ y $k = a_2$, que en el caso de

$$TH(n) = \frac{1}{2} \sum_{a_1=0}^n \sum_{a_2=0}^n \sum_{k=0}^n (a_2 - a_1)^2 \frac{|k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}$$

son nulos. Pero a pesar de esto, en las Tablas 4 y 5, se puede ver que para todos los valores de n que allí se muestran, $F(n) < TH(n)$.

OBSERVACIÓN 5.7. En la Figura 5, están representados los punto $(n, \frac{TH(n)}{F(n)})$, correspondientes a las Tablas 4 y 5. Se puede observar la relación lineal que hay entre $\frac{TH(n)}{F(n)}$

TABLA 4. Función cota inferior

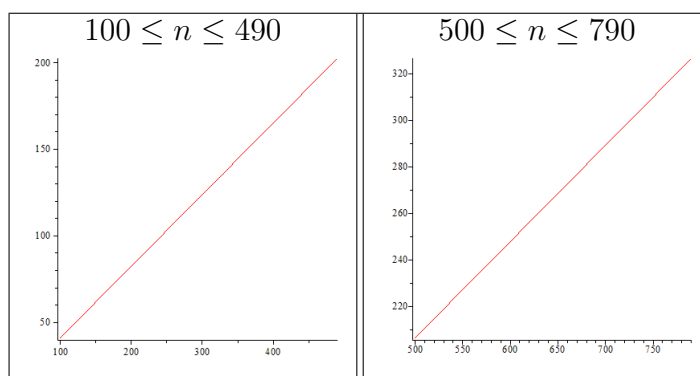
n	TH	F	TH/F
100	$2,112827363 \times 10^{87}$	$5,144030243 \times 10^{85}$	41,07338532
110	$2,061762394 \times 10^{96}$	$4,560572821 \times 10^{94}$	45,20840856
120	$2,028801269 \times 10^{105}$	$4,111594158 \times 10^{103}$	49,34342232
130	$2,010406567 \times 10^{114}$	$3,759285028 \times 10^{112}$	53,47842880
140	$2,004098578 \times 10^{123}$	$3,478526783 \times 10^{121}$	57,61342957
150	$2,008105012 \times 10^{132}$	$3,252074829 \times 10^{130}$	61,74842577
160	$2,021142546 \times 10^{141}$	$3,067756044 \times 10^{139}$	65,88341827
170	$2,042275849 \times 10^{150}$	$2,916769912 \times 10^{148}$	70,01840772
180	$2,070823898 \times 10^{159}$	$2,792621846 \times 10^{157}$	74,15339463
190	$2,106296156 \times 10^{168}$	$2,690432695 \times 10^{166}$	78,28837941
200	$2,148348150 \times 10^{177}$	$2,606479629 \times 10^{175}$	82,42336238
210	$2,196749995 \times 10^{186}$	$2,537883581 \times 10^{184}$	86,55834379
220	$2,251363755 \times 10^{195}$	$2,482391933 \times 10^{193}$	90,69332386
230	$2,312126951 \times 10^{204}$	$2,438224543 \times 10^{202}$	94,82830277
240	$2,379040459 \times 10^{213}$	$2,403962806 \times 10^{211}$	98,96328065
250	$2,452159564 \times 10^{222}$	$2,378468483 \times 10^{220}$	103,0982576
260	$2,531587355 \times 10^{231}$	$2,360823473 \times 10^{229}$	107,2332338
270	$2,617469858 \times 10^{240}$	$2,350284586 \times 10^{238}$	111,3682093
280	$2,709992499 \times 10^{249}$	$2,346249169 \times 10^{247}$	115,5031842
290	$2,809377600 \times 10^{258}$	$2,348228722 \times 10^{256}$	119,6381585
300	$2,915882671 \times 10^{267}$	$2,355828455 \times 10^{265}$	123,7731323
310	$3,029799362 \times 10^{276}$	$2,368731323 \times 10^{274}$	127,9081056
320	$3,151452938 \times 10^{285}$	$2,386685446 \times 10^{283}$	132,0430786
330	$3,281202190 \times 10^{294}$	$2,409494161 \times 10^{292}$	136,1780511
340	$3,419439728 \times 10^{303}$	$2,437008089 \times 10^{301}$	140,3130233
350	$3,566592592 \times 10^{312}$	$2,469118790 \times 10^{310}$	144,4479952
360	$3,723123154 \times 10^{321}$	$2,505753678 \times 10^{319}$	148,5829668
370	$3,889530285 \times 10^{330}$	$2,546871921 \times 10^{328}$	152,7179381
380	$4,066350754 \times 10^{339}$	$2,592461163 \times 10^{337}$	156,8529092
390	$4,254160871 \times 10^{348}$	$2,642534872 \times 10^{346}$	160,9878801
400	$4,453578341 \times 10^{357}$	$2,697130241 \times 10^{355}$	165,1228507
410	$4,665264342 \times 10^{366}$	$2,756306509 \times 10^{364}$	169,2578212
420	$4,889925814 \times 10^{375}$	$2,820143659 \times 10^{373}$	173,3927915
430	$5,128317968 \times 10^{384}$	$2,888741413 \times 10^{382}$	177,5277616
440	$5,381247023 \times 10^{393}$	$2,962218490 \times 10^{391}$	181,6627316
450	$5,649573161 \times 10^{402}$	$3,040712086 \times 10^{400}$	185,7977014
460	$5,934213724 \times 10^{411}$	$3,124377544 \times 10^{409}$	189,9326711
470	$6,236146659 \times 10^{420}$	$3,213388198 \times 10^{418}$	194,0676406
480	$6,556414216 \times 10^{429}$	$3,307935357 \times 10^{427}$	198,2026101
490	$6,896126918 \times 10^{438}$	$3,408228436 \times 10^{436}$	202,3375794

