Representaciones de dimensión mínima de álgebras de Lie de corrientes de Heisenberg

Nadina Elizabeth Rojas

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

Universidad Nacional de Tucumán

Septiembre de 2007

Director: Dr. Leandro Cagliero

Codirector: Dra. Ana María Sfer

Índice general

Resumen **i**

Agradecimientos **iii**

Introducción **v**

Antecedentes y relevancia del problema v

Resultados vi

Conclusiones vi

Estructura de la tesis vii

1. Preliminares **1**

1.1. Álgebras asociativas 1

1.2. Álgebras de Lie 2

1.2.1. Definición y ejemplos 2

1.2.2. Subálgebras de Lie e ideales 3

1.2.3. Homorfismos y coeficientes de estructura 4

1.2.4. Álgebras de Lie Nilpotentes y Solubles 5

1.2.5. Álgebras de Lie semisimples y reductivas 7

1.2.6. Álgebra Universal Envolvente de un álgebra de Lie 7

1.2.7. Extensión del cuerpo de base 8

1.3. Representaciones de álgebras de Lie 8

2. Representaciones fieles de álgebras de Lie **11**

2.1. Teorema de Ado-Iwasawa y Teorema de Birkhoff 11

2.2. Nilrepresentaciones fieles 15

3. Representaciones fieles de dimensión mínima y la función μ **19**

3.1. Definiciones y ejemplos 19

3.2. Síntesis de algunos resultados conocidos sobre μ 20

3.3. Demostraciones 24

4. Álgebras de Lie de corrientes en una variable asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg 27

4.1. Preliminares y resultado principal 27

4.2. Álgebras de Lie de corrientes 28

4.2.1. Introducción 28

4.2.2. Propiedades básicas 28

4.2.3. Álgebras de Lie de corrientes asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg 32

4.3. Nilrepresentaciones fieles de $\mathfrak{h}_{m,p}$ 32

4.3.1. Una primera representación de $\mathfrak{h}_{m,p}$ 32

4.3.2. Las representaciones $\pi_{a,b}$ de $\mathfrak{h}_{m,p}$ 33

4.4. La cota inferior de $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$ 36

4.5. Apéndice: resultados de álgebra lineal 39

Bibliografía 43

Resumen

Sean k un cuerpo de característica cero y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre k, por el Teorema de Ado se sabe que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita admite una representación fiel. Esto da origen al problema de calcular

$$\mu(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\},$$

en general este problema es difícil de realizar.

En esta tesis mostramos algunos resultados generales y otros particulares sobre $\mu(\mathfrak{g})$ para una dada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Pero el principal problema que tratamos es el siguiente;

Sean $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m+1$ y $p \in \mathrm{k}[t]$ no nulo y sea

$$\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$$

el *álgebra Lie de corriente asociada a el álgebra de Lie de Heisenberg* $\mathfrak{h}_m$ *y al álgebra* $\mathrm{k}[t]/(p)$, con la estructura de álgebra de Lie dada por el corchete

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in \mathrm{k}[t]/(p)$.

Teorema 1. *Sean* k *un cuerpo de característica cero,* $\mathrm{k}[t]$ *el álgebra de polinomios y* $\mathfrak{h}_m$ *el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión* $2m+1$*. Entonces para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y todo polinomio no nulo* $p \in \mathrm{k}[t]$ *se tiene*

$$\mu\big(\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil.$$

Agradecimientos

Para el desarrollo de esta tesis fueron fundamentales la decisiva e inteligente cooperación de mi Director, el Dr. Leandro Cagliero. Pienso que sus aportes, no sólo para esta tesis, son de gran importancia para mi formación académica. Por esto y por las horas de trabajo que me ha dedicado, su destacada paciencia y por haberme conducido de manera extraordinaria durante estos años le agradezco principalmente a Leandro.

Debo agradecer la colaboración de la Dra. Isabel Dotti, el Dr. Paulo Tirao, la Dra. Ana María Sfer y en particular a la Lic. Juana Esther Vizchi de Orellana. Además, a mis compañeras de la Cátedra de Álgebra y Geometría Analítica porque me auxiliaron en todo cuanto pudieron para poder realizar esta compleja tarea, también a Marcela Lazarte, Amelia Barrionuevo, Adriana Lalegname, Silvina Gómez, Adrian Will y muy especialmente por la ayuda incondicional de mi querida amiga Estela Fernandez de Olea.

Durante estos tres últimos años, en mi estadía en Córdoba, he tenido la dicha de conocer a personas que han influido en mi vida no sólo profesional sino también personal. Por esto agradezco a mis compañeros de Fa.M.A.F., Juan Pablo Agnelli, Fernando Fantino, César Galindo, Gastón García, Marcos Gaudiano, Emilio Lauret, Martín Mombelli, Ricardo Podestá, Pablo Rocha, Mauricio Tellechea y de manera especial a mis queridos amigos Claudia Egea y Jesús Ochoa, por sus acertadas sugerencias y el apoyo continuo que de ellos recibo a diario.

Sin embargo, esta tesis jamás la hubiera terminado, sin la generosidad y el afecto de mi familia. Para ellos mi mayor agradecimiento y aprovecho para dedicar este humilde trabajo a la persona que me ha regalado los mejores años de su vida, y aún hoy en su vejez lo sigue haciendo, mi Mamá.

Finalmente, quiero agradecer a la Dra. Esther Galina y al Dr. Jorge Vargas por brindarme la oportunidad de completar la tesis e iniciar mis estudios de doctorado en la Facultad de Matemática Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba.

Introducción

Antecedentes y relevancia del problema

Sean k un cuerpo de característica cero y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre k. Por el Teorema de Ado se sabe que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, de dimensión finita, admite una representación fiel. Esto da origen al problema de calcular

$$\mu(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\},$$

calcular $\mu(\mathfrak{g})$ para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada es un problema difícil.

El problema de calcular explícitamente $\mu(\mathfrak{g})$ o cotas de $\mu(\mathfrak{g})$, para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada, tiene origen en la famosa pregunta de Milnor [Mi] sobre cuáles grupos aparecen como grupos fundamentales de variedades planas con estructura afín completa. En particular, si estos son o no grupos virtualmente policíclicos, es decir que tienen un subgrupo policíclico de índice finito.

Hay numerosos trabajos que estudian el problema en una dirección. El propio Milnor y otros autores (por ejemplo [GrM], [GolK], etc.) muestran que, bajo algunas condiciones adicionales en las variedades, estas tienen grupo fundamental virtualmente policíclico. Sin embargo el resultado es falso con toda generalidad, siendo Margulis [Ma] quien primero encuentra contraejemplos.

La pregunta en el otro sentido, es decir si todo grupo policíclico es grupo fundamental de alguna variedad plana con estructura afín completa, da origen al problema de saber si toda nilvariedad compacta admite una estructura afín. A su vez, este problema está relacionado con la existencia de álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}$ tales que $\mu(\mathfrak{g}) > \dim \mathfrak{g} + 1$. El primero en encontrar un álgebra de Lie con estas características es Benoist [Be], con la cual construye una nilvariedad compacta que no admite estructura afín.

Desde entonces el problema de entender la función μ adquiere mayor interés. Sin embargo muy poco se conoce aún. Algunos resultados sobre $\mu(\mathfrak{g})$ son;

1. Si $\mathfrak{g}$ es abeliana y $\dim \mathfrak{g} = n > 1$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil$. Este es una consecuencia de Schur (ver [S]) sobre $\mathbb{C}$ y que lue fue extendido sobre cualquier cuerpo k por Jacobson (ver [J2]).

2. Si $\mathfrak{h}_m$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m + 1$ entonces $\mu(\mathfrak{h}_m) = m + 2$. Una demostración se encuentra en [B2].

3. Si $\text{k} = \mathbb{C}$, se conoce $\mu(\mathfrak{g})$ para toda álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ (ver [BW]).

4. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie k-pasos nilpotente entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq 1 + (\dim \mathfrak{g})^k$. Este resultado es consecuencia del Teorema del embedding de Birkhoff (ver [R]). Si además es $\mathbb{Z}$-graduada entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$.

5. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme entonces $\mu(\mathfrak{g}) \geq \dim \mathfrak{g}$ (ver [Be]). Si además $\dim \mathfrak{g} < 10$ entonces vale la igualdad.

Resultados

El principal aporte de esta tesis el siguiente teorema

Teorema 2. *Sean* k *un cuerpo de característica cero,* $\mathrm{k}[t]$ *el álgebra de polinomios y* $\mathfrak{h}_m$ *el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión* $2m+1$. *Entonces para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y todo polinomio no nulo* $p \in \mathrm{k}[t]$ *se tiene*

$$\mu\big(\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil .$$

En este teorema, (p) es el ideal generado por p y $\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$ es el álgebra de Lie cuyo corchete es $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$. Dado que si $p = t$ entonces $\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m$, el teorema mencionado extiende el resultado de $\mu(\mathfrak{h}_m) = m + 2$ (ver (ii) más arriba).

Las k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ son las *álgebra Lie de corriente asociada a el álgebra de Lie de Heisenberg* $\mathfrak{h}_m$ *y al álgebra* $\mathrm{k}[t]/(p)$. El conjunto de k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ constituye una amplia familia de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes que contiene, a su vez, dos subfamilias que queremos destacar;

Álgebras de Lie de corrientes truncadas de Heisenberg. Estas son las correspondientes al caso $p = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Las k-álgebras de Lie de $\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(t^n)$ son conocidas como las *álgebras de Lie de corrientes truncadas* asociadas a $\mathfrak{g}$ y aparecen en la literatura asociadas a las *Strong Macdonald Conjeture* [Mac]. Algunas referencias que tratan estos temas son por ejemplo [FGT], [HW], [Ku], [T], etc.

Álgebras de Lie de Heisenberg sobre extensiones finitas de k. Estas son las correspondientes al caso en que p es un polinomio irreducible. En este caso $K_p = \mathrm{k}[t]/(p)$ es un cuerpo que es una extensión finita de k y $\mathfrak{h}_{m,p}$ es también una K_p-álgebra de Lie. En este caso, la K_p-álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ es isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg sobre el cuerpo K_p. Por lo tanto la familia de k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ contiene las k-álgebras de Lie que resultan de restringir los escalares a k en álgebras de Lie de Heisenberg sobre extensiones finitas de k.

Conclusiones

En esta tesis se obtiene el valor de $\mu(\mathfrak{g})$ para toda álgebra de Lie de corrientes $\mathfrak{g}$ asociada a las álgebras de Lie de Heisenberg y a las álgebras de polinomios $\mathrm{k}[t]/(p)$. Esta es una amplia familia de álgebras de Lie que en particular contiene la familia de álgebras de Lie abelianas y la familia de álgebras de Lie de Heisenberg.

La demostración del teorema principal consta de dos partes (ver descripción del Capítulo 4 más abajo) y en ambas son centrales ciertas propiedades que tienen las álgebras de Lie de Heisenberg.

Estas propiedades son compartidas por otras álgebras de Lie y es muy probable que nuestros resultados puedan ser extendidos a otras álgebra de Lie de corrientes asociadas a las álgebras de polinomios $\mathrm{k}[t]/(p)$.

Estructura de la tesis

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 hacemos un repaso de conceptos y resultados básicos de la teoría de álgebras de Lie. Es importante destacar que en este capítulo dichos temas no están tratados en profundidad y los detalles se pueden encontrar en cualquier texto de álgebras de Lie, como por ejemplo [H], [J1], [K], etc. El lector familiarizado con estos temas puede obviar este capítulo.

El Capítulo 2 contiene resultados básicos sobre representaciones fieles de álgebras de Lie de dimensión finita. En él, enunciamos y demostramos el Teorema de Embeding de Birkhoff; que en particular implica el Teorema de Ado para álgebras de Lie nilpotentes. En este capítulo también recordamos el teorema de Zassenhaus y deducimos de él el resultado que afirma que dada una representación π de un álgebra de Lie nilpotente, la parte semisimple π_S y la parte nilpotente π_N de ella son también representaciones. Estudiamos además ciertas condiciones bajo las cuales π_N es una representación fiel.

En el Capítulo 3 introducimos la función μ y hacemos una recopilación de resultados conocidos acerca de ella, entre ellos los enunciados anteriormente en esta introducción. La mayoría de estos resultados son presentados con su demostración.

El Capítulo 4 es el más importante y está dedicado al teorema principal. La prueba de este teorema está dividida en dos partes. En la primera de ellas, construimos para cada $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq \deg p$ una nilrepresentación fiel $\pi_{a,b}$ de dimensión $m \deg p + a + b$. Obtenemos así, una familia de nilrepresentaciones fieles entre las cuales hay una de dimensión

$$m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil$$

En la segunda parte, probamos que

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \geq m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil .$$

Este capítulo incluye una breve introducción al concepto de álgebras de Lie de corriente y repasamos algunas propiedades básicas de estas álgebras de Lie.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo haremos un resumen de los conceptos de álgebras asociativas y álgebras de Lie, necesarios para los próximos capítulos.

Los contenidos de todas las secciones son básicos y no serán desarrollados con demasiado detalle, en los libros de texto [H], [J1], [K], etc se pueden encontrar los temas de este capítulo tratatos con mayor profundidad. El lector familiarizado con las álgebras asociativas y álgebras de Lie puede omitir todo este capítulo.

1.1. Álgebras asociativas

Definición 1.1.1. Un *álgebra asociativa sobre un cuerpo* k es un espacio vectorial A sobre k con otra operación, llamada *multiplicación de vectores*, que asocia a cada par de vectores a, b de A un vector ab en A llamado el producto de a y b tal que

i) es asociativo,
$a(bc) = (ab)c$

ii) es distributivo con respecto a la adición,
$a(b + c) = ab + ac$

iii) para todo $k \in \mathrm{k}$,
$k(ab) = (ka)b = a(kb)$

Si existe un elemento 1 en A tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$, entonces A se dice un *álgebra con unidad sobre* k y al elemento 1 se le llama la *unidad* de A. El álgebra A se dice *conmutativa* si $ab = ba$, para todo $a, b \in A$.

Algunos ejemplos básicos de álgebras son los siguientes;

Ejemplos 1.1.2. (1) Sea k un cuerpo entonces k es un álgebra sobre k, asociativa con unidad y conmutativa.

(2) Sea V un espacio vectorial sobre k entonces $\mathrm{End}(V)$, con la composición como producto, es un álgebra sobre k asociativa con unidad.

(3) El espacio de los polinomiales sobre un cuerpo k, con el producto usual, es un álgebra asociativa con unidad y conmutativa.

(4) Sean A_1, A_2 álgebras asociativas sobre un cuerpo k. Se puede verificar que $A_1 \otimes A_2$ es un álgebra asociativa sobre k con el producto definido por

$$(a_1 \otimes a_2)\,(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2.$$

Es claro que si A_1, A_2 son álgebras asociativas con unidad y conmutativas entonces $A_1 \otimes A_2$ es un álgebra asociativa con unidad y conmutativa.

1.2. Álgebras de Lie

1.2.1. Definición y ejemplos

Definición 1.2.1. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo k con un producto $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ bilineal tal que satisface las siguientes identidades

(i) $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

(ii) *Identidad de Jacobi*

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \text{ para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $0 = [X + Y, X + Y] = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y]$. Por lo tanto

$$[X, Y] = -[Y, X]. \tag{1.1}$$

Recíprocamente, si esta condición se tiene entonces $2[X, X] = 0$. De manera que si el cuerpo es de característica distinta de 2 tenemos que $[X, X] = 0$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, la *dimensión* de $\mathfrak{g}$ es la dimensión de $\mathfrak{g}$ como espacio vectorial sobre k.

Salvo que hagamos la correspondiente aclaración, en esta tesis los espacios vectoriales, en particular las álgebras de Lie y las álgebras asociativas consideradas serán de dimensión finita y sobre un cuerpo k fijo.

Ejemplos 1.2.2. (1) A toda álgebra asociativa A se le puede asociar una estructura de álgebra de Lie con corchete

$$[a, b] = ab - ba$$

para todo $a, b \in A$. Es fácil verificar que A con esta operación es un álgebra de Lie.

(2) Un ejemplo particular del anterior es considerar a $M(n, \mathrm{k})$, el espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$, con el producto usual de matrices. En esto caso denotaremos al álgebra de Lie $M(n, \mathrm{k})$ con el corchete definido por $[X, Y] = XY - YX$, como $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$. Esta álgebra de Lie es llamada el *álgebra de Lie lineal general*. Una base para $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$ es la base canónica $B = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ de $M(n, \mathrm{k})$.

(3) Sea V un espacio vectorial entonces $\mathrm{End}(V)$ es un álgebra asociativa cuyo producto es la composición. Por el primer ejemplo, sabemos que a $\mathrm{End}(V)$ se le puede asociar una estructura de álgebra de Lie. Esta nueva álgebra de Lie la denotaremos $\mathfrak{gl}(V)$.

(4) Sea $\mathfrak{g} = U \oplus W$ la suma directa externa de los espacios vectoriales U, W y $B : U \times U \to W$ una aplicación bilineal antisimétrica tal que

$$B(u_1, B(u_2, u_3)) + B(u_3, B(u_1, u_2)) + B(u_2, B(u_3, u_1)) = 0 \tag{1.2}$$

para todo $u_i \in U$. Definimos $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ con valores $[(u_1, w_1), (u_2, w_2)] = (0, B(u_1, u_2))$ para todo $u_1, u_2 \in U$; $w_1, w_2 \in W$. Es claro que $[,]$ es bilineal, cumple la condición (i) de la Definición 1.2.1 y, por la ecuación (1.2) se verifica la identidad de Jacobi. Entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con el corchete dado por $[,]$.

