

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional de Tucumán para la obtención del grado académico de

Magister en Matemática

TÍTULO DE LA TESIS:

REGULARIZACIÓN DE PROBLEMAS
INVERSOS MAL CONDICIONADOS:
MÉTODOS ESPECTRALES Y DE
PENALIZACIÓN POR VARIACIÓN TOTAL

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

AUTOR: Ana Cecilia Larrán

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Rubén Daniel Spies

Año de Presentación: 2011

Índice

Índice	iii
Agradecimientos	v
Resumen	ix
Introducción	xi
1 Preliminares	1
1.1 Problemas inversos	1
1.1.1 Ejemplos de problemas inversos	4
1.1.2 Ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales	9
1.1.3 Soluciones generalizadas: la inversa generalizada de Moore-Penrose	10
1.1.4 Operadores compactos: descomposición espectral y criterio de Picard	13
1.2 Regularización de problemas mal condicionados	17
1.2.1 Teoría general de regularización	17
1.2.2 Orden de optimalidad	23
2 Métodos espectrales de regularización	31
2.1 Teoría general	31
2.2 Reglas de elección de parámetro “ <i>a-priori</i> ”	39
2.3 Calificación y saturación	45
2.4 Resultados recíprocos	48
2.5 Reglas de elección de parámetro “ <i>a-posteriori</i> ”	53
2.5.1 El principio de discrepancia de Morozov	54
2.6 Otras reglas de elección de parámetro	61
2.6.1 Validación cruzada generalizada	62
2.6.2 Método de la curva L	64
3 Método de Tikhonov-Phillips	65
3.1 Teoría clásica	65
4 Regularización con operadores diferenciales	75
4.1 Inversa generalizada ponderada	75
4.2 Regularización con seminormas	86

4.3	Tikhonov-Phillips generalizado	95
5	Regularización por variación acotada	99
5.1	Definiciones y resultados preliminares	100
5.2	Existencia, unicidad y estabilidad de los métodos BV	119
5.3	Penalización con la seminorma BV	128
5.4	Convergencia de los minimizantes globales	134
6	Aplicaciones a restauración de imágenes	143
6.1	Problemas inversos en restauración de imágenes	143
7	Conclusiones, aportes y trabajos futuros	153
7.1	Conclusiones	153
7.2	Aportes	155
7.3	Trabajos futuros	156
A	Resultados básicos de Análisis Funcional	159
A.1	Espacios normados	159
A.1.1	Teoría general	159
A.1.2	Nociones topológicas	162
A.1.3	Espacios de Hilbert	165
A.2	Operadores lineales sobre espacios normados	169
A.2.1	Nociones básicas	169
A.2.2	Operadores lineales sobre espacios de Hilbert	176
A.3	Teoría espectral para operadores lineales	180
A.3.1	Teoría espectral general	180
A.3.2	Teoría espectral para operadores compactos en espacios de Hilbert	182
A.4	La derivada de Fréchet	185
A.5	Representación dual de un funcional convexo	186
A.6	Los símbolos de Landau	187
B	Teoría espectral y cálculo funcional	189
B.1	Familia espectral - resolución de la identidad	189
B.2	Funciones de operadores autoadjuntos	192
	Bibliografía	209

Agradecimientos

La elaboración de este proyecto ha sido posible gracias al esfuerzo, colaboración y apoyo de mucha gente. A través de estas breves palabras quiero y debo agradecer a todas aquellas personas e instituciones que han hecho posible la culminación de este sueño.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, en especial a mis padres, por el apoyo incondicional que me brindaron en esta etapa de mi vida y siempre. También mi agradecimiento a Adrián por haber comprendido la importancia de esta etapa de mi vida. A ellos dedico esta tesis.

Al Dr. Rubén D. Spies, director de esta tesis, mi más sincera gratitud por su apoyo moral, confianza, paciencia, sabia orientación y disposición en todo momento. Rubén mi mayor agradecimiento por aceptar el reto de dirigir mi trabajo de investigación y enseñarme a disfrutar de él, por todo el tiempo y esfuerzo invertido en corregir esta tesis, pero sobre todo gracias por tu amistad. ¡Lo logramos R^d!

Gracias Gisela Mazzieri y Karina Temperini por el apoyo recibido para la implementación computacional de los métodos en las aplicaciones a restauración de imágenes del Capítulo 6. Gracias Nahuel por confeccionar los gráficos de la tesis.

A mi amiga Adriana, gracias por ser mi compañera de estudios, por cada tarde que pasaste en la computadora tratando de entender “algo” acerca del Scientific WorkPlace, por tus valiosos comentarios y por tu apoyo incondicional es esta etapa y siempre.

Gracias al personal docente del Área Álgebra y Geometría de la FACET: Lic. Juana Vizchi, Lic. Rosario Oviedo, Mg. Blanca Jaimes, Lic. Mercedes Ganim, Lic. Isabel Lomas, Lic. Estela Fernández, BUF Nadia Plaza, Lic. Beatriz Funes, Lic. Belén Camacho, Lic. Andrea Ledesma, Lic. Eugenia Gallardo por cubrir mi tarea docente las veces que obligadamente tuve que ausentarme y por brindarme su apoyo en todo momento. Gracias Isabel sin tu ayuda incondicional no lo hubiese logrado.

Quiero agradecer a la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología y al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Tucumán por la creación de esta maestría y por abrirme las puertas como alumna y como profesora.

También quiero agradecer a la Directora y al Comité Académico de la Maestría en Matemática por haberme otorgado, a través de Ciencia y Técnica de la UNT, una beca para finalización de tesis. Fue de mucha ayuda.

Gracias a todos los profesores y compañeros que tuve en mis cursos de licenciatura y maestría, el conocimiento adquirido hasta hoy es gracias a todos ellos.

Finalmente agradezco a todas aquellas personas, colegas y amigos que me brindaron su apoyo, tiempo e información para el logro del objetivo de este proyecto.

Muchas Gracias.

LAS METAS SON SUEÑOS CON LÍMITE DE TIEMPO.

"...PARA ESTUDIAR LA VIDA FUTURA DE LOS HOMBRES, ES NECESARIO DOMINAR EL CONOCIMIENTO DE LAS REALIDADES DE SU VIDA PASADA. LO PASADO ES RAÍZ DE LO PRESENTE. HA DE SABERSE LO QUE FUE, PORQUE LO QUE FUE ESTA EN LO QUE ES..."

JOSÉ MARTÍ.

Resumen

En esta tesis se aborda el estudio de los métodos espectrales de regularización y de penalización por variación total para problemas inversos mal condicionados.

El campo de los problemas inversos ha sido en las últimas cuatro décadas una de las áreas de mayor crecimiento dentro de la Matemática. Este crecimiento ha sido consecuencia del avance de la teoría matemática, del surgimiento de importantes aplicaciones provenientes de otras ciencias y de la industria y del desarrollo de computadoras cada vez más potentes.

En términos generales, un problema inverso consiste en la estimación de ciertas cantidades a partir de mediciones indirectas de las mismas. Este proceso de estimación es a menudo mal condicionado en el sentido que la presencia de ruido en los datos puede ocasionar errores muy grandes en las aproximaciones. En tales casos, los métodos numéricos tradicionales se vuelven inestables, haciéndose necesario la implementación de técnicas matemáticas conocidas como “métodos de regularización”, los cuales permiten aproximar las soluciones del problema manteniendo estabilidad.

La organización de la tesis es la siguiente:

- **Capítulo 1:** Presentación de los postulados de Hadamard y estudio de la naturaleza de los problemas inversos. Ejemplos motivadores. Introducción a las ecuaciones lineales mal condicionadas en espacios de dimensión infinita: la inversa generalizada de Moore-Penrose, soluciones de cuadrados mínimos, descomposición espectral de operadores compactos. Regularización de problemas inversos lineales mal condicionados. Construcción de operadores de regularización y reglas de elección de parámetro. Análisis del orden de optimalidad.
- **Capítulo 2:** Estudio de los métodos espectrales de regularización basados en la Teoría Espectral para operadores lineales y autoadjuntos en espacios de Hilbert. Estudio de reglas de elección de parámetro “*a-priori*” para métodos de orden óptimo. Métodos de Showalter y Descomposición en Valores Singulares Truncada. Estudio de los conceptos de Calificación y Saturación. Análisis de resultados recíprocos. El Principio de Discrepancia de Morozov. Introducción a reglas de elección de parámetro heurísticas: Validación Cruzada Generalizada y Método de la Curva L.
- **Capítulo 3:** Estudio del método espectral de regularización de Tikhonov-Phillips. Formulación equivalente como un problema de optimización sin restricciones.
- **Capítulo 4:** Estudio de los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes asociados a seminormas inducidas por operadores diferenciales. La

inversa generalizada ponderada. Construcción de familias de operadores de regularización para la inversa ponderada. Estudio del método de Tikhonov-Phillips con estos penalizantes.

- **Capítulo 5:** Estudio de los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados en espacios de funciones, con penalizantes dados por la norma o seminorma BV . Estudio de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de los funcionales de Tikhonov-Phillips con tales penalizantes. Obtención de condiciones que garantizan la existencia de minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes dados por una perturbación diferenciable de la seminorma BV . Estudio de convergencia de las soluciones regularizadas obtenidas con los métodos BV .
- **Capítulo 6:** Aplicaciones a problemas de restauración de imágenes.
- **Capítulo 7:** Conclusiones, Aportes y Trabajos Futuros.
- **Apéndice A:** Principales resultados del Análisis Funcional.
- **Apéndice B:** Introducción a la Teoría Espectral y al Cálculo Funcional.

Introducción

En las últimas cuatro décadas, el campo de los problemas inversos ha sido sin lugar a dudas una de las áreas de mayor y más rápido crecimiento dentro de la Matemática. Una de las principales causas de este crecimiento es la gran variedad de aplicaciones provenientes de otras ciencias y de la industria.

Desde un punto de vista general se dice que “*dos problemas son inversos uno del otro si la formulación de uno involucra al otro*” (J. F. Keller, 1983, [36]). En general se llama “*problema directo*” a aquel que ha sido estudiado primero o es más simple, mientras que el “*problema inverso*” es el menos estudiado o el menos simple. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, en la mayoría de los casos, hay una distinción muy clara entre el problema directo y el problema inverso. Esta distinción natural la provee la noción de “*mal condicionamiento*”. El concepto de “*buen condicionamiento*” fue introducido por el matemático francés J. Hadamard ([29]) en un trabajo publicado en 1923. Allí se define un problema como “*bien condicionado*” (“*well-posed*”) como aquel que tiene solución única, la cual depende de manera continua de los datos. Si alguna de estas propiedades no se satisface el problema se dice “*mal condicionado*” (“*ill-posed*”). Desde el punto de vista práctico, el problema más serio se produce cuando la solución de un problema no depende de manera continua de los datos. En tales casos, la aproximación de las soluciones mediante las técnicas numéricas tradicionales resultan en métodos inestables, y en consecuencia, no apropiados. Una solución (aunque parcial) a este problema la dan los llamados “*métodos de regularización*” para problemas inversos mal condicionados. Estos consisten en herramientas matemáticas que permiten extraer la mayor cantidad de información posible sobre la solución del problema, sin perder estabilidad. Por esto, se dice que el “*arte*” de aplicar métodos de regularización consiste siempre en encontrar un compromiso adecuado entre precisión y estabilidad.

Hay una gran variedad de problemas de la vida real que originan problemas inversos y en su gran mayoría estos resultan, en efecto, mal condicionados. Para tales problemas se hace entonces necesario e imprescindible la implementación de métodos de regularización. Entre tales problemas mencionamos a modo de ejemplo: tomografía computada ([52]), problemas de fluorescencia ([39]), reología ([35]), superconductividad ([13]), problemas de potenciales inversos en Geofísica ([20], [47]), procesamiento de señales e imágenes ([38]), conducción del calor ([7], [8], [19], [21], [50]), etc.

Si bien los primeros métodos de regularización aparecieron a comienzos de la década de 1960 con los trabajos de A. N. Tikhonov ([63], [64]) y D. L. Phillips ([55]), fue T. Seidman quien en 1980 ([61]), alertó sobre el peligro y las posibles graves consecuencias de la utilización arbitraria del tradicional “*método de mínimos cuadrados*” para aproximar las soluciones de problemas inversos mal condicionados. Desde entonces, la teoría matemática asociada al estudio de estos problemas ha crecido y se ha solidificado

enormemente, en muchos casos empujada por la necesidad de contar con herramientas adecuadas para la solución de problemas concretos (ver [18]). No obstante ello, siguen apareciendo constantemente nuevas aplicaciones y las herramientas matemáticas siguen perfeccionándose para afrontar los nuevos desafíos que estas aplicaciones requieren.

En un contexto bastante general, un problema inverso puede formularse de la siguiente manera: determinar x en la ecuación

$$Tx = y,$$

donde T es un operador lineal entre espacios normados \mathcal{X} e \mathcal{Y} , $y \in \mathcal{Y}$ es el dato. La descomposición espectral de la inversa generalizada de Moore-Penrose de T , T^\dagger (fuertemente vinculada a las soluciones de cuadrados mínimos), y la Teoría Espectral de Operadores en Espacios de Hilbert, proveen un sólido andamiaje en el cual se apoya gran parte de la teoría matemática sobre métodos clásicos de regularización para problemas inversos mal condicionados. Los métodos clásicos de Tikhonov-Phillips (TP) y el método de Descomposición en Valores Singulares Truncada (TSVD) son ejemplos de métodos espectrales de regularización. Los métodos clásicos inducen estabilidad imponiendo, de diferentes modos, condiciones de regularidad (suavidad) sobre las soluciones aproximadas. De allí que estos métodos se denominen “de regularización”. En algunos casos (como sucede a menudo en procesamiento de imágenes satelitales y en Medicina ([16]), y en ciertos problemas de identificación de parámetros ([28])), el uso de los métodos clásicos de regularización puede tener consecuencias no deseadas, tales como difusión de bordes y “sobrregularización”. Esto es así precisamente porque tales métodos no admiten soluciones discontinuas. Esta dificultad puede resolverse, por ejemplo, induciendo estabilidad a través del requerimiento de que las soluciones sean de variación acotada en lugar de suaves. Esta estrategia fue introducida por primera vez por Rudin en 1992 ([59]) y dio origen a una gran variedad de métodos de Tikhonov-Phillips generalizados con funcionales penalizantes no suaves. Si bien aún resta mucho por investigar en esta dirección, algunos métodos de regularización con funcionales penalizantes no diferenciables ya han sido aplicados exitosamente en los últimos años en una gran variedad de aplicaciones, especialmente en procesamiento y reconstrucción de imágenes en Medicina e imágenes satelitales (ver [16] y las referencias allí).

Este trabajo de tesis consiste de un estudio exhaustivo de los métodos de regularización espectrales y de penalización por variación total para problemas inversos mal condicionados. La tesis consta de siete capítulos y dos apéndices, que contienen un número de secciones, organizados de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presentan en primer lugar los postulados de Hadamard de “buen condicionamiento” y se estudian la naturaleza y características de los problemas inversos a través de cuatro ejemplos motivadores (tomografía computada, prospección Geológica, problemas de dispersión inversa e identificación de parámetros), los cuales muestran la importancia que reviste el tratamiento matemático de la teoría general que los comprende. En segundo lugar procedemos a desarrollar brevemente un marco adecuado para el estudio de las ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales definidos en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Esto abarca el estudio de la inversa generalizada de Moore-Penrose, su relación con las soluciones de cuadrados mínimos, su descomposición espectral en valores singulares para el caso de operadores

compactos y el Criterio de Picard (Sección 1.1). En la Sección 1.2 se introducen los conceptos y elementos principales de la teoría matemática de regularización para problemas inversos lineales mal condicionados. Se definen los conceptos de regularización, solución regularizada, familia de operadores de regularización, parámetro de regularización, regla de elección de parámetro, método de regularización convergente y se muestra la relación de las soluciones de cuadrados mínimos con la inversa generalizada de Moore-Penrose. Posteriormente se presentan algunos resultados de convergencia para métodos de regularización y se aborda el estudio de órdenes de convergencia. Para ello, se definen el error de regularización, el error asociado al ruido y el error total. Además, se estudian órdenes de optimalidad y su relación con conjuntos fuente. Asimismo se introducen los conceptos de método de regularización óptimo y de orden óptimo y se dan condiciones suficientes para convergencia y convergencia de orden óptimo.

En el Capítulo 2 se estudian en detalle los métodos espectrales de regularización. En la Sección 2.1 se desarrolla un andamiaje matemático apropiado para la construcción de tales métodos. Este andamiaje se basa en la *Teoría Espectral* para operadores lineales y autoadjuntos en espacios de Hilbert y en el *Cálculo Funcional* (Apéndice B). Se muestran condiciones suficientes para la convergencia de un método espectral y se obtienen estimaciones para el error de regularización, el error asociado al ruido y el error total. En la Sección 2.2 se estudian algunas reglas de elección de parámetro “*a-priori*” que resultan en métodos de orden óptimo. Se presentan dos métodos espectrales de regularización tradicionales: el método de Showalter y el de Descomposición en Valores Singulares Truncada. En la Sección 2.3 se introducen los conceptos de calificación y saturación para métodos espectrales de regularización, se presenta el estado del arte sobre estos temas y se prueba que los métodos de Showalter y Descomposición en Valores Singulares Truncada no tienen calificación clásica y no saturan. En la Sección 2.4 se presentan resultados recíprocos (para regularización con dato exacto) que se derivan de la teoría de saturación de métodos espectrales de regularización y se deducen condiciones de regularidad de la solución exacta a partir del conocimiento de un cierto orden de convergencia para el error de regularización. En la Sección 2.5 se estudia la regla de elección de parámetro “*a-posteriori*” definida por el Principio de Discrepancia de Morozov. Asimismo, se estudian propiedades de convergencia y optimalidad de métodos espectrales de regularización en los cuales la regla de elección de parámetro es la dada por el Principio de Discrepancia. Finalmente, en la Sección 2.6 se presenta una breve introducción a las reglas de elección de parámetro heurísticas y se describen dos de ellas: Validación Cruzada Generalizada y el Método de la Curva L.

En el Capítulo 3 se introduce el método clásico de regularización de Tikhonov-Phillips. En primer lugar se presenta el método como un caso particular de un método espectral de regularización y posteriormente se demuestra que el mismo posee también una formulación equivalente como un problema de optimización sin restricciones. A continuación se encuentran condiciones suficientes sobre reglas de elección de parámetro “*a-priori*” que garantizan la convergencia a cero del error total. Por último se analizan, para este método clásico, resultados de convergencia, optimalidad y resultados recíprocos, y se prueba que el mismo posee calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$.

En el Capítulo 4 se introducen los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes asociados a seminormas inducidas por operadores diferenciales. En la

Sección 4.1 se construye un andamiaje matemático adecuado para el estudio y construcción de la inversa generalizada ponderada y se muestra su relación con la solución de cuadrados mínimos que minimiza la seminorma inducida por el correspondiente operador diferencial L . En la Sección 4.2 se aproxima la solución de cuadrados mínimos de mínima $\|L\cdot\|$ seminorma, con un enfoque diferente al utilizado para los métodos espectrales de regularización estudiados en los capítulos anteriores. Se demuestra la “*ley de orden inverso*” para la inversa generalizada de un operador producto, se construye una familia de operadores de regularización para la inversa generalizada ponderada y se obtienen condiciones suficientes para que tal familia sea una regularización para la inversa generalizada ponderada. Posteriormente se hallan condiciones que aseguran un cierto orden de convergencia de las soluciones regularizadas, bajo la hipótesis que la solución exacta pertenezca a ciertos conjuntos fuente. Finalmente en la Sección 4.3 se estudia el método de Tikhonov-Phillips para estos tipos de penalizantes. Se prueba en primer lugar que las soluciones regularizadas con dicho método son soluciones de una “*ecuación normal regularizada*” y luego que ellas también son soluciones de un problema de optimización sin restricciones.

En el Capítulo 5 se estudian en profundidad los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados en espacios de funciones sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ ó 3 , para el caso en que el penalizante es la norma o la seminorma de variación acotada. En la Sección 5.1 se introduce un andamiaje matemático necesario, que incluye diversos conceptos, definiciones y resultados preliminares, con el fin de abordar adecuadamente los desarrollos ulteriores de este capítulo. En particular se define una aproximación diferenciable para la seminorma de variación acotada ((5.10) y Teorema 5.6) y se prueba que la misma es convexa (Teorema 5.7) y débilmente semicontinua inferiormente (Teorema 5.11). Se introduce el concepto de convergencia intermedia (Definición 5.15) y se prueba que este tipo de convergencia es más fuerte que la convergencia débil pero más débil que la convergencia fuerte en $BV(\Omega)$ (Proposición 5.16). Este nuevo concepto permite aproximar una función de variación acotada por una sucesión de funciones infinitamente diferenciables de variación acotada (Lema 5.17) y extender un teorema de inmersión de Sobolev (Teorema 5.19) del espacio $W^{1,1}(\Omega)$ al espacio $BV(\Omega)$ (Teorema 5.20). A continuación se introduce el concepto de p -convergencia intermedia (Definición 5.21) y se prueba un resultado de aproximación de funciones de variación acotada por funciones infinitamente diferenciables de variación acotada en el sentido de esta p -convergencia intermedia (Lema 5.22). También se extiende el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov (Teorema 5.23) del espacio $W^{1,1}(\Omega)$ al espacio $BV(\Omega)$ lo cual nos permite probar que el espacio $BV(\Omega)$ está compactamente inmerso en $L^p(\Omega)$ para $p \in [1, \frac{d}{d-1})$ (Teorema 5.24). También se prueba que cuando el conjunto Ω tiene dimensión $d \geq 2$, el espacio $BV(\Omega)$ está débilmente compactamente inmerso en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ (Teorema 5.25). Todos estos resultados son de fundamental importancia para la derivación de los teoremas de existencia, unicidad y estabilidad para los métodos de Tikhonov-Phillips con penalizantes de tipo BV que se presentan y estudian en la Sección 5.2. En particular, en la Sección 5.2, se introduce en primer lugar el concepto de BV -coercitividad para un funcional y para una sucesión de funcionales y se prueban resultados de existencia, unicidad (Teorema 5.30) y estabilidad (Teorema 5.33) para funcionales generales definidos sobre $L^p(\Omega)$. En segundo lugar se prueban resultados de existencia y unicidad (Proposición 5.34) de los minimizantes globales de funcionales

de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes dados por la norma BV . También se prueban varios resultados de estabilidad para los minimizantes globales de tales funcionales (Proposiciones 5.36, 5.37, 5.38, 5.39 y 5.40) bajo perturbaciones en el dato, en el parámetro de regularización, en el funcional penalizante y en el operador, de manera separada y simultánea. En la Sección 5.3 se prueban resultados de existencia, unicidad y estabilidad donde el penalizante es la seminorma BV . En primer lugar, se prueba una condición suficiente que garantiza la BV -coercitividad del funcional de Tikhonov-Phillips generalizado, con penalizante dado por una perturbación diferenciable de la seminorma BV (Lema 5.41). En segundo lugar se obtiene una condición suficiente que garantiza la existencia de minimizantes globales para tales funcionales (Teorema 5.43). Por último, se analiza un resultado de estabilidad para los minimizantes globales del funcional antes mencionado, bajo perturbaciones simultáneas en el operador y en el dato (Teorema 5.45). Finalmente, en la Sección 5.4 se estudia la convergencia de las soluciones regularizadas obtenidas con los métodos de regularización por variación acotada. Se prueban condiciones suficientes que garantizan la convergencia de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados a la solución exacta del problema, para el caso en que el penalizante es la norma BV o una perturbación diferenciable de la seminorma BV (Teoremas 5.46 y 5.47).

Si bien no es un objetivo central de esta tesis abordar aplicaciones concretas, en el Capítulo 6 se presentan algunas aplicaciones de los métodos estudiados en el presente trabajo a problemas de restauración de imágenes, con el objetivo de ilustrar el alcance y la potencialidad de los métodos estudiados.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones finales, los aportes o resultados más importantes y una lista de problemas abiertos y trabajos que pretendemos abordar en el futuro.

Para facilitar la lectura y a los efectos de completitud, al final de la tesis se incluyen dos apéndices que contienen la mayoría de los conceptos y resultados básicos del Análisis Funcional (Apéndice A) y de la Teoría Espectral y Cálculo Funcional (Apéndice B).

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es introducir los conceptos principales y resultados básicos sobre problemas inversos mal condicionados y de teoría de regularización, como así también la notación empleada a lo largo de esta tesis. Para motivar el estudio de los métodos de regularización, consideraremos algunos ejemplos típicos de problemas inversos. También presentaremos algunos de los resultados más importantes de órdenes de convergencia de métodos de regularización.

1.1 Problemas inversos

Los problemas inversos surgen en muchas áreas de la Ciencia y la Tecnología. El término *inverso* se utiliza para indicar que el problema tiene un correspondiente problema directo. J. F. Keller cita en [36] la siguiente definición muy general de problema inverso, que a menudo se encuentra en la literatura:

“dos problemas son inversos uno del otro si la formulación de cada uno de ellos requiere del conocimiento parcial o total del otro”.

En muchos casos, por razones históricas, el problema que ha sido estudiado en detalle antes (o el más simple) es llamado el *problema directo*, mientras que el otro es el *problema inverso*.

Es bien conocido que muchos sistemas físicos se describen empleando modelos matemáticos, que surgen a partir de las leyes físicas que los rigen. Usualmente, llamamos *problema directo* a aquel en el cual dada una entrada y el modelo, la salida¹ puede ser calculada. Esto se ilustra de manera sencilla en la Figura 1.1. Sin embargo, la situación cambia cuando la salida está dada y la entrada o el modelo son desconocidos². Este es un *problema inverso*. Los problemas inversos tratan la determinación de las causas para un efecto observado o deseado.

¹Por ejemplo, la predicción de un estado físico o la evolución de un sistema que depende de ciertos parámetros.

²Por ejemplo, la identificación de parámetros de mediciones u observaciones de estados físicos.

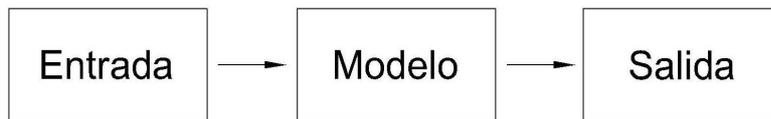


Figura 1.1: Sistema Entrada/Salida regido por un Modelo

No obstante, desde el punto de vista matemático hay una diferencia fundamental entre los problemas directo e inverso. Esta diferencia radica en el hecho que, usualmente, todos los problemas inversos son mal condicionados pues no satisfacen los postulados de Hadamard de “buen condicionamiento”, mientras que el correspondiente problema directo es bien condicionado.

Según J. Hadamard (ver [29]), un problema matemático es (o está) *bien condicionado* si satisface las siguientes condiciones o postulados:

- (PH1) Para todo dato admisible, existe una solución del problema (EXISTENCIA).
- (PH2) Para todo dato admisible, la solución es única (UNICIDAD).
- (PH3) La solución depende de manera continua de los datos (DEPENDENCIA CONTINUA).

Los problemas para los cuales al menos una de éstas tres condiciones no se satisface se dicen *mal condicionados*.

Si bien esta no es una definición matemáticamente rigurosa, en cada problema particular se hace precisa especificando el concepto de solución, que datos son considerados admisibles y que topología se usa para definir la continuidad.

Si el problema es “*mal condicionado*”, la violación del postulado (PH1), en general, no es de gran preocupación ya que la *existencia* de soluciones se puede forzar relajando de algún modo la definición de las mismas (e.g., el caso de soluciones débiles en Ecuaciones Diferenciales Parciales).

Algo más seria es la violación del postulado (PH2). No obstante, cuando el problema tiene varias soluciones, la *unicidad* puede lograrse incorporando al modelo información adicional que permita decidir cual de ellas es la correcta o bien para reever la completitud del modelo. En el caso de problemas inversos, la unicidad es relevante sólo cuando lo que se busca es la causa para un efecto observado. En cambio, si lo que se busca es la causa para un efecto deseado, la falta de unicidad hasta puede ser una ventaja pues nos permitirá elegir aquella solución que satisfaga ciertos criterios adicionales.

El problema más serio lo constituye la violación del postulado (PH3). Cuando no hay dependencia continua de los datos, si se desea aproximar la solución del problema por métodos numéricos tradicionales como es usual en la práctica, es de esperar que tales métodos se vuelvan inestables y, por lo tanto, no apropiados. Se debe restaurar estabilidad de algún modo. Una solución (parcial) a este problema la dan los llamados *métodos de regularización* para problemas inversos mal condicionados. Éstos consisten en herramientas matemáticas que permiten extraer la mayor cantidad de información posible sobre la solución del problema sin perder estabilidad.

Para ilustrar mejor estos conceptos lo haremos mediante un ejemplo concreto, que involucra una ecuación integral de Fredholm de primera clase.

MOTIVACIÓN

Muchos problemas inversos lineales de importancia práctica en Física, Ingeniería y en otras ciencias aplicadas, conducen en su formulación matemática a una ecuación integral de Fredholm de primera clase de la forma

$$\int_{\Omega} k(s, t) x(t) dt = y(s), \quad \forall s \in \Omega, \quad (1.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, $x, y \in L^2(\Omega)$ y el núcleo de la ecuación integral, k , es tal que $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ o es débilmente singular³.

El correspondiente problema directo se formula como sigue:

PD) Dados $k(s, t)$ y $x(t)$, encontrar $y(s)$. (Obviamente, la solución de éste problema se obtiene simplemente calculando o aproximando la integral en (1.1)).

Aquí pueden presentarse tres tipos diferentes de problemas inversos, dependiendo de la información conocida:

PI1) Dados $y(s)$ y $k(s, t)$, encontrar $x(t)$.

PI2) Dados $y(s)$, encontrar $k(s, t)$ y $x(t)$.

PI3) Dados $y(s)$ y $x(t)$, encontrar $k(s, t)$.

(En los tres problemas inversos, la información fuera de la integral se usa para determinar la información de la o las funciones dentro de la integral).

En lo que sigue el núcleo k se supondrá conocido, ya que sólo trabajaremos en esta tesis con problemas inversos cuyo modelo es conocido. Es decir, consideraremos el problema inverso PI1) donde la incógnita es x , llamada “función solución”, y el elemento conocido es y , llamado “función dato”, por ejemplo algún dato medido, quizás con algún grado de error.

Sea $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ el operador definido por $(Kx)(s) \doteq \int_{\Omega} k(s, t) x(t) dt$. Resulta conveniente estudiar la ecuación (1.1) en la forma abstracta y más simple

$$Kx = y \quad (1.2)$$

pues las ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase juegan un rol importante en el estudio de diversos problemas inversos. Es claro que K es un operador lineal y debido a un resultado clásico de análisis funcional ([76], Ejercicio 6.2 (b), pág. 135) es además compacto. La mayor dificultad asociada con la solución de ecuaciones que involucran un operador compacto surge del hecho que ellas son mal condicionadas pues el operador no es inyectivo o el inverso es discontinuo. En efecto, si K es compacto, inyectivo y está definido sobre un espacio normado de dimensión infinita entonces K^{-1} no es acotado ([5], Corolario del Teorema 17.6, pág. 291). En tal caso la ecuación (1.2) tiene solución dada por $x = K^{-1}y$ pero no depende de manera continua del dato y . En consecuencia, el problema inverso es mal condicionado. La discontinuidad de K^{-1} es

³Se dice que $k(\cdot, \cdot)$ es débilmente singular si k es continuo sobre $\{(s, t) \in \Omega \times \Omega / s \neq t\}$ y $\exists c > 0, \varepsilon > 0 : |k(s, t)| \leq c|s - t|^{\varepsilon - n} \forall s, t \in \Omega, s \neq t$.

razón para tener especial cuidado en el tratamiento numérico del problema pues todos los métodos tradicionales se vuelven inestables (pequeñas perturbaciones en y pueden conducir a grandes perturbaciones de x) y, en consecuencia, inapropiados.

Aún en el caso que K no es inyectivo el problema sigue siendo mal condicionado como veremos más adelante, pues la inversa generalizada de Moore-Penrose del operador K no es acotada.

Es usual en la práctica que el dato y se mida con instrumentos de precisión finita y por lo tanto, es afectado por los errores de medición. En consecuencia, no se lo conoce en forma exacta. Por otro lado, aunque fuese conocido en forma exacta, las computadoras sólo tienen precisión de punto flotante finita y la discretización del problema introduce inevitablemente errores. Entonces cuando resolvemos (1.2), los errores de medición y la discretización pueden resultar en una solución x que difiera significativamente de la verdadera solución exacta (desconocida). Resulta imprescindible antes de resolver un problema inverso mal condicionado proceder a restaurar la estabilidad del mismo. Las herramientas matemáticas que permiten resolver estos problemas son los llamados *métodos de regularización*. Estos procedimientos permiten recuperar la mayor cantidad posible de información sobre la solución del problema sin perder estabilidad. En cualquier caso siempre hay pérdida de información. En la Sección 1.2 presentaremos la teoría general de métodos de regularización para problemas inversos mal condicionados.

Con el objeto de motivar las herramientas matemáticas que daremos más adelante presentamos a continuación cuatro ejemplos clásicos de problemas inversos existentes en la vida real y con importantes aplicaciones en diversas áreas científicas y de la industria.

1.1.1 Ejemplos de problemas inversos

El campo de los problemas inversos ha experimentado un rápido progreso, especialmente en las últimas cuatro décadas. Este crecimiento se debió en gran parte al avance de la teoría matemática de los problemas inversos, al desarrollo de nuevos métodos de regularización y al surgimiento de importantes aplicaciones, como por ejemplo la utilización de imagen en Medicina que surge con el advenimiento de la Tomografía Computada. Otra de las razones fue el desarrollo de computadoras cada vez más potentes y rápidas, que hacen posible o facilitan los cálculos numéricos. Es oportuno señalar que además del diagnóstico por imágenes en Medicina, muchas otras áreas de la ciencia y la tecnología han sido profundamente transformadas por la introducción de los principios de la tomografía computada (e.g., ensayos no destructivos de materiales, imágenes sísmicas en Geofísica, etc.).

El primero de los ejemplos de problemas inversos que vamos a discutir es el más simple matemáticamente lo que permite un conocimiento más detallado del mismo. Los otros ejemplos se introducen especialmente con el objetivo de motivar aún más la importancia práctica de los problemas inversos y, debido a sus formulaciones matemáticas algo más complejas, no presentaremos un análisis detallado de ellos en este trabajo.

Ejemplo 1.1. TOMOGRAFÍA COMPUTADA: INVERSIÓN DE RADÓN

Debido principalmente a sus importantes aplicaciones en Medicina y en ensayo no destructivo de materiales, un problema inverso que ha sido ampliamente estudiado es

la inversión de la transformada de Radón de una función $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Este problema se origina debido al descubrimiento de la Tomografía Computada (TC).

La transformada de Radón de f se define como

$$(Rf)(s, w) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(sw + tw^\perp) dt, \quad s \in \mathbb{R}^+, \quad w \in \mathbb{R}^2 : \|w\| = 1 \quad (1.3)$$

donde w^\perp denota un vector unitario ortogonal a w .

En TC, f representa una función de densidad que varía espacialmente en un dominio compacto $D \subset \mathbb{R}^2$, el cual representa una sección transversal del cuerpo humano (e.g. del cerebro) o de algún material para ensayo no destructivo. El aparato de TC emite un haz muy fino de rayos X, de conocida intensidad, que se dirige hacia D . Este haz incide sobre el objeto (el cuerpo humano o el material) que se estudia y parte de la radiación del haz lo atraviesa. La radiación que no ha sido absorbida por el objeto sale del mismo con una intensidad atenuada y es recogida por los detectores.

El *problema inverso*⁴ consiste en recuperar la densidad f a partir de mediciones de las intensidades de rayos X en un plano que contiene a D . Estos rayos viajan a lo largo de líneas rectas las que pueden parametrizarse a través de su distancia al origen s y su correspondiente vector normal unitario $w \in \mathbb{R}^2$ (ver Figura 1.2). Dados s, w la ecuación de la recta correspondiente es por lo tanto $sw + tw^\perp$, $t \in \mathbb{R}$. La hipótesis básica del modelo es que el decaimiento de la intensidad de un haz de rayos X es proporcional a la intensidad I , a la densidad f y a la distancia Δt recorrida por el mismo. En consecuencia, se tiene que

$$\Delta I(sw + tw^\perp) = -\gamma I(sw + tw^\perp) f(sw + tw^\perp) \Delta t,$$

donde $\gamma > 0$ es una constante conocida. Dividiendo por Δt y haciendo tender Δt a cero obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria para la intensidad I

$$\frac{dI(sw + tw^\perp)}{dt} = -\gamma I(sw + tw^\perp) f(sw + tw^\perp).$$

Integrando desde $t = 0$ (la posición donde se ubica el aparato emisor de rayos X) hasta $t = L$ (la posición donde se ubica el aparato detector) obtenemos

$$\ln I(sw + Lw^\perp) - \ln I(sw) = -\gamma \int_0^L f(sw + tw^\perp) dt.$$

Denotemos por $I_0(s, w)$ e $I_L(s, w)$ a las intensidades medidas en el emisor y en el detector, respectivamente. Se supone que tanto el emisor como el detector están situados fuera de D y que para todos s, w la función f es de soporte compacto en $(0, L)$ y extendida a cero para $t \notin (0, L)$. Bajo estos supuestos el modelo matemático resultante que relaciona las intensidades I_0 e I_L es

$$\frac{\ln I_0(s, w) - \ln I_L(s, w)}{\gamma} = \int_{\mathbb{R}} f(sw + tw^\perp) dt. \quad (1.4)$$

⁴El correspondiente problema directo consiste en calcular la transformada de Radon Rf cuando f es conocida.

Observar que la ecuación (1.4) puede escribirse en términos de la transformada de Radón (1.3) en la forma

$$(Rf)(s, w) = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{I_0(s, w)}{I_L(s, w)}, \quad s > 0, \quad w \in \mathbb{R}^2 : \|w\| = 1. \quad (1.5)$$

Entonces el problema inverso en TC consiste en recuperar la función f en (1.5) a partir de mediciones de I_0 e I_L , es decir es un problema que consiste en invertir la transformada de Radón (1.3).

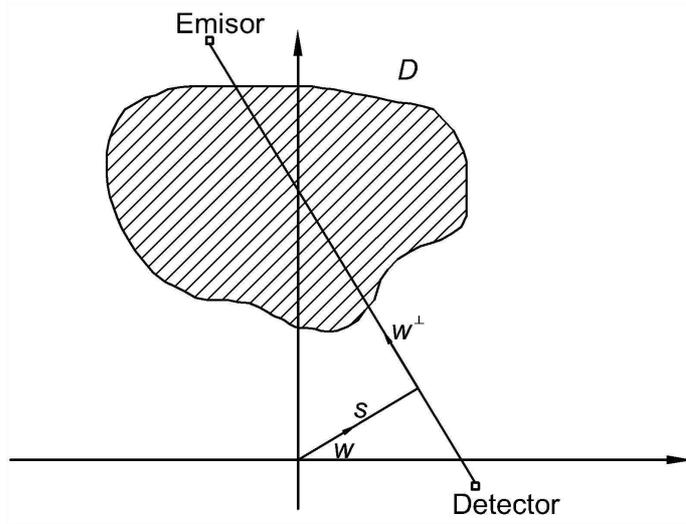


Figura 1.2: Tomografía Computada

Un caso muy particular en ensayo no destructivo de material es cuando D es un círculo de radio ρ centrado en el origen y f es radialmente simétrica con respecto a su centro. En este caso, es suficiente emplear una sola dirección w , por ejemplo $w_0 = (0, 1)$, es decir elegir rayos horizontales parametrizados por $s(0, 1) + t(1, 0) = (t, s)$, $t \in \mathbb{R}$, ya que otras direcciones no aportan información adicional (ver Figura 1.3). Además, como hemos supuesto que la densidad f es radialmente simétrica, esta se puede expresar en función de la distancia al origen, $r = \sqrt{s^2 + t^2}$, como

$$f(sw + tw^\perp) = F(r), \quad 0 < s \leq \rho, \quad w \in \mathbb{R}^2 : \|w\| = 1,$$

para $r > 0$, donde $F(r)$ denota el valor constante de la densidad sobre la circunferencia $|(s, t)| = r$, que ahora debe ser reconstruida. Entonces, para $s > 0$, la transformada de Radón de f es

$$(Rf)(s, w_0) = 2 \int_0^\infty F(\sqrt{s^2 + t^2}) dt,$$

donde el factor 2 se debe a la simetría. Asumiendo que F es de soporte compacto en $(0, \rho)$, es decir $F(r) = 0$ para $r \notin (0, \rho)$, y haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{r^2 - s^2}$ se obtiene que

$$(Rf)(s, w_0) = 2 \int_s^\rho \frac{rF(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr, \quad 0 < s \leq \rho.$$

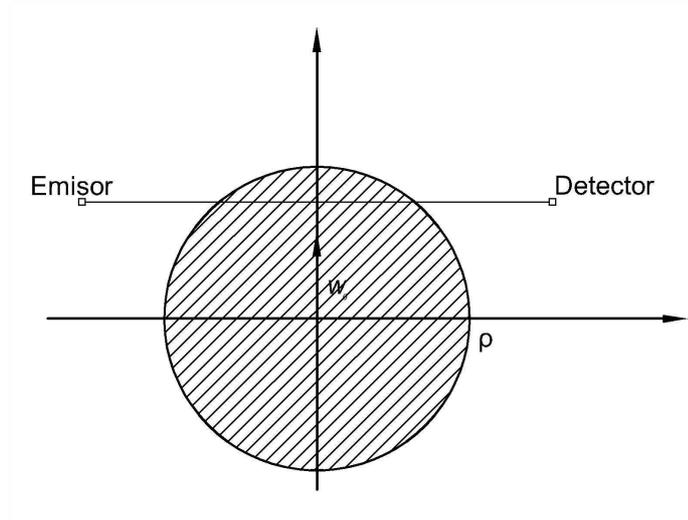


Figura 1.3: Ensayo no destructivo de material, con densidad radialmente simétrica

Denotando con $g(s) = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{I_0(s, w_0)}{I_L(s, w_0)}$, la ecuación (1.5) puede escribirse en la forma

$$\int_s^\rho \frac{rF(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = \frac{g(s)}{2}, \quad 0 < s \leq \rho, \quad (1.6)$$

que es una *ecuación integral de Abel*. Es posible hallar una fórmula explícita de inversión para la ecuación integral de Abel cuando $g(\rho) = 0$ (notar que es razonable suponer $I_0(\rho, w_0) = I_L(\rho, w_0)$ con lo cual $g(\rho) = 0$), es decir el rayo es tangente. Bajo este supuesto se puede probar que (ver [18], Sección 1.2)

$$F(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\rho \frac{g'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds.$$

Observemos que, en esta fórmula de inversión aparece la derivada g' , es decir, es necesario derivar los datos para poder reconstruir la función F . Es conocido que la derivación es un problema mal condicionado (ver [18], Sección 1.1). Aunque en este caso parecería que la derivación puede compensarse por la integración. Se puede demostrar que por la singularidad del núcleo, la inversión de la ecuación integral de Abel es en efecto mal condicionada (ver [18], Sección 1.2).

Para el caso general de la transformada de Radón (1.3), también existe una fórmula explícita de inversión, más compleja, que también involucra diferenciación de los datos.

Ejemplo 1.2. PROSPECCIÓN GEOLÓGICA (“GEOLOGICAL PROSPECTING ”)

Los problemas de prospección geológica consisten en la determinación de la localización, forma, constitución y/o algún parámetro (e.g., densidad, la conductividad térmica, etc.) de anomalías en el interior de la Tierra, a partir de mediciones en su superficie. Por ejemplo, supongamos que un cierto material magnético se localiza en cierta región subterránea. Un modelo matemático sería el que describe la concentración del magnetismo en cada posición en la superficie, en función de los valores de tales variables en la región subterránea determinada. El problema inverso consiste en

determinar, a partir del modelo y de las mediciones magnéticas de superficie, cuál es la forma de la región subterránea y/o la distribución del magnetismo en la misma.

Ejemplo 1.3. PROBLEMAS DE DISPERSIÓN INVERSA (“INVERSE SCATTERING PROBLEM ”)

Los problemas de dispersión inversa son problemas en los que se trata de recuperar información de un objeto desconocido o inaccesible (e.g., la forma y/o ciertas propiedades de un cuerpo, de una inhomogeneidad en un material, de un potencial, etc.), a partir de mediciones de ondas dispersadas a través de tal objeto. Las ondas usualmente pueden ser acústicas y electromagnéticas y los correspondientes problemas tienen modelos matemáticos dados por la ecuación de la onda, la ecuación de Helmholtz, la ecuación de Schrödinger, las ecuaciones de Maxwell entre otras.

Problemas de éste tipo aparecen por ejemplo en exploración de minerales y petróleo, exploración sísmica y electromagnética en Geofísica y en problemas de ensayos no destructivos de materiales.

Ejemplo 1.4. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Los problemas de identificación de parámetros son aquellos en los cuales se tratan de reconstruir o aproximar ciertos parámetros de un modelo (e.g., coeficientes desconocidos en ecuaciones diferenciales parciales) a partir de mediciones indirectas de las soluciones en todo el dominio o sólo en una parte del mismo o de su frontera. En general, en problemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales no se pueden disponer de mediciones de las variables en todo su dominio (e.g., en aplicaciones en Medicina y en ensayo no destructivo de material). Más aún, en ciertos casos es posible disponer de mediciones en una parte de la frontera (e.g., en problemas de distribución de calor para una barra empotrada donde se colocan detectores en ciertos puntos del extremo libre de la misma y se quiere determinar la temperatura en una parte inaccesible de la pared).

Los problemas de *Tomografía de Impedancia* pueden ser considerados como problemas de identificación de parámetros con mediciones en la frontera. Consisten en aplicar diferentes voltajes eléctricos en la frontera de un objeto y medir las corrientes eléctricas que se generan. El problema inverso consiste en reconstruir, a partir de tales mediciones, la distribución de la conductividad eléctrica. Esta distribución puede luego utilizarse para obtener información importante sobre la composición material del objeto.

Los cuatro ejemplos que acabamos de presentar brevemente muestran la importancia que reviste el tratamiento matemático de los problemas inversos puesto que los mismos surgen en una gran variedad de problemas concretos en diversas áreas de la Ciencia y la Tecnología. Dichos ejemplos resultan en problemas inversos mal condicionados para los cuales los métodos numéricos tradicionales se vuelven inestables, haciéndose necesario e imprescindible la implementación de métodos de regularización.

Por último, es oportuno mencionar aquí que existe una gran variedad de problemas aplicados que se originan en otras áreas y que conducen a problemas inversos mal condicionados. Entre ellos mencionamos: problemas de fluorescencia ([39]), reología ([35]), superconductividad ([13]), problemas de potenciales inversos en Geofísica ([20], [47]), procesamiento de señales e imágenes ([38]), etc.

1.1.2 Ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales

En lo que sigue, consideraremos problemas inversos lineales en el marco de ecuaciones de la forma

$$Tx = y, \quad (1.7)$$

donde $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es un operador lineal, acotado y \mathcal{X} e \mathcal{Y} son espacios de Hilbert.

En virtud de los postulados de Hadamard podemos introducir la siguiente definición.

Definición 1.5. *Se dice que la ecuación (1.7) es **bien condicionada** (“well-posed”) si satisface las siguientes condiciones:*

- (i) **EXISTENCIA:** *Para cada $y \in \mathcal{Y}$ existe (al menos) un $x_0 \in \mathcal{X}$ tal que $Tx_0 = y$ (i.e., $\mathcal{R}(T) = \mathcal{Y}$).*
- (ii) **UNICIDAD:** *Para cada $y \in \mathcal{Y}$ existe a lo sumo un $x_0 \in \mathcal{X}$ tal que $Tx_0 = y$ (i.e., $\mathcal{N}(T) = \{0\}$).*
- (iii) **DEPENDENCIA CONTINUA:** *La solución x depende de manera continua de y (i.e., si T es biyectivo, $T^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es continuo).*

*En caso contrario, se dice que la ecuación (1.7) es **mal condicionada** (“ill-posed”).*

Por el Teorema de la Proyección (ver Teorema A.77), \mathcal{Y} puede escribirse como $\mathcal{Y} = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$. Así, todo elemento $y \in \mathcal{Y}$ se escribe como $y = y_{\overline{\mathcal{R}(T)}} + y_{\mathcal{R}(T)^\perp}$ con $y_{\overline{\mathcal{R}(T)}} \in \overline{\mathcal{R}(T)}$, $y_{\mathcal{R}(T)^\perp} \in \mathcal{R}(T)^\perp$. Si $y_{\overline{\mathcal{R}(T)}} \notin \mathcal{R}(T)$ o $y_{\mathcal{R}(T)^\perp} \neq 0$ entonces la ecuación (1.7) no tiene solución pues en tal caso $y \notin \mathcal{R}(T)$. Por lo tanto, si $\mathcal{R}(T) \neq \mathcal{Y}$ la ecuación (1.7) es mal condicionada pues no satisface la condición de existencia de la Definición 1.5. En general, suponer que el operador T es biyectivo es una gran limitación del problema ya que:

- 1) Si $\mathcal{R}(T) \neq \mathcal{Y}$, aunque no exista solución, podemos estar interesados en hallar “soluciones generalizadas” que resuelvan “aproximadamente” (1.7). En este caso parece razonable, por ejemplo, buscar x tal que Tx tenga distancia mínima a y (soluciones de cuadrados mínimos).
- 2) Si $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$, aunque la solución no sea única, podemos estar interesados en una solución particular de (1.7) que satisfaga ciertas condiciones adicionales. Por ejemplo, que tenga norma mínima.

La digresión anterior nos conduce naturalmente a introducir una generalización de la noción de inversa de T para el caso en que T no es inyectivo. Esta generalización se conoce como la *inversa generalizada de Moore-Penrose* la que, como veremos más adelante, es de fundamental importancia en el tratamiento y desarrollo matemático de los problemas inversos mal condicionados. Esta importancia radica principalmente en dos hechos fundamentales que son, en primer lugar, la estrecha relación existente entre la inversa generalizada de Moore-Penrose y las soluciones de cuadrados mínimos y, en segundo lugar, el hecho que muchos métodos de regularización (entre los que se encuentran todos los métodos más conocidos y usuales) se derivan a partir de la descomposición espectral de esa inversa generalizada.

1.1.3 Soluciones generalizadas: la inversa generalizada de Moore-Penrose

Definición 1.6. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $y \in \mathcal{Y}$. Diremos que:

(i) $\bar{x} \in \mathcal{X}$ es una **solución de cuadrados mínimos (SCM)** de $Tx = y$ si

$$\|T\bar{x} - y\| = \inf \{\|Tz - y\| \mid z \in \mathcal{X}\}, \quad (1.8)$$

(ii) $\bar{x} \in \mathcal{X}$ es una **mejor solución aproximada (MSA)** de $Tx = y$ si \bar{x} es una SCM de $Tx = y$ de mínima norma, es decir tal que

$$\|\bar{x}\| = \inf \{\|z\| \mid z \in S_y\}, \quad (1.9)$$

donde $S_y = \{z \in \mathcal{X} \mid z \text{ es SCM de } Tx = y\}$.

Como veremos más adelante, la condición (1.9) introduce unicidad. Sin embargo, en algunos casos puede no resultar apropiado inducir unicidad imponiendo que la SCM tenga mínima norma. En estos casos suele reemplazarse la condición (1.9) por la condición de que \bar{x} minimice la norma $\|Lx\|$, donde L es un cierto operador (usualmente es un operador diferencial). Abordaremos este caso en la Sección 4.1.

A continuación enunciamos un número de resultados relacionados con las SCMs⁵ y con la inversa generalizada de Moore-Penrose que utilizaremos en demostraciones posteriores. Debido a que estos resultados son bastantes conocidos y se encuentran en la mayoría de los libros que tratan dicho tema, no incluimos las correspondientes demostraciones. En estos casos indicamos las referencias donde pueden hallarse los resultados y sus demostraciones. Sin embargo, en algunos casos, dada la importancia del tema se detallará parte de la demostración.

Señalamos además que en todo lo que sigue \mathcal{X} e \mathcal{Y} son espacios de Hilbert pero cabe destacar que muchos de los resultados valen para espacios normados.

Teorema 1.7. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $Q : \mathcal{Y} \rightarrow \overline{\mathcal{R}(T)}$ la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T)}$, $y \in \mathcal{Y}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) \bar{x} es una SCM de $Tx = y$,
- (ii) $T\bar{x} = Qy$,
- (iii) $T^*T\bar{x} = T^*y$, donde T^* es el operador adjunto de T .

Demostración. Ver [18], Teorema 2.5 y Teorema 2.6. ■

La ecuación

$$T^*Tx = T^*y \quad (1.10)$$

se conoce como **ecuación normal** asociada a $Tx = y$.

⁵SCMs es el plural de SCM.

Por el Teorema 1.7 (ii), el conjunto de las SCMs de (1.7) puede entonces escribirse como $S_y = \{z \in \mathcal{X} / Tz = Qy\}$.

Es oportuno señalar aquí que no siempre existen las SCMs de $Tx = y$ para ciertos valores de y , puesto que el $\mathcal{R}(T)$ no necesariamente es cerrado y el ínfimo en (1.8) puede no ser alcanzado. Así por ejemplo, si $y \in \mathcal{Y}$ es tal que $Qy \notin \mathcal{R}(T)$, en cuyo caso $Qy \in \overline{\mathcal{R}(T)}$, se tiene que $S_y = \emptyset$. El mayor subconjunto U de \mathcal{Y} , con respecto a la inclusión, para el cual $y \in U$ implica $Qy \in \mathcal{R}(T)$ es $\mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$. Para $y = y_{\mathcal{R}} + y_{\mathcal{R}^\perp}$ con $y_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}(T)$ e $y_{\mathcal{R}^\perp} \in \mathcal{R}(T)^\perp$, se tiene que $Qy = y_{\mathcal{R}}$ y en consecuencia $S_y \neq \emptyset$. Se sigue entonces que, una SCM de (1.7) existe si y sólo si $y \in \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$. O sea

$$S_y \neq \emptyset \iff y \in \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp. \quad (1.11)$$

Más aún, en virtud del Teorema 1.7 (ii) para $y \in \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$, $S_y = T^{-1}(\{Qy\})$ es un conjunto convexo⁶, cerrado⁷ y no vacío. En consecuencia (ver Teorema A.28), contiene un único elemento de mínima norma al que notaremos con x^\dagger . Claramente (ver Definición 1.6 (ii)), x^\dagger es la MSA de (1.7). A continuación probaremos que $x^\dagger \in \mathcal{N}(T)^\perp$. En efecto, $\mathcal{X} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^\perp$, puesto que $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio cerrado de \mathcal{X} por ser T un operador lineal y acotado (ver Teorema A.49). Resulta que, x^\dagger tiene representación única dada por $x^\dagger = x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{N}^\perp}$ con $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(T)$, $x_{\mathcal{N}^\perp} \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Luego, $Tx^\dagger = Tx_{\mathcal{N}^\perp} = Qy$ (pues $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T)^\perp$) implica $x_{\mathcal{N}^\perp} \in S_y$. Por otro lado, por el Teorema de Pitágoras (ver Teorema A.23), $\|x^\dagger\|^2 = \|x_{\mathcal{N}}\|^2 + \|x_{\mathcal{N}^\perp}\|^2$. Luego, si $x_{\mathcal{N}} \neq 0$ entonces $\|x^\dagger\| > \|x_{\mathcal{N}^\perp}\|$ lo cual es un absurdo pues x^\dagger es el elemento en S_y de mínima norma. Luego, $x_{\mathcal{N}} = 0$ y en consecuencia $x^\dagger = x_{\mathcal{N}^\perp} \in \mathcal{N}(T)^\perp$, como queríamos probar.

Finalmente, es sencillo probar que, para $y \in \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$, el conjunto de SCMs de (1.7) está dado por $S_y = x^\dagger + \mathcal{N}(T)$.

A continuación procedemos a introducir la definición de inversa generalizada de Moore-Penrose de T , y su relación con las SCMs y la MSA de (1.7).

Definición 1.8. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\tilde{T} \doteq T|_{\mathcal{N}(T)^\perp}: \mathcal{N}(T)^\perp \rightarrow \mathcal{R}(T)$ la restricción de T al $\mathcal{N}(T)^\perp$. La **inversa generalizada de Moore-Penrose** de T , que denotaremos como T^\dagger , se define como la única extensión lineal de \tilde{T}^{-1} al subespacio denso de \mathcal{Y}

$$\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp \quad (1.12)$$

que verifica

$$\mathcal{N}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T)^\perp. \quad (1.13)$$

Es claro que T^\dagger está bien definido pues \tilde{T} es biyectivo ($\mathcal{N}(\tilde{T}) = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T)^\perp = \{0\}$ y $\mathcal{R}(\tilde{T}) = \mathcal{R}(T)$), y en consecuencia existe \tilde{T}^{-1} . Por otro lado, puesto que todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ puede escribirse en forma única como $y = y_{\mathcal{R}} + y_{\mathcal{R}^\perp}$, con $y_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}(T)$, $y_{\mathcal{R}^\perp} \in \mathcal{R}(T)^\perp$, en virtud de (1.13) y de la linealidad de T^\dagger se sigue que

$$T^\dagger y = \tilde{T}^{-1} y_{\mathcal{R}} = \tilde{T}^{-1} Qy. \quad (1.14)$$

La identidad (1.14) puede utilizarse para definir la inversa generalizada de Moore-Penrose de T en términos de los operadores \tilde{T} y Q .

⁶En efecto, $\forall z_1, z_2 \in S_y$ y $0 \leq a \leq 1$: $T(a z_1 + (1-a) z_2) = a T(z_1) + (1-a) T(z_2) = a Qy + (1-a) Qy = Qy$, de modo que $a z_1 + (1-a) z_2 \in S_y$.

⁷Por ser T continuo: la imagen inversa del conjunto $\{Qy\}$ cerrado en \mathcal{Y} , es cerrado en \mathcal{X} .

Observación 1.9. Es claro que:

- 1) Si $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado $T^\dagger y$ no está definido para todo $y \in \mathcal{Y}$ pues $\mathcal{D}(T^\dagger) \subsetneq \mathcal{Y}$. Obviamente que si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, $T^\dagger = T^{-1}$ pues en tal caso $T = \hat{T}$.
- 2) Para definir la inversa generalizada de Moore-Penrose de T no es necesaria la acotación de T , pero sí su linealidad.

Observación 1.10. Se puede probar que:

- 1) $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$.
- 2) El operador T^\dagger satisface las siguientes cuatro condiciones conocidas como **ecuaciones de Moore-Penrose**

$$TT^\dagger T = T \quad (1.15)$$

$$T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger \quad (1.16)$$

$$T^\dagger T = I - P \quad (1.17)$$

$$TT^\dagger = Q|_{\mathcal{D}(T^\dagger)} \quad (1.18)$$

siendo $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{N}(T)$ y $Q : \mathcal{Y} \rightarrow \overline{\mathcal{R}(T)}$ las proyecciones ortogonales de \mathcal{X} sobre $\mathcal{N}(T)$ y de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T)}$, respectivamente.

- 3) Las ecuaciones (1.17) y (1.18) implican (1.15) y (1.16). Cualquier operador que satisface (1.15) o (1.16) se dice un *inverso interior* o *inverso exterior* de T , respectivamente.
- 4) Las ecuaciones de Moore-Penrose caracterizan unívocamente a T^\dagger , esto es, T^\dagger es el único operador que satisface las cuatro ecuaciones (1.15) - (1.18). Si \hat{T} es un operador lineal tal que $\hat{T}T$ y $T\hat{T}$ son proyecciones ortogonales, entonces $\hat{T} = T^\dagger$. Por ello, es suficiente asumir para la caracterización de T^\dagger que $T^\dagger T$ y TT^\dagger son proyecciones ortogonales.

Probemos ahora que el operador T^\dagger mapea $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ en la MSA x^\dagger de (1.7). En efecto, si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, vemos que $x^\dagger \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} x^\dagger &= (I - P)x^\dagger \quad (\text{pues } I - P \text{ es la proyección ortogonal sobre } \mathcal{N}(T)^\perp) \\ &= T^\dagger T x^\dagger \quad (\text{por (1.17)}) \\ &= T^\dagger Q y \quad (\text{por Teorema 1.7 (ii)}) \\ &= T^\dagger T T^\dagger y \quad (\text{por (1.18)}) \\ &= T^\dagger y \quad (\text{por (1.16)}). \end{aligned}$$

Así, $T^\dagger y = x^\dagger$ como queríamos probar. En consecuencia, por (1.11), se tiene que

$$y \in \mathcal{D}(T^\dagger) \iff T^\dagger y \text{ es SCM de } Tx = y. \quad (1.19)$$

En la siguiente proposición se presentan dos propiedades muy importantes de la inversa generalizada de Moore-Penrose.

Proposición 1.11. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces:

- (i) El grafo, $\text{Gr}(T^\dagger)$, de la inversa generalizada de Moore-Penrose T^\dagger es cerrado.
- (ii) El operador T^\dagger es acotado si y sólo si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado.

Demostración. Ver [18], Proposición 2.4. ■

De la Proposición 1.11 se sigue entonces que la MSA depende de manera continua del dato y si y sólo si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado. Si $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado, entonces el problema (1.7) es mal condicionado ya que la dependencia de la MSA x^\dagger con respecto al dato y no es continua.

En lo que sigue veremos porque el operador T^*T tiene un rol importante en la búsqueda de SCMs.

Observemos ahora que, puesto que $x^\dagger = T^\dagger y$ es la SCM de mínima norma de (1.7), del Teorema 1.7 se sigue entonces que x^\dagger es solución de la ecuación normal (1.10) y en consecuencia $T^*T x^\dagger = T^*y$. Luego, si T^*T es inversible se sigue que

$$x^\dagger = (T^*T)^{-1}T^*y. \quad (1.20)$$

En el caso general (T^*T no necesariamente inversible), dado que x^\dagger es también la SCM de la ecuación normal $T^*T x = T^*y$ se tiene que

$$x^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*y. \quad (1.21)$$

Las identidades (1.20) y (1.21) serán de vital importancia en desarrollos ulteriores, en particular en la construcción y análisis de métodos continuos de regularización que desarrollaremos en el siguiente capítulo. De aquí la importancia del operador T^*T .

1.1.4 Operadores compactos: descomposición espectral y criterio de Picard

En esta subsección nos proponemos profundizar el estudio del caso particular de la ecuación (1.7) en el que T es compacto.

Como se mencionó anteriormente muchos problemas inversos resultan en una formulación del tipo (1.7) y en el que el operador es efectivamente compacto.

Con el objeto de enfatizar la compacidad del operador denotaremos al mismo con K en lugar de T .

Para operadores compactos sobre espacios normados tenemos el siguiente resultado clásico del análisis funcional (ver Teorema A.17 (vi) y Teorema A.56 (v)).

Proposición 1.12. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ compacto. Entonces, $\dim \mathcal{R}(K) < \infty$ si y sólo si $\mathcal{R}(K)$ es cerrado.

El siguiente teorema prueba que toda ecuación de la forma

$$Kx = y \quad (1.22)$$

con K compacto es, salvo en casos excepcionales, mal condicionada.

Teorema 1.13. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert de dimensión infinita y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ compacto tal que $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$. Entonces, K^\dagger es discontinuo.

Demostración. Se sigue inmediatamente de las Proposiciones 1.11 y 1.12. ■

Es oportuno observar que si \mathcal{Y} es de dimensión infinita la ecuación (1.22) es siempre mal condicionada. En efecto, si $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ se viola el tercer postulado de Hadamard (pues K^\dagger es discontinuo) mientras que si $\dim \mathcal{R}(K) < \infty$ se viola el primero (pues $\mathcal{R}(K) \subsetneq \mathcal{Y}$).

A continuación presentamos una breve introducción a la descomposición espectral de operadores compactos, la que será de fundamental importancia más adelante especialmente para la construcción de los llamados métodos espectrales de regularización.

Consideremos \mathcal{X} espacio normado y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ compacto y autoadjunto. Entonces (ver Teorema A.89), existen $J \subset \mathbb{N}$ y un autosistema $(\lambda_n; v_n)_{n \in J}$ para K , que consiste de todos los autovalores no nulos λ_n (ordenados en forma decreciente) de K y los correspondientes autovectores v_n los cuales forman un sistema ortonormal completo en $\overline{\mathcal{R}(K)} = \mathcal{N}(K)^\perp$. El operador K (y por consiguiente K^*) tiene la siguiente representación

$$Kx = \sum_{n \in J} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n, \quad x \in \mathcal{X}, \quad (1.23)$$

llamada, a menudo, **expansión en autovalores, representación espectral o diagonalización** de K . Si $\dim \mathcal{R}(K) = N$ se tiene que $J = \{1, 2, \dots, N\}$. Si $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ tenemos $J = \mathbb{N}$.

La representación (1.23) nos permite resolver la ecuación (1.22) para cualquier $y \in \overline{\mathcal{R}(K)}$. Se sigue inmediatamente de (1.22) y (1.23) que la ecuación $Kx = y$ tiene solución si y sólo si $y \in \overline{\mathcal{R}(K)}$ y en tal caso la solución general es de la forma

$$x = x_0 + \sum_{n \in J} \lambda_n^{-1} \langle y, v_n \rangle v_n, \quad x_0 \in \mathcal{N}(K).$$

En efecto, $y \in \mathcal{X}$ tiene una representación dada por

$$y = y_0 + \sum_{n \in J} \langle y, v_n \rangle v_n, \quad y_0 \in \mathcal{N}(K). \quad (1.24)$$

En consecuencia, (por (1.23) y (1.24)), se tiene que

$$\begin{aligned} Kx = y &\implies \sum_{n \in J} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n = y_0 + \sum_{n \in J} \langle y, v_n \rangle v_n, \quad y_0 \in \mathcal{N}(K) \\ &\implies \sum_{n \in J} (\langle y, v_n \rangle - \lambda_n \langle x, v_n \rangle) v_n + y_0 = 0, \quad y_0 \in \mathcal{N}(K) \\ &\implies \begin{cases} y_0 = 0 \\ \forall n \in J, \langle y, v_n \rangle = \lambda_n \langle x, v_n \rangle \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} y \in \mathcal{N}(K)^\perp = \overline{\mathcal{R}(K)} \quad (\text{por (1.24)}) \\ \forall n \in J, \langle x, v_n \rangle = \lambda_n^{-1} \langle y, v_n \rangle. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Todo $x \in \mathcal{X}$ tiene una representación dada por

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sum_{n \in J} \langle x, v_n \rangle v_n, \quad x_0 \in \mathcal{N}(K) \text{ arbitrario} \\ &= x_0 + \sum_{n \in J} \lambda_n^{-1} \langle y, v_n \rangle v_n, \quad x_0 \in \mathcal{N}(K) \quad (\text{por (1.25)}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, todas las soluciones de $Kx = y$ son de la forma $x = x_0 + \sum_{n \in J} \lambda_n^{-1} \langle y, v_n \rangle v_n$ con $x_0 \in \mathcal{N}(K)$, como queríamos probar.

A continuación analizaremos brevemente la descomposición espectral para el caso de operadores compactos de un espacio normado \mathcal{X} en un espacio normado \mathcal{Y} . Sea $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ compacto. Entonces (ver Teorema A.91), existen $J \subset \mathbb{N}$ y un sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$ para K , donde $(\sigma_n^2; v_n)_{n \in J}$ y $(\sigma_n^2; u_n)_{n \in J}$ son los autosistemas correspondientes a los operadores compactos y autoadjuntos $K^*K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ y $KK^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, respectivamente, siendo los valores singulares σ_n las raíces cuadradas positivas de los autovalores σ_n^2 de dichos operadores. Los operadores K^*K y KK^* tienen las siguientes representaciones

$$K^*Kx = \sum_{n \in J} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n, \quad x \in \mathcal{X}, \quad (1.26)$$

$$KK^*y = \sum_{n \in J} \sigma_n^2 \langle y, u_n \rangle u_n, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad (1.27)$$

y también valen las siguientes expresiones

$$Kx = \sum_{n \in J} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n, \quad x \in \mathcal{X}, \quad (1.28)$$

$$K^*y = \sum_{n \in J} \sigma_n \langle y, u_n \rangle v_n, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad (1.29)$$

conocidas como **expansiones en valores singulares** de K y K^* , respectivamente. Si $\dim \mathcal{R}(K) = N$ entonces se tiene que $J = \{1, 2, \dots, N\}$ y si $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ tenemos $J = \mathbb{N}$ y además $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.

Como veremos en el siguiente teorema, la descomposición espectral de operadores compactos nos brinda un criterio para la existencia de la MSA de (1.22) y además nos provee una representación espectral para K^\dagger .

Teorema 1.14. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados, $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un operador compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$, $y \in \mathcal{Y}$. Entonces:

(i)

$$y \in \mathcal{D}(K^\dagger) \iff \sum_{n \in J} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle y, u_n \rangle|^2 < \infty. \quad (\text{CRITERIO DE PICARD})$$

(ii) Para $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$,

$$K^\dagger y = \sum_{n \in J} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n. \quad (1.30)$$

Demostración. Claramente

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{D}(K^\dagger) &\iff K^\dagger y \text{ es SCM de } Kx = y \quad (\text{por (1.19)}) \\ &\iff K^\dagger y \text{ es SCM de la ecuación normal } K^*Kx = K^*y \quad (\text{por Teor 1.7}). \end{aligned}$$

Se sigue entonces de (1.26) y (1.29) que

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{D}(K^\dagger) &\iff K^\dagger y \in \mathcal{X} \text{ y } \sum_{n \in J} \sigma_n^2 \langle K^\dagger y, v_n \rangle v_n = \sum_{n \in J} \sigma_n \langle y, u_n \rangle v_n \\ &\iff \{ \langle K^\dagger y, v_n \rangle \}_{n \in J} \in \ell^2 \text{ y } \sum_{n \in J} \sigma_n^2 (\langle K^\dagger y, v_n \rangle - \sigma_n^{-1} \langle y, u_n \rangle) v_n = 0 \\ &\iff \{ \langle K^\dagger y, v_n \rangle \}_{n \in J} \in \ell^2 \text{ y } \langle K^\dagger y, v_n \rangle = \sigma_n^{-1} \langle y, u_n \rangle v_n \quad \forall n \in J \\ &\iff \{ \sigma_n^{-1} \langle y, u_n \rangle \}_{n \in J} \in \ell^2 \text{ y } \langle K^\dagger y, v_n \rangle = \sigma_n^{-1} \langle y, u_n \rangle v_n \quad \forall n \in J \end{aligned}$$

Finalmente, para $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$, $K^\dagger y = \sum_{n \in J} \langle K^\dagger y, v_n \rangle v_n = \sum_{n \in J} \sigma_n^{-1} \langle y, u_n \rangle v_n$. ■

Observar que el Criterio de Picard nos dice que para que la ecuación (1.22) posea SCMs no solamente es necesario que los coeficientes de Fourier $\langle y, u_n \rangle$ de y decaigan a cero sino que además deben hacerlo más rápido que los correspondientes valores singulares σ_n del operador K . Por otro lado, el análisis de (1.30) pone de manifiesto la forma en que posibles errores en y afectan a $K^\dagger y$. En efecto, componentes de error que corresponden a valores singulares σ_n grandes son inofensivos, mientras que los que corresponden a valores singulares σ_n pequeños son peligrosos, pues los mismos son amplificados por el factor σ_n^{-1} . Si $\dim \mathcal{R}(K) < \infty$ estos factores de amplificación están acotados (pues sólo hay un número finito de ellos) aunque la cota pueda ser muy grande. Sin embargo, si $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$, el factor σ_n^{-1} crece sin cota (pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$). De modo que, errores en y pueden ser arbitrariamente amplificados.

Resulta evidente que la inestabilidad en (1.30) se vuelve más severa cuanto más rápido decaen a cero los valores singulares. Esta observación permite cuantificar el **grado de mal condicionamiento** del problema (1.22). Así, se dice que el problema es **débilmente mal condicionado** si $\sigma_n = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$. De otro modo se dice que el problema es **severamente mal condicionado** (e.g., si $\sigma_n = \mathcal{O}(e^{-n})$). Así por ejemplo, si se desea obtener una aproximación razonable de la MSA y $\sigma_n = \mathcal{O}(e^{-n})$ puesto que en este caso los factores de amplificación son e^n , si existen errores en la determinación de y (como sucede siempre en la práctica) sólo podremos considerar unas pocas componentes de Fourier $\langle y, u_n \rangle$ del dato y y descartar las correspondientes a valores singulares pequeños, es decir, las correspondientes a altas frecuencias. Los problemas de tomografías computadas (Ejemplo 1.1) son problemas débilmente mal condicionados. Para la ecuación integral de Abel (1.6), que modela el caso radialmente simétrico, $\sigma_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$ y vale (aproximadamente) este orden, en general para tomografías computadas en dos dimensiones.

1.2 Regularización de problemas mal condicionados

En ésta sección presentaremos las definiciones, conceptos y elementos principales de la teoría matemática de regularización de problemas inversos lineales mal condicionados. Definiremos una variedad de conceptos fundamentales para diversos desarrollos ulteriores que nos proponemos abordar. Entre estos conceptos introduciremos los de solución regularizada, familia de operadores de regularización, parámetro de regularización, regla de elección de parámetro, método de regularización, órdenes de optimalidad, métodos de regularización óptimo y de orden óptimo, etc.

Siguiendo la filosofía de la sección anterior no incluimos las demostraciones de los resultados, debido a que éstos son conocidos y se encuentran en la mayoría de los libros, pero si indicamos las referencias donde pueden hallarse las mismas.

En términos bastantes generales, *regularizar* un problema mal condicionado significa aproximarlo por una familia paramétrica de problemas “cercaños” bien condicionados, cuyas soluciones aproximen en algún sentido la solución exacta del problema. Esta noción de regularización, que por supuesto dependerá del concepto de solución exacta que se considere, nos provera una manera de arriar en forma estable a una solución aproximada. Así mismo, estudiaremos en detalle métodos para construir explícitamente tales problemas “cercaños” y tales soluciones aproximadas y analizaremos diversas cuestiones relacionadas con la convergencia y órdenes de convergencia de tales aproximaciones.

1.2.1 Teoría general de regularización

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Supongamos que queremos aproximar la MSA de (1.7), es decir, $x^\dagger = T^\dagger y$ para un cierto y dado.