y la variable n . Con estos datos podemos concluir que

$$\frac{TH(n)}{F(n)} \cong 0,41349 n.$$

TABLA 5. Función cota inferior

n	TH	F	TH/F
500	$7,256467814 \times 10^{447}$	$3,514495201 \times 10^{445}$	206,4725486
510	$7,638697039 \times 10^{456}$	$3,626982132 \times 10^{454}$	210,6075178
520	$8,044156682 \times 10^{465}$	$3,745954889 \times 10^{463}$	214,7424868
530	$8,474276000 \times 10^{474}$	$3,871698879 \times 10^{472}$	218,8774557
540	$8,930576987 \times 10^{483}$	$4,004519929 \times 10^{481}$	223,0124246
550	$9,414680316 \times 10^{492}$	$4,144745038 \times 10^{490}$	227,1473934
560	$9,928311700 \times 10^{501}$	$4,292723237 \times 10^{499}$	231,2823621
570	$1,047330867 \times 10^{511}$	$4,448826531 \times 10^{508}$	235,4173307
580	$1,105162781 \times 10^{520}$	$4,613450941 \times 10^{517}$	239,5522993
590	$1,166535249 \times 10^{529}$	$4,787017636 \times 10^{526}$	243,6872678
600	$1,231670111 \times 10^{538}$	$4,969974164 \times 10^{535}$	247,8222363
610	$1,300803592 \times 10^{547}$	$5,162795777 \times 10^{544}$	251,9572047
620	$1,374187236 \times 10^{556}$	$5,365986864 \times 10^{553}$	256,0921730
630	$1,452088913 \times 10^{565}$	$5,580082484 \times 10^{562}$	260,2271413
640	$1,534793885 \times 10^{574}$	$5,805650013 \times 10^{571}$	264,3621095
650	$1,622605947 \times 10^{583}$	$6,043290900 \times 10^{580}$	268,4970777
660	$1,715848644 \times 10^{592}$	$6,293642548 \times 10^{589}$	272,6320459
670	$1,814866570 \times 10^{601}$	$6,557380318 \times 10^{598}$	276,7670140
680	$1,920026752 \times 10^{610}$	$6,835219666 \times 10^{607}$	280,9019820
690	$2,031720127 \times 10^{619}$	$7,127918420 \times 10^{616}$	285,0369501
700	$2,150363119 \times 10^{628}$	$7,436279200 \times 10^{625}$	289,1719180
710	$2,276399325 \times 10^{637}$	$7,761152000 \times 10^{634}$	293,3068860
720	$2,410301302 \times 10^{646}$	$8,103436925 \times 10^{643}$	297,4418539
730	$2,552572490 \times 10^{655}$	$8,464087110 \times 10^{652}$	301,5768218
740	$2,703749250 \times 10^{664}$	$8,844111813 \times 10^{661}$	305,7117896
750	$2,864403048 \times 10^{673}$	$9,244579712 \times 10^{670}$	309,8467575
760	$3,035142778 \times 10^{682}$	$9,666622399 \times 10^{679}$	313,9817253
770	$3,216617250 \times 10^{691}$	$1,011143810 \times 10^{689}$	318,1166930
780	$3,409517833 \times 10^{700}$	$1,058029561 \times 10^{698}$	322,2516608
790	$3,614581287 \times 10^{709}$	$1,107453851 \times 10^{707}$	326,3866285

FIGURA 5. $y = TH(n)/F(n)$

Por lo tanto

$$(46) \quad \frac{TH(n)}{0,41349 n F(n)} \cong 1.$$

3.3. Conjetura.

En la Subsección anterior, fórmula (46), determinamos que

$$\frac{TH(n)}{0,41349 n F(n)} \cong 1,$$

de la expresión obtenida en (45), $0,41349 n F(n) = 0,41349 \frac{2^{3n-2}}{n-1}$.

Definamos a partir de estos resultados la sucesión

$$(47) \quad \boxed{AsintTH(n) = 0,41349 \frac{2^{3n-2}}{n-1}}$$

En la Tabla 6, los datos experimentales muestran que para

$$n \rightarrow \infty, \quad \frac{TH(n)}{AsintTH(n)} \rightarrow 1$$

TABLA 6.

n	$TH/AsintTH$	n	$TH/AsintTH$	n	$TH/AsintTH$	n	$TH/AsintTH$
3	0,7557619289	33	0,9796744690	63	0,9893961605	200	0,9966790298
4	0,8218910977	34	0,9802768228	64	0,9895626861	300	0,9977922264
5	0,8596791942	35	0,9808445262	65	0,9897240697	400	0,9983485133
6	0,8841824130	36	0,9813804841	66	0,9898805458	500	0,9986821865
7	0,9013789490	37	0,9818872883	67	0,9900323351	600	0,9989045935
8	0,9141195157	38	0,9823672546	68	0,9901796452	700	0,9990634358
9	0,9239401770	39	0,9828224599	69	0,9903226710	800	0,9991825563
10	0,9317428086	40	0,9832547719	70	0,9904615974	900	0,9992751990
11	0,9380921359	41	0,9836658760	71	0,9905965974	1000	0,9993493090
12	0,9433599623	42	0,9840572952	72	0,9907278361	1100	0,9994099419
13	0,9478011326	43	0,9844304102	73	0,9908554677	1200	0,9994604674
14	0,9515962012	44	0,9847864762	74	0,9909796387	1300	0,9995032182
15	0,9548766798	45	0,9851266348	75	0,9911004889	1400	0,9995398612
16	0,9577406381	46	0,9854519304	76	0,9912181492	1500	0,9995716173
17	0,9602627027	47	0,9857633150	77	0,9913327444	1600	0,9995994035
18	0,9625006717	48	0,9860616626	78	0,9914443924	1700	0,9996239205
19	0,9645000050	49	0,9863477755	79	0,9915532061	1800	0,9996457124
20	0,9662969509	50	0,9866223910	80	0,9916592916	1900	0,9996652109
21	0,9679207687	51	0,9868861882	81	0,9917627502	2000	0,9996827590
22	0,9693953352	52	0,9871397950	82	0,9918636787	2100	0,9996986354
23	0,9707403282	53	0,9873837896	83	0,9919621675	2200	0,9997130691
24	0,9719721121	54	0,9876187089	84	0,9920583064	2300	0,9997262470
25	0,9731044055	55	0,9878450500	85	0,9921521765	2400	0,9997383273
26	0,9741487968	56	0,9880632742	86	0,9922438577	2500	0,9997494399
27	0,9751151409	57	0,9882738107	87	0,9923334262	2600	0,9997596985
28	0,9760118729	58	0,9884770586	88	0,9924209536	2700	0,9997691967
29	0,9768462544	59	0,9886733898	89	0,9925065091	2800	0,9997780160
30	0,9776245706	60	0,9888631514	90	0,9925901582	2900	0,9997862282
31	0,9783522896	61	0,9890466683	95	0,9929819265	3000	0,9997938925
32	0,9790341903	62	0,9892242432	100	0,9933344296	4000	0,9998494561

Estos resultados nos permiten hacer la siguiente conjetura:

CONJETURA 5.8. Sea $TH(n)$ la dimensión del espacio de cohomología total para el nilradical de la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, determinada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$. La sucesión $TH(n)$ es asintótica a $AsintTH(n) = 0,41349 \frac{2^{3n-2}}{n-1}$.