(5) Sean $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ la suma directa externa. Definimos un corchete en $\mathfrak{g}$ como

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2])$$

donde $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ y $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_2$. En éste caso $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y es llamada el *álgebra de Lie suma directa* de $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$.

En el ejemplo 1.1.2(4) vimos que el producto tensorial de álgebras asociativas es un álgebra asociativa. Sin embargo, el producto tensorial de álgebras de Lie no tiene una estructura natural de álgebra de Lie.

1.2.2. Subálgebras de Lie e ideales

Definición 1.2.3. Un subespacio $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es una *subálgebra* de Lie de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

Ejemplos 1.2.4. (1) Sea

$$\mathfrak{so}(n, \mathrm{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathrm{k}) : X + X^t = 0\}$$

el espacio de las matrices antisimétricas. Es fácil verificar que $[X, Y]^t + [X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{so}(n, \mathrm{k})$. Por lo tanto $\mathfrak{so}(n, \mathrm{k})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$ de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$. Esta álgebra de Lie es llamada el *álgebra de Lie ortogonal*.

(2) Sea $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ una matriz de tamaño $n \times n$, con n número par y sea

$$\mathfrak{sp}(n, \mathrm{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathrm{k}) : JX + X^t J = 0\}.$$

Del mismo modo que en el ejemplo anterior se puede ver que $J[X, Y] + [X, Y]^t J = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathrm{k})$, por lo tanto $\mathfrak{sp}(n, \mathrm{k})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$ de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Esta álgebra de Lie es llamada el *álgebra de Lie simpléctica*. Otra forma de escribir $\mathfrak{sp}(n, \mathrm{k})$ es

$$\mathfrak{sp}(n, \mathrm{k}) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathrm{k}) : X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \text{ , } B \text{ y } C \text{ simétricas} \right\}.$$

(3) El subespacio $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ de las matrices triangulares superiores es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$ al igual que el subespacio $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ de las matrices triangulares superiores estrictas.

(4) Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, el *normalizador* de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ es

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

Es claro, por la identidad de Jacobi, que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Definición 1.2.5. Un *ideal* $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ que verifica $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i}$.

Si $\mathfrak{i}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ es fácil ver que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ con corchete $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, es un álgebra de Lie.

Ejemplos 1.2.6. (1) Sea

$$\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathrm{k}) : tr(X) = 0\},$$

dado que $tr(XY) = tr(YX)$ es claro que $\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$ llamada *álgebra de Lie lineal especial*. Más aún, $\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})$ es un ideal de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$.

(2) El álgebra de Lie $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ es un ideal del álgebra de Lie $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$.

(3) El *centro* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\},$$

es claro, por definición, que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Por ejemplo $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = \mathrm{k}\{E_{1n}\}$.

(4) Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h}$ es un ideal de $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ definida en el Ejemplo 1.2.4(4)

(5) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, el *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$ es por definición

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\},$$

es claro que $\mathfrak{g}'$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

1.2.3. Homorfismos y coeficientes de estructura

Definición 1.2.7. Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie. Un *homomorfismo* entre $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ es una transformación lineal $F : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que $F([X, Y]) = [F(X), F(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_1$. Si F es una biyección diremos que F es un isomorfismo de álgebras de Lie, en este caso $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ se dicen álgebras de Lie isomorfas.

Por ejemplo, sea V un espacio vectorial tal que $\dim V = n$ entonces $\mathfrak{gl}(V)$ es un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$.

Definición 1.2.8. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $B = \{X_1, \ldots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$. Los escalares $\Gamma_{ij}^r \in \mathrm{k}$ que verifican $[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^n \Gamma_{ij}^r X_r$ se llaman *coeficientes de estructura* de $\mathfrak{g}$ respecto de la base B.

Por la Definición 1.2.1 de álgebra de Lie, es fácil demostrar que los coeficientes de estructura cumplen

1. $\Gamma_{ii}^r = 0 = \Gamma_{ij}^r + \Gamma_{ji}^r$
2. $\sum_{r=0}^n (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rl}^m + \Gamma_{jl}^r \Gamma_{ri}^m + \Gamma_{li}^r \Gamma_{rj}^m) = 0$ para todo $i, j, l, m = 1, \ldots, n$.

Recíprocamente, dado $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial, $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y un conjunto $\{\Gamma_{ij}^r \in \mathrm{k} : i, j, r = 1, \dots, n\}$ que cumple i), ii) es posible definir en $\mathfrak{g}$ una estructura de álgebra de Lie extendiendo bilinealmente la definición del corchete dado por

$$[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^{n} \Gamma_{ij}^r X_r$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. En este caso los escalares Γ_{ij}^r son los coeficientes de estructura de $\mathfrak{g}$ respecto de la base B. Además, por la condición i), $\Gamma_{ij}^r = -\Gamma_{ji}^r$ para todo i, j. Por lo tanto, es suficiente conocer Γ_{ij}^r para $i < j$.

Ejemplos 1.2.9. (1) Sea $\mathfrak{g}$ el espacio vectorial con base $B = \{i, j, k\}$, definimos el corchete en $\mathfrak{g}$ a partir de B de la siguiente manera

$$[i, j] = k, \quad [j, k] = i, \quad [k, i] = j.$$

En este caso los coeficientes de estructura son $\Gamma_{12}^r = \delta_{3r}, \quad \Gamma_{13}^r = -\delta_{2r}, \quad \Gamma_{23}^r = \delta_{3r}$, esta álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{so}(3, \mathrm{k})$. El isomorfismo está dado por la transformación lineal $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{so}(3, \mathrm{k})$ con valores $f(i) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f(j) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f(k) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) Álgebra de Lie de *Heisenberg*.

Sea $\mathfrak{h}_m$ el espacio vectorial con base $B_m = \{X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z\}$, un corchete definido en $\mathfrak{h}_m$ es

$$[X_i, Y_j] = \begin{cases} Z & i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta álgebra de Lie es llamada el *álgebra de Lie de Heisenberg* de dimensión $2m + 1$.

Veamos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) = \mathrm{k}\{Z\}$, por la definición del corchete, es suficiente probar que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) \subseteq \mathrm{k}\{Z\}$. Sea $P = \sum_{i=1}^m x_i X_i + \sum_{i=1}^m y_i Y_i + zZ \in \mathfrak{z}(n, \mathrm{k})$ con $x_i, y_i, z \in \mathrm{k}$ para todo i, entonces $x_j = [P, X_j] = 0$ y $y_j = [P, Y_j] = 0$ para todo j. Por lo tanto $P \in \mathrm{k}\{Z\}$.

Es claro, por la definición de $[,]$ en $\mathfrak{h}_m$, que $[\mathfrak{h}_m, \mathfrak{h}_m] = \mathrm{k}Z$ es decir

$$[\mathfrak{h}_m, \mathfrak{h}_m] = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m). \tag{1.3}$$

(3) Sea k un cuerpo de característica 2 y $\{E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ la base de $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{k})$. Sea $\mathfrak{h}_1$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre k y $f : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{sl}(2, \mathrm{k})$ la transformación lineal tal que $f(X) = E$, $f(Y) = F$, $f(Z) = H$. Es fácil ver que f es un isomorfismo de álgebras de Lie, por lo tanto $\mathfrak{h}_1$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{k})$.

(4) En general la suma de homomorfismos de álgebras de Lie no es un homomorfismo de álgebras de Lie. Por ejemplo, si f es el homomorfismo del Ejemplo 1.2.9(1), es fácil ver que $2f$ no es un homomorfismo de álgebras de Lie.

1.2.4. Álgebras de Lie Nilpotentes y Solubles

Definición 1.2.10. La *serie derivada* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está dada por la siguiente sucesión de ideales

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}] \supseteq \dots$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *soluble* si existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$.

Definición 1.2.11. La *serie central descendente* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está dada por la siguiente sucesión de ideales

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}] \supseteq \ldots$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* si existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathfrak{g}^m = 0$. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente tal que $\mathfrak{g}^k = 0$ y $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$ diremos que $\mathfrak{g}$ es *k-pasos nilpotentes.*

Lema 1.2.12. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Sean $i, j \in \mathbb{N}_0$ entonces $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$.*

Definición 1.2.13. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es abeliana si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Ejemplos 1.2.14. (1) Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ abeliana de dimensión n sobre k es un álgebra de Lie isomorfa a k^n, donde el corchete en k^n es el trivial.

(2) Toda álgebra de Lie abeliana es nilpotente y toda álgebra de Lie nilpotente es soluble.

(3) Sea $\mathfrak{d}(n, \mathrm{k})$ la subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$ de las matrices diagonales, entonces $\mathfrak{d}(n, \mathrm{k})$ es una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$.

(4) Una base del álgebra de Lie $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ es $B = \{E_{ij} : i \leq j\}$. Se puede verificar que

$$[E_{ij}, E_{lr}] = \begin{cases} E_{ir} & \text{si } j = l \,, i < r \\ -E_{lj} & \text{si } r = i \,, l < j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^{(1)} \subseteq \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$. Además, $E_{ij} = [E_{ii}, E_{ij}]$ para todo $E_{ij} \in \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$, por lo tanto $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^{(1)} = \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$. Del mismo modo se puede verificar que

$$\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^{(m)} = \{E_{ij} : 1 \leq i < i + 2^{m-1} \leq j \leq n\} \tag{1.4}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, luego $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ es un álgebra de Lie soluble. Sin embargo $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ no es un álgebra de Lie nilpotente dado que

$$\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^2 = [\mathfrak{t}(n, \mathrm{k}), \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})] \supseteq [\mathfrak{d}(n, \mathrm{k}), \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})] \supseteq \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$$

obtenemos $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^2 = \mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^{(1)} = \mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^1$. Por lo tanto $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^m = \mathfrak{t}(n, \mathrm{k})^1$ para todo $m \geq 1$.

(5) Una base del álgebra de Lie $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ es $B = \{E_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$. De la misma manera que en (1.4) se puede verificar que $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})^m$ está generada por $\{E_{ij} : 1 \leq i < i + m \leq j < n\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ es un álgebra de Lie nilpotente.

(6) El álgebra de Lie $\mathfrak{h}_m$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente pues $\mathfrak{h}_m^1 = \mathfrak{z}(n, \mathrm{k})$.

(7) Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie definida en el Ejemplo 1.2.2(4), es claro que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq W$ y $W \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente.

(8) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n, tal que $\mathfrak{g}^{n-1} = 0$ y $\mathfrak{g}^{n-2} \neq 0$. Entonces $\mathfrak{g}$ recibe el nombre de *Álgebra de Lie filiforme.* Por ejemplo, sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie generada por $B = \{X, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}$ tal que el corchete en B esta dado por

$$\begin{aligned} [X, Y_j] &= Y_{j+1} \,,\ 1 \leq j \leq n-2, \\ [Y_i, Y_j] &= 0 \,,\ 1 \leq i, j \leq n-1, \\ [X, Y_{n-1}] &= 0. \end{aligned}$$

1.2.5. Álgebras de Lie semisimples y reductivas

Definición 1.2.15. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $\dim \mathfrak{g} > 1$, se dice *simple* si sus únicos ideales son $\mathfrak{g}$ y el trivial. Se dice *semisimple* si es suma directa de ideales simples de $\mathfrak{g}$, es decir $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ con I_i ideales simples de $\mathfrak{g}$.

Las álgebras de Lie simples de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica cero están clasificadas y son las siguientes:

1) Álgebras de Lie clásicas

   a) El álgebra de Lie, definida en el Ejemplo 1.2.6(1), $A_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathrm{k})$.
   b) El álgebra de Lie, definida en el Ejemplo 1.2.4(1), $B_n = \mathfrak{so}(2n+1, \mathrm{k})$.
   c) El álgebra de Lie, definida en el Ejemplo 1.2.4(2), $C_n = \mathfrak{sp}(2n, \mathrm{k})$.
   d) El álgebra de Lie, definida en el Ejemplo 1.2.4(1), $D_n = \mathfrak{so}(2n, \mathrm{k})$.

2) Álgebras de Lie Excepcionales: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Definición 1.2.16. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo k. El álgebra $\mathfrak{g}$ es *reductiva* si

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

donde $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ semisimple y abeliana respectivamente.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ un álgebra de Lie reductiva sobre k de dimensión finita. Entonces por la Definición 1.2.15 y el Ejemplo 1.2.14(1) podemos pensar a $\mathfrak{g}$ como un álgebra de Lie isomorfa a $I_1 \oplus \cdots \oplus I_r \oplus \mathrm{k}^l$ donde I_i son ideales simples de $\mathfrak{g}_1$ tal que $\mathfrak{g}_1 = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ y $l = \dim \mathfrak{g}_2$. Además, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_1$.

1.2.6. Álgebra Universal Envolvente de un álgebra de Lie

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $T(\mathfrak{g})$ el álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$. Sea I el ideal de $T(\mathfrak{g})$ generado por

$$\{X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Definición 1.2.17. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, el *álgebra universal envolvente* de $\mathfrak{g}$ es el álgebra asociativa con unidad

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I.$$

Dado que $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra asociativa, por el Ejemplo 1.2.2(1), tiene una estructura de álgebra de Lie.

Sea $\iota : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ la aplicación canónica de $\mathfrak{g}$ en $T(\mathfrak{g})$. A partir de ι podemos definir una transformación lineal de $\mathfrak{g}$ a $U(\mathfrak{g})$ como $\pi \circ \iota$ donde π es la proyección al cociente de $T(\mathfrak{g})$ en $U(\mathfrak{g})$.

Proposición 1.2.18. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $U(\mathfrak{g})$ el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$. Entonces la transformación lineal $\pi \circ \iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ es un homorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Dado que $\pi \circ \iota$ es una transformación lineal, falta probar que $(\pi \circ \iota)[X, Y] = [(\pi \circ \iota)(X), (\pi \circ \iota)(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces

$$\begin{aligned}(\pi \circ \iota)[X,Y] &= \pi(\iota[X,Y]) \\ &= \overline{[X,Y]} \\ &= \overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Y}\,\overline{X} \\ &= [(\pi \circ \iota)(X), (\pi \circ \iota)(Y)]\ .\end{aligned}$$

□

Uno de los principales teoremas sobre $U(\mathfrak{g})$ es el *Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt* que da una base para $U(\mathfrak{g})$ como espacio vectorial. No realizaremos la prueba de este teorema dada que no es esencial en el desarrollo de esta tesis, para ello se puede consultar [K].

Teorema 1.2.19. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$. Entonces el conjunto de todos los monomios $X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ con $j_k \geq 0$, es una base de $U(\mathfrak{g})$.*

1.2.7. Extensión del cuerpo de base

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo k y K una extensión de k. Veamos una manera de darle al K-espacio vectorial $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K$ una estructura de álgebra de Lie sobre el cuerpo K a partir de la estructura de $\mathfrak{g}$.

Se puede ver que el mapeo 4-lineal $f : \mathfrak{g} \times K \times \mathfrak{g} \times K \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K$ dado por $f(X, a, Y, b) = [X, Y] \otimes ab$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in K$, induce un mapeo k-bilineal que llamaremos

$$\begin{aligned}[\ \ ]_K : (\mathfrak{g} \otimes K) \times (\mathfrak{g} \otimes K) &\to \mathfrak{g} \otimes K \\ (X \otimes a, Y \otimes b) &\mapsto [X, Y] \otimes ab\ .\end{aligned}$$

Es fácil ver que $[\ \ ]_K$ es K-bilineal y se puede ver $[\ \ ]_K$ verifica las condiciones *i)* y *ii)* de la Definición 1.2.1 de álgebra de Lie. La k-álgebra de Lie que resulta de restringir los escalares a k en la K-álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K$ será denotada por $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K)_{\mathrm{k}}$.

Un caso especial es cuando $\mathrm{k} = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ y $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real. El álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ es llamada la complexificación de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja y $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie real tal que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mirada sobre $\mathbb{R}$, está relacionada como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ por $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$ diremos que $\mathfrak{g}_0$ es la forma real del álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$.

1.3. Representaciones de álgebras de Lie

Definición 1.3.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k. Una *representación* (π, V) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Más aún, si para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X)$ es un endomorfismo nilpotente diremos que (π, V) es una *nilrepresentación* de $\mathfrak{g}$.

Dado V un espacio vectorial de dimensión n y una base de V existe un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{gl}(V)$ y $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$. Por este motivo las representaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pueden ser vistas como homomorfismo de álgebras de Lie de la forma $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$.

La *dimensión* de una representación (π, V) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es $\dim V$.

Ejemplos 1.3.2. (1) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, por la identidad de Jacobi que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto \mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y] \ , \end{aligned}$$

es una representación de $\mathfrak{g}$. Esta representación recibe el nombre de *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$ y $\ker(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Más aún, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente es fácil ver que la representación adjunta es una nilrepresentación de $\mathfrak{g}$.

(2) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sean (π_1, V_1), (π_2, V_2) representaciones de $\mathfrak{g}$. Es fácil ver que la aplicación $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$ con valores $\pi(X)(v_1, v_2) = (\pi_1(X)v_1, \pi_2(X)v_2)$ es una nueva representación de $\mathfrak{g}$ en $V_1 \oplus V_2$. En este caso $\ker(\pi) = \ker(\pi_1) \cap \ker(\pi_2)$.