Como se mencionó anteriormente, en problemas concretos, y (es el dato) y su determinación están casi siempre afectados por ruido y/o errores de medición. Por tal motivo resulta de gran interés el estudio del problema

$$Tx = y^\delta, \quad \|y^\delta - y\| \leq \delta. \quad (1.31)$$

En éste contexto nos referiremos a y^δ como *dato perturbado* o *dato con ruido* y a δ como el *nivel de ruido*. Es oportuno señalar aquí que aunque el *dato exacto* y fuese conocido en forma exacta (lo cual raramente ocurre en la práctica), el tratamiento numérico-computacional del problema origina inexorablemente errores debido a los procesos de discretización y redondeo.

Como ya vimos, si el problema (1.7) es mal condicionado el operador T^\dagger no es acotado. Por lo tanto, la MSA de (1.31), $x_\delta^\dagger \doteq T^\dagger y^\delta$, no necesariamente existe (existe sólo si $y^\delta \in \mathcal{D}(T^\dagger)$) y, si existe, no necesariamente $T^\dagger y^\delta$ será una buena aproximación de $T^\dagger y$, pues T^\dagger no es continuo. Una vez más observamos claramente que la no acotación de T^\dagger genera problemas de estabilidad en la aproximación y el tratamiento numérico de los problemas (1.7) y (1.31). Es precisamente esta falta de estabilidad la que pone de manifiesto la necesidad de contar con herramientas matemáticas que permitan el

tratamiento adecuado (estable) de tales problemas. Estas herramientas matemáticas se denominan *métodos de regularización*.

La idea básica para el desarrollo de los métodos de regularización consiste en considerar la ecuación (1.7) para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, y no para un sólo dato específico y . De este modo, en lugar del problema individual (1.7) consideraremos la colección de problemas $\{Tx = y, y \in \mathcal{D}(T^\dagger)\}$. Podríamos decir entonces que lo que haremos será proceder a regularizar el operador T^\dagger .

Regularizar el operador T^\dagger consiste esencialmente en aproximar el mismo por una familia paramétrica $\{R_\alpha\}$ adecuadamente elegida de operadores continuos. Nos referiremos a α como el *parámetro de regularización* y pediremos que R_α aproxime a T^\dagger , en un sentido que formalizaremos más adelante, para $\alpha \rightarrow 0^+$. Con “adecuadamente elegida” queremos decir que pediremos que los operadores R_α sean tales que el problema $x = R_\alpha y$ sea bien condicionado para todo α y que definiendo $x_\alpha^\delta \doteq R_\alpha y^\delta$, a las que llamaremos *soluciones regularizadas*, se tenga que $x_\alpha^\delta \rightarrow x^\dagger$ para $\alpha \rightarrow 0^+$ y $\delta \rightarrow 0^+$, de algún modo apropiado. Como veremos más adelante, para que esto último suceda, el parámetro de regularización α deberá elegirse en función del nivel del ruido δ y del dato perturbado y^δ .

A continuación procederemos a formalizar rigurosamente todas las ideas y conceptos arriba mencionados.

Definición 1.15. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^+$ un conjunto de índices⁸ y para cada $\alpha \in \mathcal{I}$ sea $R_\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador continuo (no necesariamente lineal). Diremos que $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es una **familia de operadores de regularización (FOR) para T^\dagger** o simplemente una **regularización para T^\dagger** si, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe una función $\hat{\alpha} : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{I}$ llamada **regla de elección de parámetros (REP)** tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y^\delta \in \mathcal{Y} \\ \|y^\delta - y\| \leq \delta}} \hat{\alpha}(\delta, y^\delta) = 0 \quad (1.32)$$

y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y^\delta \in \mathcal{Y} \\ \|y^\delta - y\| \leq \delta}} \|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| = 0. \quad (1.33)$$

Para un dado $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, diremos que el par $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un **método de regularización convergente (MRC) para $Tx = y$** si se verifican (1.32) y (1.33).

Para simplificar la presentación anterior notaremos con $B_\delta(y)$ y $\overline{B_\delta(y)}$ a la bola abierta con radio δ y centro en y (ver (A.1)) y a la clausura de ella (ver (A.2)), respectivamente. Con estas notaciones (1.32) y (1.33) se expresan, respectivamente, como

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{y^\delta \in \overline{B_\delta(y)}} \hat{\alpha}(\delta, y^\delta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{y^\delta \in \overline{B_\delta(y)}} \|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| = 0.$$

⁸El conjunto de índices \mathcal{I} debe incluir al menos una sucesión $\alpha_n \rightarrow 0^+$.

Observación 1.16. De la Definición 1.15 se sigue que:

- 1) Puesto que para cada $\alpha \in \mathcal{I}$, R_α es continuo sobre todo \mathcal{Y} , se tiene que $x_\alpha^\delta \doteq R_\alpha y^\delta$ es una aproximación estable de $x^\dagger \doteq T^\dagger y$ (aún cuando $y^\delta \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$).
- 2) La condición (1.33) utiliza el concepto de peor error posible, esto es:

$$\sup_{y^\delta \in B_\delta(y)} \|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\|$$

Por lo tanto, si $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un MRC se tiene que las *soluciones regularizadas* $x_{\hat{\alpha}}^\delta \doteq R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta$ convergen a $T^\dagger y$ para $\delta \rightarrow 0^+$.

- 3) Los operadores R_α no necesariamente son lineales. Si R_α es lineal para todo $\alpha \in \mathcal{I}$ diremos que la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es una *regularización lineal* para T^\dagger y que el correspondiente $\text{MRC}(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un *método de regularización lineal convergente* (MRLC).
- 4) Para cada $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, la REP $\hat{\alpha}$ depende en general del nivel de ruido δ y del dato perturbado y^δ . Puesto que y^δ es una perturbación de y la regla $\hat{\alpha}$ depende de un modo implícito de y . Como en general y es desconocido tal dependencia de y sólo puede existir a través de algún conocimiento “*a-priori*” de tipo cualitativo sobre ciertas propiedades del dato desconocido y o equivalentemente de la correspondiente MSA x^\dagger (i.e., ciertas propiedades de regularidad de las mismas).

Usualmente se tiene que el conjunto de índices \mathcal{I} es de la forma $\mathcal{I} = (0, \alpha_0)$ para algún α_0 tal que $0 < \alpha_0 \leq \infty$; tal es el caso para la mayoría de los MRCs⁹ que estudiaremos en los Capítulos 2 y 3. Sin embargo, en algunos casos es posible que \mathcal{I} sea un conjunto discreto; tal es el caso por ejemplo de los llamados *métodos de regularización convergentes iterativos* como el Método de Landweber y el Método del Gradiente Conjugado. Señalamos sin embargo que estos últimos no serán estudiados en esta tesis.

En relación a las REPs¹⁰ distinguiremos entre dos tipos según estas dependan o no explícitamente de y^δ . Así diremos que $\hat{\alpha}$ es una **regla de elección de parámetro “a-priori”** si $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta)$ depende sólomente del nivel de ruido δ . En otro caso nos referiremos a $\hat{\alpha}$ como una **regla de elección de parámetro “a-posteriori”**. Esta terminología tiene su origen en el hecho que en el caso de REPs “*a-priori*”, el parámetro de regularización α puede elegirse o determinarse antes (“*a-priori*”) de que se disponga de la observación y^δ . En cambio, en el caso de REPs “*a-posteriori*” el parámetro de regularización α sólo puede determinarse después (“*a-posteriori*”) de contar con el valor concreto de y^δ . Un caso típico de REPs “*a-posteriori*” es la definida a través del Principio de Discrepancia de Morozov, que presentaremos en el siguiente capítulo.

En algunos casos puede suceder que el nivel de ruido δ y que una cota para el mismo sean desconocidos o poco confiables. En estos casos puede resultar necesario considerar reglas alternativas que no dependan de δ . Tal es el caso de las llamadas

⁹MRCs es el plural de MRC.

¹⁰REPs es el plural de REP.

reglas heurísticas. Sin embargo, es importante señalar que para problemas inversos mal condicionados tales REPs no pueden nunca formar parte de un MRC, en el sentido de la Definición 1.15. En este aspecto es oportuno mencionar el siguiente trascendental resultado debido a Bakushinskii ([6]).

Teorema 1.17. *Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una regularización para T^\dagger tal que, para cada $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe una REP $\hat{\alpha}$ que sólo depende de y^δ (y no de δ) y el par $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un MRC para $Tx = y$. Entonces T^\dagger es acotado.*

Demostración. Ver [6] y [18, Teorema 3.3]. ■

Como vimos (Teorema 1.11) si $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado entonces T^\dagger no es acotado y por lo tanto el teorema anterior implica que ningún MRC para (1.7) puede estar compuesto por una REP que no dependa explícitamente del nivel de ruido δ . Por supuesto, esto de ningún modo significa que tales reglas no puedan comportarse bien para niveles de ruido finito, resultando en aproximaciones razonables de x^\dagger . El resultado de Bakushinskii (Teorema 1.17) sólo implica que con tales REPs $\hat{\alpha}$ no puede obtenerse convergencia de $x_{\hat{\alpha}}^\delta$ a x^\dagger para $\delta \rightarrow 0^+$, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ y en consecuencia debe tenerse especial cuidado con la utilización de tales REPs, las cuales, no obstante, no serán tratadas en esta tesis.

Las preguntas que inmediatamente surgen son:

- 1) ¿Cómo construimos FORs¹¹ $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ y REPs $\hat{\alpha}$ de modo que formen parte de MRCs?
- 2) ¿Existe algún MRC $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ óptimo (en algún sentido)? En tal caso, ¿cómo se lo encuentra y/o construye?

En lo que resta de esta subsección daremos respuesta a la primera pregunta, es decir, abordaremos los problemas de construcción de FORs y REPs, mientras que intentaremos responder a la segunda pregunta en la siguiente subsección. El siguiente resultado permite afirmar que se pueden construir FORs mediante aproximaciones puntuales de la inversa generalizada de Moore-Penrose.

Proposición 1.18. *Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una familia de operadores continuos (no necesariamente lineales). Si, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$*

$$R_\alpha y \rightarrow T^\dagger y \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+ \quad (1.34)$$

entonces $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es una regularización para T^\dagger . En este caso, para cada $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe una REP “a-priori” $\hat{\alpha}$ tal que $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un MRC para $Tx = y$.

Demostración. Ver [18], Proposición 3.4. ■

Es oportuno señalar que también vale el recíproco de la Proposición 1.18, como veremos a continuación.

¹¹FORs es el plural de FOR.

Observación 1.19. Si $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un MRC entonces, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, se sigue de (1.33) (con y en lugar de y^δ) que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} R_{\hat{\alpha}(\delta, y)} y = T^\dagger y$. Si $\hat{\alpha}$ es continua respecto de δ se tiene que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} R_\sigma y = T^\dagger y \quad (1.35)$$

de lo contrario, (1.35) vale para $\sigma \in \mathcal{R}(\hat{\alpha})$.

En consecuencia, las regularizaciones para T^\dagger son siempre (en el sentido de la observación anterior) aproximaciones puntuales de la inversa generalizada de Moore-Penrose de T .

A continuación probaremos que, bajo ciertos supuestos sobre la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$, si T^\dagger no es acotado, entonces la convergencia en (1.34) no puede ser en la norma de los operadores. También veremos que si T^\dagger no es acotado, entonces la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ no puede ser uniformemente acotada con respecto a α .

Proposición 1.20. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado y $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.

- (i) Si $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es uniformemente acotada con respecto a α entonces $R_\alpha \rightarrow T^\dagger$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.
- (ii) Si $R_\alpha y \rightarrow T^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ entonces $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ no es uniformemente acotada con respecto a α .

Demostración.

- (i) Supongamos que $\|R_\alpha - T^\dagger\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$ en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Entonces existe $\bar{\alpha} \in \mathcal{I}$ tal que $\|R_{\bar{\alpha}} - T^\dagger\| \leq 1$. Como por hipótesis $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es uniformemente acotada con respecto a α , existe $c > 0$ (independiente de α) tal que $\|R_\alpha\| \leq c \forall \alpha \in \mathcal{I}$. Así, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T^\dagger y\| &\leq \|R_{\bar{\alpha}} y - T^\dagger y\| + \|R_{\bar{\alpha}} y\| \quad (\text{por la Desigualdad Triangular}) \\ &\leq (1 + \|R_{\bar{\alpha}}\|) \|y\| \\ &\leq (1 + c) \|y\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto T^\dagger es acotado contradiciendo la hipótesis que $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado (Proposición 1.11).

- (ii) Supongamos que $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es uniformemente acotada con respecto a α y que $R_\alpha y \rightarrow T^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Por ser $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ uniformemente acotada con respecto a α , existe $c > 0$ (independiente de α) tal que $\|R_\alpha\| \leq c \forall \alpha \in \mathcal{I}$. Así, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T^\dagger y\| &= \left\| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} R_\alpha y \right\| \\ &= \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \|R_\alpha y\| \quad (\text{pues } \|\cdot\| \text{ es continua}) \\ &\leq \left(\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \|R_\alpha\| \right) \|y\| \quad (\text{pues } R_\alpha \text{ es acotado}) \\ &\leq c \|y\| \quad (\text{pues } c \text{ es la cota uniforme de } \{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}) \end{aligned}$$

y por lo tanto T^\dagger es acotado contradiciendo nuevamente la hipótesis que $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado.

Queda así demostrada la proposición. \blacksquare

Notar que si $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ no es uniformemente acotada con respecto a α , entonces por el Principio de Acotación Uniforme (Teorema A.52), existe $\bar{y} \in \mathcal{Y}$ tal que

$$\|R_\alpha \bar{y}\| \rightarrow \infty \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (1.36)$$

Observar que, puesto que $R_\alpha y \rightarrow T^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ y T^\dagger no está definido en $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{D}(T^\dagger)$, no es de esperar que R_α permanezca acotado en dicho conjunto cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. En efecto, el siguiente resultado afirma que (1.36) es cierto para $y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{D}(T^\dagger)$.

Proposición 1.21. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una regularización lineal para T^\dagger , $y \in \mathcal{Y}$.

(i) Si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ entonces

$$R_\alpha y \rightarrow T^\dagger y \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (1.37)$$

(ii) Si $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$ y

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{I}} \|TR_\alpha\| < \infty \quad (1.38)$$

entonces

$$\|R_\alpha y\| \rightarrow +\infty \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (1.39)$$

Los límites en (1.37) y (1.39) deben entenderse en el sentido de la Observación 1.19.

Demostración. Ver [18], Proposición 3.6. \blacksquare

A continuación enunciaremos una propiedad importante de las REPs “*a-priori*”. Para ello observar ahora que, en virtud de la Proposición 1.18, si $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ satisface (1.34) entonces, para cada $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe una REP “*a-priori*” $\hat{\alpha}$ tal que $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un MRLC para $Tx = y$, y por lo tanto, para el llamado error de regularización, se tiene que $\|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y - T^\dagger y\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$. Para el error total, que es aquel que surge de comparar la solución regularizada $R_{\hat{\alpha}(\delta)} y^\delta$ y la MSA $T^\dagger y$, i.e. $\|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y^\delta - T^\dagger y\|$, se tiene la siguiente estimación para todo $y^\delta \in \mathcal{Y}$ con $\|y - y^\delta\| \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| &\leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y - T^\dagger y\| + \|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y^\delta - R_{\hat{\alpha}(\delta)} y\| \\ &\leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta)} y - T^\dagger y\| + \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\|. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Por lo tanto, cuando el nivel de ruido tiende a cero (i.e., $\delta \rightarrow 0^+$), el error total tiende a cero cuando ambos términos en (1.40) tienden a cero. La siguiente proposición caracteriza las REPs “*a-priori*” para las cuales el error total tiende a cero en el sentido que esto sucede si y sólo si ambos términos en (1.40) tienden a cero.

Proposición 1.22. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una regularización lineal para T^\dagger . Para cada $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, sea $\hat{\alpha} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una REP “a-priori”. Entonces $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es un MRLC si y sólo si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \hat{\alpha}(\delta) = 0 \quad y \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}\| = 0.$$

Demostración. Ver [18], Proposición 3.7. ■

En la siguiente subsección daremos respuesta al segundo interrogante que nos planteamos anteriormente, esto es, abordaremos el problema de la optimalidad de un método de regularización.

1.2.2 Orden de optimalidad

Ya mencionamos que para hallar una solución aproximada estable del problema (1.7), cuando sólo se disponen de datos con ruido $y^\delta \in \mathcal{Y}$ con $\|y^\delta - y\| \leq \delta$, debe utilizarse algún método de regularización con el fin de obtener soluciones estables, $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$, con la propiedad que $x_\alpha^\delta \rightarrow x^\dagger \doteq T^\dagger y$ cuando el nivel de ruido $\delta \rightarrow 0^+$. En consecuencia, es importante estudiar el orden de convergencia del método de regularización $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$, es decir, con que velocidad

$$\|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\| \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0^+, \quad (1.41)$$

siendo $x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta \doteq R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta$, y también con que velocidad

$$\|x_\alpha - x^\dagger\| \rightarrow 0 \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+, \quad (1.42)$$

siendo $x_\alpha \doteq R_\alpha y$, pues una estrategia de regularización se basa en el dato desconocido y .

A continuación definiremos tres tipos de errores.

Definición 1.23. Dado el MRC $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ y $x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}, x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta$ como se definieron previamente. Llamaremos **error de regularización** o **error de aproximación** a $\|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} - x^\dagger\|$. Llamaremos **error asociado al ruido** a $\|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}\|$. Finalmente, llamaremos **error total** a $\|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\|$.

Observar que el error de aproximación es el error debido a la regularización, mientras que el error asociado al ruido es debido a la propagación de error en los datos, mientras que el error total tiene ambas contribuciones, y por lo tanto, está generado por la regularización y por el ruido.

Observar además que el orden de convergencia en (1.41) depende de la REP $\hat{\alpha}$ mientras que el orden en (1.42) sólo depende de la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ y del dato exacto y . Sin embargo, ambos órdenes están relacionados puesto que

$$\|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} - x^\dagger\| + \|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}\|, \quad (1.43)$$

lo que en términos de las definiciones recientemente introducidas asegura que el error total esta acotado por la suma del error de regularización y del error asociado al ruido.

Luego, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, podemos escribir la siguiente estimación para el error total

$$\left\| x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger \right\| \leq \|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} - T^\dagger\| \|y\| + \|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}\| \delta,$$

de donde, en virtud de la Proposición (1.22), se sigue que si $\hat{\alpha}$ fuese una REP “*a-priori*” y $R_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} T^\dagger$ en la norma de los operadores podría obtenerse una tasa de convergencia uniforme para el error total para y en todo acotado contenido en $\mathcal{D}(T^\dagger)$. Sin embargo, puesto que T^\dagger no es acotado (i.e., $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado), en virtud de la Proposición (1.20) no es posible que $R_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} T^\dagger$ en la norma de los operadores. En consecuencia no es posible obtener una tasa de convergencia uniforme sobre compactos de $\mathcal{D}(T^\dagger)$. Aunque este razonamiento es válido solamente cuando $\hat{\alpha}$ es una REP “*a-priori*” lo mismo vale para REPs arbitrarias como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.24. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado, $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una FOR para T^\dagger con $R_\alpha(0) = 0$, $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\delta, y^\delta)$ una REP. Entonces no puede haber una función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\delta) = 0$ tal que, para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ con $\|y\| \leq 1$ y para todo $\delta > 0$, verifique que

$$\|R_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\delta).$$

Demostración. Ver [18], Proposición 3.11. ■

En virtud de la composición del error total en términos del error de regularización y del error debido al ruido (ver (1.43)) y del análisis precedente se sigue que el parámetro de regularización debe elegirse de manera apropiada para equilibrar ambos errores manteniendo el error total tan pequeño como sea posible. Para un nivel de ruido δ fijo, el error de regularización tiende a cero a medida que el parámetro de regularización α tiende a cero mientras que el error debido al ruido se incrementa indefinidamente. Por otro lado, para α fijo, si bien el error debido al ruido tiende a cero a medida que δ tiende a cero, no pasa lo mismo con el error de regularización. Por consiguiente, es posible concebir para cada $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ y para cada nivel del ruido δ fijos la existencia de un parámetro de regularización óptimo, α_{op} (ver Figura 1.4) que minimice el error total. Sin embargo, tal parámetro de regularización óptimo casi nunca puede calcularse explícitamente pues en general depende de la información no disponible sobre el dato exacto y , o equivalentemente sobre la solución exacta x^\dagger (tales como propiedades de regularidad y/o de acotación).

A continuación procedemos a abordar sucintamente cuestiones relacionadas con la optimalidad de un método de regularización. No obstante ello, es oportuno señalar que este tema no será encarado con mayor profundidad en este trabajo. A los efectos de garantizar cierto orden de convergencia usualmente se realizan supuestos “*a-priori*” sobre el grado de suavidad de x^\dagger . Para ello, restringiremos el conjunto al que pertenece

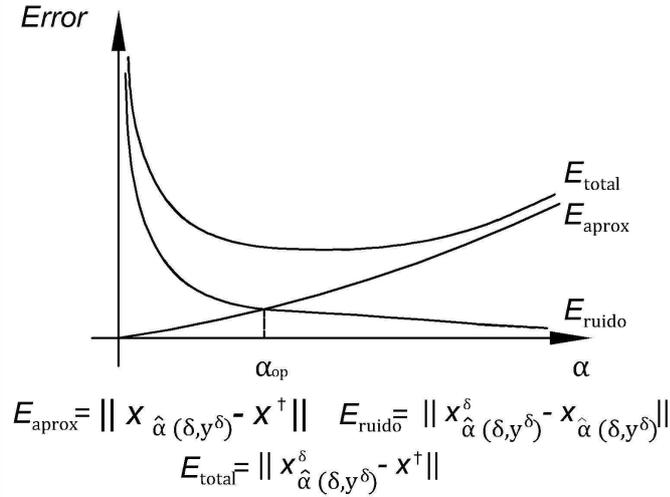


Figura 1.4: Comportamiento de los errores.

dicha solución a ciertos subconjuntos de \mathcal{X} llamados **conjuntos fuente**. De particular interés resultan conjuntos fuente definidos en términos de potencias fraccionarias del operador T^*T . Así definimos

$$\mathcal{X}_{\mu, \rho} \doteq \{x \in \mathcal{X} / x = (T^*T)^\mu w, \|w\| \leq \rho\}, \quad \mu, \rho > 0 \quad (1.44)$$

y

$$\mathcal{X}_\mu \doteq \bigcup_{\rho > 0} \mathcal{X}_{\mu, \rho} = \mathcal{R}((T^*T)^\mu), \quad \mu > 0. \quad (1.45)$$

Proposición 1.25. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ y \mathcal{X}_μ los conjuntos fuente definidos por (1.44) y (1.45), respectivamente. Entonces

- (i) $\forall \mu > 0, \mathcal{X}_\mu \subset \mathcal{N}(T)^\perp$,
- (ii) $\forall \mu, \rho > 0, \mathcal{X}_{\mu, \rho} \subset \mathcal{N}(T)^\perp$,
- (iii) $\forall \mu_1, \mu_2 > 0 : \mu_1 \leq \mu_2, \mathcal{X}_{\mu_2} \subset \mathcal{X}_{\mu_1}$,
- (iv) $\forall \mu > 0, \forall \rho_1, \rho_2 > 0 : \rho_1 \leq \rho_2, \mathcal{X}_{\mu, \rho_1} \subset \mathcal{X}_{\mu, \rho_2}$.

Demostración.

(i) Sea $\mu > 0$

$$\begin{aligned}
 x \in \mathcal{X}_\mu &\implies x = (T^*T)^\mu w, \quad w \in \mathcal{X} \quad (\text{por (1.45)}) \\
 &\implies \langle x, u \rangle = \langle T(T^*T)^{\mu-1}w, Tu \rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{N}(T) \\
 &\implies x \in \mathcal{N}(T)^\perp.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{X}_\mu \subset \mathcal{N}(T)^\perp$.

(ii) Sean $\mu, \rho > 0$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho} &\implies x \in \mathcal{X}_{\mu} \quad (\text{pues } \mathcal{X}_{\mu, \rho} \subset \mathcal{X}_{\mu} \text{ por (1.45)}) \\ &\implies x \in \mathcal{N}(T)^{\perp} \quad (\text{por (i)}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{X}_{\mu, \rho} \subset \mathcal{N}(T)^{\perp}$.

(iii) Sean $\mu_1, \mu_2 > 0$ tal que $\mu_1 \leq \mu_2$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{X}_{\mu_2} &\implies x = (T^*T)^{\mu_2}w, \quad w \in \mathcal{X} \quad (\text{por (1.45)}) \\ &\implies x = (T^*T)^{\mu_1}(T^*T)^{\mu_2 - \mu_1}w, \quad w \in \mathcal{X} \\ &\implies x = (T^*T)^{\mu_1}\tilde{w}, \quad \tilde{w} \in \mathcal{X} \quad (\text{pues } \mu_2 - \mu_1 > 0) \\ &\implies x \in \mathcal{X}_{\mu_1} \quad (\text{por (1.45)}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{X}_{\mu_2} \subset \mathcal{X}_{\mu_1}$.

(iv) Sean $\mu > 0$ y $\rho_1, \rho_2 > 0$ tal que $\rho_1 \leq \rho_2$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho_1} &\implies x = (T^*T)^{\mu}w, \quad \|w\| \leq \rho_1 \quad (\text{por (1.45)}) \\ &\implies x = (T^*T)^{\mu}w, \quad \|w\| \leq \rho_2 \quad (\text{pues } \rho_1 \leq \rho_2) \\ &\implies x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho_2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{X}_{\mu, \rho_1} \subset \mathcal{X}_{\mu, \rho_2}$.

Queda así demostrada la proposición. ■

Se dice que un elemento $x \in \mathcal{X}$ tiene una **representación fuente**¹² (en términos del operador T^*T) si existe $\mu > 0$ tal que $x \in \mathcal{X}_{\mu}$ y la condición $x \in \mathcal{X}_{\mu}$ se denomina **condición fuente**.

Como vimos anteriormente los operadores asociados a problemas mal condicionados tienen la propiedad de atenuar ruidos o errores en componentes de alta frecuencia en los datos. Es bastante intuitivo y razonable concebir a ese grado de atenuación como el grado de molificación o suavidad que le induce el operador (e.g., un operador integral de primer orden induce un grado de molificación igual a 1, un operador diferencial de segundo orden induce un grado de molificación igual a 2, el operador asociado a la transformada de Radón del Ejemplo 1.1 induce un grado de molificación igual a $\frac{1}{2}$). Por esta razón condiciones fuente de la forma

$$x \in \mathcal{X}_{\mu} \quad \text{o} \quad x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$$

cuantifican el grado de regularidad de x (en términos del grado de molificación del correspondiente operador T).

En el caso en que $T = K$ sea un operador compacto el siguiente resultado permite caracterizar los conjuntos fuente \mathcal{X}_{μ} en términos de los valores singulares del operador.

¹²Una *representación fuente* general es de la forma $x = f(T^*T)w$, donde $f : [0, \|T\|^2] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, estrictamente creciente y $f(0) = 0$. La correspondiente representación fuente es $x \in \mathcal{R}(f(T^*T))$. La condición $x \in \mathcal{X}_{\mu}$ corresponde al caso particular $f(t) = t^{\mu}$ para $t > 0$.

Proposición 1.26. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un operador compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$. Entonces, para $\mu > 0$, se tiene que

$$K^\dagger y \in \mathcal{X}_\mu \iff \sum_{n \in J} \frac{1}{\sigma_n^{2+4\mu}} |\langle y, u_n \rangle|^2 < \infty. \quad (1.46)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} K^\dagger y \in \mathcal{X}_\mu &\iff \exists w \in \mathcal{X} : K^\dagger y = (K^* K)^\mu w \quad (\text{por (1.45)}) \\ &\iff \exists w \in \mathcal{X} : \sum_{n \in J} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n = \sum_{n \in J} \sigma_n^{2\mu} \langle w, v_n \rangle v_n \quad (\text{por (1.30) y (B.4)}) \\ &\iff \{ \langle w, v_n \rangle \}_{n \in J} \in \ell^2 \text{ y } \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle = \sigma_n^{2\mu} \langle w, v_n \rangle \quad \forall n \in J \\ &\iff w = \sum_{n \in J} \frac{1}{\sigma_n^{1+2\mu}} \langle y, u_n \rangle v_n \in \mathcal{X} \\ &\iff \left\{ \frac{1}{\sigma_n^{1+2\mu}} \langle y, u_n \rangle \right\}_{n \in J} \in \ell^2 \\ &\iff \sum_{n \in J} \frac{1}{\sigma_n^{2+4\mu}} |\langle y, u_n \rangle|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Queda entonces demostrado (1.46). ■

La condición $\sum_{n \in J} \frac{1}{\sigma_n^{2+4\mu}} |\langle y, u_n \rangle|^2 < \infty$ impone una restricción sobre la velocidad de decaimiento de los coeficientes de Fourier $\langle y, u_n \rangle$ de y , la cual, obviamente, se torna más severa a medida que μ se incrementa. Notar que en el caso límite $\mu = 0$ tal condición reconstruye el Criterio de Picard (Teorema 1.14) en concordancia con el hecho que $\mathcal{X}_0 = \mathcal{R}((T^*T)^0) = \mathcal{R}(I) = \mathcal{X}$.

En lo que resta de esta subsección formalizaremos el concepto de *optimalidad* de un método de regularización, y analizaremos de que manera se pueden construir métodos de regularización que posean órdenes de convergencia óptimos.

Definición 1.27. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $R : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador (no necesariamente lineal). Se define el **peor error** asociado a R bajo la información que $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ y el supuesto “a-priori” que $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ como

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R) \doteq \sup \{ \|Ry^\delta - x\| \mid x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}, y^\delta \in \mathcal{Y}, \|Tx - y^\delta\| \leq \delta \}. \quad (1.47)$$

El siguiente resultado proporciona una cota inferior para el peor error asociado a cualquier operador R , en consecuencia, también una cota inferior para la velocidad de convergencia de cualquier método de regularización.

Proposición 1.28. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\delta > 0$, $R : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador tal que $R(0) = 0$, y definamos

$$\Omega(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}) \doteq \sup \{ \|x\| \mid x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}, \|Tx\| \leq \delta \}. \quad (1.48)$$

Entonces

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R) \geq \Omega(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}). \quad (1.49)$$

Demostración. Ver [18], Proposición 3.10. ■

En virtud de la Proposición 1.28 resulta de particular interés tratar de estimar la cota (1.48). Un resultado en esta dirección lo provee la siguiente proposición.

Proposición 1.29. Sean $\mu, \rho, \delta > 0$, $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ y $\Omega(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho})$ definidos como en (1.44) y (1.48), respectivamente. Entonces

$$\Omega(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}) \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (1.50)$$

Demostración. Ver [18]. Proposición 3.14. ■

La estimación (1.50) es óptima como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.30. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un operador compacto tal que $\mathcal{R}(K)$ no es cerrado. Entonces, para todo $\mu, \rho > 0$, existe una sucesión $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\delta_n \rightarrow 0^+$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$\Omega(\delta_n, \mathcal{X}_{\mu, \rho}) = \delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (1.51)$$

Demostración. Ver [18], Proposición 3.15. ■

De las Proposiciones 1.28, 1.29 y 1.30 concluimos que, si $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado, ningún método de regularización para (1.7) puede proveer soluciones regularizadas que converjan a x^\dagger más rápido que $\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$ cuando $\delta \rightarrow 0^+$ bajo el supuesto “*a-priori*” $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$; o bien, si sólo nos interesa el orden, no más rápido que $\mathcal{O}(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$ bajo el supuesto “*a-priori*” $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$. Es decir, de todos los órdenes de la forma $\mathcal{O}(\delta^s)$, el mejor posible se obtiene con $s \doteq \frac{2\mu}{2\mu+1}$. Notese que, aún en el mejor caso posible, siempre hay pérdida intrínseca de información pues $\frac{2\mu}{2\mu+1} < 1$.

Dentro de una clase \mathcal{R} de operadores, es razonable llamar “operador óptimo” a aquel operador R_{op} que satisfaga

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R_{op}) = \inf_{R \in \mathcal{R}} \Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R).$$

Sin embargo, esta noción de optimalidad resulta demasiado restrictiva. Por ello, y a la luz de las consideraciones anteriormente efectuadas, se presentan a continuación cuatro definiciones de optimalidad las que resultan más apropiadas para el estudio de órdenes de convergencia en el presente contexto y serán analizadas en los capítulos subsiguientes.

Definición 1.31. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado, $\mu > 0$, $\rho > 0$, $y \in T(\mathcal{X}_{\mu, \rho})$ y $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ un método de regularización para (1.7). Diremos que:

(i) $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es **óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$** si

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R_{\hat{\alpha}}) = \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}, \quad \forall \delta > 0; \quad (1.52)$$

- (ii) $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es **óptimo en \mathcal{X}_μ** si es óptimo en $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$, $\forall \rho > 0$;
- (iii) $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es **de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$** si existe $c \geq 1$ tal que

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu,\rho}, R_{\hat{\alpha}}) \leq c \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}, \quad \forall \delta > 0; \quad (1.53)$$

- (iv) $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha})$ es **de orden óptimo en \mathcal{X}_μ** si es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$, $\forall \rho > 0$.

Es claro que (1.53) es equivalente a $\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu,\rho}, R_{\hat{\alpha}}) = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$ cuando $\delta \rightarrow 0^+$.

Observemos que a medida que μ crece los conjuntos fuente \mathcal{X}_μ decrecen (esto es, si $\mu_1 < \mu_2$ entonces $\mathcal{X}_{\mu_2} \subset \mathcal{X}_{\mu_1}$) y los correspondientes órdenes óptimos de la definición anterior mejoran (pues si $\mu_1 < \mu_2$ entonces $\frac{2\mu_1}{2\mu_1+1} < \frac{2\mu_2}{2\mu_2+1}$).

También es oportuno señalar que si un método es de orden óptimo en un cierto conjunto fuente $\mathcal{X}_{\bar{\mu}}$ entonces en principio no es claro que esto implique que deba ser óptimo sobre otros conjuntos fuente \mathcal{X}_μ , ni siquiera que deba ser convergente para todo $y \in \mathcal{R}(T)$. Sin embargo, el siguiente resultado debido a Plato ([56]) muestra que, bajo hipótesis bastante débiles, un método de regularización de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\bar{\mu}}$ es también óptimo en \mathcal{X}_μ para $\mu \leq \bar{\mu}$ y convergente para todo $y \in \mathcal{R}(T)$. Sólomente se requiere del método de regularización que su correspondiente REP dependa de y^δ y de una cota para el nivel de ruido ligeramente mayor que δ . Más precisamente, supongamos que $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es una regularización para T^\dagger y que $\hat{\alpha}$ es una REP. Definimos una nueva REP $\hat{\alpha}_\tau$ como

$$\hat{\alpha}_\tau(\delta, y^\delta) = \hat{\alpha}(\tau\delta, y^\delta), \quad (1.54)$$

donde τ es una constante mayor que 1. El resultado de Plato es el siguiente.

Teorema 1.32. *Si, para todo $\tau > \tau_0 \geq 1$, el método de regularización $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha}_\tau)$ es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\bar{\mu},\rho}$ para algún $\bar{\mu} > 0$ y para todo $\rho > 0$, entonces el método de regularización $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}, \hat{\alpha}_\tau)$ con $\tau > \tau_0 \geq 1$ es convergente para $y \in \mathcal{R}(T)$ y de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$ para todos μ, ρ tales que $0 < \mu \leq \bar{\mu}$ y $\rho > 0$.*

Demostración. Ver [56] y [18, Proposición 3.18]. ■

En el capítulo siguiente veremos que las hipótesis del Teorema 1.32 se satisfacen para la mayoría de las REPs. También construiremos métodos de regularización que serán de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$ o en \mathcal{X}_μ , primero para REPs “*a-priori*” (Sección 2.2) y luego para REPs “*a-posteriori*” (Sección 2.5).

Capítulo 2

Métodos espectrales de regularización

En éste capítulo estudiaremos en detalle una amplia variedad de métodos lineales de regularización. La construcción de tales métodos estará basada en la Teoría Espectral para operadores lineales y autoadjuntos en espacios de Hilbert, a los que llamaremos *Métodos Espectrales* o *Continuos de Regularización*. Presentaremos resultados de convergencia, los conceptos de calificación y saturación, y algunos resultados recíprocos. Además, construiremos métodos espectrales de regularización con REPs “*a-priori*” y “*a-posteriori*”, que resultarán de orden óptimo en ciertos conjuntos fuente.

A los efectos de completitud y para una lectura más fluida de este trabajo hemos incluido en el apéndice la mayoría de los conceptos y resultados básicos del Análisis Funcional (Apéndice A) y de la Teoría Espectral y Cálculo Funcional (Apéndice B), en el convencimiento que el lector muy probablemente ya esté familiarizado con la mayoría de ellos.

2.1 Teoría general

A lo largo de este capítulo \mathcal{X} e \mathcal{Y} denotarán espacios de Hilbert y T un operador lineal y acotado de \mathcal{X} en \mathcal{Y} . En el capítulo anterior definimos el concepto de mal condicionamiento de un problema y señalamos que, desde el punto de vista práctico, la causa más grave del mal condicionamiento es la violación del tercer postulado de Hadamard. Además definimos los conceptos de mejor solución aproximada (MSA) e inversa generalizada de Moore-Penrose de T , que notamos x^\dagger y T^\dagger respectivamente. También vimos que el problema inverso

$$Tx = y \tag{2.1}$$

admite una única MSA $x^\dagger = T^\dagger y$ si y sólo si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ y vimos que si el problema es mal condicionado (i.e. T^\dagger no acotado), la dependencia de la MSA con respecto al dato y no es continua. Es esta falta de dependencia continua de los datos la que genera problemas de inestabilidad cuando se aproxima la solución del problema por métodos numéricos tradicionales. Como mencionamos anteriormente, los métodos de regularización son las herramientas matemáticas que permiten aproximar la solución del problema manteniendo la estabilidad del mismo.

Con el objeto de proceder al estudio y construcción de métodos de regularización generales para el problema (2.1) consideraremos una familia espectral asociada al operador autoadjunto $T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, que de ahora en más denotaremos con $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ (Definición B.1), y denotaremos con \mathcal{M}_0 al conjunto de funciones reales con valores reales medibles con respecto a la medida $d\|E_\lambda x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Supongamos que el operador T^*T es inversible con inversa continua (o sea, $\exists (T^*T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$), de modo que $0 \notin \sigma(T^*T)$. Como la función $f(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda} \in \mathcal{M}_0$ entonces, por la Definición B.8, el operador $(T^*T)^{-1}$ tiene la siguiente representación

$$(T^*T)^{-1}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda x, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (2.2)$$

Como se mencionó en el Capítulo 1, si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ cualquier SCM de $Tx = y$, y en particular la MSA $x^\dagger = T^\dagger y$, es solución de la ecuación normal (1.10) y en consecuencia, $T^*Tx^\dagger = T^*y$. Como T^*T es inversible se tiene que

$$x^\dagger = (T^*T)^{-1}T^*y \quad (2.3)$$

y por (2.2) x^\dagger puede escribirse como

$$x^\dagger = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda T^*y. \quad (2.4)$$

Ahora, si además el problema (2.1) es mal condicionado (i.e. $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado y en consecuencia T^\dagger no es acotado) entonces la integral en (2.4) no existe pues en tal caso $0 \in \sigma(T^*T)$ y el integrando $\frac{1}{\lambda}$ tiene un polo en 0.

La idea básica para la construcción de los métodos espectrales de regularización consiste en reemplazar el integrando no acotado $\frac{1}{\lambda}$ en (2.3) por una familia paramétrica $\{g_\alpha(\lambda)\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ de funciones continuas por tramos¹ (con respecto a λ) sobre un intervalo que contenga al espectro $\sigma(T^*T)$ y tal que aproximen a $\frac{1}{\lambda}$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. Luego se define

$$x_\alpha \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^*y, \quad (2.5)$$

y, puesto que las funciones continuas por tramos $g_\alpha \in \mathcal{M}_0$ se tiene (Definición B.8) que

$$x_\alpha = g_\alpha(T^*T)T^*y. \quad (2.6)$$

Los correspondientes operadores de regularización R_α se definen entonces como

$$R_\alpha \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^* = g_\alpha(T^*T)T^*. \quad (2.7)$$

Observar que el operador $g_\alpha(T^*T)$ es lineal (ver Observación B.9) y acotado pues g_α es acotada). Entonces, el operador R_α resulta lineal y acotado, y en consecuencia, $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ es una familia de operadores lineales y continuos.

¹Una función se dice *continua por tramos* o *seccionalmente continua* en $[a, b]$ si está definida y es continua en todos los puntos de (a, b) , excepto quizás en una cantidad finita de puntos en los que tiene límites laterales finitos.

Para datos con ruido $y^\delta \in \mathcal{Y}$ tal que $\|y^\delta - y\| \leq \delta$, las soluciones regularizadas $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ pueden ser representadas y calculadas de manera estable como

$$x_\alpha^\delta \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^* y^\delta = g_\alpha(T^*T)T^* y^\delta. \quad (2.8)$$

Definiendo $r_\alpha(\lambda)$ (para todos α y λ para los cuales $g_\alpha(\lambda)$ está definida) como

$$r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda), \quad (2.9)$$

se tiene que $r_\alpha(\lambda)$ es continua por tramos con respecto a λ y

$$r_\alpha(0) = 1. \quad (2.10)$$

Entonces, para la diferencia entre (2.4) y (2.5) se tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned} x^\dagger - x_\alpha &= x^\dagger - g_\alpha(T^*T)T^* y \quad (\text{por (2.6)}) \\ &= (I - g_\alpha(T^*T)T^*T)x^\dagger \quad (\text{por Teorema 1.7 (iii) pues } y \in \mathcal{D}(T^\dagger)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda g_\alpha(\lambda)) dE_\lambda x^\dagger \quad (\text{por (B.4)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_\alpha(\lambda) dE_\lambda x^\dagger \quad (\text{por (2.9)}) \\ &= r_\alpha(T^*T)x^\dagger \quad (\text{por (B.4)}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

En consecuencia (ver (B.6)) se obtiene la siguiente representación para el *error de regularización*

$$\|x_\alpha - x^\dagger\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2. \quad (2.12)$$

Diferentes elecciones concretas de la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ resultan en diferentes métodos espectrales de regularización. Anticipándonos en este punto, la siguiente tabla muestra las funciones g_α y r_α para algunos de los métodos espectrales de regularización más usuales, los que se estudiarán en detalle más adelante:

Método de Showalter	$g_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\lambda}, & \lambda > 0 \\ \frac{1}{\alpha}, & \lambda = 0 \end{cases}$	$r_\alpha(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}, \quad \lambda \geq 0$
Descomposición en Valores Singulares Truncada	$g_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \geq \alpha \\ 0, & \lambda < \alpha \end{cases}$	$r_\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \geq \alpha \\ 1, & \lambda < \alpha \end{cases}$
Método de Tikhonov-Phillips	$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}, \quad \lambda \geq 0$	$r_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}, \quad \lambda \geq 0$

Tabla 2.1: Algunos métodos espectrales de regularización.

En la Sección 2.2 trataremos los métodos de Showalter y de Descomposición en Valores Singulares Truncada mientras que en el Capítulo 3 nos focalizaremos en el método de Tikhonov- Phillips.

Queremos estudiar bajo que condiciones la familia de operadores lineales y continuos $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$, con R_α definido como en (2.7), es una regularización para T^\dagger . Para ello es necesario que las soluciones regularizadas $R_\alpha y = g_\alpha(T^*T)T^*y$ converjan a $x^\dagger = T^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, para las cuales las funciones g_α deben elegirse adecuadamente (claramente será suficiente definir $g_\alpha(\lambda)$ para $\lambda \in [0, \|T\|^2]$ ya que $[0, \|T\|^2] \supset \sigma(T^*T)$ y E_λ es “constante” fuera de ese intervalo.

El siguiente resultado provee condiciones suficientes sobre la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ que garantizan que la correspondiente familia de operadores $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ es una regularización para T^\dagger .

Teorema 2.1. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $0 < \alpha_0 \leq \infty$ y $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de funciones que satisface las siguientes hipótesis:

- (H1) para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$, g_α es continua por tramos en $[0, \|T\|^2]$ y continua por derecha en los puntos de discontinuidad;
- (H2) existe una constante $C > 0$ (independiente de α) tal que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C$ para todo $\lambda \in [0, \|T\|^2]$ y para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$;
- (H3) para todo $\lambda \in (0, \|T\|^2]$ se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Entonces

- (i) si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(T^*T)T^*y = T^\dagger y; \quad (2.13)$$

- (ii) si $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$ se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|g_\alpha(T^*T)T^*y\| = +\infty. \quad (2.14)$$

Demostración.

- (i) En primer lugar observemos que, dado que para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$ la función g_α esta definida (y es finita) en el intervalo $[0, \|T\|^2]$, en virtud de (H3) y (2.9), se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} r_\alpha(\lambda) = 0$ para $\lambda \in (0, \|T\|^2]$. En consecuencia, por (2.10),

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} r_\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in (0, \|T\|^2] \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Dado $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, definamos $x_\alpha \doteq g_\alpha(T^*T)T^*y$. Queremos probar que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x_\alpha - x^\dagger\| = 0$, donde $x^\dagger = T^\dagger y$. Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador $T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. En virtud de (2.12) se tiene que,

$$\|x_\alpha - x^\dagger\|^2 = \int_0^{\|T\|^2+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2. \quad (2.16)$$

Como la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ satisface (H2), entonces la familia $\{r_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ es uniformemente acotada. En efecto, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, se tiene que $|r_\alpha(\lambda)| \leq 1 + |\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq 1 + C \quad \forall \lambda \in [0, \|T\|^2]$, siendo C la constante en (H2). Entonces, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, el integrando en (2.16) está acotado por la constante (independiente de α) $(1 + C)^2$, y por lo tanto, es integrable con respecto a la medida $d\|E_\lambda x^\dagger\|^2$. En consecuencia, por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^{\|T\|^2} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 = \int_0^{\|T\|^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2. \quad (2.17)$$

Ahora, en virtud de (2.15), la integral del lado derecho de (2.17) es igual al salto de la función $\lambda \mapsto \|E_\lambda x^\dagger\|^2$ en $\lambda = 0$, es decir, es igual a

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\|E_\lambda x^\dagger\|^2 - \|E_0 x^\dagger\|^2 \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\|(E_\lambda - E_0) x^\dagger\|^2 \right) \quad (E_\lambda, E_0 \text{ proy. ortog.}) \\ &= \|(E_{0^+} - E_0) x^\dagger\|^2 \quad (\text{por la continuidad de } \|\cdot\|) \\ &= \|P x^\dagger\|^2 \quad (\text{con } P \doteq E_{0^+} - E_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $P = E_{0^+} - E_0$ es la proyección ortogonal de \mathcal{X} sobre $\mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T)$ (ver Proposición B.12) y $x^\dagger \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Así, la integral del lado derecho de (2.17) es igual a 0 y por lo tanto, de (2.16), se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x_\alpha - x^\dagger\| = 0$, como queríamos probar.

(ii) Supongamos ahora que $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$. Entonces, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ se sigue que

$$\begin{aligned} TR_\alpha &= Tg_\alpha(T^*T)T^* \quad (\text{por (2.7)}) \\ &= TT^*g_\alpha(TT^*) \quad (\text{por Proposición B.14 (ii)}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Denotando con $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a la familia espectral asociada al operador $TT^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, se tiene entonces que, para todo $z \in \mathcal{Y}$,

$$\begin{aligned} \|TR_\alpha z\|^2 &= \|TT^*g_\alpha(TT^*)z\|^2 \quad (\text{por (2.18)}) \\ &= \int_0^{\|T\|^2} (\lambda g_\alpha(\lambda))^2 d\|F_\lambda z\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &\leq \int_0^{\|T\|^2} C^2 d\|F_\lambda z\|^2 \quad (\text{por (H2)}) \\ &= C^2 \|z\|^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto (ver Definición A.43)

$$\|TR_\alpha\| \leq C. \quad (2.19)$$

Luego $\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0)} \|TR_\alpha\| \leq C < \infty$, de donde se sigue (en virtud de la Proposición 1.21) que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x_\alpha\| = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|R_\alpha y\| = +\infty$, como se quería probar.

De (i) y (ii) se concluye la demostración del teorema. \blacksquare

Observar que (2.13) implica que la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$, con R_α dado por (2.7), es una regularización lineal para T^\dagger (ver Proposición 1.18).

Si $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ es una familia de operadores dados por (2.7), donde las funciones g_α satisfacen las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, entonces diremos que $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ es una **regularización espectral**² para T^\dagger y que $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}, \hat{\alpha})$ es un **método espectral de regularización** (MER), siendo $\hat{\alpha}$ la REP de la Definición 1.15.

Observación 2.2. La utilización del operador T^*T en el teorema anterior está fundamentada en el hecho que el operador T^*T es autoadjunto y semidefinido positivo (aunque T no lo sea) lo que permite usar todo el andamiaje teórico que provee la Teoría Espectral para tales operadores.

Si el operador T es en si mismo autoadjunto y semidefinido positivo entonces todo el desarrollo de este capítulo se puede realizar utilizando directamente la familia espectral asociada al operador T (ver [57]).

El siguiente resultado provee una estimación para la influencia del ruido en las soluciones regularizadas para métodos espectrales.

Teorema 2.3. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de funciones que satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, x_α y x_α^δ definidos como en (2.6) y (2.8), respectivamente. Para $\alpha \in (0, \alpha_0)$, sea

$$G_\alpha \doteq \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} |g_\alpha(\lambda)| = \|g_\alpha(\cdot)\|_\infty. \quad (2.20)$$

Entonces

$$\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq C\delta \quad (2.21)$$

y

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \delta \sqrt{CG_\alpha}, \quad (2.22)$$

donde C es la constante en (H2).

Demostración. Sean $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $y^\delta \in \mathcal{Y}$ tal que $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| &= \|Tg_\alpha(T^*T)T^*(y - y^\delta)\| \quad (\text{por (2.6) y (2.8)}) \\ &= \|TT^*g_\alpha(TT^*)(y - y^\delta)\| \quad (\text{por la Proposición B.14 (ii)}) \\ &\leq \|TT^*g_\alpha(TT^*)\| \delta \\ &\leq C\delta, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde la última desigualdad se sigue inmediatamente de (H2). Esto prueba (2.21).

²En virtud de que cada uno de sus elementos está definido en términos de una integral con respecto a la familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ asociada al operador T^*T .

Para probar (2.22), sea $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador TT^* , se tiene entonces que, para todo $z \in \mathcal{Y}$,

$$\begin{aligned} \|g_\alpha(TT^*)z\|^2 &= \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha^2(\lambda) d\|F_\lambda z\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &\leq \int_0^{\|T\|^2+} G_\alpha^2 d\|F_\lambda z\|^2 \quad (\text{por (2.20)}) \\ &= G_\alpha^2 \|z\|^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto (ver Definición A.43),

$$\|g_\alpha(TT^*)\| \leq G_\alpha. \quad (2.24)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|^2 &= \langle x_\alpha - x_\alpha^\delta, g_\alpha(T^*T)T^*(y - y^\delta) \rangle \quad (\text{por (2.6) y (2.8)}) \\ &= \langle x_\alpha - x_\alpha^\delta, T^*g_\alpha(TT^*)(y - y^\delta) \rangle \quad (\text{por Propos. B.14 (ii)}) \\ &= \langle T(x_\alpha - x_\alpha^\delta), g_\alpha(TT^*)(y - y^\delta) \rangle \\ &\leq \|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \|g_\alpha(TT^*)\| \|y - y^\delta\| \\ &\leq C\delta^2 G_\alpha \quad (\text{por (2.23) y (2.24)}), \end{aligned}$$

de donde se sigue (2.22). Esto concluye la demostración del teorema. \blacksquare

El teorema anterior permite obtener la siguiente estimación para el error total de un MER,

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| &\leq \|x_\alpha - x^\dagger\| + \|x_\alpha^\delta - x_\alpha\| \\ &\leq \|x_\alpha - x^\dagger\| + \delta\sqrt{CG_\alpha}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde C y G_α son como en el Teorema 2.3. Mientras que el primer término en el lado derecho de (2.25) tiende a cero para $\alpha \rightarrow 0^+$ si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ (ver Teorema 2.1), para $\delta > 0$ fijo, el segundo término crece sin límite puesto que en virtud de (H2) se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} G_\alpha = +\infty. \quad (2.26)$$

En consecuencia, la estimación para el error asociado al ruido en (2.22) resulta inapropiada para $\alpha \rightarrow 0^+$. No obstante ello, a menos que $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$ (en cuyo caso (2.1) es bien condicionado), se puede probar (ver [26]) que la estimación en (2.22) es óptima. Resulta claro entonces que es necesario diseñar estrategias que, para cada nivel de ruido dado δ , permitan elegir de manera óptima (i.e. manteniendo el error total tan pequeño como sea posible) el parámetro de regularización α , en función del nivel del ruido δ . En lo que resta de esta sección y en la sección siguiente abordaremos el problema de la existencia y diseño de tales estrategias. En esta dirección comenzamos con el siguiente teorema que proporciona una estimación para la velocidad de convergencia del error de regularización, en términos de una estimación para la función r_α .

Teorema 2.4. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de funciones que satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, x_α y r_α definidos como en (2.6) y (2.9), respectivamente, $\mu, \rho > 0$, $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ definido como en (1.44) y $\omega_\mu : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función tal que

$$\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \leq \omega_\mu(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0), \quad \forall \lambda \in [0, \|T\|^2]. \quad (2.27)$$

Si $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ entonces

$$\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq \rho \omega_\mu(\alpha) \quad (2.28)$$

y

$$\|Tx_\alpha - Tx^\dagger\| \leq \rho \omega_{\mu+\frac{1}{2}}(\alpha). \quad (2.29)$$

Demostración. Supongamos que $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$. Entonces existe $w \in \mathcal{X}$ tal que $x^\dagger = (T^*T)^\mu w$, con $\|w\| \leq \rho$. Denotando con $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a la familia espectral asociada al operador T^*T se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x^\dagger\|^2 &= \|r_\alpha(T^*T)(T^*T)^\mu w\|^2 \quad (\text{por (2.11)}) \\ &= \int_0^{\|T\|^2+\alpha} (r_\alpha(\lambda) \lambda^\mu)^2 d\|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &\leq \int_0^{\|T\|^2+\alpha} \underbrace{\omega_\mu^2(\alpha)}_{\text{indep. de } \lambda} d\|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (2.27)}) \\ &= \omega_\mu^2(\alpha) \|w\|^2 \\ &\leq \rho^2 \omega_\mu^2(\alpha) \quad (\text{pues } \|w\| \leq \rho), \end{aligned}$$

lo cual prueba (2.28).

A continuación estimaremos el error $\|Tx_\alpha - Tx^\dagger\|$. Para ello observar primero que, para todo $z \in \mathcal{X}$,

$$\|Tz\|^2 = \langle Tz, Tz \rangle = \langle T^*Tz, z \rangle = \left\langle (T^*T)^{\frac{1}{2}}z, (T^*T)^{\frac{1}{2}}z \right\rangle = \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}}z \right\|^2. \quad (2.30)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|Tx_\alpha - Tx^\dagger\|^2 &= \|Tr_\alpha(T^*T)(T^*T)^\mu w\|^2 \quad (\text{por (2.11)}) \\ &= \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} r_\alpha(T^*T)(T^*T)^\mu w \right\|^2 \quad (\text{por (2.30)}) \\ &= \int_0^{\|T\|^2+\alpha} \left(r_\alpha(\lambda) \lambda^{\mu+\frac{1}{2}} \right)^2 d\|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &\leq \int_0^{\|T\|^2+\alpha} \underbrace{\omega_{\mu+\frac{1}{2}}^2(\alpha)}_{\text{indep. de } \lambda} d\|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (2.27)}) \\ &= \omega_{\mu+\frac{1}{2}}^2(\alpha) \|w\|^2 \\ &\leq \omega_{\mu+\frac{1}{2}}^2(\alpha) \rho^2 \quad (\text{pues } \|w\| \leq \rho), \end{aligned}$$

lo cual prueba (2.29). Esto concluye la demostración del teorema. ■

Observación 2.5. El Teorema 2.4 dice que si $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ satisface (H1), (H2) y (H3) entonces cualquier función $\omega_\mu(\alpha)$ que satisfaga (2.27) puede utilizarse para obtener una estimación del error de regularización (bajo la condición fuente $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$) como en (2.28). Es importante señalar aquí que siempre existe una función $\omega_\mu(\alpha)$ que satisface (2.27) pues la función $\omega_\mu^*(\alpha)$ definida para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ por

$$\omega_\mu^*(\alpha) \doteq \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} \lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \quad (2.31)$$

obviamente satisface (2.27). Más aún, $\omega_\mu^*(\alpha)$ es óptima en el sentido que si $\tilde{\omega}_\mu$ es una función tal que para algún $\hat{\alpha} \in (0, \alpha_0)$ se verifica que $\omega_\mu^*(\hat{\alpha}) > \tilde{\omega}_\mu(\hat{\alpha})$, entonces $\tilde{\omega}_\mu$ no satisface (2.27) mientras que una función $\tilde{\omega}_\mu$ tal que $\omega_\mu^*(\alpha) < \tilde{\omega}_\mu(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ si satisface (2.27).

Observar además que puesto que, en virtud de (2.15), para todo $\lambda \in (0, \|T\|^2]$ se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \underbrace{\lambda^\mu}_{\text{indep. de } \alpha} |r_\alpha(\lambda)| = 0$, para funciones $\omega_\mu(\alpha)$ que satisfagan (2.27) se tendrá en general que $\omega_\mu(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, de lo cual, en virtud de (2.28), se sigue precisamente la convergencia a cero del error de regularización cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. Por otro lado, puesto que la condición fuente $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ se vuelve más restrictiva a medida que μ se incrementa, es razonable esperar que $\omega_\mu(\alpha)$, como orden de convergencia para el error de regularización, mejore a medida que μ se incremente. Así, a menudo tendremos por ejemplo que $\omega_\mu(\alpha) = c \alpha^\mu$.

Los teoremas precedentes nos han permitido obtener estimaciones para el error de regularización. En virtud de (2.25) y de la Observación 2.5, y a los fines de construir MERs será necesario diseñar REPs para estimar el parámetro de regularización. Recordemos (Definición 1.15) que un método de regularización consiste de una familia de operadores de regularización $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ y una REP $\hat{\alpha}$. Existen dos tipos de REPs, según estas dependan o no explícitamente de y^δ . En la siguiente sección analizaremos las propiedades y construcción de REPs óptimas “a-priori”.

2.2 Reglas de elección de parámetro “a-priori”

En esta sección abordaremos el estudio de REPs que no dependen explícitamente de y^δ (i.e. sólo dependerán del nivel de ruido δ). Nos referiremos a las tales como reglas “a-priori”. De particular interés en esta sección será el análisis y construcción de reglas que resultan en MERs de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ ($\mu, \rho > 0$ fijos), bajo el supuesto $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$. El siguiente teorema provee precisamente un resultado en este sentido para el caso particular de MERs dados por familias $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ que satisfagan (2.27) con $\omega_\mu(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^\mu)$.

Teorema 2.6. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de funciones que satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, R_α definido como en (2.7), $\mu, \rho > 0$, $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ definido como en (1.44), r_α y ω_μ como en el Teorema 2.4 y supongamos que

$$\omega_\mu(\alpha) \doteq c \alpha^\mu, \quad (2.32)$$

para alguna constante c (que puede depender de μ), $c > 0$ y que G_α , definida como en (2.20), satisface

$$G_\alpha = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \text{ para } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (2.33)$$

Entonces, si $\hat{\alpha}(\delta)$ satisface

$$\hat{\alpha}(\delta) \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}} \text{ para } \delta \rightarrow 0^+, \quad (2.34)$$

el método de regularización $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}, \hat{\alpha})$ es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$.

Demostración. Supongamos que $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$. Para probar que $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}, \hat{\alpha})$ es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ (ver Definición 1.31) debemos acotar apropiadamente el peor error de $R_{\hat{\alpha}}$

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R_{\hat{\alpha}}) \doteq \sup_{\substack{x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho} \\ y^\delta \in B_\delta(Tx^\dagger)}} \|R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta - x^\dagger\| = \sup_{\substack{x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho} \\ y^\delta \in B_\delta(Tx^\dagger)}} \|x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta - x^\dagger\|,$$

donde $x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta \doteq R_{\hat{\alpha}(\delta)}y^\delta$.

Por (2.33) tenemos que existen constantes $c_1, \alpha^* > 0$, con $\alpha^* < \alpha_0$, tales que

$$G_\alpha \leq \frac{c_1}{\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha^*). \quad (2.35)$$

Por otro lado, puesto que $\hat{\alpha}(\delta)$ satisface (2.34), existen constantes $k_1, k_2, \delta^* > 0$ tales que

$$k_1 \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}} \leq \hat{\alpha}(\delta) \leq k_2 \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}} \quad \forall \delta \in (0, \delta^*). \quad (2.36)$$

Luego, como se satisfacen las hipótesis de los Teoremas 2.3 y 2.4, para todo δ suficientemente pequeño, más precisamente $\forall \delta \in (0, d)$ con $d = \min(\delta^*, \sup\{\delta : \hat{\alpha}(\delta) < \alpha^*\})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta - x^\dagger\| &\leq \|x_{\hat{\alpha}(\delta)} - x^\dagger\| + \delta \sqrt{C G_{\hat{\alpha}(\delta)}} \quad (\text{por Teor. 2.3 y (2.25)}) \\ &\leq \rho \omega_\mu(\hat{\alpha}(\delta)) + \delta \sqrt{C G_{\hat{\alpha}(\delta)}} \quad (\text{por Teor. 2.4 y (2.28)}) \\ &\leq \rho c (\hat{\alpha}(\delta))^\mu + \delta \sqrt{\frac{C c_1}{\hat{\alpha}(\delta)}} \quad (\text{por (2.32) y (2.35)}) \\ &\leq \rho c k_2^\mu \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} + \delta \sqrt{\frac{C c_1}{k_1}} \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\frac{1}{2\mu+1}} \quad (\text{por (2.36)}) \\ &= \left(c k_2^\mu + \sqrt{\frac{C c_1}{k_1}}\right) \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \\ &= c_2 \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $c_2 \doteq c k_2^\mu + \sqrt{\frac{C c_1}{k_1}} > 0$. Por lo tanto, $\sup_{\substack{x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho} \\ y^\delta \in B_\delta(Tx^\dagger)}} \|x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta - x^\dagger\| \leq c_2 \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$.

Luego, el método $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}, \hat{\alpha})$ es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$, como queríamos probar. \blacksquare

Observación 2.7. Si ρ es desconocido, como sucede a menudo, entonces una REP $\hat{\alpha}(\delta)$ tal que $\hat{\alpha}(\delta) \sim \delta^{\frac{2}{2\mu+1}}$ resultaría en un *error total* que al menos será óptimo con respecto a la potencia de δ , es decir $\|x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta - x^\dagger\| = \mathcal{O}\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$ cuando $\delta \rightarrow 0^+$. Entonces, el método de regularización $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}, \hat{\alpha})$ será de orden óptimo en \mathcal{X}_μ .

Concluimos la sección con dos ejemplos clásicos de MERs. En cada uno ellos, a partir de la regularización obtenida mediante la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ y utilizando varios teoremas anteriores, obtendremos estimaciones para el error de regularización, para el error asociado al ruido y construiremos REPs “*a-priori*” que resultarán en MERs de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$, bajo la condición fuente $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$, para $\mu, \rho > 0$.

Ejemplo 2.8. MÉTODO DE SHOWALTER O REGULARIZACIÓN ASINTÓTICA

Dados $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\delta > 0$, $y^\delta \in \mathcal{Y}$, consideremos el problema de valores iniciales (PVI) en \mathcal{X} :

$$\begin{cases} u'_\delta(t) + T^*T u_\delta(t) = T^*y^\delta, & t \geq 0 \\ u_\delta(0) = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Utilizando teoría de semigrupos ([54], § 4.2, corolarios 2.2 y 2.5) se puede probar fácilmente que el PVI (2.38) tiene una única solución $u_\delta \in C^1([0, \infty), \mathcal{X})$ dada por

$$u_\delta(t) = \int_0^t S(t-\tau) T^*y^\delta d\tau = \int_0^t S(\tau) T^*y^\delta d\tau, \quad (2.39)$$

donde $S(t)$ es el semigrupo fuertemente continuo de contracciones generado por el operador disipativo $A = -T^*T$ (Teorema de Lumer-Phillips, [54], § 1.4, Teorema 4.3), $S(t) = e^{-tT^*T}$.

Podemos utilizar también Teoría Espectral para obtener otra representación de la solución u_δ del PVI (2.38). Para esto, sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador T^*T y $\gamma(t, \lambda)$ la función definida para $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ como

$$\gamma(t, \lambda) \doteq \begin{cases} \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}, & \lambda > 0 \\ t, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Probaremos que

$$u_\delta(t) = \int_0^{\|T\|^2+} \gamma(t, \lambda) dE_\lambda T^*y^\delta = \gamma(t, T^*T) T^*y^\delta \quad (\text{por (B.4)}) \quad (2.41)$$

es solución del PVI (2.38). En efecto, para todo $\lambda \in [0, \|T\|^2]$,

$$\gamma(t, \lambda) = \int_0^t e^{-\lambda s} ds \quad (2.42)$$

y por lo tanto

$$\frac{d\gamma(t, \lambda)}{dt} = e^{-\lambda t}. \quad (2.43)$$

Luego, para todo $t > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
u'_\delta(t) + T^*T u_\delta(t) &= \frac{d}{dt} \gamma(t, T^*T) T^* y^\delta + T^*T \gamma(t, T^*T) T^* y^\delta \quad (\text{por (2.41)}) \\
&= (e^{-tT^*T} + T^*T \gamma(t, T^*T)) T^* y^\delta \quad (\text{por (2.43) y Teor. Conv. Dom.}) \\
&= \int_0^{\|T\|^2+} (e^{-\lambda t} + \lambda \gamma(t, \lambda)) dE_\lambda T^* y^\delta \quad (\text{por (B.4)}) \\
&= \int_0^{\|T\|^2+} dE_\lambda T^* y^\delta \quad (\text{por (2.40)}) \\
&= T^* y^\delta.
\end{aligned}$$

Además, $u_\delta(0) = \int_0^{\|T\|^2+} \gamma(0, \lambda) dE_\lambda T^* y^\delta = 0$ ya que, por (2.40), $\gamma(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in [0, \|T\|^2]$. Así, (2.41) es efectivamente la solución del PVI (2.38).

El método de Showalter consiste en definir soluciones regularizadas de (2.1) utilizando la solución u_δ del PVI (2.38), mediante

$$x_\alpha^\delta \doteq u_\delta\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (2.44)$$

En el caso de dato exacto y omitimos δ y escribimos u y x_α en lugar de u_δ y x_α^δ , respectivamente.

En virtud de (2.44) y (2.41) se observa inmediatamente que el método de Showalter es un MER asociado a la familia de funciones $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ definidas por

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \gamma\left(\frac{1}{\alpha}, \lambda\right) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\lambda}, & 0 < \lambda \leq \|T\|^2, \\ \frac{1}{\alpha}, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

A continuación probaremos que la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, con $C = 1$:

(H1) Para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$, es claro que $g_\alpha(\cdot)$ es continua en $(0, \|T\|^2]$. Además,

$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} = g_\alpha(0)$. En consecuencia, $g_\alpha(\cdot)$ es continua en $[0, \|T\|^2]$ y por lo tanto, continua por tramos.

(H2) Para esta hipótesis notar que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| = \left|1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right| < 1 \doteq C$ para todos $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y $\lambda \in [0, \|T\|^2]$.

(H3) Por definición de g_α se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda \in (0, \|T\|^2]$.

Del Teorema 2.1 se sigue entonces que, para $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, x_α converge a $T^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

Por otro lado, para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y $\lambda \in [0, \|T\|^2]$, se tiene que $g_\alpha(\lambda) = \int_0^{1/\alpha} e^{-\lambda s} ds$. Así, $|g_\alpha(\lambda)| \leq \int_0^{1/\alpha} \underbrace{|e^{-\lambda s}|}_{\leq 1} ds \leq \frac{1}{\alpha}$ implica que $G_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$. Además, $\frac{1}{\alpha} = g_\alpha(0) \leq G_\alpha$.

Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3 con $G_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ y por lo tanto $\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq \delta$ y $\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$.

Trataremos ahora de encontrar una función $\omega_\mu(\alpha)$ que satisfaga (2.27) a los efectos de utilizar el Teorema 2.4 para obtener estimaciones apropiadas para el error de regularización como en (2.28), bajo la condición fuente $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu,\rho}$. Para ello definamos, para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y $\lambda \in [0, \|T\|^2]$, la función $h_\mu(\lambda) \doteq \lambda^\mu r_\alpha(\lambda) = \lambda^\mu e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}$. Dado que $h'_\mu(\lambda) = \lambda^{\mu-1} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} (\mu - \frac{\lambda}{\alpha})$, la función h_μ tiene un punto crítico en $\lambda = \mu \alpha$ y como

$$h''_\mu(\lambda) = \lambda^{\mu-2} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \left[\frac{1}{\alpha^2} (\lambda - \mu \alpha) + \mu^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu \alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right]$$

se tiene que $h''_\mu(\mu \alpha) = (\mu \alpha)^{\mu-2} e^{-\mu} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) < 0$. Luego h_μ alcanza su máximo en $\lambda = \mu \alpha$, y en consecuencia

$$0 \leq h_\mu(\lambda) \leq h_\mu(\mu \alpha) = \mu^\mu e^{-\mu} \alpha^\mu \doteq \omega_\mu(\alpha).$$

Entonces se satisface (2.27) con $\omega_\mu(\alpha) = \left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu \alpha^\mu$ para todo $\mu > 0$. Luego, por el Teorema 2.4, bajo el supuesto que $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu,\rho}$ se tiene que $\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq \rho \left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu \alpha^\mu$ y $\|Tx_\alpha - Tx^\dagger\| \leq \rho \left(\frac{2\mu+1}{2e}\right)^{\frac{2\mu+1}{2}} \alpha^\mu$. Observar además que, en virtud del Teorema 2.6 con $\omega_\mu(\alpha) = c \alpha^\mu$ y $c = \left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu$, se tiene que si $\hat{\alpha}(\delta)$ es una REP tal que $\hat{\alpha}(\delta) \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}}$ para $\delta \rightarrow 0^+$ entonces el método de Showalter con tal REP, es decir $(\{g_\alpha(T^*T)T^*\}, \hat{\alpha})$, es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$ para todo $\mu, \rho > 0$.

Por otro lado, como se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.1 y por (2.44) para dato exacto, se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} x_\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = T^\dagger y$ si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ mientras que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x_\alpha\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = +\infty$ si $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$. Notemos que, si $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado (i.e. el problema inverso es mal condicionado), la solución del PVI (2.38) depende de manera continua de y^δ para cada $t > 0$ fijo, pero no su límite cuando $t \rightarrow \infty$, pues T^\dagger no es acotado.

En relación al límite que define al operador T^\dagger resulta oportuno y muy interesante observar que para $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, si $u(t)$ es la solución del PVI (2.38) para dato exacto y , se tiene que

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma(t, T^*T)T^*y \quad (\text{por (2.41)}) \\ &= \int_0^t e^{-sT^*T} ds T^*y \quad (\text{por (2.42) y (B.4)}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

y por lo tanto

$$T^\dagger y = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-sT^*T} ds T^*y.$$

Luego,

$$\int_0^{+\infty} e^{-sT^*T} ds T^*y = T^\dagger y, \quad (2.47)$$

la que recibe el nombre de *Fórmula de Showalter*. Si $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$ la integral en (2.47) diverge. Notar que (2.47) también puede obtenerse empleando la teoría de semigrupos

ya que por (2.39) la solución del PVI (2.38) esta dada también por (2.46). Entonces resulta muy interesante que por dos caminos completamente diferentes como lo son la Teoria de Semigrupos y la Teoria Espectral, hemos obtenido la misma solución.

La regularización de Showalter definida en (2.44) consiste entonces en “integrar” el PVI (2.38) desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{\alpha}$, donde α es el parámetro de regularización. La integración formal desde $t = 0$ hasta $t = +\infty$ resulta en la solución exacta $T^\dagger y$ pero como vimos este proceso no es continuo en y (inestable). Por este motivo el método es conocido también como *método de regularización asintótica*.

Ejemplo 2.9. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES TRUNCADA

Otro MER comúnmente utilizado es el llamado Descomposición en Valores Singulares Truncada (TSVD - por su sigla en Inglés “*truncated singular value decomposition*”), el cual está asociado a la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ de funciones definidas por

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda} \chi_{[\alpha, \infty)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \geq \alpha, \\ 0, & \lambda < \alpha. \end{cases} \quad (2.48)$$

Para este método se tiene entonces que

$$r_\alpha(\lambda) = 1 - \lambda g_\alpha(\lambda) = 1 - \chi_{[\alpha, \infty)}(\lambda) = \chi_{[0, \alpha)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \geq \alpha, \\ 1, & \lambda < \alpha. \end{cases} \quad (2.49)$$

Probaremos a continuación que la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1:

(H1) Esta hipótesis se satisface trivialmente pues claramente, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $g_\alpha(\cdot)$ es una función continua por tramos en $[0, \|T\|^2]$.

(H2) Para esta hipótesis observar que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| = \chi_{[\alpha, \infty)}(\lambda) \leq 1 \doteq C \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0)$, $\forall \lambda \in [0, \|T\|^2]$.

(H3) Por definición de g_α resulta claro que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda \in (0, \|T\|^2]$.

Definiendo

$$x_\alpha \doteq g_\alpha(T^*T)T^*y = \int_\alpha^{\|T\|^2} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda T^*y, \quad (2.50)$$

del Teorema 2.1 se sigue entonces que, para $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, x_α converge a $x^\dagger = T^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

Por otro lado, para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y $\lambda \in [0, \|T\|^2]$, se tiene que $0 \leq g_\alpha(\lambda) \leq \frac{1}{\alpha}$ y como $g_\alpha(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ se tiene que $G_\alpha = \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} |g_\alpha(\lambda)| = \frac{1}{\alpha}$. En consecuencia, del Teorema 2.3,

se sigue que $\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq \delta$ y $\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$, donde x_α^δ está definida como en (2.50) con y reemplazada por y^δ .