OBSERVACIÓN 5.9. El cociente entre las sucesiones $THsup$ (fórmula (42)) y $AsintTH$ (fórmula (47)) es:

$$\frac{THsup(n)}{AsintTH(n)} = \frac{2^{3n-4}(3n-1)}{n(n-1)} = \frac{2^{-2}(3n-1)}{n \cdot 0,41349} = 0,6046095432 \left(3 - \frac{1}{n}\right),$$

(a) como consecuencia de este resultado, la sucesión $THsup$ que acota superiormente a TH , es también cota superior para $AsintTH$.

(b) además, la función $\frac{THsup}{AsintTH}$ es creciente, con $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{THsup(n)}{AsintTH(n)} = 1,813828630$.

y en la Observación 5.4 ya concluimos que $\frac{THsup(n)}{TH(n)} \rightarrow 1,813$. Por lo tanto, las dos sucesiones, TH y $AsintTH$, no crecen más rápidamente que $THsup$ y la razón de crecimiento para las dos, es una constante próxima a 1,813

Estas observaciones fortalecen la conjetura propuesta.

En el Gráfico 6, están representadas las dos sucesiones $\frac{THsup}{TH}$ y $\frac{THsup}{AsintTH}$. Los correspondientes resultados se pueden consultar en las Tablas 7 y 8

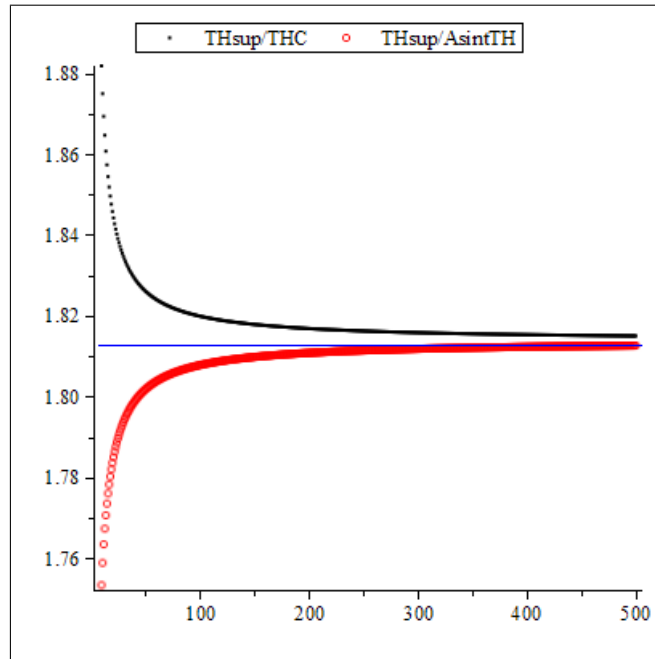


FIGURA 6. Tendencia de las sucesiones $\frac{THsup}{TH}$ y $\frac{THsup}{AsintTH}$

TABLA 7.

n	$THsup/TH$	$THsup/AsintTH$	n	$THsup/TH$	$THsup/AsintTH$
3	2,133333333	1,612292115	47	1,826974659	1,800964597
4	2,022988506	1,662676244	48	1,826693670	1,801232597
5	1,969230769	1,692906721	49	1,826424415	1,801489659
6	1,937451308	1,713060372	50	1,826166176	1,801736439
7	1,916459042	1,727455838	51	1,825918289	1,801973540
8	1,901559267	1,738252437	52	1,825680144	1,802201523
9	1,890436020	1,746649792	53	1,825451178	1,802420903
10	1,881815088	1,753367676	54	1,825230871	1,802632156
11	1,874937502	1,758864125	55	1,825018740	1,802835728
12	1,869323028	1,763444501	56	1,824814339	1,803032031
13	1,864652977	1,767320203	57	1,824617252	1,803221444
14	1,860707547	1,770642233	58	1,824427094	1,803404327
15	1,857330233	1,773521327	59	1,824243505	1,803581010
16	1,854406572	1,776040533	60	1,824066152	1,803751804
17	1,851850912	1,778263362	61	1,823894721	1,803916998
18	1,849597888	1,780239211	62	1,823728922	1,804076863
19	1,847596750	1,782007075	63	1,823568480	1,804231652
20	1,845807493	1,783598152	64	1,823413141	1,804381606
21	1,844198158	1,785037699	65	1,823262664	1,804526945
22	1,842742907	1,786346378	66	1,823116826	1,804667879
23	1,841420621	1,787541258	67	1,822975414	1,804804606
24	1,840213873	1,788636565	68	1,822838231	1,804937313
25	1,839108155	1,789644248	69	1,822705089	1,805066172
26	1,838091288	1,790574416	70	1,822575812	1,805191350
27	1,837152976	1,791435683	71	1,822450235	1,805313002
28	1,836284456	1,792235431	72	1,822328201	1,805431275
29	1,835478220	1,792980025	73	1,822209562	1,805546307
30	1,834727800	1,793674978	74	1,822094178	1,805658231
31	1,834027594	1,794325096	75	1,821981917	1,805767168
32	1,833372725	1,794934581	76	1,821872655	1,805873240
33	1,832758927	1,795507128	77	1,821766272	1,805976558
34	1,832182455	1,796045996	78	1,821662656	1,806077225
35	1,831640004	1,796554072	79	1,821561701	1,806175344
36	1,831128649	1,797033920	80	1,821463305	1,806271010
37	1,830645790	1,797487831	81	1,821367372	1,806364314
38	1,830189111	1,797917852	82	1,821273812	1,806455343
39	1,829756537	1,798325821	83	1,821182536	1,806544176
40	1,829346210	1,798713391	84	1,821093463	1,806630896
41	1,828956457	1,799082055	85	1,821006514	1,806715575
42	1,828585768	1,799433164	86	1,820921613	1,806798285
43	1,828232777	1,799767942	87	1,820838689	1,806879095
44	1,827896247	1,800087503	88	1,820757674	1,806958067
45	1,827575052	1,800392861	89	1,820678502	1,807035264
46	1,827268168	1,800684944	90	1,820601112	1,807110745