(3) Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie y sean (π_1, V_1), (π_2, V_2) representaciones de $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ respectivamente. La aplicación $\pi_1 \oplus \pi_2 : \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$ con valores

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(X_1, X_2)(v_1, v_2) = (\pi_1(X_1)(v_1), \pi_2(X_2)(v_2))$$

es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

(4) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sean $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ representaciones de $\mathfrak{g}$. Entonces $\pi_1 \otimes \pi_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ con valores

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = \pi_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \pi_2(X)v_2$$

es una representación de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.3.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, una representación (π, V) de $\mathfrak{g}$ es irreducible si V tiene dos subespacios $\pi(X)$ invariante para todo $X \in \mathfrak{g}$, el subespacio nulo y V. Una representación (π, V) es completamente reducible si existen subespacios V_i de V tales que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ y para todo $X \in \mathfrak{g}$, V_i es $\pi(X)$ invariante.

Dos importantes resultados de la teoría de álgebras de Lie son el *Teorema de Engel* y el *Teorema de Lie*, dado que estos teoremas no son centrales en el desarrollo de esta tesis no daremos sus respectivas pruebas (ver [K]).

Teorema 1.3.4. *(Engel) Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre* k, *y* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie de endomorfismos nilpotentes de V. Entonces*

a) $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie nilpotente,*

b) existe $0 \neq v \in V$ tal que $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$,

c) existe una base B de V tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$ la matriz asociada en la base B es triangular superior estricta.

Teorema 1.3.5. *(Lie) Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie soluble y V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* k *algebraicamente cerrado de característica cero y sea (π, V) una representación de* $\mathfrak{g}$. *Si* k *es algebraicamente cerrado, entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X)v = \lambda_X v$* .

Si k no es de característica cero, en general el Teorema de Lie es falso. Por ejemplo, sea k un cuerpo de característica 2 y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie sobre k generada por $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, es fácil ver que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble pues $[X, Y] = X$. Además, dado que $char(\mathrm{k}) = 2$, el polinomio característico de X es $P(x) = x^2 + 1 = (x + 1)^2$. Por lo tanto el valor propio de X es $\lambda = 1$ y el espacio propio asociado está generado por $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, es fácil ver que v_1 no es vector propio de Y.

Capítulo 2

Representaciones fieles de álgebras de Lie

En este capítulo repasaremos el concepto de representación fiel de un álgebra de Lie y el *Teorema de Ado*, uno de los resultados centrales en la teoría de representaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. En §2.1 demostraremos una versión del Teorema de Ado llamado *Teorema de Embeding de Birkhoff* ([Bi]). En §2.2 recordamos el Teorema de Zassenhaus y probamos que éste implica que la parte semisimple y nilpotente de una representación de un álgebra de Lie nilpontente son tambieén reprentaciones. Finalmente probamos que bajo ciertas condiciones, dada una representación fiel (π, V) de un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, la parte nilpotente (π_N, V) de (π, V) define una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Estos resultados son de importancia para el desarrollo del Capítulo 4.

2.1. Teorema de Ado-Iwasawa y Teorema de Birkhoff

Definición 2.1.1. Una representación (π, V) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *fiel* si π es inyectiva.

En particular si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ la representación adjunta es una representación fiel de $\mathfrak{g}$.

Es claro que toda representación fiel de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ establece un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ en una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Más aún, si la representación es de dimensión finita, se establece un isomorfismo con una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$.

El problema de la existencia de una representación fiel de dimensión finita para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo k, fue resuelto por Ado-Iwasawa. En el caso en que $char(\mathrm{k}) = 0$ el teorema es conocido como *Teorema de Ado*, si $char(\mathrm{k}) \neq 0$ el teorema se conoce como el *Teorema de Iwasawa.*

Teorema 2.1.2. *(Teorema de Ado-Iwasawa) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo* k *de dimensión finita. Entonces existe una representación fiel de dimensión finita de $\mathfrak{g}$.*

La prueba de este teorema para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ arbitraria es sofisticada y se puede ver en [J1]. En su lugar, probaremos el *Teorema de Embeding de Birkhoff.*

Teorema 2.1.3. *(Teorema de Embeding de Birkhoff) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente de dimensión n sobre un cuerpo de característica cero. Entonces existe una nilrepresentación fiel (π, V) de $\mathfrak{g}$ tal que tal que* $\dim V \leq 1 + n + n^2 + \cdots + n^k$.

Este teorema es una versión constructiva del Teorema de Ado, que es válido para álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita y es el caso de particular interés de esta tesis. Para la prueba del teorema necesitaremos algunas definiciones y resultados previos que enunciamos a continuación.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente y $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ donde los primeros n_1 vectores generan $\mathfrak{g}^{k-1}$, los primeros n_2 vectores generan $\mathfrak{g}^{k-2}$ y así sucesivamente. Sean $B_U = \{X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$ la base de $U(\mathfrak{g})$ dada por el Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt y la función $o : U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{N}_0$ definida por

$$o(X_j) = \text{máx}\{t + 1 : X_j \in \mathfrak{g}^t\} \qquad o(X^\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j o(X_j)$$

$$o(W) = \text{mín}\{o(X^\alpha) : c_\alpha \neq 0\} \qquad o(1) = 0 \ , \ o(0) = \infty.$$

Lema 2.1.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo de característica cero. Entonces*

$$\begin{aligned} o(W_1 + \cdots + W_r) &\geq \text{mín}\{o(W_1), \ldots, o(W_r)\}, \\ o(W_1 \ldots W_r) &\geq o(W_1) + \cdots + o(W_r) \end{aligned}$$

para todo $W_i \in U(\mathfrak{g})$.

Demostración. La primera ecuación es inmediata para $r = 2$, luego por inducción sobre r se tiene el resultado deseado. La prueba de la segunda ecuación es por inducción y la reducimos al caso en que $r = 2$ y W_i son elementos homogéneos de $U(\mathfrak{g})$. Pues si $W_1 = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha X^\alpha$, $W_2 = \sum_{\beta \in J} d_\beta X^\beta$ con $X^\alpha, X^\beta \in B_U$ tenemos que

$$\begin{aligned} o(W_1 W_2) &= o(\sum_{\alpha \in I} c_\alpha X^\alpha . \sum_{\beta \in J} d_\beta X^\beta) = o(\sum_{\alpha \in I, \beta \in J} c_\alpha d_\beta X^\alpha X^\beta) \\ &\geq \text{mín}\{o(X^\alpha X^\beta) : (\alpha, \beta) \in I \times J\} \\ &\geq \text{mín}\{o(X^\alpha) + o(X^\beta) : (\alpha, \beta) \in I \times J\} \qquad \text{es válido para monomios} \\ &= \text{mín}\{o(X^\alpha) : \alpha \in I\} + \text{mín}\{o(X^\beta) : \beta \in J\} \\ &= o(W_1) + o(W_2). \end{aligned}$$

Sean W_1, W_2 elementos homogéneos de $U(\mathfrak{g})$, es decir $W_i = X^{\alpha_i}$ con $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}) \in \mathbb{Z}_+^n$. Si $W_1 W_2$ es un monomio ordenado X^β con $\beta = (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n})$, entonces

$$\begin{aligned} o(W_1 W_2) = o(X^\beta) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j o(X^j) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{1,j} + \alpha_{2,j}) o(X^j) \\ &= \sum_{i=1}^{2} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} o(X^j)) \\ &= \sum_{i=1}^{2} o(W_i) \qquad \text{por definición.} \end{aligned}$$

Supongamos que W_1W_2 no es un monomio ordenado. Para probar la ecuación nterior daremos la siguiente definición; sea $W = X^{\alpha_1}\dots X^{\alpha_r}$ con $\alpha_i = (\alpha_{i,1},\dots,\alpha_{i,n}) \in \mathbb{Z}_+^n$, definimos $d = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}$ como el grado de W.

Haremos inducción sobre d, para el caso $d = 1$ es claro que se verifica. Asumamos que la ecuación es válida si $1 \leq d < N$ y W_1W_2 un monomio de grado N. Dado que W_1W_2 es un monomio no ordenado, tenemos que $W_1W_2 = X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}$ donde $X^{\alpha_1} = W'X_i, X^{\alpha_2} = X_jW''$ con $j < i$.

Si $o(X_i) = m_i$ y $o(X_i) = m_j$, por Lema 1.2.12, $[X_i, X_j] = \sum_{l\in I} c_lX_l \in \mathfrak{g}^{m_i+m_j}$. Es decir $o(X_l) \geq m_i + m_j = o(X_i) + o(X_j)$ si $c_l \neq 0$. Además

$$\begin{aligned} W_1W_2 &= W'[X_i, X_j]W'' + W'X_jX_iW'' \\ &= \sum_{l\in I} c_lW'X_lW'' + W'X_jX_iW''. \end{aligned}$$

Es fácil ver que el valor de d para cada término del primer sumando es menor que N. Por hipótesis inductiva y dado que $o(X^{\alpha_1}) = o(W') + o(X_i)$ por definición de o, tenemos

$$\begin{aligned} o(W'X_lW'') &\geq o(W') + o(X_l) + o(W'') \\ &= (o(X^{\alpha_1}) - o(X_i)) + o(X_l) + (o(X^{\alpha_2}) - o(X_j)) \\ &\geq o(W_1) + o(W_2). \end{aligned}$$

entonces, por la primera ecuación del lema

$$\begin{aligned} o(W_1W_2) &\geq \text{mín}\{o(W'X_jX_iW''), \sum_{l\in I} o(W'X_lW'')\} \\ &\geq \text{mín}\left\{o(W'X_jX_iW''), \sum_{i=1}^{2} o(W_i)\right\}. \end{aligned}$$

Aplicando este procedimiento a $W'X_jX_iW''$ repetidas veces se puede verificar que el término $\sum_{i=1}^2 o(W_i)$ se preserva y así la desigualdad nos queda

$$o(W_1W_2) \geq \text{mín}\left\{o(X^\beta), \sum_{i=1}^{2} o(W_i)\right\}.$$

Pero $o(X^\beta) = \sum_{j=1}^n \beta_j o(X_j) = o(W_1) + o(W_2)$, luego $o(W_1W_2) \geq o(W_1) + o(W_2)$. □

Lema 2.1.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente de dimensión n sobre un cuerpo de característica cero y sea*

$$U^m(\mathfrak{g}) = \{W \in U(\mathfrak{g}) : o(W) \geq m\}$$

$m \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$. Entonces $U^m(\mathfrak{g})$ es un ideal de $U(\mathfrak{g})$ de codimensión menor o igual que $1 + n + n^2 + \cdots + n^{m-1}$.

Demostración. Por la primera ecuación del Lema 2.1.4, $U^m(\mathfrak{g})$ es cerrado bajo la suma. Además, por la segunda ecuación del mismo lema, para todo $W \in U(\mathfrak{g}), W_1 \in U^m(\mathfrak{g})$ tenemos que $WW_1 \in U^m(\mathfrak{g})$, del mismo modo para W_1W. Por lo tanto, $U^m(\mathfrak{g})$ es un ideal de $U(\mathfrak{g})$.

Debemos demostrar que la codimensión de $U^m(\mathfrak{g})$ es menor o igual que $1 + n^{m-1}$. Sea $B_U = \{X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n} : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$ la base de $U(\mathfrak{g})$ obtenida anteriormente y $B_m = \{X^\alpha : o(X^\alpha) \geq$

$m\} \subseteq B_U$. Veamos que B_m es una base de $U^m(\mathfrak{g})$, sea $W = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha \in U^m(\mathfrak{g})$, por la primera ecuación del Lema 2.1.4, $o(W) \geq m$. Luego, B_m es un generador de $U^m(\mathfrak{g})$ entonces la codimensión de $U^m(\mathfrak{g})$ es $\#\{X^\alpha : o(X^\alpha) < m\}$. Es claro, por la definición de o, que

$$\#\{X^\alpha : o(X^\alpha) < m\} \leq \# \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq m-1 \right\}$$

y dado que $\#\left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m-1\right\} \leq \sum_{j=0}^{m-1} n^j$, obtenemos lo que queriamos $\#\{X^\alpha : o(X^\alpha) < m\} \leq \sum_{j=0}^{m-1} n^j$. □

Demostración. (Teorema 2.1.3) Sea $\rho : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(U(\mathfrak{g}))$ con valores $\rho(W_1)W_2 = W_1W_2$ para todo $W_1, W_2 \in U(\mathfrak{g})$. Es fácil verificar que ρ es una representación del álgebra de Lie $U(\mathfrak{g})$. Sea $m \in \mathbb{N}$, por el Lema 2.1.5, $U^m(\mathfrak{g})$ es un ideal de $U(\mathfrak{g})$, por lo tanto $U^m(\mathfrak{g})$ es un subespacio invariante por $\rho(W)$ para todo $W \in U(\mathfrak{g})$.

Sea $V = U(\mathfrak{g})/U^m(\mathfrak{g})$. Por la observación anterior y por el Lema 2.1.5, podemos definir una representación de dimensión finita del álgebra de Lie $U(\mathfrak{g})$. Dicha representación la llamaremos $\widetilde{\rho} : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$ con valores $\widetilde{\rho}(W)\overline{v} = \overline{\rho(W)v}$ para todo $W \in U(\mathfrak{g}), v \in U(\mathfrak{g})$. Además, por el Lema 2.1.5, V es un espacio vectorial de dimensión finita.

Dado que $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $U(\mathfrak{g})$, es claro que $(\pi = \widetilde{\rho}_{|\mathfrak{g}}, V)$ es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Es claro que $U(\mathfrak{g})^i \supset U^{i+1}(\mathfrak{g})$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Sean $V_i = U^i(\mathfrak{g})/U^m(\mathfrak{g})$ subespacios de V para $i = 0, \ldots, m$, entonces

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{m-1} \supset V_m = 0.$$

Por la segunda ecuación del Lema 2.1.4, es fácil ver que $\pi(X)V_i \subseteq V_{i+1}$ para todo $i = 0, \ldots, m-1$. Sea $\widetilde{B} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2 \ldots, \overline{v}_s\}$ una base de V tal que los primeros m_1 vectores generan a V_{m-1}, los primeros m_2 vectores generan a V_{m-2} y así sucesivamente. Entonces $[\pi(X)]_{\widetilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & * & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}(s, \mathrm{k})$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, por lo tanto π es una nilrepresentación de $\mathfrak{g}$.

Si $m \geq k+1$, $\mathfrak{g} \cap U^m(\mathfrak{g}) = 0$, entonces para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X)1 = X \neq 0$. Por lo tanto π es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. □

Observación: Se puede ver que para $n > 2$

$$\# \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = j \right\} = \frac{n^{j-1}(n+1)}{2}$$

para cada $j = 2, \ldots, k$. Luego $\#\left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k\right\} = 1 + n + \sum_{j=2}^k \frac{n^{j-1}(n+1)}{2}$. Además

$$1 + n + \sum_{j=2}^{k} \frac{n^{j-1}(n+1)}{2} = \frac{n^k - 1}{n-1} + \frac{n + n^k}{2} \leq 1 + n^k.$$

Por lo tanto la dimensión de la nilrepresentación obtenida en el Teorema 2.1.3 es menor o igual a $1 + n^k$, esta mejora a la cota del Teorema 2.1.3 fue dada por [R].

2.2. Nilrepresentaciones fieles

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo k. Si $\mathfrak{g}$ no es nilpotente entonces no existe ninguna nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$, por el Teorema de Engel.

Por el Teorema de Embeding de Birkhoff, toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica cero admite una nilrepresentación fiel de dimensión finita. En esta sección mostraremos que, bajo ciertas hipótesis, dada una representación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, se puede obtener una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$ de la misma dimensión.

Teorema 2.2.1. *(Teorema de Zassenhaus) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* k *algebraicamente cerrado y sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(V)$. Entonces existen $V_0, V_1, \ldots, V_r$ subespacios de V tales que*

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

donde V_i es $\mathfrak{g}$-invariante. Además, para cada $X \in \mathfrak{g}$, $X\mid_{V_i} = \lambda_{i,X} I + N_i(X)$ tal que $N_i(X)$ es un operador nilpotente para todo i.

La prueba del Teorema de Zassenhaus no la realizaremos dado que no es de importancia en el desarrllo de esta tesis, para ello se puede consultar [J1].

Observación Dado V un k-espacio vectorial de dimensión finita y K una extensión de k. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre k y (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Es fácil ver que la aplicación $\pi \otimes \mathrm{id} : \mathfrak{g} \otimes K \to \mathfrak{gl}(V) \otimes K$ es un homomorfismo inyectivo de álgebras de Lie sobre K, donde $\mathfrak{g} \otimes K$ y $\mathfrak{gl}(V) \otimes K$ tienen la estructura de álgebra de Lie sobre K dada en §1.2.7. Más aún, es fácil ver que el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V) \otimes K$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V \otimes K)$ sobre K. Por lo tanto, a partir de la representación fiel (π, V) existe una representación fiel $(\overline{\pi}, V \otimes K)$ de $\mathfrak{g} \otimes K$ definida por $\overline{\pi}(X \otimes a)(v \otimes b) = \pi(X)(v) \otimes ba$ para todo $X \in \mathfrak{g}, a, b \in K$. Además $\overline{\pi}$ es una aplicación k-lineal, luego $(\overline{\pi}, V \otimes K)$ es una representación fiel del álgebra de Lie $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$.