Para obtener una estimación del error de regularización trataremos de utilizar el Teorema 2.4. Para ello será suficiente con encontrar una función $\omega_\mu(\alpha)$ que satisfaga

(2.27). Para $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\lambda \in [0, \|T\|^2]$, definamos la función $h_\mu(\lambda) \doteq \lambda^\mu r_\alpha(\lambda) = \lambda^\mu \chi_{[0, \alpha]}(\lambda)$. Entonces $h_\mu(\lambda) \leq \lambda^\mu \chi_{[0, \alpha]}(\lambda) \leq \alpha^\mu \doteq \omega_\mu(\alpha)$. Por el Teorema 2.4 con $\omega_\mu(\alpha) = \alpha^\mu$ se tiene entonces que, bajo el supuesto $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$, $\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq \rho \alpha^\mu$ y $\|Tx_\alpha - Tx^\dagger\| \leq \rho \alpha^{\frac{2\mu+1}{2}}$. De igual modo, en virtud del Teorema 2.6 se tiene que si $\hat{\alpha}(\delta)$ es una REP que satisface $\hat{\alpha}(\delta) \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}}$ para $\delta \rightarrow 0^+$ entonces el método de regularización por descomposición en valores singulares truncada con tal REP, es decir $(\{g_\alpha(T^*T)T^*\}, \hat{\alpha})$, es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho} \forall \mu, \rho > 0$.

De particular interes es el caso en que T es compacto. Aquí nuevamente denotaremos al operador con K en lugar de T para enfatizar el hecho que el mismo es compacto. Denotemos con $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$ al sistema singular asociado a K . Entonces la solución regularizada (2.50) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}
x_\alpha^\delta &= g_\alpha(K^*K)K^*y^\delta = \sum_{\substack{n \in J \\ \sigma_n^2 \geq \alpha}} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle K^*y^\delta, v_n \rangle v_n \\
&= \sum_{\substack{n \in J \\ \sigma_n^2 \geq \alpha}} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle K^*y^\delta, v_n \rangle v_n \quad (\text{por (2.48)}) \\
&= \sum_{\substack{n \in J \\ \sigma_n^2 \geq \alpha}} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle y^\delta, K v_n \rangle v_n \\
&= \sum_{\substack{n \in J \\ \sigma_n^2 \geq \alpha}} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle y^\delta, \sigma_n u_n \rangle v_n \quad (\text{por (A.3)}) \\
&= \sum_{\substack{n \in J \\ \sigma_n^2 \geq \alpha}} \frac{1}{\sigma_n} \langle y^\delta, u_n \rangle v_n. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Observar que (2.51) es una versión truncada de la descomposición en valores singulares de $K^\dagger y$. De aquí el origen del nombre de este método de regularización.

Ya que $\lambda = 0$ es el único punto de acumulación de los valores singulares de un operador compacto (ver Teorema A.88), para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ la suma en (2.51) es siempre finita. Así, con éste método, sólo es necesario calcular un número finito de valores y vectores singulares. No obstante ello, dependiendo del sistema singular y del valor de α , éste número podría resultar muy grande a los efectos computacionales.

Se puede probar que para un operador compacto K con $\dim R(K) = \infty$, el método TSVD no es de orden óptimo en ningún $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ para ninguna REP “*a-priori*” (ver [41]).

2.3 Calificación y saturación

En esta sección introduciremos dos conceptos muy importantes y estrechamente relacionados, asociados a un método de regularización, llamados *calificación* y *saturación*. Estos conceptos son incluidos para completitud del presente trabajo y por este motivo no vamos a profundizar sobre ellos en este punto. Con el objeto de mostrar el estado del arte sobre estos temas, presentamos las referencias sobre el avance de los mismos.

El concepto de *saturación* fue introducido por primera vez por A. Neubauer en 1994 ([53]). Fue precisamente Neubauer quien demostró que ciertos MERs para problemas inversos mal condicionados “saturan”, es decir, son incapaces de continuar extrayendo información adicional sobre la solución exacta del problema, aún cuando se incrementen los supuestos de regularidad sobre la misma. En esencia, la idea intuitiva de saturación esta asociada al mejor orden de convergencia del error total que un método puede alcanzar independientemente de los supuestos de regularidad sobre la solución exacta x^\dagger y de la selección de la REP $\hat{\alpha}$.

Relacionado de una manera dual al concepto de saturación está el concepto de *calificación* de un método de regularización. Este concepto está fuertemente asociado al orden de convergencia óptimo del error de regularización, bajo ciertos supuestos “*a-priori*” sobre la solución exacta x^\dagger .

Observemos que, en Regularización Asintótica y TSVD (Ejemplos 2.8 y 2.9, respectivamente), el orden con el cual la función $\omega_\mu(\alpha)$ (con ω_μ definida como en (2.27)) decrece para $\alpha \rightarrow 0^+$, mejora a medida que μ se incrementa, y también que (2.32) vale para todo $\mu > 0$. Pero ésto no necesariamente sucede en la mayoría de los métodos estandar, como por ejemplo en el método de regularización Tikhonov-Phillips que estudiaremos en detalle en el Capítulo 3. Allí veremos que (2.32) vale sólo para $\mu \in (0, 1]$. En general, puede suceder que (2.32) se verifique para $\mu \in (0, \mu_0]$ y no para $\mu > \mu_0$. Si tal índice $\mu_0 > 0$ existe, se denomina *calificación clásica* del método de regularización. Equivalentemente, μ_0 es el mayor número real positivo μ tal que $\forall \mu \in (0, \mu_0)$ $\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| = \mathcal{O}(\alpha^\mu)$ para $\alpha \rightarrow 0^+$.

A continuación introduciremos el concepto de calificación clásica para MERs, para mayores detalles referirse a [34].

Definición 2.10. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una regularización espectral para T^\dagger generada por la familia de funciones $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$, $r_\alpha(\lambda)$ definida como en (2.9). Sean

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \left\{ \mu \geq 0 \mid \exists c > 0 \text{ tal que } \lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \leq c \alpha^\mu, \forall \alpha \in (0, \alpha_0), \forall \lambda \in [0, \|T\|^2] \right\}$$

y

$$\mu_0 \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{I}(g_\alpha)} \mu. \quad (2.52)$$

- (i) Si $0 < \mu_0 < \infty$ decimos que la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ tiene **calificación clásica**. En tal caso, el número μ_0 se denomina **orden de la calificación clásica**.
- (ii) Si $\mu_0 = 0$ ó $\mu_0 = \infty$ decimos que la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ no tiene calificación clásica. En tales casos se dice que μ_0 es el **orden de calificación clásica**.

Observación 2.11.

- 1) En virtud de (H2) el conjunto $\mathcal{I}(g_\alpha)$ es siempre no vacío puesto que $0 \in \mathcal{I}(g_\alpha)$ ya que $|r_\alpha(\lambda)| \leq 1 + C$, $\forall \alpha \in (0, \alpha_0)$, $\forall \lambda \in [0, \|T\|^2]$, siendo C la constante en (H2).

- 2) Por la Definición 2.10, el orden μ_0 de la calificación clásica es siempre no negativa, puede ser igual a 0 ó $+\infty$. En consecuencia, se tiene que $0 \leq \mu_0 \leq \infty$.
- Como vimos para el método de Showalter y TSVD, (2.27) vale para todo $\mu > 0$ y en consecuencia en ambos casos se tiene $\mu_0 = +\infty$.
 - En el método de Tikhonov-Phillips, como se demostrará en el siguiente capítulo, (2.27) vale sólo para $\mu \in (0, 1]$ y por lo tanto $\mu_0 = 1$.

En el caso de MERs con calificación clásica μ_0 (i.e. $0 < \mu_0 < \infty$), el mejor orden de convergencia que se puede obtener para el error de regularización con una REP “*a-priori*” que satisface (2.34) es $\mathcal{O}(\delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}})$ para $\delta \rightarrow 0^+$, bajo la condición fuente $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu_0, \rho}$. Por otro lado, si el MER tiene calificación clásica de orden $\mu_0 = \infty$, el mejor orden de convergencia para el error de regularización con una REP “*a-priori*” que satisface (2.34) es $\mathcal{O}(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$ para $\delta \rightarrow 0^+$, bajo la condición fuente $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$. Por más grande que sea μ , el orden de convergencia en este caso puede ser arbitrariamente cercano a $\mathcal{O}(\delta)$ (pero nunca igual a $\mathcal{O}(\delta)$). Este hecho está estrechamente relacionado al fenómeno de *saturación* antes mencionado, el cual describe el comportamiento de algunos métodos de regularización para los cuales la estimación $\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$ vale únicamente para $\mu \in (0, \mu_0]$ y no para todo $\mu > 0$. En tal caso, se dice que el método de regularización *satura* en μ_0 . Así por ejemplo, el método de Tikonov-Phillips satura en $\mu_0 = 1$, en cambio el método de Showalter y TSVD no saturan.

En el año 2003 Mathé y Pereverzev (ver [44]) formalizaron y extendieron la noción de calificación que presentamos en la Definición 2.10, reemplazando la función α^μ en (2.52) por una función creciente arbitraria de α , $\rho(\alpha)$.

Es importante y oportuno señalar que para algunos autores (ver por ejemplo [18]) el concepto de “calificación clásica” se define como el número μ_0 de la Definición 2.10 (aún para el caso $\mu_0 = \infty$). En cambio, la “calificación generalizada” no es un número sino más bien una función del parámetro de regularización α , como un orden de convergencia. En el caso particular de MERs con calificación clásica de orden μ_0 , la correspondiente calificación generalizada será la función $\rho(\alpha) = \alpha^{\mu_0}$, coincidiendo con el enfoque clásico de la Definición 2.10. Notar que en los casos extremos $\mu_0 = 0$ ó $\mu_0 = \infty$ dicha función no define un orden de convergencia y por ello, en general, son excluidos de la definición de calificación clásica.

En el año 2009 T. Herdman, R. Spies y K. Temperini ([34]) generalizaron el concepto de calificación e introdujeron tres niveles diferentes de este concepto: débil, fuerte y óptima. En ese trabajo mostraron que la calificación débil generaliza el concepto de calificación introducida por Mathé y Pereverzev (y por lo tanto, la noción de calificación clásica), en el sentido que las funciones asociadas a órdenes de convergencia y conjuntos fuente no necesariamente son las mismas. También mostraron que ciertos MERs que tienen calificación clásica de orden $\mu_0 = \infty$ (e.g. el método de Showalter y TSVD) poseen además calificación generalizada. Además, presentaron ejemplos que ilustran los tres niveles de calificación, las relaciones entre los mismos, con el concepto de calificación clásica y con el introducido por Mathé y Pereverzev.

Si bien resulta sencillo entender cuando un método de regularización satura, sólo recientemente fue posible formalizar de manera rigurosa este concepto. En el año 2008

R. Spies y K. Temperini ([62]) desarrollaron una teoría general de saturación global para métodos de regularización arbitrarios para problemas inversos mal condicionados, e introdujeron la definición del concepto de saturación de un método de regularización, formalizando la idea original e intuitiva de Neubauer ([53]), como el mejor orden global de convergencia que un método puede alcanzar independientemente de los supuestos de regularidad sobre la solución exacta y de la selección de la REP.

Como se mencionó al comenzar la sección, un análisis más detallado de los conceptos de calificación y saturación de un método de regularización está lejos del objetivo y alcance de esta tesis.

2.4 Resultados recíprocos

En esta sección presentaremos algunos *resultados recíprocos*, para regularización con dato exacto, que se derivan de la teoría de saturación de MERs para problemas inversos mal condicionados.

En los Teoremas 2.4 y 2.6 vimos que, conocida cierta información “*a-priori*” sobre la regularidad de la solución exacta x^\dagger , es posible obtener un orden de convergencia para el error de regularización $\|x_\alpha - x^\dagger\|$ o para el error total $\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|$. Éstos son conocidos como *resultados directos*.

Ahora bien, conocido el orden de convergencia del error de regularización podríamos estar interesados en obtener alguna información sobre la regularidad de la solución exacta x^\dagger . Deducciones de este tipo se conocen como *resultados recíprocos*. El primero en esta dirección lo provee el siguiente teorema.

Teorema 2.12. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de funciones que satisfice las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, x_α y r_α definidos como en (2.6) y (2.9), respectivamente y supongamos que existen constantes positivas μ, c, γ tales que

$$\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \geq \gamma \alpha^\mu, \quad \forall \lambda \in [c\alpha, \|T\|^2]. \quad (2.53)$$

Si $\|x_\alpha - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\alpha^\mu)$ para $\alpha \rightarrow 0^+$ entonces

$$x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu. \quad (2.54)$$

Demostración. Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador T^*T y $\alpha \in (0, \alpha_0)$ tal que $c\alpha \leq \|T\|^2$, donde c es la constante en (2.53). Entonces,

por (2.12) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha - x^\dagger\|^2 &= \int_0^{c\alpha} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 + \int_{c\alpha}^{\|T\|^2+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \\
&\geq \int_{c\alpha}^{\|T\|^2+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \\
&\geq \int_{c\alpha}^{\|T\|^2+} \underbrace{\gamma^2 \alpha^{2\mu}}_{\text{indep. de } \lambda} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \quad (\text{por (2.53)}) \\
&= \gamma^2 \alpha^{2\mu} \int_{c\alpha}^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Puesto que $\|x_\alpha - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\alpha^\mu)$ para $\alpha \rightarrow 0^+$, se sigue entonces que existen constantes $k, \alpha^* > 0$ con $\alpha^* < \alpha_0$ tales que, para todo $\alpha \in (0, \alpha^*)$, se tiene que

$$\int_{c\alpha}^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \leq \gamma^{-2} \alpha^{-2\mu} \|x_\alpha - x^\dagger\|^2 \leq \gamma^{-2} k^2.$$

Tomando límite para $\alpha \rightarrow 0^+$ obtenemos que

$$\int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 < +\infty, \tag{2.56}$$

de lo cual se sigue (ver Definición B.8) que $x^\dagger \in \mathcal{D}((T^*T)^{-\mu})$ y por lo tanto $w \doteq \int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{-\mu} dE_\lambda x^\dagger = (T^*T)^{-\mu} x^\dagger \in \mathcal{X}$. Así $x^\dagger = (T^*T)^\mu w \in \mathcal{R}((T^*T)^\mu) = \mathcal{X}_\mu$, como queríamos probar. \blacksquare

Observación 2.13.

- (i) Si $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ tiene calificación μ_0 es claro que (2.53) no vale si $\mu < \mu_0$. Usualmente, aunque no siempre, (2.53) se satisface para $\mu = \mu_0$.
- (ii) De la demostración del teorema anterior se desprende que

$$x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu \iff \int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 < +\infty. \tag{2.57}$$

El siguiente resultado, que necesitaremos más adelante, provee una estimación de las magnitudes de las proyecciones espectrales de elementos en el conjunto \mathcal{X}_μ .

Lema 2.14. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador T^*T , $\mu > 0$, $\mathcal{X}_\mu = \mathcal{R}((T^*T)^\mu)$. Si $x \in \mathcal{X}_\mu$ entonces

$$\|E_t x\|^2 = o(t^{2\mu}) \text{ para } t \rightarrow 0^+.$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{X}_\mu$. Entonces por (2.57) se tiene que $\int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x\|^2 < +\infty$ y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x\|^2 = 0. \quad (2.58)$$

Por otro lado, para todo $t \in (0, \|T\|^2]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|E_t x\|^2 &= \int_0^{\|T\|^2+} d\|E_\lambda E_t x\|^2 \\ &= \int_0^t d\|E_\lambda E_t x\|^2 + \int_t^{\|T\|^2+} d\|E_\lambda E_t x\|^2 \\ &= \int_0^t d\|E_\lambda x\|^2 + \int_t^{\|T\|^2+} d \underbrace{\|E_t x\|^2}_{\text{indep. de } \lambda} \quad (\text{pues } E_\lambda E_t = E_{\min\{\lambda, t\}}) \\ &= \int_0^t d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{pues } d\|E_t x\|^2 = 0 \quad \forall \lambda \in (0, \|T\|^2)) \\ &= \int_0^t \lambda^{2\mu} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x\|^2 \\ &\leq t^{2\mu} \int_0^t \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x\|^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$0 \leq \frac{\|E_t x\|^2}{t^{2\mu}} \leq \int_0^t \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x\|^2 \quad \forall t \in (0, \|T\|^2]. \quad (2.59)$$

De (2.58) y (2.59) se sigue finalmente que $\|E_t x\|^2 = o(t^{2\mu})$ para $t \rightarrow 0^+$, como se quería probar. \blacksquare

Brevemente (aunque con falta de rigor) el Lema 2.14 dice que si x tiene “ μ -regularidad” (i.e. $x \in \mathcal{X}_\mu$) entonces la magnitud de sus proyecciones espectrales decae con velocidad t^μ . Aunque, estrictamente hablando, el recíproco del lema anterior no vale, el siguiente resultado puede verse como versión débil del recíproco del Lema 2.14.

Lema 2.15. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador T^*T , $x \in \mathcal{X}$, $\mu > 0$, $\mathcal{X}_\nu = \mathcal{R}((T^*T)^\nu)$ y supongamos que

$$\|E_t x\|^2 = \mathcal{O}(t^{2\mu}) \quad \text{para } t \rightarrow 0^+. \quad (2.60)$$

Entonces

$$x \in \bigcap_{0 < \nu < \mu} \mathcal{X}_\nu. \quad (2.61)$$

Demostración. Sea $\nu \in (0, \mu)$. Puesto que $\|E_t x\|^2 = \mathcal{O}(t^{2\mu})$ para $t \rightarrow 0^+$, existen constantes $c_1, t^* > 0$ con $t^* \leq \|T\|^2$ tales que $\|E_t x\|^2 \leq c_1 t^{2\mu}$, $\forall t \in (0, t^*)$. Por otro lado, como $\|E_t x\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall t \geq 0$, se tiene que $\|E_t x\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall t \geq t^*$. Luego,

$\|E_t x\|^2 \leq \|x\|^2 = \frac{\|x\|^2}{t^{2\mu}} t^{2\mu} \leq \frac{\|x\|^2}{(t^*)^{2\mu}} t^{2\mu} = c_2 t^{2\mu} \quad \forall t \geq t^*$, donde $c_2 \doteq \frac{\|x\|^2}{(t^*)^{2\mu}}$. En consecuencia, existe $c \doteq \max\{c_1, c_2\} > 0$ tal que

$$\|E_t x\|^2 \leq c t^{2\mu}, \quad \forall t \in (0, \|T\|^2). \quad (2.62)$$

Entonces, para todo $\varepsilon \in (0, \|T\|^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\nu} d\|E_{\lambda} x\|^2 &= \lambda^{-2\nu} \|E_{\lambda} x\|^2 \Big|_{\varepsilon}^{\|T\|^2+} - \int_{\varepsilon}^{\|T\|^2+} (-2\nu) \|E_{\lambda} x\|^2 \lambda^{-2\nu-1} d\lambda \\ &= \|T\|^{-4\nu} \|x\|^2 - \varepsilon^{-2\nu} \|E_{\varepsilon} x\|^2 + 2\nu \int_{\varepsilon}^{\|T\|^2+} \|E_{\lambda} x\|^2 \lambda^{-2\nu-1} d\lambda \\ &\leq \|T\|^{-4\nu} \|x\|^2 - (\varepsilon^{-\nu})^2 \|E_{\varepsilon} x\|^2 \\ &\quad + 2\nu c \int_{\varepsilon}^{\|T\|^2+} \lambda^{2\mu-2\nu-1} d\lambda \quad (\text{por (2.62)}) \\ &\leq \|T\|^{-4\nu} \|x\|^2 + 2\nu c \int_{\varepsilon}^{\|T\|^2+} \lambda^{2\mu-2\nu-1} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Tomando límite en (2.63) para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\nu} d\|E_{\lambda} x\|^2 &\leq \|T\|^{-4\nu} \|x\|^2 + 2\nu c \int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{2\mu-2\nu-1} d\lambda \\ &= \|T\|^{-4\nu} \|x\|^2 + \frac{\nu \|T\|^{4(\mu-\nu)}}{\mu-\nu} < \infty. \end{aligned}$$

Luego, por (2.57), $x \in \mathcal{X}_{\nu}$. ■

Si se conoce un orden de convergencia para el error de regularización $\|x_{\alpha} - x^{\dagger}\|$ pero (2.53) no se verifica para ningún $\mu > 0$ (tal es el caso por ejemplo de métodos con calificación de orden infinita, tales como TSVD y Showalter) entonces el Teorema 2.12 no es aplicable y en consecuencia no es posible deducir ninguna propiedad de regularidad sobre x^{\dagger} . Sin embargo, en tales casos es posible utilizar la condición (2.60), como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.16. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_{\alpha}\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de funciones que satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, x_{α} definido como en (2.6) y G_{α} definido como en (2.20) es tal que para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$

$$G_{\alpha} \leq \frac{\hat{c}}{\alpha}, \quad (2.64)$$

para alguna constante $\hat{c} > 0$. Si $\|x_{\alpha} - x^{\dagger}\| = \mathcal{O}(\alpha^{\mu})$ entonces se satisfacen (2.60) y (2.61), es decir $\|E_t x^{\dagger}\|^2 = \mathcal{O}(t^{2\mu})$ para $t \rightarrow 0^+$ y $x^{\dagger} \in \bigcap_{0 < \nu < \mu} \mathcal{X}_{\nu}$, respectivamente.

Demostración. De (2.20) y (2.64) se sigue que para todos $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\lambda \in [0, \|T\|^2]$

$$|g_{\alpha}(\lambda)| \leq G_{\alpha} \leq \frac{\hat{c}}{\alpha}, \quad (2.65)$$

y por lo tanto $\forall \lambda \in [0, \frac{\alpha}{2\hat{c}}]$

$$|r_\alpha(\lambda)| = |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \geq 1 - \lambda |g_\alpha(\lambda)| \geq 1 - \lambda \frac{\hat{c}}{\alpha} \geq \frac{1}{2} \quad (2.66)$$

Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador T^*T y $c \doteq \frac{1}{2\hat{c}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x^\dagger\|^2 &= \int_0^{\|T\|^2} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \quad (\text{por (2.12)}) \\ &\geq \int_0^{c\alpha} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \int_0^{c\alpha} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \quad (\text{por (2.66)}), \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde la penúltima desigualdad es trivialmente cierta si $c\alpha \leq \|T\|^2$ y es en realidad una igualdad si $c\alpha > \|T\|^2$. Puesto que $\|x_\alpha - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\alpha^\mu)$ para $\alpha \rightarrow 0^+$ de (2.67) haciendo $t = c\alpha$ se sigue que $\int_0^t d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 = \|E_t x^\dagger\|^2 = \mathcal{O}(t^{2\mu})$ para $t \rightarrow 0^+$ y en consecuencia, del Lema 2.15, $x^\dagger \in \bigcap_{0 < \nu < \mu} \mathcal{X}_\nu$. \blacksquare

Observación 2.17. En los métodos de Showalter y TSVD (Ejemplos 2.8 y 2.9, respectivamente) vimos que la función $G_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, de modo que se satisface (2.64) y en consecuencia, la Proposición 2.16 es aplicable en ellos. Para el caso en que $T = K$ es compacto con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (2.60) tiene la forma

$$\begin{aligned} \|E_t x^\dagger\|^2 &= \langle E_t x^\dagger, x^\dagger \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n: \sigma_n^2 < t} \langle x^\dagger, v_n \rangle v_n + P x^\dagger, x^\dagger \right\rangle \quad (\text{por (B.3)}) \\ &= \left\langle \sum_{n: \sigma_n^2 < t} \langle x^\dagger, v_n \rangle v_n, x^\dagger \right\rangle \quad (\text{pues } x^\dagger \in \mathcal{N}(T)^\perp = \mathcal{R}(P)^\perp = \mathcal{N}(P)) \\ &= \sum_{n: \sigma_n^2 < t} |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 = \mathcal{O}(t^{2\mu}) \text{ para } t \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ya que $\sigma_k^2 \rightarrow 0^+$ cuando $k \rightarrow \infty$, haciendo $t = \sigma_k^2$ de (2.68) se sigue entonces que para el caso compacto la condición (2.60) es equivalente a $\sum_{n=k}^{\infty} |\langle x^\dagger, v_n \rangle|^2 = \mathcal{O}(\sigma_k^{4\mu})$ para $k \rightarrow \infty$, es decir es una condición sobre el comportamiento asintótico de las magnitudes de las componentes de Fourier de x^\dagger en relación a los valores singulares σ_n .

En el siguiente cuadro se presentan en forma esquemática los resultados directos y recíprocos de los lemas y teoremas precedentes:

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu \text{ (2.54)}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Teor. 2.6}} \\ \xleftarrow{\text{Teor. 2.12}} \\ \text{(si vale (2.53))} \end{array} & \boxed{\|x_\alpha - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\alpha^\mu)} \\
\text{Observ. 2.13 } \Updownarrow & & \text{En [53] } \Updownarrow \text{ Propos. 2.16} \\
& & \text{(si vale (2.64))} \\
\boxed{\int_0^{\|T\|^{2\mu}} \lambda^{-2\mu} d \|E_\lambda x^\dagger\|^2 < +\infty \text{ (2.56)}} & \implies & \boxed{\|E_t x^\dagger\|^2 = \mathcal{O}(t^{2\mu}) \text{ (2.60)}} \\
& & \text{Lema 2.15 } \Downarrow \\
& & \boxed{x^\dagger \in \bigcap_{0 < \nu < \mu} \mathcal{X}_\nu \text{ (2.61)}}
\end{array}$$

Todos los resultados directos y recíprocos precedentes relacionan de algún modo propiedades de regularidad de la solución exacta con el error de regularización y en consecuencia todos ellos involucran al dato exacto. Existen resultados análogos para el caso de datos con ruido, que relacionan propiedades de regularidad de la solución exacta con el error total. Así por ejemplo, se puede probar (ver [53]) que bajo hipótesis generales sobre la familia $\{g_\alpha\}$ la condición de decaimiento de las proyecciones espectrales de x^\dagger , esto es la condición (2.60), es equivalente al siguiente orden de convergencia del peor error total:

$$\sup_{y^\delta: \|Q(y-y^\delta)\| \leq \delta} \inf_{\alpha > 0} \|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| = \mathcal{O}\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right) \text{ para } \delta \rightarrow 0^+.$$

Más aún, bajo las mismas hipótesis se puede probar que si μ satisface (2.53) entonces el resultado anterior es óptimo en el sentido que si

$$\sup_{y^\delta: \|Q(y-y^\delta)\| \leq \delta} \|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| = o\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right) \text{ para } \delta \rightarrow 0^+,$$

entonces necesariamente $x^\dagger = 0$ (ver [53]).

2.5 Reglas de elección de parámetro “a-posteriori”

Como vimos anteriormente (ver Observación 2.7) conocidas ciertas propiedades de regularidad de la solución exacta x^\dagger , es posible diseñar REPs “a-priori” que garanticen un orden de convergencia óptimo del error de regularización. Por el contrario, si no se dispone de ninguna información previa sobre el grado de regularidad de la solución exacta x^\dagger , entonces no es de esperar que pueda diseñarse una REP que sea óptima en ningún conjunto fuente. En estos casos es conveniente utilizar REPs “a-posteriori” las que, como vimos, son aquellas que dependen del nivel de ruido δ y además del dato con ruido y^δ . En esta sección analizaremos diseños, propiedades y optimalidad de tales reglas.

2.5.1 El principio de discrepancia de Morozov

Una de las REPs “*a-posteriori*” más utilizada es la que se conoce como “*el Principio de Discrepancia de Morozov*” (ver [49]). Existen variantes equivalentes de éste principio ([69] y [70]).

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}$ una familia de funciones que satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, x_α^δ y r_α definidos como en (2.8) y (2.9), respectivamente. La REP del **Principio de Discrepancia**, α_{PD} , se define mediante una comparación entre el *error regularizado* en \mathcal{Y} (o *discrepancia*), $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|$, y la cota δ para el nivel de ruido. Más precisamente,

$$\alpha_{PD}(\delta, y^\delta) \doteq \sup \{ \alpha \in (0, \infty) / \|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta \}, \quad (2.69)$$

donde

$$\tau > \sup \{ |r_\alpha(\lambda)| / \alpha \in (0, \infty), \lambda \in [0, \|T\|^2] \} \quad (2.70)$$

es un parámetro fijo.

Observar que $\tau > 1$ pues $r_\alpha(0) = 1 \forall \alpha \in (0, \infty)$. Además, la elección de la regla α_{PD} implica que la discrepancia en \mathcal{Y} será de orden δ , esto es $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| = \mathcal{O}(\delta)$ para $\delta \rightarrow 0^+$.

Lema 2.18. *Si para cada $\lambda \in [0, \|T\|^2]$ la aplicación $\alpha \mapsto g_\alpha(\lambda)$ es continua por izquierda entonces el supremo en (2.69) es un máximo.*

Demostración. Sea $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador TT^* . Para todo $\alpha > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} Tx_\alpha^\delta - y^\delta &= (Tg_\alpha(T^*T)T^* - I)y^\delta \quad (\text{por (2.8)}) \\ &= (TT^*g_\alpha(TT^*) - I)y^\delta \quad (\text{por la Proposición B.14 (ii)}), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 = \int_0^{\|T\|^2 +} (\lambda g_\alpha(\lambda) - 1)^2 d\|F_\lambda y^\delta\| \quad (\text{por (B.6)}). \quad (2.71)$$

Puesto que el integrando en (2.71) es continuo por izquierda con respecto a α para cada λ fijo y en virtud de (H2) está además uniformemente acotado, el Teorema de la Convergencia Dominada implica que la aplicación $\alpha \mapsto \|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ es continua por izquierda en $(0, \infty)$.

Para δ e y^δ fijos definamos ahora

$$\mathcal{A} \doteq \{ \alpha \in (0, \infty) / \|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta \} \quad (2.72)$$

de modo que $\alpha_{PD}(\delta, y^\delta) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$. Entonces existe una sucesión $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $\alpha_k \rightarrow \alpha_{PD}(\delta, y^\delta)$ para $k \rightarrow \infty$, y por lo tanto, en virtud de la continuidad por izquierda de la aplicación $\alpha \mapsto \|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ se sigue que $\|Tx_{\alpha_k}^\delta - y^\delta\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|Tx_{\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)}^\delta - y^\delta\|$. Pero como $\alpha_k \in \mathcal{A} \forall k$ se tiene que $\|Tx_{\alpha_k}^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta \forall k$. Luego

$$\|Tx_{\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)}^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta \quad (2.73)$$

y por lo tanto $\alpha_{PD}(\delta, y^\delta) \in \mathcal{A}$. Así $\alpha_{PD}(\delta, y^\delta) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$, con lo que se concluye la demostración del lema. ■

Observación 2.19. Si $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta \quad \forall \alpha \in (0, \infty)$, entonces $\hat{\alpha}_{PD}(\delta, y^\delta) = +\infty$ y $x_{\alpha_{PD}}^\delta$ tiene que entenderse en el sentido de un límite para $\alpha \rightarrow +\infty$. Bajo el supuesto (2.64), que en particular es satisfecho por todos los métodos de la Tabla 1, se tiene que

$$x_\infty^\delta \doteq \lim_{\alpha_{PD} \rightarrow \infty} x_{\alpha_{PD}}^\delta = 0. \quad (2.74)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta\|^2 &= \|g_\alpha(T^*T)T^*y^\delta\|^2 \quad (\text{por (2.8)}) \\ &= \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda T^*y^\delta\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &\leq G_\alpha^2 \int_0^{\|T\|^2+} d\|E_\lambda T^*y^\delta\|^2 \quad (\text{por (2.20)}) \\ &\leq \left(\frac{\hat{c}}{\alpha}\right)^2 \|T^*y^\delta\|^2 \quad (\text{por (2.64)}) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{para } \alpha \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

A continuación estudiaremos propiedades de convergencia y optimalidad del método de regularización $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}, \alpha_{PD})$, con R_α y α_{PD} definidos como en (2.7) y (2.69), respectivamente. Para ello supondremos que y es realizable, es decir $y \in \mathcal{R}(T)$. Esta hipótesis es necesaria puesto que

$$\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| \geq \|Tx_\alpha^\delta - y\| - \|y - y^\delta\| \geq \|y - Qy\| - \delta,$$

y por lo tanto la discrepancia $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ nunca es menor que $\|y - Qy\| - \delta$, de modo que el conjunto \mathcal{A} de (2.72) puede ser vacío si $y \notin \mathcal{R}(T)$ (e.g. si $\|y - Qy\| = 3\delta$ y $1 < \tau < 2$ entonces $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\| \geq 2\delta > \tau\delta$). Formalmente, el caso no realizable puede reducirse, por Teorema 1.7, al caso realizable considerando la ecuación $Tx = Qy$ o la ecuación normal $T^*Tx = T^*y$, que siempre tienen solución si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$.

El siguiente teorema permite afirmar que, bajo ciertas hipótesis sobre ω_μ (con ω_μ definida como en (2.27)), el método $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}, \alpha_{PD})$ es convergente para todo $y \in \mathcal{R}(T)$ y de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ para $\mu \in (0, \mu_0 - \frac{1}{2}]$, donde μ_0 es la calificación clásica del MER.

Teorema 2.20. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}$ una familia de funciones que satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, R_α como en (2.7), G_α como en (2.20), μ_0 como en (2.52) y ω_μ como en (2.27). Supongamos que $\mu_0 > \frac{1}{2}$, que G_α satisface (2.64) y que $\forall \mu \in (0, \mu_0]$

$$\omega_\mu(\alpha) \sim \alpha^\mu \quad \text{para } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (2.75)$$

Entonces el método de regularización $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}, \alpha_{PD})$ (donde α_{PD} es la REP definida por el principio de discrepancia (2.69)), es convergente para todo $y \in \mathcal{R}(T)$ y de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ para todo $\mu \in (0, \mu_0 - \frac{1}{2}]$.

Demostración. En primer lugar veremos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la REP del principio de discrepancia es una función a valores finitos. En efecto, sea $y \in \mathcal{Y}$ y supongamos que existe una sucesión $\{y^{\delta_n}\} \subset \mathcal{Y}$ con $\|y - y^{\delta_n}\| \leq \delta_n$ y $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$ tal que $\alpha_{PD}(\delta_n, y^{\delta_n}) = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, por (2.74) se tiene que

$$Tx_{\alpha_{PD}(\delta_n, y^{\delta_n})}^{\delta_n} = Tx_{\infty}^{\delta_n} = T0 = 0$$

y por lo tanto $\tau\delta_n \geq \|Tx_{\alpha_{PD}(\delta_n, y^{\delta_n})}^{\delta_n} - y^{\delta_n}\| = \|y^{\delta_n}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, $y^{\delta_n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y como $\|y^{\delta_n} - y\| \leq \delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $y = 0$ y por lo tanto $x^\dagger = T^\dagger 0 = 0$. En consecuencia, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para todos $y^\delta, y \in \mathcal{Y}$ tales que $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ se tiene que $\alpha_{PD}(\delta, y^\delta) < +\infty$ para δ suficientemente pequeño.

Probaremos primero que $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}, \alpha_{PD})$ es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ para todo $\mu \in (0, \mu_0 - \frac{1}{2}]$ (Definición 1.31). Para ello debemos acotar apropiadamente el peor error asociado a $\{R_{\alpha_{PD}}\}$ (Definición 1.27)

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R_{\alpha_{PD}}) \doteq \sup_{\substack{x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho} \\ y^\delta \in B_\delta(Tx^\dagger)}} \|R_{\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)} y^\delta - x^\dagger\| = \sup_{\substack{x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho} \\ y^\delta \in B_\delta(Tx^\dagger)}} \|x_{\alpha_{PD}}^\delta - x^\dagger\|,$$

donde $x_{\alpha_{PD}}^\delta \doteq R_{\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)} y^\delta$.

Sean entonces $\mu \in (0, \mu_0 - \frac{1}{2}]$, $x^\dagger = (T^*T)^\mu w \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$, con $\|w\| \leq \rho$, $y = Tx^\dagger$, $x_{\alpha_{PD}} = R_{\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)} y$, $y^\delta \in \mathcal{Y}$ tal que $\|y^\delta - Tx^\dagger\| \leq \delta$ y $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador T^*T (de aquí en más, por simplicidad, denotaremos con α_{PD} a $\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)$). Entonces

$$\|x_{\alpha_{PD}}^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_{\alpha_{PD}}^\delta - x_{\alpha_{PD}}\| + \|x_{\alpha_{PD}} - x^\dagger\|. \quad (2.76)$$

Ahora, para el error de regularización $\|x_{\alpha_{PD}} - x^\dagger\|$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha_{PD}} - x^\dagger\|^2 &= \|r_{\alpha_{PD}}(T^*T)(T^*T)^\mu w\|^2 \quad (\text{por (2.11)}) \\ &= \int_0^{\|T\|^2 +} (r_{\alpha_{PD}}(\lambda) \lambda^\mu)^2 d\|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &= \|(T^*T)^\mu r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w\|^2 \quad (\text{por (B.6)}). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de interpolación (B.22) con $x \doteq r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w$, $r \doteq \mu$, $s \doteq \mu + \frac{1}{2}$, se obtiene que

$$\|x_{\alpha_{PD}} - x^\dagger\| \leq \left\| (T^*T)^{\mu + \frac{1}{2}} r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w \right\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w\|^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (2.77)$$

A continuación procederemos a estimar ambos factores en el lado derecho de (2.77).

Con respecto al primero tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left\| (T^*T)^{\mu+\frac{1}{2}} r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w \right\|^2 &= \int_0^{\|T\|^{2+}} \left(\lambda^{\mu+\frac{1}{2}} r_{\alpha_{PD}}(\lambda) \right)^2 d \|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\
&= \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} r_{\alpha_{PD}}(T^*T)(T^*T)^\mu w \right\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\
&= \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} r_{\alpha_{PD}}(T^*T)x^\dagger \right\|^2 \\
&= \|T r_{\alpha_{PD}}(T^*T)x^\dagger\|^2 \quad (\text{por (2.30)}) \\
&= \|T x^\dagger - T x_{\alpha_{PD}}\|^2 \quad (\text{por (2.11)}) \\
&= \|y - T x_{\alpha_{PD}}\|^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\left\| (T^*T)^{\mu+\frac{1}{2}} r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w \right\| &= \|T x_{\alpha_{PD}} - y\| \\
&\leq \|T x_{\alpha_{PD}}^\delta - y^\delta\| + \|T(x_{\alpha_{PD}} - x_{\alpha_{PD}}^\delta) - (y - y^\delta)\| \\
&\leq \tau\delta + \|T(x_{\alpha_{PD}} - x_{\alpha_{PD}}^\delta) - (y - y^\delta)\|. \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Puesto que $x_{\alpha_{PD}} - x_{\alpha_{PD}}^\delta = g_{\alpha_{PD}}(T^*T)T^*(y - y^\delta)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T(x_{\alpha_{PD}} - x_{\alpha_{PD}}^\delta) - (y - y^\delta)\|^2 &= \|(T g_{\alpha_{PD}}(T^*T)T^* - I)(y - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(TT^* g_{\alpha_{PD}}(TT^*) - I)(y - y^\delta)\|^2 \quad (\text{por Teor. B.14}) \\
&= \|r_{\alpha_{PD}}(TT^*)(y - y^\delta)\|^2 \quad (\text{por (2.9)}) \\
&= \int_0^{\|T\|^{2+}} r_{\alpha_{PD}}^2(\lambda) d \|F_\lambda(y - y^\delta)\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\
&\leq \gamma^2 \int_0^{\|T\|^{2+}} d \|F_\lambda(y - y^\delta)\|^2 \\
&= \gamma^2 \|y - y^\delta\|^2 \\
&\leq \gamma^2 \delta^2,
\end{aligned}$$

donde $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es la familia espectral asociada al operador TT^* y

$$\gamma \doteq \sup \{ |r_\alpha(\lambda)| \mid \alpha \in (0, \infty), \lambda \in [0, \|T\|^2] \} < 1 + C < \infty \quad (\text{por (H2)}), \quad (2.79)$$

y por lo tanto,

$$\|T(x_{\alpha_{PD}} - x_{\alpha_{PD}}^\delta) - (y - y^\delta)\| \leq \gamma \delta. \quad (2.80)$$

Con (2.80) en (2.78) obtenemos que

$$\left\| (T^*T)^{\mu+\frac{1}{2}} r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w \right\| \leq (\tau + \gamma) \delta. \quad (2.81)$$

Para el segundo factor en el lado derecho de (2.77) obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\|r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w\|^2 &= \int_0^{\|T\|^2+} r_{\alpha_{PD}}^2(\lambda) d\|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\
&\leq \gamma^2 \int_0^{\|T\|^2+} d\|E_\lambda w\|^2 \quad (\text{por (2.79)}) \\
&= \gamma^2 \|w\|^2 \\
&\leq \gamma^2 \rho^2
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|r_{\alpha_{PD}}(T^*T)w\| \leq \gamma \rho. \quad (2.82)$$

Luego, con (2.81) y (2.82) en (2.77), obtenemos la siguiente estimación para el error de regularización

$$\|x_{\alpha_{PD}} - x^\dagger\| \leq [(\tau + \gamma) \delta]^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} (\gamma \rho)^{\frac{1}{2\mu+1}} = c_1 \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}, \quad (2.83)$$

donde $c_1 \doteq (\tau + \gamma)^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \gamma^{\frac{1}{2\mu+1}} > 0$.

Ahora procederemos a estimar el primer término en el lado derecho de (2.76), esto es el error $\|x_{\alpha_{PD}}^\delta - x_{\alpha_{PD}}\|$ asociado al ruido. Como se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x_{\alpha_{PD}} - x_{\alpha_{PD}}^\delta\| &\leq \delta \sqrt{C G_{\alpha_{PD}}} \quad (\text{por (2.22)}) \\
&\leq \delta \sqrt{C} \hat{c} \alpha_{PD}^{-1/2} \quad (\text{por (2.64)}). \quad (2.84)
\end{aligned}$$

Para obtener la estimación deseada buscaremos ahora una cota apropiada para α_{PD} en términos de δ y ρ . Para esto observar que por definición de α_{PD} se tiene que

$$\|Tx_{2\alpha_{PD}}^\delta - y^\delta\| > \tau \delta, \quad (2.85)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|Tx_{2\alpha_{PD}} - y\| &\geq \|Tx_{2\alpha_{PD}}^\delta - y^\delta\| - \|T(x_{2\alpha_{PD}} - x_{2\alpha_{PD}}^\delta) - (y - y^\delta)\| \\
&> (\tau - \gamma) \delta \quad (\text{por (2.85) y (2.80) con } 2\alpha_{PD} \text{ en lugar de } \alpha_{PD})
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\delta &< \frac{1}{\tau - \gamma} \|Tx_{2\alpha_{PD}} - y\| \quad (\text{pues } \tau > \gamma \text{ por (2.70) y (2.79)}) \\
&= \frac{1}{\tau - \gamma} \|Tx_{2\alpha_{PD}} - Tx^\dagger\| \\
&\leq \frac{1}{\tau - \gamma} \rho \omega_{\mu+\frac{1}{2}}(2\alpha_{PD}) \quad (\text{por (2.29) pues } x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu,\rho}) \\
&\leq c_2 \rho \alpha_{PD}^{\mu+\frac{1}{2}} \quad (\text{por (2.75)}), \quad (2.86)
\end{aligned}$$

donde c_2 es una constante positiva finita, y la última desigualdad es válida para todo δ suficientemente pequeño y todo $y^\delta \in \mathcal{Y}$ que satisface $\|Tx^\dagger - y^\delta\| \leq \delta$. Con (2.86) en (2.84) se obtiene que, para δ suficientemente pequeño,

$$\|x_{\alpha_{PD}} - x_{\alpha_{PD}}^\delta\| \leq c_3 \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}, \quad (2.87)$$

donde $c_3 \doteq \sqrt{C} \hat{c} c_2^{\frac{1}{2\mu+1}} > 0$, válido para todo δ suficientemente pequeño y todo $y^\delta \in \mathcal{Y}$ que satisface $\|Tx^\dagger - y^\delta\| \leq \delta$.

Finalmente utilizando las estimaciones (2.83) y (2.87) en (2.76) se tiene que

$$\|x_{\alpha_{PD}}^\delta - x^\dagger\| \leq (c_1 + c_3) \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}.$$

Puesto que x^\dagger e y^δ son elementos arbitrarios de $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$ y $\overline{B_\delta(Tx^\dagger)}$, respectivamente, tomando supremo obtenemos que, para todo δ suficientemente pequeño,

$$\sup_{\substack{x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu,\rho} \\ y^\delta \in \overline{B_\delta(Tx^\dagger)}}} \|x_{\alpha_{PD}}^\delta - x^\dagger\| \leq (c_1 + c_3) \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}},$$

y por lo tanto el método $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\infty)}, \alpha_{PD})$ es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$ para todo $\mu \in (0, \mu_0 - \frac{1}{2}]$, como queríamos probar.

Sólo resta probar la convergencia del método $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\infty)}, \alpha_{PD})$ para todo $y \in \mathcal{R}(T)$. Como se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.32 con $\bar{\mu} = \mu_0 - \frac{1}{2}$, $\tau_0 = \gamma$ (γ dado por (2.79)), $\hat{\alpha}(\delta, y^\delta) \doteq \alpha_{PD}(\frac{\delta}{\tau}, y^\delta)$ (pues entonces $\hat{\alpha}_\tau(\delta, y^\delta) \doteq \hat{\alpha}(\tau\delta, y^\delta) = \alpha_{PD}(\delta, y^\delta)$), i.e. $\hat{\alpha}_\tau$ es la REP definida por el principio de discrepancia (2.69) se tiene que el método $(\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\infty)}, \alpha_{PD})$ es convergente para todo $y \in \mathcal{R}(T)$. Esto completa la demostración del Teorema 2.20. \blacksquare

Observación 2.21. Del teorema anterior se sigue que la utilización de la REP dada por el principio de discrepancia en cualquier método que posea calificación clásica de orden infinito (e.g. Showalter y TSVD) resultará en métodos de orden óptimo en \mathcal{X}_μ $\forall \mu > 0$. Esto es así puesto que para tales métodos (2.75) vale $\forall \mu > 0$. Sin embargo, en los casos de calificación finita no puede asegurarse la optimalidad del método resultante para ningún $\mu > \mu_0 - \frac{1}{2}$. Así por ejemplo, en el siguiente resultado debido a Groetsch ([25]) se muestra (para el caso particular de operador compacto) que la utilización del principio de discrepancia en el método de Tikhonov-Phillips (para el que $\mu_0 = 1$) resulta en métodos que, para problemas mal condicionados, no son óptimos para ningún $\mu > \mu_0 - \frac{1}{2}$.

Proposición 2.22. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ compacto, $R_\alpha \doteq (K^*K + \alpha I)^{-1}K^*$ para todo $\alpha > 0$ y $\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)$ definida como en (2.69). Si para todo $y \in \mathcal{R}(K)$, $y^\delta \in \mathcal{Y}$ con $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ se tiene que

$$\|x_{\alpha_{PD}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\| = o(\sqrt{\delta}) \text{ para } \delta \rightarrow 0^+, \quad (2.88)$$

entonces $\dim \mathcal{R}(K) < \infty$.

Demostración. (Por reducción al absurdo) Sea $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$ el sistema singular asociado a K . Supongamos que $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ y que (2.88) se satisface. Entonces $J = \mathbb{N}$ y los σ_n se acumulan en 0 (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$). Sean $\delta_n \doteq \sigma_n^2$, $y \doteq u_1 \in \mathcal{R}(K)$, y para $n \in \mathbb{N}$ $y^{\delta_n} \doteq y + \delta_n u_n = u_1 + \delta_n u_n$, $\alpha_n \doteq \alpha_{PD}(\delta_n, y^{\delta_n})$. Entonces, como los u_n

son ortonormales, $\|y - y^{\delta_n}\| = \delta_n \forall n \in \mathbb{N}$, $\|y^{\delta_n}\|^2 = \|u_1\|^2 + \|\delta_n u_n\|^2 = 1 + \delta_n^2 \forall n \geq 2$ y como $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ se tiene que $x^\dagger = K^\dagger y = K^\dagger u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle u_1, u_n \rangle v_n = \frac{1}{\sigma_1} v_1$.

Entonces

$$\begin{aligned} x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger &= R_{\alpha_n} y^{\delta_n} - \frac{1}{\sigma_1} v_1 \\ &= (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^*(u_1 + \delta_n u_n) - \frac{1}{\sigma_1} v_1 \\ &= (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* u_1 + \delta_n (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* u_n - \frac{1}{\sigma_1} v_1 \\ &= \sigma_1 (K^*K + \alpha_n I)^{-1} v_1 + \delta_n \sigma_n (K^*K + \alpha_n I)^{-1} v_n - \frac{1}{\sigma_1} v_1 \quad (\text{por (A.4)}) \\ &= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n^2 + \alpha_n} - \frac{1}{\sigma_1} \right) v_1 + \frac{\delta_n \sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_n} v_n, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que, como $\sigma_n^2 + \alpha_n > 0$ son los autovalores del operador inversible $K^*K + \alpha_n I$ entonces $(\sigma_n^2 + \alpha_n)^{-1}$ son los autovalores de $(K^*K + \alpha_n I)^{-1}$. En consecuencia, para todo $n \geq 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\|^2 &= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n^2 + \alpha_n} - \frac{1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\delta_n \sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_n} \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{\delta_n \sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_n} \right)^2 \\ &= \frac{\delta_n^3}{(\delta_n + \alpha_n)^2} \quad (\text{pues } \sigma_n^2 = \delta_n) \\ &= \frac{\delta_n}{\left(1 + \frac{\alpha_n}{\delta_n}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{\delta_n}}{1 + \frac{\alpha_n}{\delta_n}} \right)^2 \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\| \geq \frac{\sqrt{\delta_n}}{1 + \frac{\alpha_n}{\delta_n}}$. Entonces

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n}{\delta_n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n}{\delta_n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\|}{\sqrt{\delta_n}} = 0 \quad (\text{por (2.88)})$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\delta_n} = +\infty. \quad (2.89)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} K x_{\alpha_n}^{\delta_n} &= K R_{\alpha_n} y^{\delta_n} = K (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* y^{\delta_n} \\ &= \frac{1}{\alpha_n} K [\alpha_n (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* y^{\delta_n}] \\ &= \frac{1}{\alpha_n} K [(K^*K + \alpha_n I) - K^*K] (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* y^{\delta_n} \\ &= \frac{1}{\alpha_n} K [K^* y^{\delta_n} - K^*K (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* y^{\delta_n}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha_n} K [K^* y^{\delta_n} - K^* K R_{\alpha} y^{\delta_n}] \\
&= \frac{1}{\alpha_n} K [K^* y^{\delta_n} - K^* K x_{\alpha_n}^{\delta_n}] \\
&= \frac{1}{\alpha_n} K K^* [y^{\delta_n} - K x_{\alpha_n}^{\delta_n}], \tag{2.90}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|y^{\delta_n}\| - \tau\delta_n &\leq \|y^{\delta_n}\| - \|Kx_{\alpha_n}^{\delta_n} - y^{\delta_n}\| \quad (\text{por (2.73) pues } \alpha_n = \alpha_{PD}(\delta_n, y^{\delta_n})) \\
&\leq \|Kx_{\alpha_n}^{\delta_n}\| \\
&\leq \frac{\|K\|^2}{\alpha_n} \|Kx_{\alpha_n}^{\delta_n} - y^{\delta_n}\| \quad (\text{por (2.90)}) \\
&\leq \frac{\|K\|^2}{\alpha_n} \tau\delta_n \quad (\text{por (2.73)}).
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior y puesto que $\forall n$ suficientemente grande $\|y^{\delta_n}\| > \tau\delta_n$ (de lo contrario a través de una subsucesión se tendría que $\|y^{\delta_n}\| \leq \tau\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y puesto que $\|y - y^{\delta_n}\| = \delta_n$ se tendría $y = 0$, lo cual es un absurdo pues $y \doteq u_1$), se sigue que

$$0 \leq \frac{\alpha_n}{\delta_n} \leq \frac{\|K\|^2 \tau}{\|y^{\delta_n}\| - \tau\delta_n}, \tag{2.91}$$

para todo n suficientemente grande.

Tomando límite en (2.91) para $n \rightarrow \infty$ se tiene que

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\delta_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|K\|^2 \tau}{\|y^{\delta_n}\| - \tau\delta_n} = \|K\|^2 \tau < \infty$$

(pues $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y además, como vimos, $\forall n \geq 2$ $\|y^{\delta_n}\| = \sqrt{1 + \delta_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$), lo cual es un absurdo pues contradice (2.89). En consecuencia, si $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ entonces (2.88) no se satisface, y por lo tanto, la Proposición 2.22 queda demostrada. ■

2.6 Otras reglas de elección de parámetro

En esta sección presentamos una breve descripción de dos REPs alternativas que dependen explícitamente del dato con ruido y^δ y que no requieren explícitamente del nivel de ruido δ en los datos. Estas son las llamadas *reglas heurísticas*, denominación que surge del hecho que los argumentos utilizados en su construcción son precisamente heurísticos y se basan en estimaciones del error regularizado o residuo en \mathcal{Y} , $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ (ver [18], Sección 4.5). Su inclusión se realiza sólo con un objetivo de completitud, enfatizando que no haremos un estudio detallado de las mismas ya que ese no es el objetivo principal de esta tesis. Es oportuno señalar aquí que, en virtud del Teorema 1.17, ninguna REP heurística puede formar parte de un MRC en el sentido riguroso de la Definición 1.15. No obstante, esto no quiere decir que tales reglas no puedan comportarse bien para niveles de ruido finito.

2.6.1 Validación cruzada generalizada

Una de las REPs heurísticas más comúnmente utilizada es la originada a partir del llamado *Método de Validación Cruzada Generalizada* (VCG) introducido por Craven y Wahba en el año 1979 ([75]). Este método se aplica a problemas donde el operador está definido en espacios de dimensión finita (y por lo tanto es compacto), tal es el caso por ejemplo de los problemas de momento generalizados definidos a través de las siguientes ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase

$$(Kx)(s_i) \doteq \int_{\Omega} k(s_i, t) x(t) dt = y(s_i) \doteq y_i, \quad s_i \in \Omega, \quad i = 1, \dots, m,$$

$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, $x, y \in L^2(\Omega)$, k es el núcleo de la ecuación integral ($k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ o es débilmente singular) e y_1, y_2, \dots, y_m representan una muestra aleatoria de m observaciones de y , i.e. son datos experimentales medidos quizás con algún grado de error. Una diferencia fundamental con los otros métodos ya estudiados es que en VCG se considera aleatorio al vector $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$ de las observaciones. Denotando de manera similar con \mathbf{y}^δ al vector de las observaciones perturbadas y con $\boldsymbol{\eta}$ al vector de los ruidos (supuestos aditivos) se tiene entonces que $\mathbf{y}^\delta = \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}$. El método de VCG se origina en consideraciones estadísticas y depende fuertemente de la hipótesis que el vector aleatorio $\boldsymbol{\eta}$ sea *ruido blanco discreto* (i.e. gaussiano con media cero y varianza σ^2). En consecuencia

$$E[\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}] = 0 \quad \text{y} \quad Cov[\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}] = E[(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y})(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y})^T] = \sigma^2 I \quad (2.92)$$

(i.e. $E[(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y})_i] = 0$ y $E[(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y})_i ((\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y})^T)_j] = \sigma^2 \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq m$), donde $E[\cdot]$ denota la esperanza, $Cov[\cdot]$ la covarianza. Puesto que

$$E[\|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\|^2] = \text{tr}(Cov[\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}])$$

entonces de (2.92) se sigue que

$$E[\|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\|^2] = m \sigma^2,$$

basado en lo cual se plantea la identificación

$$\delta = \sqrt{m} \sigma. \quad (2.93)$$

La ventaja de la hipótesis “ruido blanco” es que permite un análisis más sofisticado del error debido a la propagación de ruido en los datos, $\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|$. Sea $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema singular para K , con la siguiente “aproximación determinística” sólo pode-

mos estimar el error asociado al ruido:

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|^2 &= \|g_\alpha(K^*K)K^*(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y})\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle K^*(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}), v_n \rangle v_n \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle \mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}, K v_n \rangle v_n \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n g_\alpha(\sigma_n^2) \langle \mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}, u_n \rangle v_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n^2 g_\alpha^2(\sigma_n^2) |\langle \mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}, u_n \rangle|^2 \\
&\leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{ \lambda g_\alpha^2(\lambda) \} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}, u_n \rangle|^2 \\
&\leq \left(\sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \{ \sqrt{\lambda} g_\alpha(\lambda) \} \right)^2 \|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \left\| \sqrt{\lambda} g_\alpha(\lambda) \right\|_{C[0, \|K\|^2]}^2 \delta^2.
\end{aligned}$$

Sin embargo, el método tiene la desventaja de requerir información detallada de la localización de los valores singulares de K en el tratamiento analítico del término traza (ver [27]):

$$\begin{aligned}
E \left[\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|^2 \right] &= E \left[\langle g_\alpha(K^*K)K^*(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}), g_\alpha(K^*K)K^*(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \right] \\
&= E \left[\langle \mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}, K g_\alpha(K^*K) g_\alpha(K^*K) K^*(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \right] \\
&= E \left[\langle \mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}, K g_\alpha^2(K^*K) K^*(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \right] \\
&= E \left[\langle \mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}, g_\alpha^2(KK^*) KK^*(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \right] \\
&= \sigma^2 \operatorname{tr} \{ g_\alpha^2(KK^*) KK^* \} \quad (\text{por (2.92)}) \\
&= \delta^2 \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{m} g_\alpha^2(KK^*) KK^* \right\} \quad (\text{por (2.93)}).
\end{aligned}$$

En VCG el parámetro de regularización α se elige como el elemento que minimiza el funcional

$$V(\alpha) = \left(\frac{\|\mathbf{y}^\delta - Kx_\alpha^\delta\|}{\operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{m} r_\alpha(KK^*) \right\}} \right)^2.$$

En contraste con el Principio de Discrepancia, el parámetro de regularización elegido con éste método no depende de ningún conocimiento “*a-priori*” acerca del nivel de ruido δ en el dato. El funcional de VCG no es considerado como una estimación del residuo sino más bien como un estimador del error de cuadrados medio predictivo $\|\mathbf{y} - Kx_\alpha^\delta\|^2$, i.e. del residuo con respecto al dato exacto (desconocido) \mathbf{y} .

2.6.2 Método de la curva L

Otra REP heurística muy utilizada es la definida a través del *Método de la Curva L* ([31]). Este método se basa en el comportamiento de la gráfica de la norma de la solución regularizada, $\|x_\alpha^\delta\|$, en función del error regularizado en \mathcal{Y} , $\|y^\delta - Tx_\alpha^\delta\|$, para todo el rango de valores posibles del parámetro de regularización. La denominación del método tiene su origen en que la gráfica de la función, $(\|y^\delta - Tx_\alpha^\delta\|, \|x_\alpha^\delta\|)$ tiene precisamente la forma de una letra L (ver Figura 2.1). Para enfatizar su comportamiento esta función se suele graficar en una escala doble logarítmica.

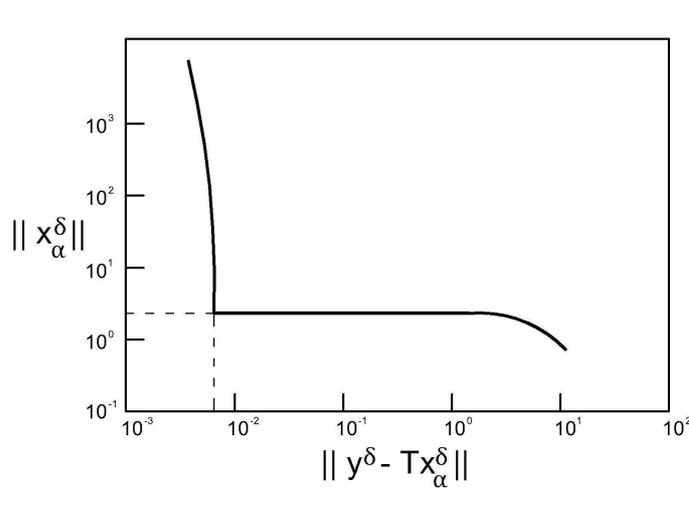


Figura 2.1: Curva L

El criterio de la Curva L para seleccionar el parámetro de regularización consiste en hallar un valor del parámetro α que corresponda a puntos cercanos a la “esquina” de esta curva “L”. Esta elección se fundamenta en el hecho que para valores de α mayores que el “óptimo”, $\|y^\delta - Tx_\alpha^\delta\|$ se incrementa considerablemente y $\|x_\alpha^\delta\|$ decrece lentamente, mientras que para valores de α menores que el “óptimo”, $\|x_\alpha^\delta\|$ se incrementa rápidamente y $\|y^\delta - Tx_\alpha^\delta\|$ decrece lentamente. Una dificultad práctica de este método radica en el hecho que puede suceder que exista un amplio rango de parámetros de regularización que correspondan a puntos de la curva cercanos a la esquina. En 1993 P. C. Hansen y D. P. O’Learly ([33]) sugirieron un algoritmo para hallar el punto de la gráfica con máxima curvatura. Bajo las hipótesis de que las funciones g_α sean dos veces derivables con respecto a α , demostraron que el punto de máxima curvatura se obtiene maximizando la función curvatura

$$\kappa(\alpha) \doteq \frac{\xi''(\alpha)\eta'(\alpha) - \xi'(\alpha)\eta''(\alpha)}{(\xi'(\alpha)^2 + \eta'(\alpha)^2)^{3/2}},$$

donde $\xi(\alpha) \doteq \log \|y^\delta - Tx_\alpha^\delta\|$, $\eta(\alpha) \doteq \log \|x_\alpha^\delta\|$.

Algunos detalles sobre la implementación numérica y las limitaciones del método de la curva L pueden encontrarse por ejemplo en las referencias [32] y [74].

Capítulo 3

Método de Tikhonov-Phillips

En éste capítulo estudiaremos el método espectral de regularización (MER) más conocido y probablemente el más utilizado para aproximar la solución exacta x^\dagger del problema inverso lineal mal condicionado $Tx = y$. Este método se conoce como *Regularización de Tikhonov-Phillips* ([55]), algunas veces llamado simplemente *Regularización de Tikhonov* ([67], [68]). En particular veremos que si bien es un método de regularización particular, tiene la ventaja que su formulación puede realizarse también como un problema de optimización sin restricciones. De allí la amplia difusión y utilización de éste método. Analizaremos además resultados de convergencia y optimalidad como así también resultados recíprocos, a la luz de los teoremas del capítulo anterior.

3.1 Teoría clásica

De aquí en más \mathcal{X} e \mathcal{Y} denotarán espacios de Hilbert y T un operador lineal y acotado de \mathcal{X} en \mathcal{Y} . Como mencionamos el método de Tikhonov-Phillips es un MER para el cual la familia de funciones $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}$ (ver Teorema 2.1) esta dada por

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda + \alpha}, \forall \lambda \in [0, \|T\|^2], \quad (3.1)$$

con las cuales se tiene que la solución regularizada (definida como en (2.8)), para dato con ruido y^δ , esta dada por

$$x_\alpha^\delta \doteq g_\alpha(T^*T)T^*y^\delta = (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*y^\delta, \quad (3.2)$$

o equivalentemente

$$(T^*T + \alpha I)x_\alpha^\delta = T^*y^\delta,$$

ecuación que suele denominarse *ecuación normal regularizada* por su relación con (1.10) para SCMs. Para dato exacto omitimos el índice δ y usamos la notación x_α en lugar de x_α^δ , con y^δ reemplazada por y .

Observar que para el caso en que $T = K$ es compacto con sistema singular

$(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
x_\alpha^\delta &\doteq g_\alpha(K^*K)K^*y^\delta = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle K^*y^\delta, v_n \rangle v_n \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle y^\delta, K v_n \rangle v_n \quad (\text{por definición de } g_\alpha) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle y^\delta, u_n \rangle v_n \quad (\text{pues } K v_n = \sigma_n u_n).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Una comparación con (1.30) muestra la acción del método sobre las componentes de alta frecuencia: el factor de amplificación de un error en la frecuencia de orden n del dato es ahora $\frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha}$ el que, a diferencia del factor $\frac{1}{\sigma_n}$ en la expresión (1.30), permanece acotado para $n \rightarrow \infty$.

Como mencionamos anteriormente el MER de Tikhonov-Phillips tiene una formulación equivalente como problema de optimización como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\alpha > 0$, x_α^δ definida como en (3.2). Entonces x_α^δ es el único elemento que minimiza el funcional de Tikhonov-Phillips

$$J_\alpha(x) \doteq \|Tx - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2. \tag{3.4}$$

Demostración. Queremos resolver el siguiente problema de optimización

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \|Tx - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2 \right\}. \tag{3.5}$$

A los efectos de utilizar el Teorema A.99 probaremos que el funcional J_α es estrictamente convexo, diferenciable Fréchet y coercitivo.

(i) Probemos primero que J_α es estrictamente convexo (Definición A.98 i): sean $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ con $x_1 \neq x_2$ y $0 < t < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
&t J_\alpha(x_1) + (1-t) J_\alpha(x_2) - J_\alpha(tx_1 + (1-t)x_2) = \\
&= t \|Tx_1 - y^\delta\|^2 + t \alpha \|x_1\|^2 + (1-t) \|Tx_2 - y^\delta\|^2 + (1-t) \alpha \|x_2\|^2 \\
&\quad - \|T(tx_1 + (1-t)x_2) - y^\delta\|^2 - \alpha \|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 \\
&= t \|Tx_1\|^2 + t \|y^\delta\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle Tx_1, y^\delta \rangle + t \alpha \|x_1\|^2 + (1-t) \|Tx_2\|^2 \\
&\quad + (1-t) \|y^\delta\|^2 - 2(1-t) \operatorname{Re} \langle Tx_2, y^\delta \rangle + (1-t) \alpha \|x_2\|^2 - t^2 \|Tx_1\|^2 \\
&\quad - (1-t)^2 \|Tx_2\|^2 - \|y^\delta\|^2 - 2t(1-t) \operatorname{Re} \langle Tx_1, Tx_2 \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle Tx_1, y^\delta \rangle \\
&\quad + 2(1-t) \operatorname{Re} \langle Tx_2, y^\delta \rangle - \alpha t^2 \|x_1\|^2 - \alpha (1-t)^2 \|x_2\|^2 \\
&\quad - 2\alpha t(1-t) \operatorname{Re} \langle x_1, x_2 \rangle \\
&= t(1-t) \|Tx_1\|^2 + t(1-t) \|Tx_2\|^2 + \alpha t(1-t) \|x_1\|^2 \\
&\quad + \alpha t(1-t) \|x_2\|^2 - 2t(1-t) [\operatorname{Re} \langle Tx_1, Tx_2 \rangle + \alpha \operatorname{Re} \langle x_1, x_2 \rangle] \\
&= \underbrace{t(1-t)}_{>0} \left[\underbrace{\|Tx_1 - Tx_2\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{\|x_1 - x_2\|^2}_{>0} \right] > 0 \quad (\text{pues } 0 < t < 1 \text{ y } x_1 \neq x_2),
\end{aligned}$$

y por lo tanto J_α es estrictamente convexo.

- (ii) Probemos ahora que J_α es diferenciable Fréchet en $x \in \mathcal{X}$, $\forall x \in \mathcal{X}$ (Definición A.93). Para ello, sean $x, h \in \mathcal{X}$. Entonces

$$\begin{aligned} J_\alpha(x+h) - J_\alpha(x) &= \|Tx + Th - y^\delta\|^2 + \alpha \|x+h\|^2 - \|Tx - y^\delta\|^2 - \alpha \|x\|^2 \\ &= \|Tx - y^\delta\|^2 + \|Th\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle Tx - y^\delta, Th \rangle + \alpha \|x\|^2 \\ &\quad + \alpha \|h\|^2 + 2 \alpha \operatorname{Re} \langle x, h \rangle - \|Tx - y^\delta\|^2 - \alpha \|x\|^2 \\ &= \underbrace{2 \operatorname{Re} \langle T^*Tx - T^*y^\delta + \alpha x, h \rangle}_{J'_\alpha(x)h} + \underbrace{\|Th\|^2 + \alpha \|h\|^2}_{o(\|h\|)}. \end{aligned}$$

Puesto que $\|Th\|^2 + \alpha \|h\|^2 = \mathcal{O}(\|h\|^2) = o(\|h\|)$ para $\|h\| \rightarrow 0^+$ tenemos que

$$J_\alpha(x+h) - J_\alpha(x) = J'_\alpha(x)h + o(\|h\|) \text{ para } \|h\| \rightarrow 0^+,$$

donde $J'_\alpha(x)h = 2 \operatorname{Re} \langle T^*Tx - T^*y^\delta + \alpha x, h \rangle \forall h \in \mathcal{X}$. En consecuencia, J_α es diferenciable Fréchet en $x \in \mathcal{X}$.

- (iii) Puesto que α es positivo la coercitividad (Definición A.98 (ii)) de J_α es trivial.

De (i), (ii) y (iii) se sigue entonces, del Teorema A.99, que J_α tiene un único minimizante global $\bar{x} \in \mathcal{X}$ que satisface $J'_\alpha(\bar{x})h = 0 \quad \forall h \in \mathcal{X}$ o equivalentemente $2 \operatorname{Re} \langle (T^*T\bar{x} - T^*y^\delta + \alpha \bar{x}), h \rangle = 0 \quad \forall h \in \mathcal{X}$, de donde se sigue que $T^*T\bar{x} - T^*y^\delta + \alpha \bar{x} = 0$ y por lo tanto $\bar{x} = (T^*T\bar{x} + \alpha I)^{-1} T^*y^\delta = x_\alpha^\delta$. ■

El término $\|x\|^2$ en (3.4) recibe el nombre de *penalizante* o *término de penalización* del funcional J_α y cumple dos objetivos fundamentales siendo el primero de ellos el de introducir estabilidad. El segundo objetivo de estos penalizantes es el de “seleccionar” la SCM a la que aproximarán a medida que el parámetro de regularización α tiende a cero. Así por ejemplo, en el caso particular de este penalizante $\|x\|^2$ vimos que $x_\alpha \rightarrow K^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, es decir entre todas las SCMs este penalizante selecciona aquella que tiene mínima norma. En algunos casos esta “selección” puede no ser la más adecuada, esto es así e.g. en ciertos problemas de procesamiento de señales y restauración de imágenes en los cuales es deseable preservar las discontinuidades que pudieran existir en la solución exacta. La utilización de otros penalizantes en (3.4) a dado lugar en los últimos 15 años a los llamados *métodos de Tikhonov-Phillips generalizados*. Es precisamente uno de los temas centrales de este trabajo el análisis de una clase particular de tales métodos que resulta de la utilización de penalizantes asociados a la seminorma o norma de variación total. Este análisis se presenta en detalle en el Capítulo 5 de esta tesis. Es oportuno mencionar que si bien existen algunos desarrollos incipientes sobre el estudio de estos métodos ([45], en preparación), aún no existe una teoría general para penalizantes arbitrarios y muchos problemas en esta área aún permanecen abiertos.

No obstante (3.2) tiene sentido sólo cuando T es lineal, es oportuno mencionar aquí que el problema de minimización (3.5) permite formular el método de regularización de Tikhonov-Phillips también para problemas no lineales mal condicionados de la forma

$$F(x) = y,$$

donde $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es un operador no lineal, continuo y \mathcal{X} e \mathcal{Y} son espacios de Hilbert. En este caso, x_α^δ se define como una solución del siguiente problema de optimización no lineal

$$\min_{x \in \mathcal{D}(F)} \left\{ \|F(x) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x - x^*\|^2 \right\},$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de regularización, $y^\delta \in \mathcal{Y}$ es una aproximación del dato exacto $y \in \mathcal{Y}$ que satisface $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ y $x^* \in \mathcal{X}$ elegido en base a cierto conocimiento “*a-priori*” de la solución. No obstante, en el presente trabajo no abordaremos el estudio de problemas no lineales.

El siguiente teorema caracteriza las REP “*a-priori*” con la cual el método de Tikhonov-Phillips resulta convergente. Podemos utilizar el problema de optimización (3.5) para demostrar el siguiente resultado de convergencia para el error total con regularización de Tikhonov-Phillips, aunque el mismo también puede ser derivado fácilmente a partir del marco teórico presentado en el Capítulo 2.