TABLA 8.

n	$THsup/TH$	$THsup/AsintTH$	n	$THsup/TH$	$THsup/AsintTH$
100	1,819913295	1,807782534	1400	1,814231564	1,813396766
200	1,816839251	1,810805582	1500	1,814202730	1,813425556
300	1,815822189	1,811813265	1600	1,814177502	1,813450749
400	1,815315074	1,812317105	1700	1,814155244	1,813472978
500	1,815011257	1,812619411	1800	1,814135460	1,813492735
600	1,814808900	1,812820947	1900	1,814117761	1,813510414
700	1,814664451	1,812964902	2000	1,814101832	1,813526325
800	1,814556165	1,813072867	2100	1,814087421	1,813540720
900	1,814471972	1,813156841	2200	1,814074321	1,813553807
1000	1,814404637	1,813224020	2300	1,814062361	1,813565755
1100	1,814349556	1,813278985	2400	1,814051397	1,813576709
1200	1,814303664	1,813324788	3000	1,814000972	1,813627093
1300	1,814264839	1,813363545	4000	1,813950556	1,813677476

3.4. Cálculos aproximados utilizando programas de Maple.

La función de Maple `ApproximateInt()` calcula, utilizando la suma de Riemann, una aproximación de la integral de una función de dos variables en una cierta región del plano.

La Fórmula 23 del Capítulo 4

$$\begin{aligned}
 TH &= \sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=a_1+1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(a_1 - a_2)^2 |k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1-1} \binom{n}{a_2-1} \binom{n}{k-1}, \\
 &= \sum_{a_1=0}^{n-1} \sum_{a_2=a_1}^n \sum_{k=0}^n \frac{(a_1 - a_2)^2 |k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k},
 \end{aligned}$$

que utilizamos para determinar la cohomología, puede ser calculada de manera exacta utilizando `ApproximateInt` con opciones específicas:

$$\sum_{a_1=0}^{n-1} \text{ApproximateInt}\left(\frac{(a_1 - a_2)^2 |k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k}, k = -0,5..n + 0,5, a_2 = a_1 + 0,5..n + 0,5, \text{partition} = [n + 1, n - a_1 + 1]\right)$$

La opción `partition = [n + 1, n - a_1 + 1]` divide la región de integración $[-0,5, n + 0,5] \times [a_1 + 0,5, n + 0,5]$ en cuadrados de lado 1 y como por defecto la función suma sobre el punto medio de cada cuadrado, la suma se hace exactamente sobre los puntos necesarios para determinar la cohomología .

Pero este forma de determinar la cohomología hace los cálculos más lentos que la suma tradicional, es por esto que utilizando las opciones por defecto de `ApproximateInt`, calculamos una aproximación de la cohomología total a partir de un procedimiento creado para tal fin llamado `AproximateTH`.

Con este método lo que se hace es aproximar

$$\sum_{a_2=a_1}^n \sum_{k=0}^n \frac{(a_1 - a_2)^2 |k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k},$$

TABLA 9.

n	TH	$AproximateTH$	$AproximateTH/TH$
110	$2,061762394 \times 10^{96}$	$2,761977202 \times 10^{96}$	1,339619546
120	$2,028801269 \times 10^{105}$	$2,716739466 \times 10^{105}$	1,339086044
130	$2,010406567 \times 10^{114}$	$2,659391050 \times 10^{114}$	1,322812556
140	$2,004098578 \times 10^{123}$	$2,602468476 \times 10^{123}$	1,298573086
150	$2,008105012 \times 10^{132}$	$2,553081519 \times 10^{132}$	1,271388450
160	$2,021142546 \times 10^{141}$	$2,512256309 \times 10^{141}$	1,242988187
170	$2,042275849 \times 10^{150}$	$2,496332061 \times 10^{150}$	1,222328542
180	$2,070823898 \times 10^{159}$	$2,492049769 \times 10^{159}$	1,203409798
190	$2,106296156 \times 10^{168}$	$2,527267932 \times 10^{168}$	1,199863526
200	$2,148348150 \times 10^{177}$	$2,579515262 \times 10^{177}$	1,200697039
210	$2,196749995 \times 10^{186}$	$2,670945248 \times 10^{186}$	1,215862185
220	$2,251363755 \times 10^{195}$	$2,789489940 \times 10^{195}$	1,239022319
230	$2,312126951 \times 10^{204}$	$2,944560641 \times 10^{204}$	1,273528964
240	$2,379040459 \times 10^{213}$	$3,137075618 \times 10^{213}$	1,318630629
250	$2,452159564 \times 10^{222}$	$3,362040710 \times 10^{222}$	1,371052993
260	$2,531587355 \times 10^{231}$	$3,635924027 \times 10^{231}$	1,436223016
270	$2,617469858 \times 10^{240}$	$3,937365822 \times 10^{240}$	1,504264055
280	$2,709992499 \times 10^{249}$	$4,300974556 \times 10^{249}$	1,587079875
290	$2,809377600 \times 10^{258}$	$4,695626325 \times 10^{258}$	1,671411606
700	$2,150363119 \times 10^{628}$	$1,544943876 \times 10^{629}$	7,184572049
800	$3,832592782 \times 10^{718}$	$3,178990484 \times 10^{719}$	8,294621069
900	$6,939348990 \times 10^{808}$	$6,327249265 \times 10^{809}$	9,117929181
1000	$1,272166162 \times 10^{899}$	$1,226184225 \times 10^{900}$	9,638554000
1100	$2,355790595 \times 10^{989}$	$2,324518840 \times 10^{990}$	9,867255795
1200	$4,398816521 \times 10^{1079}$	$4,326944716 \times 10^{1080}$	9,836611041
1300	$8,271097776 \times 10^{1169}$	$7,931092317 \times 10^{1170}$	9,588923420
1400	$1,564477105 \times 10^{1260}$	$1,434760021 \times 10^{1261}$	9,170859813
1500	$2,974389166 \times 10^{1350}$	$2,566309889 \times 10^{1351}$	8,628023254
1600	$5,680175198 \times 10^{1440}$	$4,545309774 \times 10^{1441}$	8,002059119
1700	$1,088995705 \times 10^{1531}$	$7,981247487 \times 10^{1531}$	7,328998131
1800	$2,095060406 \times 10^{1621}$	$1,390807593 \times 10^{1622}$	6,638508317
1900	$4,043057502 \times 10^{1711}$	$2,407245330 \times 10^{1712}$	5,954021996
2000	$7,823992247 \times 10^{1801}$	$4,141329357 \times 10^{1802}$	5,293115364
2100	$1,517869252 \times 10^{1892}$	$7,085821177 \times 10^{1892}$	4,668268474
2200	$2,951389596 \times 10^{1982}$	$1,206419528 \times 10^{1983}$	4,087632245

por la aproximación que utiliza Maple para calcular

$$\int_{a_2=a_1}^n \int_{k=0}^n \frac{(a_1 - a_2)^2 |k - a_1| |k - a_2|}{n^2(n-1)} \binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \binom{n}{k} dk da_2.$$

La Tabla 9 muestra TH , la aproximación obtenida con el procedimiento $AproximateTH$ y el cociente entre estos dos resultados.