Teorema 2.2.2. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero y sea (π, V) una representación de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ sean $\pi_S(X)$ y $\pi_N(X)$ respectivamente las partes semisimple y nilpotente de $\pi(X)$. Entonces (π_S, V) y (π_N, V) son representaciones de $\mathfrak{g}$, más aún $\pi_S(g') = 0$.*

Demostración. Debemos demostrar que π_S y π_N son lineales y preservan el corchete. Para ello consideremos primero que k es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Es claro que $\pi(\mathfrak{g})$ es una subálgebra de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(V)$. Por el Teorema de Zassenhaus (ver §2.2.1) V se puede descomponer como $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Donde cada V_i es un subespacio de V tal que

$$\pi(X)V_i \subseteq V_i \qquad \pi(X)\mid_{V_i} = \pi_{Si}(X) + \pi_{Ni}(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $\pi_{Ni}(X)$ es un endomorfismo nilpotente, $\pi_{Si}(X) = \lambda_i(X) I_i$ con I_i la transformación identidad en V_i y $\lambda_i(X) \in$ k para todo $i = 0, \ldots, r$. Como $\pi_S(X)$ y $\pi_N(X)$ son respectivamente las partes semisimple y nilpotente de $\pi(X)$, obtenemos que $\pi_S(X)\mid_{V_i} = \pi_{Si}(X)$ y $\pi_N(X)\mid_{V_i} = \pi_{Ni}(X)$. Por lo tanto, para probar que π_S es lineal y preserva el corchete, basta ver que cada π_{Si} lo hace. Por el Teorema de Lie, existe una base $B_i = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ de V_i tal que

$[\pi_i(X)]_{B_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & & \\ & \lambda_i(X) & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_i(X) \end{pmatrix}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Es claro que $\pi_i(X)v_{i_1} = \lambda_i(X)v_{i_1}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, luego

$$\begin{aligned}\lambda_i(aX+Y)v_{i_1} &= \pi(aX+Y)v_{i_1}\\ &= (a\pi(X)+\pi(Y))v_{i_1}\\ &= (a\lambda_i(X)+\lambda_i(Y))v_{i_1}\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}, a \in \mathrm{k}$. Entonces λ_i es una funcional lineal por lo tanto π_{Si} es una transformación lineal para cada i. Además, λ_i es una representación de $\mathfrak{g}$ sobre k para todo i, pues

$$\begin{aligned}\lambda_i([X,Y])v_{i_1} &= \pi_i([X,Y])v_{i_1}\\ &= (\pi_i(X)\pi_i(Y)-\pi_i(Y)\pi_i(X))v_{i_1}\\ &= (\lambda_i(X)\lambda_i(Y)-\lambda_i(Y)\lambda_i(X))v_{i_1}\\ &= 0\\ &= [\lambda_i(X),\lambda_i(Y)]v_{i_1}\ .\end{aligned}$$

Por lo tanto, π_{Si} es una representación de $\mathfrak{g}$ y $\pi_{Si}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$ para cada i. Entonces π_S es representación tal que

$$\pi_S([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0. \tag{2.1}$$

Falta probar que π_N es representación. Como $\pi_N = \pi - \pi_S$ es claro que π_N es lineal. Por lo tanto basta probar que cada π_{Ni} preserva el corchete. Dado que π_{Si} es múltiplo de I_i tenemos que $[\pi_{Ni}(X), \pi_{Si}(Y)] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Luego,

$$\begin{aligned}\pi_{Ni}([X,Y]) &= \pi_i([X,Y]) - \pi_{Si}([X,Y])\\ &= [\pi_i(X),\pi_i(Y)] \quad \text{por la ecuación } (2{,}1)\\ &= [\pi_{Ni}(X)+\pi_{Si}(X), \pi_{Ni}(Y)+\pi_{Si}(Y)]\\ &= [\pi_{Ni}(X),\pi_{Ni}(Y)].\end{aligned}$$

Por lo tanto π_{Ni} es una representación de $\mathfrak{g}$.

Si k no es algebraicamente cerrado, consideremos $\overline{\mathrm{k}}$ su clausura algebraica. Sea $\overline{V} = V \otimes_{\mathrm{k}} \overline{\mathrm{k}}$ y sea $(\overline{\pi}, \overline{V})$ la representación de $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \overline{\mathrm{k}}$ obtenida a partir de la representación (π, V). Sean $\overline{\pi}_S$ y $\overline{\pi}_N$ las representaciones obtenidas en el caso en que el cuerpo es algebraicamente cerrado.

Dada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V se sabe que $\overline{B} = \{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1\}$ es una base de $\overline{V}$. Si $\overline{X} = X \otimes 1$ entonces $[\pi(X)]_B = [\overline{\pi}(\overline{X})]_{\overline{B}}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, luego

$$[\pi_S(X)]_B + [\pi_N(X)]_B = [\overline{\pi}_S(\overline{X})]_{\overline{B}} + [\overline{\pi}_N(\overline{X})]_{\overline{B}}.$$

Se sabe que si $\pi_S(X)$ es una transformación semisimple entonces $[\pi_S(X)]_B$ es diagonalizable sobre $\overline{\mathrm{k}}$, a su vez $[\overline{\pi}_S(\overline{X})]_{\overline{B}}$ es diagonalizable sobre $\overline{\mathrm{k}}$. Más aún, $[\pi_N(X)]_B$ y $[\overline{\pi}_N(\overline{X})]_{\overline{B}}$ son matrices nilpotentes. Dado que la descomposición es única entonces

$$[\pi_S(X)]_B = [\overline{\pi}_S(\overline{X})]_{\overline{B}} \quad \text{y} \quad [\pi_N(X)]_B = [\overline{\pi}_N(\overline{X})]_{\overline{B}}.$$

Por lo tanto (π_S, V) y (π_N, V) son representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V y por definición de π_N obtenemos que (π_N, V) es una nilrepresentación de $\mathfrak{g}$. Además, como $\overline{\mathfrak{g}}' = \mathfrak{g}' \otimes_{\mathrm{k}} \overline{\mathrm{k}}$ y $\overline{\pi}_S(\overline{\mathfrak{g}}') = 0$ entonces $\pi_S(\mathfrak{g}') = 0$. $\square$

Definición 2.2.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y (π, V) una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$. Llamaremos parte semisimple y nilpotente de π a las representaciones (π_S, V) y (π_N, V) obtenidas en el Teorema 2.2.2 respectivamente.

Teorema 2.2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}'$. Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita y sea (N, V) la parte nilpotente de (π, V). Entonces (π_N, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. La representación (π_N, V) dada en el Teorema 2.2.2 es una nilrepresentación. Por lo tanto nos falta probar que π_N es inyectiva. Sea $\pi_N(X_0) = 0$,

$$\begin{aligned}\pi([X_0, X]) &= \pi_N([X_0, X]) + \pi_S([X_0, X]) \\ &= [\pi_N(X_0), \pi_N(X)] + \pi_S([X_0, X]) \\ &= 0 \qquad \text{pues } \pi_S(\mathfrak{g}') = 0\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Como π es un representación fiel de $\mathfrak{g}$ entonces $[X_0, X] = 0$, es decir $X_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Dado que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}'$ y $\pi_S(\mathfrak{g}') = 0$ obtenemos $\pi_S(X_0) = 0$. Por lo tanto $\pi(X_0) = 0$ entonces $X_0 = 0$. □

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. La condición $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ de la proposición anterior es importante para que la nilrepresentación (π_N, V) sea fiel. Por ejemplo, $\mathfrak{g} = \mathrm{k}$ es un álgebra de Lie abeliana sobre k entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ y $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(2, \mathrm{k})$ tal que $\pi(1) = I$ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Pero en este caso $\pi_N = 0$.

Capítulo 3

Representaciones fieles de dimensión mínima y la función μ

3.1. Definiciones y ejemplos

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensón finita. Por el *Teorema de Ado-Iwasawa* existe una representación fiel de dimensión finita de $\mathfrak{g}$. Un problema nada sencillo es, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita encontrar una representación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión mínima. Esto motiva la siguiente definición;

Definición 3.1.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensón finita. Sea

$$\mu(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

Es fácil probar que la función μ es invariante bajo isomorfismos de álgebras de Lie.

Ejemplo 3.1.2. (1) Sea $\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})$ el álgebra de Lie lineal especial. Veamos que

$$\mu(\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})) = n.$$

Probemos por el absurdo, si $\mu(\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})) = d < n$ entonces $d^2 \leq n^2 - 1$ y como $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathrm{k}) = n^2 - 1$ obtenemos que $d^2 = n^2 - 1$. Pero esto es una contradicción dado que no existen dos naturales cuyos cuadrados sean consecutivos. Por lo tanto $\mu(\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})) = n$.

(2) Sea $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ el álgebra de Lie de matrices triangulares superiores sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Por el Teorema de Lie, es fácil ver que $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = n$.

(3) Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{k})$ generada por $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Z = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, entonces $[X, Y] = Y$, $[X, Z] = Z$, $[Y, Z] = 0$. Es claro que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Veamos que $\mu(\mathfrak{g}) = 3$, si $\mu(\mathfrak{g}) = 2$ existe una subálgebra de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ soluble de dimensión 3 de $\mathfrak{gl}(2, \mathrm{k})$ isomorfa a $\mathfrak{g}$. Dado que $\dim \mathfrak{gl}(2, \mathrm{k}) = 4$ y $I \notin \widetilde{\mathfrak{g}}$, pues $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, tenemos que

$$\mathfrak{gl}(2, \mathrm{k}) = \mathrm{k}\{I\} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}.$$

Es fácil ver que $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})) = \mathrm{k}\{I\}$ y $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Dado que $\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})' \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})$ es soluble. Esto es una contradicción, pues $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{k})$ es una subálgebra de Lie simple de $\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{g}) = 3$.

(4) Sea $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ el álgebra de Lie ortogonal y $B = \{X_1, X_2, X_3\}$ una base tal que $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Sea $\pi : \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ con los siguientes valores en B

$$\pi(X_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \pi(X_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi(X_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que π es una representación fiel de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})) = 2$. En realidad, π establece un isomorfismo entre $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

(5) Sea $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ el álgebra de Lie definida en el ejemplo anterior y $B = \{X_1, X_2, X_3\}$ la base dada en dicho ejemplo.

Veamos que $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})) = 3$. Si $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})) = 2$ entonces $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ es isomorfa a una subálgebra de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ de dimensión 3 de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$. Al igual que en el Ejemplo 3.1.2(3) podemos concluir que $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}I \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$. Entonces, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \widetilde{\mathfrak{g}}$, pues $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})' \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$, luego $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Es fácil verificar que para ningún $X \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $\mathrm{ad}(X)$ es diagonalizable. Lo que contradice el hecho que $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ sea isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})) = 3$.

(6) Sea k un cuerpo de característica 2 y $\mathfrak{h}_1$ el álgebra de Lie de *Heisenberg* sobre k de dimensión 3. Por el Ejemplo 1.2.9(3), $\mathfrak{h}_1$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{k})$ luego $\mu(\mathfrak{h}_1) = 2$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero. Por el Teorema de Embeding de Birkhoff (ver §2.1.3), existe un nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita.

Definición 3.1.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, sobre un cuerpo de característica cero. Sea

$$\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = \min\{\dim V : (\pi_N, V) \text{ es una nilrepresentación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

De la misma forma que para μ, es fácil ver que μ_{nil} es invariante bajo isomorfismo de álgebras de Lie. Además, por la definición de $\mu_{nil}(\mathfrak{g})$, es claro que $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu_{nil}(\mathfrak{g})$. Un sencillo ejemplo donde $\mu(\mathfrak{g}) < \mu_{nil}(\mathfrak{g})$ es $\mathfrak{g} = \mathrm{k}$, en este caso $\mu(\mathfrak{g}) = 1$ y $\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = 2$. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}'$, por el Teorema 2.2.4, es fácil ver que $\mu(\mathfrak{g}) = \mu_{nil}(\mathfrak{g})$.

3.2. Síntesis de algunos resultados conocidos sobre μ

En esta sección haremos una síntesis de algunos resultados que se conocen sobre μ y demostraremos aquéllos cuya prueba sea breve. La próxima sección contiene las demostraciones que son más elaboradas. En algunos casos excepcionales, en donde la prueba necesita contenidos que no se encuentran en esta tesis, daremos solamente la cita correspondiente.

Los resultados están organizados en tres partes. La primera de ellas, contiene propiedades generales de la función μ. En la segunda parte damos el valor de μ para algunas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ frecuentemente citadas en la literatura. Finalmente en la tercera, presentamos cotas de μ para álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ particulares.

1. **Propiedades generales de μ**

   a) Sean $\mathfrak{g}_i$ álgebras de Lie de dimensión finita, entonces $\mu(\oplus_{i=1}^r \mathfrak{g}_i) \leq \sum_{i=1}^r \mu(\mathfrak{g}_i)$.
   La prueba de este resultado es sencilla, consideremos (π_i, V_i) una representación fiel de $\mathfrak{g}_i$ para cada i. Por el Ejemplo 1.3.2(3), $(\oplus_{i=1}^r \pi_i, \oplus_{i=1}^r V_i)$ es una representación fiel de $\oplus_{i=1}^r \mathfrak{g}_i$ entonces $\mu(\oplus_{i=1}^r \mathfrak{g}_i) \leq \sum_{i=1}^r \mu(\mathfrak{g}_i)$.
   En general la desigualdad es estricta. Por ejemplo, sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie abeliana de dimensión 5 sobre k. Entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a

$$\mathrm{k} \oplus \mathrm{k} \oplus \mathrm{k} \oplus \mathrm{k} \oplus \mathrm{k}.$$

   Veamos una representación fiel de $\mathfrak{g}$, sea $B = \{X_1, \dots, X_5\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y (π, k^4) definida por

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{5} x_i X_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

   entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq 4 < \sum_{i=1}^5 \mu(\mathrm{k}) = 5$.

   b) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ entonces $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}) = \mu(\mathfrak{g})$ (ver §3.3(1)).

   c) Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre k y K una extensión de k. Sea $\mathfrak{g} \otimes K$ el álgebra de Lie sobre K con la estructura dada en §1.2.7 y sea $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes K$ pensada con escalares en k. Entonces

$$\mu(\mathfrak{g} \otimes K) \leq \mu(\mathfrak{g});$$

$$\mu((\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}) \leq \mu(\mathfrak{g} \otimes K) \dim_{\mathrm{k}} K.$$

   Demostración. Dada una representación fiel (π, V) de dimensión finita de $\mathfrak{g}$, vimos en la observación de §2.2 que se puede obtener una representación fiel $(\overline{\pi}, V \otimes K)$ de $\mathfrak{g} \otimes K$ sobre K entonces $\mu(\mathfrak{g} \otimes K) \leq \mu(\mathfrak{g})$. A su vez, vimos que la aplicación $\overline{\pi}$ restringida a k es una representación de $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$ y dado que $\overline{\pi}$ es inyectiva obtenemos, de esta forma, una representación fiel de $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$. Por lo tanto $\mu((\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}) \leq \mu(\mathfrak{g} \otimes K) \dim_{\mathrm{k}} K$. □

   Ejemplo 3.2.1. i) Un ejemplo donde las desigualdades son estrictas es cuando $\mathrm{k} = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. Como $\mathfrak{g} \otimes K = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$, tenemos que

$$2 = \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}) < \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})) = 3$$

   (ver Ejemplos 4 y 5 más arriba). Por otra parte, sea $B = \{X_1, X_2, X_3\}$ la base de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ dada en la sección anterior, es fácil ver que una representación fiel del álgebra de Lie $(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ es de la forma

$$\pi(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x_4 & x_2 - x_6 & -x_1 & -x_3 - x_5 \\ -x_2 - x_6 & x_4 & -x_3 + x_5 & x_1 \\ x_1 & x_3 + x_5 & -x_4 & x_2 - x_6 \\ x_3 - x_5 & -x_1 & -x_2 - x_6 & x_4 \end{pmatrix},$$

   para todo $X = x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 (i X_1) + x_5 (i X_2) + x_6 (i X_3) \in (\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Entonces $\mu((\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 4$ por lo tanto

$$\mu((\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 2 \times 2 = \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} < 3 \times 2 = \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

ii) Sean $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C}) = \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Sea $B = \{X_1, Y_1, Z\}$ una base de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$ tal que $[X_1, Y_1] = Z$ y cero en otro caso, entonces una base de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ es $B_{\mathbb{R}} = \{X_1, iX_1, Y_1, iY_1, Z, iZ\}$. Sean $X = x_1X_1 + x_2(iX_1) + y_1Y_1 + y_2(iY_2) + z_1Z + z_2(iZ)$ tales que $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ y $\pi : \mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ definida por

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & -y_2 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es fácil ver que $(\pi, \mathbb{R}^5)$ es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, en el siguiente capítulo veremos una generalización de este resultado. Por lo tanto

$$\mu(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 5 < 3 \times 2 = \mu(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mu(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

iii) Una base del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ es $\{E, F, H, iE, iF, iH\}$. Sean $X = x_1E + x_2F + x_3H + x_4(iE) + x_5(iF) + x_6(iH)$ tal que $x_i \in \mathbb{R}$ y $\pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ definida por

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & -x_6 & -x_4 \\ x_2 & -x_3 & -x_5 & x_6 \\ x_6 & x_4 & x_3 & x_1 \\ x_5 & -x_6 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $(\pi, \mathbb{R}^4)$ es una representación fiel de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, luego $\mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 4$. Además, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Por los puntos 1c) y 2e)

$$4 = 2\mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \leq \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 4.$$

Por lo tanto

$$4 = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

d) Sean $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{g}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{s}$ semisimple y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ entonces $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{s}) = \mu(\mathfrak{g}) + \mu(\mathfrak{s})$ (ver [BW]).