Teorema 3.2. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, x_α^δ definida como en (3.2), $y^\delta \in \mathcal{Y}$, $y \in \mathcal{R}(T)$, $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ y $x^\dagger \doteq T^\dagger y$. Si $\hat{\alpha}(\delta)$ es una regla “*a-priori*” que satisface

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \hat{\alpha}(\delta) = 0 \quad y \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\delta^2}{\hat{\alpha}(\delta)} = 0, \quad (3.6)$$

entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta = T^\dagger y. \quad (3.7)$$

Demostración. Sean $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$, $\alpha_n \doteq \hat{\alpha}(\delta_n)$, $y^{\delta_n} \in \mathcal{Y}$ tal que $\|y^{\delta_n} - y\| \leq \delta_n$ y $x_n \doteq x_{\alpha_n}^{\delta_n}$ como en (3.2). Queremos probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^\dagger$. Por el Teorema 3.1, x_n es el único minimizante del funcional

$$J_n(x) \doteq \|Tx - y^{\delta_n}\|^2 + \alpha_n \|x\|^2. \quad (3.8)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_n \|x_n\|^2 &\leq \|Tx_n - y^{\delta_n}\|^2 + \alpha_n \|x_n\|^2 = J_n(x_n) \\ &\leq J_n(x^\dagger) \quad (\text{pues } x_n \text{ minimiza } J_n) \\ &= \|Tx^\dagger - y^{\delta_n}\|^2 + \alpha_n \|x^\dagger\|^2 \\ &= \|y - y^{\delta_n}\|^2 + \alpha_n \|x^\dagger\|^2 \quad (\text{pues } Tx^\dagger = TT^\dagger y = Qy = y \in \mathcal{R}(T)) \\ &\leq \delta_n^2 + \alpha_n \|x^\dagger\|^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|x_n\|^2 \leq \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|x^\dagger\|^2. \quad (3.9)$$

Puesto que $\frac{\delta_n^2}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$, de (3.9) se sigue que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Como \mathcal{X} es un espacio reflexivo (A.67), existe $z \in \mathcal{X}$ y $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{w} z$ cuando $k \rightarrow \infty$ (Teorema A.66). Como T es continuo se tiene entonces que

$$Tx_{n_k} \xrightarrow{w} Tz \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|Tx_{n_k} - y^{\delta_{n_k}}\|^2 &\leq \|Tx_{n_k} - y^{\delta_{n_k}}\|^2 + \alpha_{n_k} \|x_{n_k}\|^2 = J_{n_k}(x_{n_k}) \\
&\leq J_{n_k}(x^\dagger) \quad (\text{pues } x_{n_k} \text{ minimiza } J_{n_k}) \\
&= \|Tx^\dagger - y^{\delta_{n_k}}\|^2 + \alpha_{n_k} \|x^\dagger\|^2 \\
&\leq \underbrace{\delta_{n_k}^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\alpha_{n_k}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|x^\dagger\|^2}_{< \infty} \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\|Tx_{n_k} - y^{\delta_{n_k}}\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|Tx_{n_k} - y\| &\leq \|Tx_{n_k} - y^{\delta_{n_k}}\| + \|y^{\delta_{n_k}} - y\| \\
&\leq \underbrace{\|Tx_{n_k} - y^{\delta_{n_k}}\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\delta_{n_k}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

es decir

$$Tx_{n_k} \rightarrow y \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

De (3.10) y (3.11) se sigue que

$$Tz = y. \quad (3.12)$$

Puesto que cualquier elemento que minimiza J_n está en $\mathcal{N}(T)^\perp$ (notar que una componente no nula en $\mathcal{N}(T)$ incrementa el segundo término de J_n mientras que el primero no cambia) se tiene que $x_n \in \mathcal{N}(T)^\perp \forall n$. Entonces como $x_{n_k} \xrightarrow{w} z$ se sigue que $0 = \langle x_{n_k}, v \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle z, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{N}(T)$, y por lo tanto $z \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Así, $z = T^\dagger Tz = T^\dagger y$ (donde la primera igualdad se sigue del hecho que $T^\dagger T$ es la proyección ortogonal de \mathcal{X} sobre $\mathcal{N}(T)^\perp$ y la segunda de (3.12)). Luego, se tiene que $x_{n_k} \xrightarrow{w} T^\dagger y$ cuando $k \rightarrow \infty$. Probaremos ahora que la sucesión original converge débilmente a x^\dagger . En efecto, supongamos que $x_n \xrightarrow{w} T^\dagger y$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que ninguna subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ converge débilmente a $T^\dagger y$. Sin embargo, el mismo razonamiento anterior con la sucesión $\{x_n\}$ reemplazada por $\{x_{n_k}\}$ prueba que $\{x_{n_k}\}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_{k_l}}\}$ tal que $x_{n_{k_l}} \xrightarrow{w} T^\dagger y$ cuando $n_{k_l} \rightarrow \infty$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$x_n \xrightarrow{w} T^\dagger y \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|T^\dagger y\| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|T^\dagger y\|^2} \quad (\text{por (3.9)}) \\
&= \sqrt{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|T^\dagger y\|^2} \\
&= \|T^\dagger y\|,
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de la semicontinuidad inferior débil toda norma (Teorema A.65). Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x^\dagger\|. \quad (3.14)$$

De (3.13) y (3.14) concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^\dagger$, como queríamos probar. \blacksquare

El teorema anterior permite afirmar que, si $y \in \mathcal{R}(T)$, para obtener la convergencia $x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} x^\dagger = T^\dagger y$, la REP “*a-priori*” $\hat{\alpha}(\delta)$ debe elegirse en función del nivel de ruido δ de manera tal que $\hat{\alpha}(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0^+$, pero no más rápido que δ^2 (i.e. $\frac{\delta^2}{\hat{\alpha}(\delta)} = o(1)$).

En lo que resta del presente capítulo estudiaremos algunos resultados de convergencia y optimalidad como así también resultados recíprocos para el caso particular del método de Tikhonov-Phillips, es decir para métodos espectales para los cuales la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}$ esta dada por $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}$. Para este propósito haremos uso de los resultados obtenidos en el capítulo precedente. Comenzaremos probando que la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \infty)}$ satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1.

(H1) Claramente, para todo $\alpha \in (0, \infty)$, $g_\alpha(\lambda)$ es una función continua en $[0, \|T\|^2]$ y por lo tanto continua por tramos en dicho intervalo.

(H2) Existe una constante $C = 1$ tal que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} < 1, \forall \alpha > 0, \lambda \in [0, \|T\|^2]$.

(H3) Por definición de g_α , resulta obvio que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda \in (0, \|T\|^2]$.

Como se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.1 se sigue entonces que, para $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, $x_\alpha \rightarrow x^\dagger \doteq T^\dagger y$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

Por otro lado, para $\alpha > 0$ y $\lambda \in [0, \|T\|^2]$, se tiene que $0 < g_\alpha(\lambda) \leq \frac{1}{\alpha}$ y por lo tanto $G_\alpha \doteq \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} g_\alpha(\lambda) \leq \frac{1}{\alpha}$. Como $\frac{1}{\alpha} = g_\alpha(0) \leq G_\alpha$ se sigue que $G_\alpha = \frac{1}{\alpha}$. En

consecuencia, por el Teorema 2.3, se tienen las siguientes estimaciones para el error debido al ruido en \mathcal{X} y en \mathcal{Y} : $\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq \delta$ y $\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$.

Con el objeto de obtener una estimación para el error de regularización como en (2.28), utilizaremos los resultados del Teorema 2.4 bajo la condición fuente $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$. Para ello, será suficiente con hallar una función $\omega_\mu(\alpha)$ que satisfaga (2.27). Para $\alpha > 0$, $\lambda \in [0, \|T\|^2]$, definamos la función $h_\mu(\lambda) \doteq \lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| = \lambda^\mu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| = \lambda^\mu \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}$.

Caso 1) Si $0 < \mu < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} h'_\mu(\lambda) &= \alpha \frac{\mu \lambda^{\mu-1} (\lambda + \alpha) - \lambda^\mu}{(\lambda + \alpha)^2} = \frac{\alpha \lambda^{\mu-1}}{(\lambda + \alpha)^2} [\mu (\lambda + \alpha) - \lambda] \\ &= \frac{\alpha \lambda^{\mu-1}}{(\lambda + \alpha)^2} [\lambda (\mu - 1) + \mu \alpha], \end{aligned}$$

entonces en $(0, \|T\|^2]$ la función h_μ tiene un único punto crítico en $\lambda = \frac{\mu\alpha}{1-\mu} > 0$. Como $h'_\mu(\lambda) = \alpha \frac{\mu\alpha\lambda^{\mu-1} + \lambda^\mu(\mu-1)}{(\lambda+\alpha)^2}$ se sigue que

$$\begin{aligned} h''_\mu(\lambda) &= \frac{\alpha}{(\lambda+\alpha)^4} \left\{ [\mu\alpha(\mu-1)\lambda^{\mu-2} + \mu(\mu-1)\lambda^{\mu-1}] (\lambda+2)^2 \right. \\ &\quad \left. - [\mu\alpha\lambda^{\mu-1} + \lambda^\mu(\mu-1)] 2(\lambda+\alpha) \right\} \\ &= \frac{\alpha}{(\lambda+\alpha)^3} \left\{ \mu(\mu-1)\lambda^{\mu-2}(\lambda+2)^2 - 2\lambda^{\mu-1}[\mu\alpha + \lambda(\mu-1)] \right\}. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} h''_\mu\left(\frac{\mu\alpha}{1-\mu}\right) &= \frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{1-\mu}\right)^3} \left\{ \mu(\mu-1) \left(\frac{\mu\alpha}{1-\mu}\right)^{\mu-2} \left(\frac{\alpha}{1-\mu}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\mu\alpha}{1-\mu}\right)^{\mu-1} \underbrace{\left[\mu\alpha + \frac{\mu\alpha}{1-\mu}(\mu-1) \right]}_{=0} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{(1-\mu)^3}{\alpha^2}}_{>0} \underbrace{\left[-\mu^{\mu-1}(1-\mu)^{1-\mu}\alpha^\mu \right]}_{<0} < 0. \end{aligned}$$

Puesto que $h_\mu(0) = 0$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h_\mu(\lambda) = 0$, entonces la función h_μ alcanza su máximo absoluto en $\lambda = \frac{\mu\alpha}{1-\mu}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} h_\mu(\lambda) &\leq h_\mu\left(\frac{\mu\alpha}{1-\mu}\right) = \mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu} \alpha^\mu \\ &\leq [\mu^2 + (1-\mu)^2] \alpha^\mu \quad (a^\mu b^{1-\mu} \leq \mu a + (1-\mu)b \quad \forall a, b \geq 0 \text{ y } \mu \in (0, 1)) \\ &= [2\mu(\mu-1) + 1] \alpha^\mu \\ &< \alpha^\mu \quad (\text{pues } 0 < \mu < 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $0 < \mu < 1$ podemos seleccionar $\omega_\mu(\alpha) \doteq \alpha^\mu$.

Caso 2) Si $\mu \geq 1$ entonces para todo $\lambda \in [0, \|T\|^2]$ se tiene que

$$h'_\mu(\lambda) = \underbrace{\frac{\alpha\lambda^{\mu-1}}{(\lambda+\alpha)^2}}_{>0} \left[\underbrace{\lambda(\mu-1)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu\alpha}_{>0} \right] > 0,$$

y por lo tanto la función h_μ es estrictamente creciente en $[0, \|T\|^2]$ y alcanza su máximo en $\lambda = \|T\|^2$. Así, $h_\mu(\lambda) \leq h_\mu(\|T\|^2) = \frac{\|T\|^{2\mu}\alpha}{\|T\|^{2\mu} + \alpha} < \|T\|^{2\mu-2} \alpha$. Luego, para $\mu \geq 1$ podemos seleccionar $\omega_\mu(\alpha) \doteq \|T\|^{2\mu-2} \alpha$.

Así entonces (2.27) se satisface con

$$\omega_\mu(\alpha) \doteq \begin{cases} \alpha^\mu, & \mu < 1 \\ \|T\|^{2\mu-2} \alpha, & \mu \geq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Luego, por el Teorema 2.4, si $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu,\rho}$ se tiene que

$$\|x_\alpha - x^\dagger\| = \begin{cases} \rho \alpha^\mu, & \mu < 1 \\ \rho \|T\|^{2\mu-2} \alpha, & \mu \geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \|Tx_\alpha - Tx^\dagger\| = \begin{cases} \rho \alpha^{\frac{2\mu+1}{2}}, & \mu < 1 \\ \rho \|T\|^{2\mu-1} \alpha, & \mu \geq 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Del análisis precedente se sigue inmediatamente que $\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| = \mathcal{O}(\alpha^\mu)$ sólo para $\mu \in (0, 1]$ y en consecuencia concluimos que el método de regularización de Tikhonov-Phillips tiene calificación clásica $\mu_0 = 1$.

En virtud del Teorema 2.6 tenemos que, si $\hat{\alpha}(\delta)$ es una REP “*a-priori*” que satisface $\hat{\alpha}(\delta) \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}}$ para $\delta \rightarrow 0^+$, entonces el método de regularización de Tikhonov-Phillips con tal REP es de orden óptimo en $\mathcal{X}_\mu \forall \mu \leq 1$. En consecuencia, el mejor orden de convergencia del error total que se puede garantizar se obtiene cuando $\mu = 1$, para el cual

$$\|x_{\hat{\alpha}(\delta)}^\delta - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}}) \quad \text{para } \delta \rightarrow 0^+, \quad (3.17)$$

donde la REP $\hat{\alpha}(\delta)$ es tal que $\hat{\alpha}(\delta) \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}$ si $x^\dagger \in \mathcal{X}_{1,\rho}$ o $\hat{\alpha}(\delta) \sim \delta^{\frac{2}{3}}$ si $x^\dagger \in \mathcal{X}_1$.

A continuación analizaremos algunos resultados recíprocos para el método de Tikhonov-Phillips a la luz de los resultados de la Sección 2.4. Para ello observar que, como $\lambda |r_\alpha(\lambda)| = \frac{\lambda\alpha}{\lambda+\alpha} \geq \frac{\lambda\alpha}{2\lambda} = \frac{\alpha}{2}$ para $\lambda \in [\alpha, \|T\|^2]$, se sigue que (2.53) se satisface para $\mu \doteq \mu_0 = 1$, $c \doteq 1$ y $\gamma \doteq \frac{1}{2}$. En consecuencia, por el Teorema 2.12, el orden de convergencia $\|x_\alpha - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\alpha)$ sólo se puede alcanzar si $x^\dagger \in \mathcal{X}_1$. Por otro lado, como (2.64) vale con $\hat{c} \doteq 1$, se sigue de la Proposición 2.16 que, para $\mu < 1$, el orden de convergencia $\|x_\alpha - x^\dagger\| = \mathcal{O}(\alpha^\mu)$ para $\alpha \rightarrow 0^+$ sólo puede valer si $x^\dagger \in \bigcap_{0 < \nu < \mu} \mathcal{X}_\nu$.

Con respecto al caso de datos con ruido, se puede probar que el orden en (3.17) sólo puede ser alcanzado si $x^\dagger \in \mathcal{X}_1$. Este es un caso particular de un resultado más general debido a Neubauer ([53]), el cual mencionamos brevemente al final de la Sección 2.4. En el siguiente teorema probaremos este resultado dentro del presente contexto de los métodos de Tikhonov-Phillips para el caso particular de operadores compactos.

Teorema 3.3. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ compacto, $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$, $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$, $x^\dagger \doteq K^\dagger y$, $x_\alpha^\delta \doteq (K^*K + \alpha I)^{-1} K^* y^\delta$ y $\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)$ una REP arbitraria. Si

$$\sup_{y^\delta: \|Q(y-y^\delta)\| \leq \delta} \|x_{\hat{\alpha}(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\| = o(\delta^{\frac{2}{3}}) \quad \text{para } \delta \rightarrow 0^+ \quad (3.18)$$

entonces $x^\dagger = 0$.

Demostración. (Por reducción al absurdo). Sea $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$ el sistema singular asociado a K . Supongamos que $x^\dagger \neq 0$ y que (3.18) se satisface. Como $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ entonces $J = \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$. Definamos $\delta_n \doteq \sigma_n^3$, $y^{\delta_n} \doteq y + \delta_n u_n$ (de modo que, $\|y^{\delta_n} - y\| = \delta_n \|u_n\| = \delta_n$), $\alpha_n \doteq \hat{\alpha}(\delta_n, y^{\delta_n})$, $x_{\alpha_n} \doteq (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* y$ y $x_{\alpha_n}^{\delta_n} \doteq (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* y^{\delta_n}$. Probemos que si $x^\dagger \neq 0$ entonces el orden del

error total, a través de la sucesión δ_n así definida, no puede ser $o(\delta_n^{2/3})$ para $n \rightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger &= x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x_{\alpha_n} + x_{\alpha_n} - x^\dagger \\
&= (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^*(y^{\delta_n} - y) + x_{\alpha_n} - x^\dagger \\
&= (K^*K + \alpha_n I)^{-1} K^* \delta_n u_n + x_{\alpha_n} - x^\dagger \\
&= \delta_n \sigma_n (K^*K + \alpha_n I)^{-1} v_n + x_{\alpha_n} - x^\dagger \quad (K^*u_n = \sigma_n v_n) \\
&= \frac{\delta_n \sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_n} v_n + x_{\alpha_n} - x^\dagger \\
&= \frac{\delta_n^{4/3}}{\delta_n^{2/3} + \alpha_n} v_n + x_{\alpha_n} - x^\dagger \quad (\text{pues } \sigma_n = \delta_n^{1/3}). \tag{3.19}
\end{aligned}$$

En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\|^2 = \left(\frac{\delta_n^{4/3}}{\delta_n^{2/3} + \alpha_n} \right)^2 \|v_n\|^2 + \|x_{\alpha_n} - x^\dagger\|^2 + 2 \frac{\delta_n^{4/3}}{\delta_n^{2/3} + \alpha_n} \operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle$$

de donde

$$\delta_n^{-4/3} \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\|^2 = \left(\frac{\delta_n^{2/3}}{\delta_n^{2/3} + \alpha_n} \right)^2 + \underbrace{\delta_n^{-4/3} \|x_{\alpha_n} - x^\dagger\|^2}_{\geq 0} + \frac{2}{\delta_n^{2/3} + \alpha_n} \operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle,$$

y por lo tanto

$$\left(\delta_n^{-2/3} \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\| \right)^2 \geq \left(\frac{1}{1 + \alpha_n \delta_n^{-2/3}} \right)^2 + \frac{2\delta_n^{-2/3}}{1 + \alpha_n \delta_n^{-2/3}} \operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle. \tag{3.20}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
(K^*K + \alpha_n I)(x^\dagger - x_{\alpha_n}^{\delta_n}) &= K^*Kx^\dagger + \alpha_n x^\dagger - (K^*K + \alpha_n I)x_{\alpha_n}^{\delta_n} \\
&= K^*y + \alpha_n x^\dagger - K^*y^{\delta_n} \quad (\text{por Teorema 1.7 (iii) y (3.2)}) \\
&= K^*(y - y^{\delta_n}) + \alpha_n x^\dagger,
\end{aligned}$$

se sigue que $\alpha_n x^\dagger = (K^*K + \alpha_n I)(x^\dagger - x_{\alpha_n}^{\delta_n}) - K^*(y - y^{\delta_n})$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\alpha_n \|x^\dagger\| &\leq \|K^*K + \alpha_n I\| \|x^\dagger - x_{\alpha_n}^{\delta_n}\| + \|K^*\| \|y - y^{\delta_n}\| \\
&\leq (\|K\|^2 + \alpha_n) \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\| + \|K\| \delta_n \\
&\leq c_1 (\|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\| + \delta_n),
\end{aligned}$$

donde $c_1 \doteq \sup_n \{\|K\|^2 + \alpha_n + \|K\|\} < \infty$ (pues $\alpha_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$). Como hemos supuesto que $x^\dagger \neq 0$, dividiendo por $\|x^\dagger\| \delta_n^{2/3}$ en la desigualdad anterior obtenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \alpha_n \delta_n^{-2/3} \leq \frac{c_1}{\|x^\dagger\|} \left(\delta_n^{-2/3} \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\| + \delta_n^{1/3} \right). \tag{3.21}$$

Como $\|Q(y^{\delta_n} - y)\| \leq \|Q\| \|y^{\delta_n} - y\| = \delta_n$ (pues $\|Q\| = 1$) y por hipótesis se tiene que $\|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\| = o(\delta_n^{2/3})$ para $n \rightarrow \infty$, de (3.21) se sigue que

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \delta_n^{-\frac{2}{3}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \delta_n^{-\frac{2}{3}} \leq \frac{c_1}{\|x^\dagger\|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\delta_n^{-\frac{2}{3}} \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\| + \sigma_n \right) = 0,$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \delta_n^{-\frac{2}{3}} = 0. \quad (3.22)$$

Por último, tomando límite en (3.20) para $n \rightarrow \infty$ y utilizando (3.22) obtenemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n^{-\frac{2}{3}}}{1 + \alpha_n \delta_n^{-\frac{2}{3}}} \operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle \leq -\frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Por otro lado, como

$$|\operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle| \leq |\langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle| \leq \|x_{\alpha_n} - x^\dagger\| \|v_n\| = \|x_{\alpha_n} - x^\dagger\|,$$

se sigue que $\frac{\delta_n^{-2/3}}{1 + \alpha_n \delta_n^{-2/3}} |\operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle| \leq \frac{\delta_n^{-2/3} \|x_{\alpha_n} - x^\dagger\|}{1 + \alpha_n \delta_n^{-2/3}}$. Tomando límite para $n \rightarrow \infty$ se tiene entonces que

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\delta_n^{-2/3}}{1 + \alpha_n \delta_n^{-2/3}} \operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n^{-2/3} \|x_{\alpha_n} - x^\dagger\|}{1 + \alpha_n \delta_n^{-2/3}} = 0,$$

de donde la última igualdad se sigue de (3.22) y del hecho que por hipótesis $\|x_{\alpha_n} - x^\dagger\| = o(\delta_n^{2/3})$ para $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n^{-2/3}}{1 + \alpha_n \delta_n^{-2/3}} \operatorname{Re} \langle x_{\alpha_n} - x^\dagger, v_n \rangle = 0$ lo que contradice (3.23). Esta contradicción proviene de suponer que $x^\dagger \neq 0$. Luego $x^\dagger = 0$. ■

Observar que el Teorema anterior nos dice que para problemas mal condicionados el mejor orden de convergencia del error total que puede obtenerse con el método de Tikhonov-Phillips es $\mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}})$ para $\delta \rightarrow 0^+$, independientemente de la hipótesis de regularidad que se impongan o sean conocidas sobre la solución exacta x^\dagger . Como mencionamos anteriormente, esto está asociado al concepto de “saturación” ([53], [44], [34]). Así, en este caso se dice que el método satura en $\mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}})$.

También es oportuno señalar que, en virtud del Teorema 2.20, la utilización del método de Tikhonov-Phillips en forma conjunta con el Principio de Discrepancia resulta en un método convergente para todo $y \in \mathcal{R}(T)$ y de orden óptimo en $\mathcal{X}_\mu \forall \mu \in (0, \frac{1}{2}]$, siendo en tal caso $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ el mejor orden posible, el cual se obtiene para $\mu = \frac{1}{2}$. Más aún, en virtud de la Proposición 2.22 este orden no puede ser mejorado excepto en casos triviales.

Finalmente es oportuno señalar que para $\mu \in (\frac{1}{2}, 1]$, si bien el método de Tikhonov-Phillips con la REP del Principio de Discrepancia no es de orden óptimo en $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ para ningún ρ , si lo es con cualquier REP “*a-priori*” $\hat{\alpha}(\delta)$ que satisfaga $\hat{\alpha}(\delta) \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2\mu+1}}$ para $\delta \rightarrow 0^+$.

Capítulo 4

Regularización con operadores diferenciales

En el Capítulo 3 vimos que el método de regularización de Tikhonov-Phillips aplicado al problema $Tx = y$ es equivalente al problema de minimizar el funcional $J_\alpha(x) = \|Tx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2$. Allí también vimos que el término $\|x\|^2$, el cual recibe el nombre de *penalizante* o *término de penalización*, cumple dos objetivos fundamentales siendo el primero de ellos el de introducir estabilidad. En este caso particular y como puede deducirse de la ecuación normal (3.2), esta estabilidad resulta en la imposición de condiciones mínimas de “regularidad” sobre las soluciones aproximadas en el sentido que independientemente de la regularidad de x^\dagger , se tiene que el minimizante x_α del funcional J_α satisface $x_\alpha \in \mathcal{X}_{\frac{1}{2}}$ (de allí el nombre de métodos de “regularización”). El segundo objetivo que cumple el término de penalización es el de “seleccionar” la solución de cuadrados mínimos (SCM) a la que convergerán las soluciones aproximadas a medida que el parámetro de regularización α tiende a cero. Así por ejemplo, para este caso particular en que el penalizante es $\|x\|^2$ vimos que x_α converge, para $\alpha \rightarrow 0^+$, a la SCM de mínima norma. También mencionamos que en determinados problemas esta selección de la SCM de mínima norma puede no ser la más adecuada. Esto es así, por ejemplo, en ciertos problemas de procesamiento de señales y restauración de imágenes en los cuales es deseable preservar las discontinuidades que pudieran existir en la solución exacta. Es razonable suponer entonces que puedan utilizarse otros penalizantes en lugar de $\|x\|^2$ para introducir estabilidad pero aproximando una SCM que posea otras propiedades. Este simple razonamiento a dado lugar en los últimos 15 años a los llamados *métodos de Tikhonov-Phillips generalizados*. En este capítulo nos proponemos estudiar estos métodos desde el punto de vista de la teoría espectral para el caso particular de penalizantes asociados a seminormas inducidas por operadores diferenciales. Comenzaremos introduciendo el concepto de inversa generalizada “ponderada”, que será de fundamental importancia para la construcción de un andamiaje matemático adecuado para el estudio de éstos métodos.

4.1 Inversa generalizada ponderada

Comenzaremos recordando brevemente el problema general y algunos conceptos fundamentales que fueron introducidos en capítulos anteriores. Hasta aquí hemos trabajado

con la ecuación lineal

$$Tx = y, \quad (4.1)$$

donde $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, con \mathcal{X} e \mathcal{Y} espacios de Hilbert. En la Sección 1.3 se introdujo la inversa generalizada de Moore-Penrose de T , a la que denotamos con T^\dagger . Allí vimos que la MSA (SCM de mínima norma) de (4.1) existe sí y sólo si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ y en tal caso la misma esta dada por $x^\dagger = T^\dagger y$.

También vimos que el conjunto de las SCMs esta dado por $S_y = x^\dagger + \mathcal{N}(T)$ y en consecuencia si $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$ existen infinitas SCMs. Podríamos estar interesados en seleccionar o aproximar ya no la MSA sino la SCM que minimice por ejemplo la seminorma $\|Lx\|$, donde L es un cierto operador adecuadamente elegido. Observar que la MSA x^\dagger corresponde al caso particular en que $L = I$ es el operador identidad. Obviamente debemos acordar ciertas condiciones sobre L que garanticen existencia y unicidad de tales SCM a la que de ahora en más denotaremos con x_L^\dagger . El concepto de inversa generalizada ponderada que introduciremos en esta sección nos permitirá una caracterización funcional rigurosa de x_L^\dagger análoga a la caracterización $x^\dagger = T^\dagger y$ para la SCM de mínima norma

En todo lo que sigue supondremos que \mathcal{Z} es un espacio de Hilbert y $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ un operador lineal cerrado, densamente definido y con rango $\mathcal{R}(L)$ cerrado. Supondremos además que L satisface la siguiente **condición de complementación**

$$(CC): \quad \exists \gamma > 0 \text{ tal que } \|Tx\|^2 + \|Lx\|^2 \geq \gamma \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(L). \quad (4.2)$$

Una condicion necesaria para la condición de complementación es claramente que $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L) = \{0\}$. El siguiente lema muestra que bajo la condición de que el núcleo de L sea de dimensión finita esta condición se torna suficiente.

Lema 4.1. *Si T y L son tales que $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$ y $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L) = \{0\}$, entonces se satisface la condición de complementación (4.2).*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{D}(L)$, $x \neq 0$. Supongamos que

$$\inf_{\substack{x \in \mathcal{D}(L) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|^2 + \|Lx\|^2}{\|x\|^2} = \inf_{\substack{x \in \mathcal{D}(L) \\ \|x\|=1}} \{\|Tx\|^2 + \|Lx\|^2\} = 0.$$

Entonces existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(L)$ con $\|x_n\| = 1$ tal que $\|Tx_n\|^2 + \|Lx_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En consecuencia

$$Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ y } Lx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.3)$$

Como $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$ se tiene que $\mathcal{N}(L)$ es un subespacio cerrado de \mathcal{X} . Así, $\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus (\mathcal{N}(L)^\perp \cap \mathcal{D}(L))$ y podemos representar a x_n de manera única como $x_n = u_n + v_n$, $u_n \in \mathcal{N}(L)$, $v_n \in \mathcal{N}(L)^\perp \cap \mathcal{D}(L)$. Entonces

$$Lx_n = \underbrace{Lu_n}_{=0} + Lv_n = Lv_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sea $\tilde{L} \doteq L|_{\mathcal{N}(L)^\perp \cap \mathcal{D}(L)} : \mathcal{N}(L)^\perp \cap \mathcal{D}(L) \rightarrow \mathcal{Z}$ entonces claramente $\mathcal{N}(\tilde{L}) = \{0\}$ y $\mathcal{R}(\tilde{L}) = \mathcal{R}(L)$. Por lo tanto, existe $\tilde{L}^{-1} : \mathcal{R}(L) \rightarrow \mathcal{N}(L)^\perp \cap \mathcal{D}(L)$. Como \tilde{L} es

cerrado se tiene que \tilde{L}^{-1} también es cerrado (ver Teorema A.60). Además $\mathcal{R}(L)$ y $\mathcal{N}(L)^\perp \cap \mathcal{D}(L)$ son espacios de Banach (por ser subespacios cerrados de espacios de Banach). Como \tilde{L}^{-1} es cerrado, por el Teorema del Grafo Cerrado (Teorema A.61), se sigue que \tilde{L}^{-1} es acotado. Así, de la continuidad de \tilde{L}^{-1} y del hecho que $Lv_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ se tiene que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Luego

$$Tv_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (4.4)$$

puesto que T es acotado.

Por otro lado, como $\{u_n\} \subset \mathcal{N}(L)$ es acotada (pues $u_n = P_{\mathcal{N}(L)}x_n$ y $\{x_n\}$ acotada) y $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$ existen $u_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(L)$ y $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ tal que $u_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_{\mathcal{N}}$ y por lo tanto

$$Tu_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} Tu_{\mathcal{N}}. \quad (4.5)$$

Luego de (4.4) y (4.5) se tiene que $Tx_{n_j} = Tu_{n_j} + Tv_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} Tu_{\mathcal{N}}$. Pero de (4.3) $Tx_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ y por lo tanto $Tu_{\mathcal{N}} = 0$. Así, $u_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L)$ y puesto que por hipótesis $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L) = \{0\}$ se sigue que $u_{\mathcal{N}} = 0$. Resumiendo tenemos que $u_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_{\mathcal{N}} = 0$ y $v_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, y por lo tanto $\|x_{n_j}\|^2 = \|u_{n_j}\|^2 + \|v_{n_j}\|^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ lo cual es un absurdo pues $\|x_{n_j}\| = 1$. Así, se tiene que $\inf_{\substack{x \in \mathcal{D}(L) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|^2 + \|Lx\|^2}{\|x\|^2} \doteq \gamma > 0$ y $\|Tx\|^2 + \|Lx\|^2 \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(L)$, como se quería probar. ■

El siguiente resultado muestra que bajo las condiciones anteriores la restricción de T a $\mathcal{N}(L)$ define un operador de rango cerrado y por lo tanto (ver Proposición 1.11) su inversa generalizada de Moore-Penrose es acotada. Este resultado será de vital importancia en la definición de *inversa generalizada ponderada*.

Lema 4.2. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ un operador lineal, cerrado, densamente definido, $T_0 \doteq T|_{\mathcal{N}(L)}$ y supongamos que se satisface la condición de complementación (4.2). Entonces $\mathcal{R}(T_0)$ es cerrado.

Demostración. Sean $\{y_n\} \subset \mathcal{R}(T_0)$, $\{x_n\} \subset \mathcal{N}(L)$ tales que $y_n = T_0x_n$ e $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, $y \in \mathcal{Y}$. Entonces, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &\leq \frac{1}{\gamma} (\|Tx_n - Tx_m\|^2 + \|Lx_n - Lx_m\|^2) \quad (\text{por (4.2)}) \\ &= \frac{1}{\gamma} \|T_0x_n - T_0x_m\|^2 \quad (\text{pues } x_n \in \mathcal{N}(L)) \\ &= \frac{1}{\gamma} \|y_n - y_m\|^2, \end{aligned}$$

y puesto que la sucesión $\{y_n\}$ es convergente se sigue entonces que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy en \mathcal{X} . Como \mathcal{X} es completo, existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Como $x_n \in \mathcal{N}(L) \forall n$ y $\mathcal{N}(L)$ es cerrado se sigue que $x \in \mathcal{N}(L)$. Además, la continuidad de T_0 implica que $y_n = T_0x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_0x$. Puesto que también $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ se sigue que $T_0x = y$ y por lo tanto $y \in \mathcal{R}(T_0)$. Luego $\mathcal{R}(T_0)$ es cerrado, como queríamos probar. ■

Observar que por ser $\mathcal{R}(T_0)$ cerrado entonces por la Proposición 1.11 se sigue entonces que T_0 tiene inversa de Moore-Penrose T_0^\dagger acotada. Más aún, $\|T_0^\dagger\| \leq \gamma^{-\frac{1}{2}}$. En

efecto, de la condición de complementación (4.2) se tiene que $\mathcal{N}(T_0) = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L) = \{0\}$ y por lo tanto $\mathcal{R}(T_0^\dagger) = \mathcal{N}(T_0)^\perp = \mathcal{N}(L)$ (notar que “ \perp ” en este caso debe interpretarse respecto del espacio $\mathcal{N}(L)$ entendido como un espacio de Hilbert con el mismo producto interno del espacio \mathcal{X}). Para todo $y \in \mathcal{D}(T_0^\dagger)$ con $\|y\| = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T_0^\dagger y\|^2 &\leq \frac{1}{\gamma} \left(\|TT_0^\dagger y\|^2 + \|LT_0^\dagger y\|^2 \right) \quad (\text{por (4.2) ya que } T_0^\dagger y \in \mathcal{D}(L)) \\ &= \frac{1}{\gamma} \|T_0 T_0^\dagger y\|^2 \quad (\text{pues } T_0^\dagger y \in \mathcal{N}(L)) \\ &= \frac{1}{\gamma} \|Q|_{\mathcal{D}(T_0^\dagger)} y\|^2 \\ &= \frac{1}{\gamma} \|y\|^2, \end{aligned}$$

donde Q es la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T_0)} = \mathcal{R}(T_0)$.

Prosiguiendo con la construcción del andamiaje matemático necesario para la construcción de la inversa generalizada ponderada, definimos a continuación un nuevo producto interno y la correspondiente norma inducida sobre el subespacio $\mathcal{D}(L)$:

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{x} \rangle_\star &\doteq \langle Tx, T\tilde{x} \rangle + \langle Lx, L\tilde{x} \rangle, \quad x, \tilde{x} \in \mathcal{D}(L) \\ \|x\|_\star &\doteq \sqrt{\langle x, x \rangle_\star} \quad x \in \mathcal{D}(L) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Notar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\star$ es un producto interno en $\mathcal{D}(L)$ por ser una forma bilineal simétrica y puesto que por la condición de complementación (4.2) se tiene que $\|x\|_\star^2 \doteq \|Tx\|^2 + \|Lx\|^2 \geq \gamma \|x\|^2 > 0$ para $x \neq 0$. En consecuencia, $\|\cdot\|_\star$ define una norma en $\mathcal{D}(L)$. Más aún, $\|\cdot\|_\star$ es una norma más fuerte en $\mathcal{D}(L)$ que la norma original de \mathcal{X} , $\|\cdot\|$.

En lo que sigue será necesario trabajar simultáneamente con ambos productos internos (i.e. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\star$) y por consiguiente con ambas normas (i.e. $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\star$) y topologías en $\mathcal{D}(L)$ (la topología inducida por el producto interno original en \mathcal{X} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y la \star -topología inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\star$). Por lo tanto, resulta conveniente introducir notaciones apropiadas para las nociones de operador adjunto, complemento ortogonal, etc. En este sentido la notación que utilizaremos es la siguiente:

$$\begin{aligned} T^* &: \text{ adjunto de } T, \\ A^\perp &: \text{ complemento ortogonal de } A \text{ en } \mathcal{X}, \\ \oplus &: \text{ suma directa ortogonal en } \mathcal{X}, \\ T^\sharp &: \text{ adjunto de } T \text{ en } \mathcal{D}(L), \\ A^{\perp\star} &: \text{ complemento } \star\text{-ortogonal de } A \text{ en } \mathcal{D}(L), \\ \oplus_\star &: \text{ suma directa } \star\text{-ortogonal en } \mathcal{D}(L). \end{aligned}$$

El siguiente lema muestra que el espacio $\mathcal{D}(L)$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\star$ es un espacio de Hilbert y provee una caracterización de los complementos ortogonales, con respecto a este nuevo producto interno, de los espacios $\mathcal{N}(L)$ y $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$.

Lema 4.3. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ un operador lineal densamente definido, cerrado, de rango $\mathcal{R}(L)$ cerrado, $T_0 = T|_{\mathcal{N}(L)}$, y el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ como en (4.6) y supongamos que se satisface la condición de complementación (4.2). Entonces $(\mathcal{D}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$ es un espacio de Hilbert. Además, con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$, se tiene que

$$\mathcal{L} \doteq \mathcal{R}(T^*T_0)^\perp \cap \mathcal{D}(L) = \{x \in \mathcal{D}(L) / T^*Tx \perp \mathcal{N}(L)\} \quad (4.7)$$

es el complemento ortogonal de $\mathcal{N}(L)$ en $\mathcal{D}(L)$ (i.e. $\mathcal{L} = \mathcal{N}(L)^{\perp*}$) y

$$\mathcal{T} \doteq \{x \in \mathcal{D}(L) / \langle Lx, L\tilde{x} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)\} \quad (4.8)$$

es el complemento ortogonal de $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$ en $\mathcal{D}(L)$ (i.e. $\mathcal{T} = (\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L))^{\perp*}$).

Demostración. Probaremos primero que toda sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(L)$ es convergente en la norma $\|\cdot\|_*$. Para ello, sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(L)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_*$. Entonces

$$\|x_n - x_m\|_*^2 = \|Tx_n - Tx_m\|^2 + \|Lx_n - Lx_m\|^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } n, m \rightarrow \infty$$

y por lo tanto $\|Tx_n - Tx_m\| \rightarrow 0$ y $\|Lx_n - Lx_m\| \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$. Es decir, $\{Tx_n\}$ y $\{Lx_n\}$ son sucesiones de Cauchy en \mathcal{Y} y \mathcal{Z} , respectivamente y puesto que \mathcal{Y} y \mathcal{Z} son completos, existen $y \in \mathcal{Y}$ y $z \in \mathcal{Z}$ tales que

$$Tx_n \rightarrow y \text{ y } Lx_n \rightarrow z \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Dado que $\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_* \mathcal{N}(L)^{\perp*}$, existen únicos $u_n \in \mathcal{N}(L)$ y $v_n \in \mathcal{N}(L)^{\perp*}$ tales que $x_n = u_n + v_n$. Probaremos que ambas sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son convergentes en \mathcal{X} . Para esto observar en primer lugar que puesto que $\mathcal{R}(L)$ es cerrado, $\mathcal{D}(L^\dagger) = \mathcal{Z}$, L^\dagger es acotada y en consecuencia $L^\dagger Lx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L^\dagger z$, esto es $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L^\dagger z \doteq v$ (pues $L^\dagger L$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{D}(L)$ sobre $\mathcal{N}(L)^{\perp*}$). De aquí y puesto que T es acotada se sigue además que $Tv_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tv$ y como $u_n \in \mathcal{N}(L)$ se sigue entonces que $T_0 u_n = Tu_n = Tx_n - Tv_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y - Tv$. Puesto que $\mathcal{R}(T_0)$ es cerrado (Lema 4.2), T_0^\dagger es acotada y por lo tanto

$$u_n = T_0^\dagger T_0 u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_0^\dagger (y - Tv) \doteq u \in \mathcal{R}(T_0^\dagger) = \mathcal{N}(T_0)^\perp = \mathcal{N}(L),$$

donde la primera igualdad se sigue del hecho que $u_n \in \mathcal{N}(L)$ y $T_0^\dagger T_0$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{N}(T_0)^\perp = \mathcal{N}(L)$.

Resumiendo hemos probado que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \in \mathcal{N}(L) \text{ y } v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v \in \mathcal{N}(L)^{\perp*}.$$

Luego

$$x_n = u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u + v \doteq x \in \mathcal{D}(L). \quad (4.10)$$

Necesitamos probar que la convergencia en (4.10) se verifica en la norma $\|\cdot\|_*$. Para ello observar que, puesto que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, $Lx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ y L es cerrado, se tiene que

$$Lx = z. \quad (4.11)$$

Además $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ y T es acotado se sigue entonces que

$$Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx = y, \quad (4.12)$$

donde la igualdad se sigue de (4.9).

Finalmente

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_{\star}^2 &= \|Tx_n - Tx\|^2 + \|Lx_n - Lx\|^2 \\ &= \|Tx_n - y\|^2 + \|Lx_n - z\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{por (4.12) y (4.11)}). \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{D}(L)$ es completo con respecto a la \star -topología y en consecuencia $(\mathcal{D}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\star})$ es un espacio de Hilbert.

Probaremos ahora que \mathcal{L} (definido como en (4.7)) es el complemento \star -ortogonal de $\mathcal{N}(L)$. Para ello, sea $x \in \mathcal{D}(L)$. Entonces

$$\begin{aligned} x \perp_{\star} \mathcal{N}(L) &\iff \langle x, \tilde{x} \rangle_{\star} = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{N}(L) \\ &\iff \langle Tx, T\tilde{x} \rangle + \left\langle Lx, \underbrace{L\tilde{x}}_{=0} \right\rangle = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{N}(L) \\ &\iff \langle T^*Tx, \tilde{x} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{N}(L) \\ &\iff T^*Tx \perp \mathcal{N}(L) \\ &\iff x \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{L} = \mathcal{N}(L)^{\perp_{\star}}$.

Por último probaremos que \mathcal{T} (definido como en (4.8)) es el complemento \star -ortogonal de $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$. Para ello, sea $x \in \mathcal{D}(L)$. Entonces

$$\begin{aligned} x \perp_{\star} \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L) &\iff \langle x, \tilde{x} \rangle_{\star} = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L) \\ &\iff \left\langle Tx, \underbrace{T\tilde{x}}_{=0} \right\rangle + \langle Lx, L\tilde{x} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L) \\ &\iff \langle Lx, L\tilde{x} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L) \\ &\iff x \in \mathcal{T}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{T} = (\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L))^{\perp_{\star}}$. Esto completa la demostración del lema. \blacksquare

Los operadores $L : \mathcal{D}(L) \rightarrow \mathcal{Z}$ y $T|_{\mathcal{D}(L)} : \mathcal{D}(L) \rightarrow \mathcal{Y}$ considerados sobre el espacio de Hilbert $(\mathcal{D}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\star})$ tienen sus respectivas inversas generalizadas a las que denotaremos con L_T^{\dagger} y T_L^{\dagger} , respectivamente¹. Estas inversas se conocen como **inversas generalizadas ponderadas de Moore-Penrose**, pues se obtienen utilizando el producto interno “ponderado” por L y T definido en (4.6). Es oportuno señalar que L_T^{\dagger} y T_L^{\dagger} son diferentes de las inversas generalizadas de Moore-Penrose (estándar) L^{\dagger} y T^{\dagger} que resultan del producto interno original en \mathcal{X} .

Lema 4.4. Sean T y L como en el Lema 4.3. Si $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado entonces T_L^{\dagger} no es acotado.

¹Notar que L y T son operadores acotados con respecto a la norma $\|\cdot\|_{\star}$ pues de (4.6) se sigue que $\exists c = 1$ tal que $\|Tx\| \leq \|x\|_{\star}$ y $\|Lx\| \leq \|x\|_{\star} \quad \forall x \in \mathcal{D}(L)$.

Demostración. En primer lugar probaremos que $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$. Puesto que $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) \subset \mathcal{R}(T)$ se sigue que $\overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})} \subset \overline{\mathcal{R}(T)}$. Probemos ahora que $\overline{\mathcal{R}(T)} \subset \overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$. Para ello, sea $y \in \mathcal{R}(T)$. Entonces, existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $Tx = y$. Como $\mathcal{D}(L)$ denso en \mathcal{X} , existe $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(L)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. De la continuidad del operador T se sigue que $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx = y$. Como $\{Tx_n\} \subset \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})$ se tiene que $y \in \overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$. Entonces hemos probado que $\mathcal{R}(T) \subset \overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$ y por lo tanto $\overline{\mathcal{R}(T)} \subset \overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$. Luego, si $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})$ es cerrado se sigue que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado puesto que $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})} = \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) \subset \mathcal{R}(T) \subset \overline{\mathcal{R}(T)}$. En consecuencia, si $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado se tiene entonces que $\overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$ no es cerrado y por la Proposición 1.11 el operador T_L^\dagger no es acotado, como se quería probar. ■

Observación 4.5. Es claro que $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$ implica que $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})^\perp$.

El siguiente teorema relaciona las SCMs del problema

$$Tx = y, \quad x \in \mathcal{D}(L), \quad (4.13)$$

con la inversa generalizada ponderada T_L^\dagger .

Teorema 4.6. Si $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ entonces $x_L^\dagger \doteq T_L^\dagger y$ es la SCM de (4.13) de mínima \star -norma. Además, para cualquier otra SCM \tilde{x} de (4.13) se verifica que

$$\|Lx_L^\dagger\| < \|L\tilde{x}\|. \quad (4.14)$$

Demostración. Sea $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$. Puesto que T_L^\dagger es la inversa generalizada de Moore-Penrose del operador acotado $T|_{\mathcal{D}(L)}$ considerado sobre el espacio de Hilbert $(\mathcal{D}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_\star)$, se sigue de la Sección 1.1 que $x_L^\dagger = T_L^\dagger y$ es la MSA de (4.13), es decir, es la SCM con mínima \star -norma.

Sea $\tilde{x} \neq x_L^\dagger$ una SCM de (4.13). Entonces $\|T_L^\dagger y\|_\star < \|\tilde{x}\|_\star$ y denotando con Q a la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|Qy\|^2 + \|Lx_L^\dagger\|^2 &= \|Tx_L^\dagger\|^2 + \|Lx_L^\dagger\|^2 \quad (\text{por Teorema 1.7 pues } x_L^\dagger \text{ es SCM}) \\ &= \|x_L^\dagger\|_\star^2 \\ &< \|\tilde{x}\|_\star^2 \\ &= \|T\tilde{x}\|^2 + \|L\tilde{x}\|^2 \\ &= \|Qy\|^2 + \|L\tilde{x}\|^2 \quad (\text{por Teorema 1.7 pues } \tilde{x} \text{ es SCM}), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|Lx_L^\dagger\| < \|L\tilde{x}\|$. ■

Observación 4.7. Es claro porque la unicidad de la SCM caracterizada en el teorema precedente requiere que los núcleos de T y L no puedan tener ningún elemento en común excepto el origen. Observar que si $\mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)}) = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L) \neq \{0\}$ entonces el conjunto de las SCMs de (4.13) estaría dado por

$$S_y = x^* + \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L),$$

donde x^* es una SCM cualquiera. Luego para dos SCMs cualesquiera $z_1 = x^* + x_1$, $z_2 = x^* + x_2$ con $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(L)$ se tendría que $\|Lz_1\| = \|Lz_2\|$, y así todas las SCMs tendrían la misma $\|L\cdot\|$ seminorma.

Sin pérdida de generalidad supondremos de ahora en más que L es sobreyectivo, es decir que $\mathcal{Z} = \mathcal{R}(L)$ (si ese no fuera el caso, podemos reemplazar \mathcal{Z} por $\mathcal{R}(L)$ puesto que éste es cerrado). Observar además que si bien $T_L^\dagger : \mathcal{D}(T_L^\dagger) \rightarrow \mathcal{D}(L)$ no es acotado (Lema 4.4) $L_T^\dagger : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{D}(L)$ si lo es pues $\mathcal{R}(L)$ es cerrado.

Observación 4.8. Las siguientes propiedades sobre los operadores T_L^\dagger y L_T^\dagger se siguen inmediatamente de la Definición 1.8, de la Observación 4.5 y del Lema 4.3:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T_L^\dagger) &= \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp, & \mathcal{D}(L_T^\dagger) &= \mathcal{R}(L) \oplus \mathcal{R}(L)^\perp = \mathcal{Z}, \\ \mathcal{N}(T_L^\dagger) &= \mathcal{R}(T)^\perp, & \mathcal{N}(L_T^\dagger) &= \mathcal{R}(L)^\perp = \mathcal{Z}^\perp = \{0\}, \\ \mathcal{R}(T_L^\dagger) &= \mathcal{T}, & \mathcal{R}(L_T^\dagger) &= \mathcal{L}. \end{aligned}$$

El siguiente lema provee descomposiciones para los subespacios $\mathcal{D}(T_L^\dagger)$ y $\mathcal{D}(L)$.

Lema 4.9. Sean $D_1 \doteq \mathcal{R}(TL_T^\dagger)$, $D_2 \doteq \mathcal{R}(T_0)$ y $D_3 \doteq \mathcal{R}(T)^\perp$. Entonces

- (i) D_1, D_2 y D_3 son ortogonales dos a dos;
- (ii) $\mathcal{D}(T_L^\dagger) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$;
- (iii) $\mathcal{Y} = \overline{D_1} \oplus D_2 \oplus D_3$.

Además, en $\mathcal{D}(L)$ se tiene la descomposición (oblicua respecto al producto interno original en \mathcal{X})

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_\star (\mathcal{L} \cap \mathcal{T}) \oplus_\star (\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)). \quad (4.15)$$

Demostración. Probaremos primero que $\mathcal{D}(T_L^\dagger) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$. Puesto que $\mathcal{D}(T_L^\dagger) = \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) \oplus \underbrace{\mathcal{R}(T)^\perp}_{D_3}$ es suficiente con probar que $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) = D_1 \oplus D_2$.

Veamos primero que $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) = D_1 + D_2$. Del Lema 4.3 se tiene que $\mathcal{R}(L_T^\dagger) = \mathcal{L} \subset \mathcal{D}(L)$ y por lo tanto se tiene que $D_1 = \mathcal{R}(TL_T^\dagger) \subset \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})$. De igual modo, puesto que $T_0 = T|_{\mathcal{N}(L)}$ se tiene que $D_2 = \mathcal{R}(T_0) \subset \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})$. Luego

$$D_1 + D_2 \subset \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}). \quad (4.16)$$

Por otro lado, sea $y = Tx \in \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})$. Dado que $\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{N}(L)^{\perp\star} = \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{R}(L_T^{\dagger})$, existen $x_1 \in \mathcal{N}(L)$ y $x_2 \in \mathcal{R}(L_T^{\dagger})$ tales que $x = x_1 + x_2$ y por lo tanto $y = Tx = Tx_1 + Tx_2 = T_0x_1 + Tx_2 \in D_2 + D_1$. Luego

$$\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) \subset D_1 + D_2, \quad (4.17)$$

y por lo tanto de (4.16) y (4.17) se tiene que $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) = D_1 + D_2$.

Probaremos ahora que $D_1 \perp D_2$. Para ello, sean $y_1 \in D_1$, $y_2 \in D_2$. Entonces existen $x_1 \in \mathcal{R}(L_T^{\dagger})$ y $x_2 \in \mathcal{N}(L)$ tales que $y_1 = Tx_1$ y $y_2 = Tx_2 = T_0x_2$. En consecuencia

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle Tx_1, T_0x_2 \rangle = \langle x_1, T^*T_0x_2 \rangle = 0,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $x_1 \in \mathcal{R}(L_T^{\dagger}) = \mathcal{L} \subset \mathcal{R}(T^*T_0)^{\perp}$. Por lo tanto $D_1 \perp D_2$ y $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) = D_1 \oplus D_2$, como se quería probar. Esto completa la demostración de (i) y (ii).

Para probar (iii) observar que

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \overline{\mathcal{D}(T_L^{\dagger})} \\ &= \overline{D_1 \oplus D_2 \oplus D_3} \quad (\text{por (ii)}) \\ &= \overline{D_1} \oplus \overline{D_2} \oplus \overline{D_3} \quad (\text{pues } \mathcal{Y} \text{ es espacio de Hilbert y } D_i \perp D_j \forall i \neq j) \\ &= \overline{D_1} \oplus D_2 \oplus D_3, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que D_3 es obviamente cerrado y D_2 también lo es en virtud del Lema 4.2.

Resta probar (4.15). Para ello observar que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(L) &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{N}(L)^{\perp\star} \quad (\text{pues } \mathcal{N}(L) \text{ es cerrado}) \\ &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \quad (\text{por Lema 4.3}) \\ &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap \mathcal{D}(L) \quad (\text{pues } \mathcal{L} \subset \mathcal{D}(L)) \\ &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap [\mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)}) \oplus_{\star} \mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})^{\perp\star}] \\ &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap [(\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)) \oplus_{\star} (\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L))^{\perp\star}] \\ &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap [(\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)) \oplus_{\star} \mathcal{T}] \quad (\text{por Lema 4.3}) \\ &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap \mathcal{T} \\ &= \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap \mathcal{T} \oplus_{\star} \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L) \quad (\text{pues } \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{L}). \end{aligned}$$

Esto completa la demostración del lema. ■

En la Figura 4.1 se esquematizan dos representaciones, la descomposición \star -ortogonal de $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X}$ en términos de los subespacios $\mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})$, $\mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ y la descomposición ortogonal de $\mathcal{D}(T_L^{\dagger}) \subset \mathcal{Y}$ en términos de los subespacios D_1 , D_2 y D_3 .

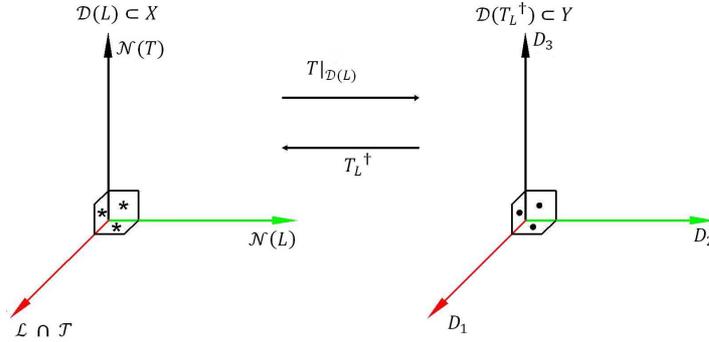


Figura 4.1: Descomposiciones ortogonales

En la Figura 4.1 los “ejes” que definen al plano horizontal en ambas representaciones son mapeados el uno sobre el otro (a su correspondiente) de izquierda a derecha por el operador $T|_{\mathcal{D}(L)}$ y de derecha a izquierda por el operador T_L^\dagger , mientras que los ejes verticales representan los núcleos de tales operadores. Así por ejemplo, la imagen del subespacio $\mathcal{N}(L)$ en \mathcal{X} por el operador $T|_{\mathcal{D}(L)}$ es el subespacio D_2 en \mathcal{Y} y la imagen del subespacio D_1 en \mathcal{Y} por el operador T_L^\dagger es el subespacio $\mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ en \mathcal{X} . En la siguiente observación mostraremos brevemente las correspondencias de estos mapeos.

Observación 4.10.

- 1) Puesto que $D_2 \doteq \mathcal{R}(T|_{\mathcal{N}(L)}) = T(\mathcal{N}(L))$ se tiene que $T|_{\mathcal{N}(L)}$ mapea $\mathcal{N}(L)$ sobre D_2 . Por otro lado, como $T_L^\dagger T|_{\mathcal{N}(L)}$ es la proyección \star -ortogonal de $\mathcal{D}(L)$ sobre $\mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})^{\perp \star} = \mathcal{T}$ y $\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{T}$ se tiene que $T_L^\dagger(D_2) = T_L^\dagger(T(\mathcal{N}(L))) = \mathcal{N}(L)$ y en consecuencia T_L^\dagger mapea D_2 sobre $\mathcal{N}(L)$.
- 2) Observar que $\mathcal{T} = \mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})^{\perp \star} = \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ (ver Lema 4.3 y (4.15)) y también

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathcal{R}(T_L^\dagger) \\ &= T_L^\dagger(D_1) \oplus_{\star} T_L^\dagger(D_2) \quad (\text{Lema 4.9: } \mathcal{D}(T_L^\dagger) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \text{ y } D_3 = \mathcal{N}(T_L^\dagger)) \\ &= T_L^\dagger(D_1) \oplus_{\star} \mathcal{N}(L) \quad (\text{por Observ. 1) se tiene que } T_L^\dagger(D_2) = \mathcal{N}(L)). \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que $T_L^\dagger(D_1) = \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$. Por otro lado, $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)}) = D_1 + D_2$ (ver demostración del Lema 4.9) y como por 1) $T|_{\mathcal{D}(L)}$ mapea $\mathcal{N}(L)$ sobre D_2 y $\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} \mathcal{L} \cap \mathcal{T} \oplus_{\star} \mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})$, se sigue entonces que $T|_{\mathcal{D}(L)}$ mapea $\mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ sobre D_1 .

- 3) Finalmente, como $D_3 = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})^\perp$ (ver Observación 4.5) es el núcleo del operador T_L^\dagger se tiene que $T_L^\dagger(D_3) = \{0\}$ y como $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$ es el núcleo del operador $T|_{\mathcal{D}(L)}$ se tiene obviamente que $T|_{\mathcal{D}(L)}(\mathcal{N}(L) \cap \mathcal{D}(L)) = \{0\}$.

El siguiente resultado que relaciona los adjuntos de los operadores T y L_T^\dagger será necesario en la próxima sección.

Lema 4.11. *Sean T y L como en el Lema 4.3 y D_1, D_2, D_3 como en el Lema 4.9. Entonces*

- (i) $D_2 + D_3 \subset \mathcal{N}((L_T^\dagger)^*T^*)$,
- (ii) $\mathcal{R}((L_T^\dagger)^*T^*) \subset \mathcal{D}(L^*)$.

Además, si $y = y_1 + y_{2,3} \in \mathcal{Y}$ con $y_1 \in \overline{D_1}$, $y_{2,3} \in D_2 + D_3$ se tiene que

$$L^*(L_T^\dagger)^*T^*y = T^*y_1. \quad (4.18)$$

Demostración.

- (i) Puesto que $D_3 = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*) \subset \mathcal{N}((L_T^\dagger)^*T^*)$ es suficiente con probar que $D_2 \subset \mathcal{N}((L_T^\dagger)^*T^*)$. Para esto observar que

$$\begin{aligned} y \in D_2 &\implies \exists x \in \mathcal{N}(L) \text{ tal que } y = T_0x \quad (\text{pues } D_2 = \mathcal{R}(T_0)) \\ &\implies \exists x \in \mathcal{N}(L) \text{ tal que } T^*y = T^*T_0x \in \mathcal{L}^\perp \\ &\implies (L_T^\dagger)^*T^*y = 0 \quad (\text{pues } T^*y \in \mathcal{L}^\perp = \mathcal{R}(L_T^\dagger)^\perp = \mathcal{N}((L_T^\dagger)^*)) \\ &\implies y \in \mathcal{N}((L_T^\dagger)^*T^*), \end{aligned}$$

donde la segunda implicación se sigue del hecho que $\mathcal{R}(T^*T_0) \subset \mathcal{R}(T^*T_0)^{\perp\perp} \subset \mathcal{L}^\perp$ (pues $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}(T^*T_0)^\perp$ por (4.7)). Luego $D_2 \subset \mathcal{N}((L_T^\dagger)^*T^*)$ como se quería probar.

Probaremos ahora (ii) y (4.18). Para ello sea $y = y_1 + y_{2,3} \in \mathcal{Y}$ con $y_1 \in \overline{D_1}$, $y_{2,3} \in D_2 + D_3$. Entonces

$$\begin{aligned} (L_T^\dagger)^*T^*y &= (L_T^\dagger)^*T^*y_1 + (L_T^\dagger)^*T^*y_{2,3} \\ &= (L_T^\dagger)^*T^*y_1 \quad (\text{pues por (i) } y_{2,3} \in \mathcal{N}((L_T^\dagger)^*T^*)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Recordemos que, en virtud del Lema 4.9 y (4.7), $\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_\star \mathcal{L}$. Consideraremos ahora los siguientes dos casos:

CASO 1) Si $x \in \mathcal{L}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle Lx, (L_T^\dagger)^*T^*y \rangle &= \langle Lx, (L_T^\dagger)^*T^*y_1 \rangle \quad (\text{por (4.19)}) \\ &= \langle L_T^\dagger Lx, T^*y_1 \rangle \\ &= \langle x, T^*y_1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $L_T^\dagger L$ es la proyección \star -ortogonal de $\mathcal{D}(L)$ sobre $\mathcal{N}(L)^{\perp\star} = \mathcal{L}$ y $x \in \mathcal{L}$.

CASO 2) Supongamos que $x \in \mathcal{N}(L)$. Como $y_1 \in \overline{D_1} = \overline{\mathcal{R}(TL_T^\dagger)}$ existe $\{x_n\} \subset \mathcal{R}(L_T^\dagger) = \mathcal{L}$ tal que $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_1$ y por lo tanto $T^*Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^*y_1$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, T^*y_1 \rangle &= \left\langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} T^*Tx_n \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, T^*Tx_n \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^*T_0x, x_n \rangle \quad (\text{pues } x \in \mathcal{N}(L) \text{ y } T_0 = T|_{\mathcal{N}(L)}) \\ &= 0 \quad (\text{pues } \{x_n\} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{R}(T^*T_0)^\perp \text{ por (4.7)}). \end{aligned}$$

Por otro lado, $\langle Lx, (L_T^\dagger)^*T^*y \rangle = 0$ pues $x \in \mathcal{N}(L)$ y por lo tanto

$$\langle Lx, (L_T^\dagger)^*T^*y \rangle = \langle x, T^*y_1 \rangle \quad (= 0). \quad (4.21)$$

De (4.20) y (4.21), y puesto que como vimos $\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_* \mathcal{L}$, concluimos que $\langle Lx, (L_T^\dagger)^*T^*y \rangle = \langle x, T^*y_1 \rangle \forall x \in \mathcal{D}(L)$ de donde se siguen (ii) y (4.18). Esto completa la demostración del lema. \blacksquare

4.2 Regularización con seminormas

Para aproximar la MSA $x_L^\dagger = T_L^\dagger y$ del problema $Tx = y$, $x \in \mathcal{D}(L)$ podríamos utilizar cualquiera de los métodos espectrales de regularización estudiados en los capítulos anteriores, considerando el operador $T|_{\mathcal{D}(L)}$ sobre el espacio de Hilbert $(\mathcal{D}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$, definiendo de este modo una familia de operadores de regularización para T_L^\dagger como $R_\alpha \doteq g_\alpha(T^\sharp T)T^\sharp$, donde g_α satisface las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1 y, recordemos, T^\sharp es el operador adjunto de $T : (\mathcal{D}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_*) \rightarrow \mathcal{Y}$. Para el caso particular del método de Tikhonov-Phillips esto fue estudiado en 1980 por Locker y Prenter ([40]). Este enfoque tiene ciertas desventajas desde el punto de vista computacional, pues requiere del cálculo del operador adjunto $T^\sharp = (T^*T + L^*L)^{-1}T^* : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{D}(L)$ (ver [40], Lema 4.1). Así, toda instancia en la que sea necesario el cálculo de T^\sharp requerirá la solución de una ecuación lineal con el operador $T^*T + L^*L$, lo que usualmente resulta computacionalmente costoso.

Un enfoque diferente fue introducido por Hanke en 1992 ([30]). Aunque con este método se evita el cálculo del operador T^\sharp , también se requiere de la solución de ecuaciones lineales pues deben calcularse los operadores L_T^\dagger y $(L_T^\dagger)^*$. Sin embargo, es importante mencionar que tales sistemas pueden resolverse de manera eficiente cuando L es un operador diferencial (ver [18], Sección 9.2).

En esta sección nos proponemos analizar este segundo enfoque para la aproximación de x_L^\dagger . Con este propósito comenzamos definiendo el siguiente operador

$$B \doteq TL_T^\dagger. \quad (4.22)$$

Notar que $B : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ es acotado ya que ambos operadores $T : \mathcal{D}(L) \rightarrow \mathcal{Y}$ y $L_T^\dagger : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{D}(L)$ lo son (este último puesto que $\mathcal{R}(L)$ es cerrado). Como siempre, consideraremos a $\mathcal{D}(L)$ como un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$.

La siguiente proposición, que será muy útil en demostraciones posteriores, se conoce como “ley de orden inverso” para la inversa generalizada de un operador producto (ver por ejemplo [17]).

Proposición 4.12. *Sean T y L como en el Lema 4.3. Entonces la inversa generalizada de Moore-Penrose de $B = TL_T^\dagger$ esta dada por $B^\dagger = LT_L^\dagger$.*

Demostración. Sean D_1, D_2 y D_3 como en el Lema 4.9. Entonces $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(TL_T^\dagger) = D_1$ y en consecuencia $\mathcal{D}(B^\dagger) \doteq \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{R}(B)^\perp = D_1 \oplus D_1^\perp = \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ (la última igualdad se sigue del hecho que $D_1^\perp = D_2 \oplus D_3$, $\mathcal{D}(T_L^\dagger) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$, ver demostración del Lema 4.9).

Probaremos que el operador LT_L^\dagger satisface junto con B las cuatro ecuaciones de Moore-Penrose ((1.15) - (1.18)). Puesto que éstas caracterizan a B^\dagger se tendrá entonces que $B^\dagger = LT_L^\dagger$. En virtud de la Observación 1.10 será suficiente con probar que los operadores $B(LT_L^\dagger)$ y $(LT_L^\dagger)B$ son proyecciones ortogonales (más precisamente $B(LT_L^\dagger)$ debe ser la restricción a $\mathcal{D}(T_L^\dagger)$ de una proyección ortogonal). Consideremos primero el operador $B(LT_L^\dagger) : \mathcal{D}(T_L^\dagger) \rightarrow \mathcal{Y}$. Dado $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$, en virtud del Lema 4.9 podemos escribir $y = y_1 + y_2 + y_3$ con $y_1 \in D_1, y_2 \in D_2, y_3 \in D_3$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} B(LT_L^\dagger)y &= BL(T_L^\dagger y_1 + T_L^\dagger y_2 + T_L^\dagger y_3) \\ &\doteq \sum_{i=1}^3 S_i, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde $S_i \doteq BLT_L^\dagger y_i, i = 1, 2, 3$. A continuación analizaremos por separado cada uno de los tres términos en el lado derecho de (4.23).

S_1 : En la Observación 4.10 vimos que el operador T_L^\dagger mapea D_1 sobre $\mathcal{L} \cap \mathcal{T}$, i.e. $T_L^\dagger(D_1) = \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$. En consecuencia, como $y_1 \in D_1, T_L^\dagger y_1 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$. Entonces

$$S_1 = BLT_L^\dagger y_1 = TL_T^\dagger LT_L^\dagger y_1 = TT_L^\dagger y_1 = y_1, \quad (4.24)$$

donde la penúltima igualdad se sigue del hecho que $L_T^\dagger L$ es la proyección \star -ortogonal de $\mathcal{D}(L)$ sobre $\mathcal{N}(L)^{\perp\star} = \mathcal{L}$ y $T_L^\dagger y_1 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$, y la última igualdad pues $y_1 \in D_1 \subset \overline{\mathcal{R}(T)}$ y TT_L^\dagger es la restricción a $\mathcal{D}(T_L^\dagger)$ de la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})} = \overline{\mathcal{R}(T)}$ (ver demostración del Lema 4.4).

S_2 : En la Observación 4.10 también vimos que el operador T_L^\dagger mapea D_2 sobre $\mathcal{N}(L)$, i.e. $T_L^\dagger(D_2) = \mathcal{N}(L)$. En consecuencia, como $y_2 \in D_2$, se tiene que $T_L^\dagger y_2 \in \mathcal{N}(L)$ y por lo tanto $LT_L^\dagger y_2 = 0$, y

$$S_2 = BLT_L^\dagger y_2 = 0. \quad (4.25)$$

S_3 : Finalmente, vimos en la Observación 4.10 que D_3 es el núcleo del operador T_L^\dagger . En consecuencia, como $y_3 \in D_3$, se tiene que $T_L^\dagger y_3 = 0$ y por lo tanto $LT_L^\dagger y_3 = 0$, y

$$S_3 = BLT_L^\dagger y_3 = 0. \quad (4.26)$$

Así, de (4.23), (4.24), (4.25) y (4.26), se sigue que $BLT_L^\dagger y = y_1$ y en consecuencia el operador $B(LT_L^\dagger)$ es la restricción a $\mathcal{D}(T_L^\dagger)$ de la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $D_1 = \mathcal{R}(B)$.

Consideremos ahora el operador $(LT_L^\dagger)B : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$. Dado $z \in \mathcal{Z}$, como $L_T^\dagger z \in \mathcal{N}(L)^{\perp\star} = \mathcal{L}$ (ver Lema 4.3) y de (4.15) se tiene que $\mathcal{N}(L)^{\perp\star} = \mathcal{L} \cap \mathcal{T} \oplus_{\star} \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$, existen $x_1 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ y $x_2 \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$ tales que

$$L_T^\dagger z = x_1 + x_2. \quad (4.27)$$

Entonces

$$\begin{aligned} (LT_L^\dagger)Bz &= (LT_L^\dagger)TL_T^\dagger z \\ &= LT_L^\dagger(Tx_1 + Tx_2) \quad (\text{por (4.27)}) \\ &= LT_L^\dagger Tx_1 \quad (\text{pues } x_2 \in \mathcal{N}(T)) \\ &= Lx_1, \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $T_L^\dagger T$ es proyección \star -ortogonal de $\mathcal{D}(L)$ sobre $\mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})^{\perp\star} = \mathcal{T}$ (ver Lema 4.3) y $x_1 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$.

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} z &= LL_T^\dagger z \quad (\text{pues } \mathcal{R}(L) = \mathcal{Z} \text{ y por lo tanto } LL_T^\dagger = I) \\ &= L(x_1 + x_2) \quad (\text{por (4.27)}) \\ &= \underbrace{Lx_1}_{\in \mathcal{R}(L|_{\mathcal{L} \cap \mathcal{T}})} + \underbrace{Lx_2}_{\in \mathcal{R}(L|_{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)})}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Además, $\mathcal{R}(L|_{\mathcal{L} \cap \mathcal{T}}) = \mathcal{R}(L|_{\mathcal{T}})$ (puesto que obviamente $\mathcal{R}(L|_{\mathcal{L} \cap \mathcal{T}}) \subset \mathcal{R}(L|_{\mathcal{T}})$ y la otra inclusión se sigue fácilmente del hecho que $\mathcal{T} = (\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L))^{\perp\star} = \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T})$) y

$$\mathcal{R}(L|_{\mathcal{L} \cap \mathcal{T}}) \perp \mathcal{R}(L|_{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)}). \quad (4.30)$$

Para probar (4.30) sean $z_1 \in \mathcal{R}(L|_{\mathcal{L} \cap \mathcal{T}}) = \mathcal{R}(L|_{\mathcal{T}})$ y $z_2 \in \mathcal{R}(L|_{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)})$. Entonces existen $x_1 \in \mathcal{T}$, $x_2 \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$ tales que $z_1 = Lx_1$ y $z_2 = Lx_2$. Así, por (4.8) se tiene que $\langle Lx_1, Lx_2 \rangle = 0$ y por lo tanto $\langle z_1, z_2 \rangle = 0$. De (4.28), (4.29) y (4.30) se sigue entonces que el operador $(LT_L^\dagger)B$ es la proyección ortogonal de \mathcal{Z} sobre $\mathcal{R}(L|_{\mathcal{L} \cap \mathcal{T}}) = \mathcal{R}(L|_{\mathcal{T}})$.

Esto prueba entonces que efectivamente el operador LT_L^\dagger es la inversa generalizada de Moore-Penrose de B , esto es $B^\dagger = LT_L^\dagger$. \blacksquare

Observar que si $L = I$ es el operador identidad, entonces la inversa generalizada de Moore-Penrose de $B \doteq T$ es obviamente $T_I^\dagger = T^\dagger$.

A continuación procederemos a construir una familia de operadores de regularización para T_L^\dagger en términos de los operadores L , $T_0 = T|_{\mathcal{N}(L)}$ y $B = TL_T^\dagger$ definidos precedentemente. Para ello necesitaremos previamente del siguiente lema.

Lema 4.13. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, T y L como en el Lema 4.3 tales que satisfacen la condición de complementación (4.2). Entonces para $y \in D(T_L^\dagger)$, $T_0^\dagger y$ es la componente (proyección \star -ortogonal) de $T_L^\dagger y$ en $\mathcal{N}(L)$.

Demostración. Observar en primer lugar que $\mathcal{D}(T_L^\dagger) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ (Lema 4.9), $\mathcal{R}(T_L^\dagger) = \mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})^{\perp\star} = \mathcal{T}$ (ver Lema 4.3) y puesto que $\mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T}) \oplus_{\star} \mathcal{N}(T|_{\mathcal{D}(L)})$ (por (4.15)) se tiene entonces que

$$\mathcal{R}(T_L^\dagger) = T_L^\dagger(D_1 \oplus D_2 \oplus D_3) = \mathcal{N}(L) \oplus_{\star} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T}). \quad (4.31)$$

Supongamos ahora que $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$. Entonces $y = y_1 + y_2 + y_3$ con $y_1 \in D_1$, $y_2 \in D_2$, $y_3 \in D_3$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} T_L^\dagger y &= T_L^\dagger y_1 + T_L^\dagger y_2 + T_L^\dagger y_3 \\ &= T_L^\dagger y_1 + T_L^\dagger y_2 \quad (\text{pues } y_3 \in D_3 = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})^\perp = \mathcal{N}(T_L^\dagger)) \\ &\doteq x_1 + x_2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde $x_i \doteq T_L^\dagger y_i$, $i = 1, 2$, $x_1 \in T_L^\dagger(D_1) = \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ y $x_2 \in T_L^\dagger(D_2) = \mathcal{N}(L)$ (ver Observación 4.10 2), 1). Probaremos ahora que efectivamente $T_0^\dagger y = x_2$. En efecto

$$\begin{aligned} x_2 &= T_L^\dagger y_2 \\ &= T_L^\dagger T_0 T_0^\dagger y \quad (\text{pues } T_0 T_0^\dagger \text{ es la proyec. ortogonal de } \mathcal{Y} \text{ sobre } \mathcal{R}(T_0) = D_2) \\ &= T_L^\dagger T|_{\mathcal{D}(L)} T_0^\dagger y \quad (\text{pues } T_0^\dagger y \in \mathcal{R}(T_0^\dagger) = \mathcal{N}(L) \subset \mathcal{D}(L)) \\ &= T_0^\dagger y, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $T_L^\dagger T|_{\mathcal{D}(L)}$ es la proyección \star -ortogonal de $\mathcal{D}(L)$ sobre $\mathcal{R}(T_L^\dagger)$ y $T_0^\dagger y \in \mathcal{N}(L) \subset \mathcal{R}(T_L^\dagger)$ (la inclusión se sigue de (4.31)). Esto completa la demostración del lema. \blacksquare

Observación 4.14. De (4.32) y (4.33) se sigue inmediatamente que para $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$

$$T_L^\dagger y - T_0^\dagger y = x_1 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}, \quad (4.34)$$

donde $x_1 = P_{\mathcal{L} \cap \mathcal{T}} T_L^\dagger y$.

En forma análoga a lo hecho en la Sección 2.1 para el caso $L = I$, dada una familia de funciones $\{g_\alpha(\lambda)\}_{\alpha>0}$ que aproximen a $\frac{1}{\lambda}$ (adecuadamente elegida) procedemos a definir la familia de operadores $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ como

$$R_\alpha \doteq T_0^\dagger + L_T^\dagger g_\alpha(B^* B) B^*. \quad (4.35)$$

En lo que resta de esta sección probaremos que esta familia $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ constituye una regularización para T_L^\dagger y analizaremos diversas propiedades de esta familia, como así también varios resultados de convergencia.

Observar que, para todo $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ se tiene que

$$L_T^\dagger g_\alpha(B^* B) B^* y \in \mathcal{R}(L_T^\dagger g_\alpha(B^* B) B^*) \subset \mathcal{R}(L_T^\dagger) = \mathcal{N}(L)^{\perp\star}$$

y puesto que $\mathcal{R}(T_0^\dagger) = \mathcal{N}(L)$, los términos en (4.35) constituyen una descomposición \star -ortogonal.