Los resultados numéricos no indican una tendencia clara que nos permita hacer alguna conjetura o aportes a la ya existente.

3.5. Cuadro comparativo.

Esta subsección se incorporó para resumir los resultados obtenidos en una tabla que permite comparar los valores de las diferentes funciones encontradas.

En la Tabla 10 exponemos los resultados obtenidos para determinados valores de n .

- F (Subsección 3.2, fórmula (45)) ,aproximación determinada reemplazando el argumento de las sumas en TH , por una cota inferior.
- $AsintTH$ (Subsección 3.3, fórmula (47)), determinada a partir de F .
- $THsup$ (Subsección 3.1, fórmula (42)), sucesión cota superior para TH .
- $AproximateTH$, procedimiento para determinar valores aproximados de TH utilizando algoritmos de computación (Subsección 2.5, Capítulo 6) .

TABLA 10.

n	F	$AsintTH$	TH	$THsup$	$AproximateTH$
100	$5,144030243 \times 10^{85}$	$2,127005065 \times 10^{87}$	$2,112827363 \times 10^{87}$	$3,845162607 \times 10^{87}$	$2,797695037 \times 10^{87}$
200	$2,606479629 \times 10^{175}$	$2,155506523 \times 10^{177}$	$2,148348150 \times 10^{177}$	$3,903203244 \times 10^{177}$	$2,579515262 \times 10^{177}$
300	$2,355828455 \times 10^{265}$	$2,922334524 \times 10^{267}$	$2,915882671 \times 10^{267}$	$5,294724454 \times 10^{267}$	$5,150255127 \times 10^{267}$
400	$2,697130241 \times 10^{355}$	$4,460945533 \times 10^{357}$	$4,453578341 \times 10^{357}$	$8,084647896 \times 10^{357}$	$1,315551812 \times 10^{358}$
500	$3,514495201 \times 10^{445}$	$7,266043104 \times 10^{447}$	$7,256467814 \times 10^{447}$	$1,317057077 \times 10^{448}$	$3,182936591 \times 10^{448}$
600	$4,969974164 \times 10^{535}$	$1,233020770 \times 10^{538}$	$1,231670111 \times 10^{538}$	$2,235245880 \times 10^{538}$	$7,202322506 \times 10^{538}$
700	$7,436279200 \times 10^{625}$	$2,152378960 \times 10^{628}$	$2,150363119 \times 10^{628}$	$3,902187510 \times 10^{628}$	$1,544943876 \times 10^{629}$
800	$1,159558960 \times 10^{716}$	$3,835728274 \times 10^{718}$	$3,832592782 \times 10^{718}$	$6,954454860 \times 10^{718}$	$3,178990484 \times 10^{719}$
900	$1,866062134 \times 10^{806}$	$6,944382284 \times 10^{808}$	$6,939348990 \times 10^{808}$	$1,259125425 \times 10^{809}$	$6,327249265 \times 10^{809}$
1000	$3,078658464 \times 10^{896}$	$1,272994488 \times 10^{899}$	$1,272166162 \times 10^{899}$	$2,308224183 \times 10^{899}$	$1,226184225 \times 10^{900}$
1100	$5,182452404 \times 10^{986}$	$2,357181470 \times 10^{989}$	$2,355790595 \times 10^{989}$	$4,274227621 \times 10^{989}$	$2,324518840 \times 10^{990}$
1200	$8,870007149 \times 10^{1076}$	$4,401191108 \times 10^{1079}$	$4,398816521 \times 10^{1079}$	$7,980788932 \times 10^{1079}$	$4,326944716 \times 10^{1080}$
1300	$1,539467748 \times 10^{1167}$	$8,275208745 \times 10^{1169}$	$8,271097776 \times 10^{1169}$	$1,500596187 \times 10^{1170}$	$7,931092317 \times 10^{1170}$
1400	$2,703809236 \times 10^{1257}$	$1,565197314 \times 10^{1260}$	$1,564477105 \times 10^{1260}$	$2,838323745 \times 10^{1260}$	$1,434760021 \times 10^{1261}$
1500	$4,797639425 \times 10^{1347}$	$2,975663889 \times 10^{1350}$	$2,974389166 \times 10^{1350}$	$5,396144943 \times 10^{1350}$	$2,566309889 \times 10^{1351}$
1600	$8,589161117 \times 10^{1437}$	$5,682451568 \times 10^{1440}$	$5,680175198 \times 10^{1440}$	$1,030484605 \times 10^{1441}$	$4,545309774 \times 10^{1441}$
1700	$1,549799779 \times 10^{1528}$	$1,089405408 \times 10^{1531}$	$1,088995705 \times 10^{1531}$	$1,975607269 \times 10^{1531}$	$7,981247487 \times 10^{1531}$
1800	$2,815872106 \times 10^{1618}$	$2,095802923 \times 10^{1621}$	$2,095060406 \times 10^{1621}$	$3,800723375 \times 10^{1621}$	$1,390807593 \times 10^{1622}$
1900	$5,147978538 \times 10^{1708}$	$4,044411526 \times 10^{1711}$	$4,043057502 \times 10^{1711}$	$7,334582422 \times 10^{1711}$	$2,407245330 \times 10^{1712}$
2000	$9,463923101 \times 10^{1798}$	$7,826475128 \times 10^{1801}$	$7,823992247 \times 10^{1801}$	$1,419351867 \times 10^{1802}$	$4,141329357 \times 10^{1802}$
2100	$1,748561688 \times 10^{1889}$	$1,518326822 \times 10^{1892}$	$1,517869252 \times 10^{1892}$	$2,753547518 \times 10^{1892}$	$7,085821177 \times 10^{1892}$
2200	$3,245364496 \times 10^{1979}$	$2,952236684 \times 10^{1982}$	$2,951389596 \times 10^{1982}$	$5,354040078 \times 10^{1982}$	$1,206419528 \times 10^{1983}$
2300	$6,048438691 \times 10^{2069}$	$5,752228504 \times 10^{2072}$	$5,750653813 \times 10^{2072}$	$1,043204463 \times 10^{2073}$	$2,044846235 \times 10^{2073}$
2400	$1,131533197 \times 10^{2160}$	$1,122906387 \times 10^{2163}$	$1,122612553 \times 10^{2163}$	$2,036476870 \times 10^{2163}$	$3,451817476 \times 10^{2163}$
2500	$2,124228463 \times 10^{2250}$	$2,195868068 \times 10^{2253}$	$2,195317871 \times 10^{2253}$	$3,982397311 \times 10^{2253}$	$5,805094406 \times 10^{2253}$
3000	$5,173724085 \times 10^{2701}$	$6,417849516 \times 10^{2704}$	$6,416526748 \times 10^{2704}$	$1,163958576 \times 10^{2705}$	$7,453236085 \times 10^{2704}$
4000	$3,579946867 \times 10^{3604}$	$5,921088920 \times 10^{3607}$	$5,920197537 \times 10^{3607}$	$1,073894561 \times 10^{3608}$	$1,043571831 \times 10^{3607}$