2. $\mu(\mathfrak{g})$ **para ciertas álgebras de Lie**

a) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie abeliana de dimensión $n > 1$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil$. Este resultado es una consecuencia del siguiente Teorema de Schur.

Teorema 3.2.2. *(Teorema de Schur) Sean $A_1, \ldots, A_q$ matrices linealmente independientes que conmutan de orden n sobre un cuerpo* k. *Entonces*

$$q \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1.$$

Una familia de matrices linealmente independientes que conmutan de orden d con el máximo número de matrices posible es $\mathfrak{F} = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq [d/2]\ ,\ [d/2] + 1 \leq j \leq d\} \cup \{I\}$. Una simple prueba de este teorema se puede ver en [M].

b) Sean $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ y $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ las álgebras de Lie de matrices triangulares superior estricta y triangulares superior repectivamente sobre un cuerpo k de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = \mu(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = n$ (ver §3.3(2)).

En el Ejemplo 3.1.2.(2) vimos que si k es álgebraicamente cerrado $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = n$. Este resultado es válido aún para cuerpos arbitrarios de característica cero, para probarlo será necesaria el Teorema 2.2.4.

c) Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m+1$ sobre un cuerpo de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{h}_m) = m+2$ y una representación fiel de dimensión $m+2$ es $\pi_m : \mathfrak{h}_m \to \mathfrak{gl}(m+2, \mathrm{k})$ definida por

$$\pi_m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i X_i + \sum_{i=1}^{m} y_i Y_i + zZ\right) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_m & z \\ & & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_m \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La demostración de que $\mu(\mathfrak{h}_m) \geq m+2$ se encuentra en §3.3.

d) La siguiente tabla contiene los valores de $\mu(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$,

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mu(\mathfrak{g})$
A_n , $n \geq 1$	$(n+1)^2 - 1$	$n+1$
B_2	10	4
B_n , $n \geq 3$	$2n^2 + n$	$2n+1$
C_n , $n \geq 3$	$2n^2 + n$	$2n$
D_n , $n \geq 4$	$2n^2 - n$	$2n$

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mu(\mathfrak{g})$
E_6	78	27
E_7	133	56
E_8	248	248
F_4	52	26
G_2	14	7

(ver [BW]).

e) Sea $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ e I_i ideales simples de $\mathfrak{g}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{r} \mu(I_i)$ (ver [BW]).

f) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = 2\mu(\mathfrak{g})$.

Demostración. Se sabe que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ entonces $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ es un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$. Por los puntos 2e), 1c) tenemos

$$2\mu(\mathfrak{g}) = \mu(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \leq \mu(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}).$$

Como $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ es isomorfa a $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ tenemos por 1c) que $\mu(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \leq 2\mu(\mathfrak{g})$. Por lo tanto $\mu(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = 2\mu(\mathfrak{g})$. □

g) La siguiente tabla contiene los valores de $\mu(\mathfrak{g})$ para ciertas álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$

	$\mathfrak{sl}(n+1)$	$\mathfrak{so}(3)$	$\mathfrak{so}(2n+1)$	$\mathfrak{sp}(2n)$	$\mathfrak{so}(2n)$
n	$n \geq 1$	1	$n \geq 3$	$n \geq 3$	$n \geq 4$
$\dim \mathfrak{g}$	$(n+1)^2 - 1$	3	$2n^2 + n$	$2n^2 + n$	$2n^2 - n$
$\mu(\mathfrak{g})$	$n+1$	3	$2n+1$	$2n$	$2n$

Demostración. Dado que $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ es alguna de las álgebras de Lie simples clásicas sobre $\mathbb{C}$, tenemos que $\mu(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ es algún valor de la tabla dada en 2d). Por el punto 1c) y, como la representación canónica de $\mathfrak{g}$ es una representación fiel, tenemos $\mu(\mathfrak{g}) = \mu(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$.

En el caso del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, una prueba sencilla es la dada en el Ejemplo 3.1.2(1) y es válida sobre cualquier cuerpo, en particular para $\mathbb{R}$. □

h) Sea $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $2m+1$ y sea $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$, entonces $\mu(\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = 2m+3$. Cf. resultado 2.e).

Demostración. Si $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})$ es el álgebra de Lie de Heisenberg sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2m+1$, es fácil ver que $\mathfrak{h}_m(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ es un álgebra de Lie real isomorfa a $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. En el siguiente capítulo probaremos que $\mu(\mathfrak{h}_m(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]/(t^2+1)) = 2m+3$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = 2m+3$. □

i) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme tal que satisface alguna de las siguientes condiciones:

   i) $\mathfrak{g}'$ abeliana.

   ii) $\dim \mathfrak{g} < 10$.

   Entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ (ver [B2]).

3. **Cotas para $\mu(\mathfrak{g})$ de ciertas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$**

a) Sea $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r \oplus \mathbb{C}^l$ un álgebra de Lie reductiva sobre $\mathbb{C}$ e I_i ideales simples de $\mathfrak{g}$, entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu(\mathfrak{g}') + \mu(\mathbb{C}^{l-r})$. Donde $\mu(\mathbb{C}^{l-r}) = \lceil 2\sqrt{l-r-1} \rceil$ si $l-r > 1$ y $\mu(\mathbb{C}^{l-r}) = 0$ en otro caso (ver §3.3(3a)).

b) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq 1 + (\dim \mathfrak{g})^k$, ver observación después de la prueba del Teorema §2.1.3.

c) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente que satisface alguna de las siguientes condiciones:

   i) $\dim \mathfrak{g} < 8$.

   ii) $\mathfrak{g}$ es k-pasos nilpotente con $k < 4$.

   iii) $\mathfrak{g}$ es $\mathbb{Z}$-graduada.

   Entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$ (ver [B1]).

d) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme sobre un cuerpo de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{g}) \geq \dim \mathfrak{g}$ (ver [Be]).

e) Existe un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión $n = 11$ tal que $\mu(\mathfrak{g}) > \dim \mathfrak{g} + 1$ (ver [Be])

3.3. Demostraciones

1. b) Sin pérdida de generalidad podemos pensar a $\mathfrak{g}$ como una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k})$.

   Veamos que $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}) \leq \mu(\mathfrak{g})$. Sean (π, V) una representación de fiel de $\mathfrak{g}$ e $I \in \mathfrak{gl}(V)$ el operador identidad. Como $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ tenemos que $I \notin \pi(\mathfrak{g})$, definimos

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathfrak{g} \oplus \mathrm{k} &\to \mathfrak{gl}(V) \\ (X, a) &\mapsto \pi(X) + aI \ . \end{aligned}$$

Es fácil ver que (π_1, V) es una representación de $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}$ y, dado que $I \notin \pi(\mathfrak{g})$, (π_1, V) es una representación es fiel. Entonces $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}) \leq \mu(\mathfrak{g})$.

2. b) Probaremos primero que $\mu(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = n$. Dado que una representación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ es la identidad tenemos que $\mu(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) \leq n$.

Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ y supongamos que $\dim V = d < n$. Por el Teorema 2.2.4 podemos suponer que (π, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$, pues es un álgebra de Lie nilpotente y $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = \mathrm{k}\{E_{1n}\}$. Luego, por el Teorema de Engel (ver §1.3.4), $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ es isomorfa a una subálgebra de Lie de $\mathfrak{n}(d, \mathrm{k})$. Entonces

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{d(d-1)}{2},$$

esto es una contradicción dado que $d < n$.

Nos falta probar que $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = n$. De la misma forma que para el caso $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$, podemos concluir que $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) \leq n$.

Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$. Como $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})' = \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ entonces $(\pi|_{\mathfrak{n}(n,\mathrm{k})}, V)$ es una representación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$, por lo tanto $\dim V \geq n$.

c) Para probar que $\mu(\mathfrak{h}_m) \geq m + 2$ usaremos los siguientes resultados,

Lema 3.3.1. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y F una forma bilineal no degenerada de V tal que V_1 es un subespacio de V, F-isotrópico. Entonces* $\dim V_1 \leq \frac{\dim V}{2}$.

Una sencilla prueba de este lema se puede consultar en [GHW] (ver §2.1.3).

Proposición 3.3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{h}_m$ tal que $Z \notin \mathfrak{g}$. Entonces* $\dim \mathfrak{g} \leq m$.

Demostración. Es claro que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) \cap \mathfrak{g} = \{0\}$ pues $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) = \mathrm{k}\{Z\}$. Entonces existe un subespacio U de $\mathfrak{h}_m$ tal que $\mathfrak{h}_m = \mathfrak{g} \oplus U \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m)$. Sean $W = \mathfrak{g} \oplus U$ y $F : W \times W \to \mathrm{k}$ la aplicación tal que para todo $X, Y \in W$, $[X, Y] = F(X, Y)Z$. Es fácil verificar que F es una forma bilineal. Veamos que es no degenerada, sea $X_0 \in W$ tal que para todo $X \in W$, $F(X_0, X) = 0$ es decir $[X_0, X] = 0$. Por lo tanto $[X_0, v] = 0$ para todo $v \in \mathfrak{h}_m$ pues $v = X + kZ$ para algún $k \in \mathrm{k}$ y $X \in W$. Luego $X_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m)$ entonces $X_0 = 0$ y como $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{h}_m$, es claro que es un subespacio F-isotrópico de W. Por lo tanto, por el Lema 3.3.1, $\dim \mathfrak{g} \leq \frac{\dim W}{2} = m$. □

A continuación probaremos que $\mu(\mathfrak{h}_m) \geq m + 2$.

Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{h}_m$ de dimensión finita. Veamos que $\dim V \geq m + 2$. Dado que $\mathfrak{h}_m$ es una subálgebra de Lie nilpotente y $\mathfrak{h}'_m = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m)$, por la Proposición 2.2.4, podemos considerar a (π, V) como una nilrepresentación fiel. Sean $0 \neq v \in V$ tal que $\pi(Z)v \neq 0$ y

$$\begin{aligned} F_v : \mathfrak{h}_m &\to V \\ X &\mapsto \pi(X)v\ . \end{aligned}$$

Como (π, V) es una representación, es fácil verificar que F_v es una transformación lineal y $\ker F_v$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}_m$. Por la elección de v, es claro que $\ker F_v \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) = 0$.

Entonces $[\ker F_v, \ker F_v] = 0$, es decir que $\ker F_v$ es una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{h}_m$. Además,

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{h}_m &= \dim \ker F_v + \dim \operatorname{im} F_v\\ 2m+1 &= \dim \ker F_v + \dim \operatorname{im} F_v.\end{aligned}$$

Entonces $\dim V \geq \dim \operatorname{im}(F_v) \geq m+1$ pues, por la Proposición 3.3.2 $\dim \ker F_v \leq m$. Veamos que $v \notin im(F_v)$, para ello supongamos lo contrario. Es decir, existe $X_0 \in \mathfrak{h}_m$ tal que $F_v(X_0) = v$, por lo tanto $\pi(X_0)v = v \neq 0$. Pero esto contradice el hecho que (π, V) es una nilrepresentación, entonces $v \notin \operatorname{im} F_v$. Luego $\dim V \geq \dim \operatorname{im}(F_v) + 1 \geq m+2$.

3. a) Supongamos $r \leq l$ entonces $\mathfrak{g} = (I_1 \oplus \mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus (I_r \oplus \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{l-r}$. Luego, por los puntos 1a), 1c) y 2d)

$$\begin{aligned}\mu(\mathfrak{g}) &\leq \sum_{i=1}^{r} \mu(I_i \oplus \mathbb{C}) + \mu(\mathbb{C}^{l-r})\\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \mu(I_i) + \mu(\mathbb{C}^{l-r})\\ &= \mu(\oplus_{i=1}^{r} I_i) + \mu(\mathbb{C}^{l-r})\\ &= \mu(\mathfrak{g}') + \mu(\mathbb{C}^{l-r}).\end{aligned}$$

Si $r \geq l$, $\mu(\mathbb{C}^{l-r}) = 0$ y $\mathfrak{g}$ puede ser embebido en $I_1 \oplus \cdots \oplus I_r \oplus \mathbb{C}^r$. De la misma forma que antes, $\mu(\mathfrak{g}) \leq \sum_{i=1}^{r} \mu(I_i \oplus \mathbb{C})$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu(\mathfrak{g}') = \mu(\mathfrak{g}') + \mu(\mathbb{C}^{l-r})$.

Capítulo 4

Álgebras de Lie de corrientes en una variable asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg

4.1. Preliminares y resultado principal

Sean k un cuerpo de característica cero, $\mathrm{k}[t]$ el anillo de polinomios en una variable, $p \in \mathrm{k}[t]$ un polinomio no nulo y $d = \deg(p)$. Sabemos que $\mathrm{k}[t]/(p)$ es un álgebra asociativa, conmutativa con unidad y que $\dim \mathrm{k}[t]/(p) = d$. Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre k de dimensión $2m+1$. Definimos el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ como el k-espacio vectorial

$$\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$$

con la estructura de álgebra de Lie dada por $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$ con $X, Y \in \mathfrak{h}_m$ y $a, b \in \mathrm{k}[t]/(p)$ (ver detalles abajo en §4.2). Es claro que $\dim \mathfrak{h}_{m,p} = (2m+1)d$.

Las k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ son las *álgebras Lie de corrientes polinomiales en una variable* asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_m$. En la §4.2 presentamos una breve introducción al tema de álgebras Lie de corrientes. El conjunto de k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ constituye una amplia familia de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes que contiene, a su vez, dos subfamilias que queremos destacar:

Álgebras de Lie corrientes truncadas de Heisenberg. Estas son las correspondientes al caso en que $p = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Las k-álgebras de Lie de $\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(t^n)$ son conocidas como las *álgebras de Lie de corrientes truncadas* asociadas a $\mathfrak{g}$, estas álgebras de Lie aparecen ligadas a las *Strong Macdonald Conjetures*. Algunas referencias que tratan estos temas son por ejemplo [FGT], [HW], [Ku], [Mac], [T], etc.

Álgebras de Lie de Heisenberg sobre extensiones finitas de k. Estas son las correspondientes al caso en que p es un polinomio irreducible. En este caso $K_p = \mathrm{k}[t]/(p)$ es un cuerpo que es una extensión finita de k y $\mathfrak{h}_{m,p}$ es también una K-algebra de Lie (ver §1.2.7). En este caso, la K_p-álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ resulta isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg sobre el cuerpo K_p. Por lo tanto la familia de k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ contiene las k-álgebras de Lie que resultan de restringir los escalares a k en álgebras de Lie de Heisenberg sobre extensiones finitas de k.

Este capítulo está dedicado a demostrar el principal aporte de esta tesis,

Teorema 4.1.1. *Sean* k *un cuerpo de característica cero,* k$[t]$ *el álgebra de polinomios y* $\mathfrak{h}_m$ *el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión* $2m+1$. *Entonces para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y todo polinomio no nulo* $p \in$ k$[t]$ *se tiene*

$$\mu\big(\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil .$$

La prueba de este teorema será dividida en dos partes. En la primera de ellas (ver §4.3), construiremos para cada $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq d$ una nilrepresentación fiel $\pi_{a,b}$ de dimensión $md + a + b$. Obtendremos así una familia de nilrepresentaciones fieles entre las cuales habrá una de dimensión $md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. En la segunda parte (ver §4.4), probaremos que $\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \geq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$.

4.2. Álgebras de Lie de corrientes

4.2.1. Introducción

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y A un álgebra asociativa y conmutativa, se puede definir en $\mathfrak{g} \otimes A$ un corchete de la siguiente manera

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A.$$

En la Proposición 4.2.1, probaremos que este corchete define una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g} \otimes A$. Esta álgebra de Lie es conocida como el *álgebra de Lie de corrientes* asociada a $\mathfrak{g}$ y A.

Las álgebras de Lie de corrientes aparecen al considerar álgebras de funciones sobre alguna variedad con valores en un álgebra de Lie. El estudio de estas álgebras de Lie tienen origen en diversos e importantes problemas provenientes, generalmente, de la física y la geometría. Por ejemplo en los trabajos [He], [LR], [Ro],[GoR], etc., se estudian problemas asociados a deformaciones de álgebras; en [CM], [FL] se estudia la teoría de representaciones de álgebras de corrientes asociadas a álgebras de Lie semisimples, y problemas con origen en la geometría son considerados por los trabajos [FGT], [T], [Z], etc.

Esta sección está dedicada demostrar propiedades básicas de estas álgebras de Lie.

4.2.2. Propiedades básicas

Esta primera proposición muestra que el corchete definido anteriormente en $\mathfrak{g} \otimes A$ da una estructura de álgebra de Lie sobre k.

Proposición 4.2.1. *Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie y* A *un álgebra asociativa y conmutativa. Entonces* $\mathfrak{g} \otimes A$ *es un álgebra de Lie sobre* k *con corchete*

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A.$$

Demostración. Utilizando la propiedad universal del producto tensorial se puede probar, sin dificultad, que el corchete dado por la proposición está bien definido y es bilineal en $\mathfrak{g} \otimes A$.