El siguiente teorema (análogo al Teorema 2.1), provee condiciones suficientes sobre la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha>0}$ que garantizan que la correspondiente familia de operadores $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$, con R_α definido como en (4.35), es una familia de operadores de regularización para T_L^\dagger .

Teorema 4.15. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, T y L como en el Lema 4.3, Q la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T)}$, $B \doteq TL_T^\dagger$, $\{g_\alpha\}_{\alpha>0}$ una familia de funciones definidas sobre $[0, \|B\|^2]$ que satisface las hipótesis (H1), (H2), (H3) del Teorema 2.1 y R_α como en (4.35). Entonces

(i) si $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ se tiene que

$$R_\alpha y \rightarrow T_L^\dagger y, \quad LR_\alpha y \rightarrow LT_L^\dagger y, \quad TR_\alpha y \rightarrow Qy \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+;$$

(ii) si $y \notin \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ se tiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|LR_\alpha y\| = \infty$.

Demostración. Sea $y \in \mathcal{Y}$. Entonces, $g_\alpha(B^*B)B^*y \in \mathcal{Z}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} g_\alpha(B^*B)B^*y &= LL_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y \quad (\text{pues } LL_T^\dagger = I \text{ ya que } \mathcal{R}(L) = \mathcal{Z}) \\ &= LT_0^\dagger y + LL_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y \quad (\text{pues } T_0^\dagger y \in \mathcal{N}(L)) \\ &= LR_\alpha y \quad (\text{por definición de } R_\alpha). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para probar (i), sea $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger) = \mathcal{D}(B^\dagger)$. Del Teorema 2.1 (i) y puesto que $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ se sigue que

$$g_\alpha(B^*B)B^*y \rightarrow B^\dagger y \quad \text{para } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (4.37)$$

De (4.36), (4.37), y utilizando el Teorema del orden inverso (Teorema 4.12), se tiene que

$$LR_\alpha y \rightarrow LT_L^\dagger y \quad \text{para } \alpha \rightarrow 0^+, \quad (4.38)$$

lo cual prueba una de las convergencias en (i).

A continuación probaremos que $TR_\alpha y \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} Qy$. Para ello observar que

$$\begin{aligned} TR_\alpha y &= TT_0^\dagger y + TL_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y \quad (\text{por definición de } R_\alpha) \\ &= T_0T_0^\dagger y + Bg_\alpha(B^*B)B^*y \quad (\text{pues } T_0^\dagger y \in \mathcal{N}(L), T_0 = T|_{\mathcal{N}(L)} \text{ y } B = TL_T^\dagger) \\ &= T_0T_0^\dagger y + BLR_\alpha y \quad (\text{por (4.36)}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\rightarrow (T_0T_0^\dagger + BB^\dagger)y \quad \text{para } \alpha \rightarrow 0^+, \quad (4.40)$$

donde la convergencia se sigue de (4.38) y la continuidad de B . Analizaremos ahora los dos términos que surgen en (4.40). Para ello observar que como $\mathcal{D}(T_L^\dagger) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ (ver Lema 4.9), podemos representar a y como $y = y_1 + y_2 + y_3$ con $y_1 \in D_1$, $y_2 \in D_2$, $y_3 \in D_3$. Luego, puesto que $T_0T_0^\dagger$ es la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\mathcal{R}(T_0) = D_2$, se tiene que $T_0T_0^\dagger y = y_2$. Análogamente, puesto que BB^\dagger es la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\mathcal{R}(B) = D_1$ se tiene que $BB^\dagger y = y_1$. Luego, $T_0T_0^\dagger y + BB^\dagger y = y_2 + y_1$ y de (4.40) se sigue que

$$TR_\alpha y \rightarrow y_2 + y_1 = Qy \quad \text{para } \alpha \rightarrow 0^+, \quad (4.41)$$

donde Q es la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{D_1} \oplus D_2 = D_3^\perp$ (pues por el Lema 4.9 $\mathcal{Y} = \overline{D_1} \oplus D_2 \oplus D_3$ y $D_3 = \mathcal{R}(T)^\perp$).

A continuación probaremos la última convergencia correspondiente al caso (i), es decir que $R_\alpha y \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} T_L^\dagger y$. Para esto observar que como $R_\alpha y \in \mathcal{D}(L)$ y $T_L^\dagger y \in \mathcal{T} \subset \mathcal{D}(L)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y - T_L^\dagger y\|^2 &\leq \frac{1}{\gamma} \left(\|TR_\alpha y - TT_L^\dagger y\|^2 + \|LR_\alpha y - LT_L^\dagger y\|^2 \right) \quad (\text{por la CC (4.2)}) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \left(\|TR_\alpha y - Qy\|^2 + \|LR_\alpha y - LT_L^\dagger y\|^2 \right) \quad (4.42) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{para } \alpha \rightarrow 0^+ \quad (\text{por (4.41) y (4.38)}), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que TT_L^\dagger es la restricción a $\mathcal{D}(T_L^\dagger)$ de la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre $\overline{\mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})} = \overline{\mathcal{R}(T)}$ (ver demostración del Lema 4.4), es decir $TT_L^\dagger = Q|_{\mathcal{D}(T_L^\dagger)}$.

La segunda parte del teorema se sigue inmediatamente del Teorema 2.1 (ii) puesto que si $y \notin \mathcal{D}(T_L^\dagger) = \mathcal{D}(B^\dagger)$ entonces $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|LR_\alpha y\| = \infty$. Esto completa la demostración del teorema. \blacksquare

Observación 4.16. Notar que las soluciones regularizadas $R_\alpha y$, con R_α como en (4.35), pertenecen a $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}(L^*L)$. En efecto, observar en primer lugar que $\forall y \in \mathcal{Y}$ se tiene que

$$R_\alpha y = \underbrace{T_0^\dagger y}_{\in \mathcal{N}(L)} + \underbrace{L_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y}_{\in \mathcal{R}(L_T^\dagger) = \mathcal{L}} \in \mathcal{D}(L).$$

(i) Probaremos que $R_\alpha y \in \mathcal{D}(L^*L)$. Para ello observar que

$$\begin{aligned} LR_\alpha y &= g_\alpha(B^*B)B^*y \quad (\text{por (4.36)}) \\ &= B^*g_\alpha(BB^*)y \quad (\text{por (B.14)}), \end{aligned}$$

y por lo tanto $LR_\alpha y \in \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}((TL_T^\dagger)^*) = \mathcal{R}((L_T^\dagger)^*T^*) \subset \mathcal{D}(L^*)$, donde la inclusión se sigue en virtud del Lema 4.11 (ii). Así, $LR_\alpha y \in \mathcal{D}(L^*)$ y por lo tanto $R_\alpha y \in \mathcal{D}(L^*L)$.

(ii) Veamos ahora que $R_\alpha y \in \mathcal{T} = (\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L))^{\perp*}$. Para ello, sea $x \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{D}(L)$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle R_\alpha y, x \rangle_* &= \langle TR_\alpha y, Tx \rangle + \langle LR_\alpha y, Lx \rangle \quad (\text{por (4.6)}) \\ &= \langle LR_\alpha y, Lx \rangle \quad (\text{pues } x \in \mathcal{N}(T)) \\ &= \langle L^*LR_\alpha y, x \rangle \\ &= \langle L^*B^*\tilde{y}, x \rangle, \text{ para algún } \tilde{y} \in \mathcal{Y} \quad (\text{pues } LR_\alpha y \in \mathcal{R}(B^*)) \\ &= \left\langle L^*(L_T^\dagger)^*T^*\tilde{y}, x \right\rangle \quad (\text{por definición de } B) \\ &= \langle T^*y_1, x \rangle \quad (\text{donde } y_1 = P_{\overline{D_1}}\tilde{y} \in \overline{D_1}, \text{ por (4.18)}) \\ &= \langle y_1, Tx \rangle \\ &= 0 \quad (\text{pues } x \in \mathcal{N}(T)), \end{aligned}$$

y por lo tanto $R_\alpha y \in \mathcal{T}$.

Luego, de (i) y (ii), $R_\alpha y \in \mathcal{T} \cap \mathcal{D}(L^*L)$.

A la luz de la Observación anterior resulta oportuno notar que las soluciones regularizadas $R_\alpha y$ tienen siempre mayor grado de regularidad que la solución exacta x_L^\dagger . Esto es así puesto que mientras $x_L^\dagger \in \mathcal{D}(L)$, para las soluciones regularizadas se tiene que $R_\alpha y \in \mathcal{D}(L^*L)$. En el caso particular del método de Tikhonov-Phillips, en el que $L = I$, esto ya fue observado al principio del Capítulo 4 puesto que $x_\alpha \in \mathcal{X}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{R}\left((T^*T)^{\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{R}(T^*)$ independientemente de la regularidad de x^\dagger .

También es oportuno observar que la convergencia de las soluciones regularizadas en el Teorema 4.15 (i) es equivalente a la convergencia en la *norma del grafo* del operador L , es decir convergencia en la norma $\|\cdot\|_L$ donde $\|\cdot\|_L^2 \doteq \|\cdot\|^2 + \|L\cdot\|^2$, la cual es obviamente más fuerte que convergencia en la norma original $\|\cdot\|$.

Observación 4.17. En $\mathcal{D}(L)$ las normas $\|\cdot\|_L$ y $\|\cdot\|_\star$ son equivalentes. En efecto, para $x \in \mathcal{D}(L)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|_\star^2 &= \|Tx\|^2 + \|Lx\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \|x\|^2 + \|Lx\|^2 \\ &\leq \max\{\|T\|^2, 1\} (\|x\|^2 + \|Lx\|^2) \\ &= \max\{\|T\|^2, 1\} \|x\|_L^2. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|x\|_L^2 &= \|x\|^2 + \|Lx\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\gamma} (\|Tx\|^2 + \|Lx\|^2) + \|Lx\|^2 \quad (\text{por la CC (4.2)}) \\ &= \frac{1}{\gamma} \|Tx\|^2 + \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \|Lx\|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) (\|Tx\|^2 + \|Lx\|^2) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \|x\|_\star^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\|\cdot\|_L$ y $\|\cdot\|_\star$ son equivalentes.

En virtud de esta equivalencia de normas se sigue entonces que $\forall y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ las soluciones regularizadas convergen en la norma $\|\cdot\|_\star$ es decir $\left\|R_\alpha y - T_L^\dagger y\right\|_\star \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$.

En lo que resta de esta sección analizaremos la convergencia de las soluciones regularizadas $x_\alpha = R_\alpha y$ a $T_L^\dagger y$ tratando de determinar condiciones que aseguren un cierto orden de convergencia en la norma original de \mathcal{X} . Para este objetivo será de fundamental importancia el siguiente resultado.

Lema 4.18. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, T y L como en el Lema 4.3, $B \doteq TL_T^\dagger$, $\{g_\alpha\}_{\alpha>0}$ una familia de funciones definidas sobre $[0, \|B\|^2]$ que satisface las hipótesis (H1), (H2), (H3) del Teorema 2.1 y R_α como en (4.35). Entonces existe una constante $c > 0$ tal que para todo $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ se verifica

$$\left\| R_\alpha y - T_L^\dagger y \right\| \leq c \left\| LR_\alpha y - LT_L^\dagger y \right\|.$$

Demostración. Sea $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$. Observar en primer lugar que

$$\begin{aligned} TR_\alpha y - Qy &= TR_\alpha y - TT_L^\dagger y \quad (\text{pues } TT_L^\dagger = Q|_{\mathcal{D}(T_L^\dagger)}) \\ &= TR_\alpha y - TT_0^\dagger y - (TT_L^\dagger y - TT_0^\dagger y) \\ &= TR_\alpha y - T_0 T_0^\dagger y - T(T_L^\dagger y - T_0^\dagger y) \quad (\text{pues } T_0^\dagger y \in \mathcal{N}(L), T_0 = T|_{\mathcal{N}(L)}) \\ &= BLR_\alpha y - T(T_L^\dagger y - T_0^\dagger y) \quad (\text{por (4.39)}) \\ &= BLR_\alpha y - T L_T^\dagger L(T_L^\dagger y - T_0^\dagger y) \quad (*) \\ &= BLR_\alpha y - BLT_L^\dagger y \quad (\text{pues } B = TL_T^\dagger \text{ y } T_0^\dagger y \in \mathcal{N}(L)) \\ &= B(LR_\alpha y - LT_L^\dagger y), \end{aligned}$$

donde la quinta igualdad (*) se sigue del hecho que $L_T^\dagger L$ es la proyección \star -ortogonal de $\mathcal{D}(L)$ sobre $\mathcal{N}(L)^{\perp\star} = \mathcal{L}$ y $T_L^\dagger y - T_0^\dagger y \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ (por (4.34)). Luego,

$$\|TR_\alpha y - Qy\| \leq \|B\| \left\| LR_\alpha y - LT_L^\dagger y \right\|. \quad (4.43)$$

Por otro lado, en virtud de (4.42) se tiene que

$$\left\| R_\alpha y - T_L^\dagger y \right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \left(\|TR_\alpha y - Qy\|^2 + \left\| LR_\alpha y - LT_L^\dagger y \right\|^2 \right) \quad (4.44)$$

Finalmente de (4.43) y (4.44) se sigue que

$$\left\| R_\alpha y - T_L^\dagger y \right\| \leq c \left\| LR_\alpha y - LT_L^\dagger y \right\|,$$

donde $c \doteq \left(\frac{1}{\gamma} (\|B\|^2 + 1) \right)^{\frac{1}{2}} > 0$. ■

Observación 4.19. Del Lema precedente se sigue que, para $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$ el orden de convergencia de $R_\alpha y$ a $T_L^\dagger y$ puede estimarse en términos del orden de convergencia de $LR_\alpha y$ a $LT_L^\dagger y = B^\dagger y$. Puesto que como vimos $LR_\alpha y = g_\alpha(B^*B)B^*y$, tal orden de convergencia puede obtenerse utilizando los resultados del Capítulo 2 (con T reemplazado por B , ver Teorema 2.4), bajo ciertas hipótesis sobre la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha>0}$ y condiciones fuente de la forma

$$B^\dagger y \in \mathcal{X}_\mu \doteq \mathcal{R}((B^*B)^\mu) \quad (4.45)$$

para algún $\mu > 0$. Es importante señalar sin embargo que para $\mu > 0$ arbitrario, la condición fuente (4.45) no tiene una interpretación general, independiente de los operadores L y T , excepto en los casos particulares $\mu = \frac{1}{2}$ y $\mu = 1$, para los que se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.20. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, T y L como en el Lema 4.3, $B = TL_T^\dagger$, $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$. Entonces:

- (i) $B^\dagger y \in \mathcal{R}((B^*B)^{\frac{1}{2}})$ si y sólo si $T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)$ y $L^*LT_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*)$.
- (ii) $B^\dagger y \in \mathcal{R}(B^*B)$ si y sólo si $T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)$ y $L^*LT_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*T|_{\mathcal{D}(L)})$.

Demostración. Para probar (i) observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned}
 B^\dagger y \in \mathcal{R}((B^*B)^{\frac{1}{2}}) &\iff B^\dagger y \in \mathcal{R}(B^*) \quad (\text{por la Proposición B.15}) \\
 &\iff B^\dagger y \in \mathcal{R}((L_T^\dagger)^*T^*) \quad (\text{pues } B = TL_T^\dagger) \\
 &\iff \exists w \in \mathcal{Y} : B^\dagger y = (L_T^\dagger)^*T^*w. \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Sea $B^\dagger y \in \mathcal{R}((B^*B)^{\frac{1}{2}})$. Entonces por (4.46) existe $w \in \mathcal{Y}$ tal que $B^\dagger y = LT_L^\dagger y = (L_T^\dagger)^*T^*w$. Como $\mathcal{R}((L_T^\dagger)^*T^*) \subset \mathcal{D}(L^*)$ (ver Lema 4.11 (ii)) se tiene que $LT_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*)$ y por lo tanto $T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)$. Luego, $L^*LT_L^\dagger y = L^*(L_T^\dagger)^*T^*w = T^*w_1$, donde la última igualdad se sigue de (4.18) con $w_1 = P_{\overline{\mathcal{D}_1}}w$. Por lo tanto, $L^*LT_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*)$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que $T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)$ y $L^*LT_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 B^\dagger y &= LT_L^\dagger y \quad (\text{por Proposición 4.12}) \\
 &= (LL_T^\dagger)^*LT_L^\dagger y \quad (\text{pues } LL_T^\dagger = I \text{ ya que } \mathcal{R}(L) = \mathcal{Z}) \\
 &= (L_T^\dagger)^*L^*LT_L^\dagger y \quad (\text{pues } T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)) \\
 &= (L_T^\dagger)^*T^*w, \text{ para algún } w \in \mathcal{Y} \quad (\text{pues } (L^*L)T_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*)).
 \end{aligned}$$

Así, $B^\dagger y$ tiene una representación como en (4.46) y por lo tanto $B^\dagger y \in \mathcal{R}((B^*B)^{\frac{1}{2}})$.

Ahora demostraremos (ii).

(\Rightarrow) Supongamos que $B^\dagger y \in \mathcal{R}(B^*B)$. Entonces existe $w \in \mathcal{R}(B)$ tal que $B^\dagger y = B^*w$. Puesto que $B = TL_T^\dagger$ se tiene que $B^* = (L_T^\dagger)^*T^*$ y en virtud de la Proposición 4.12 $B^\dagger = LT_L^\dagger$. Por lo tanto

$$LT_L^\dagger y = (L_T^\dagger)^*T^*w. \tag{4.47}$$

Por otro lado, como $\mathcal{R}((L_T^\dagger)^*T^*) \subset \mathcal{D}(L^*)$ (ver Lema 4.11 (ii)) se sigue que $LT_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*)$ y por lo tanto $T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
 L^*LT_L^\dagger y &= L^*(L_T^\dagger)^*T^*w \quad (\text{por (4.47)}) \\
 &= T^*w,
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de (4.18) ya que $w \in \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(TL_T^\dagger) = D_1$ (ver Lema 4.9). Además, como $D_1 = \mathcal{R}(TL_T^\dagger) \subset \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})$ (ver Lema 4.9) se tiene que $w \in \mathcal{R}(T|_{\mathcal{D}(L)})$ y por lo tanto $L^*LT_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*T|_{\mathcal{D}(L)})$.

(\Leftrightarrow) Supongamos ahora que $T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)$ y $L^*LT_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*T|_{\mathcal{D}(L)})$. Entonces

$$\begin{aligned} B^\dagger y &= LT_L^\dagger y \quad (\text{por la Proposición 4.12}) \\ &= (LL_T^\dagger)^* LT_L^\dagger y \quad (\text{pues } LL_T^\dagger = I \text{ ya que } \mathcal{R}(L) = \mathcal{Z}) \\ &= (L_T^\dagger)^* L^* LT_L^\dagger y \quad (\text{pues } T_L^\dagger y \in \mathcal{D}(L^*L)) \\ &= (L_T^\dagger)^* T^* T x, \text{ para algún } x \in \mathcal{D}(L) \quad (\text{pues } L^*LT_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*T|_{\mathcal{D}(L)})). \end{aligned}$$

Como $x \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{N}(L) \oplus_* \mathcal{N}(L)^{\perp*} = \mathcal{N}(L) \oplus_* \mathcal{R}(L_T^\dagger)$, existen $\tilde{x} \in \mathcal{N}(L)$ y $z \in \mathcal{Z}$ tales que $x = \tilde{x} + L_T^\dagger z$. Entonces

$$\begin{aligned} B^\dagger y &= (L_T^\dagger)^* T^* T \tilde{x} + (L_T^\dagger)^* T^* T L_T^\dagger z \\ &= (L_T^\dagger)^* T^* T_0 \tilde{x} + (L_T^\dagger)^* T^* T L_T^\dagger z \quad (\text{pues } \tilde{x} \in \mathcal{N}(L)) \\ &= (L_T^\dagger)^* T^* T L_T^\dagger z \\ &= B^* B z \quad (\text{pues } B = T L_T^\dagger), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue del hecho que $T_0 \tilde{x} \in \mathcal{R}(T_0) = D_2$ y $D_2 \subset \mathcal{N}((L_T^\dagger)^* T^*)$ (ver Lema 4.11 (i)). En consecuencia $B^\dagger y \in \mathcal{R}(B^*B)$.

Esto concluye la demostración de la proposición. \blacksquare

Observar que en virtud de la proposición anterior las hipótesis clásicas de suavidad $T_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*)$ y $T_L^\dagger y \in \mathcal{R}(T^*T)$, que corresponden al caso particular $L = I$, tienen que ser remplazadas ahora por las correspondientes hipótesis para $L^*LT_L^\dagger y$. Así por ejemplo, si $\Omega = [0, 1]$ y $L = \frac{d^2}{dx^2}$ con dominio $H^2(\Omega)$, entonces $L^* = \frac{d^2}{dx^2}$ con dominio

$$\mathcal{D}(L^*) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) / u|_{\partial\Omega} = u'|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Por lo tanto, a la luz de la Proposición 4.20, en este caso particular, la condición fuente $B^\dagger y \in \mathcal{R}(B^*B)$ significa que $T_L^\dagger y \in H^4(\Omega)$ y $\frac{d^4}{dx^4} T_L^\dagger y$ satisface la hipótesis de suavidad “clásica” de pertenecer al $\mathcal{R}(T^*T)$.

4.3 Tikhonov-Phillips generalizado

En esta sección nos proponemos estudiar en detalle el caso particular de los métodos espectrales de regularización utilizando operadores diferenciales para el caso en que la familia de funciones $\{g_\alpha\}_{\alpha>0}$ es la asociada al método clásico de Tikhonov-Phillips. Esto es, analizaremos las soluciones regularizadas obtenidas con los operadores R_α definidos en (4.35), para el caso particular en que $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha}$.

En primer lugar, al igual que en el caso clásico ($L = I$), probaremos que las soluciones regularizadas obtenidas con esta elección de la familia de funciones $\{g_\alpha\}_{\alpha>0}$ son también soluciones de una “ecuación normal regularizada” (ver (3.2)).

Proposición 4.21. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, T y L como en el Lema 4.3 tales que satisfacen la condición de complementación (4.2), $\alpha > 0$, $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha}$, R_α como en (4.35), $y \in \mathcal{Y}$ y $x_\alpha = R_\alpha y$. Entonces x_α es solución de la ecuación normal regularizada

$$(T^*T + \alpha L^*L) x_\alpha = T^*y,$$

y por lo tanto

$$x_\alpha = (T^*T + \alpha L^*L)^{-1} T^*y. \quad (4.48)$$

Demostración. Sea $y \in \mathcal{Y}$ y definamos

$$x_\alpha \doteq R_\alpha y = x_0^\dagger + L_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y,$$

donde $x_0^\dagger \doteq T_0^\dagger y$. Como $x_\alpha \in \mathcal{D}(L^*L)$ (Observación 4.16) se tiene que

$$\begin{aligned} L^*Lx_\alpha &= L^*Lx_0^\dagger + L^*LL_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y \\ &= L^*g_\alpha(B^*B)B^*y, \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $x_0^\dagger \in \mathcal{N}(L)$ y $LL_T^\dagger = I$ pues $\mathcal{R}(L) = \mathcal{Z}$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} T^*Tx_\alpha &= T^*Tx_0^\dagger + T^*TL_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y \\ &= T^*T_0T_0^\dagger y + L^*(L_T^\dagger)^*T^*TL_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y \\ &= T^*T_0T_0^\dagger y + L^*B^*B g_\alpha(B^*B)B^*y \quad (\text{pues } B = TL_T^\dagger), \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde la segunda igualdad se sigue del hecho que $x_0^\dagger \in \mathcal{N}(L)$, $T_0 = T|_{\mathcal{N}(L)}$ y por el Lema 4.11 ya que $TL_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*y \in D_1 = \mathcal{R}(TL_T^\dagger)$.

Luego, de (4.49) y (4.50) se sigue que

$$\begin{aligned} (T^*T + \alpha L^*L)x_\alpha &= T^*T_0T_0^\dagger y + L^*(B^*B + \alpha I) g_\alpha(B^*B)B^*y \\ &= T^*T_0T_0^\dagger y + L^*(B^*B + \alpha I) (B^*B + \alpha I)^{-1} B^*y \quad (g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}) \\ &= T^*T_0T_0^\dagger y + L^*(L_T^\dagger)^*T^*y \quad (\text{pues } B = TL_T^\dagger). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ahora, puesto que $y \in \mathcal{Y}$, en virtud del Lema 4.9, existen $y_1 \in \overline{D_1}$, $y_2 \in D_2$, $y_3 \in D_3$ tales que $y = y_1 + y_2 + y_3$ y por lo tanto, $T_0T_0^\dagger y = y_2$ (pues $T_0T_0^\dagger$ es la proyección ortogonal de \mathcal{Y} sobre D_2) y $L^*(L_T^\dagger)^*T^*y = T^*y_1$ (por el Lema 4.11). Reemplazando en (4.51) se sigue entonces que

$$\begin{aligned} (T^*T + \alpha L^*L)x_\alpha &= T^*y_2 + T^*y_1 \\ &= T^*y_2 + T^*y_1 + T^*y_3 \quad (\text{pues } y_3 \in D_3 = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)) \\ &= T^*y. \end{aligned}$$

Finalmente, de la condición de complementación (4.2) se sigue inmediatamente que el operador $T^*T + \alpha L^*L$ es inversible y por lo tanto

$$x_\alpha = (T^*T + \alpha L^*L)^{-1} T^*y.$$

como se quería probar. ■

Además del resultado de la proposición anterior existen otras analogías con el caso clásico ($L = I$), en particular el siguiente resultado análogo al Teorema 3.1, muestra que las soluciones regularizadas obtenidas con el método de Tikhonov-Phillips generalizado (R_α como en (4.35) y $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}$) son también soluciones de un problema de optimización sin restricciones.

Teorema 4.22. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert, T y L como en el Lema 4.3 tales que satisfacen la condición de complementación (4.2), $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$ y x_α definido como en (4.48). Entonces x_α es el único elemento que minimiza el funcional de Tikhonov-Phillips generalizado

$$J_\alpha(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Lx\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(L). \quad (4.52)$$

Demostración. Sea $y \in \mathcal{Y}$. Probaremos que el funcional J_α definido como en (4.52) es estrictamente convexo, Fréchet diferenciable con respecto a la norma $\|\cdot\|_\star$ en $\mathcal{D}(L)$ y coercitivo.

- (i) Probaremos primero que J_α es estrictamente convexo (ver Definición A.98 (i)): sean $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(L)$ con $x_1 \neq x_2$ y $0 < t < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
& t J_\alpha(x_1) + (1-t) J_\alpha(x_2) - J_\alpha(tx_1 + (1-t)x_2) = \\
&= t \|Tx_1 - y\|^2 + t\alpha \|Lx_1\|^2 + (1-t) \|Tx_2 - y\|^2 + (1-t)\alpha \|Lx_2\|^2 \\
&\quad - \|T(tx_1 + (1-t)x_2) - y\|^2 - \alpha \|L(tx_1 + (1-t)x_2)\|^2 \\
&= t \|Tx_1\|^2 + t \|y\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle Tx_1, y \rangle + t\alpha \|Lx_1\|^2 + (1-t) \|Tx_2\|^2 \\
&\quad + (1-t) \|y\|^2 - 2(1-t) \operatorname{Re} \langle Tx_2, y \rangle + (1-t)\alpha \|Lx_2\|^2 - t^2 \|Tx_1\|^2 \\
&\quad - (1-t)^2 \|Tx_2\|^2 - \|y\|^2 - 2t(1-t) \operatorname{Re} \langle Tx_1, Tx_2 \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle Tx_1, y \rangle \\
&\quad + 2(1-t) \operatorname{Re} \langle Tx_2, y \rangle - \alpha t^2 \|Lx_1\|^2 - \alpha (1-t)^2 \|Lx_2\|^2 \\
&\quad - 2\alpha t(1-t) \operatorname{Re} \langle Lx_1, Lx_2 \rangle \\
&= t(1-t) \|Tx_1\|^2 + t(1-t) \|Tx_2\|^2 + \alpha t(1-t) \|Lx_1\|^2 \\
&\quad + \alpha t(1-t) \|Lx_2\|^2 - 2t(1-t) (\operatorname{Re} \langle Tx_1, Tx_2 \rangle + \alpha \operatorname{Re} \langle Lx_1, Lx_2 \rangle) \\
&= t(1-t) (\|Tx_1 - Tx_2\|^2 + \alpha \|Lx_1 - Lx_2\|^2) \\
&\geq t(1-t) \min\{1, \alpha\} (\|T(x_1 - x_2)\|^2 + \|L(x_1 - x_2)\|^2) \\
&\geq \underbrace{t}_{>0} \underbrace{(1-t)}_{>0} \underbrace{\min\{1, \alpha\}}_{>0} \underbrace{\gamma}_{>0} \underbrace{\|x_1 - x_2\|^2}_{>0} \quad (\text{por la condición CC (4.2)}) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

y por lo tanto J_α es estrictamente convexo.

- (ii) Probaremos ahora que J_α es Fréchet diferenciable sobre $\mathcal{D}(L)$ (ver Definición A.93). Para ello sean $x, h \in \mathcal{D}(L)$. Entonces

$$\begin{aligned}
& J_\alpha(x+h) - J_\alpha(x) = \\
&= \|Tx + Th - y\|^2 + \alpha \|L(x+h)\|^2 - \|Tx - y\|^2 - \alpha \|Lx\|^2 \\
&= \|Tx - y\|^2 + \|Th\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle Tx - y, Th \rangle + \alpha \|Lx\|^2 \\
&\quad + \alpha \|Lh\|^2 + 2\alpha \operatorname{Re} \langle Lx, Lh \rangle - \|Tx - y\|^2 - \alpha \|Lx\|^2 \\
&= 2 \operatorname{Re} \langle T^*Tx - T^*y + \alpha L^*Lx, h \rangle + \|Th\|^2 + \alpha \|Lh\|^2. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Observar que para $x \in \mathcal{D}(L)$, $y \in \mathcal{Y}$ y $\alpha > 0$ fijos

$$\ell_x(h) \doteq 2 \operatorname{Re} \langle T^*Tx - T^*y + \alpha L^*Lx, h \rangle$$

define un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{D}(L)$. Además puesto que $\|Th\|^2 + \alpha \|Lh\|^2 \leq \max\{1, \alpha\} (\|Th\|^2 + \|Lh\|^2) = \max\{1, \alpha\} \|h\|_\star^2$ se tiene que $\|Th\|^2 + \alpha \|Lh\|^2 = \mathcal{O}(\|h\|_\star^2) = o(\|h\|_\star)$ para $\|h\|_\star \rightarrow 0^+$. Se sigue entonces de (4.53) que

$$J_\alpha(x+h) - J_\alpha(x) = \ell_x(h) + o(\|h\|_\star) \text{ para } \|h\|_\star \rightarrow 0^+.$$

Luego J_α es Fréchet diferenciable en $x \in \mathcal{D}(L) \ \forall x \in \mathcal{D}(L)$ y $J'_\alpha(x)h = \ell_x(h) = 2 \operatorname{Re} \langle (T^*T + \alpha L^*L)x - T^*y, h \rangle \ \forall h \in \mathcal{D}(L)$. En consecuencia, J_α es Fréchet diferenciable en $x \in \mathcal{D}(L)$.

(iii) Puesto que α es positivo la coercitividad (Definición A.98 ii)) de J_α se sigue inmediatamente de la condición de complementación (4.2).

De (i), (ii) y (iii) se sigue, en virtud del Teorema A.99, que J_α tiene un único minimizante global $\tilde{x} \in \mathcal{D}(L)$ y este satisface $J'_\alpha(\tilde{x})h = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(L)$ o equivalentemente $2 \operatorname{Re} \langle (T^*T + \alpha L^*L)\tilde{x} - T^*y, h \rangle = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(L)$, de donde se sigue que $(T^*T + \alpha L^*L)\tilde{x} - T^*y = 0$ y por lo tanto $\tilde{x} = (T^*T + \alpha L^*L)^{-1}T^*y = x_\alpha$, como queríamos probar. ■

Es oportuno señalar aquí que puesto que la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha>0}$ con $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.15, se sigue entonces que las soluciones regularizadas x_α obtenidas con el método de Tikhonov-Phillips generalizado convergen a $T_L^\dagger y$ para $\alpha \rightarrow 0^+$ para todo $y \in \mathcal{D}(T_L^\dagger)$. Desde el enfoque de la teoría de optimización que surge del teorema precedente este método ha sido estudiado por primera vez en el año 1980 por Locker y Prenter (ver [40]).

Capítulo 5

Regularización por variación acotada

En diversas aplicaciones, particularmente en procesamiento de señales, restauración de imágenes e identificación de parámetros ([16] y [28]), un inconveniente que presentan todos los métodos tradicionales de regularización para problemas inversos mal condicionados estudiados en los capítulos precedentes (tales como Tikhonov-Phillips, Showalter, TSVD, etc.) radica en el hecho que ninguno de ellos permite soluciones discontinuas o no regulares en general. Por esta razón en los casos en que la solución exacta posee discontinuidades o vértices, las soluciones regularizadas obtenidas con tales métodos resultarán en aproximaciones pobres o de baja calidad, especialmente cerca de puntos o regiones donde la solución presenta tales pérdidas de regularidad.

En el Capítulo 3 observamos que el método clásico de Tikhonov-Phillips es ampliamente utilizado debido a la simplicidad de su formulación como un problema de optimización sin restricciones. También notamos que el penalizante $\|x\|^2$ tiene dos objetivos fundamentales: el de inducir estabilidad y el de “seleccionar” la solución de cuadrados mínimos de mínima norma (a la que convergen las soluciones aproximadas a medida que el parámetro de regularización α tiende a 0). Asimismo mencionamos que en determinados problemas, en los que es preferible preservar las discontinuidades que pudieran existir en la solución exacta, las selecciones de la solución de cuadrados mínimos de mínima norma y/o de $\|x\|^2$ como penalizante en el funcional de Tikhonov-Phillips pueden no ser las más adecuadas. En estos casos podría resultar conveniente el diseño de estrategias que introduzcan estabilidad sin “regularizar” mediante la utilización de penalizantes que admitan soluciones discontinuas. La utilización de penalizantes basados en esta estrategia da lugar a los llamados “*métodos de regularización de Tikhonov-Phillips generalizados*”, algunos de los cuales ya hemos estudiado en el capítulo anterior para el caso particular en que el penalizante está dado por seminormas del tipo $\|Lx\|^2$, asociadas a operadores diferenciales. En este caso vimos que el penalizante “selecciona” la solución de cuadrados mínimos de mínima $\|Lx\|$ seminorma.

En los últimos 15 años varios autores (ver por ejemplo, [1], [9], [10], [11] y [42]) han propuesto diversas generalizaciones del tradicional método de regularización de Tikhonov-Phillips, basados en la estrategia de inducir estabilidad a través de la utilización de diferentes penalizantes, dando lugar a una gran variedad de métodos con penalizantes no suaves. En 1994 R. Acar y C. R. Vogel introdujeron ([1]) el *método de*

regularización por variación acotada utilizando como penalizante la norma de variación acotada, $\|\cdot\|_{BV}$, y analizaron los problemas de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes del funcional

$$J_\alpha(x) = \|Tx - y\|^2 + \alpha \|x\|_{BV}.$$

En este caso particular las soluciones aproximadas sólo están forzadas a ser de variación acotada y no necesariamente deben ser suaves.

Si bien aún no existe una teoría general para penalizantes arbitrarios, en 2011 G. Mazziari, R. Spies y K. Temperini ([45]) encontraron condiciones suficientes sobre los penalizantes en los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados de la forma

$$J_\alpha(x) = \|Tx - y\|^2 + \alpha W(x), \quad x \in \mathcal{D},$$

donde $W(\cdot)$ es un funcional penalizante arbitrario con dominio $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ y $\alpha > 0$, que garantizan existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes.

Aunque aún resta mucho por investigar en esta dirección, algunos métodos de regularización con funcionales penalizantes no diferenciables ya han sido empleados exitosamente en una gran variedad de aplicaciones, especialmente en procesamiento y reconstrucción de imágenes satelitales y en Medicina (ver [16] y las referencias allí).

En este capítulo nos proponemos estudiar en detalle el problema de optimización

$$\min_x \{ \|Tx - y\|^2 + \alpha W(x) \}$$

para el caso particular en que \mathcal{X} es un espacio de funciones y el penalizante W es la norma o la seminorma de variación acotada sobre dicho espacio. Como mencionamos anteriormente, esta elección del penalizante origina el “*método de regularización por variación acotada*”¹, conocido también como “*regularización por variación total*”, originalmente introducido por L. Rudin, S. Osher y E. Fatemi en 1992 ([59]) como una técnica para procesamiento y restauración de imágenes. Presentaremos primero un adecuado andamiaje matemático que proveerá las bases para el estudio de dicho método de regularización y luego procederemos al análisis de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes del correspondiente funcional de Tikhonov-Phillips generalizado. Para el análisis de estabilidad consideraremos distintos problemas perturbados (e.g. perturbaciones en el dato, perturbaciones en el operador T , etc.). Finalmente abordaremos el estudio de la convergencia de las soluciones regularizadas obtenidas con tales métodos.

5.1 Definiciones y resultados preliminares

Como mencionamos anteriormente el objetivo de este capítulo es estudiar en profundidad la teoría matemática de los métodos de regularización de tipo Tikhonov-Phillips

¹El término “regularización” es, de algún modo, inapropiado ya que pueden obtenerse minimizantes discontinuos. Recordar que en el contexto de problemas inversos “regularización” significa “suavisar”. Sin embargo, conservamos el uso de ese vocablo que en la jerga de los problemas inversos se utiliza implícitamente como sinónimo de “estabilización”.

que surgen al utilizar como penalizante la seminorma de variación acotada o la norma de variación acotada. Para este propósito será necesario introducir previamente una serie de conceptos y definiciones que serán de fundamental importancia para el cumplimiento de ese objetivo y todos los desarrollos ulteriores. Esta es precisamente la finalidad de esta sección en la que, si bien la mayoría de los resultados son conocidos, hemos incluido demostraciones propias y completas de algunos de los que consideramos más trascendentes e importantes para los desarrollos posteriores. Para todos los resultados cuyas demostraciones no hemos incluido, hemos señalado referencias apropiadas donde las mismas pueden encontrarse.

A lo largo de todo este capítulo supondremos que Ω es un subconjunto abierto, convexo y acotado de \mathbb{R}^d , con $d = 1, 2$ ó 3 , con frontera $\partial\Omega$ de tipo Lipschitz continua². Denotaremos con $|\Omega|$ a la medida de Lebesgue de Ω y para $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, denotaremos con $|x|$ y $x \cdot y$ a la norma euclídea y al producto interno en \mathbb{R}^d , respectivamente, esto es $|x| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ y $x \cdot y \doteq \sum_{i=1}^d x_i y_i$. Además para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$, con $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define $|\alpha| \doteq \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Si la función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es $|\alpha|$ veces continuamente diferenciable³, denotaremos como es usual con $D^\alpha u$ a $\frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$. Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^d$ se define $D^\alpha u \doteq u$.

A continuación recordaremos las definiciones de una serie de espacios funcionales sobre Ω que utilizaremos con frecuencia en este capítulo. Sean $k, \ell \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$ se definen los siguientes espacios de funciones

$$C^0(\Omega) = C(\Omega) \doteq \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es continua}\},$$

$$C^k(\Omega) \doteq \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable}\},$$

$$C^\infty(\Omega) \doteq \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es infinitamente diferenciable}\} = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} C^h(\Omega).$$

Claramente $C^\infty(\Omega) \subset \dots \subset C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

$$C_0(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) / \text{sop}(u) \text{ es compacto}\}^4,$$

$$C_0^k(\Omega) \doteq \{u \in C^k(\Omega) / \text{sop}(u) \text{ es compacto}\} = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

$$C_0^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) / \text{sop}(u) \text{ es compacto}\} = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega),$$

$$L^p(\Omega) \doteq \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es medible Lebesgue, } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\},$$

$$L^\infty(\Omega) \doteq \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es Lebesgue medible, } \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}^5,$$

²Se dice que la frontera de un conjunto es de tipo Lipschitz si es la gráfica de una función continua de Lipschitz. Sean M y N espacios métricos, se dice que una función $u : M \rightarrow N$ es *Lipschitz continua* si existe una constante $c > 0$ tal que $\text{dist}(u(x), u(y)) \leq c \text{dist}(x, y) \quad \forall x, y \in M$.

Notar que, si u es Lipschitz continua, entonces u es uniformemente continua; y por lo tanto, continua.

³Para $k \in \mathbb{N}$, se dice que una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es k veces *continuamente diferenciable* si tiene derivadas parciales continuas hasta de orden k .

⁴Se define el *soporte* de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{sop}(u)$, como la clausura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}$.

⁵Se define el *supremo esencial* de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$, como $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \doteq \inf \{c \in \mathbb{R} / |\{x : u(x) > c\}| = 0\}$ (en este último, $|\cdot|$ representa la medida de Lebesgue).

$$\begin{aligned}
W^{k,p}(\Omega) &\doteq \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \leq k\}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\
C_0(\Omega, \mathbb{R}^\ell) &\doteq \{\vec{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_\ell(x)) / v_i \in C_0(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, \ell\}, \\
C^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell) &\doteq \{\vec{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_\ell(x)) / v_i \in C^k(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, \ell\}, \\
C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^\ell) &\doteq \{\vec{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_\ell(x)) / v_i \in C^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, \ell\} \\
&= \bigcap_{h \in \mathbb{N}} C^h(\Omega, \mathbb{R}^\ell), \\
C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell) &\doteq \{\vec{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_\ell(x)) / v_i \in C_0^k(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, \ell\} \\
&= C^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell) \cap C_0(\Omega, \mathbb{R}^\ell), \\
C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^\ell) &\doteq \{\vec{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_\ell(x)) / v_i \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, \ell\} \\
&= C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^\ell) \cap C_0(\Omega, \mathbb{R}^\ell).
\end{aligned}$$

A continuación recordaremos también las definiciones de las normas usuales sobre los espacios $L^p(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \doteq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (5.1)$$

y

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \doteq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Es bien sabido que con estas normas, los espacios $L^p(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ son espacios vectoriales normados y completos, es decir son espacios de Banach (ver por ejemplo [23], Teoremas 6.6 y 6.8).

Puesto que Ω es acotado se puede probar que para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, existen constantes c_p , $0 < c_p < \infty$, tales que

$$c_1 \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \dots \leq c_p \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \dots \leq c_\infty \|u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

y por lo tanto

$$L^\infty(\Omega) \subset \dots \subset L^{p+1}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset \dots \subset L^1(\Omega).$$

Sobre el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ la norma usual se define como

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \doteq \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

En particular para $k = p = 1$ se tiene equivalentemente que

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \doteq \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}, \quad (5.2)$$

donde $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$ es el gradiente de u .

Definición 5.1. Para $u \in L^1(\Omega)$ se define la **variación total** de u como

$$J_0(u) \doteq \sup_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \int_{\Omega} (-u \operatorname{div} \vec{v}) \, dx, \quad (5.3)$$

donde $\mathcal{V} \doteq \{ \vec{v} = (v_1, \dots, v_d) \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d) : |\vec{v}(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega \}$ y $\operatorname{div} \vec{v} \doteq \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ es la divergencia de \vec{v} . En este contexto \mathcal{V} se conoce como el “conjunto de funciones de prueba”.

Teorema 5.2. Sea J_0 el funcional definido sobre $L^1(\Omega)$ por (5.3). Si $u \in C^1(\Omega)$ entonces

$$J_0(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx. \quad (5.4)$$

Demostración. Sea $u \in C^1(\Omega)$. Para $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-u \operatorname{div} \vec{v}) \, dx &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \vec{v}) \, dx - \int_{\partial\Omega} u \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \vec{v}) \, dx \quad (\text{pues } \vec{v}|_{\partial\Omega} = 0) \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \vec{v}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\vec{v}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx \quad (\text{pues } |\vec{v}(x)| \leq 1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde \vec{n} denota la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. Tomando supremo sobre $\vec{v} \in \mathcal{V}$ y utilizando la definición (5.3) se sigue entonces que

$$J_0(u) \leq \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx.$$

Para la desigualdad opuesta, definiendo $\vec{v}_*(x) \doteq \begin{cases} \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}, & \text{si } |\nabla u(x)| \neq 0 \\ 0, & \text{si } |\nabla u(x)| = 0 \end{cases}$ se tiene que $|\vec{v}_*(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega$ y $\vec{v}_* \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$ pues $u \in C^1(\Omega)$. Además

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \vec{v}_*) \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx.$$

Convolucionando \vec{v}_* con una función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ adecuadamente elegida se puede obtener una función $\vec{v} \in \mathcal{V} \cap C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ para la cual el lado izquierdo de (5.5) sea arbitrariamente cercano a $\int_{\Omega} |\nabla u| \, dx$. Entonces tomando supremo sobre $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$J_0(u) \geq \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx.$$

Luego $J_0(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx$, como se quería probar. ■

Teorema 5.3. *Sea J_0 el funcional definido sobre $L^1(\Omega)$ por (5.3). Si $u \in W^{1,1}(\Omega)$ entonces $J_0(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx$.*

Demostración. El resultado se sigue inmediatamente de la densidad de $C^1(\Omega)$ en $W^{1,1}(\Omega)$ y del Teorema 5.2. ■

Definición 5.4. *Una función $u \in L^1(\Omega)$ se dice que es de **variación acotada** en Ω si $J_0(u) < \infty$. El espacio $BV(\Omega)$ de las funciones de variación acotada sobre Ω se define como*

$$BV(\Omega) \doteq \{u \in L^1(\Omega) / J_0(u) < \infty\}. \quad (5.6)$$

Se puede probar fácilmente que el funcional $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ definido sobre $BV(\Omega)$ como

$$\|u\|_{BV(\Omega)} \doteq \|u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u) \quad (5.7)$$

es una norma en $BV(\Omega)$, a la que nos referiremos de ahora en más como la “norma de variación acotada”. Más aún $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ es un espacio de Banach (ver por ejemplo [24], Observación 1.12, pág. 9). Asimismo, es inmediato verificar que J_0 es una seminorma en $BV(\Omega)$. Por esta razón nos referiremos a J_0 como la “seminorma de variación acotada” o “seminorma de variación total” o simplemente la “seminorma BV ”.

Del Teorema 5.3 se sigue inmediatamente que $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$. Sin embargo esta inclusión es estricta como lo prueba el siguiente simple ejemplo: si $d = 1$, $\Omega = (0, 1)$ y $u = \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}$ entonces claramente $u \notin W^{1,1}(\Omega)$ pero $u \in L^1(\Omega)$ y además $\|u\|_{BV(\Omega)} = \frac{3}{2}$ y por lo tanto $u \in BV(\Omega)$. Por otro lado, por definición $BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Probaremos más adelante que, más aún, $BV(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \frac{d}{d-1}$ (donde $\frac{d}{d-1} \doteq +\infty$ si $d = 1$).

Como mencionamos anteriormente el objetivo principal de este capítulo es el estudio de los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados que surgen de utilizar como penalizantes la seminorma o la norma de variación acotada. Es oportuno señalar aquí que la implementación numérica de la mayoría de los algoritmos para el cálculo de los minimizantes de tales funcionales suelen requerir del conocimiento y cómputo de las derivadas de los mismos. En los casos en que el penalizante a utilizar sea $J_0(u)$ o la norma de variación acotada $\|u\|_{BV(\Omega)}$ surge entonces el inconveniente de que J_0 no es derivable en el origen. Para salvar esta dificultad, consideraremos en su lugar un penalizante suave que aproxime a J_0 . Este penalizante surge de aproximar la norma euclídea $|x|$ por $\sqrt{|x|^2 + \beta}$, donde $\beta \geq 0$. Para u suficientemente suave, por ejemplo $u \in C^1(\Omega)$, definimos entonces

$$F_{\beta}(u) \doteq \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} \, dx. \quad (5.8)$$

Puesto que para cualquier $\beta > 0$ se tiene que $\sqrt{|x|^2 + \beta}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}^d$, se sigue inmediatamente que F_{β} es derivable Fréchet $\forall u \in C^1(\Omega)$. Notar que para $\beta = 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F_{\beta}(u)$ representa el área de la superficie del grafo de u , mientras que para $\Omega \subset \mathbb{R}$ se reduce a la longitud de arco.

Para $x \in \mathbb{R}^d$, $\beta > 0$ se puede probar fácilmente que

$$\sqrt{|x|^2 + \beta} = \sup_{y \in \mathbb{R}^d: |y| \leq 1} \left\{ x \cdot y + \sqrt{\beta(1 - |y|^2)} \right\}. \quad (5.9)$$

A la identidad (5.9) se la conoce como “representación dual” del funcional $\sqrt{|x|^2 + \beta}$. Se puede probar que el supremo en (5.9) es en realidad un máximo y este se alcanza para $y = \frac{x}{\sqrt{|x|^2 + \beta}}$ (para más detalles ver Apéndice A, Sección A.5).

Motivados por la definición del funcional $J_0(u)$ dada por (5.3) y su representación equivalente para $u \in C^1(\Omega)$ dada por (5.4), definimos una extensión a $L^1(\Omega)$ del funcional F_β definido en (5.8) en la forma

$$J_\beta(u) \doteq \sup_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \int_{\Omega} \left(-u \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx, \quad (5.10)$$

para $u \in L^1(\Omega)$, donde \mathcal{V} es el conjunto de funciones de prueba de la Definición 5.1. Observar que J_β no es una seminorma para ningún $\beta > 0$.

Para $u \in W^{1,1}(\Omega)$, el siguiente teorema provee una representación para $J_\beta(u)$ análoga a la proporcionada por el Teorema 5.3 para J_0 .

Teorema 5.5. *Sea J_β el funcional definido por (5.10) sobre $L^1(\Omega)$. Si $u \in W^{1,1}(\Omega)$ entonces*

$$J_\beta(u) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx. \quad (5.11)$$

Demostración. Puesto que $C^1(\Omega)$ es denso en $W^{1,1}(\Omega)$, es suficiente con probar que (5.11) vale para $u \in C^1(\Omega)$. Sea entonces $u \in C^1(\Omega)$. Para $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-u \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\nabla u \cdot \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx - \int_{\partial\Omega} u \vec{v} \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_{\Omega} \left(\nabla u \cdot \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx \quad (\text{pues } \vec{v}|_{\partial\Omega} = 0) \\ &\leq \int_{\Omega} \sup_{\vec{w} \in \mathcal{V}} \left(\nabla u \cdot \vec{w} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{w}|^2)} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx \quad (\text{por (5.9)}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Tomando supremo sobre $\vec{v} \in \mathcal{V}$ y utilizando la definición de J_β se sigue entonces que

$$J_\beta(u) \leq \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx. \quad (5.13)$$

Para la desigualdad opuesta, definiendo $\vec{v}_* \doteq \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta}}$ se tiene que $|\vec{v}_*(x)| \leq 1$ $\forall x \in \Omega$ y $\vec{v}_* \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$ pues $u \in C^1(\Omega)$. Además, sin mayores dificultades se puede probar que

$$\int_{\Omega} \left(\nabla u \cdot \vec{v}_* + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}_*|^2)} \right) dx = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx.$$

Convolucionando \vec{v}_* con una función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ adecuadamente elegida se puede obtener una función $\vec{v} \in \mathcal{V} \cap C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ para la cual el lado izquierdo de (5.12) sea arbitrariamente cercano a $\int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx$. Se sigue que

$$J_\beta(u) \geq \int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx. \quad (5.14)$$

De (5.13) y (5.14) se tiene que $J_\beta(u) = \int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx$, como se quería probar. ■

Para un funcional definido en un espacio vectorial y con valores en los reales extendidos se define el dominio efectivo como el conjunto de elementos del espacio para los cuales el valor del funcional es finito. Resulta claro entonces que para J_0 definido sobre $L^1(\Omega)$ por (5.3), su dominio efectivo es el espacio $BV(\Omega)$. El siguiente resultado nos permite afirmar que lo mismo es cierto para todos los funcionales J_β , $\beta > 0$, es decir que todos los funcionales definidos sobre $L^1(\Omega)$ por (5.10) tienen también como dominio efectivo el espacio $BV(\Omega)$, y además que J_0 es el límite de J_β para $\beta \rightarrow 0^+$.

Teorema 5.6. Sean J_0 y J_β definidos sobre $L^1(\Omega)$ por (5.3) y (5.10), respectivamente. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

(i) Para todo $\beta > 0$ y $u \in L^1(\Omega)$, $J_\beta(u) < \infty$ si y sólo si $J_0(u) < \infty$.

(ii) Para todo $u \in BV(\Omega)$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} J_\beta(u) = J_0(u). \quad (5.15)$$

Demostración. Observar primero que para cualesquiera $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\beta > 0$ y $u \in L^1(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-u \operatorname{div} \vec{v}) dx &\leq \int_\Omega \left(-u \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx \\ &\leq \int_\Omega \left(-u \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta} \right) dx \quad (\text{pues } |\vec{v}(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega). \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $\vec{v} \in \mathcal{V}$ (en la cadena de desigualdades) y utilizando las definiciones (5.3) y (5.10) se obtiene que

$$J_0(u) \leq J_\beta(u) \leq J_0(u) + \sqrt{\beta} |\Omega|, \quad (5.16)$$

de donde (i) y (ii) se siguen inmediatamente. ■

Teorema 5.7. Para todo $\beta \geq 0$, el funcional J_β definido sobre $L^1(\Omega)$ por (5.10) es convexo sobre $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Sean $0 \leq t \leq 1$ y $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$ con $p \geq 1$. Entonces para todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(-(t u_1 + (1-t) u_2) \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx = \\ &= t \int_\Omega \left(-u_1 \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx + (1-t) \int_\Omega \left(-u_2 \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx \\ &\leq t J_\beta(u_1) + (1-t) J_\beta(u_2). \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $\vec{v} \in \mathcal{V}$ y utilizando la definición (5.10) se obtiene que

$$J_\beta(t u_1 + (1-t) u_2) \leq t J_\beta(u_1) + (1-t) J_\beta(u_2),$$

lo cual prueba que J_β es convexo sobre $L^p(\Omega)$. \blacksquare

El siguiente ejemplo muestra que el funcional J_β no es estrictamente convexo sobre $BV(\Omega)$.

Ejemplo 5.8. Sean $d = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $u_1 = \chi_{[a_1, b_1]}$ y $u_2 = \chi_{[a_2, b_2]}$, donde $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < 1$. Entonces para todo $v \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-u_1 \operatorname{div} v + \sqrt{\beta (1 - |v|^2)} \right) dx = \\ &= \int_0^{a_1} (-u_1 v') dx + \int_{a_1}^{b_1} (-u_1 v') dx + \int_{b_1}^1 (-u_1 v') dx + \int_0^1 \sqrt{\beta (1 - |v|^2)} dx \\ &= v(a_1) - v(b_1) + \int_0^1 \sqrt{\beta (1 - |v|^2)} dx \doteq G_1(v). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Es claro que para funciones $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $|v(x)| \leq 1 \forall x \in \Omega$, el funcional $G_1(v)$

definido por (5.17) alcanza su máximo cuando $v(x) = w^*(x) \doteq \begin{cases} 1, & x = a_1 \\ -1, & x = b_1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$.

No obstante $w^* \notin \mathcal{V}$, se tiene que $\forall \epsilon > 0 \exists v_\epsilon \in \mathcal{V}$ tal que $v_\epsilon(a_1) = w^*(a_1) = 1$, $v_\epsilon(b_1) = w^*(b_1) = -1$ y $G_1(w^*) - \epsilon \leq G_1(v_\epsilon)$ (ver Figura 5.1). Se sigue entonces inmediatamente que

$$\sup_{v \in \mathcal{V}} G_1(v) = G_1(w^*) = 2 + \sqrt{\beta}. \quad (5.18)$$

Tomando supremo para $v \in \mathcal{V}$ en (5.17) y utilizando (5.18) y la definición (5.10) de J_β se obtiene que $J_\beta(u_1) = 2 + \sqrt{\beta}$. En forma análoga se prueba que $J_\beta(u_2) = 2 + \sqrt{\beta}$ y también que $J_\beta\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) = 2 + \sqrt{\beta}$. Como $\{u_1, u_2\}$ es linealmente independiente y $J_\beta\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) = \frac{1}{2}J_\beta(u_1) + \frac{1}{2}J_\beta(u_2)$ se sigue entonces que J_β no es estrictamente convexo.

Definición 5.9. Sean \mathcal{X} un espacio normado y $M \subset \mathcal{X}$ no vacío. Decimos que:

- (i) El funcional $J : M \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es **semicontinuo inferiormente** en $u \in M$ si para toda sucesión $\{u_n\} \subset M$ tal que $u_n \rightarrow u$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n)$.
- (ii) El funcional $J : M \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es **débilmente semicontinuo inferiormente** en $u \in M$ si para toda sucesión $\{u_n\} \subset M$ tal que $u_n \xrightarrow{w} u$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n)$.
- (iii) El funcional $J : M \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es **(débilmente) semicontinuo inferiormente** en M si J es (débilmente) semicontinuo inferiormente en cada punto $u \in M$.

Observación 5.10. Es claro que si un funcional es débilmente semicontinuo inferiormente es semicontinuo inferiormente, pues cualquier sucesión fuertemente convergente es débilmente convergente.

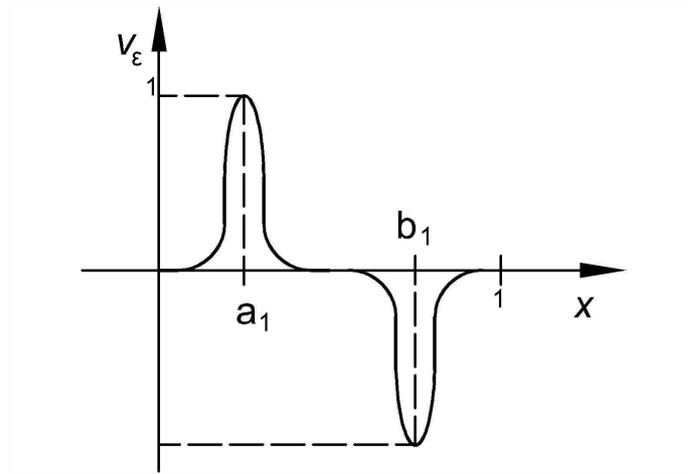


Figura 5.1

Teorema 5.11. Para todo $\beta \geq 0$, el funcional J_β definido sobre $L^1(\Omega)$ por (5.10) es débilmente semicontinuo inferiormente sobre $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$.

Demostración. Sea $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ tal que $u_n \xrightarrow{w} u \in L^p(\Omega)$. Entonces para todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se tiene que $\{u_n \operatorname{div} \vec{v}\} \subset L^p(\Omega)$ (pues como $\vec{v} \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $\operatorname{div} \vec{v}$ es uniformemente acotada sobre Ω) y $u_n \operatorname{div} \vec{v} \xrightarrow{w} u \operatorname{div} \vec{v}$. Luego por el Teorema de Representación de Riesz (ver [5], pag. 244) se sigue que

$$\int_{\Omega} \left(-u \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(-u_n \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx. \quad (5.19)$$

Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(-u_n \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx &\leq \sup_{\vec{w} \in \mathcal{V}} \int_{\Omega} \left(-u_n \operatorname{div} \vec{w} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{w}|^2)} \right) dx \\ &= J_\beta(u_n), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(-u_n \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u_n). \quad (5.20)$$

De (5.19) y (5.20) tomando supremo sobre $\vec{v} \in \mathcal{V}$ y utilizando la definición (5.10) se obtiene que

$$J_\beta(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u_n),$$

como se quería probar. ■

Proposición 5.12. Sean \mathcal{X} un espacio normado, $M \subset \mathcal{X}$ no vacío y cerrado, $J : M \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Entonces J es semicontinuo inferiormente sobre M si y sólo si el conjunto

$$\mathcal{M}_r \doteq \{u \in M : J(u) \leq r\} \quad (5.21)$$

es cerrado para todo $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para probar que la condición es necesaria supongamos que J es semicontinuo inferiormente sobre M y sean $r \in \mathbb{R}$ y $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_r$ tales que $u_n \rightarrow u$ para $n \rightarrow \infty$. Entonces $u_n \in M$ y $J(u_n) \leq r \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n) \leq r$. Además, como M es cerrado y $u_n \rightarrow u$ se tiene que $u \in M$. Por otro lado, por la semicontinuidad inferior de J se sigue que $J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n)$. Así $J(u) \leq r$ y por lo tanto $u \in \mathcal{M}_r$. Luego, \mathcal{M}_r es cerrado para todo $r \in \mathbb{R}$.

Para probar que la condición es suficiente lo hacemos por reducción al absurdo. Supongamos entonces que \mathcal{M}_r es cerrado para todo $r \in \mathbb{R}$ y que J no es semicontinuo inferiormente sobre M . Entonces existen $u \in M$ y $\{u_n\} \subset M$ tales que $u_n \rightarrow u$ para $n \rightarrow \infty$ y $J(u) > \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n)$. Entonces existen $r_0 \in \mathbb{R}$ y una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tales que $J(u_{n_k}) \leq r_0 < J(u) \quad \forall k$. Así, $u_{n_k} \in \mathcal{M}_{r_0} \quad \forall k$ y puesto que \mathcal{M}_{r_0} es cerrado y $u_{n_k} \rightarrow u$ se sigue que $u \in \mathcal{M}_{r_0}$. Por lo tanto, $J(u) \leq r_0$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción proviene de suponer que J no es semicontinuo inferiormente sobre M . Luego J es semicontinuo inferiormente sobre M . ■

Proposición 5.13. Sean \mathcal{X} un espacio normado, $M \subset \mathcal{X}$ no vacío, $J : M \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, $r \in \mathbb{R}$ y \mathcal{M}_r como en (5.21). Las siguientes afirmaciones son válidas:

- (i) Si M y J son convexos entonces \mathcal{M}_r es convexo.
- (ii) Si M es cerrado y J es continuo entonces \mathcal{M}_r es cerrado.

Demostración.

- (i) Supongamos que M y J son convexos. Queremos probar que \mathcal{M}_r es convexo. Para ello, sean $u_1, u_2 \in \mathcal{M}_r$ y $t \in [0, 1]$. Entonces $u_1, u_2 \in M$ y puesto que M es convexo se tiene que $t u_1 + (1 - t) u_2 \in M$. Además

$$\begin{aligned} J(t u_1 + (1 - t) u_2) &\leq t J(u_1) + (1 - t) J(u_2) \quad (\text{pues } J \text{ es convexo}) \\ &\leq t r + (1 - t) r \quad (\text{pues } u_1, u_2 \in \mathcal{M}_r) \\ &= r, \end{aligned}$$

y por lo tanto $t u_1 + (1 - t) u_2 \in \mathcal{M}_r$. Luego, \mathcal{M}_r es convexo.

- (ii) Supongamos M cerrado y J continuo. Queremos probar que \mathcal{M}_r es cerrado. Para ello, sea $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_r$ tal que $u_n \rightarrow u$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in M$ y $J(u_n) \leq r$. Como M es cerrado se sigue que $u \in M$. Por otro lado puesto que J es continuo se tiene que $J(u_n) \rightarrow J(u)$ y por lo tanto $J(u) \leq r$. En consecuencia $u \in \mathcal{M}_r$. Luego, \mathcal{M}_r es cerrado.

Esto completa la demostración de la proposición. ■

El siguiente resultado será una herramienta muy útil en posteriores demostraciones.

Lema 5.14. Sean \mathcal{X} un espacio real normado, $M \subset \mathcal{X}$ no vacío, cerrado y convexo y $J : M \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional continuo y convexo. Entonces J es débilmente semicontinuo inferiormente en M .

Demostración. Supongamos que J es continuo y convexo pero no es débilmente semicontinuo inferiormente en M . Entonces existen $u \in M$ y $\{u_n\} \subset M$ tales que $u_n \xrightarrow{w} u$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $J(u) > \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n)$. Entonces existen $r \in \mathbb{R}$ y $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tales que

$$J(u_{n_k}) \leq r < J(u) \quad \forall k, \quad (5.22)$$

y por lo tanto $u_{n_k} \in \mathcal{M}_r \quad \forall k$.

Puesto que J es continuo y convexo sobre M , de la Proposición 5.13 se sigue que \mathcal{M}_r es cerrado y convexo y por lo tanto \mathcal{M}_r es débilmente cerrado (ver [76], pág. 81). Luego, puesto que $u_{n_k} \in \mathcal{M}_r \quad \forall k$ y $u_{n_k} \xrightarrow{w} u$ se sigue entonces que $u \in \mathcal{M}_r$ y por lo tanto $J(u) \leq r$, lo cual contradice (5.22). Este absurdo proviene de suponer que J no es débilmente semicontinuo inferiormente sobre M . Luego J es débilmente semicontinuo inferiormente sobre M . ■

A continuación definiremos un tipo de convergencia más fuerte que la convergencia débil en $BV(\Omega)$ pero más débil que la convergencia fuerte.

Definición 5.15. Sean $u, u_1, u_2, \dots \in BV(\Omega)$. Diremos que u_n converge a u en el sentido de la **convergencia intermedia**, y lo denotaremos con $u_n \xrightarrow{i} u$, si $u_n \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$ y $J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)$ para $n \rightarrow \infty$.

El siguiente resultado muestra que, efectivamente, la convergencia intermedia es más fuerte que la convergencia débil en la norma $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$, pero más débil que la respectiva convergencia fuerte en dicha norma. Esto justifica el uso de la terminología “intermedia” para referirnos a este tipo de convergencia. El término “convergencia intermedia” fue utilizado por primera vez por R. Temam en el año 1983 ([66]) y también es conocido como convergencia estricta.

Proposición 5.16. Sean $u, u_1, u_2, \dots \in BV(\Omega)$. Entonces valen las siguientes implicaciones para los tres tipos de convergencia en $BV(\Omega)$:

$$u_n \xrightarrow{s} u \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow{i} u \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow{w} u.$$

Demostración. Probaremos primero que la convergencia fuerte implica la convergencia débil en $BV(\Omega)$. Para ello, supongamos que $u_n \xrightarrow{s} u$ en $BV(\Omega)$. Entonces $\|u_n - u\|_{BV(\Omega)} = \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y por lo tanto $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y $J_0(u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Puesto que como vimos J_0 es una seminorma en $BV(\Omega)$ se sigue entonces que $|J_0(u_n) - J_0(u)| \leq J_0(u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, y por lo tanto $J_0(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_0(u)$. Así, entonces $u_n \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$ y $J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)$ para $n \rightarrow \infty$. Luego $u_n \xrightarrow{i} u$ en $BV(\Omega)$.

Probaremos ahora que la convergencia intermedia implica la convergencia débil en $BV(\Omega)$. Para ello, supongamos que $u_n \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$ y $J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)$ para $n \rightarrow \infty$. Como $J_0(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_0(u) < \infty$ se tiene que $\sup_{n \in \mathbb{N}} J_0(u_n) < \infty$ y en consecuencia $u_n \xrightarrow{w} u$ en $BV(\Omega)$ (ver [4], Proposición 10.1.1, pág. 372). Esto completa la demostración de la proposición. ■

El siguiente resultado muestra que toda función $u \in BV(\Omega)$ puede aproximarse, en el sentido de la convergencia intermedia, por una sucesión de funciones de variación acotada en $C^\infty(\Omega)$.

Lema 5.17. Sean $u \in BV(\Omega)$ y J_0 el funcional definido sobre $L^1(\Omega)$ por (5.3). Entonces existe una sucesión $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que $u_n \xrightarrow{i} u$, es decir $u_n \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$ y $J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)$ para $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Ver [24], Teorema 1.17, pág. 14. ■

El siguiente lema proporciona una importante igualdad que utilizaremos en demostraciones de resultados posteriores.

Lema 5.18. La siguiente igualdad se verifica $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$.

Demostración. Puesto que como vimos $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ se sigue inmediatamente que

$$C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega). \quad (5.23)$$

Probaremos ahora que $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$. Para ello, sea $u \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} &= \|u\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla u(x)| \, dx \quad (\text{por (5.1)}) \\ &= \|u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u) \quad (\text{por Teorema 5.2 pues } u \in C^1(\Omega)) \\ &= \|u\|_{BV(\Omega)} \quad (\text{por (5.7)}) \\ &< \infty \quad (\text{pues } u \in BV(\Omega)), \end{aligned}$$

luego $u \in W^{1,1}(\Omega)$ (por (5.2)) y por lo tanto $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$. Entonces

$$C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega). \quad (5.24)$$

De (5.23) y (5.24) se sigue entonces que $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$. ■

Enunciaremos a continuación un resultado muy conocido debido a Sobolev que afirma que el espacio $W^{1,1}(\Omega)$ esta continua y densamente inmerso en el espacio $L^p(\Omega)$, para ciertos valores de p .

Teorema 5.19. (INMERSIÓN DE SOBOLEV) Para todo $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, el espacio de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ está continua y densamente inmerso en $L^p(\Omega)$, es decir $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Más precisamente, existe una constante $C = C(\Omega, p, d) > 0$ tal que para todo $u \in W^{1,1}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Demostración. Ver por ejemplo [2], Teorema 5.4, pág. 97 ó [4], Teorema 5.72, pág. 193. ■

El resultado de convergencia intermedia presentado en el Lema 5.17 permite extender el resultado de inmersión continua de $W^{1,1}(\Omega)$ del teorema anterior al espacio $BV(\Omega)$, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 5.20. *Para todo $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, el espacio $BV(\Omega)$ está continua y densamente inmerso en $L^p(\Omega)$, es decir $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Más precisamente, existe una constante $C = C(\Omega, p, d) > 0$ tal que para todo $u \in BV(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Demostración. Si $p = 1$, de (5.7) se tiene que existe $C = 1$ tal que $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{BV(\Omega)}$. Supongamos entonces que $p \in (1, \frac{d}{d-1}]$ y sea $u \in BV(\Omega)$. Por el Lema 5.17 existe una sucesión $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$ y $J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)$ para $n \rightarrow \infty$. Luego existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1, \quad J_0(u_n) \leq c_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.25)$$

Probaremos a continuación que la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $L^p(\Omega)$. En efecto, puesto que en virtud del Lema 5.18 $u_n \in W^{1,1}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^p(\Omega)} &\leq C \|u_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} \quad (\text{pues } W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ por el Teorema 5.19}) \\ &= C \left(\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n) \right) \quad (\text{por el Teorema 5.3}) \\ &\leq C (c_1 + c_2) \quad (\text{por (5.25)}). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Probaremos ahora que la sucesión $\{u_n\}$ posee una subsucesión débilmente convergente en $L^p(\Omega)$ a u . En efecto, puesto que para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo (Teorema de Eberlein-Shmulyan, [14], Teorema 3.6, pág. 52) existen $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ y $\hat{u} \in L^p(\Omega)$ tales que $u_{n_j} \xrightarrow{w} \hat{u}$ en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ (pues $p > 1$ y Ω es acotado) se tiene que $(L^1(\Omega))' \subset (L^p(\Omega))'$ y por lo tanto $\hat{u} \in L^1(\Omega)$ y $u_{n_j} \xrightarrow{w} \hat{u}$ en $L^1(\Omega)$. Puesto que también $u_{n_j} \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$ se sigue entonces que $u = \hat{u}$ y en consecuencia $u_{n_j} \xrightarrow{w} u$ en $L^p(\Omega)$.

Finalmente

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j}\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{por semicont. débil inferior de } \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} C \left(\|u_{n_j}\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_{n_j}) \right) \quad (\text{por (5.26)}) \\ &= C \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u) \right) \quad (\text{pues } u_{n_j} \rightarrow u \text{ en } L^1(\Omega) \text{ y } J_0(u_{n_j}) \rightarrow J_0(u)) \\ &= C \|u\|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración del teorema. ■

Definición 5.21. *Sean $u, u_1, u_2, \dots \in BV(\Omega)$ y $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$. Diremos que u_n converge a u en el sentido de la ***p*-convergencia intermedia**, y lo denotaremos con $u_n \xrightarrow{p_i} u$, si $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y $J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)$ para $n \rightarrow \infty$.*

Obviamente la definición anterior generaliza la convergencia intermedia dada en la Definición 5.15 para el caso $p = 1$. El próximo lema extiende el resultado de convergencia intermedia del Lema 5.17 a *p*-convergencia intermedia.

Lema 5.22. *Sea $u \in BV(\Omega)$. Entonces para todo $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$ existe una sucesión $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que $u_n \xrightarrow{p_i} u$.*

Demostración. Si $p = 1$ el presente lema se reduce al Lema 5.17. Supongamos entonces que $p \in (1, \frac{d}{d-1}]$ y sea $u \in BV(\Omega)$. Por el Lema 5.17 existe una sucesión $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que $u_n \xrightarrow{i} u$ en $L^1(\Omega)$ y por lo tanto $J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)$. Restaría probar que $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$. Para ello, dado que las sucesiones $\{u_n - u\}$ y $\{J_0(u_n)\}$ son convergentes en $L^1(\Omega)$ y \mathbb{R} , respectivamente, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1, \quad J_0(u_n) \leq c_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.27)$$

Por otro lado, puesto que $\{u_n\} \subset BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (ver Teorema 5.20), se sigue que $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ y por la misma razón también $u \in BV(\Omega)$. Puesto que $1 < p \leq \frac{d}{d-1}$, por la desigualdad de interpolación para las normas L^p (ver [22], Apéndice B, pág. 623), se tiene que

$$\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)}^\theta \|u_n - u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)}^{1-\theta}, \quad (5.28)$$

donde θ es tal que $\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{\frac{d}{d-1}}$. Ahora para el segundo factor en el lado derecho de (5.28) se tiene la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)} &\leq C \|u_n - u\|_{BV(\Omega)} \quad (\text{pues } BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega) \text{ por Teorema 5.20}) \\ &= C \left(\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n - u) \right) \quad (\text{por (5.7)}) \\ &\leq C \left(\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n) + J_0(u) \right) \quad (\text{pues } J_0 \text{ es seminorma}) \\ &\leq C (c_1 + 2c_2) \quad (\text{por (5.27) y puesto que } J_0(u_n) \rightarrow J_0(u)) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Finalmente de (5.29) y (5.28) se obtiene que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \{C(c_1 + 2c_2)\}^{1-\theta} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)}^\theta \\ &\rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty \quad (\text{pues } u_n \rightarrow u \text{ en } L^1(\Omega)), \end{aligned}$$

como se quería probar. ■

A continuación enunciaremos un resultado de Kondrachov (originado en un lema de Rellich) que asegura que el espacio de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ esta compactamente inmerso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$.