4. Comportamiento asintótico de la dimensión de $H^*(n)$.**Para el Caso 4,** $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$

Para este caso, la fórmula determinada para el cálculo de la cohomología total (Teorema 4.28), es la misma que para el Caso 3, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, a pesar que los nilradicales no son isomorfos como álgebras de Lie.

Por lo tanto todos los resultados encontrados para $TH(n)$ en el Caso 3, valen también para este caso. En consecuencia la Conjetura 3.3 formulada para el Caso 3, se puede enunciar también para el Caso 4, $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$.

CONJETURA 5.10. *Sea $TH(n)$ la dimensión del espacio de cohomología total para el nilradical de la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, determinada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_n - e_{n+1}\}$. La sucesión $TH(n)$ es asintótica a $AsintTH(n) = 0,41349 \frac{2^{3n-2}}{n-1}$.*

Con este resultado completamos el estudio del comportamiento asintótico de la cohomología total para los nilradicales de las subálgebras parabólicas en los cuatro casos analizados en este trabajo.

Programas y experimentación con Maple

En este capítulo vamos a transcribir una selección de los procedimientos (o subprogramas) creados en Maple, que se utilizaron para estudiar las álgebras de tipo A_n . Algunos procedimientos generales se simplifican notablemente para los casos particulares estudiados. Mostraremos también ejemplos para entender como se aplican estos procedimientos.

Para estudiar el comportamiento asintótico de la cohomología trivial de álgebras de Lie de tipo A_n , aplicando la descomposición de Kostant, elaboramos diferentes procedimientos destinados a obtener los elementos mencionados en el teorema y poder comparar diferentes casos. El grupo de Weyl es isomorfo al grupo de las permutaciones de $n + 1$ elementos y Maple tiene paquetes incorporados para trabajar con el intervalo inicial I_{n+1} que se utilizaron en los casos que así lo requirieron.

1. El conjunto W^1

Para un álgebra parabólica \mathfrak{p} contenida en al álgebra de Lie de tipo A_n , parametrizada por el subconjunto de raíces simples $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$, la dimensión del nilradical $\dim \mathfrak{n} = h.(k - h) + (k - h).(n + 1 - k) + h.(n + 1 - k)$ y demostramos en el Lema 4.2, que $|W^1| = \binom{n+1}{h} \binom{n+1-h}{k-h}$. Los procedimientos para aplicar estos resultados se transcriben a continuación.

1.1. Dimensión del nilradical.

Los input de este procedimiento son el valor de n y los valores h y k , correspondientes al conjunto de raíces simples. El output, es la dimensión del nilradical de la subálgebra parabólica parametrizada por $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_k - e_{k+1}\}$.

```
> dimNilrad:=proc(n,h,k) local ni:
> ni:=(n+1-h)*h+(n+1-k)*(k-h):
> ni:
> end proc:
```

1.2. Cardinal del conjunto W^1 .

El siguiente procedimiento determina el número de representaciones irreducibles que aparecen en la descomposición de Kostant, ingresando el correspondiente n , h y k .

```
> numW1:=proc(n,h,k) local x:
> x:=(n+1)!/(h! *(k-h)!*(n+1-k)!):
> end proc:
```

1.3. Elementos del conjunto W^1 para $\pi_0 = \{e_h - e_{h+1}, e_{h+1} - e_{h+2}\}$.

A partir de los resultados obtenidos en el Teorema 4.1 aplicados a este conjunto de raíces simples π_0 , los elementos del conjunto W^1 se obtiene a partir de una lista creada por el procedimiento *inversosW1*, cada elemento de dicha lista contiene las imágenes de las permutaciones inversas pertenecientes a W^1 .

Los input son el valor n y h correspondiente al conjunto π_0 . Para trabajar con este procedimiento se debe cargar el paquete

```
> combinat
```

El procedimiento es:

```
> inversosW1:=proc(n,h) local inter,i,lis,opinter,final,r,inicial:
> inter:=choose(n+1,h):
> inicial:=seq(i,i=1..n+1):
> lis:=[]:
> for i from 1 to nops(inter) do
> opinter:=op(inter[i]):
> final:=inicial minus opinter:
> r:=seq([opinter,op(final[j]),op(final minus final[j])],j=1..nops(final));
> lis:=op(lis),r]:
> od:
> lis:
> end proc:
```