Verifiquemos que $[Z,Z]=0$ para todo $Z\in\mathfrak{g}\otimes A$, por la antisimetría del corchete en $\mathfrak{g}$ y dado que A es conmutativa tenemos

$$[X\otimes a, Y\otimes b] = -[Y\otimes b, X\otimes a]. \tag{4.1}$$

Sea $Z\in\mathfrak{g}\otimes A$ entonces existen $X_i\in\mathfrak{g}$, $a_i\in A$ tal que $Z=\sum_{i=1}^{r} X_i\otimes a_i$. Por la linealidad del corchete definido en $\mathfrak{g}\otimes A$ tenemos que

$$\begin{aligned}[Z,Z] &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}[X_i,X_j]\otimes a_ia_j\\ &= \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r}[X_i,X_j]\otimes a_ia_j + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{i-1}[X_i,X_j]\otimes a_ia_j\ ,\end{aligned}$$

reordenando el segundo témino de la suma, usando (4.1) y el hecho que A es un álgebra conmutativa obtenemos $[Z,Z]=0$.

Falta probar la identidad de Jacobi, para ello es suficiente verificar que

$$[X\otimes a,[Y\otimes b, Z\otimes c]] + [Z\otimes c,[X\otimes a, Y\otimes b]] + [Y\otimes b,[Z\otimes c, X\otimes a]] = 0$$

para todo $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$, $a,b,c\in\mathfrak{a}$. Por definición de $[,]$ en $\mathfrak{g}\otimes A$ tenemos que

$$[X\otimes a,[Y\otimes b, Z\otimes c]] = [X,[Y,Z]]\otimes a(bc) \tag{4.2}$$
$$[Z\otimes c,[X\otimes a, Y\otimes b]] = [Z,[X,Y]]\otimes c(ab) \tag{4.3}$$
$$[Y\otimes b,[Z\otimes c, X\otimes a]] = [Y,[Z,X]]\otimes b(ca) \tag{4.4}$$

si sumamos (4.2), (4.3) y (4.4), dado que A es un álgebra asociativa y conmutativa y por la identidad de Jacobi obtenemos $([X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]])\otimes abc=0$. □

Es claro, que si A,B,C son álgebras asociativas y conmutativas tales que $A\simeq B\oplus C$, entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g}\otimes A$ es isomorfa al álgebra de Lie $(\mathfrak{g}\otimes B)\oplus(\mathfrak{g}\otimes C)$. Además, si I es un ideal de A entonces $\mathfrak{g}\otimes I$ es un ideal de $\mathfrak{g}\otimes A$. Luego, es fácil ver que el álgebra de Lie $(\mathfrak{g}\otimes A)/(\mathfrak{g}\otimes I)$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{g}\otimes A/I$.

Combinando estas dos observaciones con el Teorema chino del resto obtenemos el siguiente teorema,

Teorema 4.2.2. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y A un álgebra asociativa con unidad y conmutativa. Sean $I_1,\dots,I_n$ ideales de A tales que $I_i+I_j=A$ para todo $i\neq j$. Entonces*

$$\mathfrak{g}\otimes\big(A/\cap_{i=1}^{n} I_i\big)\simeq\big(\mathfrak{g}\otimes A/I_1\big)\oplus\cdots\oplus\big(\mathfrak{g}\otimes A/I_n\big).$$

Por ejemplo, un caso importante en el desarrollo de la Sección 4.4 es: Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $p\in \mathrm{k}[t]$ no nulo y $A=\mathrm{k}[t]/(p)$. Si $p=(t-b_1)^{d_1}\dots(t-b_q)^{d_q}$ con b_i distintos, por el Teorema 4.2.2

$$\mathfrak{g}\otimes \mathrm{k}[t]/(p)\simeq\bigoplus_{i=1}^{q}\mathfrak{g}\otimes \mathrm{k}[t]/\big((t-b_i)^{d_i}\big). \tag{4.5}$$

Dado que el álgebra $\mathrm{k}[t]/\big((t-b_i)^{d_i}\big)$ es isomorfa al álgebra $\mathrm{k}[t]/\big(t^{d_i}\big)$ la ecuación (4.5), dice que

$$\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(p) \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/\big(t^{d_i}\big). \tag{4.6}$$

Si p no es de la forma anterior, consideremos K una extensión de k que contenga las raíces de p. Es decir, $p = (t-b_1)^{d_1} \dots (t-b_r)^{d_r}$ con $b_i \in K$ distintos y como $\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \otimes_{\mathrm{k}} K$ es un álgebra de Lie sobre K isomorfa a $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K[t]/(p)$ obtenemos

$$\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \otimes_{\mathrm{k}} K \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes K[t]/\big((t-b_i)^{d_i}\big). \tag{4.7}$$

Del mismo modo que en (4.6), obtenemos a partir de (4.7) que

$$\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \otimes_{\mathrm{k}} K \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes K[t]/\big(t^{d_i}\big). \tag{4.8}$$

Observación Si A es un álgebra asociativa y conmutativa con unidad podemos pensar a k dentro de A mediante la identificación $f : \mathrm{k} \to A$ definida por $f(k) = k1_A$. Por lo tanto podemos pensar que $M(n, \mathrm{k}) \subseteq M(n, A)$. Pero $M(n, A)$ es el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, A)$ con el corchete definido en el Ejemplo 1.2.2(2). De este modo podemos pensar a $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k}) \subset \mathfrak{gl}(n, A)$ y si $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$ podemos pensar en el A-módulo generado por $\mathfrak{g}$ dentro de $\mathfrak{gl}(n, A)$. Concluimos esta sección demostrando el siguiente Teorema.

Teorema 4.2.3. *Sea A un álgebra asociativa y conmutativa con unidad y sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$. Si $\mathfrak{g}_A$ es el A-módulo generado por $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{gl}(n, A)$, entonces $\mathfrak{g}_A$ es un álgebra de Lie sobre* k *isomorfa a el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A$.*

Para su prueba necesitaremos dos resultados previos,

Proposición 4.2.4. *Sean A un álgebra asociativa con unidad, M un A-módulo libre con base B y M_0 el espacio vectorial generado por B sobre* k. *Si B' es una base de M_0 entonces B' es una base del A-módulo M.*

Demostración. Como B' es un conjunto generador de M_0 entonces $B \subseteq \mathrm{k}B'$, por lo tanto B' es un conjunto generador de M como A-módulo.

Veamos que B' es linealmente independiente en el A-módulo M. Sea J un conjunto finito de índices tal que $v'_j \in B'$ para todo $j \in J$ y

$$\sum_{j \in J} a_j v'_j = 0 \tag{4.9}$$

con $a_j \in A$. Dado que B es una base de M_0, para cada $j \in J$ existen únicos $k_{ij} \in \mathrm{k}$ tal que

$$v'_j = \sum_{i \in I_j} k_{ij} v_i \ , \tag{4.10}$$

con $v_i \in B$ para todo $i \in I_j$, e I_j un conjunto finito de índices. Sea $m = \text{máx}\{i \in I_j : \forall \;\; j \in J\}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $J = \{1, \ldots, n\}$. Entonces las columnas $\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{pmatrix}$ son linealmente independientes sobre k, para todo $j = 1, \ldots, n$, pues B' es k-linealmente independiente en M_0. Luego la matriz $C = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_{m1} & k_{m2} & \ldots & k_{mn} \end{pmatrix}$ tiene rango n sobre k. Entonces, dado que $\mathrm{k} \subseteq A$, el rango de C es n sobre A es decir que las columnas de C son linealmente independientes sobre A. Por lo tanto, la ecuación (4.9) tiene solución trivial. □

Es sabido que $V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ es un A-módulo a derecha pues A es un A-módulo a derecha. Además, A es un A-módulo a izquierda, pero no siempre es cierto que $V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ es un A-módulo a izquierda. Dado que $\mathrm{k} \subseteq \mathfrak{z}(A)$, se puede verificar que la aplicación $\cdot : A \times (V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A) \to V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ tal que $b \cdot v \otimes a = v \otimes ba$ para todo $a, b \in A$, $v \in V_0$, define una estructura de A-módulo a izquierda en $V_0 \otimes A$.

Proposición 4.2.5. *Sean A un álgebra asociativa con unidad y M un A-módulo a izquierda libre con base B. Sea M_0 el espacio vectorial generado por B sobre* k*, V_0 un subespacio de M_0 y V el A-módulo a izquierda generado por V_0. Entonces $V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ es isomorfo a V como A-módulo a izquierda.*

Demostración. Sea $F : V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A \to V$ tal que $F(v \otimes a) = av$ para todo $a \in A, v \in V$. Se puede ver fácilmente que F es un homomorfismo suryectivo de A-módulos a izquierda. Veamos que F es inyectiva, sea $\widetilde{B}$ una base de V_0, por el Proposición 4.2.4 $\widetilde{B}$ es una base de V como A-módulo. Luego cada $u \in V_o \otimes_{\mathrm{k}} A$ se puede escribir de manera única como $u = \sum_{i \in I}^{r} v_i \otimes a_i$ con $v_i \in \widetilde{B}, a_i \in A$ e I un conjunto finito de índices. Entonces, si $u \in \ker F$ tenemos que $0 = F(u) = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i$. Por lo tanto $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$. □

Demostración del Teorema 4.2.3. Por la Proposición 4.2.1, $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A$ es un álgebra de Lie sobre k. Dado que $\mathfrak{g}_A$ es el A-módulo generado por $\mathfrak{g}$ y $\mathrm{k} \subseteq A$, por la observación anterior, podemos pensar a $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, A)$. Además, es claro que $\mathfrak{g}_A$ es un álgebra de Lie sobre k pues $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre k.

Por la Proposición 4.2.5, $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A$ y $\mathfrak{g}_A$ son A-módulos a izquierda isomorfos un isomorfismo entre ellos es $F : \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A \to \mathfrak{g}_A$ tal que $X \otimes a = aX$ para todo $X \in \mathfrak{g}, a \in A$.

Nos falta ver que F es un homomorfismo de álgebras de Lie sobre k. Para ello es suficiente probar que $F([X \otimes a, Y \otimes b]) = [F(X \otimes a), F(Y \otimes b)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, $a, b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} F([X \otimes a, Y \otimes b]) &= F([X, Y] \otimes ab) \\ &= ab[X, Y] \\ &= ab(XY - YX) \\ &= (aX)(bY) - (bY)(aX) \\ &= [aX, bY] \\ &= [F(X \otimes a), F(Y \otimes b)]. \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

4.2.3. Álgebras de Lie de corrientes asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg

Terminamos esta sección introduciendo las álgebras de Lie de corrientes asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg, las cuales serán objeto de estudio en lo que queda del capítulo.

Definición 4.2.6. Sea $p \in \mathrm{k}[t]$ no nulo y $m \in \mathbb{N}$, definimos el álgebra de Lie de corriente $\mathfrak{h}_{m,p}$ asociada al álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_m$ como el producto tensorial $\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$.

Es claro que $\mathfrak{h}_{m,p}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión $(2m+1)d$ con $d = \deg(p)$.

Una base de $\mathfrak{h}_{m,p}$ se puede obtener de la siguiente forma: Sea $\{1, t, \dots, t^{d-1}\}$ la base de $\mathrm{k}[t]/(p)$ y $B_m = \{X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z\}$ dada en el Ejemplo 1.2.9(2). Denotemos por $X_i^j = X_i \otimes t^j, Y_i^j = Y_i \otimes t^j, Z^j = Z \otimes t^j$. Por lo tanto una base para $\mathfrak{h}_{m,p}$ es

$$B = \left\{X_i^j \ , \ Y_i^j \ , \ Z^j : 1 \leq i \leq m \,; 0 \leq j \leq d-1\right\},$$

es fácil verificar que $[X_i^h, Y_r^j] = Z^{h+j}$ si $h + j \leq d-1$, $r = i$ y cero si $i \neq r$.

Veamos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_{m,p}) = \mathrm{k}\left\{Z^j : j = 0, \dots, d-1\right\}$. Es claro, por la definición del corchete, que $\mathrm{k}\left\{Z^j : j = 0, \dots, d-1\right\} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_{m,p})$. Sea

$$Z = \sum_{j=0}^{d-1}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}X_i^j + \sum_{i=1}^{m} y_{ij}Y_i^j + z_jZ^j\right) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_{m,p})$$

tal que $x_{ij}, y_{ij}, z_j \in \mathrm{k}$, es fácil ver que $0 = [Z, Y_{i_0}^0] = \sum_{j=0}^{d-1} x_{i_0j}Z^j$ para cada i_0, por lo tanto $x_{i_0j} = 0$ para todo j. Del mismo modo $0 = [Z, X_{i_0}^0] = \sum_{j=0}^{d-1} y_{i_0j}Z^j$, es decir $y_{i_0j} = 0$ para todo j. Entonces $Z = \sum_{j=0}^{d-1} z_jZ^j \in \mathrm{k}\left\{Z^j : j = 0, \dots, d-1\right\}$.

4.3. Nilrepresentaciones fieles de $\mathfrak{h}_{m,p}$

4.3.1. Una primera representación de $\mathfrak{h}_{m,p}$

Una manera natural de obtener representaciones fieles de las álgebras de Lie de corrientes $\mathfrak{g} \otimes A$ es la siguiente: Sean (π, V_1) una representación fiel de $\mathfrak{g}$ y (ρ, V_2) una representación inyectiva de A, es decir ρ es una aplicación k-lineal y $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ para todo $a, b \in A$. Entonces la aplicación $\pi \otimes \rho : \mathfrak{g} \otimes A \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ definida por $(\pi \otimes \rho)(X \otimes a) = \pi(X) \otimes \rho(a)$ es una representación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$. Por lo tanto

$$\mu(\mathfrak{g} \otimes A) \leq \mu(\mathfrak{g}) \dim_{\mathrm{k}} A,$$

observar que 3.2(1c) es un caso particular de esta desigualdad.

Si (π, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$ entonces $(\pi \otimes \rho, V_1 \otimes V_2)$ en una nilrepresentación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$. Esto nos permite construir una primera nilrepresentación fiel de $\mathfrak{h}_{m,p}$, a partir de la nilrepresentación fiel

$$\pi_m\left(\sum_{i=1}^m x_iX_i+\sum_{i=1}^m y_iY_i+zZ\right)=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_m & z \\ & & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_m \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{m+2}$$

de $\mathfrak{h}_m$ descrita en 3.3(2c) y la representación $\rho:\mathrm{k}[t]/(p)\to\mathrm{End}(\mathrm{k}^d,\mathrm{k})$ definida por $\rho(t^j)=P_0^j$, con

$$P_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{d-1} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

la matriz en forma racional de p. Es fácil ver que ρ es la dual de la representación regular de $\mathrm{k}[t]/(p)$ y por lo tanto es una representación inyectiva de $\mathrm{k}[t]/(p)$. Por otra parte, para cada $j=0,\dots,d-1$, la representación matricial de $(\pi_m\otimes\rho)\left(\sum_{i=1}^m x_{ij}X_i^j+\sum_{i=1}^m y_{ij}Y_i^j+z_jZ^j\right)$ en términos de la base canónica del producto tensorial es

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1P_0^j & \dots & x_mP_0^j & z_jP_0^j \\ & & & & y_1P_0^j \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_mP_0^j \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto hemos construido una representación fiel de $\mathfrak{h}_{m,p}$ de dimensión $(m+2)d=md+2d$.

4.3.2. Las representaciones $\pi_{a,b}$ de $\mathfrak{h}_{m,p}$

Para comenzar, observemos que la acción de $\pi_m\otimes\rho$ se puede expresar de la siguiente manera. Para cada $i=1,\dots,m$, sean $\overline{A}_i,\overline{B}_i,\overline{P}$ las siguientes matrices de orden $(m+2)d$

$$\overline{A}_i=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & \dots & I & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{5}{c|}{0} & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{5}{c|}{0} & 0 \end{array}\right]\qquad \overline{B}_i=\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & 0 & I \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\qquad \overline{P}=\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline & P_0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & P_0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde I es la matriz identidad de orden $m+2$. La representación matricial de $\pi_m\otimes\rho$ en términos de la base canónica del producto tensorial está dada por

$$(\pi_m\otimes\rho)(X_i\otimes q)=\overline{A}_iq(\overline{P})\qquad(\pi_m\otimes\rho)(Y_i\otimes q)=q(\overline{P})\overline{B}_i\qquad(\pi_m\otimes\rho)(Z\otimes q)=\overline{A}_1q(\overline{P})\overline{B}_1,$$

es decir $(\pi_m\otimes\rho)(X_i^j)=\overline{A}_i\overline{P}^j$, $(\pi_m\otimes\rho)(Y_i^j)=\overline{P}^j\overline{B}_i$, $(\pi_m\otimes\rho)(Z^j)=\overline{A}_1\overline{P}^j\overline{B}_1$, para todo $i=1,\dots,m$ y $j=0,\dots,d-1$. Como ya dijimos, estas representaciones son fieles de dimensión $(m+2)d=md+2d$, bastante mayor que $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$.

A continuación construiremos una familia $\{\pi_{a,b}\}$ de nilrepresentaciones fieles donde los parámetros a y b son naturales arbitrarios que cumplen $ab \geq d$. La representación $\pi_{a,b}$ tendrá dimensión $md + a + b$ y dado que

$$\text{mín}\{a + b : a, b \in \mathbb{N},\, ab \geq d\} = \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil \tag{4.12}$$

obtendremos una nilrepresentación fiel de dimensión igual a la establecida por el Teorema 4.1.1.