Teorema 5.23. (RELLICH-KONDRACHOV) *Para todo $p \in [1, \frac{d}{d-1})$, el espacio de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ esta compactamente inmerso en $L^p(\Omega)$, es decir $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$. Más precisamente*

- (i) $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.
- (ii) *Toda sucesión $\{u_n\}$ acotada en $W^{1,1}(\Omega)$ es precompacta en $L^p(\Omega)$, es decir $\{u_n\}$ contiene una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ convergente en $L^p(\Omega)$ a algún $u \in L^p(\Omega)$.*

Demostración. Ver por ejemplo [2], Teorema 6.2, pág. 144 ó [4], Teorema 5.4.2, pág. 179. ■

En el siguiente resultado extenderemos el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov del espacio $W^{1,1}(\Omega)$ al espacio $BV(\Omega)$.

Teorema 5.24. *Para todo $p \in [1, \frac{d}{d-1})$, el espacio $BV(\Omega)$ esta compactamente inmerso en $L^p(\Omega)$, es decir $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Más precisamente*

- (i) $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.
- (ii) *Toda sucesión $\{u_n\}$ BV -acotada es precompacta en $L^p(\Omega)$, es decir $\{u_n\}$ contiene una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ convergente en $L^p(\Omega)$ a algún $u \in L^p(\Omega)$. Más aún, $u \in BV(\Omega)$.*

Demostración. Puesto que en virtud del Teorema 5.20, $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \forall p \in [1, \frac{d}{d-1})$ sólo debemos probar (ii). Para ello sea $\{u_n\} \subset BV(\Omega)$ una sucesión BV -acotada. Por el Lema 5.22, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{v_k^{(n)}\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que $v_k^{(n)} \xrightarrow{p_i} u_n$ para $k \rightarrow \infty$, esto es $\|v_k^{(n)} - u_n\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ y $|J_0(v_k^{(n)}) - J_0(u_n)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Luego $\forall n \in \mathbb{N} \exists k^* = k^*(n)$ tal que $\|v_{k^*(n)}^{(n)} - u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$ y $|J_0(v_{k^*(n)}^{(n)}) - J_0(u_n)| \leq \frac{1}{n}$. Definamos $v_n \doteq v_{k^*(n)}^{(n)}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} &= \|v_n\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \|v_n\|_{L^1(\Omega)} + J_0(v_n) \quad (\text{por Teorema 5.2 pues } v_n \in C^1(\Omega)) \\ &\leq \|v_n - u_n\|_{L^1(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\Omega)} + |J_0(v_n) - J_0(u_n)| + J_0(u_n) \\ &\leq \frac{2}{n} + \|u_n\|_{BV(\Omega)} \\ &\leq C < \infty, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que $\{u_n\}$ es BV -acotada, y por lo tanto $\{u_n\}$ es acotada en $W^{1,1}(\Omega)$. Del Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema 5.23) se sigue entonces que existen $u \in L^p(\Omega)$ y una subsucesión $\{v_{n_j}\}$ de $\{v_n\}$ tales que $v_{n_j} \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$. Luego

$$\begin{aligned} \|u_{n_j} - u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u_{n_j} - v_{n_j}\|_{L^p(\Omega)} + \|v_{n_j} - u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{n_j} + \|v_{n_j} - u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\rightarrow 0 \text{ para } j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$u_{n_j} \rightarrow u \text{ en } L^p(\Omega). \quad (5.30)$$

En consecuencia, toda sucesión BV -acotada es precompacta en $L^p(\Omega)$. Sólo resta probar que $u \in BV(\Omega)$. Para esto observar que, puesto que $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ se sigue

que $u \in L^1(\Omega)$ y además de (5.30) y la semicontinuidad débil inferior de J_0 sobre $L^p(\Omega)$ (Teorema 5.11) se sigue que

$$J_0(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J_0(u_{n_j}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j}\|_{BV(\Omega)} \leq c_1 \quad (\text{pues } \{u_n\} \text{ es } BV\text{-acotada}),$$

donde la última desigualdad se sigue de la BV -acotación de $\{u_{n_j}\}$. Luego $u \in BV(\Omega)$. Esto completa la demostración del teorema. ■

Si bien el resultado de compacidad del Teorema precedente no vale en general para el caso extremo en que $p = \frac{d}{d-1}$, para $d \geq 2$ se tiene que la correspondiente inmersión es débilmente compacta como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 5.25. *Para $d \geq 2$ la inmersión $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ es débilmente compacta. Más precisamente*

(i) $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$.

(ii) *Toda sucesión $\{u_n\}$ BV -acotada es débilmente precompacta en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$, es decir $\{u_n\}$ contiene una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ débilmente convergente en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ a algún $u \in L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Más aún, $u \in BV(\Omega)$.*

Demostración. En virtud del Teorema 5.20 sólo debemos probar que se verifica (ii). Para ello sea $\{u_n\}$ una sucesión BV -acotada. Puesto que $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ (Teorema 5.20) existe una constante c , $0 < c < \infty$, tal que $\|u_n\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)} \leq c \|u_n\|_{BV(\Omega)}$ y por lo tanto $\{u_n\}$ está acotada en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Puesto que $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ es reflexivo (ver por ejemplo [23], Corolario 6.16, pág. 183), del Teorema de Eberlein-Shmulyan (ver [14], Teorema 3.6, pág. 52) se sigue que existen $u \in L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ y $\{u_{n_j}\}$ subsucesión de $\{u_n\}$ tales que

$$u_{n_j} \xrightarrow{w} u \text{ en } L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega). \quad (5.31)$$

En consecuencia, toda sucesión BV -acotada es débilmente precompacta en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Sólo resta probar que $u \in BV(\Omega)$, lo cual se obtiene con un razonamiento análogo al utilizado en la demostración del Teorema 5.24. En efecto, puesto que $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ se sigue que $u \in L^1(\Omega)$ y además de (5.31) y la semicontinuidad débil inferior de J_0 en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ (Teorema 5.11) se sigue que

$$J_0(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J_0(u_{n_j}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j}\|_{BV(\Omega)} \leq k,$$

donde la última desigualdad se sigue de la BV -acotación de $\{u_{n_j}\}$. Luego $u \in BV(\Omega)$. Esto completa la demostración del teorema. ■

Observación 5.26. Sea $B_1(0)$ la bola unitaria con centro en el origen en \mathbb{R}^d y denotemos con ω_d y σ_d al volumen de $B_1(0)$ y a la superficie de la esfera $\partial B_1(0)$, respectivamente. Es bien sabido (ver [23], Proposición (2.53) y Corolario (2.56)) que

$$\sigma_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad \text{y} \quad \omega_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)},$$

donde Γ es la función Gamma definida por $\Gamma(t) \doteq \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$, $\forall t > 0$. De donde se sigue fácilmente que

$$\sigma_d = d\omega_d. \quad (5.32)$$

Para la bola de radio $\frac{1}{n}$ y centro en el origen se sigue inmediatamente que su volumen y la superficie de la esfera determinada por su frontera están dadas por $\omega_{d, \frac{1}{n}} = n^{-d}\omega_d$ y $\sigma_{d, \frac{1}{n}} = n^{1-d}\sigma_d$, respectivamente.

El siguiente ejemplo muestra que los resultados obtenidos en los Teoremas 5.24 y 5.25 son “ p -óptimos” en el sentido que no se obtiene convergencia fuerte para ningún $p \geq \frac{d}{d-1}$, ni convergencia débil para ningún $p > \frac{d}{d-1}$ cuando $d \geq 2$.

Ejemplo 5.27. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 2\}$ y definamos $u_n \doteq n^{d-1}\chi_n$, donde χ_n es la característica sobre la bola cerrada de radio $\frac{1}{n}$ y centro en el origen de \mathbb{R}^d , es decir

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Probaremos que:

- Para $d \geq 2$, la sucesión $\{u_n\}$ no es L^p -acotada para ningún $p > \frac{d}{d-1}$;
 - la sucesión $\{u_n\}$ es BV -acotada;
 - $\forall d \geq 1$, la sucesión $\{u_n\}$ no contiene ninguna subsucesión convergente en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$;
 - si $d \geq 2$, la sucesión $\{u_n\}$ no contiene ninguna subsucesión débilmente convergente en $L^p(\Omega)$ para ningún $p > \frac{d}{d-1}$.
- Para probar a) consideraremos dos casos según $p < \infty$ ó $p = \infty$.

Caso 1: Si $1 \leq p < \infty$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^p(\Omega)} &= \|n^{d-1}\chi_n\|_{L^p(\Omega)} = n^{d-1}\|\chi_n\|_{L^p(\Omega)} \\ &= n^{d-1}\left(\int_{\Omega}\chi_n^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{d-1}(\omega_{d, \frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}} \quad (\text{ver Observación 5.26}) \\ &= n^{d-1}(n^{-d}\omega_d)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{d-1-\frac{d}{p}}\omega_d^{1/p}. \end{aligned}$$

Caso 2: Si $p = \infty$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene obviamente que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|n^{d-1}\chi_n\|_{L^\infty(\Omega)} = n^{d-1}.$$

Luego

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} n^{d-1-\frac{d}{p}}\omega_d^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ n^{d-1}, & \text{si } p = \infty. \end{cases} \quad (5.34)$$

En consecuencia, para $d \geq 2$, la sucesión $\{u_n\}$ no es acotada en $L^p(\Omega)$ para ningún $p > \frac{d}{d-1}$.

- Probaremos ahora b), es decir que la sucesión $\{u_n\}$ es BV -acotada. Para ello observar que, para todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (-u_n \operatorname{div} \vec{v}) \, dx &= n^{d-1} \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} (-\chi_n \operatorname{div} \vec{v}) \, dx \\
&= n^{d-1} \left(\int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} (\nabla \chi_n \cdot \vec{v}) \, dx - \int_{\partial B_{\frac{1}{n}}(0)} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \right) \\
&= -n^{d-1} \int_{\partial B_{\frac{1}{n}}(0)} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (\text{pues } \nabla \chi_n|_{B_{\frac{1}{n}}(0)} = 0) \\
&\leq n^{d-1} \int_{\partial B_{\frac{1}{n}}(0)} |\vec{v}| |\vec{n}| \, dS \\
&\leq n^{d-1} \int_{\partial B_{\frac{1}{n}}(0)} dS \quad (\text{pues } |\vec{v}| \leq 1 \text{ y } |\vec{n}| = 1) \\
&= n^{d-1} \sigma_{d, \frac{1}{n}} \quad (\text{ver Observación 5.26}) \\
&= n^{d-1} n^{1-d} \sigma_d \\
&= \sigma_d,
\end{aligned}$$

donde \vec{n} denota la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. Tomando supremo sobre $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se obtiene que

$$J_0(u_n) \leq \sigma_d. \quad (5.35)$$

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{BV(\Omega)} &= \|u_n\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n) \\
&\leq n^{-1} \omega_d + \sigma_d \quad (\text{por (5.34) y (5.35)}) \\
&= (n^{-1} + d) \omega_d \quad (\text{por (5.32)}) \\
&\leq (1 + d) \omega_d.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la sucesión $\{u_n\}$ es BV -acotada.

- Probaremos ahora c), es decir que la sucesión $\{u_n\}$ no contiene ninguna subsucesión convergente en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Para ello será suficiente probar que ninguna subsucesión de $\{u_n\}$ es de Cauchy en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Consideremos una subsucesión arbitraria de $\{u_n\}$, a la que por simplicidad seguiremos denotando con $\{u_n\}$, y los siguientes dos casos para d :

Caso 1: Si $d = 1$ (en cuyo caso $\frac{d}{d-1} = \infty$) se sigue inmediatamente que $\forall n \neq m$

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\chi_n - \chi_m\|_{L^\infty(\Omega)} = 1,$$

y por lo tanto $\{u_n\}$ no es de Cauchy en $L^\infty(\Omega)$.

Caso 2: Si $d > 1$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)} &= \|n^{d-1} \chi_n - m^{d-1} \chi_m\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)} \\
&= \left(\int_{\Omega} |n^{d-1} \chi_n(x) - m^{d-1} \chi_m(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \right)^{\frac{d-1}{d}} \\
&= \left(\int_{B_{\frac{1}{m}}(0)} |n^{d-1} - m^{d-1}|^{\frac{d}{d-1}} dx + \int_{B_{\frac{1}{n}}(0) - B_{\frac{1}{m}}(0)} n^d dx \right)^{\frac{d-1}{d}} \\
&\geq \left(n^d \int_{B_{\frac{1}{n}}(0) - B_{\frac{1}{m}}(0)} dx \right)^{\frac{d-1}{d}} \\
&= n^{d-1} \left| B_{\frac{1}{n}}(0) - B_{\frac{1}{m}}(0) \right|^{\frac{d-1}{d}} \\
&= n^{d-1} \left(\left| B_{\frac{1}{n}}(0) \right| - \left| B_{\frac{1}{m}}(0) \right| \right)^{\frac{d-1}{d}} \\
&= n^{d-1} \left(\omega_{d, \frac{1}{n}} - \omega_{d, \frac{1}{m}} \right)^{\frac{d-1}{d}} \quad (\text{ver Observación 5.26}) \\
&= n^{d-1} (n^{-d} \omega_d - m^{-d} \omega_d)^{\frac{d-1}{d}} \\
&= n^{d-1} (n^{-d} - m^{-d})^{\frac{d-1}{d}} \omega_d^{\frac{d-1}{d}} \\
&= n^{d-1} (n^{-d})^{\frac{d-1}{d}} \left(1 - \frac{m^{-d}}{n^{-d}} \right)^{\frac{d-1}{d}} \omega_d^{\frac{d-1}{d}} \\
&= \left(1 - \left(\frac{n}{m} \right)^d \right)^{\frac{d-1}{d}} \omega_d^{\frac{d-1}{d}} \\
&\geq \left(1 - \left(\frac{n}{m} \right)^{d-1} \right) \omega_d^{\frac{d-1}{d}} \quad (*) \\
&\geq \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{d-1} \right) \omega_d^{\frac{d-1}{d}} \quad \forall m \geq 2n,
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad (*) se sigue del hecho que $\left(\frac{n}{m}\right)^d = \left(\frac{n}{m}\right)^{d-1} \left(\frac{n}{m}\right) < \left(\frac{n}{m}\right)^{d-1}$ (pues $\frac{n}{m} < 1$). Entonces $1 > 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^d > 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{d-1} > 0$ y por lo tanto $\left(1 - \left(\frac{n}{m}\right)^d\right)^{\frac{d-1}{d}} > \left(1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{d-1}\right)^{\frac{d-1}{d}} > 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{d-1}$ (pues $\frac{d-1}{d} < 1$). En consecuencia, la sucesión $\{u_n\}$ no es de Cauchy en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$, como queríamos probar.

- Finalmente para probar d), veamos que si $d \geq 2$ la sucesión $\{u_n\}$ no contiene ninguna subsucesión débilmente convergente en $L^p(\Omega)$ para ningún $p > \frac{d}{d-1}$. Para ello, sean $\{u_{n_j}\}$ una subsucesión arbitraria de $\{u_n\}$ y $p > \frac{d}{d-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|u_{n_j}\|_{L^p(\Omega)} &= n_j^{d-1-\frac{d}{p}} \omega_d^{1/p} \quad (\text{por (5.34)}) \\
&\rightarrow +\infty \quad \text{para } j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Como $\{u_{n_j}\}$ no es acotada en $L^p(\Omega)$ no puede ser débilmente convergente en dicho espacio (ver [5], Teorema 14.2).

5.2 Existencia, unicidad y estabilidad de los métodos BV

Habiendo presentado en la sección anterior todas las definiciones y resultados preliminares, nos proponemos ahora el estudio de los problemas de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes de los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados para los casos en los que el término penalizante es la seminorma o la norma de variación acotada. Para ello introduciremos previamente algunas definiciones y probaremos dos resultados fundamentales sobre existencia, unicidad y estabilidad para funcionales generales definidos sobre $L^p(\Omega)$, con valores en los reales extendidos, $\bar{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Al igual que en la sección anterior, en esta sección Ω denotará un subconjunto abierto, convexo y acotado en \mathbb{R}^d , con $d = 1, 2$ ó 3 , con frontera Lipschitz continua y $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$.

Definición 5.28. (BV-COERCITIVIDAD) *Diremos que el funcional $J : L^p(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es BV-coercitivo si para toda sucesión $\{u_n\} \subset BV(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV(\Omega)} = +\infty$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = +\infty$.*

Observación 5.29. Si $J : L^p(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es un funcional BV-coercitivo, entonces todos los conjuntos de nivel inferior $\{u \in L^p(\Omega) : J(u) \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$, son BV-acotados. En efecto, supongamos que para un cierto $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\{u \in L^p(\Omega) : J(u) \leq a\}$ no es BV-acotado. Entonces existe $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ tal que $J(u_n) \leq a$ y $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Pero puesto que J es BV-coercitivo, se sigue entonces que $J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, lo cual es una contradicción.

Teorema 5.30. (EXISTENCIA Y UNICIDAD) *Sea $J : L^p(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ un funcional BV-coercitivo. Entonces cualesquiera de las dos condiciones siguientes es suficiente para la existencia de un minimizante global de J sobre $BV(\Omega)$.*

(C1) *Si $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$ y J semicontinuo inferiormente.*

(C2) *Si $p = \frac{d}{d-1}$, $d \geq 2$ y J débilmente semicontinuo inferiormente.*

En ambos casos, el minimizante es único si J es estrictamente convexo.

Demostración. Sea $\{u_n\} \subset BV(\Omega)$ tal que

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in BV(\Omega)} J(u) \doteq J_{\min} < \infty. \quad (5.36)$$

Como J es BV-coercitivo se sigue que $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ y por lo tanto existe una subsucesión a la que volveremos a denotar con $\{u_n\}$ tal que $\{u_n\}$ es BV-acotada. De los Teoremas 5.24 y 5.25 se sigue entonces que:

(i) $\{u_n\}$ es precompacta en $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$;

(ii) Si $d \geq 2$, $\{u_n\}$ es débilmente precompacta en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$.

En ambos casos, existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ que converge en $L^p(\Omega)$ a algún $\bar{u} \in L^p(\Omega)$ (la convergencia es débil si $p = \frac{d}{d-1}$). Más aún, de los Teoremas 5.24 y 5.25 se sigue además que $\bar{u} \in BV(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J(u_{n_j}) \quad (\text{pues } J \text{ es semicont. inferiormente (débilmente si } p = \frac{d}{d-1}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} J(u_{n_j}) \\ &= \inf_{u \in BV(\Omega)} J(u) \quad (\text{por (5.36)}) \\ &\leq J(\bar{u}) \quad (\text{por definición de ínfimo, pues } \bar{u} \in BV(\Omega)). \end{aligned}$$

Luego, $J(\bar{u}) = \inf_{u \in BV(\Omega)} J(u)$ y por lo tanto \bar{u} es un minimizante global de J sobre $BV(\Omega)$. Resta probar que si J es estrictamente convexo tal minimizante es único. Para ello, supongamos que existe $\tilde{u} \in BV(\Omega)$ tal que $J(\tilde{u}) = J_{\min}$ con $\tilde{u} \neq \bar{u}$. Como J es estrictamente convexo se sigue entonces que

$$J\left(\frac{1}{2}(\bar{u} + \tilde{u})\right) < \frac{1}{2}J(\bar{u}) + \frac{1}{2}J(\tilde{u}) = \frac{1}{2}J_{\min} + \frac{1}{2}J_{\min} = J_{\min},$$

lo cual es un absurdo. Luego si J es estrictamente convexo, \bar{u} es el único minimizante global de J sobre $BV(\Omega)$. ■

Es oportuno volver a recordar que el objetivo fundamental del término de penalización en los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados es el de inducir estabilidad en el cálculo de las correspondientes soluciones aproximadas. Por lo tanto es necesario verificar que los penalizantes que se utilicen sean tales que se satisfaga tal condición. Con este objetivo en mente probaremos a continuación un resultado de estabilidad para funcionales generales sobre $L^p(\Omega)$, el que será luego de fundamental importancia para el análisis de la estabilidad de los minimizantes de los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes de tipo BV bajo diferentes perturbaciones. Previamente necesitaremos de las siguientes dos definiciones.

Definición 5.31. (*BV-COERCITIVIDAD*) Sea $\{J_n\}$ una sucesión de funcionales definidos en $L^p(\Omega)$, con valores en \mathbb{R} . Diremos que $\{J_n\}$ es **BV-coercitiva** si para toda sucesión $\{u_n\} \subset BV(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV(\Omega)} = +\infty$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(u_n) = +\infty$.

Definición 5.32. (*BV-CONSISTENCIA*) Sean J, J_1, J_2, \dots funcionales definidos sobre $L^p(\Omega)$, con valores en \mathbb{R} . Diremos que $\{J_n\}$ es **BV-consistente** para J si $J_n(u) \rightarrow J(u)$ uniformemente sobre todo conjunto BV -acotado, es decir, si dados $c > 0$ y $\epsilon > 0$, existe $N = N(c, \epsilon)$ tal que para todo $n \geq N$ y para todo $u \in BV(\Omega)$ con $\|u\|_{BV(\Omega)} \leq c$ se tiene que $|J_n(u) - J(u)| < \epsilon$.

Teorema 5.33. (*ESTABILIDAD*) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1})$ y J, J_1, J_2, \dots funcionales definidos sobre $L^p(\Omega)$, con valores en \mathbb{R} . Supongamos que J y cada uno de los funcionales J_n son BV -coercitivos, semicontinuos inferiormente y tienen únicos minimizantes globales sobre $BV(\Omega)$, \bar{u} y u_n , respectivamente. Supongamos además que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . Entonces

$$u_n \rightarrow \bar{u} \text{ en } L^p(\Omega) \text{ para } n \rightarrow \infty. \quad (5.37)$$

Si $d \geq 2$ y $p = \frac{d}{d-1}$, reemplazando la hipótesis de semicontinuidad inferior por la de semicontinuidad inferior débil de J y los J_n , se tiene que

$$u_n \xrightarrow{w} \bar{u} \text{ en } L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega) \text{ para } n \rightarrow \infty. \quad (5.38)$$

Demostración. La existencia de los minimizantes globales \bar{u} y u_n de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$ se sigue del Teorema 5.30. Aquí estamos suponiendo además que tales minimizantes son únicos (como vimos esto es así por ejemplo en el caso de funcionales estrictamente convexos). Puesto que \bar{u} y u_n minimizan J y J_n sobre $BV(\Omega)$, respectivamente, se tiene que para todo $u \in BV(\Omega)$ $J(\bar{u}) \leq J(u)$ y $J_n(u_n) \leq J_n(u) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, en particular

$$J_n(u_n) \leq J_n(\bar{u}). \quad (5.39)$$

Luego

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} J_n(u_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} J_n(\bar{u}) \quad (\text{por (5.39)}) \\ &= J(\bar{u}) \quad (\text{pues } \{J_n\} \text{ es } BV\text{-consistente para } J) \\ &< \infty, \end{aligned} \quad (5.40)$$

de donde se sigue que $J_n(u_n) \not\rightarrow +\infty$. Como $\{J_n\}$ es BV -coercitiva se sigue que la sucesión $\{u_n\}$ es BV -acotada. Supongamos ahora que (5.37) no se satisface (ó (5.38) si $p = \frac{d}{d-1}$). Entonces existe una subsucesión a la que volvemos a denotar con $\{u_n\}$ tal que ninguna subsucesión de $\{u_n\}$ converge en $L^p(\Omega)$ a \bar{u} (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$). Ahora, por el Teorema 5.24 (ii) (o Teorema 5.25 si $p = \frac{d}{d-1}$), como $\{u_n\}$ es BV -acotada, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ que converge en $L^p(\Omega)$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$) a algún $\hat{u} \in BV(\Omega)$, para el cual se debe verificar por lo tanto que $\hat{u} \neq \bar{u}$. Entonces

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_{n_k}) \quad (\text{pues } J \text{ es semicont. inferiormente (débilmente si } p = \frac{d}{d-1} \text{)}) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} J(u_{n_k}) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} J_{n_k}(u_{n_k}) + \underbrace{\limsup_{k \rightarrow \infty} (J(u_{n_k}) - J_{n_k}(u_{n_k}))}_{=0} \quad (\text{por prop. del lim. superior}) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} J_{n_k}(u_{n_k}) \quad (\text{pues } \{J_n\} \text{ es } BV\text{-consistente para } J) \\ &\leq J(\bar{u}) \quad (\text{por (5.40)}), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\hat{u} (\neq \bar{u})$ es también un minimizante global de J sobre $BV(\Omega)$, lo cual contradice la unicidad del minimizante \bar{u} de J . Luego, vale (5.37) (ó (5.38) si $p = \frac{d}{d-1}$). Esto completa la demostración del teorema. ■

A continuación utilizaremos los Teoremas 5.30 y 5.33 para probar varios resultados de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes de tipo BV .

En algunas ocasiones utilizaremos la siguiente identidad, la cual es válida en todo espacio de Hilbert y cuya demostración es inmediata:

$$\|y_1\|^2 - \|y_2\|^2 = \|y_1 - y_2\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle y_1 - y_2, y_2 \rangle, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}. \quad (5.41)$$

Proposición 5.34. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal, acotado e inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$ y $J : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) \doteq \|Tu - y\|^2 + \alpha \|u\|_{BV(\Omega)}. \quad (5.42)$$

Entonces $J(u)$ tiene un único minimizante global sobre $BV(\Omega)$.

Demostración. Utilizaremos el Teorema 5.30, para lo cual será necesario probar que J es BV -coercitivo, semicontinuo inferiormente (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$) y estrictamente convexo.

- (i) La BV -coercitividad de J se sigue inmediatamente de la definición de J y del hecho que $\alpha > 0$.
- (ii) Veamos ahora que el funcional J es estrictamente convexo. Para ello mostraremos que $F(u) \doteq \|Tu - y\|^2$ es estrictamente convexo. Sean $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$ con $u_1 \neq u_2$ y $0 < t < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} & tF(u_1) + (1-t)F(u_2) - F(tu_1 + (1-t)u_2) = \\ &= t\|Tu_1 - y\|^2 + (1-t)\|Tu_2 - y\|^2 - \|T(tu_1 + (1-t)u_2) - y\|^2 \\ &= t(\|Tu_1 - y\|^2 - \|Tu_2 - y\|^2) - (\|t(Tu_1 - Tu_2) + Tu_2 - y\|^2 - \|Tu_2 - y\|^2) \\ &= t(\|Tu_1 - Tu_2\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Tu_1 - Tu_2, Tu_2 - y \rangle) \\ &\quad - (\|t(Tu_1 - Tu_2)\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle t(Tu_1 - Tu_2), Tu_2 - y \rangle) \quad (\text{por (5.41)}) \\ &= t\|Tu_1 - Tu_2\|^2 - t^2\|Tu_1 - Tu_2\|^2 \\ &= \underbrace{t(1-t)}_{>0} \underbrace{\|Tu_1 - Tu_2\|^2}_{>0} > 0 \quad (\text{pues } 0 < t < 1, u_1 \neq u_2 \text{ y } T \text{ inyectivo}), \end{aligned}$$

y por lo tanto F es estrictamente convexo. Puesto que la norma $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ es convexa (pues toda norma lo es) y $\alpha > 0$ se sigue entonces que $J = F + \alpha \|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ es estrictamente convexo.

- (iii) Puesto que J es convexo y continuo, del Lema 5.14 se sigue entonces que J es débilmente semicontinuo inferiormente y por lo tanto semicontinuo inferiormente (ver Observación 5.10).

Del Teorema 5.30, se sigue entonces que el funcional J definido por (5.42) tiene un único minimizante global sobre $BV(\Omega)$, como se quería probar. ■

Observación 5.35. Notar que si bien la norma $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ no es estrictamente convexa, es la inyectividad de T la que hace que J sea estrictamente convexo y por lo tanto, que su minimizante global sea único.

A continuación presentaremos cinco resultados de estabilidad para los minimizantes de los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes de tipo BV bajo diferentes tipos de perturbaciones. El primer resultado de estabilidad que analizaremos es bajo perturbaciones en el dato y . Este es sin duda el más importante puesto que el problema original $Tx = y$ es mal condicionado, y por lo tanto x no depende en

forma continua de y . Como ya mencionamos, el dato exacto y en general no se conoce en forma exacta, y aunque se lo conociera, el tratamiento numérico-computacional del problema origina inexorablemente errores debido a los procesos de discretización y redondeo.

Proposición 5.36. (PERTURBACIONES EN EL DATO y) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal, acotado e inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, $y_n \doteq y + \xi_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\xi_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, J como en (5.42) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J definida por

$$J_n(u) \doteq \|Tu - y_n\|^2 + \alpha \|u\|_{BV(\Omega)}. \quad (5.43)$$

Sean $\bar{u}, u_n \in BV(\Omega)$ los únicos minimizantes globales de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$. Entonces $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$).

Demostración. Observar en primer lugar que la existencia de los minimizantes globales únicos \bar{u} y u_n de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$ está garantizada por la Proposición 5.34. Utilizaremos el Teorema de estabilidad 5.33, para lo cual será necesario probar que J y cada uno de los J_n son BV -coercitivos, semicontinuos inferiormente (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$) y que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . De la demostración de la Proposición 5.34 también se sigue que J y cada uno de los J_n son en efecto BV -coercitivos y semicontinuos inferiormente (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$). La BV -coercitividad de la sucesión $\{J_n\}$ se sigue inmediatamente de la definición de J_n y del hecho que $\alpha > 0$. Resta sólo probar entonces la BV -consistencia de $\{J_n\}$. Para ello sean $\gamma > 0$ y B_γ la bola cerrada con centro en el origen y radio γ en $BV(\Omega)$, es decir $B_\gamma = \{u \in BV(\Omega) / \|u\|_{BV(\Omega)} \leq \gamma\}$. Entonces para cualquier $u \in B_\gamma$ se tiene que

$$\begin{aligned} |J_n(u) - J(u)| &= \left| \|Tu - y_n\|^2 - \|Tu - y\|^2 \right| \quad (\text{por (5.43) y (5.42)}) \\ &= \left| \|Tu - y - \xi_n\|^2 - \|Tu - y\|^2 \right| \quad (\text{pues } y_n = y + \xi_n) \\ &= \left| \|\xi_n\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle -\xi_n, Tu - y \rangle \right| \quad (\text{por (5.41)}) \\ &\leq \|\xi_n\|^2 + 2 |\langle \xi_n, Tu - y \rangle| \\ &\leq \|\xi_n\| \left(\|\xi_n\| + 2 \|T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} + 2 \|y\| \right) \\ &\leq \|\xi_n\| \left(\|\xi_n\| + 2C \|T\| \|u\|_{BV(\Omega)} + 2 \|y\| \right) \quad (\text{por Teorema 5.20}) \\ &\leq \underbrace{\|\xi_n\|}_{\rightarrow 0} \left(\underbrace{\|\xi_n\|}_{\rightarrow 0} + 2 \underbrace{C\gamma}_{< \infty} \underbrace{\|T\|}_{< \infty} + 2 \underbrace{\|y\|}_{< \infty} \right) \quad (\text{pues } u \in B_\gamma) \\ &\doteq \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Notar que ε_n es independiente de $u \in B_\gamma$. Así, $J_n(u)$ converge uniformemente a $J(u)$ para u en BV -acotados. En consecuencia la sucesión $\{J_n\}$ es BV -consistente para J , como se quería probar. La proposición se sigue finalmente del Teorema 5.33. ■

A continuación probaremos un resultado de estabilidad en el que el penalizante $\|u\|_{BV(\Omega)}$ en (5.42) es reemplazado por una perturbación diferenciable del mismo (recordemos que $\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u)$ no es derivable pues J_0 no lo es). Este resultado

es importante puesto que nos permite aproximar el minimizante global del funcional no derivable J dado en (5.42), en términos de los correspondientes minimizantes globales de ciertos funcionales diferenciables. La ventaja radica en el hecho que para estos funcionales diferenciables, sus correspondientes minimizantes globales pueden, al menos formalmente, obtenerse resolviendo la correspondiente ecuación de optimalidad de primer orden, esto es, igualando a cero sus derivadas de Fréchet.

Proposición 5.37. (PERTURBACIONES DIFERENCIABLES DEL FUNCIONAL PENALIZANTE) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal, acotado e inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, J como en (5.42), $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\beta_n \rightarrow 0^+$ para $n \rightarrow \infty$, J_{β_n} como en (5.10) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J definida por

$$J_n(u) \doteq \|Tu - y\|^2 + \alpha \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + J_{\beta_n}(u) \right). \quad (5.44)$$

Si \bar{u} y u_n denotan los únicos minimizantes globales de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$, entonces se tiene que $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$).

Demostración. La existencia del minimizante global único \bar{u} de J sobre $BV(\Omega)$ esta garantizada por la Proposición 5.34. Para probar que J_n tiene un único minimizante global veremos que J_n satisface las hipótesis del Teorema 5.30. Que J_n es BV -coercitivo se sigue inmediatamente del hecho que $\alpha > 0$ y que

$$\begin{aligned} J_n(u) &\geq \alpha \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + J_{\beta_n}(u) \right) \quad (\text{por (5.44)}) \\ &\geq \alpha \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u) \right) \quad (\text{por (5.16)}) \\ &= \alpha \|u\|_{BV(\Omega)} \quad (\text{por (5.7)}). \end{aligned}$$

Por otro lado, que J_n es débilmente semicontinuo inferiormente se sigue del hecho que $J_n(u) = F(u) + \alpha \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + J_{\beta_n}(u) \right)$, donde $F(u) \doteq \|Tu - y\|^2$; observar aquí que los tres funcionales F , $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ y J_{β_n} son débilmente semicontinuos inferiormente sobre $L^p(\Omega)$. En efecto, F lo es por la continuidad de T y la semicontinuidad inferior débil de toda norma, J_{β_n} lo es en virtud del Teorema 5.11 y $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ lo es puesto que, como $p > 1$, convergencia débil en $L^p(\Omega)$ implica convergencia débil en $L^1(\Omega)$. Así entonces del Teorema 5.30 se sigue que J_n tiene un minimizante global u_n sobre $BV(\Omega)$ (recordar que semicontinuidad inferior débil implica semicontinuidad inferior). Este minimizante global es único puesto que J_n es estrictamente convexo, lo cual se sigue inmediatamente de la convexidad de cada uno de los funcionales F , $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ y J_{β_n} (ver Teorema 5.7) y de la inyectividad de T lo cual resulta en la convexidad estricta de F .

Para la convergencia $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ utilizaremos el Teorema 5.33, para lo cual sólo resta probar que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . La BV -coercitividad de la sucesión $\{J_n\}$ se sigue inmediatamente del hecho que si $\{\tilde{u}_n\} \subset BV(\Omega)$ es tal que $\|\tilde{u}_n\|_{BV(\Omega)} \rightarrow +\infty$ entonces $J_n(\tilde{u}_n) \geq \alpha \|\tilde{u}_n\|_{BV(\Omega)} \rightarrow +\infty$. Sólo resta probar que $\{J_n\}$ es BV -consistente para J . Para ello, sean $\gamma > 0$ y

$B_\gamma = \left\{ u \in BV(\Omega) / \|u\|_{BV(\Omega)} \leq \gamma \right\}$. Entonces para cualquier $u \in B_\gamma$ se tiene que

$$\begin{aligned} |J_n(u) - J(u)| &= \alpha |J_{\beta_n}(u) - J_0(u)| \quad (\text{por (5.44), (5.42) y (5.7)}) \\ &= \alpha (J_{\beta_n}(u) - J_0(u)) \quad (\text{por (5.16)}) \\ &\leq \underbrace{\alpha \sqrt{\beta_n}}_{\rightarrow 0} \underbrace{|\Omega|}_{< \infty} \quad (\text{por (5.16)}) \\ &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (\text{pues } \beta_n \rightarrow 0^+), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\{J_n\}$ es BV -consistente para J , como queríamos probar. La proposición se sigue finalmente del Teorema 5.33. ■

Proposición 5.38. (PERTURBACIONES EN EL PARÁMETRO DE REGULARIZACIÓN α) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal, acotado e inyectivo, $y \in \mathcal{Y}$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\alpha_n \geq \alpha_{\min} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \rightarrow \alpha$ para $n \rightarrow \infty$, J como en (5.42) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J definida por

$$J_n(u) \doteq \|Tu - y\|^2 + \alpha_n \|u\|_{BV(\Omega)}. \quad (5.45)$$

Sean $\bar{u}, u_n \in BV(\Omega)$ los únicos minimizantes globales de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$. Entonces $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$).

Demostración. Aquí también la existencia de los minimizantes globales únicos \bar{u} y u_n de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$ está garantizada por la Proposición 5.34. Emplearemos nuevamente el Teorema de estabilidad 5.33, para lo cual será necesario probar que J y cada uno de los J_n son BV -coercitivos y semicontinuos inferiormente (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$) y que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . De la demostración de la Proposición 5.34 se sigue que J y cada uno de los J_n son BV -coercitivos y semicontinuos inferiormente (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$). Que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva se sigue inmediatamente del hecho que $\alpha_{\min} > 0$ y que para $\{\tilde{u}_n\} \subset BV(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned} J_n(\tilde{u}_n) &\geq \alpha_n \|\tilde{u}_n\|_{BV(\Omega)} \quad (\text{por (5.45)}) \\ &\geq \alpha_{\min} \|\tilde{u}_n\|_{BV(\Omega)} \quad (\text{pues } \alpha_n \geq \alpha_{\min}). \end{aligned}$$

Para utilizar el Teorema 5.33, sólo resta probar la BV -consistencia de $\{J_n\}$ para J . Para ello, sean $\gamma > 0$ y $B_\gamma = \left\{ u \in BV(\Omega) / \|u\|_{BV(\Omega)} \leq \gamma \right\}$. Entonces para cualquier $u \in B_\gamma$ se tiene que

$$\begin{aligned} |J_n(u) - J(u)| &= \left| \alpha_n \|u\|_{BV(\Omega)} - \alpha \|u\|_{BV(\Omega)} \right| \quad (\text{por (5.45) y (5.42)}) \\ &= |\alpha_n - \alpha| \|u\|_{BV(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\rightarrow 0} \gamma \quad (\text{pues } u \in B_\gamma) \\ &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (\text{pues } \alpha_n \rightarrow \alpha), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\{J_n\}$ es BV -consistente para J , como se quería probar. Del Teorema 5.33 se sigue entonces que $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$). ■

Proposición 5.39. (PERTURBACIONES EN EL OPERADOR T) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1})$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal, acotado e inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ tal que $T_n \rightarrow T$ uniformemente (i.e. $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$), T_n inyectivo $\forall n \in \mathbb{N}$, J como en (5.42) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J definida por

$$J_n(u) \doteq \|T_n u - y\|^2 + \alpha \|u\|_{BV(\Omega)}. \quad (5.46)$$

Sean $\bar{u}, u_n \in BV(\Omega)$ los únicos minimizantes globales de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$. Entonces $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

Demostración. La existencia de los minimizantes globales únicos \bar{u} y u_n de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$ está garantizada por la Proposición 5.34 (pues T y T_n son inyectivos). Utilizaremos una vez más el Teorema 5.33, para lo cual será necesario probar que J y cada uno de los J_n son BV -coercitivos y semicontinuos inferiormente y que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . Por la demostración de la Proposición 5.34 también tenemos que J y cada uno de los J_n son BV -coercitivos y semicontinuos inferiormente. La BV -coercitividad de $\{J_n\}$ se sigue inmediatamente de la definición de J_n y del hecho que $\alpha > 0$. Resta probar la BV -consistencia de $\{J_n\}$ para J . Para ello, sean $\gamma > 0$ y $B_\gamma = \left\{ u \in BV(\Omega) / \|u\|_{BV(\Omega)} \leq \gamma \right\}$. Entonces para cualquier $u \in B_\gamma$ se tiene que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{BV(\Omega)}$ (ver Teorema 5.24) y

$$\begin{aligned} |J_n(u) - J(u)| &= \left| \|T_n u - y\|^2 - \|T u - y\|^2 \right| \quad (\text{por (5.46) y (5.42)}) \\ &= \left| \|T_n u - T u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle T_n u - T u, T u - y \rangle \right| \quad (\text{por (5.41)}) \\ &\leq \|T_n u - T u\|^2 + 2 |\langle T_n u - T u, T u - y \rangle| \\ &\leq \|T_n - T\|^2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^2 + 2 \|T_n - T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} \left(\|T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|y\| \right) \\ &\leq \underbrace{\|T_n - T\|}_{\rightarrow 0} \left(\underbrace{\|T_n - T\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{C^2 \gamma^2}_{< \infty} + 2 \underbrace{C \gamma}_{< \infty} \underbrace{(\|T\| C \gamma + \|y\|)}_{< \infty} \right) \quad (u \in B_\gamma) \\ &\doteq \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

donde ε_n es independiente de $u \in B_\gamma$. Así $J_n(u) \rightarrow J(u)$ uniformemente para u en B_γ . En consecuencia, la sucesión $\{J_n\}$ es BV -consistente para J , como se quería probar. La proposición se sigue del Teorema 5.33. \blacksquare

Finalizamos la sección analizando el último de los resultados de estabilidad bajo las cuatro perturbaciones anteriores de manera conjunta.

Proposición 5.40. (PERTURBACIONES SIMULTÁNEAS EN EL DATO y , EN EL FUNCIONAL PENALIZANTE, EN EL PARÁMETRO DE REGULARIZACIÓN α Y EN EL OPERADOR T) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1})$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal, acotado e inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, J como en (5.42), $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ tal que $T_n \rightarrow T$ uniformemente, T_n inyectivo $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \doteq y + \xi_n \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\xi_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha_n \geq \alpha_{\min} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \rightarrow \alpha$ para $n \rightarrow \infty$, $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\beta_n \rightarrow 0^+$ para $n \rightarrow \infty$, J_{β_n} como en (5.10) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J definida por

$$J_n(u) \doteq \|T_n u - y_n\|^2 + \alpha_n \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + J_{\beta_n}(u) \right). \quad (5.47)$$

Sean $\bar{u}, u_n \in BV(\Omega)$ los únicos minimizantes globales de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$. Entonces $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

Demostración. La demostración de esta proposición se sigue esencialmente ensamblando las demostraciones de las cuatro proposiciones anteriores. Aquí también la existencia del minimizante global único \bar{u} de J sobre $BV(\Omega)$ esta garantizada por la Proposición 5.34 (pues T es inyectivo). La existencia del minimizante global único u_n de J_n sobre $BV(\Omega)$ se demuestra de igual manera que en la Proposición 5.37 con el funcional F reemplazado por $F_n(u) \doteq \|T_n u - y_n\|^2$; por esta razón la omitimos. De igual modo, de la demostración de la Proposición 5.37 también se sigue que cada funcional J_n es semicontinuo inferiormente, BV -coercitivo y estrictamente convexo (pues T_n es inyectivo). Para probar la convergencia de u_n a \bar{u} en $L^p(\Omega)$, utilizaremos el Teorema 5.33, para lo cual sólo resta probar que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . La BV -coercitividad de la sucesión $\{J_n\}$ se sigue inmediatamente del hecho que si $\{u_n\} \subset BV(\Omega)$ es tal que $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \rightarrow +\infty$ entonces

$$\begin{aligned} J_n(u_n) &\geq \alpha_n \left(\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + J_{\beta_n}(u_n) \right) \quad (\text{por (5.47)}) \\ &\geq \alpha_{\min} \left(\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n) \right) \quad (\text{pues } \alpha_n \geq \alpha_{\min} \text{ y por (5.16)}) \\ &= \alpha_{\min} \|u_n\|_{BV(\Omega)} \rightarrow +\infty \quad (\text{pues } \alpha_{\min} > 0). \end{aligned}$$

Sólo resta probar que $\{J_n\}$ es BV -consistente para J . Para ello notar en primer lugar que, como $T_n \rightarrow T$ en $\mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$, existe $k < \infty$ tal que $\|T_n\| \leq k$. Sean ahora $\gamma > 0$ y $B_\gamma = \left\{ u \in BV(\Omega) / \|u\|_{BV(\Omega)} \leq \gamma \right\}$. Entonces para cualquier $u \in B_\gamma$ se tiene que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{BV(\Omega)}$ (ver Teorema 5.24) y

$$\begin{aligned} &|J_n(u) - J(u)| = \\ &= \left| \|T_n u - y_n\|^2 + \alpha_n \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + J_{\beta_n}(u) \right) - \|T u - y\|^2 - \alpha \|u\|_{BV(\Omega)} \right| \\ &= \left| \|T_n u - y - \xi_n\|^2 + \alpha_n \|u\|_{L^1(\Omega)} - \alpha \|u\|_{BV(\Omega)} - \|T u - y\|^2 + \alpha_n J_{\beta_n}(u) \right| \\ &= \left| \|T_n u - y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T_n u - y, \xi_n \rangle + \|\xi_n\|^2 - \|T u - y\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_n - \alpha) \|u\|_{BV(\Omega)} + \alpha_n (J_{\beta_n}(u) - J_0(u)) \right| \\ &= \left| \|T_n u - T u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle T_n u - T u, T u - y \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle T_n u - y, \xi_n \rangle + \|\xi_n\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_n - \alpha) \|u\|_{BV(\Omega)} + \alpha_n (J_{\beta_n}(u) - J_0(u)) \right| \quad (\text{por (5.41)}) \\ &\leq \|T_n u - T u\|^2 + 2 |\langle T_n u - T u, T u - y \rangle| + \|\xi_n\|^2 + 2 |\langle T_n u - y, \xi_n \rangle| \\ &\quad + |\alpha_n - \alpha| \|u\|_{BV(\Omega)} + \alpha_n (J_{\beta_n}(u) - J_0(u)) \quad (\text{por (5.16)}) \\ &\leq \|T_n - T\|^2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^2 + 2 \|T_n - T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} \left(\|T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|y\| \right) \\ &\quad + \|\xi_n\| \left(\|\xi_n\| + 2 \|T_n\| \|u\|_{L^p(\Omega)} + 2 \|y\| \right) + |\alpha_n - \alpha| \|u\|_{BV(\Omega)} + \alpha_n \sqrt{\beta_n} |\Omega| \\ &\leq \underbrace{\|T_n - T\|}_{\rightarrow 0} \left(\underbrace{\|T_n - T\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{C^2 \gamma^2}_{< \infty} + 2 \underbrace{C \gamma}_{< \infty} \underbrace{(\|T\| C \gamma + \|y\|)}_{< \infty} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\|\xi_n\|}_{\rightarrow 0} \left(\underbrace{\|\xi_n\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{2kC\gamma}_{< \infty} + \underbrace{2\|y\|}_{< \infty} \right) + \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\rightarrow 0} \underbrace{C\gamma}_{< \infty} + \underbrace{\alpha_n}_{\rightarrow \alpha} \underbrace{\sqrt{\beta_n}}_{\rightarrow 0} |\Omega| \\
& \doteq \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

donde ε_n es independiente de $u \in B_\gamma$. Así $J_n(u) \rightarrow J(u)$ uniformemente para u en B_γ . En consecuencia, la sucesión $\{J_n\}$ es BV -consistente para J , como se quería probar. Finalmente del Teorema 5.33 se sigue entonces que $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$. ■

5.3 Penalización con la seminorma BV

En la sección anterior probamos resultados de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados de la forma (5.42), en los cuales el penalizante está dado por la norma $\|\cdot\|_{BV} = \|\cdot\|_{L^1} + J_0(\cdot)$. Resulta interesante preguntarnos si, a los efectos de inducir estabilidad, no sería suficiente con utilizar como penalizante solamente la seminorma de variación acotada, es decir el funcional J_0 . Esta pregunta nos lleva a considerar el funcional $\hat{J} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\hat{J}(u) \doteq \|Tu - y\|^2 + \alpha J_0(u). \quad (5.48)$$

Surgen inmediatamente todas las cuestiones relacionadas con los problemas de existencia, unicidad y, obviamente, estabilidad de los minimizantes globales del funcional \hat{J} . Como vimos en las secciones anteriores, una condición necesaria para la existencia de minimizantes globales del funcional \hat{J} sobre $BV(\Omega)$ es que el mismo sea BV -coercitivo. Observamos inmediatamente que la omisión de $\|u\|_{L^1(\Omega)}$ en el penalizante de \hat{J} puede originar la ausencia de esta propiedad. En efecto, tal es el caso, por ejemplo si el operador T anula funciones constantes puesto que para tales funciones u se tiene obviamente que $J_0(u) = 0$. Será necesario entonces imponer condiciones adicionales al operador T para preservar la propiedad de BV -coercitividad del funcional \hat{J} (precisamente este será el primer resultado de esta sección, Lema 5.41).

Por otro lado, de la misma forma que en el caso de la utilización de la norma $\|\cdot\|_{BV}$ como penalizante (J definido como en (5.42)), desde el punto de vista numérico-computacional surge además el inconveniente de que el funcional \hat{J} no es derivable puesto que, como vimos, J_0 no lo es. En este sentido abordaremos entonces el problema de analizar la existencia, unicidad y estabilidad de minimizantes globales de los funcionales que resultan de reemplazar el penalizante J_0 en (5.48) por perturbaciones diferenciables del mismo. Es decir, analizaremos funcionales de la forma $J : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$J(u) \doteq \|Tu - y\|^2 + \alpha J_\beta(u), \quad (5.49)$$

donde J_β es la aproximación a J_0 definida en (5.10). Se puede verificar que para $\beta > 0$, $J_\beta(u)$ es diferenciable Gâteaux con respecto a u (Definición A.95). No obstante ello, es oportuno señalar que si bien para cualquier $\beta > 0$, J es diferenciable en u , el análisis necesario para probar la existencia de minimizantes globales de (5.49) resulta considerablemente más engorroso que el que fue necesario en la sección anterior cuando se utilizó la norma $\|\cdot\|_{BV}$ como penalizante.

Como mencionamos previamente, para obtener resultados sobre la existencia de minimizantes globales de (5.49) sobre $BV(\Omega)$ será necesario requerir la BV -coercitividad de J para lo cual es necesario imponer ciertas condiciones sobre T . En efecto, notar por ejemplo que si T anula funciones constantes entonces el funcional J no puede ser BV -coercitivo (por ejemplo si $u_n \doteq n \chi_\Omega$, entonces $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ y $J(u_n) = \|Tu_n - y\|^2 + \alpha \int_\Omega \sqrt{|\nabla u_n|^2 + \beta} = \|y\|^2 + \alpha\sqrt{\beta} |\Omega| < \infty$ pues $Tu_n = 0$ y $\nabla u_n = 0$).

El siguiente lema provee una condición suficiente para garantizar la BV -coercitividad del funcional J definido en (5.49).

Lema 5.41. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal y acotado, $y \in \mathcal{Y}$, J como en (5.49) y supongamos que T no anula funciones constantes (no nulas), es decir

$$T\chi_\Omega \neq 0. \quad (5.50)$$

Entonces J es BV -coercitivo.

Demostración. Para probar la BV -coercitividad de J es suficiente con probar que el funcional \hat{J} definido en (5.48) (correspondiente al caso $\beta = 0$) es BV -coercitivo puesto que, por la desigualdad (5.16), $J_\beta(u) \geq J_0(u) \forall u \in BV(\Omega)$, $\forall \beta > 0$. Para ello observar primero que todo $u \in BV(\Omega)$ tiene una descomposición de la forma

$$u = v + w, \quad (5.51)$$

donde

$$w = \mu \chi_\Omega, \quad \int_\Omega v \, dx = 0 \quad (5.52)$$

siendo $\mu \doteq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, dx$ el valor medio o promedio de u sobre Ω . Notar que $\mu < \infty$ pues $u \in BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega v \, dx = \int_\Omega (u-w) \, dx = \int_\Omega u \, dx - \mu \int_\Omega \chi_\Omega \, dx = \int_\Omega u \, dx - \mu |\Omega| = 0$. Escribiremos simplemente $v = u - \mu$ en lugar de $v = u - \mu \chi_\Omega$.

Probaremos en primer lugar que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \quad (5.53)$$

donde $q \doteq \frac{d}{d-1}$. Para ello consideraremos los siguientes dos casos para q :

1) Si $q < \infty$, esto es $d \geq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega |v(x)|^p \, dx = \int_\Omega |v(x)|^p \chi_\Omega \, dx \\ &\leq \| |v|^p \|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)} \| \chi_\Omega \|_{L^{\frac{q}{q-p}}(\Omega)} \quad (\text{por Desigualdad de Hölder}) \\ &= \left(\int_\Omega (|v(x)|^p)^{\frac{q}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega \chi_\Omega \, dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |v(x)|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \|v\|_{L^q(\Omega)}^p |\Omega|^{1-\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

2) Si $q = \infty$ (i.e. $d = 1$) se tiene que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|^p dx \\ &= \| |v|^p \|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} dx \\ &= \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^p |\Omega|, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|v\|_{L^q(\Omega)}$ (pues $q = \infty$).

Por otro lado, en virtud de la desigualdad de Poincaré-Wirtinger para funciones en $BV(\Omega)$ (ver por ejemplo: [46], Teorema 5.2 y [4], Lema 10.3.2) se tiene que existe una constante $C = C(\Omega, d) > 0$ tal que

$$\|u - \mu\|_{L^q(\Omega)} \leq C J_0(u). \quad (5.54)$$

Puesto que $v = u - \mu$, de (5.53) y (5.54) se sigue entonces que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 J_0(u), \quad (5.55)$$

donde $C_1 = C_1(p) \doteq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} C > 0$. Así entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_{BV(\Omega)} &= \|u\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u) \\ &= \|v + w\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u) \quad (\text{por (5.51)}) \\ &\leq \|v\|_{L^1(\Omega)} + \|w\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u) \\ &\leq \|w\|_{L^1(\Omega)} + (C_1(1) + 1) J_0(u) \quad (\text{por (5.55) con } p = 1) \\ &\leq \|w\|_{L^1(\Omega)} + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha} \hat{J}(u), \end{aligned} \quad (5.56)$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que $\alpha > 0$ y $\hat{J}(u) \geq \alpha J_0(u)$ por (5.48). Finalmente para de probar la BV -coercitividad de \hat{J} trataremos de encontrar una cota superior para $\|w\|_{L^1(\Omega)}$ en términos de $\hat{J}(u)$. Para ello observar en primer lugar que, puesto que T no anula funciones constantes, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|Tw\| = \|T(\mu \chi_\Omega)\| = |\mu| \|T\chi_\Omega\| = \frac{\|T\chi_\Omega\|}{|\Omega|} |\mu| |\Omega| = C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)}, \quad (5.57)$$

donde $C_2 \doteq \frac{\|T\chi_\Omega\|}{|\Omega|} > 0$ (por (5.50)) y $\|w\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\mu \chi_\Omega(x)| dx = |\mu| \int_{\Omega} dx = |\mu| |\Omega|$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\hat{J}(u) &= \|Tu - y\|^2 + \alpha J_0(u) \quad (\text{por (5.48)}) \\
&= \|T(v + w) - y\|^2 + \alpha J_0(u) \quad (\text{por (5.51)}) \\
&= \|Tv - y + Tw\|^2 + \alpha J_0(u) \\
&\geq (\|Tv - y\| - \|Tw\|)^2 + \alpha J_0(u) \\
&= \|Tv - y\|^2 + \|Tw\|^2 - 2\|Tv - y\| \|Tw\| + \alpha J_0(u) \\
&\geq \|Tw\| (\|Tw\| - 2\|Tv - y\|) + \alpha J_0(u) \\
&\geq \|Tw\| (\|Tw\| - 2\|Tv\| - 2\|y\|) + \alpha J_0(u) \\
&\geq \|Tw\| \left(\|Tw\| - 2\|T\| \|v\|_{L^p(\Omega)} - 2\|y\| \right) + \alpha J_0(u) \\
&= C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)} \left(C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)} - 2\|T\| \|v\|_{L^p(\Omega)} - 2\|y\| \right) + \alpha J_0(u) \quad (\text{por (5.57)}) \\
&\geq C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)} \left(C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)} - 2(\|T\| C_1(p) J_0(u) + \|y\|) \right) + \alpha J_0(u), \quad (5.58)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (5.55). Analicemos los siguientes dos casos:

Caso 1) Si $C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)} - 2(\|T\| C_1(p) J_0(u) + \|y\|) \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{J}(u) &\geq C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)} + \alpha J_0(u) \quad (\text{por (5.58)}) \\
&\geq C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|w\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C_2} \hat{J}(u). \quad (5.59)$$

Con (5.59) en (5.56) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{BV(\Omega)} &\leq \frac{1}{C_2} \hat{J}(u) + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha} \hat{J}(u) \\
&= \left(\frac{1}{C_2} + \frac{C_1(p) + 1}{\alpha} \right) \hat{J}(u). \quad (5.60)
\end{aligned}$$

Caso 2) Si $C_2 \|w\|_{L^1(\Omega)} - 2(\|T\| C_1(p) J_0(u) + \|y\|) < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^1(\Omega)} &< \frac{1}{C_2} (1 + 2\|T\| C_1(p) J_0(u) + 2\|y\|) \\
&\leq \frac{1}{C_2} \left(1 + 2\|T\| C_1(p) \frac{1}{\alpha} \hat{J}(u) + 2\|y\| \right). \quad (5.61)
\end{aligned}$$

Con (5.61) en (5.56) se tiene ahora que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{BV(\Omega)} &\leq \frac{1}{C_2} \left(1 + 2\|T\| C_1(p) \frac{1}{\alpha} \hat{J}(u) + 2\|y\| \right) + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha} \hat{J}(u) \\
&= \frac{1 + 2\|y\|}{C_2} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\|T\| C_1(p)}{C_2} + C_1(1) + 1 \right) \hat{J}(u). \quad (5.62)
\end{aligned}$$

En ambos casos, de (5.60) y (5.62) se sigue inmediatamente que \hat{J} es BV -coercitivo, como se quería probar. ■

Observación 5.42. Resulta oportuno señalar la similitud de la condición que requiere el Lema 5.41 con la condición de complementación (4.2) que debimos imponer para el caso de penalizantes dados por seminormas asociadas a operadores diferenciales. En efecto, notar que para el caso particular $\beta = 0$ la condición (5.50) puede interpretarse también como la condición $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(J_0) = \{0\}$, puesto que obviamente $\mathcal{N}(J_0)$ está constituido por las funciones constantes sobre Ω .

El siguiente resultado provee una condición suficiente que garantiza la existencia de minimizantes globales del funcional J sobre $BV(\Omega)$.

Teorema 5.43. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, $\beta \geq 0$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal y acotado, J_β como en (5.10) y J como en (5.49). Si T no anula funciones constantes (i.e. si T satisface (5.50)) entonces el funcional J tiene un minimizante global sobre $BV(\Omega)$.

Si T es inyectivo tal minimizante global es único.

Demostración. Se sigue inmediatamente del Lema 5.41 y del Teorema 5.30. Notar que el funcional J definido en (5.49) es débilmente semicontinuo inferiormente puesto que $F(u) \doteq \|Tu - y\|^2$ lo es (en virtud de la continuidad de T y la semicontinuidad inferior débil de toda norma) y el funcional J_β también lo es (ver Teorema 5.11 y Observación 5.10). ■

Es oportuno mencionar aquí que la condición (5.50) no es suficiente para garantizar la unicidad de los minimizantes globales de J , como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.44. Sea $T : L^1(-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$[Tu]_1 = \int_{-2}^{-1} u(x) dx \quad , \quad [Tu]_2 = \int_1^2 u(x) dx.$$

Sea $y = [y_1, y_2]^t = [-1, 1]^t \in \mathbb{R}^2$. Definamos

$$J(u) \doteq \|Tu - y\|_{\mathbb{R}^2}^2 + J_\beta(u) = \sum_{i=1}^2 ([Tu]_i - y_i)^2 + J_\beta(u).$$

Se puede probar que para $\beta > 0$ el funcional J tiene un único minimizante global dado por

$$u^*(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases} ,$$

mientras que para el caso $\beta = 0$ cualquier función u tal que $u(x) = u^*(x)$ para todo $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ y $u(x)$ monótona creciente para $x \in (-1, 1)$ constituye un minimizante global para \hat{J} .

Finalizamos esta sección analizando un resultado de estabilidad para los minimizantes globales del funcional J definido como en (5.49), bajo perturbaciones simultáneas en el operador T y en el dato y .

Teorema 5.45. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1})$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal y acotado, $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ tal que $T_n \rightarrow T$ para $n \rightarrow \infty$,

$$\|T_n \chi_\Omega\| \geq \gamma > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.63)$$

$\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, $\{y_n\} \subset \mathcal{Y}$, $y_n \doteq y + \xi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\xi_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, $\beta \geq 0$, J_β como en (5.10), J como en (5.49) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J definida por

$$J_n(u) \doteq \|T_n u - y_n\|^2 + \alpha J_\beta(u). \quad (5.64)$$

Supongamos además que \bar{u} y u_n son los únicos minimizantes globales de J y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$. Entonces $u_n \rightarrow \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Utilizaremos el Teorema 5.33 para lo cual será necesario probar que los funcionales J y J_n (con $n = 1, 2, 3, \dots$) son BV -coercitivos, semicontinuos inferiormente y que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . Que J_n es BV -coercitivo se sigue inmediatamente del Lema 5.41 puesto que en virtud de (5.63), T_n no anula funciones constantes. De igual modo puesto que

$$\begin{aligned} \|T \chi_\Omega\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \chi_\Omega \right\| \quad (\text{pues } T_n \rightarrow T) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|T_n \chi_\Omega\|}_{\geq \gamma} \\ &\geq \gamma > 0 \quad (\text{por (5.63)}), \end{aligned}$$

se obtiene que también J es BV -coercitivo.

Por otro lado, que J_n es débilmente semicontinuo inferiormente se sigue del hecho que $J_n(u) = F_n(u) + \beta J_\beta(u)$, donde $F_n(u) \doteq \|T_n u - y_n\|^2$, y F_n y J_β son débilmente semicontinuos inferiormente sobre $L^p(\Omega)$. En efecto, F_n lo es por la continuidad de T_n y la semicontinuidad inferior débil de toda norma y J_β lo es en virtud del Teorema 5.11. Que J es débilmente semicontinuo inferiormente se sigue de la demostración del Teorema 5.43.

A continuación probaremos que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva: sea entonces $\{\tilde{u}_n\} \subset BV(\Omega)$ tal que $\|\tilde{u}_n\|_{BV(\Omega)} \rightarrow +\infty$ y escribamos $\tilde{u}_n = v_n + w_n$ como en (5.51) y (5.52). Puesto que $\|T_n \chi_\Omega\| \geq \gamma > 0$ y $w_n = \mu_n \chi_\Omega$, con $\mu_n = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \tilde{u}_n dx$, se tiene que

$$\|T_n w_n\| = \|T_n(\mu_n \chi_\Omega)\| = |\mu_n| \|T_n \chi_\Omega\| \geq \gamma |\mu_n| = \frac{\gamma}{|\Omega|} |\mu_n| |\Omega| = \tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)},$$

donde $\tilde{\gamma} \doteq \frac{\gamma}{|\Omega|} > 0$ y $\|w_n\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |\mu_n \chi_\Omega(x)| dx = |\mu_n| \int_\Omega dx = |\mu_n| |\Omega|$. Por lo tanto $\|T_n w_n\| \geq \tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} > 0$.

Sean $M > 0$ una cota superior para $\|T\|$ y cada $\|T_n\|$ y $m > 0$ una cota superior para $\|y\|$ y cada $\|y_n\|$. Entonces, siguiendo los mismos pasos utilizados en la demostración del Lema 5.41 para probar (5.58) se obtiene ahora que

$$J_n(\tilde{u}_n) \geq \tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} \left(\tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} - 2(M C_1(p) J_0(\tilde{u}_n) + m) \right) + \alpha J_0(\tilde{u}_n) \quad (5.65)$$

y de aquí (analizando los dos casos análogos a los de la demostración del Lema 5.41) se obtiene la BV -coercitividad de $\{J_n\}$.

Resta probar que $\{J_n\}$ es BV -consistente para J . Para ello, sean $\tau > 0$ y $B_\tau = \left\{ u \in BV(\Omega) / \|u\|_{BV(\Omega)} \leq \tau \right\}$. Entonces para cualquier $u \in B_\tau$ se tiene que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{BV(\Omega)}$ (ver Teorema 5.24) y

$$\begin{aligned}
& |J_n(u) - J(u)| = \\
& = \left| \|T_n u - y_n\|^2 - \|Tu - y\|^2 \right| \quad (\text{por (5.64) y (5.49)}) \\
& = \left| \|T_n u - y - \xi_n\|^2 - \|Tu - y\|^2 \right| \quad (\text{pues } y_n = y + \xi_n) \\
& = \left| \|T_n u - Tu - \xi_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T_n u - Tu - \xi_n, Tu - y \rangle \right| \quad (\text{por (5.41)}) \\
& = \left| \|T_n u - Tu\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T_n u - Tu, \xi_n \rangle + \|\xi_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T_n u - Tu - \xi_n, Tu - y \rangle \right| \\
& \leq \|T_n - T\|^2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^2 + 2 \|T_n - T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} \|\xi_n\| + \|\xi_n\|^2 \\
& \quad + 2 \left(\|T_n - T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\xi_n\| \right) \left(\|T\| \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|y\| \right) \\
& \leq \underbrace{\|T_n - T\|}_{\rightarrow 0} \left(\underbrace{\|T_n - T\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{C^2 \tau^2}_{< \infty} + 2 \underbrace{C \tau}_{< \infty} + 2 \underbrace{\|T\|}_{< \infty} \underbrace{C^2 \tau^2}_{< \infty} + 2 \underbrace{C \tau}_{< \infty} \underbrace{\|y\|}_{< \infty} \right) \\
& \quad + \underbrace{\|\xi_n\|}_{\rightarrow 0} \left(\underbrace{\|\xi_n\|}_{\rightarrow 0} + 2 \underbrace{\|T\|}_{< \infty} \underbrace{C \tau}_{< \infty} + 2 \underbrace{\|y\|}_{< \infty} \right) \\
& \doteq \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

donde ε_n es independiente de $u \in B_\tau$. Así $J_n(u) \rightarrow J(u)$ uniformemente para u en B_τ . En consecuencia, la sucesión $\{J_n\}$ es BV -consistente para J , como se quería probar. Finalmente la convergencia de u_n a \bar{u} en $L^p(\Omega)$ se sigue del Teorema 5.33. \blacksquare

5.4 Convergencia de los minimizantes globales

En esta última sección abordaremos finalmente el estudio de la convergencia de las soluciones regularizadas obtenidas con los métodos de regularización por variación acotada. Al igual que en las secciones anteriores Ω denotará un subconjunto abierto, convexo y acotado en \mathbb{R}^d , con $d = 1, 2$ ó 3 , con frontera Lipschitz continua y $p \in \left[1, \frac{d}{d-1}\right]$. Supondremos el caso de un “problema exacto” de la forma

$$Tu = y, \quad (5.66)$$

con solución única $u_{ex} \in BV(\Omega)$. Además, consideraremos una sucesión de “problemas perturbados”

$$T_n u = y_n, \quad (5.67)$$

con soluciones aproximadas u_n (no necesariamente únicas) que se obtienen minimizando sobre $BV(\Omega)$ los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes igual a la norma BV , es decir

$$J_n(u) \doteq \|T_n u - y_n\|^2 + \alpha_n \|u\|_{BV(\Omega)}. \quad (5.68)$$

El siguiente teorema provee condiciones suficientes que garantizan la convergencia de u_n a u_{ex} .

Teorema 5.46. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal y acotado, $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ tal que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ en $\mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$, $y \in \mathcal{Y}$, $u_{ex} \in BV(\Omega)$ la única solución del problema (5.66), $\{y_n\} \subset \mathcal{Y}$ tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$ y $\frac{\|T_n u_{ex} - y_n\|^2}{\alpha_n}$ permanece acotado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como en (5.68) con minimizante global u_n (no necesariamente único) en $BV(\Omega)$.

(i) Si $p \in [1, \frac{d}{d-1})$ entonces $u_n \rightarrow u_{ex}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

(ii) Si $p = \frac{d}{d-1}$ entonces $u_n \xrightarrow{w} u_{ex}$ en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que

$$\|T_n u_{ex} - y_n\|^2 \leq M \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.69)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|T_n u_n - y_n\|^2 &\leq J_n(u_n) \quad (\text{por (5.68)}) \\ &\leq J_n(u_{ex}) \quad (\text{pues } u_n \text{ minimiza } J_n) \\ &= \|T_n u_{ex} - y_n\|^2 + \alpha_n \|u_{ex}\|_{BV(\Omega)}^2 \quad (\text{por (5.68)}) \\ &\leq \underbrace{\alpha_n}_{\rightarrow 0^+} \underbrace{(M + \|u_{ex}\|_{BV(\Omega)})}_{< \infty} \quad (\text{por (5.69)}) \\ &\rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty \quad (\text{pues } \alpha_n \rightarrow 0^+ \text{ y } u_{ex} \in BV(\Omega)) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|T_n u_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.70)$$

Además,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{BV(\Omega)} &\leq \frac{J_n(u_n)}{\alpha_n} \quad (\text{por (5.68) ya que } \alpha_n > 0) \\ &\leq \frac{J_n(u_{ex})}{\alpha_n} \quad (\text{pues } u_n \text{ minimiza } J_n) \\ &= \frac{\|T_n u_{ex} - y_n\|^2}{\alpha_n} + \|u_{ex}\|_{BV(\Omega)}^2 \quad (\text{por (5.68)}) \\ &\leq M + \|u_{ex}\|_{BV(\Omega)}^2 \quad (\text{por (5.69)}) \\ &\doteq \tilde{M} < \infty \quad (\text{pues } u_{ex} \in BV(\Omega)) \end{aligned}$$

y en consecuencia, $\{u_n\}$ es BV -acotada.

Queremos probar que $u_n \rightarrow u_{ex}$ en $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$). Supongamos por el absurdo que esto no es así. Entonces existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ tal que ninguna subsucesión de $\{u_{n_j}\}$ converge a u_{ex} (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$). Sin embargo, como esta subsucesión $\{u_{n_j}\}$ es BV -acotada, en virtud del Teorema 5.24

(Teorema 5.25 si $p = \frac{d}{d-1}$), contiene una subsucesión convergente en $L^p(\Omega)$ a algún $\hat{u} \in BV(\Omega)$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$). Volvemos a llamar con $\{u_{n_j}\}$ a esta subsucesión. Obviamente se debe verificar $\hat{u} \neq u_{ex}$.

Observar ahora que, para todo $v \in \mathcal{Y}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle T\hat{u} - y, v \rangle| &\leq |\langle T(\hat{u} - u_{n_j}), v \rangle| + |\langle (T - T_{n_j})u_{n_j}, v \rangle| + |\langle T_{n_j}u_{n_j} - y_{n_j}, v \rangle| \\ &\quad + |\langle y_{n_j} - y, v \rangle|. \end{aligned} \quad (5.71)$$

A continuación probaremos que cada uno de los cuatro términos en el lado derecho de (5.71) tienden a cero para $j \rightarrow \infty$. Para el primer y segundo término se tiene, respectivamente, que:

$$\begin{aligned} |\langle T(\hat{u} - u_{n_j}), v \rangle| &\leq \underbrace{\|T\|}_{<\infty} \underbrace{\|\hat{u} - u_{n_j}\|_{L^p(\Omega)}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|v\|}_{<\infty} \\ &\rightarrow 0 \text{ para } j \rightarrow \infty \text{ (pues } u_{n_j} \xrightarrow{L^p} \hat{u}, \text{ débilmente si } p = \frac{d}{d-1}) \end{aligned} \quad (5.72)$$

y

$$\begin{aligned} |\langle (T - T_{n_j})u_{n_j}, v \rangle| &\leq \underbrace{\|T - T_{n_j}\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|u_{n_j}\|_{L^p(\Omega)}}_{<\infty} \underbrace{\|v\|}_{<\infty} \\ &\rightarrow 0 \text{ para } j \rightarrow \infty \text{ (pues } \{u_n\} \text{ es } L^p\text{-acotada).} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Finalmente, para el tercer y cuarto término se tiene, respectivamente, que:

$$\begin{aligned} |\langle T_{n_j}u_{n_j} - y_{n_j}, v \rangle| &\leq \underbrace{\|T_{n_j}u_{n_j} - y_{n_j}\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|v\|}_{<\infty} \\ &\rightarrow 0 \text{ para } j \rightarrow \infty \text{ (por (5.70))} \end{aligned} \quad (5.74)$$

y

$$\begin{aligned} |\langle y_{n_j} - y, v \rangle| &\leq \underbrace{\|y_{n_j} - y\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|v\|}_{<\infty} \\ &\rightarrow 0 \text{ para } j \rightarrow \infty \text{ (pues } y_n \rightarrow y). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Así, por (5.72), (5.73), (5.74) y (5.75), los cuatro términos del lado derecho de (5.71) tienden a cero para $j \rightarrow \infty$, de donde se sigue que $\langle T\hat{u} - y, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{Y}$ y por lo tanto $T\hat{u} = y$, lo cual contradice la unicidad de la solución u_{ex} de (5.66). Esta contradicción proviene de haber supuesto que la sucesión $\{u_n\}$ no converge a u_{ex} en $L^p(\Omega)$. Luego, $u_n \rightarrow u_{ex}$ en $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$), como se quería probar. ■

Nos preguntamos ahora si, a los efectos de obtener el resultado de convergencia del teorema anterior, no sería suficiente con utilizar como penalizante la seminorma de variación acotada, es decir el funcional J_0 . Esta pregunta nos lleva a considerar el funcional $J_{n,0} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{n,0}(u) \doteq \|T_n u - y_n\|^2 + \alpha_n J_0(u). \quad (5.76)$$

Nuevamente, desde el punto de vista numérico-computacional tenemos el inconveniente que el funcional $J_{n,0}$ no es diferenciable pues, como ya mencionamos, el funcional J_0 no lo es. Por otro lado, la omisión de $\|u\|_{L^1(\Omega)}$ en el penalizante de $J_{n,0}$ podría, en principio, originar, como también se mencionó en la sección anterior, la ausencia de la propiedad de BV -coercitividad de $J_{n,0}$ (recordar que esta propiedad es necesaria para la existencia de minimizantes globales). En este sentido abordaremos entonces el problema de analizar la convergencia de los minimizantes globales de los funcionales que resultan de reemplazar el penalizante J_0 por perturbaciones diferenciables del mismo. Es decir, consideraremos el siguiente funcional definido sobre $L^p(\Omega)$, con valores sobre \mathbb{R} :

$$J_{n,\beta}(u) \doteq \|T_n u - y_n\|^2 + \alpha_n J_\beta(u), \quad (5.77)$$

donde $\beta \geq 0$ y J_β es la aproximación diferenciable a J_0 definida en (5.10). Con este funcional $J_{n,\beta}$ así definido podemos obtener entonces el mismo resultado de convergencia dado en el teorema anterior, como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 5.47. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal y acotado, $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ tal que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ en $\mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$, $|T_n \chi_\Omega| \geq \gamma > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathcal{Y}$, $u_{ex} \in BV(\Omega)$ la única solución del problema $Tu = y$, $\{y_n\} \subset \mathcal{Y}$ tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$ y $\frac{\|T_n u_{ex} - y_n\|^2}{\alpha_n}$ permanece acotado, $\beta \geq 0$, J_β como en (5.10) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_{n,\beta} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como en (5.77) con minimizante global u_n (no necesariamente único) en $BV(\Omega)$.