Por ejemplo, para el caso $n = 5$ y $h = 2$,

```
> inversosW1(5,2);
> [[1, 2, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 4, 3, 5, 6], [1, 2, 5, 3, 4, 6], [1, 2, 6, 3, 4, 5], [1, 3, 2, 4, 5, 6],
[1, 3, 4, 2, 5, 6], [1, 3, 5, 2, 4, 6], [1, 3, 6, 2, 4, 5], [1, 4, 2, 3, 5, 6], [1, 4, 3, 2, 5, 6], [1,
4, 5, 2, 3, 6], [1, 4, 6, 2, 3, 5], [1, 5, 2, 3, 4, 6], [1, 5, 3, 2, 4, 6], [1, 5, 4, 2, 3, 6], [1, 5,
6, 2, 3, 4], [1, 6, 2, 3, 4, 5], [1, 6, 3, 2, 4, 5], [1, 6, 4, 2, 3, 5], [1, 6, 5, 2, 3, 4], [2, 3, 1,
4, 5, 6], [2, 3, 4, 1, 5, 6], [2, 3, 5, 1, 4, 6], [2, 3, 6, 1, 4, 5], [2, 4, 1, 3, 5, 6], [2, 4, 3, 1,
5, 6], [2, 4, 5, 1, 3, 6], [2, 4, 6, 1, 3, 5], [2, 5, 1, 3, 4, 6], [2, 5, 3, 1, 4, 6], [2, 5, 4, 1, 3,
6], [2, 5, 6, 1, 3, 4], [2, 6, 1, 3, 4, 5], [2, 6, 3, 1, 4, 5], [2, 6, 4, 1, 3, 5], [2, 6, 5, 1, 3, 4],
[3, 4, 1, 2, 5, 6], [3, 4, 2, 1, 5, 6], [3, 4, 5, 1, 2, 6], [3, 4, 6, 1, 2, 5], [3, 5, 1, 2, 4, 6], [3,
5, 2, 1, 4, 6], [3, 5, 4, 1, 2, 6], [3, 5, 6, 1, 2, 4], [3, 6, 1, 2, 4, 5], [3, 6, 2, 1, 4, 5], [3, 6,
4, 1, 2, 5], [3, 6, 5, 1, 2, 4], [4, 5, 1, 2, 3, 6], [4, 5, 2, 1, 3, 6], [4, 5, 3, 1, 2, 6], [4, 5, 6,
1, 2, 3], [4, 6, 1, 2, 3, 5], [4, 6, 2, 1, 3, 5], [4, 6, 3, 1, 2, 5], [4, 6, 5, 1, 2, 3], [5, 6, 1, 2,
3, 4], [5, 6, 2, 1, 3, 4], [5, 6, 3, 1, 2, 4], [5, 6, 4, 1, 2, 3]]
```

El elemento $[4, 5, 1, 2, 3, 6]$ de esta lista es la imagen correspondiente a la permutación σ tal que:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Subálgebra \mathfrak{p} parametrizada por $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$

Para este caso particular como vimos en la subsección 2.4, las fórmulas para determinar la cohomología total TH no son cerradas. Para entender el comportamiento asintótico de la sucesión TH se crearon tablas y gráficos, algunos de ellos mostrados en la subsección

mencionada. Exponemos en esta sección los procedimientos mas relevantes utilizados para arribar a las conclusiones esperadas.

2.1. Conjunto W^1 .

Para determinar los inversos de todos los elementos del conjunto W^1 ya se mostró un procedimiento para el caso de dos raíces consecutivas para cualquier valor dado h . Para el caso que $h = 2$ el correspondiente conjunto de raíces simples es $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, a partir de algoritmos mas sencillos sin la necesidad de paquetes auxiliares, se realizó un procedimiento específico para este caso.

El input es el valor de n y el output es una lista que contiene las imágenes del intervalo inicial I_{n+1} , para cada elemento w^{-1} tal que $w \in W^1$.

```
> winver:=proc(n) local i,t,r,rrr,x,lis,liss:
> r:=[]:
> for i from 1 to n do
> t:=seq([i,h],h=(i+1)..n+1):
> r:=[op(r),t]:
> end do:
> rrr:=[]:
> liss:=seq(j,j=1..n+1):
> for i from 1 to nops(r) do
> x:=op(r[i]):
> lis:=liss minus x:
> lis:=op(lis):
> t:=seq([x,lis[j],op(lis minus lis[j])],j=1..n-1):
> rrr:=[op(rrr),t]:
> end do:
> rrr:
> end proc:
```

Ejemplo para el caso $n = 5$

```
> elementos:=winver(5);
> elementos := [[1, 2, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 4, 3, 5, 6], [1, 2, 5, 3, 4,
6], [1, 2, 6, 3, 4, 5], [1, 3, 2, 4, 5, 6], [1, 3, 4, 2, 5, 6], [1, 3, 5,
2, 4, 6], [1, 3, 6, 2, 4, 5], [1, 4, 2, 3, 5, 6], [1, 4, 3, 2, 5, 6], [1,
4, 5, 2, 3, 6], [1, 4, 6, 2, 3, 5], [1, 5, 2, 3, 4, 6], [1, 5, 3, 2, 4,
6], [1, 5, 4, 2, 3, 6], [1, 5, 6, 2, 3, 4], [1, 6, 2, 3, 4, 5], [1, 6, 3,
2, 4, 5], [1, 6, 4, 2, 3, 5], [1, 6, 5, 2, 3, 4], [2, 3, 1, 4, 5, 6], [2,
3, 4, 1, 5, 6], [2, 3, 5, 1, 4, 6], [2, 3, 6, 1, 4, 5], [2, 4, 1, 3, 5,
6], [2, 4, 3, 1, 5, 6], [2, 4, 5, 1, 3, 6], [2, 4, 6, 1, 3, 5], [2, 5, 1,
3, 4, 6], [2, 5, 3, 1, 4, 6], [2, 5, 4, 1, 3, 6], [2, 5, 6, 1, 3, 4], [2,
6, 1, 3, 4, 5], [2, 6, 3, 1, 4, 5], [2, 6, 4, 1, 3, 5], [2, 6, 5, 1, 3,
4], [3, 4, 1, 2, 5, 6], [3, 4, 2, 1, 5, 6], [3, 4, 5, 1, 2, 6], [3, 4, 6,
1, 2, 5], [3, 5, 1, 2, 4, 6], [3, 5, 2, 1, 4, 6], [3, 5, 4, 1, 2, 6], [3,
5, 6, 1, 2, 4], [3, 6, 1, 2, 4, 5], [3, 6, 2, 1, 4, 5], [3, 6, 4, 1, 2,
5], [3, 6, 5, 1, 2, 4], [4, 5, 1, 2, 3, 6], [4, 5, 2, 1, 3, 6], [4, 5, 3,
1, 2, 6], [4, 5, 6, 1, 2, 3], [4, 6, 1, 2, 3, 5], [4, 6, 2, 1, 3, 5], [4,
6, 3, 1, 2, 5], [4, 6, 5, 1, 2, 3], [5, 6, 1, 2, 3, 4], [5, 6, 2, 1, 3,
4], [5, 6, 3, 1, 2, 4], [5, 6, 4, 1, 2, 3]].
```