Fijamos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq d$ definimos la matriz A de orden $a \times d$ y la matriz B de orden $d \times b$ por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = d - (b - j)a; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Por ejemplo, si $d \geq a$ tenemos $A = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{a} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{d-a} \end{pmatrix}$ y en particular si $d = 6$, $a = 2$ y $b = 3$

obtenemos $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para cada $i = 1, \ldots, m$ sean

$$\begin{array}{l} \text{tamaño } a\{ \\ \\ A_i = \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & \ldots & A & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{5}{c|}{0} & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{5}{c|}{0} & 0 \\ \hline \end{array}}_{m+2 \text{ bloques}} \qquad B_i = \left.\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & 0 & B \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right\} \begin{array}{l} m+2 \\ \text{bloques} \end{array} \qquad P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} P_0 & & & \\ & P_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

donde las matrices A y B están ubicadas en el $(i+1)$-ésimo bloque de A_i y B_i respectivamente. Las matrices A_i, B_i y P son de orden $md + a + b$.

Ahora definimos $\pi_{a,b} : \mathfrak{h}_{m,p} \to \mathfrak{gl}(md + a + b, \mathrm{k})$ la aplicación dada por

$$\pi_{a,b}(X_i \otimes q) = A_i\, q(P) \quad \pi_{a,b}(Y_i \otimes q) = q(P)\, B_i \quad \pi_{a,b}(Z \otimes q) = A_1\, q(P)\, B_1; \tag{4.14}$$

Observar la analogía con $\pi_m \otimes \rho$. Queremos probar que $\pi_{a,b}$ es una nilrepresentación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$. No es difícil ver que es representación, pero la inyectividad es más delicada. El siguiente lema es crucial y refleja la propiedad fundamental que tienen las matrices A y B elegidas en (4.13).

Lema 4.3.1. *Sea $q \in \mathrm{k}[t]$ no nulo tal que $Aq(P_0)B = 0$ entonces $q \in (p)$.*

Demostración. Es claro que $G = \{q \in \mathrm{k}[t] : Aq(P_0)B = 0\}$ es un subgrupo de $\mathrm{k}[t]$ con respecto a la suma y que $(p) \subseteq G$ (por ser p polinomio minimal de P_0).

Debemos probar que $(p) \supseteq G$. Sean $q \in G$ y $f, r \in \mathrm{k}[t]$ tales que $q = fp + r$ con $\deg r < d$. Dado que, (p) es ideal, $(p) \subseteq G$ y G es subgrupo, obtenemos $r \in G$. Probemos que $r = 0$. Sea $n = \deg r$ y r_n el coeficiente correspondiente al monomio de grado n.

Es fácil ver que

$$(P_0^j)_{ls} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = l + j \\ 0 & \text{si } s \neq l + j \end{cases} \tag{4.15}$$

para todo $1 \leq l \leq d - j$. Por la ecuación (4.15) y por la definición de A y B tenemos que

$$(AP_0^j B)_{l,s} = \begin{cases} 1 & \text{si } l + j = d - (b - s)a \\ 0 & \text{si } l + j \neq d - (b - s)a \end{cases} \tag{4.16}$$

para todo $1 \leq l \leq d - j$, recordemos que $1 \leq l \leq a$ y $1 \leq s \leq b$ por el orden de la matriz $AP_0^j B$.

Probaremos luego que para $j = n$ existen l_0, s_0 tales que $l_0 + n = d - (b - s_0)a$ con $1 \leq l_0 \leq \text{mín}\{a, d - n\}$ y $1 \leq s_0 \leq b$. Bajo esta condición y por la ecuación (4.16) obtenemos

$$(AP_0^j B)_{l_0,s_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j = 0, \ldots, n - 1 \end{cases}$$

entonces $0 = (Ar(P_0)B)_{l_0,s_0} = r_n$. Luego $r = 0$ y por lo tanto $q = fp$ como queríamos probar.

Veamos que para $j = n$ existen l_0, s_0 tales que $l_0 + n = d - (b - s_0)a$ con $1 \leq l_0 \leq \text{mín}\{a, d - n\}$ y $1 \leq s_0 \leq b$. Para esto es suficiente probar que existe $t_0 = 0, \ldots, b-1$ tal que $1 \leq d-n-t_0 a \leq a$. Sea $t_0 = \left\lceil \frac{d-n}{a} - 1 \right\rceil$ es claro que $t_0 \geq 0$. Como $d \leq ab$ entonces $\left\lfloor \frac{d-1}{a} \right\rfloor \leq b - 1$, luego $\left\lfloor \frac{d-n-1}{a} \right\rfloor \leq b - 1$ para todo $n = 0, \ldots, d - 1$. Se puede probar que para todo $x, y \in \mathbb{N}$ tenemos que $\left\lceil \frac{x}{y} - 1 \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{x-1}{y} \right\rfloor$, en particular $\left\lceil \frac{d-n}{a} - 1 \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{d-n-1}{a} \right\rfloor$. Por lo tanto

$$\frac{d-n}{a} - 1 \leq t_0 \leq \frac{d-n-1}{a},$$

sean $s_0 = b - t_0$ y $l_0 = d - n - t_0 a$. □

Observación Por el lema anterior si $Aq(P_0) = 0$ o $q(P_0)B = 0$ entonces $Aq(P_0)B = 0$, por lo tanto $q \in (p)$.

Teorema 4.3.2. *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq d$ y $\pi_{a,b} : \mathfrak{h}_{m,p} \to \mathfrak{gl}(md + a + b, \mathrm{k})$ la aplicación definida en* (4.14). *Entonces $\pi_{a,b}$ es una nilrepresentación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$.*

Demostración. Veamos primero que $\pi_{a,b}$ es una representación. Por la definición de las matrices A_i, B_i y P es fácil ver que $A_i q(P) B_i = A_1 q(P) B_1$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y para todo q. Luego

$$\begin{aligned} \pi_0\big([X_i \otimes t^j, Y_i \otimes t^{j'}]\big) &= \pi_0\big(Z \otimes t^{j+j'}\big) \\ &= A_1 P^{j+j'} B_1 \\ &= A_i P^{j+j'} B_i \\ &= A_i P^{j+j'} B_i - P^{j'} B_i A_i P^j \\ &= \big[\pi_0\big(X_i \otimes t^j\big), \pi_0\big(Y_i \otimes t^{j'}\big)\big] \ , \end{aligned}$$

para todo $j, j' = 0, \ldots, d-1$ y $\pi_0\big([X_i \otimes t^j, Y_{i'} \otimes t^{j'}]\big) = 0$ si $i \neq i'$. Por lo tanto $\big(\pi_{a,b}, \mathrm{k}^{md+a+b}\big)$ es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ y es fácil verificar que es una nilrepresentación de $\mathfrak{h}_{m,p}$.

Veamos que $\pi_{a,b}$ es inyectiva. Sea $W \in \mathfrak{h}_{m,p}$ y $x_j, y_j, z_j \in \mathrm{k}$ tal que

$$W = \sum_{i=1}^{m} X_i \otimes p_{i,x}(t) + \sum_{i=1}^{m} Y_i \otimes p_{i,y}(t) + Z \otimes p_z(t),$$

por la ecuación (4.14), $\pi_{a,b}(W) = \sum_{i=1}^{m} A_i p_{i,x}(P) + \sum_{i=1}^{m} p_{i,y}(P) B_i + A_1 p_z(P) B_1$. Si $\pi_{a,b}(W) = 0$, por la definición de A_i, B_i y P obtenemos que

$$A p_{i,x}(P_0) = p_{i,y}(P_0) B = A p_z(P_0) B = 0$$

para todo i. Luego por el Lema 4.3.1 y la observación de dicho lema obtenemos que $p_{i,x} = p_{i,y} = p_z = 0$ para cada i. Por lo tanto $\pi_{a,b}$ es una nilrepresentación fiel. □

Corolario 4.3.3. *Sea* k *un cuerpo de característica cero y sea* $p \in \mathrm{k}[t]$ *un polinomio no nulo de grado* d. *Entonces, para todo* $m \in \mathbb{N}$

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \leq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil.$$

Demostración. Por el teorema anterior para cada $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq d$ tenemos que

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \leq md + a + b.$$

Por la ecuación (4.12), $\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \leq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. □

4.4. La cota inferior de $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$

Si $p = (t-b_1)^{d_1} \ldots (t-b_q)^{d_q} \in \mathrm{k}[t]$ con $b_i \in \mathrm{k}$ distintos entonces, por la ecuación (4.6)

$$\mu\big(\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = \mu\left(\bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/\big(t^{d_i}\big)\right). \tag{4.17}$$

Si p no es de la forma anterior y K una extensión de k que contenga las raíces de p, por la ecuación (4.8) y 3.2(1c) tenemos que

$$\mu\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \geq \mu\left(\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K[t]/\big(t^{d_r}\big)\right). \tag{4.18}$$

En particular si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_m$ para obtener una cota inferior de $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$ es suficiente conocer una cota inferior de $\mu\left(\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_m \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/\big(t^{d_r}\big)\right)$.

Tomemos $p_r = t^{d_r}$ y $\mathfrak{h}_{m,p_r} = \mathfrak{h}_m \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p_r)$ el álgebra de Lie de corriente truncada de Heisenberg de dimensión $(2m+1)d_r$. Sea $B_r = \left\{X_i^j, Y_i^j, Z^j : 1 \leq i \leq m \text{ y } 0 \leq j \leq d_r\right\}$ la base de $\mathfrak{h}_{m,p_r}$ con la propiedad

$$\big[X_i^j, Y_{i'}^{j'}\big] = \begin{cases} Z^{j+j'} & \text{si } i = i' \text{ y } j + j' < d_r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Llamemos $X^j_{i,r} = \underbrace{(0,\ldots,X^j_i,\ldots,0)}_{q \text{ coord.}}$, $Y^j_{i,r} = \underbrace{(0,\ldots,Y^j_i,\ldots,0)}_{q \text{ coord.}}$, $Z^j_r = \underbrace{(0,\ldots,Z^j,\ldots,0)}_{q \text{ coord.}}$ donde X^j_i, Y^j_i, Z^j están ubicados en la r-ésima coordenada de $X^j_{i,r}, Y^j_{i,r}, Z^j_r$ respectivamente y sea $B = \left\{X^j_{i,r}, Y^j_{i,r}, Z^j_r : 1 \le r \le q \ , \ 1 \le i \le m \ , \ \ 0 \le j \le d_r\right\}$ la base de $\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$ obtenida a partir de B_r. Es fácil verificar que una base del centro es $\left\{Z^j_r : 1 \le r \le q \ , \ 0 \le j \le d_r\right\}$.

Observación. En lo que resta de este capítulo consideraremos a k como un cuerpo de característica cero, salvo mención alguna.

Teorema 4.4.1. *Si (π, V) es una representación fiel de $\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$ entonces*

$$\dim V \ge md + \left\lceil 2\sqrt{d}\right\rceil,$$

con $d = \sum_{r=1}^q d_r$. En particular $\mu\left(\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}\right) \ge md + \left\lceil 2\sqrt{d}\right\rceil$.

Para la prueba de este teorema daremos algunos resultados previos.

Lema 4.4.2. *Sea $X \in \bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$ y $X \notin \mathfrak{z}$ entonces existe $Y \in \bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$ tal que $[X,Y] = Z^{d_r-1}_r$ para algún $r = 1,\ldots,q$.*

Demostración. Sean $a^j_{i,r}, b^j_{i,r}, c^j_r \in$ k tales que $X = \sum_{r=1}^q \sum_{j=0}^{d_r-1}\left(\sum_{i=1}^m a^j_{i,r}X^j_{i,r} + \sum_{i=1}^m b^j_{i,r}X^j_{i,r} + c^j_r Z^j_r\right)$. Dado que no todos los $a^j_{i,r}, b^j_{i,r}$ son simultáneamente nulos, pues $X \notin \mathfrak{z}$, existe r tal que $a^j_{i,r} \neq 0$ (o $b^j_{i,r} \neq 0$) para algún i,j. Sean $j' = \min\{j : a^j_{i,r} \neq 0\}$ e $Y = \frac{1}{a^j_{i,r}} X^{d_r-1-j'}_{i,r}$ entonces $[X,Y] = Z^{d_r-1}_r$. □

Lema 4.4.3. *Sean $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$ tal que $Z^{d_r-1}_r \notin \mathfrak{g}$ para todo $r = 1,\ldots,q$ entonces*

$$\dim \mathfrak{g} \le md + \dim \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}$$

con $d = \sum_{r=1}^q d_r$.

Demostración. Sea $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}$, es claro que $Z^{d_r-1}_r \notin \mathfrak{z}_0$ para todo r. Sean $\widetilde{\mathfrak{z}}$ un complemento directo de $\mathfrak{z}_0$ en $\mathfrak{z}$ es decir $\mathfrak{z} = \widetilde{\mathfrak{z}} \oplus \mathfrak{z}_0$ y una funcional lineal $\alpha : \mathfrak{z} \to$ k tal que $\alpha \mid_{\mathfrak{z}_0} = 0$ y $\alpha(Z^{d_r-1}_r) \neq 0$. Sean $\mathfrak{g}_0$ un complemento directo de $\mathfrak{z}_0$ en $\mathfrak{g}$ y $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un complemento directo de $\oplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,d_r}$, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{z}_0$ y $\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r} = \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{z}_0 \oplus \widetilde{\mathfrak{z}}$ respectivamente. Definamos $V = \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}_0$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : V \times V &\to \text{k} \\ (X,Y) &\mapsto \alpha([X,Y]) \ , \end{aligned}$$

es claro que $\mathcal{B}$ es una función bilineal sobre k. Veamos que $\mathcal{B}$ es no degenerada, sea $0 \neq X \in V$, por el Lema 4.4.2 existe $Y \in \oplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,d_r}$ tal que $[X,Y] = Z^{d_r-1}_r$ para algún r. Entonces existe $\widetilde{Y} \in V$ tal que $[X,\widetilde{Y}] = Z^{d_r-1}_r$, luego $\mathcal{B}(X,\widetilde{Y}) \neq 0$. Es decir, $\mathcal{B}$ es una forma bilineal no degenerada.

Veamos que $\mathfrak{g}_0$ es $\mathcal{B}$-isotrópico. Sean $X,Y \in \mathfrak{g}_0$, dado que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $\mathfrak{z} = \left[\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}, \bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}\right]$ tenemos que $[X,Y] \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$. Por lo tanto $\mathcal{B}(X,Y) = 0$ para todo $X,Y \in \mathfrak{g}_0$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una forma bilineal no degenerada y $\mathfrak{g}_0$ es un subespacio $\mathcal{B}$-isotrópico de V entonces $\dim \mathfrak{g}_0 \le \frac{\dim V}{2} = md$, luego $\dim \mathfrak{g} \le md + \dim \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}$. □

El siguiente teorema es un resultado del álgebra lineal que probaremos en la sección 4.5.

Teorema 4.4.4. *Sea V un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita. Sea $\mathcal{T}$ un subespacio no nulo de operadores nilpotentes de* $\operatorname{End}(V)$ *que conmutan. Entonces existe un conjunto linealmente independiente $B = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ y una descomposición $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ tales que las aplicaciones $F_i : \mathcal{T} \to V$ definida por $F_i(T) = T(v_i)$ satisfacen*

(1) $F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *es inyectiva para todo $i = 1 \ldots s$;*

(2) $\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ *para todo $1 \leq i < j \leq s$;*

(3) $\mathcal{T}_j V \subset \operatorname{im} F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *para todo $1 \leq i < j \leq s$,*

Más aún, dado $\{T_1, \ldots, T_q\} \subseteq \mathcal{T}$ existe v_1 tal que $T_i(v_1) \neq 0$ para todo i. Además, sea $\{\widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T}_r\}$ una base de $\mathcal{T}_1$. Entonces el conjunto $\{\widetilde{T}_1(v_1), \ldots, \widetilde{T}_r(v_1), v_1, \ldots, v_s\}$ es linealmente independiente.

Observación: Por la condición (3) del teorema anterior la $\dim \mathcal{T}_j V \leq \dim \operatorname{im}(F_1 \mid_{\mathcal{T}_1})$ para todo $j = 1, \ldots, s$. Entonces por (1), $\dim \mathcal{T}_j \leq \dim \mathcal{T}_1$ para todo j. Por lo tanto, como $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ obtenemos que $\dim \mathcal{T} \leq sr = s \dim \mathcal{T}_1$ luego $\dim \mathcal{T} \leq s \dim(\operatorname{im} F_1)$.

Demostración. (Teorema 4.4.1.) Por el Teorema 2.2.4 podemos pensar a (π, V) como una nil-representación fiel de $\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$. Sea $\mathfrak{z}$ el centro de $\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$, entonces $\pi(\mathfrak{z})$ es una familia de endomorfismos nilpotentes de $\operatorname{End}(V)$ que conmutan. Más aún, como (π, V) es fiel, $\pi(Z)$ es no nulo para todo $Z \in \mathfrak{z}$ en particular $\pi\big(Z_r^{d_r-1}\big)$. Luego por el Teorema 4.4.4, existen vectores linealmente independientes $\{v_1, \ldots, v_s\}$ en V y una descomposición $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_s$ tal que $\pi\big(Z_r^{d_r-1}\big)v_1 \neq 0$. Sea

$$
\begin{aligned}
F : \bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r} &\to V \\
X &\mapsto \pi(X)v_1 \ ,
\end{aligned}
$$

dado que π es una representación es claro que F es una aplicación lineal y $\ker F$ es una subálgebra de Lie de $\bigoplus_{r=1}^q \mathfrak{h}_{m,p_r}$. Como $F\big(Z_r^{d_r-1}\big) \neq 0$ para todo r, por el Lema 4.4.3, tenemos que

$$\dim \operatorname{im} F + \dim \ker F \cap \mathfrak{z} \geq (m+1)d. \tag{4.19}$$

con $d = \sum_{r=1}^q d_r$.