(i) Si $p \in [1, \frac{d}{d-1})$ entonces $u_n \rightarrow u_{ex}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

(ii) Si $p = \frac{d}{d-1}$ entonces $u_n \xrightarrow{w} u_{ex}$ en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Por hipótesis, existe $\tilde{M} > 0$ tal que

$$\frac{\|T_n u_{ex} - y_n\|^2}{\alpha_n} \leq \tilde{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.78)$$

Siguiendo los mismos pasos utilizados en la demostración del teorema anterior para probar (5.70), se tiene ahora que

$$\begin{aligned} \|T_n u_n - y_n\|^2 &\leq J_{n,\beta}(u_n) \quad (\text{por (5.77)}) \\ &\leq J_{n,\beta}(u_{ex}) \quad (\text{pues } u_n \text{ minimiza } J_{n,\beta}) \\ &= \|T_n u_{ex} - y_n\|^2 + \alpha_n J_\beta(u_{ex}) \quad (\text{por (5.77)}) \\ &\leq \|T_n u_{ex} - y_n\|^2 + \alpha_n \left(J_0(u_{ex}) + \sqrt{\beta} |\Omega| \right) \quad (\text{por (5.16)}) \\ &\leq \underbrace{\alpha_n}_{\rightarrow 0^+} \left(\tilde{M} + \underbrace{J_0(u_{ex}) + \sqrt{\beta} |\Omega|}_{< \infty} \right) \quad (\text{por (5.78)}) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad (\text{pues } \alpha_n \rightarrow 0^+ \text{ y } u_{ex} \in BV(\Omega)) \end{aligned} \quad (5.79)$$

y por lo tanto $\|T_n u_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En lo que sigue nos remitiremos en distintas ocasiones a las demostraciones del Lema 5.41 y del Teorema 5.45. Al igual que en el teorema anterior, probaremos en

primer lugar que $\{u_n\}$ es BV -acotada. Para ello, como $u_n \in BV(\Omega)$, escribiendo $u_n = v_n + w_n$ donde $w_n = \mu_n \chi_\Omega$ y $\int_\Omega v_n dx = 0$, y siguiendo los mismos pasos utilizados en la demostración del Lema 5.41 para la obtención de (5.56), se tiene ahora que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{BV(\Omega)} &= \|u_n\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n) \\
&= \|v_n + w_n\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n) \\
&\leq \|v_n\|_{L^1(\Omega)} + \|w_n\|_{L^1(\Omega)} + J_0(u_n) \\
&\leq \|w_n\|_{L^1(\Omega)} + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha_n} J_{n,0}(u_n) \quad (\text{por (5.76)}) \\
&\leq \|w_n\|_{L^1(\Omega)} + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha_n} J_{n,\beta}(u_n) \quad (\text{por (5.16)}), \quad (5.80)
\end{aligned}$$

donde $C_1(1) > 0$. Por otro lado, siguiendo ahora los mismos pasos utilizados en la demostración del Teorema 5.45 (puesto que los pasos son idénticos no los incluimos), las actuales hipótesis también implican (5.65), entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
J_{n,\beta}(u_n) &\geq J_{n,0}(u_n) \quad (\text{por (5.16)}) \\
&\geq \tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} \left(\tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} - 2(M C_1(p) J_0(u_n) + m) \right) + \alpha_n J_0(u_n), \quad (5.81)
\end{aligned}$$

donde $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{|\Omega|}$, $m, M, C_1(p)$ son constantes positivas. A continuación analizaremos los siguientes dos casos, análogos a los de la demostración del Lema 5.41 (observar que $\tilde{\gamma}$ cumple la función de la constante C_2 en esa demostración y recordar que M y m son cotas superior e inferior, respectivamente, para $\|T\|$ y $\|T_n\|$):

Caso 1) Si $\tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} - 2(M C_1(p) J_0(u_n) + m) \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
J_{n,\beta}(u_n) &\geq \tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} + \alpha_n J_0(u_n) \quad (\text{por (5.81)}) \\
&\geq \tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|w_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\tilde{\gamma}} J_{n,\beta}(u_n). \quad (5.82)$$

Con (5.82) en (5.80) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{BV(\Omega)} &\leq \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha_n} \right) J_{n,\beta}(u_n) \\
&\leq \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha_n} \right) J_{n,\beta}(u_{ex}) \quad (\text{pues } u_n \text{ minimiza } J_{n,\beta}) \\
&= \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha_n} \right) (\|T_n u_{ex} - y_n\|^2 + \alpha_n J_\beta(u_{ex})) \quad (\text{por (5.77)}) \\
&\leq \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} + \frac{C_1(1) + 1}{\alpha_n} \right) \alpha_n (\tilde{M} + J_\beta(u_{ex})) \quad (\text{por (5.78)}) \\
&= \left(\frac{\alpha_n}{\tilde{\gamma}} + C_1(1) + 1 \right) (\tilde{M} + J_0(u_{ex}) + \sqrt{\beta} |\Omega|) \quad (\text{por (5.16)}) \\
&\leq M_1 < \infty \quad (\text{pues } \{\alpha_n\} \text{ es acotada y } u_{ex} \in BV(\Omega)). \quad (5.83)
\end{aligned}$$

2) Si $\tilde{\gamma} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} - 2 (M C_1(p) J_0(u_n) + m) < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} &< \frac{1}{\tilde{\gamma}} (1 + 2 M C_1(p) J_0(u_n) + 2 m) \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 + 2 M C_1(p) \frac{1}{\alpha_n} J_{n,0}(u_n) + 2 m \right) \quad (\text{por (5.76)}) \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 + 2 M C_1(p) \frac{1}{\alpha_n} J_{n,\beta}(u_n) + 2 m \right) \quad (\text{por (5.16)}). \end{aligned} \quad (5.84)$$

Con (5.84) en (5.80) se obtiene que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{BV(\Omega)} &\leq \frac{1 + 2 m}{\tilde{\gamma}} + \left(\frac{2 M C_1(p)}{\tilde{\gamma}} + C_1(1) + 1 \right) \frac{1}{\alpha_n} J_{n,\beta}(u_n) \\ &\leq M_2 + M_3 \frac{1}{\alpha_n} (\|T_n u_{ex} - y_n\|^2 + \alpha_n J_\beta(u_{ex})) \quad (\text{por (5.77)}) \\ &\leq M_2 + M_3 \left(\tilde{M} + J_\beta(u_{ex}) \right) \quad (\text{por (5.78)}) \\ &\leq M_2 + M_3 \left(\tilde{M} + J_0(u_{ex}) + \sqrt{\beta} |\Omega| \right) \quad (\text{por (5.16)}) \\ &\doteq M_4 < \infty \quad (\text{pues } u_{ex} \in BV(\Omega)), \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde $K_1 \doteq \frac{1+2m}{\tilde{\gamma}}$ y $K_2 \doteq \frac{2M C_1(p)}{\tilde{\gamma}} + C_1(1) + 1$ son constantes positivas.

En ambos casos, de (5.83) y (5.85) se sigue que la sucesión $\{u_n\}$ es BV -acotada, como se quería probar.

Finalmente, la demostración de la convergencia de u_n a u_{ex} en $L^p(\Omega)$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$) es idéntica a la correspondiente demostración del Teorema 5.46, pues en ella no interviene el funcional $J_{n,\beta}$. Por este motivo no la incluimos. Esto concluye la demostración del teorema. \blacksquare

Finalizamos este capítulo presentando dos conjeturas relacionadas con la convergencia de los minimizantes de funcionales de Tikhonov-Phillips con penalizantes de tipo BV . Tales conjeturas surgen, como veremos, de modo muy natural a partir del análisis de los resultados conocidos para los métodos con penalizantes clásicos. Señalamos que estas conjeturas constituyen problemas abiertos sobre los cuales nos proponemos trabajar en el futuro.

En el Capítulo 3 (Teorema 3.1) vimos que el método clásico de regularización de Tikhonov-Phillips aplicado al problema $Tx = y$ es equivalente al problema de minimizar el funcional de Tikhonov-Phillips de la forma

$$J_\alpha^{TP}(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Además vimos que, en este caso particular donde el penalizante es $\|x\|^2$, el minimizante global del funcional J_α^{TP} (i.e la solución regularizada x_α) converge, para $\alpha \rightarrow 0^+$, a la solución de cuadrados mínimos de mínima norma x^\dagger . Es decir, probamos que

$$x_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} x^\dagger = T^\dagger y.$$

Por otro lado, en el Capítulo 4 estudiamos los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes asociados a seminormas inducidas por operadores diferenciales. Allí vimos (Teorema 4.15) que en el caso particular donde el penalizante es $\|Lx\|^2$, donde L es un operador diferencial, entonces bajo ciertas hipótesis generales, el minimizante global x_α del funcional de Tikhonov-Phillips generalizado

$$J_\alpha^L(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Lx\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(L)$$

converge, para $\alpha \rightarrow 0^+$, a la solución de cuadrados mínimos de mínima $\|Lx\|$ seminorma. Es decir, probamos que

$$x_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} x_L^\dagger = T_L^\dagger y.$$

Para el caso de penalizantes de tipo BV hemos probado sendos resultados de convergencia en los dos últimos teoremas de este capítulo bajo la hipótesis de que el problema $Tu = y$, donde $T \in \mathcal{L}(BV(\Omega), \mathcal{Y})$, tiene una solución exacta $u_{ex} \in BV(\Omega)$. Implícitamente hemos requerido que el dato exacto $y \in \mathcal{R}(T)$ y que el operador T sea inyectivo, en cuyo caso, obviamente, la solución exacta u_{ex} coincide con la solución de cuadrados mínimos de mínima BV norma. Denotemos ahora con J_α^{BV} a los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes de tipo BV , es decir

$$J_\alpha^{BV}(u) \doteq \|Tu - y\|^2 + \alpha W_{BV}(u), \quad u \in BV(\Omega), \quad (5.86)$$

donde $W_{BV}(u) = \|u\|_{BV(\Omega)}$ ó $W_{BV}(u) = J_0(u)$ ó $W_{BV}(u) = J_\beta(u)$. En los dos teoremas mencionados probamos que los minimizantes globales u_α^W de los funcionales J_α^{BV} convergen, para $\alpha \rightarrow 0^+$, a la solución exacta u_{ex} . Es decir, probamos que

$$u_\alpha^W \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} u_{ex}.$$

En ambos casos las hipótesis de inyectividad de T y de alcanzabilidad del dato y (i.e. $y \in \mathcal{R}(T)$) fueron fundamentales para obtener esos resultados.

A la luz del análisis precedente surgen entonces de manera natural los siguientes interrogantes y conjeturas:

- 1) Si T no es inyectivo y/o $y \notin \mathcal{R}(T)$, ¿es posible determinar condiciones sobre el operador T que garanticen que el problema $Tu = y$ tenga soluciones de cuadrados mínimos sobre $BV(\Omega)$? En tal caso, ¿es posible caracterizar al conjunto de las soluciones de cuadrados mínimos?
- 2) ¿Existen minimizantes globales de (5.86) sobre $BV(\Omega)$ cuando T no es inyectivo? Al respecto observar que el Teorema 5.34 requiere de la inyectividad de T mientras que el Teorema 5.43, para el caso de penalizantes $J_\beta(u)$, requiere que T no anule funciones constantes.
- 3) En el caso que el funcional (5.86) tenga un minimizante global u_α^W y el problema $Tu = y$ tenga soluciones de cuadrados mínimos, ¿converge u_α^W , para $\alpha \rightarrow 0^+$, a alguna de tales soluciones de cuadrados mínimos? En caso afirmativo ¿a cual solución de cuadrados mínimos converge? ¿Es posible caracterizarla? A la luz de

los resultados obtenidos para el caso de penalizantes de la forma $\|x\|^2$ y $\|Lx\|^2$ es razonable conjeturar que, en caso que u_α^W converja lo hará a la solución de cuadrados mínimos u^* que minimice el valor del penalizante $W(u)$.

Señalamos que hasta el presente no se conocen respuestas a ninguno de los interrogantes y conjeturas que acabamos de plantear.

Capítulo 6

Aplicaciones a restauración de imágenes

Si bien los resultados principales de esta tesis son eminentemente teóricos, consideramos importante la inclusión de este último capítulo cuyo objetivo fundamental es el de mostrar a través de ejemplos concretos el funcionamiento de los métodos estudiados en los capítulos precedentes. Señalamos, no obstante, que la inclusión de este capítulo persigue fundamentalmente un objetivo de completitud, seguramente parcial, y de ningún modo pretende exhibir un análisis exhaustivo de la utilización de los métodos de regularización en problemas concretos.

6.1 Problemas inversos en restauración de imágenes

El modelo matemático más usual para el proceso de degradación de una imagen está dado a través de la siguiente ecuación integral de Fredholm de primera clase:

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x, y, x', y') f(x', y') dx' dy' = g(x, y). \quad (6.1)$$

En esta ecuación $f(x, y)$ denota la intensidad del color de la imagen original en el punto (x, y) (para imágenes monocromáticas $f(x, y)$ es un escalar mientras que para imágenes en colores es un vector de dimensión 3 que contiene en cada componente las intensidades en, por ejemplo, las escalas rojo, verde y azul (RGB)). Análogamente $g(x, y)$ denota la intensidad del color de la imagen degradada. La función $k(x, y, x', y')$ se conoce como *núcleo de dispersión puntual* (“*point spread function*” o simplemente PSF). Denotando con $\Omega \doteq [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L^2(\Omega)$ y $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ al operador definido a través de la integral en (6.1), esto es,

$$[Kf](x, y) \doteq \int_0^1 \int_0^1 k(x, y, x', y') f(x', y') dx' dy', \quad (6.2)$$

el modelo para el proceso de degradación de imágenes se puede escribir simplemente como

$$Kf = g, \quad (6.3)$$

y el problema de restauración de imágenes consiste esencialmente en aproximar f conocidos el núcleo de dispersión puntual y la imagen degradada g o una versión contaminada con ruido de la misma.

En todos los casos de interés práctico, se tiene que la función de dispersión puntual $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ y muy a menudo es un núcleo de tipo convolución o espacialmente invariante, esto es, k es de la forma $k(x, y, x', y') = h(x - x', y - y')$, donde $h \in L^2(\Omega)$. Es bien sabido que, bajo estas hipótesis, el operador K definido en (6.2) es compacto y además, excepto en el caso de núcleos degenerados, de rango no cerrado de dimensión infinita (para el caso de núcleos espacialmente invariantes se dice que h es un núcleo degenerado si $h(x, y)$ se puede escribir en la forma $h(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(y)$, es decir h es combinación lineal finita de productos de funciones de x por funciones de y). Por lo tanto, en estos casos, la ecuación (6.3) es mal condicionada.

A continuación presentaremos tres ejemplos en los cuales una imagen original, degradada con un núcleo de dispersión puntual de tipo gaussiano de la forma $k(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2\sigma^2}}$, es restaurada utilizando algunos de los métodos estudiados en este trabajo de tesis.

Ejemplo 6.1. Para este ejemplo se utilizó la imagen de la Figura 6.1 para construir la imagen en escalas de grises que se muestra en la Figura 6.2 (a), la que constituye la imagen original $f(x, y)$. El tamaño de esta imagen es de 940×940 píxeles. Es oportuno señalar aquí, que en un problema concreto esta imagen es desconocida. En la Figura 6.2 (b) se muestra la imagen degradada con $\sigma = 20$ que es el dato de nuestro problema inverso. Las Figuras 6.3 (a), (b), (c) y (d) muestran las restauraciones obtenidas con los métodos de Tikhonov-Phillips (TP), Descomposición en Valores Singulares Truncada (TSVD), Showalter y Variación Acotada con penalizante J_0 , respectivamente. En todos los casos se utilizó $\alpha = 10^{-3}$. Observamos que las restauraciones obtenidas con los métodos tradicionales (TP, TSVD, Showalter) son relativamente aceptables en regiones en las cuales la imagen original es significativamente regular, pero en todos los casos los bordes asociados a regiones en las cuales la intensidad de la imagen original presenta gradientes marcados, aparecen suavizados o difundidos. Sin embargo, en la Figura 6.3 (d) se observa como el método de variación acotada detecta y preserva claramente tales bordes, no obstante, la restauración es de menor calidad en regiones en las cuales la imagen original es regular o el gradiente de intensidad es pequeño.



Figura 6.1: Imagen utilizada para construir el dato exacto del Ejemplo 6.1.



(a)



(b)

Figura 6.2: Imágenes para el Ejemplo 6.1: Imagen original en escala de grises (a), imagen degradada (dato del problema inverso) (b).



(a)



(b)



(c)



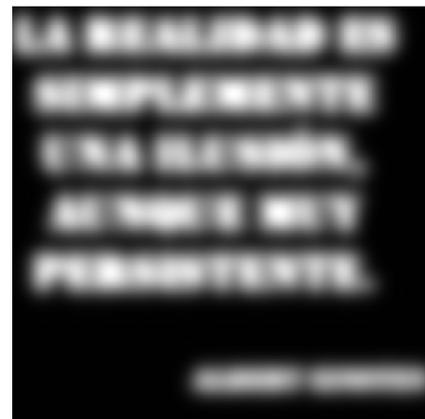
(d)

Figura 6.3: Imágenes restauradas para el Ejemplo 6.1 con: Método de Tikhonov-Phillips (a), Descomposición en Valores Singulares Truncada (b), Método de Showalter (c) y Método de Variación Acotada con penalizante Jo (d).

Ejemplo 6.2. En la Figura 6.4 (a) se muestra la imagen original para este ejemplo, de tamaño 455×455 píxeles. En la Figura 6.4 (b) se muestra la imagen degradada con $\sigma = 10$. En las Figuras 6.5 (a), (b), (c) y (d) se muestran las restauraciones obtenidas con los mismos cuatro métodos del Ejemplo 6.1. En todos los casos se utilizó $\alpha = 10^{-3}$. Nuevamente se observan las ventajas del Método de Variación Acotada (con penalizante J_0) en lo que respecta a detección de bordes.



(a)



(b)

Figura 6.4: Imágenes para el Ejemplo 6.2: Imagen original (a), imagen degradada (dato del problema inverso) (b).



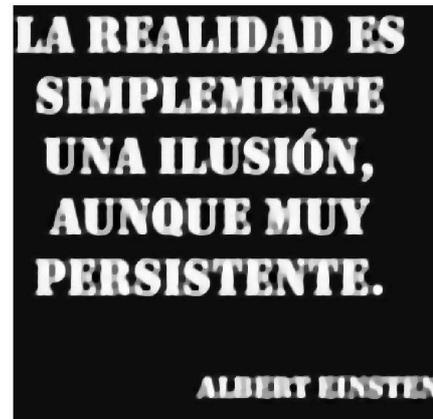
(a)



(b)



(c)



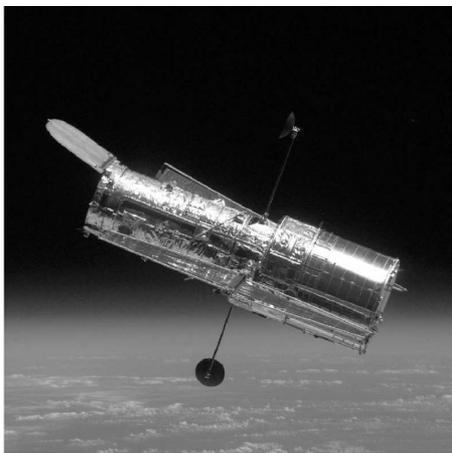
(d)

Figura 6.5: Imágenes restauradas para el Ejemplo 6.2 con: Método de Tikhonov-Phillips (a), Descomposición en Valores Singulares Truncada (b), Método de Showalter (c) y Método de Variación Acotada con penalizante Jo (d).

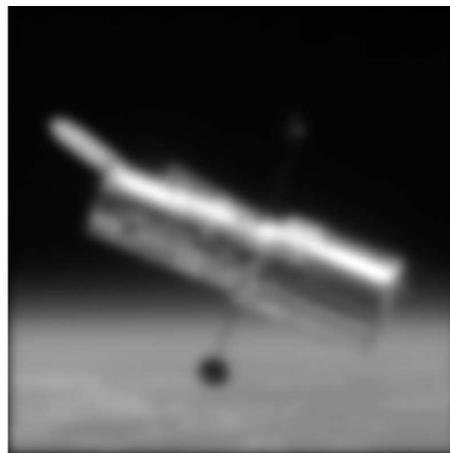
Ejemplo 6.3. En la Figura 6.6 se muestra una imagen del telescopio espacial Hubble en la que aparece como fondo el horizonte terrestre. Esta imagen fue utilizada para obtener la imagen original en escala de grises que se muestra en la Figura 6.7 (a), de tamaño 1500×1500 píxeles. En la Figura 6.7 (b) se muestra la imagen degradada con turbulencia atmosférica ($\sigma = 20$), la cual constituye el dato para el problema inverso de este ejemplo. En las Figuras 6.8 (a), (b), (c) y (d) se presentan las restauraciones obtenidas con los mismos métodos de los ejemplos anteriores. En todos los casos se utilizó $\alpha = 10^{-3}$. Una vez más observamos como el Método de Variación Acotada (con penalizante J_0) funciona mejor en la detección de bordes en regiones de intensidad con gradiente alto pero peor que los métodos clásicos en otras regiones.



Figura 6.6: Imagen utilizada para construir el dato exacto del Ejemplo 6.3.



(a)

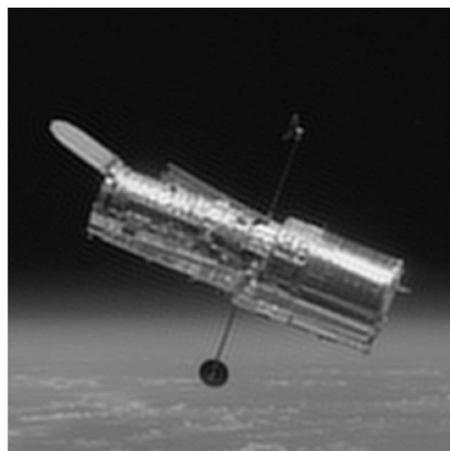


(b)

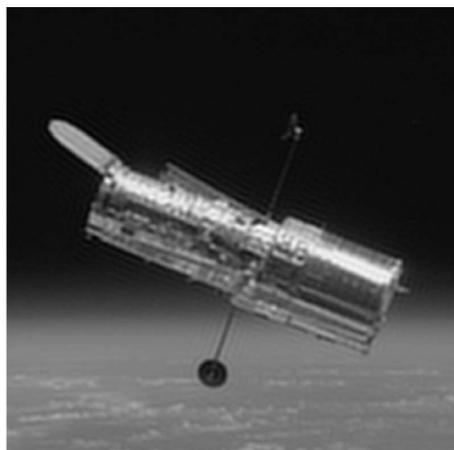
Figura 6.7: Imágenes para el Ejemplo 6.3: Imagen original en escala de grises (a), imagen degradada (dato del problema inverso) (b).



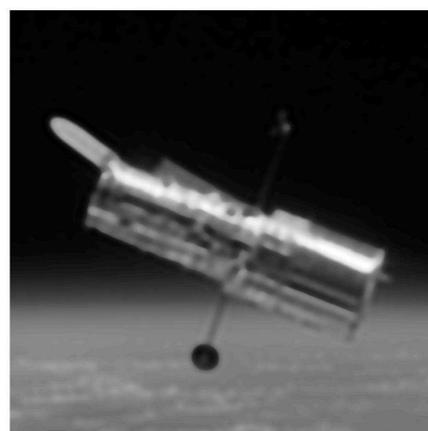
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.8: Imágenes restauradas para el Ejemplo 6.3 con: Método de Tikhonov-Phillips (a), Descomposición en Valores Singulares Truncada (b), Método de Showalter (c) y Método de Variación Acotada con penalizante J_α (d).

Como mencionamos al principio de este capítulo, el objetivo principal de los ejemplos presentados en este capítulo fue el de mostrar brevemente a través de problemas concretos, en este caso en el área de restauración de imágenes, las potenciales aplicaciones y utilidad de los métodos de regularización estudiados y, en particular de los métodos de penalización por variación acotada que se estudiaron en el Capítulo 5.

Capítulo 7

Conclusiones, aportes y trabajos futuros

7.1 Conclusiones

En este trabajo hemos presentado un estudio general sobre la teoría matemática de los métodos espectrales de regularización y de penalización por variación total para problemas inversos mal condicionados.

En el Capítulo 1 (“Preliminares”) se estudiaron en primer lugar la naturaleza y características de los problemas inversos y los postulados de Hadamard de buen condicionamiento (Sección 1.1). Se presentaron varios ejemplos de problemas inversos con el objeto de señalar y motivar la importancia práctica del estudio de los mismos. En segundo lugar se desarrolló en forma breve un marco adecuado para el estudio de las ecuaciones mal condicionadas con operadores lineales definidos en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Esto abarcó el estudio de la inversa generalizada de Moore-Penrose, su relación con las soluciones de cuadrados mínimos, su descomposición espectral en valores singulares para el caso de operadores compactos y el Criterio de Picard. En la Sección 1.2 se introdujeron los conceptos y elementos principales de la teoría matemática de regularización de problemas inversos lineales mal condicionados. Entre ellos se incluyeron los conceptos de regularización, solución regularizada, familia de operadores de regularización, parámetro de regularización, regla de elección de parámetro, método de regularización convergente y su relación con la inversa generalizada de Moore-Penrose. Se presentaron algunos resultados sobre convergencia para métodos de regularización en espacios de Hilbert. Posteriormente se procedió a abordar el estudio de órdenes de convergencia para métodos de regularización convergentes. Con este fin se introdujeron tres tipos de errores: error de regularización, error asociado al ruido y error total. Se estudiaron órdenes de optimalidad y su relación con conjuntos fuente definidos en términos de potencias fraccionarias de operadores y con supuestos de regularidad sobre las soluciones exactas. Se introdujeron los conceptos de método de regularización óptimo y de orden óptimo y se dieron condiciones suficientes para convergencia y convergencia de orden óptimo.

En el Capítulo 2 se estudiaron en detalle los métodos espectrales de regularización. En la Sección 2.1 se desarrolló un andamiaje matemático adecuado para la construcción de tales métodos que estuvo basada en la *Teoría Espectral* para operadores lineales y

autoadjuntos en espacios de Hilbert y en el *Cálculo Funcional* (Apéndice B). Se dieron condiciones suficientes para la convergencia de un método espectral de regularización y se proporcionaron dos estimaciones: una para la velocidad de convergencia del error asociado al ruido y la otra para el error de regularización, las que permitieron obtener estimaciones para el error total. En la Sección 2.2 se abordó el estudio de reglas de elección de parámetros “*a-priori*” que resultan en métodos espectrales de regularización de orden óptimo. Finalmente se presentaron dos ejemplos clásicos de métodos espectrales de regularización: el Método de Showalter y Descomposición en Valores Singulares Truncada, para los cuales se obtuvieron estimaciones del error asociado al ruido y del error total, y se construyeron reglas de elección de parámetros “*a-priori*” que resultan en métodos espectrales de regularización de orden óptimo. En la Sección 2.3 se introdujeron los conceptos de calificación y saturación para métodos espectrales de regularización, comentándose brevemente sobre el estado del arte sobre estos temas. Se observó que los métodos de Showalter y Descomposición en Valores Singulares Truncada no tienen calificación clásica y no saturan. En la Sección 2.4 se presentaron algunos resultados recíprocos (para regularización con dato exacto) derivados de la teoría de saturación de métodos espectrales de regularización, en los que se dedujeron condiciones de regularidad de la solución exacta a partir del conocimiento de cierto orden de convergencia para el error de regularización. En la Sección 2.5 se estudiaron las reglas de elección de parámetros “*a-posteriori*”, en particular la dada a través del Principio de Discrepancia de Morozov. Asimismo se estudiaron propiedades de convergencia y optimalidad de métodos espectrales de regularización en los cuales la regla de elección de parámetros es la dada por el Principio de Discrepancia de Morozov. En la Sección 2.6 se presentó una breve descripción de dos reglas de elección de parámetro heurísticas: Validación Cruzada Generalizada y el Método de la Curva L.

En el Capítulo 3 se introdujo el método clásico de regularización de Tikhonov-Phillips. En primer lugar se presentó el método como un caso particular de un método espectral de regularización y a continuación se procedió a mostrar que el mismo posee una formulación equivalente como un problema de optimización sin restricciones (más precisamente se demostró que las soluciones regularizadas obtenidas con dicho método minimizan el funcional de Tikhonov-Phillips). Para tales métodos se encontraron condiciones suficientes sobre reglas de elección de parámetro “*a-priori*” que garantizan la convergencia a cero del error total. Finalmente se analizaron algunos resultados de convergencia, optimalidad y resultados recíprocos para este método particular y se demostró que el mismo tiene calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$.

La inclusión de los Capítulos 1 a 3 de esta tesis tuvo dos objetivos principales. El primero de ellos fue tratar de reflejar el estado del arte sobre el tratamiento matemático de los problemas inversos mal condicionados, de los métodos de regularización en general y en particular de los métodos espectrales de regularización. El segundo objetivo fue introducir un andamiaje matemático adecuado para el tratamiento de los problemas y temas que se abordaron en los capítulos siguientes. Si bien el estudio formal de todas las herramientas matemáticas necesarias e imprescindibles para un tratamiento adecuado de estos problemas es bastante moderna, es oportuno señalar que la mayoría de los resultados contenidos en estos tres capítulos no son nuevos. Sin embargo, las demostraciones y desarrollos allí incluidos (como así también en el resto de este trabajo) son propios.

7.2 Aportes

En el Capítulo 3 se presentó una formulación equivalente del clásico método espectral de regularización de Tikhonov-Phillips como un problema de optimización sin restricciones. Allí se probó que las soluciones regularizadas con este método minimizan el funcional de Tikhonov-Phillips con penalizante $\|x\|^2$. El análisis allí efectuado fue de fundamental importancia pues, como se vio, constituyó las bases para los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados con diferentes tipos de penalizantes, los cuales fueron estudiados en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 4 se introdujeron los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados para el caso particular de penalizantes asociados a seminormas inducidas por operadores diferenciales. En la Sección 4.1 se construyó un andamiaje matemático apropiado para el estudio y construcción de la inversa generalizada ponderada y se mostró su relación con la solución de cuadrados mínimos que minimiza la seminorma inducida por el correspondiente operador diferencial L . En la Sección 4.2 se procedió a aproximar la solución de cuadrados mínimos de mínima $\|L\cdot\|$ seminorma, con un enfoque diferente al utilizado para los métodos espectrales de regularización estudiados en los capítulos anteriores. Con este fin se demostró la “*ley de orden inverso*” para la inversa generalizada de un operador producto, se construyó una familia de operadores de regularización para la inversa generalizada ponderada y se presentaron condiciones suficientes para que tal familia sea una regularización para la inversa generalizada ponderada (i.e. condiciones que garantizan la convergencia de las soluciones regularizadas a la solución exacta). Posteriormente se hallaron condiciones que aseguran un cierto orden de convergencia de las soluciones regularizadas, en términos de conjuntos fuente. En la Sección 4.3 se estudió en detalle el método de Tikhonov-Phillips para estos tipos de penalizantes. En primer lugar se probó que las soluciones regularizadas con dicho método son soluciones de una “*ecuación normal regularizada*” y en segundo lugar que ellas también son soluciones de un problema de optimización sin restricciones, análogo al obtenido en el Capítulo 3 en el caso particular en que $L = I$ es el operador identidad (más precisamente se demostró que minimizan el funcional de Tikhonov-Phillips generalizado).

En el Capítulo 5 se estudiaron en profundidad los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados en espacios de funciones, para el caso particular en que el penalizante es la norma o la seminorma de variación acotada. En la Sección 5.1 se introdujeron los conceptos, definiciones y resultados preliminares, con el fin de proveer un andamiaje matemático adecuado para los desarrollos ulteriores de este capítulo. En particular se definió una aproximación diferenciable para la seminorma de variación acotada ((5.10) y Teorema 5.6) y se probó que la misma es convexa (Teorema 5.7) y débilmente semi-continua inferiormente (Teorema 5.11). Se introdujo el concepto de convergencia intermedia (Definición 5.15) y se probó que este tipo de convergencia es más fuerte que la convergencia débil pero más débil que la convergencia fuerte en $BV(\Omega)$ (Proposición 5.16). Este nuevo concepto nos permitió aproximar una función de variación acotada por una sucesión de funciones de variación acotada infinitamente diferenciables (Lema 5.17) y extender un Teorema de Inmersión de Sobolev (Teorema 5.19) del espacio $W^{1,1}(\Omega)$ al espacio $BV(\Omega)$ (Teorema 5.20). A continuación se introdujo el concepto de p -convergencia intermedia (Definición 5.21) y se probó un resultado de

aproximación de funciones de variación acotada por funciones infinitamente diferenciables de variación acotada en el sentido de esta p -convergencia intermedia (Lema 5.22). También se extendió el Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov (Teorema 5.23) del espacio $W^{1,1}(\Omega)$ al espacio $BV(\Omega)$ mediante el cual se probó que el espacio $BV(\Omega)$ está compactamente inmerso en $L^p(\Omega)$ (Teorema 5.24). También se probó que cuando la dimensión d del espacio es mayor o igual que dos, $BV(\Omega)$ está débilmente compactamente inmerso en $L^p(\Omega)$ (Teorema 5.25). Todos estos resultados fueron de fundamental importancia para la derivación de los teoremas de existencia, unicidad y estabilidad para los métodos BV que se presentaron en la Sección 5.2. En particular, en la Sección 5.2, en primer lugar se introdujo el concepto de BV -coercitividad para un funcional y para una sucesión de funcionales, y se probaron resultados de existencia, unicidad (Teorema 5.30) y estabilidad (Teorema 5.33) para funcionales generales definidos sobre $L^p(\Omega)$. En segundo lugar se probaron resultados de existencia y unicidad (Proposición 5.34) de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizante igual a la norma BV . También se probaron varios resultados de estabilidad para los minimizantes globales de tales funcionales (Proposiciones 5.36, 5.37, 5.38, 5.39 y 5.40) bajo perturbaciones en el dato, en el parámetro de regularización, en el funcional penalizante y en el operador, de manera separada y simultánea. En la Sección 5.3 se probaron resultados de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados donde el penalizante es la seminorma BV , es decir el funcional J_0 . En primer lugar, se probó una condición suficiente para garantizar la BV -coercitividad del funcional de Tikhonov-Phillips generalizado, con penalizante dado por una perturbación diferenciable de la seminorma BV (Lema 5.41). En segundo lugar, se obtuvo una condición suficiente que garantiza la existencia de minimizantes globales para tales funcionales (Teorema 5.43). Por último, se analizó un resultado de estabilidad para los minimizantes globales del funcional antes mencionado, bajo perturbaciones simultáneas en el operador y en el dato (Teorema 5.45). Finalmente, en la Sección 5.4 se estudió la convergencia de las soluciones regularizadas obtenidas con los métodos de regularización por variación acotada. Se probaron condiciones suficientes que garantizan la convergencia de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados a la solución exacta del problema, para el caso en que el penalizante es la norma BV o perturbaciones diferenciables de la seminorma BV (Teoremas 5.46 y 5.47).

Finalmente en el Capítulo 6 se presentaron varias aplicaciones de los métodos estudiados en el presente trabajo a problemas de restauración de imágenes.

7.3 Trabajos futuros

A partir de este trabajo de tesis surgen de manera directa o indirecta diversas líneas de trabajo, especialmente algunas relacionadas con la profundización del estudio de ciertos conceptos, diversos problemas abiertos y conjeturas, muchos de los cuales fueron mencionados oportunamente a lo largo de este trabajo. En este sentido mencionamos a continuación algunas de estas líneas que son de particular interés y sobre las cuales continuaremos investigando en el futuro:

- Estudio, derivación e implementación computacional de reglas de elección de

parámetro para métodos de regularización.

- Profundización de los conceptos de calificación y saturación para métodos espectrales de regularización.
- Estudio de los niveles de calificación (óptimo, débil y fuerte) para métodos espectrales de regularización.
- Estudio del concepto de saturación global para métodos espectrales de regularización.
- Estudio del método de Showalter utilizando la Teoría de Semigrupos.
- Obtención de condiciones sobre el operador T que garanticen que el problema $Tu = y$, donde $T : BV(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ no es inyectivo y/o $y \notin \mathcal{R}(T)$, tenga soluciones de cuadrados mínimos sobre $BV(\Omega)$. En tal caso, caracterizar al conjunto de soluciones de cuadrados mínimos¹. Notar que es imposible definir la inversa generalizada de Moore-Penrose para T , dado que el espacio de Banach $BV(\Omega)$ no es de Hilbert.
- Estudio del problema de existencia de minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes de tipo BV sobre $BV(\Omega)$, cuando el operador $T : BV(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ no es inyectivo.
- En el caso que en que el funcional de Tikhonov-Phillips generalizado con penalizantes de tipo BV tenga un minimizante global u_α^W y el problema $Tu = y$ tenga soluciones de cuadrados mínimos, analizar la convergencia de u_α^W , para $\alpha \rightarrow 0^+$, a alguna de tales soluciones de cuadrados mínimos. En caso afirmativo, caracterizar la solución de cuadrados mínimos límite.

CONJETURA: si u_α^W converge, para $\alpha \rightarrow 0^+$, lo hará a la solución de cuadrados mínimos u^* que minimice el valor del penalizante $W(u)$.

- Estudio de los métodos de Tikhonov-Phillips generalizados para penalizantes arbitrarios. Obtención de condiciones que garanticen existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales de la forma

$$J_\alpha^W(u) \doteq \|Tu - y\|^2 + \alpha W(u), \quad u \in \mathcal{D}(W),$$

donde $\mathcal{D}(W)$ es el dominio del funcional W . Análisis de resultados de estabilidad para los minimizantes globales del funcional J_α^W , bajo diferentes perturbaciones.

- Estudio de los métodos de regularización iterativos.

¹Recordar que para \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ el conjunto de soluciones de cuadrados mínimos de $Tx = y$, que notamos S_y , es no vacío sí y sólo si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$, en cuyo caso $S_y = x^\dagger + \mathcal{N}(T)$.

Apéndice A

Resultados básicos de Análisis Funcional

En éste apéndice se proporcionará la fundamentación teórica de la tesis. La mayor parte del contenido es análisis funcional básico, pero muy importante no sólo en este trabajo sino cuando se trate con *problemas inversos mal condicionados* en general, y puede encontrarse en cualquier libro sobre este tema. No se incluirán las demostraciones de los teoremas y de las propiedades (ver por ejemplo: G. Bachman y L. Narici [5], J. Conway [12], W. Rudin [58] y J. Weidmann [76], para las demostraciones e información adicional). A su vez, gran parte de la notación empleada en la tesis también será introducida aquí.

A.1 Espacios normados

Uno de los objetivos de esta sección es proporcionarle continuamente estructura a un espacio vectorial hasta que tenga todas las propiedades necesarias para nuestro posterior uso.

A.1.1 Teoría general

Comenzaremos recordando previamente algunas definiciones básicas, en el convencimiento que el lector seguramente está familiarizado con la mayoría de ellas.

Definición A.1. (ESPACIO VECTORIAL)

Un *espacio vectorial* \mathcal{V} sobre un campo \mathbb{k} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) es un conjunto no vacío \mathcal{V} con un mapeo de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ en \mathcal{V} tal que $(x, y) \mapsto x + y$, llamado *suma*, y un mapeo de $\mathbb{k} \times \mathcal{V}$ en \mathcal{V} tal que $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, llamado *producto por escalar*. Estos mapeos satisfacen las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$:

- (i) $x + y = y + x$ (propiedad conmutativa);
- (ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (propiedad asociativa);
- (iii) Existe un único elemento $0 \in \mathcal{V}$ tal que $x + 0 = x$ (existencia del elemento neutro);

- (iv) Para cada $x \in \mathcal{V}$, existe un único elemento $x' \in \mathcal{V}$ tal que $x + x' = 0$ (existencia de un inverso);
- (v) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- (vii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
- (viii) $1x = x$, donde 1 es el elemento unidad del campo \mathbb{k} .

Un espacio vectorial se denota con la cuaterna $(\mathcal{V}, +, \mathbb{k}, \cdot)$. Otros términos usados son *espacio vectorial lineal* o *espacio lineal*. A los elementos del espacio vectorial se los llama *vectores* y a los elementos del campo *escalares*.

Diremos que $(\mathcal{V}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un *espacio vectorial real*, y que $(\mathcal{V}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ es un *espacio vectorial complejo*.

Definición A.2. (SUBESPACIO VECTORIAL)

Sean \mathcal{V} es un espacio vectorial sobre \mathbb{k} y \mathcal{S} un subconjunto no vacío de \mathcal{V} . Diremos que \mathcal{S} es un **subespacio vectorial** de \mathcal{V} si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \forall x, y \in \mathcal{S} : \alpha x + \beta y \in \mathcal{S}.$$

(Es decir, \mathcal{S} es cerrado bajo la suma y el producto por escalar; y así también es, bajo las mismas operaciones, un espacio vectorial sobre \mathbb{k}).

Definición A.3. (CONJUNTO CONVEXO)

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{k} . Un conjunto $C \subset \mathcal{V}$ es **convexo** si

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

Obviamente que todo subespacio de \mathcal{V} es un conjunto convexo.

Definición A.4. (COMBINACIÓN LINEAL)

Una **combinación lineal** de vectores x_1, x_2, \dots, x_n de un espacio vectorial \mathcal{V} (sobre \mathbb{k}) es una expresión de la forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, donde los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$.

Definición A.5. (SUBESPACIO GENERADO)

Sea M un subconjunto no vacío del espacio vectorial \mathcal{V} . El **subespacio generado** por M , denotado por $\text{span } M$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de M , es decir

$$\text{span } M \doteq \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{k} \wedge x_i \in M \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Obviamente que éste es un subespacio vectorial de \mathcal{V} , y se puede demostrar que es el menor (con respecto a la inclusión de conjuntos) subespacio vectorial que contiene a M .

Notar que una combinación lineal siempre es una suma finita, lo cual significa que, aún cuando pueda haber un número infinito de vectores en M , nunca expresaremos un vector como una suma infinita. Sumas infinitas no tienen significado a menos que la noción de “límite de una sucesión” se haya introducido, de algún modo, en el espacio.

Definición A.6. (DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL)

- (i) Sean \mathcal{V} espacio vectorial sobre \mathbb{k} y $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{V}$. Diremos que M es **linealmente dependiente** si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. En caso contrario, M es **linealmente independiente**.
- (ii) Sean \mathcal{V} espacio vectorial sobre \mathbb{k} y M un subconjunto cualquiera de \mathcal{V} . Diremos que M es **linealmente independiente** si todo subconjunto finito de M es linealmente independiente. En caso contrario, M es **linealmente dependiente**.

Definición A.7. (DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL)

Si el espacio vectorial \mathcal{V} está generado por un conjunto finito M de n vectores linealmente independientes, diremos que \mathcal{V} tiene **dimensión finita** n . Si no existe un conjunto finito de vectores tal que $\mathcal{V} = \text{span } M$, decimos que \mathcal{V} tiene **dimensión infinita**.

Si \mathcal{V} es un espacio vectorial, $A, B \subset \mathcal{V}$ no vacíos y $x \in \mathcal{V}$, usaremos en la tesis los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A + B &\doteq \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \\ x + A &\doteq \{x + a \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

Definición A.8. (SUMA DIRECTA)

Sean \mathcal{V} espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de \mathcal{V} tales que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Entonces $W_1 + W_2$ es una **suma directa**, y la notaremos $W_1 \dot{+} W_2$, si cada elemento de $W_1 + W_2$ tiene una representación única de la forma $w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$.

Definición A.9. (NORMA)

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{k} . Una **norma** sobre \mathcal{V} es un mapeo

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty),$$

que satisface las siguientes condiciones para todo $x, y \in \mathcal{V}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{k}$:

- (i) $\|x\| \geq 0$ y $(\|x\| = 0 \iff x = 0)$ (definida positiva);
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogeneidad positiva);
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Diremos que $x \in \mathcal{V}$ es un **vector unitario** si $\|x\| = 1$.

La siguiente propiedad se deduce fácilmente de (iii) y vale para todo $x, y \in \mathcal{V}$:

- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (segunda desigualdad triangular).

En toda la tesis y para distinciones más precisas, ocasionalmente las normas serán denotadas con subíndices diferentes para distinguirlas entre ellas, por ejemplo $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$, $\|\cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot\|_{L^1(a,b)}$, etc.

Definición A.10. (SEMINORMA)

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{k} . Una **seminorma** sobre \mathcal{V} es un mapeo

$$p : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty),$$

que satisface las siguientes condiciones para todo $x, y \in \mathcal{V}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{k}$:

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
- (ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

De la definición se sigue que $p(x) \geq 0$ y $p(0) = 0$. Sin embargo, no se puede asegurar que $p(x) = 0$ implica $x = 0$.

Definición A.11. (ESPACIO NORMADO)

Un **espacio normado** es un espacio vectorial \mathcal{X} (sobre \mathbb{k}) con una norma $\|\cdot\|$ definida sobre él, que se denota $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Si el significado es claro en el contexto, simplemente diremos que \mathcal{X} es un espacio normado.

Si $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y \mathcal{S} es un subespacio vectorial de \mathcal{X} , entonces la restricción de $\|\cdot\|$ a \mathcal{S} , $\|\cdot\|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$, es una norma sobre \mathcal{S} . Así, \mathcal{S} se transforma de manera natural en un espacio normado, $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$.

A.1.2 Nociones topológicas

Todo espacio normado \mathcal{X} induce una topología dada por la norma, es decir, podemos definir conjuntos abiertos, cerrados y compactos; sucesiones convergentes; funciones continuas; etc.

Denotaremos en tales espacios a la bola con centro en $x \in \mathcal{X}$ y radio de longitud $r > 0$ como

$$B_r(x) \doteq \{y \in \mathcal{X} / \|x - y\| < r\} \tag{A.1}$$

y con $\overline{B_r(x)}$ a la clausura de ella, es decir

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathcal{X} / \|x - y\| \leq r\}. \tag{A.2}$$

Definición A.12. (CONJUNTO ACOTADO, ABIERTO, CERRADO)

Sean \mathcal{X} un espacio normado sobre \mathbb{k} y $M \subset \mathcal{X}$. Diremos que:

- (i) M es **acotado** si existe $r > 0$ tal que $M \subset B_r(x)$.

- (ii) M es **abierto** si para todo $x \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset M$.
- (iii) M es **cerrado** si el complemento, $\mathcal{X} \setminus M$, es abierto.

Definición A.13. (SUCESIÓN ACOTADA, CONVERGENTE, DE CAUCHY)

Sean \mathcal{X} un espacio normado sobre \mathbb{k} y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$. Diremos que:

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **acotada** si existe $c > 0$ tal que $\|x_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **convergente** si existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. El límite de la sucesión se indica $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ o escribimos $x_n \rightarrow x$ para $n \rightarrow \infty$.
- (iii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.

Definición A.14. (CLAUSURA DE UN CONJUNTO; CONJUNTO COMPACTO, DENSO Y RELATIVAMENTE COMPACTO)

Sean \mathcal{X} un espacio normado sobre \mathbb{k} y $M, N \subset \mathcal{X}$.

- (i) El **interior** de M , denotado por M^0 , se define como

$$M^0 \doteq \{x \in M \mid \exists \epsilon > 0 \text{ con } B(x, \epsilon) \subset M\}.$$

- (ii) La **clausura** de M , denotado por \overline{M} , se define como

$$\overline{M} \doteq \left\{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M \text{ con } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right\}.$$

Es decir, es el conjunto de todos los puntos límites de sucesiones en M . Se puede probar que \overline{M} es el menor subconjunto (con respecto a la inclusión) cerrado de \mathcal{X} que contiene a M .

Esto nos permite dar la siguiente definición alternativa de conjunto acotado:

- (iii) M es **acotado** si $\sup \{\|x\| \mid x \in \overline{M}\} < \infty$.
- (iv) M es **compacto** si toda sucesión en M contiene una subsucesión que converge a un elemento de M .
- (v) M es **denso** en \mathcal{X} si $\overline{M} = \mathcal{X}$. Es decir,

$$\forall x \in \mathcal{X} \wedge \forall \epsilon > 0 \exists x_M \in M : \|x - x_M\| < \epsilon.$$

- (vi) M es **relativamente compacto** si \overline{M} es compacto.
- (vii) M es **denso** en N si $N \subset \overline{M}$.

En general, las propiedades topológicas dependen de la norma en \mathcal{X} . Sin embargo, para espacios de dimensión finita, estas propiedades son independientes de la norma. Esto puede observarse del siguiente teorema:

Definición A.15. (NORMAS EQUIVALENTES)

Sean \mathcal{X} un espacio normado sobre \mathbb{k} y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas definidas en él. Diremos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son **normas equivalentes** si existen constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tales que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Teorema A.16. ([5]) Sean \mathcal{X} un espacio normado sobre \mathbb{k} de dimensión finita, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas en él. Entonces, ambas normas son equivalentes. En otras palabras, toda bola con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ contiene una bola con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$ y viceversa. Por ello, ambas normas inducen la misma topología.

Reuniremos propiedades adicionales en el siguiente teorema:

Teorema A.17. ([5]) Sean \mathcal{X} un espacio normado sobre \mathbb{k} y $M \subset \mathcal{X}$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

- (i) M es cerrado si y sólo si $\overline{M} = M$. Alternativamente, M es cerrado si y sólo si toda sucesión convergente en M tiene su punto límite en M .
- (ii) M es abierto si y sólo si $M^0 = M$.
- (iii) \overline{M} es cerrado y $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.
- (iv) Si M es convexo entonces \overline{M} también es convexo.
- (v) Si M es un subespacio de \mathcal{X} entonces \overline{M} también es un subespacio de \mathcal{X} .
- (vi) En espacios vectoriales de dimensión finita, todo subespacio es cerrado.
- (vii) Todo conjunto compacto es cerrado y acotado.

En espacios de dimensión finita, el recíproco de (vii) también es verdadero:

- (viii) **Teorema de Bolzano-Weierstrass:** En un espacio normado de dimensión finita, todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

Definición A.18. (ESPACIO SEPARABLE)

Un espacio normado \mathcal{X} es **separable** si contiene un subconjunto denso y numerable.

Una propiedad crucial del conjunto de los números reales es su *completitud*, pues toda sucesión de Cauchy en \mathbb{R} es convergente. Desafortunadamente, esto no es cierto para espacios normados en general. En análisis funcional es una hipótesis necesaria para muchos resultados.

Definición A.19. (ESPACIO COMPLETO, ESPACIO DE BANACH)

- (i) Un espacio normado \mathcal{X} es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente en \mathcal{X} .
- (ii) Un espacio de **Banach** es un espacio normado completo.

A.1.3 Espacios de Hilbert

Teoría General

Un espacio de Banach generaliza la noción de \mathbb{R}^n como un espacio vectorial con una función longitud, pero para generalizar la útil propiedad geométrica de ortogonalidad necesitamos una estructura extra.

Continuaremos ahora aplicando estructura a un espacio vectorial introduciendo productos internos. Éste permitirá, entre otras cosas, definir cuando dos vectores son ortogonales.

Definición A.20. (PRODUCTO INTERNO)

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{k} . Un **producto interno** sobre \mathcal{V} es un mapeo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{k}$$

con las siguientes propiedades, válidas para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{k}$:

- (i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- (iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $(\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0)$.

Si el espacio vectorial es real, el mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una función con valores reales que satisface las propiedades (i) - (iv), excepto que (iii) debe ser escrita sin la barra de conjugado sobre $\langle y, x \rangle$. Notar que, aunque el espacio vectorial sea complejo, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ por la propiedad (iii).

Al igual que para las normas, ocasionalmente los productos internos serán denotados con subíndices diferentes para distinguirlos entre sí.

Las siguientes propiedades se derivan fácilmente de (i) - (iii) y valen para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{k}$:

- a) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;
- b) $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ (donde la barra sobre α es omitida si el espacio vectorial es real).

Definición A.21. (ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO)

Un **espacio con producto interno** o un **espacio pre-Hilbert** es un espacio vectorial \mathcal{V} (sobre \mathbb{k}) con un producto interno definido sobre él, que se denota $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Usando el producto interno, podemos transformar un espacio con producto interno en un espacio normado, $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, definiendo la **norma inducida** como

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

la cual está bien definida; es una norma para cualquier espacio vectorial \mathcal{X} . Es decir, satisface (i) - (iv) de la Definición A.20 y todas las propiedades, definiciones y teoremas que involucran una norma. Además, satisface las siguientes propiedades para todo $x, y \in \mathcal{X}$:

- a) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Desigualdad de Cauchy - Schwarz);
- b) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ (Fórmula del Binomio);
- c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Ley del Paralelogramo);
- d) $\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$, entonces $z = 0$.

Definición A.22. (VECTORES ORTOGONALES)

Sea \mathcal{X} un espacio con producto interno. Diremos que $x, y \in \mathcal{X}$ son **vectores ortogonales**, que denotamos $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.

Note que, por las propiedades del producto interno, $x \perp y$ es equivalente a $y \perp x$; también que, $x \perp 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Cuando los vectores son ortogonales, la Fórmula del Binomio se reduce al enunciado generalizado del siguiente teorema

Teorema A.23. (TEOREMA DE PITÁGORAS)

Sea \mathcal{X} un espacio con producto interno. Entonces

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

El recíproco del teorema también vale.

La noción de ortogonalidad puede ser extendida a subconjuntos en la siguiente forma:

Definición A.24. (CONJUNTO ORTOGONAL, ORTONORMAL; CONJUNTOS ORTOGONALES; COMPLEMENTO ORTOGONAL)

Sean \mathcal{X} un espacio con producto interno y $M, N \subset \mathcal{X}$ no vacíos. Diremos que:

- (i) M es un **conjunto ortogonal** si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x, y \in M$ con $x \neq y$. Si además, $\langle x, x \rangle = 1$ para todo $x \in M$, M es un **conjunto ortonormal**. En otras palabras, un conjunto es ortonormal si sus vectores son unitarios mutuamente ortogonales.
- (ii) M y N son **ortogonales**, en símbolos $M \perp N$, si $\langle x, y \rangle = 0$ para todos $x \in M$, $y \in N$.
- (iii) El **complemento ortogonal** de M , denotado por M^\perp , se define como

$$M^\perp = \{x \in \mathcal{X} / \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M\}.$$

Es decir, es el conjunto de vectores que son ortogonales a todos los elementos de M . Si un elemento $x \in M^\perp$, esto es $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M$, diremos que x es **ortogonal** a M y lo notaremos $x \perp M$.

Propiedades adicionales se reúnen en el siguiente teorema:

Teorema A.25. ([76]) Sean \mathcal{X} un espacio con producto interno y $M, N \subset \mathcal{X}$ no vacíos:

- i) $\{0\}^\perp = \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^\perp = \{0\}$, es decir, 0 es el único elemento ortogonal a todo elemento del espacio \mathcal{X} .
- ii) M^\perp es un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{X} , y vale que $M \subset (M^\perp)^\perp$.
- iii) Si $M \subset N$ entonces $N^\perp \subset M^\perp$.

Definición A.26. Sea \mathcal{X} un espacio con producto interno y sean \mathcal{V} y \mathcal{W} dos subespacios de \mathcal{X} con $\mathcal{V} \perp \mathcal{W}$ (entonces tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{0\}$). En este caso, la suma directa $\mathcal{V} \dot{+} \mathcal{W}$ se llama **suma directa ortogonal** y la notamos $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

El motivo principal de algunas de las definiciones dadas hasta aquí ha sido procurar definir un *espacio de Hilbert*, cuya estructura es relevante en ésta tesis:

Definición A.27. (ESPACIO DE HILBERT)

Un **espacio de Hilbert** es un espacio con producto interno que es completo, como un espacio normado bajo la norma inducida.

Teorema A.28. ([76]) Sean \mathcal{X} un espacio de Hilbert y $C \subset \mathcal{X}$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, para cada $x \in \mathcal{X}$ existe un único $x_C \in C$ tal que

$$\|x - x_C\| = \inf \{\|x - y\| \mid y \in C\}.$$

Si el conjunto convexo en el teorema anterior es un subespacio cerrado de \mathcal{X} , tenemos el siguiente teorema:

Teorema A.29. ([12]) Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert, \mathcal{V} un subespacio cerrado de \mathcal{X} y $x \in \mathcal{V}$. Si $x_{\mathcal{V}}$ es el único elemento en \mathcal{V} tal que $\|x - x_{\mathcal{V}}\| = \inf \{\|x - y\| \mid y \in \mathcal{V}\}$, entonces $x - x_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}^\perp$. Recíprocamente, si $x_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ es tal que $x - x_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}^\perp$, entonces $\|x - x_{\mathcal{V}}\| = \inf \{\|x - y\| \mid y \in \mathcal{V}\}$.

Sistemas ortonormales

Aquí, \mathcal{X} siempre será un espacio de Hilbert separable (sobre $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}).

Definición A.30. (SISTEMA ORTONORMAL - COMPLETO)

Una familia numerable $\mathcal{A} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ es un **sistema ortonormal** si $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ (donde δ_{nm} denota la delta de Kronecker, es decir: $\delta_{nn} = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_{nm} = 0$ para $n \neq m$). Además, \mathcal{A} es un **sistema ortonormal maximal** o **completo** (en \mathcal{X}) si no existe otro sistema ortonormal \mathcal{B} tal que $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$.

Se puede mostrar, usando el Lema de Zorn, que todo espacio de Hilbert separable posee un sistema ortonormal maximal ([76]).

El siguiente teorema proporciona un resultado de convergencia en espacios de Hilbert.

Teorema A.31. ([5], [65]) (TEOREMA DE RIESZ-FISCHER)

Sean \mathcal{X} un espacio de Hilbert sobre \mathbb{k} y $\mathcal{A} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ un sistema ortonormal. Entonces, si $\alpha_n \in \mathbb{k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$ converge si y sólo si $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ (i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$).
- (ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n = x$, entonces $\alpha_n = \langle x, \phi_n \rangle$ y $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

Teorema A.32. ([5], [65]) Sean \mathcal{X} un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ un sistema ortonormal. Entonces:

- (i) Todo subconjunto finito de \mathcal{A} es linealmente independiente.
- (ii) Si \mathcal{A} es finito, es decir $\mathcal{A} = \{\phi_n\}_{n=1}^N$, entonces para cada $x \in \mathcal{X}$ existen únicos escalares $\alpha_n = \langle x, \phi_n \rangle$, con $n = 1, \dots, N$ tales que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in \text{span } \mathcal{A}.$$

- (iii) Para cada $x \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad (\text{DESIGUALDAD DE BESSEL})$$

y la serie converge en \mathcal{X} .

- (iv) \mathcal{A} es completo si y sólo si $\overline{\text{span } \mathcal{A}} = \mathcal{X}$.

Definición A.33. (BASE ORTONORMAL)

Una **base ortonormal** en un espacio de Hilbert separable \mathcal{X} es un sistema ortonormal $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que es maximal. Entonces todo $x \in \mathcal{X}$ tiene una **expansión de Fourier (generalizada)** de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n,$$

donde la convergencia se entiende en la norma de \mathcal{X} .

Los coeficientes $\langle x, \phi_n \rangle$ se llaman **coeficientes de Fourier** de x con respecto a ϕ_n . Además, para todo $x, y \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle \overline{\langle y, \phi_n \rangle}.$$

En particular, para $x = y$ tenemos la siguiente identidad

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle|^2. \quad (\text{IDENTIDAD DE PARSEVAL})$$

Observemos que la igualdad en la expansión de Fourier significa que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \rightarrow 0 \quad \text{para } N \rightarrow \infty.$$

A.2 Operadores lineales sobre espacios normados

A.2.1 Nociones básicas

Cuando \mathcal{V} y \mathcal{W} son conjuntos, el símbolo $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ significa que f es un operador o mapeo de \mathcal{V} en \mathcal{W} . Si $A \subset \mathcal{V}$ y $B \subset \mathcal{W}$, la *imagen* de A , denotada por $f(A)$, y la *imagen inversa* o *preimagen* de B , denotada por $f^{-1}(B)$, están definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} f(A) &\doteq \{f(x) / x \in A\}, \\ f^{-1}(B) &\doteq \{x \in \mathcal{V} / f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

Estamos interesados en operadores T que mapean el conjunto $\mathcal{D}(T)$ del espacio \mathcal{V} en el espacio \mathcal{W} , ambos espacios vectoriales sobre \mathbb{k} , que notaremos

$$T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W},$$

donde $\mathcal{D}(T) \doteq \{v \in \mathcal{V} / T(v) \in \mathcal{W}\}$ se llama *dominio* de T . Cuando escribimos $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ se sobreentenderá que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{V}$.

En particular, cuando $\mathcal{W} = \mathbb{k}$, el operador $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{k}$ se dice *funcional* sobre \mathbb{k} , y en general se suele denotar con J .

Recordemos las siguientes definiciones básicas para operadores:

Definición A.34. Sean \mathcal{V} , \mathcal{W} y \mathcal{Z} espacios vectoriales sobre \mathbb{k} .

(i) Si $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ y $\alpha \in \mathbb{k}$, entonces el operador αT está definido por

$$\mathcal{D}(\alpha T) = \mathcal{D}(T) \quad \text{y} \quad (\alpha T)(x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(\alpha T).$$

(ii) Si $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, entonces el operador $S + T$ está definido por

$$\mathcal{D}(S + T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T) \quad \text{y} \quad (S + T)(x) = S(x) + T(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(S + T).$$

(iii) Si $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ y $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Z}$, entonces el operador ST está definido por

$$\mathcal{D}(ST) = \{x \in \mathcal{D}(T) / T(x) \in \mathcal{D}(S)\} \quad \text{y} \quad (ST)(x) = S(T(x)) \quad \forall x \in \mathcal{D}(ST).$$

(iv) Si $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, entonces T **extiende** a S o T es una **extensión** de S (o bien S es una **restricción** de T), y lo denotamos $T|_{\mathcal{D}(S)} = S$, si

$$\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T) \quad \text{y} \quad S(x) = T(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(S).$$

Definición A.35. (NÚCLEO, RANGO Y GRAFO DE UN OPERADOR)

Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} espacios vectoriales sobre \mathbb{k} y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un operador. Los siguientes conjuntos están naturalmente relacionados a T , y por consiguiente a \mathcal{V} y a \mathcal{W} :

- (i) $\mathcal{N}(T) \doteq \{v \in \mathcal{D}(T) / T(v) = 0\}$, llamado **núcleo** de T .
- (ii) $\mathcal{R}(T) \doteq \{w \in \mathcal{W} / \exists v \in \mathcal{D}(T) \wedge T(v) = w\}$, llamado **rango** de T .
- (iii) $\mathcal{G}r(T) \doteq \{(v, Tv) / v \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{W}$, llamado **grafo** de T .

Notar que: $\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{0\})$ y $\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{D}(T)) = \{T(v) / v \in \mathcal{D}(T)\}$.

Definición A.36. (OPERADOR INVERSIBLE)

Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} espacios vectoriales sobre \mathbb{k} . Un operador $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ es **invertible** si existe un operador $S : \mathcal{D}(S) \doteq \mathcal{R}(T) \subset \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que

$$\begin{aligned} (ST)(u) &= u, \quad u \in \mathcal{D}(T), \\ (TS)(v) &= v, \quad v \in \mathcal{R}(T), \end{aligned}$$

en tal caso S se dice **inverso** de T y se denota $S \doteq T^{-1}$.

Definición A.37. (OPERADOR LINEAL)

Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} espacios vectoriales sobre \mathbb{k} . Diremos que $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ es un **operador lineal** si, para todo $u, v \in \mathcal{D}(T)$ y para todo $\alpha \in \mathbb{k}$ se tiene que:

- (i) $T(u + v) = Tu + Tv$,
- (ii) $T(\alpha u) = \alpha Tu$.

Se sigue inmediatamente de la definición que, si $\alpha_i \in \mathbb{k}$ y $v_i \in \mathcal{D}(T)$ con $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T v_i$$

Cuando el operador T es lineal, se suele usar la notación sin paréntesis, y por lo tanto más sencilla, para expresar por ejemplo el transformado del elemento $u \in \mathcal{D}(T)$, esto es Tu en lugar de $T(u)$. Notar que, si T es lineal, el conjunto $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de \mathcal{V} .

Definición A.38. (FUNCIONAL LINEAL)

Sea \mathcal{V} espacio vectorial sobre \mathbb{k} . Un **funcional lineal** J es un operador lineal del espacio vectorial $\mathcal{D}(J) \subset \mathcal{V}$ en el campo escalar \mathbb{k} , es decir $J : \mathcal{D}(J) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{k}$, donde $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ si \mathcal{V} es real y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ si \mathcal{V} es complejo.

Proposición A.39. Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} espacios vectoriales sobre \mathbb{k} y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un operador lineal. Entonces:

- (i) $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio de $\mathcal{D}(T)$ (y por consiguiente de \mathcal{V}).
- (ii) $\mathcal{R}(T)$ es un subespacio de \mathcal{W} .
- (iii) $\mathcal{G}r(T)$ es un subespacio de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$.

Teorema A.40. Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} espacios vectoriales sobre \mathbb{k} y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un operador lineal. Las siguientes propiedades valen:

- (i) T es *invertible* (sobre su rango) si y sólo si T es *inyectivo* (esto es: $Tx = 0 \implies x = 0$, vale decir, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$).
- (ii) Si T es invertible entonces $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \subset \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ es lineal e invertible.

En lo que resta de la sección consideraremos que \mathcal{X} e \mathcal{Y} son, al menos, espacios normados (sobre $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}). Usualmente serán espacios de Banach o de Hilbert.

Diremos que, el operador $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es o está **densamente definido** si $\mathcal{D}(T)$ es denso en \mathcal{X} , esto es si $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{X}$.

Definición A.41. (OPERADOR CONTINUO)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador (no necesariamente lineal). Diremos que:

- (i) T es **continuo en** $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}(T) \quad \|x - x_0\|_{\mathcal{X}} < \delta \implies \|T(x) - T(x_0)\|_{\mathcal{Y}} < \epsilon.$$

Equivalentemente, T es **continuo en** $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T) : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \text{ se tiene que } T(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(x_0).$$

- (ii) T es **continuo en** $\mathcal{D}(T)$ si T es continuo en todos los puntos $x \in \mathcal{D}(T)$.

Definición A.42. (FUNCIONAL SEMICONTINUO INFERIORMENTE)

Sean \mathcal{X} espacio normado y $J : \mathcal{D}(J) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{k}$ un funcional (no necesariamente lineal). Diremos que J es **semicontinuo inferiormente en** $x_0 \in \mathcal{D}(J)$ si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}(J) \quad \|x - x_0\|_{\mathcal{X}} < \delta \implies J(x) - J(x_0) < \epsilon.$$

Equivalentemente, J es **semicontinuo inferiormente en** $x_0 \in \mathcal{D}(J)$ si

$$J(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} J(x).$$

Definición A.43. (OPERADOR ACOTADO, NORMA DE UN OPERADOR LINEAL)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal. Diremos que:

- (i) T es **acotado** si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq c \|x\|_{\mathcal{X}} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$.
- (ii) Si T es acotado se define la **norma de** T , que denotamos $\|T\|$, como

$$\|T\| \doteq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}}.$$

Una definición equivalente es, $\|T\| \doteq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_{\mathcal{Y}}$.

Notar que $\|T\|$ es la menor de las constantes $c > 0$ en (i). Ambas definiciones satisfacen las condiciones para una norma (ver Definición A.9). Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq \|T\| \|x\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

resultado que usaremos frecuentemente.

Para operadores lineales la continuidad y la acotación son conceptos equivalentes:

Teorema A.44. ([76]) *Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) T es acotado,
- (ii) T es continuo en $x = 0$,
- (iii) T es continuo.

Teorema A.45. ([76]) (EXTENSIÓN POR CONTINUIDAD)

Sean \mathcal{X} espacio normado, \mathcal{Y} espacio de Banach y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador acotado. Entonces existe una única extensión acotada de T , $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, (es decir, $Sx = Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$) tal que $\mathcal{D}(S) = \overline{\mathcal{D}(T)}$ y $\|S\| = \|T\|$.

Definición A.46. *Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados. El conjunto de todos los operadores lineales acotados de \mathcal{X} en \mathcal{Y} , cuyo dominio es \mathcal{X} , se denota por $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Esto es*

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \doteq \{T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} / T \text{ es lineal y acotado}\}.$$

En el caso $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, se denota a $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ simplemente por $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Notar que, por la Definición A.37, el conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un espacio vectorial.

Proposición A.47. ([76]) *Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados. El espacio $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un espacio normado, con la norma del operador dada en la Definición A.43.*

Si es necesario distinguir entre varias normas, escribiremos la norma del operador como $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$.

El operador $I : \mathcal{D}(I) = \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ definido por $Ix = x \quad \forall x \in \mathcal{X}$ obviamente pertenece a $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ y se tiene que $\|I\| = 1$, $IT = TI = T$ para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Teorema A.48. ([76]) *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios normados. Las siguientes propiedades valen:*

- (i) *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ entonces $ST \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ y se satisface que $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$;*
- (ii) *Si $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ y $\alpha \in \mathbb{k}$ entonces $T + S, \alpha T, TS \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ (esto es, $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ es un álgebra).*

Teorema A.49. ([76]) *Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio cerrado de \mathcal{X} .*

En el caso especial en que $\mathcal{Y} = \mathbb{k}$ denotaremos al espacio $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{k})$ por \mathcal{X}' , este recibe el nombre de **espacio dual** de \mathcal{X} . A sus elementos los notaremos por ℓ , es decir $\ell \in \mathcal{X}'$ es tal que $\ell : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{k}$ es un funcional lineal y acotado. Análogamente, el espacio $(\mathcal{X}')' = \mathcal{X}''$ se llama **bidual de \mathcal{X}** . La inmersión natural $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ definida por

$$(Jx)(\ell) \doteq \ell(x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad \ell \in \mathcal{X}',$$

es lineal, acotada, inyectiva y satisface $\|Jx\|_{\mathcal{X}''} = \|x\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$.

Definición A.50. (ESPACIO REFLEXIVO)

*Sea \mathcal{X} espacio normado. El espacio \mathcal{X} se dice **reflexivo** si la inmersión natural $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ es sobreyectiva.*

Es posible introducir diferentes nociones de convergencia en el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. La natural, basada en la norma en $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, se llama *convergencia uniforme* y es una propiedad muy fuerte. Además tenemos dos nuevos conceptos “más débiles” de convergencia: *convergencia fuerte* y *convergencia débil*.

Definición A.51. (CONVERGENCIA UNIFORME, FUERTE Y DÉBIL DE OPERADORES)

Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} espacios normados y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Diremos que:

- (i) $\{T_n\}$ **converge uniformemente** a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y lo notamos $T_n \rightarrow T$, si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} < \epsilon$$

- (ii) $\{T_n\}$ **converge fuertemente** a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y lo notamos $T_n \xrightarrow{s} T$, si para todo $x \in \mathcal{X}$ $T_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$, i.e. si

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \|T_n x - Tx\|_{\mathcal{Y}} < \epsilon$$

- (iii) $\{T_n\}$ **converge débilmente** a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y lo notamos $T_n \xrightarrow{w} T$, si para todo $x \in \mathcal{X}$ $T_n x \xrightarrow{w} Tx$, i.e. si

$$\forall x \in \mathcal{X} : \quad \ell(T_n x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(Tx) \quad \forall \ell \in \mathcal{Y}'$$

donde \mathcal{Y}' es el espacio dual de \mathcal{Y} .

Notar que, para $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ vale que $\|T_n x - Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \|x\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$. En consecuencia,



Teorema A.52. ([5]) (PRINCIPIO DE LA ACOTACIÓN UNIFORME - TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS)

Sean \mathcal{X} espacio de Banach, \mathcal{Y} espacio normado, I un conjunto de índices y $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ una familia de operadores lineales acotados. Si la familia $\{T_\alpha x\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{Y}$ es acotada para cada $x \in \mathcal{X}$ (esto es, $\forall x \in \mathcal{X} \exists M_x > 0$, independiente de α , tal que $\|T_\alpha x\| \leq M_x \forall \alpha \in I$), entonces la familia $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}$ es uniformemente acotada en α (esto es, $\exists M > 0$ tal que $\|T_\alpha\| < M \forall \alpha \in I$).

La introducción del espacio \mathcal{X}' conduce a un nuevo concepto de convergencia de una sucesión en \mathcal{X} .

Definición A.53. (CONVERGENCIA DÉBIL, SUCESIÓN DÉBIL DE CAUCHY EN ESPACIOS NORMADOS)

Sean \mathcal{X} espacio normado y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$. Diremos que:

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge débilmente** a $x \in \mathcal{X}$, y lo denotamos $x_n \xrightarrow{w} x$, si $\ell(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(x)$ para todo $\ell \in \mathcal{X}'$.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **de Cauchy débil** si $\{\ell(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{k} para todo $\ell \in \mathcal{X}'$.

Se puede probar que, si existe el límite débil de una sucesión, es único ([5]). Notar que, convergencia (fuerte) implica convergencia débil puesto que todo funcional lineal y acotado es continuo. Lo recíproco no es cierto, es decir convergencia débil no implica convergencia fuerte ([5]). En espacios de dimensión finita, convergencia débil y fuerte son equivalentes ([5]).

Teorema A.54. ([14]) (TEOREMA DE EBERLEIN-SHMULYAN)

Un espacio de Banach \mathcal{X} es reflexivo si y sólo si toda sucesión acotada en \mathcal{X} contiene una subsucesión débilmente convergente.

Definición A.55. (OPERADOR COMPACTO)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal. Diremos que K es **compacto** si mapea conjuntos acotados de \mathcal{X} en conjuntos relativamente compactos de \mathcal{Y} (o sea, $\forall S \subset \mathcal{X}$ acotado, $K(S) \subset \mathcal{Y}$ es relativamente compacto).

Equivalentemente, para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$, la sucesión $\{Kx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en \mathcal{Y} .

Los operadores compactos tienen propiedades muy similares a las que poseen los operadores arbitrarios sobre espacios de dimensión finita.