Donde, para el $elementos[30]$ de la lista, $[2, 5, 3, 1, 4, 6]$, la correspondiente permutación

es: $w_{30}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

2.2. Grado cohomológico de cada elemento de W^1 .

En el caso correspondiente a $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, cada elemento de W^1 queda determinado por una terna de números diferentes, $[a_1, a_2, k]$, con $1 \leq a_1 < a_2 \leq n+1$ y $1 \leq k \leq n+1$. El algoritmo creado para determinar el grado cohomológico de cada permutación de W^1 tiene como input la lista que contiene los datos, $[a_1, a_2, k]$ correspondientes a la permutación y el output es el grado cohomológico correspondiente, o cero si la terna no corresponde a un elemento de W^1 .

```
> grC:=proc(w) local s,x:
> s:=0:
> if w[1]<w[2] then
> x:=w[1]+w[2]+w[3]:
> if (w[2]<w[3]) then s:=x-6
> elif (w[1]<w[3]) then s:=x-5
> else
> s:=x-4
> end if:
> end if:
> s:
> end proc:
```

Por ejemplo, para la permutación w_{30}^{-1} correspondiente al *elementos*[30] = [2, 5, 3, 1, 4, 6],

```
> grC([2,5,3]);
> 5
```

es decir, el grado cohomológico de w_{30} es 5.

2.3. Dimensión de cada representación irreducible.

La dimensión del espacio irreducible $V^{w\rho-\rho}$ se calcula utilizando el procedimiento implementado para utilizar la fórmula determinada en la fórmula (20) del Capítulo 4.

Los input para este procedimiento son una lista con los tres números a_1, a_2, k y el valor n , con $1 \leq a_1 < a_2 \leq n+1$, $1 \leq k \leq n+1$. El output, es la dimensión del espacio irreducible correspondiente a la permutación determinada por esos tres números o 0, si la terna no corresponde a un elemento de W^1 .

```
> dimV:=proc(w,n) local d:
> d:=0:
> if w[1]<w[2] then
> d:=binomial(n,w[1]-1)*binomial(n,w[2]-1)*binomial(n,w[3]-1)*(w[1]-w[2])^2*abs((
> else
> d:=0:
> end if:
> d:
> end proc:
```

Por ejemplo, para la permutación w_{30}^{-1} correspondiente al *elementos*[30] = [2, 5, 3, 1, 4, 6],

```
> dimV([2,5,3],5);
> 45
```

es decir, $\dim V^{w_{30}\rho-\rho} = 45$.

2.4. Cohomología total.

Para determinar la cohomología total del nilradical correspondiente a la subálgebra parabólica $\pi_0 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$, se implementó el siguiente procedimiento que utiliza la fórmula obtenida en 4.21. El input es n y el output es TH .

Para valores grandes de n , lleva mucho tiempo de máquina determinar TH . En este algoritmo se utilizaron todos los recursos necesarios para no realizar cálculos innecesarios o repetidos.

```
> TH:=proc(n) local i,ht,y,j,x,k:
> ht:=0:
> for i from 1 to n-1 do
> y:=0:
> for j from i+1 to n do
> x:=0:
> for k from j+1 to n+1 do
> x:=x+(k-i)^2*(k-j)*binomial(n,k-1):
> od:
> x:=x*(j-i)*binomial(n,j-1):
> y:=y+x
> od:
> y:=y*binomial(n,i-1):
> ht:=ht+y:
> od:
> ht:=ht*2/(n^2*(n-1)):
> ht:
> end proc:
```

Por ejemplo:

```
> TH(200);
> 2148348149623377346032853184091110575962143535366115587540519202
> 52979495257307307046762653391540356110490164579295183042639254
> 2366738303430893899484970615651325152241005333172480
```

2.5. Cálculo aproximado de Cohomología total.

Para calcular valores de TH aproximados utilizando las herramienta dispuestas por Maple, determinamos el procedimiento `AproximateTH`. Este procedimiento utiliza la función incorporada a Maple, `ApproximateInt`, para la cual es necesario cargar el paquete

```
> Student[MultivariateCalculus]
```

Los fundamentos para determinar este procedimiento, están expuestos en la Subsección 2.4. `AproximateTH` depende de la variable n y el output es un valor aproximado para la cohomología total.

```
> AproximateTH:=proc(n) local a,b,c,s,x:
> s:=0:
> for a from 0 to n-1 do:
> x:=ApproximateInt((b-a)^2*abs(c-b)*abs(c-a)*binomial(n,a)*binomial(n,b)*
> binomial(n,c),c=0..n,b=a..n);
> s:=s+x:
> od:
> s:=s/n^2/(n-1):
> end proc:
```


Bibliografía

- [1] Knapp, Anthony W, *Lie groups beyond an introduction*, Progress in Mathematics (Boston, Mass.) **140**, Boston, MA: Birkhäuser.
- [2] Knapp, Anthony W.; Vogan, David, *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series. **45**, Princeton, NJ: Univ. Press.
- [3] Humphreys J., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Grad. Texts in Math., **9** , Springer-Verlag, New York, 1972.
- [4] Fulton W. and Harris J., *Representation theory, A first course*. Graduate Texts in Mathematics **129**, Springer-Verlag.
- [5] Goodman, R. and Wallace, N., *Representations and invariants of the classical groups*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications N. 68.
- [6] G. P. Egorychev *Integral Representation and the Computation of Combinatorial Sums*(Translations of Mathematical Monographs) VOL 59
- [7] Kostant B., *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. Math. (2) **74**, (1961), 329-387.
- [8] Armstrong G., Cairns G. and Jessup B., *Explicit Betti numbers for a family of nilpotent Lie algebras*, Proceedings AMS. **125**, N.2, (1997), 381-385.
- [9] Cagliero L. and Tirao P., *The adjoint homology of the free 2-step nilpotent Lie algebra*, Quart. J. Math. **53**, N.2, (2002), 125-145.
- [10] Cagliero L. and Tirao P., *The cohomology of the cotangent bundle of Heisenberg groups*, Adv. Math. **181** N.2, (2004), 276-307.
- [11] Santharourbane L., *Cohomology of Heisenberg Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **87**, (1983), 23-28.