Sea $W = \mathrm{k}\{v_1, \ldots, v_s\}$, siguiendo los pasos de la prueba del Teorema 4.4.4 se puede ver que $W \cap \operatorname{im} F = 0$. Como consecuencia $\dim V \geq \dim \operatorname{im} F + s$ luego por la ecuación (4.19)

$$\dim V + \dim \ker F \cap \mathfrak{z} \geq (m+1)d + s. \tag{4.20}$$

Dado que $F|_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{z} \longrightarrow V$ coincide con la aplicación F_1 del Teorema 4.4.4 tenemos que $d \leq s \dim(\operatorname{im} F|_{\mathfrak{z}})$. Luego por la ecuación (4.12)

$$\left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil \leq s + \dim\big(\operatorname{im} F|_{\mathfrak{z}}\big). \tag{4.21}$$

Combinando las ecuaciones (4.20) y (4.21) con $d = \dim \mathfrak{z} = \dim \ker F \cap \mathfrak{z} + \dim(\operatorname{im} F|_{\mathfrak{z}})$ nos queda que $\dim V \geq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. □

Teorema 4.4.5. *Sea* k *un cuerpo de característica cero y sea* $p \in \mathrm{k}[t]$ *un polinomio no nulo de grado* d*. Entonces, para todo* $m \in \mathbb{N}$

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) = md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil .$$

Demostración. Si k es un cuerpo que contiene todas la raíces de p entonces por la ecuación (4.17) y el Teorema 4.4.1, $\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \geq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. Si k no contiene todas las raíces de p, consideremos K una extensión de k que contenga las raíces de p. Por la ecuación (4.18) y el Teorema 4.4.1, $\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \geq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. Luego por el Corolario 4.3.3 obtenemos $\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) = md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. □

4.5. Apéndice: resultados de álgebra lineal

En esta sección probaremos el Teorema 4.4.4, para ello usaremos algunos resultados previos que demostramos a continuación. En esta tesis se ha asumido casi siempre que k es de característica cero, pero en esta sección basta asumir que k es infinito.

Proposición 4.5.1. *Sean* k *un cuerpo infinito,* V *un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita y* $\mathcal{F}$ *un subespacio no nulo de* $\mathrm{End}(V)$*. Si* $\{T_1, T_2, \dots, T_q\} \subseteq \mathcal{F}$ *y* $r = \text{máx}\{\dim \mathcal{F}v : v \in V\}$ *entonces existe* $v_1 \in V$ *tal que* $r = \dim \mathcal{F}v_1$ *y* $T_i(v_1) \neq 0$ *para todo* $i = 1, \dots, q$*.*

Demostración. La prueba la haremos por inducción en la cantidad de elementos de $\{T_1, T_2, \dots, T_q\}$. Sea $v' \in V$ tal que $r = \dim \mathcal{F}v'$, es claro que el lema se verifica para el caso $q = 0$.

Sea $\{T_1, \dots, T_q, T_{q+1}\} \subseteq \mathcal{F}$, por hipótesis inductiva existe $v_0 \in V$ tal que $r = \dim \mathcal{F}v_0$ y $T_i(v_0) \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, q$. Si $T_{q+1}(v_0) \neq 0$ tomamos $v_1 = v_0$. Supongamos que $T_{q+1}(v_0) = 0$, dado que $T_{q+1} \neq 0$ existe $v'' \in V$ tal que $T_{q+1}(v'') \neq 0$. Sea $B = \{\widetilde{T}_1(v_0), \dots, \widetilde{T}_r(v_0)\}$ una base de $\mathcal{F}v_0$ y A_t la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\{\widetilde{T}_1(v_0{+}tv''), \dots, \widetilde{T}_r(v_0{+}tv'')\}$ en una base de V. Para $t = 0$ la matriz A_t tiene un menor, $\widetilde{A}_t$ de orden r, con determinante no nulo. Sea $P(t) = \det(\widetilde{A}_t)$, existen a lo sumo $\deg(P)$ valores de $t \in \mathrm{k}$ tal que $P(t) = 0$. Dado que T_i son transformaciones lineales, podemos pensar a las coordenadas de $T_i(v_0 + tv'')$ como polinomios de grado menor o igual a uno, donde alguna de dichas coordenadas es distinta de cero pues $T_i(v_0) \neq 0$. Sea $P_i(t)$ una de las posibles coordenadas no nulas de $T_i(v_0 + tv'')$ y sea $Q(t) = (PP_0P_1 \dots P_q)(t)$. Como Q es un polinomio distinto de cero existe $t' \in \mathrm{k}$ tal que $Q(t') \neq 0$, por lo tanto $P(t') \neq 0$ y $P_i(t') \neq 0$ para todo i. Es decir $\dim \mathcal{F}(v_0 + t'v'') \geq r$ y $T_i(v_0 + t'v'') \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, q$. Por la elección de r tenemos que $\dim \mathcal{F}(v_0 + t_0v'') = r$ y $T_{q+1}(v_0 + t'v'') \neq 0$. □

Proposición 4.5.2. *Sean* k *un cuerpo infinito,* V *un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita y* $\mathcal{T}$ *un subespacio no nulo de* $\mathrm{End}(V)$*. Entonces existe un conjunto linealmente independiente* $B = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$ *y una descomposición* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ *con* $\mathcal{T}_i \neq 0$ *y tales que las aplicaciones* $F_i : \mathcal{T} \to V$ *definida por* $F_i(T) = T(v_i)$ *satisfacen*

(1) $F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *es inyectiva para todo* $i = 1 \dots s$*;*

(2) $\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$*;*

(3) $\mathcal{T}_j V \subset \mathrm{im}\, F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$*.*

Más aún, dado $\{T_1, \dots, T_q\} \subseteq \mathcal{T}$ *se puede elegir* v_1 *tal que* $T_i(v_1) \neq 0$ *para todo* $i = 1, \dots, q$.

Demostración. Sea $r = \text{máx}\{\dim \mathcal{T}v : v \in V\}$. Por el Proposición 4.5.1, existe $v_1 \in V$ tal que para cada i, $T_i(v_1) \neq 0$ y $r = \dim \mathcal{F}v_1$. Para la prueba procederemos por inducción en la dimensión de $\mathcal{T}$. Si la $\dim \mathcal{T} = 1$, tomamos $B = \{v_1\}$ y $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$ entonces $\ker F_1 = 0$ pues $T_1(v_1) \neq 0$. Por lo tanto la condición (1) es trivial y las condiciones (2) y (3) son vacias. Supóngase que el teorema es válido para todo subespacio no nulo de $\text{End}(V)$ de dimensión menor que $\dim \mathcal{T}$.

Sea $F_1 : \mathcal{T} \to V$ definido por $F_1(T) = T(v_1)$ y $\mathcal{T}' = \ker F_1$. Como $T_i \notin \mathcal{T}'$, tenemos $\dim \mathcal{T}' < \dim \mathcal{T}$. Aplicando la hipótesis inductiva a $\mathcal{T}'$, existe un conjunto linealmente independiente $B' = \{v_2, \dots, v_s\} \subset V$ y una descomposición $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ tales que

(1′) $F_i|_{\mathcal{T}_i}$ es inyectiva para todo $i = 2 \dots s$;

(2′) $\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ para todo $2 \leq i < j \leq s$;

(3′) $\mathcal{T}_j V \subset \text{im}\, F_i|_{\mathcal{T}_i}$ para todo $2 \leq i < j \leq s$.

Veamos que $v_1 \notin \mathrm{k}B'$. Si $v_1 \in \mathrm{k}B'$ entonces existen $a_j \in \mathrm{k}$ no todos nulos tal que $v_1 = \sum_{j=2}^{s} a_j v_j$. Sea $j_0 = \text{máx}\{j : a_j \neq 0\}$ y $0 \neq T \in \mathcal{T}_{j_0}$, si aplicamos T a la ecuación anterior obtenemos $T(v_1) = \sum_{j=2}^{j_0} a_j T(v_j)$. Por la definición de $\mathcal{T}'$ y la condición (2′) tendríamos $T(v_{j_0}) = 0$, lo cual contradice (1'). Por lo tanto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente. Sea $\mathcal{T}_1$ un complemento directo de $\mathcal{T}'$, es claro que se verifican las condiciones (1) y (2) y que la $\dim \mathcal{T}_1 = r$ pues

$$\dim \mathcal{T} = \dim \ker F_1 + \dim \text{im}\, F_1 = \dim \mathcal{T}' + r.$$

Para probar (3) basta ver que $T'v' \in \text{im}\, F_1$ para todo $T' \in \mathcal{T}'$ y $v' \in V$. Sea $\{\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_r\}$ una base de $\mathcal{T}_1$, veamos que $\left\{T'v', \widetilde{T}_1 v_1, \dots, \widetilde{T}_r v_1\right\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Por la elección de v_1, el conjunto $\left\{T'(v_1 + tv'), \widetilde{T}_1(v_1 + tv'), \dots, \widetilde{T}_r(v_1 + tv')\right\}$ es linealmente dependiente para todo $t \in \mathrm{k}$. Dado que $T'v_1 = 0$, tenemos que

$$B' = \left\{T'(v'), \widetilde{T}_1(v_1 + tv'), \dots, \widetilde{T}_r(v_1 + tv')\right\}$$

es linealmente dependiente para todo $t \in \mathrm{k}^\times$. Sea A_t la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B' en alguna base de V. Como B' es linealmente dependiente para todo $t \in \mathrm{k}^\times$ entonces todo menor de A_t tiene determinante nulo para $t \in \mathrm{k}^\times$. Veamos que todo menor de A_0 tiene determinante nulo. Sea M_t un menor de A_t y $P(t) = \det(M_t)$. Por hipótesis $P(t) = 0$ para todo $t \in \mathrm{k}^\times$ y k es infinito entonces $P(0) = 0$, es decir $\det(M_0) = 0$. Esto implica que $\{T'v', \widetilde{T}_1 v_1, \dots, \widetilde{T}_r v_1\}$ es un conjunto linealmente dependiente. □

Teorema 4.5.3. *Sean* k *un cuerpo infinito,* V *un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita. Sea* $\mathcal{T}$ *un subespacio no nulo de operadores nilpotentes de* $\text{End}(V)$ *que conmutan. Entonces existe un conjunto linealmente independiente* $B = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$ *y una descomposición* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ *tales que las aplicaciones* $F_i : \mathcal{T} \to V$ *definida por* $F_i(T) = T(v_i)$ *satisfacen*

(1) $F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *es inyectiva para todo* $i = 1 \dots s$;

(2) $\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$;

(3) $\mathcal{T}_j V \subset \operatorname{im} F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$,

Más aún, dado $\{T_1, \ldots, T_q\} \subseteq \mathcal{T}$ *existe* v_1 *tal que* $T_i(v_1) \neq 0$ *para todo* i. *Además, sea* $\{\widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T}_r\}$ *una base de* $\mathcal{T}_1$. *Entonces el conjunto* $\{\widetilde{T}_1(v_1), \ldots, \widetilde{T}_r(v_1), v_1, \ldots, v_s\}$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Por la Proposición 4.5.2 nos falta ver que el conjunto $\widetilde{B} = \{\widetilde{T}_1(v_1), \ldots, \widetilde{T}_r(v_1), v_1, \ldots, v_s\}$ sea linealmente independiente. Sea $s \geq 2$ y sean $a_i, b_j \in \mathrm{k}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i(v_1) + \sum_{j=1}^{s} b_j v_j = 0. \tag{4.22}$$

Sea $0 \neq T \in \mathcal{T}_s$, si aplicamos T a la ecuación (4.22) obtenemos $\sum_{i=1}^{r} a_i T\widetilde{T}_i(v_1) + \sum_{j=1}^{s} b_j T v_j = 0$. Como $\mathcal{T}$ es una familia conmutativa y por (2) nos queda $b_s T(v_s) = 0$. Luego por (1), $b_s = 0$. Si repetimos este procedimiento de manera decreciente con $T \in \mathcal{T}_j$ y $j = 2, \ldots, s$ tenemos que $b_j = 0$. Es decir, la ecuación (4.22) tiene la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i(v_1) + b_1 v_1 = 0 \tag{4.23}$$

Veamos que $b_1 = 0$. Dado que $\mathcal{T}$ es una familia conmutativa de operadores nilpotentes $\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i$ es nilpotente, además por (1), $T(v_1) \neq 0$. Luego, si aplicamos $T \in \mathcal{T}_1$ a la ecuación anterior nos queda que $(\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i) T(v_1) + b_1 T(v_1) = 0$. Por lo tanto $b_1 = 0$, es decir

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i(v_1) &= 0 \\ = (\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i)(v_1) &\ . \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i \in \mathcal{T}_1$ por (1), $\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i = 0$. Luego $a_i = 0$ para todo i, pues $\{\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \ldots, \widetilde{T}_r\}$ es una base de $\mathcal{T}_1$. Cuando $s = 1$ la prueba se deduce a partir de la ecuación (4.23). $\square$

Bibliografía

[Be] Benoist,Y., *Une Nilvariete Non Affine*, J. Diff. Geom., Vol. **41**,(1995), 21-52.

[Bi] Birkhoff, G., *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices*, Ann. of Math. (2), Vol. **38**, (1937), 526-532.

[B1] Burde,D., *Affine structures on nilmanifolds*, J. Inter. Math., Vol. **7**(5),(1996), 599-616.

[B2] Burde,D., *On a refinement of Ado's Theorem*, Archiv.Math. ,Vol. **70**(2),(1998), 118-127.

[BW] Burde D. y Wolfgang,M., *Minimal Faithful Representations of Reductive Lie Algebras*, arXiv:math., 22 de marzo 2007.

[C] Carter, R., *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge studies in advance mathematics **96**, (2005).

[CM] Chari, V.; Moura, A., *The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras.*, Commun. Math. Phys., **266**, No. 2, (2006), 431-454.

[FGT] Fishel, S., GrojnowskiB, I. , Teleman,C. , *The strong Macdonald conjecture and Hodge theory on the Loop Grassmannian*, arXiv:math.AG/0411355 v1 16 Nov 2004.

[FL] Fourier, G.; Littelmann, P., *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Adv. Math. **211**, No. 2, (2007), 566-593.

[GolK] Goldman, W.; Kamishima, Y., *The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic*, J. Differ. Geom. **19**, (1984), 233-240.

[GHW] Goodman, R., Howe, R. y Wallach, N., *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge, U.K., Cambridge university, (1998).

[GoR] Goze, M. y Remm, E., *Rigid current Lie algebras*, arXiv:math/0610478v1 [math.RA] 16 Oct 2006.

[GrM] Grunewald, Fritz; Margulis, Gregori, *Transitive and quasitransitive actions of affine groups preserving a generalized Lorentz-structure*, J. Geom. Phys. **5**, No.4 , (1988), 493-531.

[HW] Hanlon,P., Wachs, M., *On the Property M Conjeture for the Heisenberg Lie Algebra*, J. Combin. Theory Ser. A **99** (2002), 219-231.

[He] Hermann, R., *Infinite dimensional Lie algebras and current algebra*, Group Represent. Math. Phys., Lect. Notes Phys. **6** (1970),312-338.

[H] Humphreys, J.E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1994).

[J1] Jacobson, N., *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York, (1962).

[J2] Jacobson, N., *Schur's theorem on commutative matrices*, Bull. Amer. Math. Soc.**50** (1944), 431-436.

[K] Knapp, A. W., *Lie Groups Beyond and Introduction*, Birkhäuser, (2005).

[Ku] Kumar, Shrawan, *Homology of certain truncated Lie algebras*, Contemp. Math., **248** (1999), 309-325.

[LR] Lecomte, P.; Roger, C., *Rigidity of current Lie algebras of complex simple type*, J. Lond. Math. Soc., **37**, No.2, (1988), 232-240.

[Mac] Macdonald, I. G., *Some conjectures for root systems*,

[Ma] Margulis, G.A., *Free totally discontinuous groups of affine transformations*, Sov. Math., Dokl., **28** (1983), 435-439.

[Mi] Milnor, John W., *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. Math., **25** (1977), 178-187.

[M] Mirzakhani,M., *A Simple Proof of a Theorem of Schur*, American Mathematical Monthly, Vol. **105**, No. 3,(1992), 260-262.

[R] Reed, B.E., *Representations of solvable Lie algebras*, Mich. Math. J., **16** (1969), 227-233.

[Ro] Roger, C., *Déformations de l'algèbre des courants à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe affine*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, **305** (1987), 613-616.

[S] Schur, I., *Zur Theorie vertauschbarer Matrizen*, J. Reine Angew. Mathematik , **130** (1905), 66-76.

[T] Teleman,C., *Borel Weil Bott theory on the moduli stack of G-bundle over a curve*, Invent.Math., **134** (1998), 1-57.

[Z] Zusmanovich, P., *Low-dimensional cohomology of current Lie Algebras and analogs of the Riemann tensor for loop manifold*, Linear Algebra Appl. **407** (2005), 71-104.