Teorema A.56. ([58], [5], [65]) Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal. Entonces las siguientes afirmaciones valen:

- (i) Si T es compacto entonces T es continuo (i.e. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$).
- (ii) Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$ entonces T es compacto.
- (iii) Si $\dim \mathcal{X} < \infty$ entonces T es compacto.

- (iv) El operador identidad I , sobre el espacio de Banach \mathcal{X} , es compacto si y sólo si $\dim \mathcal{X} < \infty$.
- (v) Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es compacto y $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, entonces $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$.

Teorema A.57. ([5]) Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios normados. Las siguientes afirmaciones valen:

- (i) Si K_1 y K_2 son operadores compactos de \mathcal{X} en \mathcal{Y} y $\alpha \in \mathbb{k}$, entonces $K_1 + K_2$ y αK_1 son compactos.
- (ii) Si $K_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $K_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ y K_1 o K_2 es compacto, entonces $K_2 K_1$ es compacto.
- (iii) Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es compacto, entonces KT y TK son compactos.
- (iv) Sean \mathcal{X} espacio normado, \mathcal{Y} espacio de Banach y $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ una sucesión de operadores compactos. Sea $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que K_n converge uniformemente a K (en la norma del operador), es decir :

$$\|K_n - K\| \doteq \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \|x\|=1}} \|K_n x - Kx\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Entonces K es compacto.

El teorema anterior permite mostrar que el conjunto de todos los operadores compactos de \mathcal{X} en \mathcal{Y} es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Teorema A.58. ([5]) Sea \mathcal{X} espacio normado de dimensión infinita. Si $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es compacto, entonces o bien K^{-1} , si existe, no es acotado (i.e. $K^{-1} \notin \mathcal{L}(\mathcal{X})$) o es posible que K^{-1} sea acotado pero no puede estar definido sobre todo \mathcal{X} .

Definición A.59. (OPERADOR CERRADO)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal. Diremos que T es **cerrado** si su grafo, $\mathcal{G}r(T)$, es un subespacio cerrado de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Equivalentemente,

$$T \text{ es cerrado si } \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T) : \left(\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \\ Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \end{array} \right) \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{D}(T) \\ Tx = y \end{array} \right\}.$$

Teorema A.60. ([5]) Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal cerrado. Entonces si existe T^{-1} , también es un operador lineal cerrado.

Teorema A.61. ([12]) (TEOREMA DEL GRAFO CERRADO)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Banach y $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal cerrado, entonces T es acotado.

Teorema A.62. ([5]) Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios normados y $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ operador lineal, entonces existe T^{-1} y es acotado sobre el rango de T , $T(\mathcal{X})$, si y sólo si existe $k > 0$ tal que $k \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|Tx\|_{\mathcal{Y}}$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

A.2.2 Operadores lineales sobre espacios de Hilbert

Todas las definiciones y teoremas dados para operadores lineales entre espacios normados son válidos para operadores lineales entre espacios de Hilbert, ya que un espacio de Hilbert es un especial espacio normado. Sin embargo, debido a la estructura adicional por el producto interno, podemos deducir propiedades extras de operadores entre espacios de Hilbert que exploten dicha estructura.

El siguiente resultado provee una caracterización para el espacio dual de un espacio de Hilbert.

Teorema A.63. ([76], [12]) (TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ)

Sea \mathcal{X} espacio de Hilbert, entonces todo $x \in \mathcal{X}$ induce un funcional lineal acotado sobre \mathcal{X} , que denotamos ℓ_x , definido por

$$\ell_x(y) = \langle y, x \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{X}.$$

Además, para todo $\ell \in \mathcal{X}'$, existe un único $x_\ell \in \mathcal{X}$ tal que

$$\ell(y) = \langle y, x_\ell \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{X}$$

y

$$\|\ell\|_{\mathcal{X}'} \doteq \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x, x_\ell \rangle|}{\|x\|} = \|x_\ell\|.$$

Como consecuencia de este teorema tenemos la siguiente definición:

Definición A.64. (CONVERGENCIA DÉBIL, SUCESION DÉBIL DE CAUCHY EN ESPACIOS DE HILBERT)

Sean \mathcal{X} un espacio de Hilbert y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$. Diremos que:

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge débilmente** a $x \in \mathcal{X}$, y lo denotamos $x_n \xrightarrow{w} x$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$ para todo $y \in \mathcal{X}$. Es decir, $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, y \rangle \quad \forall y \in \mathcal{X}$.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **de Cauchy débil** si para todo $y \in \mathcal{X}$ la sucesión $\{\langle x_n, y \rangle\}$ es de Cauchy en \mathbb{k} .

Se puede probar que toda sucesión débilmente convergente es una sucesión de Cauchy débil ([76]).

Teorema A.65. ([76]) Sea \mathcal{X} un espacio de Hilbert.

- (i) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ es tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
- (ii) Toda sucesión de Cauchy débil en \mathcal{X} es acotada.
- (iii) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy débil en \mathcal{X} , entonces existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$.

Teorema A.66. ([76]) Sea \mathcal{X} un espacio de Hilbert. Entonces toda sucesión acotada en \mathcal{X} contiene una subsucesión que converge débilmente.

Del Teorema A.63 también se deduce el siguiente resultado.

Teorema A.67. ([5]) *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Otra consecuencia del Teorema A.63 es la existencia de un único operador adjunto para cada operador lineal acotado entre espacios de Hilbert.

Definición A.68. (OPERADOR ADJUNTO DE UN OPERADOR ACOTADO, OPERADOR AUTOADJUNTO)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} son espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces existe un único operador $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ que satisface

$$\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x, T^*y \rangle_{\mathcal{X}} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Este operador T^* se llama el **operador adjunto** de T . Para $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, el operador T se llama **autoadjunto** si $T^* = T$.

Teorema A.69. ([12]) Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ espacios de Hilbert sobre \mathbb{k} . Sean $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $R, S \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ y $\alpha \in \mathbb{k}$. Las siguientes afirmaciones valen:

- (i) $I^* = I$, siendo I el operador identidad;
- (ii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$;
- (iii) $\|T^*\| = \|T\|$;
- (iv) $(R + S)^* = R^* + S^*$;
- (v) $(ST)^* = T^* S^*$;
- (vi) $T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $TT^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ y $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$;
- (vii) T^*T y TT^* son autoadjuntos;
- (viii) $(T^*)^* = T$.

Teorema A.70. ([12]) Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Las siguientes igualdades valen:

- (i) $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$;
- (ii) $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^\perp$;
- (iii) $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T)$;
- (iv) $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp$.

Teorema A.71. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, con \mathcal{X} espacio de Hilbert.

T es autoadjunto si y sólo si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Definición A.72. (OPERADOR NO NEGATIVO, POSITIVO, COERCITIVO)

Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ autoadjunto. Entonces

- (i) T es **no negativo**, y lo denotamos $T \geq 0$, si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$.
- (ii) T es **positivo**, y lo denotamos $T > 0$, si $\langle Tx, x \rangle > 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$ con $x \neq 0$.
- (iii) T es **coercitivo** si existe $\epsilon > 0$ tal que $\langle Tx, x \rangle \geq \epsilon \|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Además, si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ son autoadjuntos, entonces escribimos $T_1 \geq T_2$ para $T_1 - T_2 \geq 0$.

Definición A.73. (RAÍZ CUADRADA DE UN OPERADOR)

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ no negativo. Un operador S es **raíz cuadrada** de T si S es autoadjunto y $S^2 = T$. Además, si $S \geq 0$ denotamos esta relación escribiendo $S = T^{\frac{1}{2}}$.

Teorema A.74. ([58]) Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ no negativo. Entonces T tiene una única raíz cuadrada no negativa $T^{\frac{1}{2}}$ tal que $(T^{\frac{1}{2}})^2 = T$ (i.e. $T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}x = Tx$ para todo $x \in \mathcal{X}$) y vale que $\|T^{\frac{1}{2}}\| = \|T\|^{\frac{1}{2}}$. Además, si T es positivo, entonces $T^{\frac{1}{2}}$ también es positivo.

Observar que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es compacto, con \mathcal{X} e \mathcal{Y} espacios de Hilbert, entonces $T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es compacto, autoadjunto y no negativo. En consecuencia, tiene una única raíz cuadrada no negativa, que denotamos $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$, que es compacto y autoadjunto. Análogamente para el operador $TT^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Una de las clases más importantes de operadores no negativos es la de las proyecciones ortogonales.

Definición A.75. (OPERADOR PROYECCIÓN ORTOGONAL)

Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $P \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Diremos que:

- (i) P es una **proyección** en \mathcal{X} si $P^2 = P$ (i.e. si P es idempotente).
- (ii) P es una **proyección ortogonal** si $P^2 = P$ y $P^* = P$.

Notar que si P es una proyección, con $P \neq 0$, entonces $\|P\| = 1$. Así, $\|Px\| \leq \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{X}$.

Teorema A.76. ([76]) Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $P \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) P es una proyección ortogonal;
- (ii) $I - P$ es una proyección ortogonal;
- (iii) P es idempotente y $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$;
- (iv) P es idempotente y autoadjunto.

Además, $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$ y $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$.

Teorema A.77. ([76]) (TEOREMA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL)

Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ un subespacio cerrado. Entonces $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^\perp)^\perp$. Todo $x \in \mathcal{X}$ posee una única descomposición de la forma $x = x_{\mathcal{V}} + x_{\mathcal{V}^\perp}$, donde $x_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ y $x_{\mathcal{V}^\perp} \in \mathcal{V}^\perp$ (o sea, $\mathcal{X} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$). El elemento $x_{\mathcal{V}}$ se llama la proyección ortogonal de x sobre \mathcal{V} .

El operador $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V}$ definido por $Px \doteq x_{\mathcal{V}}$ se llama la **proyección ortogonal de \mathcal{X} sobre \mathcal{V}** y satisface las siguientes propiedades:

- (i) $Px = x \quad \forall x \in \mathcal{V}$ (i.e. $P^2 = P$);
- (ii) $\|x - Px\| \leq \|x - v\| \quad \forall v \in \mathcal{V}$ (i.e. Px es la mejor aproximación de $x \in \mathcal{X}$ en el subespacio cerrado \mathcal{V});
- (iii) $\mathcal{N}(P) = \mathcal{V}^\perp$ y $\mathcal{R}(P) = \mathcal{V}$, de modo que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

En la tesis también necesitamos el adjunto de un operador lineal no acotado. Generalicemos entonces la Definición A.68 al caso de tales operadores.

Definición A.78. (OPERADOR ADJUNTO DE UN OPERADOR LINEAL NO ACOTADO)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal densamente definido. Entonces el **operador adjunto** de T , que denotamos $T^* : \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, se define como

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y \in \mathcal{Y} / \exists y^* \in \mathcal{X} \text{ tal que } \langle Tx, y \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x, y^* \rangle_{\mathcal{X}} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)\}$$

y

$$T^*y \doteq y^* \quad \forall y \in \mathcal{D}(T^*)$$

El operador T^* así definido es lineal. Para $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, el operador T se dice **autoadjunto** si $T^* = T$.

Teorema A.79. ([76]) Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal densamente definido. Entonces:

- (i) Si T^* también es densamente definido, entonces $(T^*)^*$ es una extensión de T ;
- (ii) $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$;
- (iii) T es acotado si y sólo si $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$;
- (iv) Si T es acotado, entonces $\|T\| = \|T^*\|$;
- (v) Si T es acotado, entonces $(T^*)^*$ es la extensión continua de T a todo el espacio \mathcal{X} . En particular, para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se tiene que $(T^*)^* = T$.
- (vi) Si T es inyectivo y $\mathcal{R}(T)$ es denso en \mathcal{Y} , entonces T^* también es inyectivo y se tiene que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Teorema A.80. ([5]) Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ y $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ operadores lineales densamente definidos. Entonces:

- (i) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$ para todo $\alpha \in \mathbb{k}$, $\mathcal{D}((\alpha T)^*) = \begin{cases} \mathcal{D}(T^*) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \mathcal{Y} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$;
- (ii) Si T extiende a S , entonces S^* extiende a T^* ;
- (iii) Si $T + S$ está densamente definido, entonces $(T + S)^*$ extiende a $T^* + S^*$ (i.e. $\mathcal{D}(T^* + S^*) \subset \mathcal{D}((T + S)^*)$ y $(T + S)^* = T^* + S^*$ en $\mathcal{D}(T^* + S^*)$);
- (iv) Si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, entonces $(T + S)^* = T^* + S^*$ con $\mathcal{D}((T + S)^*) = \mathcal{D}(T^*)$.

Teorema A.81. Sean \mathcal{X} , \mathcal{Y} y \mathcal{Z} espacios de Hilbert y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ operadores lineales densamente definidos. Entonces:

- (i) Si ST está densamente definido, entonces $(ST)^*$ extiende a T^*S^* (i.e. $\mathcal{D}(T^*S^*) \subset \mathcal{D}((ST)^*)$ y $(ST)^* = T^*S^*$ en $\mathcal{D}(T^*S^*)$);
- (ii) Si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, entonces $(ST)^* = T^*S^*$.

Definición A.82. Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $J : \mathcal{D}(J) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{k}$ un funcional (no necesariamente lineal). Diremos que J es **débilmente semicontinuo inferiormente** en $x \in \mathcal{D}(J)$ si

$$J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n) \text{ siempre que } x_n \xrightarrow{w} x.$$

A.3 Teoría espectral para operadores lineales

A.3.1 Teoría espectral general

En lo que sigue, \mathcal{X} es un espacio normado sobre \mathbb{k} (\mathbb{R} ó \mathbb{C}) y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador lineal. El estudio de los $\lambda \in \mathbb{k}$ para los cuales $\lambda I - T$ es inversible y de las propiedades de $(\lambda I - T)^{-1} : \mathcal{R}(\lambda I - T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, siempre que este operador exista, constituye lo que se llama la teoría espectral de T .

Definición A.83. (AUTOVALOR, AUTOVECTOR, AUTOESPACIO)

Sea \mathcal{X} espacio normado sobre \mathbb{k} y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ operador lineal. Diremos que $\lambda \in \mathbb{k}$ es un **autovalor** de T si existe $x \in \mathcal{D}(T)$, $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. Es decir, $\lambda I - T$ no es inyectivo ($\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$) y por lo tanto no inversible. El elemento $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $x \neq 0$, se llama **autovector** de T que corresponde al autovalor λ . El subespacio $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ se llama **autoespacio** que corresponde a λ , la dimensión de $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ es la multiplicidad del autovalor λ .

Definición A.84. (CONJUNTO RESOLVENTE, ESPECTRO)

Sea \mathcal{X} espacio normado sobre \mathbb{k} y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ operador lineal.

- (i) El **conjunto resolvente** de T , denotado por $\rho(T)$, se define como

$$\rho(T) \doteq \{ \lambda \in \mathbb{k} / \exists (\lambda I - T)^{-1} \text{ es acotado y densamente definido} \}.$$

- (ii) El **conjunto espectro** de T , denotado por $\sigma(T)$, se define como el complemento en \mathbb{k} de $\rho(T)$, es decir

$$\begin{aligned}\sigma(T) &\doteq \mathbb{k} \setminus \rho(T) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{k} / \lambda I - T \text{ no tiene inverso acotado densamente definido}\}.\end{aligned}$$

Notar que, $\sigma(T)$ es la unión de los siguientes tres conjuntos disjuntos denotados por $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$, respectivamente, donde:

- $\sigma_p(T) \doteq \{\lambda \in \mathbb{k} / \lambda I - T \text{ no es inversible}\}$
 $\sigma_p(T)$ es el **espectro puntual** de T . Obviamente, es el conjunto de los autovalores de T . Aquí $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ puede ser denso o no.
- $\sigma_c(T) \doteq \{\lambda \in \mathbb{k} / \exists (\lambda I - T)^{-1} \text{ es densamente definido pero no acotado}\}$
 $\sigma_c(T)$ es el **espectro continuo** de T .
- $\sigma_r(T) \doteq \{\lambda \in \mathbb{k} / \exists (\lambda I - T)^{-1} \text{ y no es densamente definido}\}$
 $\sigma_r(T)$ es el **espectro residual** de T , aquí el operador $(\lambda I - T)^{-1}$ puede ser acotado o no.

Así, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.

Teorema A.85. ([65]) Sea \mathcal{X} espacio normado sobre \mathbb{k} y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ operador lineal. El conjunto resolvente $\rho(T)$ es abierto, y en consecuencia el espectro $\sigma(T)$ es cerrado.

Teorema A.86. ([5]) Sean $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ operador lineal (definido sobre todo \mathcal{X}) y \mathcal{X} espacio normado de dimensión finita. Entonces $\sigma_r(T) = \emptyset$ y $\sigma_c(T) = \emptyset$.

Teorema A.87. ([5]) Sean $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ operador autoadjunto y \mathcal{X} espacio de Hilbert. Entonces el espectro de T es real, esto es $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Más aún, si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tenemos adicionalmente que:

- (i) $\sigma(T) \subset [m, M]$, donde $m \doteq \inf_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle$ y $M \doteq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle$
- (ii) $m, M \in \sigma(T)$
- (iii) $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$
- (iv) $\|T\| = r_\sigma(T)$, donde $r_\sigma(T) \doteq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ es el radio espectral de T y representa el radio exacto de la menor bola que contiene el espectro de T .

A.3.2 Teoría espectral para operadores compactos en espacios de Hilbert

De la sección anterior es claro que las propiedades espectrales de operadores definidos sobre espacios de dimensión infinita son más complicadas que para operadores definidos sobre espacios de dimensión finita. Sin embargo, operadores compactos tienen un espectro simple¹. Reunimos los resultados más importantes en el siguiente teorema:

Teorema A.88. ([5], [76]) *Sean $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ operador compacto, con $K \neq 0$, y \mathcal{X} espacio de Banach sobre \mathbb{k} . Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- (i) *El espectro $\sigma(K)$ consiste de autovalores y posiblemente el 0.*
- (ii) *Si \mathcal{X} tiene dimensión infinita entonces $0 \in \sigma(K)$ (0 puede estar en cualquier parte del espectro).*
- (iii) *K tiene a lo más un número infinito numerable de autovalores con $\lambda = 0$ como el único posible punto de acumulación.*
- (iv) *Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, entonces K tiene al menos un autovalor².*

Además, el autoespacio de cada autovalor no nulo tiene dimensión finita.

Notar que:

1. Si $\lambda \neq 0$ entonces $\lambda \in \rho(K)$ ó $\lambda \in \sigma_p(K)$.
2. Si $\lambda = 0 \in \sigma(K)$ pero $0 \notin \sigma_p(K)$, esto es $\mathcal{N}(K) = \{0\}$, entonces 0 es el único elemento de $\sigma_r(K)$ ó de $\sigma_c(K)$.
3. Si $\lambda = 0 \in \sigma_p(K)$ y $\dim \mathcal{X} = \infty$, esto es si $\mathcal{N}(K) \neq \{0\}$, 0 es autovalor de K y el correspondiente autoespacio tiene dimensión infinita.

Consideremos el caso de operadores compactos y autoadjuntos. Tales operadores tienen algunas propiedades similares a aquellas de una matriz simétrica en Álgebra Lineal.

Teorema A.89. ([76]) (TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES COMPACTOS AUTOADJUNTOS)

Sea $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ operador compacto y autoadjunto sobre un espacio de Hilbert \mathcal{X} . Entonces existe un sistema ortonormal $\{v_n\}_{n \in J} \subset \mathcal{X}$, que consiste de autovectores de K . Si \mathcal{X} tiene dimensión infinita, los correspondientes autovalores, no nulos y repetidos de acuerdo a sus multiplicidades, λ_n son reales y pueden ser ordenados en una sucesión no creciente (en magnitud)

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots > 0$$

¹Como ya se mencionó, los operadores compactos tienen propiedades similares a los operadores definidos sobre espacios de dimensión finita.

² $\sigma_p(K)$ podría ser vacío si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

donde $\lambda_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Todo $x \in \mathcal{X}$ posee una expansión de Fourier generalizada de la forma

$$x = x_0 + \sum_{n \in J} \langle x, v_n \rangle v_n, \quad x_0 \in \mathcal{N}(K)$$

y en este caso

$$Kx = \sum_{n \in J} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$$

Si $\dim \mathcal{R}(K) = N$ tenemos que $J = \{1, 2, \dots, N\}$ y si $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ tenemos que $J = \mathbb{N}$.

Aunque la demostración ha sido omitida, algunos aspectos de ella son importantes de mencionar:

1. Para cada autovalor λ_j (sin repetirlos), $j \in J$, elegimos una base ortonormal que corresponda al autoespacio $\mathcal{N}(K - \lambda_j I)$. Sabemos que, para cada autovalor no nulo existe una cantidad finita de autovectores linealmente independientes; es decir, los autoespacios $\mathcal{N}(K - \lambda_j I)$ tienen dimensión finita. Además, autovectores que correspondan a autovalores diferentes son ortogonales (a pares) y linealmente independientes. De modo que, por ser $\dim \mathcal{N}(K - \lambda_j I) = m_j$ (la multiplicidad del autovalor λ_j), podemos asignar a cada $\lambda_n \neq 0$ (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades) un autovector v_n .
2. Si K es inyectivo, es decir $\mathcal{N}(K) = \{0\}$, el conjunto $\{v_n\}_{n \in J}$ forma un sistema ortonormal completo en \mathcal{X} , en cuyo caso

$$x = \sum_{n \in J} \langle x, v_n \rangle v_n$$

3. El conjunto $\{v_n\}_{n \in J}$ forma un sistema ortonormal completo en $\overline{\mathcal{R}(K)} = \overline{\mathcal{R}(K^*)}$, entonces podemos escribir

$$\overline{\mathcal{R}(K)} = \bigoplus_{n \in J} \mathcal{N}(K - \lambda_n I)$$

$$\overline{\mathcal{R}(K)} = \bigoplus_{\substack{0 \neq \lambda_j \in \sigma_p(K) \\ \text{(diferentes)}}} \mathcal{N}(K - \lambda_j I)$$

de modo que tenemos la suma directa ortogonal

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(K) \oplus \overline{\mathcal{R}(K)}.$$

El teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos tiene una extensión a operadores compactos no autoadjuntos $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Los valores singulares serán una muy útil herramienta al tratar con estos operadores. Ellos se basan en el hecho que el operador $K^*K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es compacto, autoadjunto y no negativo para todo operador compacto K .

Notar que todo autovalor $\lambda \in \mathbb{k}$ del operador K^*K es no negativo ya que, si x es un autovector asociado a él, $K^*Kx = \lambda x$ implica que

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle K^*Kx, x \rangle = \langle Kx, Kx \rangle = \|Kx\|^2 \geq 0$$

es decir $\lambda \geq 0$ pues $\|x\| > 0$.

Definición A.90. (VALORES SINGULARES)

Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operador compacto. Llamaremos **valores singulares** de K a las raíces cuadradas (no negativas) de los autovalores λ_n del operador $K^*K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, o sea $\sigma_n \doteq \sqrt{\lambda_n}$ con $n \in J$.

Aquí nuevamente, $J \subset \mathbb{N}$ puede ser finito o $J = \mathbb{N}$.

Teorema A.91. ([76]) (TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES COMPACTOS NO AUTOADJUNTOS - EXPANSIÓN EN VALORES SINGULARES)

Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operador compacto. Sea $\{\sigma_n\}_{n \in J}$ la sucesión de valores singulares no nulos de K (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades) ordenados en forma no creciente

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots > 0.$$

Entonces existen sistemas ortonormales completos $\{v_n\}_{n \in J} \subset \mathcal{X}$ y $\{u_n\}_{n \in J} \subset \mathcal{Y}$ tales que

$$Kv_n = \sigma_n u_n, \quad \forall n \in J, \tag{A.3}$$

$$K^*u_n = \sigma_n v_n, \quad \forall n \in J. \tag{A.4}$$

El sistema $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$ se llama un **sistema singular** asociado a K . Todo $x \in \mathcal{X}$ posee la descomposición en valores singulares

$$x = x_0 + \sum_{n \in J} \langle x, v_n \rangle v_n, \quad x_0 \in \mathcal{N}(K)$$

y tal que

$$Kx = \sum_{n \in J} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n$$

Análogamente, todo $y \in \mathcal{Y}$ posee la descomposición en valores singulares

$$y = y_0 + \sum_{n \in J} \langle y, u_n \rangle u_n, \quad y_0 \in \mathcal{N}(K^*)$$

y tal que

$$K^*y = \sum_{n \in J} \sigma_n \langle y, u_n \rangle v_n.$$

Observación A.92.

- 1) Si $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es compacto, entonces $K^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ es compacto. En este caso, si $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$ es un sistema singular asociado a K , entonces $(\sigma_n; u_n, v_n)_{n \in J}$ es un sistema singular asociado a K^* .
- 2) Si $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es compacto y autoadjunto y $(\lambda_n; v_n)_{n \in J}$ es el autosistema asociado a K , entonces $(\lambda_n^2; v_n, u_n)_{n \in J}$ es un sistema singular asociado tanto a K^*K como a KK^* .

A.4 La derivada de Fréchet

En esta sección, recordaremos algunos de los resultados más importantes de cálculo diferencial para mapeos no lineales sobre espacios normados.

Definición A.93. (DERIVADA DE FRÉCHET)

Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} espacios normados sobre \mathbb{k} y $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un mapeo (posiblemente no lineal). Diremos que:

T es **diferenciable Fréchet** en $x \in \mathcal{X}$ si existe un operador $T'(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, llamado la **derivada de Frechet** de T en x , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - T'(x)h\|_{\mathcal{Y}}}{\|h\|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

Definición A.94. (GRADIENTE)

Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable Fréchet en $x \in \mathcal{X}$. Entonces existe $\nabla J(x) \in \mathcal{X}$, llamado **gradiente** de J en x , tal que

$$J'(x)h = \langle \nabla J(x), h \rangle \quad \forall h \in \mathcal{X}.$$

Proposición A.95. (DERIVADA DIRECCIONAL-DERIVADA DE GATEAUX) Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable Fréchet en $x \in \mathcal{X}$. Entonces para todo $h \in \mathcal{X}$, el mapeo de \mathbb{R} en \mathbb{R} definido por $t \mapsto J(x+th)$ es diferenciable en $t=0$ con

$$\left. \frac{d}{dt} J(x+th) \right|_{t=0} = \langle \nabla J(x), h \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Observación A.96. El lado izquierdo de (A.5) se llama la derivada direccional o derivada de Gâteaux de J en x , en la dirección de h . Esta es a menudo denotada por $\delta J(x, h)$.

Una de las aplicaciones más importantes de la derivada es la determinación de los mínimos de funcionales. Los siguientes teoremas proveen condiciones necesarias de primer orden para tales mínimos.

Teorema A.97. Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable Fréchet. Si J tiene un mínimo en $x \in \mathcal{X}$, entonces $\nabla J(x) = 0$.

Definición A.98. (FUNCIONAL CONVEXO, COERCITIVO)

Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que:

(i) J es un **funcional convexo** si

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{X} \wedge 0 < t < 1.$$

J es **estrictamente convexo** si la desigualdad anterior es estricta siempre que $x \neq y$;

(ii) J es **coercitivo** si $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} J(x) = \infty$ (i.e. $J(x_n) \rightarrow \infty$ cuando $\|x_n\| \rightarrow \infty$).

Teorema A.99. Sea \mathcal{X} espacio de Hilbert y $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ funcional convexo, diferenciable Fréchet, y $C \subset \mathcal{X}$ un conjunto convexo y cerrado. Entonces, J tiene un mínimo en $x \in C$ si y sólo si

$$\langle \nabla J(x), h - x \rangle \geq 0 \quad \forall h \in C$$

Además, si J es estrictamente convexo y coercitivo, J tiene un único mínimo.

A.5 Representación dual de un funcional convexo

Sea φ un funcional convexo definido sobre un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^d$. Para nuestro propósito consideraremos $d = 1, 2$ o 3 y $\varphi(x) \doteq |x|$ la norma euclídeana de $x \in C$.

Definición A.100. El conjunto conjugado C^* se define por

$$C^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^d / \sup_{x \in C} [x \cdot y - \varphi(x)] < \infty \right\}$$

y el correspondiente funcional conjugado de φ es

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in C} \{x \cdot y - \varphi(x)\} \quad (\text{A.6})$$

Este funcional, que también se conoce como el transformado de Fenchel de φ , tiene al conjunto conjugado C^* como su dominio.

Se puede probar (ver [43, Proposición 1, pag. 196]) que el conjunto conjugado C^* y el funcional conjugado φ^* son, respectivamente, un conjunto convexo y un funcional convexo.

Los correspondientes conjugados segundos se definen de una manera obvia por: $C^{**} = (C^*)^*$ y $\varphi^{**} = (\varphi^*)^*$.

En nuestro dado espacio de Hilbert de dimensión finita, se puede probar (ver [43, Proposición 2, pag. 198]) que $C^{**} = C$ y $\varphi^{**} = \varphi$. En consecuencia, de (A.6) obtenemos la *representación dual*

$$\varphi(x) = \sup_{y \in C^*} \{x \cdot y - \varphi^*(x)\} \quad (\text{A.7})$$

Ahora derivamos la representación dual de la norma euclídeana, $\varphi(x) \doteq |x|$, sobre \mathbb{R}^d . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$x \cdot y - |x| \leq (|y| - 1) |x| \quad (\text{A.8})$$

con igualdad si y sólo si $y = cx$, para algún $c \in \mathbb{R}$. Si $|y| > 1$, se puede hacer (A.8) arbitrariamente grande tomando $y = cx$ y haciendo crecer c . Si $|y| \leq 1$, entonces (A.8) es cero o negativo, y su máximo valor de cero es alcanzado en $x = 0$. En consecuencia,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{x \cdot y - |x|\} = \begin{cases} 0, & |y| \leq 1 \\ +\infty, & |y| > 1 \end{cases}$$

Así, el conjunto conjugado es la bola unitaria

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^d / |y| \leq 1\}$$

y el funcional conjugado $\varphi^*(x) = 0$ para cada $y \in C^*$. La representación dual (A.7) da entonces

$$|x| = \sup_{y \in \mathbb{R}^d, |y| \leq 1} \{x \cdot y\} \quad (\text{A.9})$$

El siguiente ejemplo da la representación dual de una aproximación convexa para la norma euclídeana. Consideremos el funcional convexo $\varphi_\beta(x) \doteq \sqrt{|x|^2 + \beta}$ con $\beta > 0$, definido sobre $C = \mathbb{R}^d$.

Se puede probar que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{x \cdot y - \varphi_\beta(x)\} = \begin{cases} -\sqrt{\beta(1-|y|^2)}, & |y| \leq 1 \\ +\infty, & |y| > 1 \end{cases}$$

En consecuencia, el conjunto conjugado es

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^d / |y| \leq 1\}$$

y el funcional conjugado es

$$\varphi_\beta^*(x) = -\sqrt{\beta(1-|y|^2)}$$

De modo que, con su segundo conjugado, la representación dual da

$$\sqrt{|x|^2 + \beta} = \sup_{y \in \mathbb{R}^d: |y| \leq 1} \left\{ x \cdot y + \sqrt{\beta(1-|y|^2)} \right\} \quad (\text{A.10})$$

A.6 Los símbolos de Landau

Los símbolos $\mathcal{O}(g)$ (usualmente llamado *O grande*) y $o(g)$ (usualmente llamado *o pequeño*) son conocidos como *símbolos de Landau* y se definen como sigue:

Definición A.101. (NOTACIÓN “O GRANDE”, “O PEQUEÑA”)

(i) **Notación O grande:** *Escribimos*

$$f = \mathcal{O}(g) \text{ para } x \rightarrow x_0$$

siempre que exista una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq C |g(x)|$$

para todo x suficientemente cercano a x_0 .

(ii) **Notación o pequeña:** *Escribimos*

$$f = o(g) \text{ para } x \rightarrow x_0$$

siempre que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Observación A.102. Las expresiones “ $\mathcal{O}(g)$ ” y “ $o(g)$ ” no están definidas por sí mismas. Deben estar siempre acompañadas por un límite, por ejemplo “para $x \rightarrow x_0$ ”, aunque este límite está a menudo implícito.

Apéndice B

Teoría espectral y cálculo funcional

Para la construcción y el análisis de los métodos continuos de regularización, para problemas inversos mal condicionados, es indispensable el concepto de “función de un operador autoadjunto”. Por este motivo, presentaremos en este anexo la definición y algunas propiedades de tales funciones de operadores. El estudio de funciones de operadores se hace en el contexto de *cálculo funcional*.

No se incluirán las demostraciones de algunas proposiciones, dado que dichos resultados no son el objetivo central de la tesis. En ciertas demostraciones se evitará demasiados detalles, aunque se mantendrá el rigor matemático. Para las demostraciones de las mismas e información adicional de los puntos descritos en este apéndice referirse a [15] y [5].

B.1 Familia espectral - resolución de la identidad

El espectro de un operador lineal A no contiene toda la información que caracteriza al operador. Esto lleva a introducir el concepto de “familia espectral para A ”, la cual (como veremos) sí caracteriza completamente al operador A .

En todo lo que sigue, el espacio \mathcal{X} será un espacio de Hilbert.

Definición B.1. (FAMILIA ESPECTRAL) Una familia $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de proyecciones ortogonales en \mathcal{X} es una **familia espectral** o una **resolución de la identidad** si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$;
- (ii) $E_{-\infty} = \Theta, E_{+\infty} = I$ (donde $E_{-\infty}x = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda x, E_{+\infty}x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda x \quad \forall x \in \mathcal{X}$);
- (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, E_{\lambda-0} = E_\lambda$ (donde $E_{\lambda-0}x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\lambda-\varepsilon}x \quad \forall x \in \mathcal{X}$).

Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia espectral y $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ una función tal que $E(\lambda) = E_\lambda$. Por la condición (ii) de la Definición B.1 la función E es fuertemente continua por la izquierda.

Definición B.2. Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia espectral y $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tal que $E(\lambda) = E_\lambda$. Diremos que:

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **punto de constancia** de E (o simplemente de E_λ) si

$$\exists \varepsilon > 0 : E_{\lambda+\varepsilon} - E_{\lambda-\varepsilon} = 0.$$

En caso contrario, λ es un **punto de crecimiento** de E .

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **punto de salto** de E (o simplemente de E_λ) si

$$E_{\lambda+0} - E_\lambda \neq 0.$$

En caso contrario, λ es un **punto de continuidad** de E .

La siguiente proposición nos permite definir una integral con respecto a una familia espectral arbitraria.

Proposición B.3. Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia espectral, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $x \in \mathcal{X}$. Entonces, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, existe el límite en \mathcal{X} de la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(\tilde{\lambda}_i) (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})x$$

cuando $\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \rightarrow 0$, donde $-\infty < a \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \doteq b < +\infty$, $\tilde{\lambda}_i \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i]$, y se denota a este límite por

$$\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x. \quad (\text{B.1})$$

Demostración. Ver Dautray y Lions ([15], Proposición 2 del §3). ■

Se ha introducido la representación integral (B.1) pues, como se verá más adelante, ella generaliza a operadores autoadjuntos arbitrarios.

A continuación definiremos la integral impropia, si existe, de manera usual a partir de representación integral (B.1).

Definición B.4. Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia espectral, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $x \in \mathcal{X}$. La integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x$ se define como el límite en \mathcal{X} , si existe, de $\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x$ cuando $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$.

Lema B.5. Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia de proyecciones ortogonales en \mathcal{X} . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$;
- (ii) $\forall x \in \mathcal{X}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda \leq \mu, \langle E_\lambda x, x \rangle \leq \langle E_\mu x, x \rangle$.

Demostración.

(i) \Rightarrow (ii) Supongamos que vale (i). Sean $x \in \mathcal{X}$ y $\lambda \leq \mu$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle E_\lambda x, x \rangle &= \|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es proyec. ortogonal}) \\ &= \|E_\lambda E_\mu x\|^2 \quad (\text{por (i) pues } \lambda \leq \mu) \\ &\leq \underbrace{\|E_\lambda\|^2}_{=1} \|E_\mu x\|^2 \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es proyec. ortogonal}) \\ &= \langle E_\mu x, x \rangle \quad (\text{pues } E_\mu \text{ es proyec. ortogonal}) \end{aligned}$$

y por lo tanto $\langle E_\lambda x, x \rangle \leq \langle E_\mu x, x \rangle$. En consecuencia, vale (ii).

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos que vale (ii). Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sin pérdida de generalidad consideremos $\lambda \leq \mu$. Sea $x \in \mathcal{X}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(E_\lambda - E_\lambda E_\mu)x\|^2 = \|E_\lambda(I - E_\mu)x\|^2 \\ &= \langle E_\lambda(I - E_\mu)x, (I - E_\mu)x \rangle \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es proyec. ortogonal}) \\ &\leq \langle E_\mu(I - E_\mu)x, (I - E_\mu)x \rangle \quad (\text{por (ii) pues } \lambda \leq \mu) \\ &= \|E_\mu(I - E_\mu)x\|^2 \quad (\text{pues } E_\mu \text{ es proyec. ortogonal}) \\ &= \|(E_\mu - E_\mu^2)x\|^2 = 0 \quad (\text{pues } E_\mu \text{ es idempotente}) \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|(E_\lambda - E_\lambda E_\mu)x\| = 0$. Como x es arbitrario, se tiene que $E_\lambda E_\mu = E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$. El caso $\lambda > \mu$ se concluye del anterior pues $E_\mu E_\lambda = E_\mu$, entonces se tiene que

$$E_{\min\{\lambda, \mu\}} = E_\mu = E_\mu^* = (E_\mu E_\lambda)^* = E_\lambda^* E_\mu^* = E_\lambda E_\mu,$$

pues E_μ, E_λ son operadores autoadjuntos. En consecuencia vale (i).

Esto concluye la demostración del lema. ■

Así, para cada $x \in \mathcal{X}$, la función

$$\lambda \longmapsto \langle E_\lambda x, x \rangle = \|E_\lambda x\|^2$$

es monótona creciente, acotada superiormente por $\|x\|^2$ e inferiormente por 0. Además, por la condición (iii) de la Definición B.1, es continua por la izquierda. En consecuencia, define una medida completa sobre \mathbb{R} que denotaremos $d\|E_\lambda x\|^2$.

La siguiente proposición nos provee una condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x$, en términos de una integral de Riemann-Stieljes con respecto a la medida $d\|E_\lambda x\|^2$.

Proposición B.6. Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia espectral, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $x \in \mathcal{X}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) existe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x$,

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$.

Demostración. Ver Dautray y Lions ([15], Teorema 1 del §3). ■

Así, la integral impropia existe en \mathcal{X} si y sólo si la integral de Riemann-Stieljes existe y luego se prueba que tal integral puede usarse para representar puntualmente a un dado operador.

B.2 Funciones de operadores autoadjuntos

La siguiente proposición nos asegura la existencia de una única familia espectral que permitirá representar a un operador autoadjunto $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, y también a funciones de A , por medio de integrales.

Proposición B.7. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador autoadjunto. Entonces existe una única familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ tal que*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\}$$

y

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Simbólicamente escribimos

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda \tag{B.2}$$

y llamamos a (B.2) la **representación o descomposición espectral** de A y, por consiguiente, a $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la **familia espectral asociada a A** .

Demostración. Salvo la unicidad de la representación, se probará la proposición para el caso particular del operador autoadjunto $A \doteq K^*K$, con $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ compacto y \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert. Para más detalles sobre la demostración referirse a Bachman y Narici ([5], Teorema 29.6 del Capítulo 29) o Dautray y Lions ([15], Corolario 5 del §3).

Sea entonces $(\sigma_n; v_n, u_n)_{n \in J}$ un sistema singular para K . Puesto que $(\sigma_n^2; v_n)_{n \in J}$ es un autosistema para el operador compacto autoadjunto K^*K , se tiene que

$$K^*Kx = \sum_{n \in J} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n.$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathcal{X}$ definamos

$$E_\lambda x \doteq \begin{cases} \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n, & \text{si } \lambda \leq 0 \\ \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n + Px, & \text{si } \lambda > 0, \end{cases} \tag{B.3}$$

siendo P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{N}(K) = \mathcal{N}(K^*K) = \mathcal{R}(K^*K)^\perp$. El operador E_λ puede escribirse de manera más simple como

$$E_\lambda x \doteq \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n (+ Px, \text{ si } \lambda > 0),$$

adicionamos el término entre paréntesis cuando $\lambda > 0$.

Obviamente que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, debido a la linealidad de P y del producto interno (respecto de la primera variable), el operador E_λ es lineal.

Probaremos que $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una familia espectral:

a) Sean $x \in \mathcal{X}$ y $\lambda \leq \mu$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \langle E_\lambda x, x \rangle &= \left\langle \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n (+Px), x \right\rangle \quad (\text{por (B.3)}) \\
 &= \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} |\langle x, v_n \rangle|^2 (+ \langle Px, x \rangle) \quad (\text{por prop. del } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
 &= \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} |\langle x, v_n \rangle|^2 (+ \|Px\|^2) \quad (\text{pues } P \text{ es proyec. ortog.}) \\
 &\leq \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \mu} |\langle x, v_n \rangle|^2 (+ \|Px\|^2) \quad (\text{pues } \lambda \leq \mu) \\
 &= \langle E_\mu x, x \rangle.
 \end{aligned}$$

Como x , λ , μ son arbitrarios se tiene que $\langle E_\lambda x, x \rangle \leq \langle E_\mu x, x \rangle$, $\forall x \in \mathcal{X}$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ con $\lambda \leq \mu$. Del Lema B.5 se sigue que

$$E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, E_λ satisface la condición (i) de la Definición B.1. De aquí se concluye además que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ es idempotente (pues, para $\mu = \lambda$ se tiene que $E_\lambda^2 = E_\lambda$). Por otro lado, para $x, y \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle E_\lambda x, y \rangle &= \left\langle \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n (+Px), y \right\rangle \quad (\text{por (B.3)}) \\
 &= \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle \langle v_n, y \rangle (+ \langle Px, y \rangle) \quad (\text{por prop. del } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
 &= \left\langle x, \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle y, v_n \rangle v_n \right\rangle (+ \langle x, Py \rangle) \quad (\text{prop. del } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
 &= \left\langle x, \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda}^{\infty} \langle y, v_n \rangle v_n (+Py) \right\rangle \\
 &= \langle x, E_\lambda y \rangle
 \end{aligned}$$

y por lo tanto E_λ es autoadjunto. Así, por la Definición A.75 y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que E_λ es una proyección ortogonal sobre su rango

$$R(E_\lambda) = \overline{\text{span}\{v_n / n \in J, \sigma_n^2 < \lambda\}} (+ \mathcal{N}(K^*K), \text{ si } \lambda > 0).$$

b) Para $\lambda \leq 0$ tenemos que $\sigma_n^2 > 0 \geq \lambda \quad \forall n \in J$, de modo que $\{v_n / n \in J, \sigma_n^2 < \lambda\} = \emptyset$. Por lo tanto, $E_\lambda = 0$ para todo $\lambda \leq 0$. En consecuencia, $E_{-\infty} = 0$. Para $\lambda > \sigma_1^2$ se tiene que $0 < \sigma_n^2 \leq \sigma_1^2 < \lambda \quad \forall n \in J$, de modo que $\{v_n / n \in J, \sigma_n^2 < \lambda\} = \{v_n\}_{n \in J}$. Así, $\{v_n\}_{n \in J}$ genera $\overline{\mathcal{R}(K^*K)} = \mathcal{N}(K^*K)^\perp$ siendo $\mathcal{R}(E_\lambda) = \overline{\mathcal{R}(K^*K)} + \mathcal{N}(K^*K) = \mathcal{X}$ y se tiene que

$$E_\lambda x = \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, v_n \rangle v_n + Px = \sum_{n \in J} \langle x, v_n \rangle v_n + Px = x,$$

pues $x = \sum_{n \in J} \langle x, v_n \rangle v_n + x_0$, $x_0 \in \mathcal{N}(K^*K)$ y P proyección sobre $\mathcal{N}(K^*K)$. Entonces, $E_\lambda = I$ para todo $\lambda > \sigma_1^2$. Luego, $E_{+\infty} = I$. En consecuencia, E_λ satisface la condición (ii) de la Definición B.1.

- c) Por último probemos que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_{\lambda-0} = E_\lambda$. Es decir, que la aplicación $E : \lambda \mapsto E_\lambda$ es fuertemente continua por la izquierda. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, usando la completitud de \mathcal{X} , mostraremos primero que existe $E_{\lambda-0}x \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\lambda-\varepsilon}x$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Sea $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona no decreciente que converge a λ por la izquierda. Como μ_n crece hacia λ , se sigue de (i) que la sucesión $\{\langle E_{\mu_n}x, x \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona no decreciente y está acotada superiormente por $\langle E_\lambda x, x \rangle$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle E_{\mu_n}x, x \rangle$ y, en consecuencia, dicha sucesión es de Cauchy en \mathbb{R} . En virtud de ésto y como (para $n > m$)

$$\begin{aligned} \|E_{\mu_n}x - E_{\mu_m}x\|^2 &= \langle (E_{\mu_n} - E_{\mu_m})x, x \rangle \quad (\text{pues } E_{\mu_n} - E_{\mu_m} \text{ proyec. ortog.}) \\ &= \langle E_{\mu_n}x, x \rangle - \langle E_{\mu_m}x, x \rangle \quad (\text{por prop. del } \langle \cdot, \cdot \rangle), \end{aligned}$$

se tiene que $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|E_{\mu_n}x - E_{\mu_m}x\| = 0$. Esto es, la sucesión $\{E_{\mu_n}x\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{X} . De la completitud de \mathcal{X} , se sigue entonces la existencia del límite $E_{\lambda-0}x$. Ahora queremos mostrar que $E_{\lambda-0} = E_\lambda$. Supongamos $\lambda > 0$ y elijamos $\varepsilon > 0$ de modo que $\lambda - \varepsilon > 0$. Definamos entonces

$$E_{\lambda-\varepsilon} \doteq \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda - \varepsilon} \langle \cdot, v_n \rangle v_n + P.$$

Puesto que 0 es el único punto de acumulación de $\sigma_p(K^*K)$, debe existir algún $\varepsilon > 0$ tal que $(\lambda - \varepsilon, \lambda) \cap \sigma_p(K^*K) = \emptyset$. Para tal ε ,

$$E_{\lambda-\varepsilon} = \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle \cdot, v_n \rangle v_n + P = E_\lambda.$$

Obviamente que si $\lambda > \sigma_1^2$, $E_{\lambda-\varepsilon} = E_\lambda = I$. De modo, E_λ satisface la condición (iii) de la Definición B.1 para $\lambda > 0$. En forma sencilla se demuestra para $\lambda \leq 0$, pues $\lambda - \varepsilon < 0$ para todo $\varepsilon > 0$, y así $E_\lambda = E_{\lambda-\varepsilon} = 0$.

De a), b) y c) se sigue que $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una familia espectral asociada al operador K^*K .

En lo que sigue probaremos que la función $E : \lambda \mapsto E_\lambda$ es constante a trozos y tiene saltos en $\lambda = \sigma_n^2$ (y en $\lambda = 0$ si y sólo si $\mathcal{N}(K) \neq \{0\}$) de “altura”

$$S_\lambda(\cdot) \doteq \sum_{n \in J: \sigma_n^2 = \lambda} \langle \cdot, v_n \rangle v_n.$$

En efecto, la función E es constante en los intervalos $(-\infty, 0]$ y (σ_1^2, ∞) pues $E_\lambda = 0$ para $\lambda \leq 0$ y $E_\lambda = I$ para $\lambda > \sigma_1^2$. Supongamos entonces $j_0 \in J$ tal que $\sigma_{j_0+1}^2 \neq \sigma_{j_0}^2$ y consideremos $\lambda \in (\sigma_{j_0+1}^2, \sigma_{j_0}^2]$. Puesto que

$$E_\lambda = \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \lambda} \langle \cdot, v_n \rangle v_n + P = \sum_{n \in J: \sigma_n^2 < \sigma_{j_0}^2} \langle \cdot, v_n \rangle v_n + P = E_{\sigma_{j_0}^2}$$

se tiene que la función E_λ es constante en el intervalo $(\sigma_{j_0+1}^2, \sigma_{j_0}^2]$. Veamos ahora que tiene saltos en $\lambda = \sigma_{j_0}^2$. Sabemos que para $\lambda \notin \sigma_p(K^*K)$, con $\lambda \neq 0$, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $[\lambda, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma_p(K^*K) = \emptyset$. Entonces $E_{\lambda+\varepsilon} - E_\lambda = 0$, lo cual implica $E_{\lambda+0} - E_\lambda = 0$. Ahora, si $\lambda \in \sigma_p(K^*K)$ y $\lambda \neq 0$ (es decir, si $\lambda = \sigma_{j_0}^2$ con $j_0 \in J$), elijamos $\varepsilon > 0$ tal que $[\lambda, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma_p(K^*K) = \{\lambda\}$. En consecuencia,

$$E_{\lambda+\varepsilon}(\cdot) - E_\lambda(\cdot) = \sum_{n \in J: \sigma_n^2 = \lambda} \langle \cdot, v_n \rangle v_n$$

de modo que

$$S_\lambda(\cdot) \doteq E_{\lambda+0}(\cdot) - E_\lambda(\cdot) = \sum_{n \in J: \sigma_n^2 = \lambda} \langle \cdot, v_n \rangle v_n$$

es el valor del salto de la función E en $\lambda = \sigma_n^2$. En $\lambda = 0$ tiene salto si y sólo si $\mathcal{N}(K) \neq \{0\}$ pues en este caso $E_{\lambda+\varepsilon} - E_\lambda = P \neq 0$.

Si recordamos que la integral con respecto a una función de peso constante por tramos, se define como la suma sobre todos los valores de la función del integrando donde la función de peso tiene saltos, multiplicada por el valor del salto, entonces podemos escribir a $K^*Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n$ como

$$K^*Kx = \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \in \sigma_p(K^*K)}}^{\infty} \lambda_j S_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (E_{\lambda_j^+} - E_{\lambda_j}) x,$$

donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > 0$ son los autovalores de K^*K con multiplicidades m_1, m_2, \dots , respectivamente. O bien, como la siguiente integral de Riemann-Stieljes

$$K^*Kx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x,$$

la cual se ajusta dentro del concepto teórico general de medida de una integral y será meramente una notación para operadores compactos. Notar que, los límites de integración podrían ser 0 y $\|K\|^2 + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ puesto que $\sigma(K^*K) \subset [0, \|K\|^2 + \varepsilon]$; y para enfatizar esto podemos usar la siguiente notación $\int_0^{\|K\|^2+}$ en lugar de $\int_{-\infty}^{+\infty}$. ■

Las familias espectrales asociadas a operadores autoadjuntos arbitrarios (posiblemente no acotados) no tienen aquellas propiedades simples que poseen los operadores autoajuntos compactos. Esto se debe a que el espectro de esos operadores es más complicado que el espectro de los operadores autoajuntos compactos.

En virtud de la Proposición B.7 es posible definir ahora funciones de un operador autoadjunto. Nos limitaremos al siguiente conjunto de funciones

$$\mathcal{M}_0 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles respecto a la medida } d\|E_\lambda x\|^2, \forall x \in \mathcal{X}\}.$$

Notar que las funciones continuas por tramos pertenecen a \mathcal{M}_0 .

Definición B.8. Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador autoadjunto con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Entonces, para $f \in \mathcal{M}_0$, el operador $f(A)$ está definido por

$$f(A)x \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x, \quad x \in \mathcal{D}(f(A)), \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\mathcal{D}(f(A)) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\}.$$

Simbólicamente escribamos

$$f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda.$$

Observación B.9. Notar que el operador $f(A)$ definido en (B.4) es formalmente lineal puesto que E_λ es lineal y el proceso límite también lo es. La linealidad del operador $f(A)$ se prueba como consecuencia inmediata del hecho que $\mathcal{D}(f(A))$ es un subespacio de \mathcal{X} . En efecto:

- (i) Sean $x, y \in \mathcal{D}(f(A))$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda y\|^2 < \infty$. Por la ley del Paralelogramo (ver Apéndice A, Definición A.21, Propiedad adicional c)) y el hecho que E_λ es lineal se tiene que

$$\|E_\lambda(x+y)\|^2 = 2\|E_\lambda x\|^2 + 2\|E_\lambda y\|^2 - \|E_\lambda(x-y)\|^2,$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda(x+y)\|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda y\|^2 < \infty.$$

Así, $x+y \in \mathcal{D}(f(A))$ y se tiene que $f(A)(x+y) = f(A)x + f(A)y$.

- (ii) Sean $\alpha \in \mathbb{k}$ y $x \in \mathcal{D}(f(A))$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \|E_\lambda(\alpha x)\|^2 &= \|\alpha E_\lambda x\|^2 \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es lineal}) \\ &= \alpha^2 \|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por prop. de } \|\cdot\|), \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda(\alpha x)\|^2 = \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty.$$

Así, $\alpha x \in \mathcal{D}(f(A))$ y se tiene que $f(A)(\alpha x) = \alpha f(A)x$.

En consecuencia, de (i) y (ii), el operador $f(A)$ es lineal.

Proposición B.10. Sean $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador autoadjunto con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, $f \in \mathcal{M}_0$ y $f(A)$ definido por (B.4). Entonces, para todo $x \in \mathcal{D}(f(A))$ y para todo $y \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$\langle f(A)x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle. \quad (\text{B.5})$$

Demostración. Ver Dautray y Lions ([15], Proposición 4 del §3), Akhiezer y Glazman ([3], Volumen II, Teorema pág 69-71). ■

Proposición B.11. Sean $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador autoadjunto con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ y $f, g \in \mathcal{M}_0$. Las siguientes afirmaciones valen:

(i) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(A)$ conmuta con E_λ sobre $\mathcal{D}(f(A))$.

(ii) Si $x \in \mathcal{D}(f(A))$, $y \in \mathcal{D}(g(A))$ entonces

$$\langle f(A)x, g(A)y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d \langle E_\lambda x, y \rangle.$$

(iii) Si $x \in \mathcal{D}(f(A))$ entonces $f(A)x \in \mathcal{D}(g(A))$ si y sólo si $x \in \mathcal{D}((g.f)(A))$ (donde $(g.f)(\lambda) = g(\lambda).f(\lambda)$). En tal caso

$$g(A) f(A)x = (g.f)(A)x.$$

(iv) Si $\mathcal{D}(f(A))$ es denso en \mathcal{X} , entonces $f(A)$ es autoadjunto.

(v) Si $f \neq 0$ c.t.p con respecto a la medida $d \|E_\lambda x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{D}(f(A))$, entonces existe $(f(A))^{-1}$ y se tiene que

$$(f(A))^{-1} = \left(\frac{1}{f} \right) (A).$$

Demostración. (i) En lo que sigue utilizaremos d_μ en lugar de d , para remarcar la variable de diferenciación. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probaremos que $E_\lambda f(A)x = f(A)E_\lambda x \forall x \in \mathcal{D}(f(A))$. Para ello, sean $x \in \mathcal{D}(f(A))$, $y \in \mathcal{X}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle E_\lambda f(A)x, y \rangle &= \langle f(A)x, E_\lambda y \rangle \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es autoadjunto}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) d_\mu \langle E_\mu x, E_\lambda y \rangle \quad (\text{por (B.5)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) d_\mu \langle E_\lambda E_\mu x, y \rangle \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es autoadjunto}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) d_\mu \langle E_\mu E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{pues } E_\mu, E_\lambda \text{ conmutan por ser proyec.}) \\ &= \langle f(A)E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{por (B.5)}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $E_\lambda x \in \mathcal{D}(f(A))$ pues

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda(E_\lambda x)\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda^2 x\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es proyec.}) \\ &< \infty \quad (\text{pues } x \in \mathcal{D}(f(A))). \end{aligned}$$

Como $y \in \mathcal{X}$ es arbitrario se tiene que

$$E_\lambda f(A)x = f(A)E_\lambda x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f(A)).$$

(ii) En lo que sigue utilizaremos d_λ y d_μ en lugar de d , para remarcar la variable de diferenciación. Sean $x \in \mathcal{D}(f(A))$, $y \in \mathcal{D}(g(A))$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle f(A)x, g(A)y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, g(A)y \rangle \quad (\text{por (B.5)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \langle x, E_\lambda g(A)y \rangle \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es autoadjunto}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \overline{\langle E_\lambda g(A)y, x \rangle} \quad (\text{por Def. A.20 (iii)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \overline{\langle g(A)E_\lambda y, x \rangle} \quad (\text{por (i)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) d_\mu \langle E_\mu E_\lambda y, x \rangle} \quad (*) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) d_\mu \overline{\langle E_\mu E_\lambda y, x \rangle} \quad (\text{pues } g \text{ es real}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} g(\mu) d_\mu \overline{\langle E_\mu y, x \rangle} \quad (\text{pues } E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \mu\}}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d_\lambda \overline{\langle E_\lambda y, x \rangle} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d_\lambda \langle x, E_\lambda y \rangle \quad (\text{por prop. del } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es autoadjunto}), \end{aligned}$$

donde la igualdad (*) se sigue de (B.5) ya que $E_\lambda y \in \mathcal{D}(g(A))$ pues

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d \|E_\lambda(E_\lambda y)\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d \|E_\lambda^2 y\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d \|E_\lambda y\|^2 \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es proyec.}) \\ &< \infty \quad (\text{pues } y \in \mathcal{D}(g(A))). \end{aligned}$$

Queda probado entonces (ii).

En particular, si $g = f$, $y = x$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|f(A)x\|^2 &= \langle f(A)x, f(A)x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \langle E_\lambda x, x \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Más aún, si $f \equiv 1$ se tiene que $\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d \|E_\lambda x\|^2$.

(iii) En lo que sigue utilizaremos d_λ y d_μ en lugar de d , para remarcar la variable de diferenciación. Sea $x \in \mathcal{D}(f(A))$. Entonces

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda f(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \|f(A)E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (i)}) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \langle f(A)E_\lambda x, f(A)E_\lambda x \rangle \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\mu) d_\mu \langle E_\mu E_\lambda x, E_\lambda x \rangle \quad (\text{por (ii)}) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\mu) d_\mu \|E_\mu E_\lambda x\|^2 \quad (\text{pues } E_\mu \text{ es proyec.}) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} f^2(\mu) d_\mu \|E_\mu x\|^2 \quad (E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \mu\}}) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) f^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda x\|^2 \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} (g \cdot f)^2(\lambda) d_\lambda \|E_\lambda x\|^2.
 \end{aligned}$$

Así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\lambda) d \|E_\lambda f(A)x\|^2 < \infty \iff \int_{-\infty}^{+\infty} (g \cdot f)^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2 < \infty.$$

Entonces, bajo la hipótesis general $x \in \mathcal{D}(f(A))$, las dos condiciones $f(A)x \in \mathcal{D}(g(A))$ y $x \in \mathcal{D}((g \cdot f)(A))$ son equivalentes. Además, si $x \in \mathcal{D}((g \cdot f)(A))$, $y \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle g(A)f(A)x, y \rangle & = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d \langle E_\lambda f(A)x, y \rangle \quad (\text{por (B.5)}) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d \langle f(A)E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{por (i)}) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) d_\mu \langle E_\mu E_\lambda x, y \rangle \quad (*) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d_\mu \langle E_\mu x, y \rangle \quad (\text{pues } E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \mu\}}) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) f(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, y \rangle \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} (g \cdot f)(\lambda) d_\lambda \langle E_\lambda x, y \rangle \\
 & = \langle (g \cdot f)(A)x, y \rangle \quad (\text{por (B.5)}).
 \end{aligned}$$

donde la igualdad (*) se sigue de (B.5) ya que $E_\lambda x \in \mathcal{D}(f(A))$ pues $x \in \mathcal{D}(f(A))$. Como $y \in \mathcal{X}$ es arbitrario, se sigue que

$$g(A) f(A)x = (g \cdot f)(A)x, \forall x \in \mathcal{D}(f(A)).$$

(iv) Sea $f \in \mathcal{M}_0$ función acotada en casi todo punto con respecto a la medida $d\|E_\lambda x\|^2 \forall x \in \mathcal{X}$. Entonces f es integrable con respecto a $d\|E_\lambda x\|^2 \forall x \in \mathcal{X}$, y se tiene que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$. Así, $\mathcal{D}(f(A)) = \mathcal{X}$. En consecuencia, para todos $x, y \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned}
\langle f(A)x, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle \quad (\text{por (B.5) pues } x \in \mathcal{X} = \mathcal{D}(f(A))) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle \quad (\text{pues } E_\lambda \text{ es autoadjunto}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\overline{\langle E_\lambda y, x \rangle} \quad (\text{por Def. A.20 (iii)}) \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda y, x \rangle} \quad (\text{pues } f \text{ es real}) \\
&= \overline{\langle f(A)y, x \rangle} \quad (\text{por (B.5) pues } y \in \mathcal{X} = \mathcal{D}(f(A))) \\
&= \langle x, f(A)y \rangle \quad (\text{por Def. A.20 (iii)}). \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Luego, $f(A)$ es autoadjunto.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{M}_0$ no es acotada y que $\mathcal{D}(f(A))$ denso en \mathcal{X} (en otro caso, no está definido el adjunto del operador $f(A)$). Sea $y \in \mathcal{D}((f(A))^*)$ entonces existe $y^* \in \mathcal{X}$ tal que

$$\langle f(A)x, y \rangle = \langle x, y^* \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f(A)). \tag{B.8}$$

Debemos probar que $y \in \mathcal{D}(f(A))$ y que $y^* = f(A)y$. Para ello, denotemos por $e_n = \{t \in \mathbb{R} / |f(t)| < n\}$ y definamos

$$f_n(t) \doteq \begin{cases} f(t), & t \in e_n \\ 0, & t \notin e_n \end{cases}.$$

Obviamente que para todo n , f_n es acotada y $\mathcal{D}(f_n(A)) = \mathcal{X}$. Entonces, por el caso anterior, para todo $z \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$\langle f_n(A)z, y \rangle = \langle z, f_n(A)y \rangle. \tag{B.9}$$

Sea χ_{e_n} la función característica sobre e_n , de modo que $\chi_{e_n} \in \mathcal{M}_0$ (por ser continua por tramos) y es acotada. Entonces el operador $\chi_{e_n}(A)$ está definido sobre $\mathcal{D}(\chi_{e_n}(A)) = \mathcal{X}$. Además, χ_{e_n} es un operador proyección. En efecto, para cualquier $z \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(\chi_{e_n}(A))^2 z &= \chi_{e_n}(A)\chi_{e_n}(A)z = \chi_{e_n}^2(A)z \quad (\text{por (iii)}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{e_n}^2(\lambda) dE_\lambda z = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{e_n}(\lambda) dE_\lambda z \\
&= \chi_{e_n}(A)z.
\end{aligned}$$

Definamos entonces $x \doteq \chi_{e_n}(A)z$ y probemos que dicho elemento esta en $\mathcal{D}(f(A))$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda \chi_{e_n}(A)z\|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|\chi_{e_n}(A)E_\lambda z\|^2 \quad (\chi_{e_n} \text{ conmuta con } E_\lambda \text{ por (i)}) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{e_n}^2(\mu) d_\mu \|E_\mu E_\lambda z\|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} \chi_{e_n}^2(\mu) d_\mu \|E_\mu z\|^2 \quad (E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \mu\}}) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) \chi_{e_n}^2(\lambda) d\|E_\lambda z\|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(\lambda) d\|E_\lambda z\|^2 < \infty \quad (f_n \text{ acotada, } z \in \mathcal{X} = \mathcal{D}(f_n(A))).
 \end{aligned}$$

Luego, $x \in \mathcal{D}(f(A))$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \langle \chi_{e_n}(A)z, y^* \rangle &= \langle f(A)\chi_{e_n}(A)z, y \rangle \quad (\text{por (B.8)}) \\
 &= \langle (f \cdot \chi_{e_n})(A)z, y \rangle \quad (\text{por (iii)}) \\
 &= \langle f_n(A)z, y \rangle \quad (\text{por definición de } f_n) \\
 &= \langle z, f_n(A)y \rangle \quad (\text{por (B.9)})
 \end{aligned}$$

y en consecuencia, como $\chi_{e_n}(A)$ es proyección la igualdad anterior puede escribirse como

$$\langle z, \chi_{e_n}(A)y^* \rangle = \langle z, f_n(A)y \rangle.$$

Puesto que z es arbitrario, se sigue que $\chi_{e_n}(A)y^* = f_n(A)y$. Por lo tanto

$$\|f_n(A)y\| = \|\chi_{e_n}(A)y^*\| \leq \|y^*\| \quad (\text{pues } \chi_{e_n}(A) \text{ es proyec.})$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(\lambda) d\|E_\lambda y\|^2 \leq \|y^*\|^2. \quad (\text{B.10})$$

Tomando límite en (B.10) para $n \rightarrow \infty$ y por el Teorema de la Convergencia Dominada (pues $|f_n| \leq |f|$ y $f_n \rightarrow f$) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda y\|^2 \leq \|y^*\|^2 < \infty.$$

Luego, $y \in \mathcal{D}(f(A))$. Resta probar que $y^* = f(A)y$. Entonces, si $y \in \mathcal{D}(f(A))$ se puede demostrar en forma análoga a lo efectuado para probar la igualdad (B.7) que

$$\langle f(A)x, y \rangle = \langle x, f(A)y \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f(A)). \quad (\text{B.11})$$

De (B.8) y (B.11) se sigue que $y^* = f(A)y$, como queríamos probar. Luego, $f(A)$ es autoadjunto.

(v) Sabemos que

$$\begin{aligned} \exists (f(A))^{-1} &\iff (f(A)x = 0 \implies x = 0) \\ &\iff \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 = 0 \implies x = 0 \right) \end{aligned}$$

Esta última condición se satisface si y sólo si el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda) = 0\}$ tiene medida nula para cada medida $d\|E_\lambda x\|^2$, con $x \in \mathcal{X}$. Como esta condición se satisface por hipótesis, es evidente de (iii) que la función $\frac{1}{f}$ define el operador $(f(A))^{-1}$ como $(f(A))^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A)$. Esto concluye la demostración de la proposición. ■

Proposición B.12. Sean \mathcal{X} espacio de Hilbert y $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador autoadjunto con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ y espectro $\sigma(A)$. Entonces valen las siguientes propiedades:

- (i) $\lambda_0 \in \sigma(A)$ si y sólo si $E_{\lambda_0 - \epsilon} \neq E_{\lambda_0 + \epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$.
- (ii) $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ si y sólo si $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 + 0} \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_{\lambda_0 + \epsilon}$; el correspondiente espacio propio está dado por

$$V_{\lambda_0} \doteq \mathcal{R}(E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0}) = (E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0})\mathcal{X}.$$

Demostración. Usaremos en repetidas ocasiones la siguiente representación

$$\|(A - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E_\lambda x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (\text{B.12})$$

(i) Probaremos la condición necesaria por el contrareciproco. Supongamos que λ_0 es tal que existe $\epsilon > 0$ con $E_{\lambda_0 - \epsilon} = E_{\lambda_0 + \epsilon}$, es decir λ_0 es un punto de constancia. Entonces para $x \in \mathcal{D}(A)$ la función $\lambda \mapsto \langle E_\lambda x, x \rangle$ es constante en el intervalo $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ por ser no decreciente, de modo que

$$d\|E_\lambda x\|^2 = 0 \text{ si } |\lambda - \lambda_0| < \epsilon. \quad (\text{B.13})$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda_0 I)x\|^2 &= \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (B.12) y (B.13)}) \\ &\geq \epsilon^2 \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon} d\|E_\lambda x\|^2 \\ &= \epsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (B.13)}) \\ &= \epsilon^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\|(A - \lambda_0 I)x\| \geq \epsilon \|x\|$. Es decir, existe $(A - \lambda_0 I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ y por lo tanto $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ (ver Apéndice A, Definición A.84 (ii)).

Recíprocamente, razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ y que $E_{\lambda_0-\epsilon} \neq E_{\lambda_0+\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0$. Entonces existe $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ y es acotado, lo cual significa que $A - \lambda_0 I$ tiene inversa continua. En consecuencia existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\|(A - \lambda_0 I)x\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (\text{B.14})$$

Elijamos ahora ϵ tal que $0 < \epsilon < \alpha$. Puesto que $E_{\lambda_0+\epsilon} - E_{\lambda_0-\epsilon} \neq 0$, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $(E_{\lambda_0+\epsilon} - E_{\lambda_0-\epsilon})y \neq 0$. Definiendo

$$x \doteq (E_{\lambda_0+\epsilon} - E_{\lambda_0-\epsilon})y \neq 0 \quad (\text{B.15})$$

se obtiene inmediatamente que $\|E_\lambda x\|^2 = \langle E_\lambda(E_{\lambda_0+\epsilon} - E_{\lambda_0-\epsilon})y, x \rangle$ es igual a cero si $\lambda < \lambda_0 - \epsilon$ y es independiente de λ si $\lambda > \lambda_0 + \epsilon$. Para $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|E_\lambda x\|^2 &= \|E_\lambda(E_{\lambda_0+\epsilon} - E_{\lambda_0-\epsilon})y\|^2 \\ &= \|(E_\lambda - E_{\lambda_0-\epsilon})y\|^2 \quad (\text{pues } E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}) \\ &= \langle (E_\lambda - E_{\lambda_0-\epsilon})y, y \rangle \quad (\text{por ser } E_\lambda - E_{\lambda_0-\epsilon} \text{ proyec. ortog.}) \\ &= \langle E_\lambda y, y \rangle - \langle E_{\lambda_0-\epsilon} y, y \rangle \quad (\text{por prop. del } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ &= \|E_\lambda y\|^2 - \|E_{\lambda_0-\epsilon} y\|^2. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$d \|E_\lambda x\|^2 = \begin{cases} 0, & \text{si } |\lambda - \lambda_0| > \epsilon \\ d \|E_\lambda y\|^2, & \text{si } |\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon \end{cases}. \quad (\text{B.16})$$

Además $x \in \mathcal{D}(A)$ puesto que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d \|E_\lambda x\|^2 &= \int_{|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon} \lambda^2 d \|E_\lambda y\|^2 \quad (\text{por (B.16)}) \\ &\leq (\lambda_0 + \epsilon)^2 \int_{|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon} d \|E_\lambda y\|^2 \\ &= (\lambda_0 + \epsilon)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d \|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (B.16)}) \\ &= (\lambda_0 + \epsilon)^2 \|x\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

De modo que, aplicando la desigualdad al elemento x definido en (B.15), se obtiene que

$$\begin{aligned} \alpha^2 \|x\|^2 &\leq \|(A - \lambda_0 I)x\|^2 \quad (\text{por (B.14)}) \\ &= \int_{|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d \|E_\lambda y\|^2 \quad (\text{por (B.16)}) \\ &\leq \epsilon^2 \int_{|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon} d \|E_\lambda y\|^2 \\ &= \epsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d \|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (B.16)}) \\ &= \epsilon^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$ se tiene que $\alpha < \epsilon$, lo cual es una clara contradicción por la manera en que ϵ ha sido elegido.

(ii) Sean λ_0 un valor propio del operador A y x un vector propio asociado a él. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \|(A - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (B.12)}) \\ &\geq \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E_\lambda x\|^2 \\ &\geq \epsilon^2 \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon} d\|E_\lambda x\|^2 \geq 0 \quad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $\int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon} d\|E_\lambda x\|^2 = 0 \quad \forall \epsilon > 0$. En consecuencia, para todo $\epsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{\lambda_0 - \epsilon} d\|E_\lambda x\|^2 + \int_{\lambda_0 + \epsilon}^{+\infty} d\|E_\lambda x\|^2 = 0$ implica que

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0 - \epsilon} d\|E_\lambda x\|^2 = \|E_{\lambda_0 - \epsilon} x\|^2 - \|E_{-\infty} x\|^2 = 0$$

y

$$\int_{\lambda_0 + \epsilon}^{+\infty} d\|E_\lambda x\|^2 = \|E_{\infty} x\|^2 - \|E_{\lambda_0 + \epsilon} x\|^2 = 0,$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$\begin{cases} \|E_{\lambda_0 - \epsilon} x\|^2 = \|E_{-\infty} x\|^2 = 0 \quad \forall \epsilon > 0 & (\text{pues } E_{-\infty} = 0) \\ \|E_{\lambda_0 + \epsilon} x\|^2 = \|E_{\infty} x\|^2 = \|x\|^2 \quad \forall \epsilon > 0 & (\text{pues } E_{\infty} = I) \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Puesto que la función $\lambda \mapsto \|E_\lambda x\|^2$ es continua por la izquierda y las normas en un espacio de Hilbert son continuas, tomando límite en (B.17) para $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene que

$$\begin{cases} \|E_{\lambda_0 - 0} x\|^2 = \|E_{\lambda_0} x\|^2 = 0 \\ \|E_{\lambda_0 + 0} x\|^2 = \|x\|^2 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Por otro lado, como $x = E_{\lambda_0 + 0} x + (I - E_{\lambda_0 + 0})x$, por el Teorema de Pitágoras (pues $E_{\lambda_0 + 0} \perp I - E_{\lambda_0 + 0}$) se tiene que

$$\|x\|^2 = \|E_{\lambda_0 + 0} x\|^2 + \|(I - E_{\lambda_0 + 0})x\|^2$$

y por (B.18) se sigue que $\|(I - E_{\lambda_0 + 0})x\| = 0$. Así, $\begin{cases} E_{\lambda_0 + 0} x = x \\ E_{\lambda_0} x = 0 \end{cases}$ y en consecuencia $(E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0})x = x \neq 0$. Por lo tanto $E_{\lambda_0 + 0} \neq E_{\lambda_0}$ y $x \in \mathcal{R}(E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0})$. Se concluye entonces que

$$\mathcal{N}(A - \lambda_0 I) \subset \mathcal{R}(E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0}). \quad (\text{B.19})$$

Recíprocamente, supongamos ahora que λ_0 es tal que $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 + 0}$. Entonces existe $y \in \mathcal{X}$ tal que

$$x \doteq (E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0})y \neq 0. \quad (\text{B.20})$$

Por otro lado, la función $\|E_\lambda x\|^2 = \langle E_\lambda (E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0})y, x \rangle$ es igual a cero si $\lambda < \lambda_0$ (pues $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$) y es independiente de λ si $\lambda > \lambda_0$. En consecuencia,

$d\|E_\lambda x\|^2 = 0$ para $\lambda \neq \lambda_0$ ya que $\|E_\lambda x\|^2$ es continuamente constante en todos los puntos excepto para $\lambda = \lambda_0$. Entonces $x \in \mathcal{D}(A)$ pues $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 = 0 < \infty$. Aplicando la representación (B.12) al elemento $x \neq 0$, definido por (B.20), se obtiene que $\|(A - \lambda_0 I)x\| = 0$ y en consecuencia $Ax = \lambda_0 x$. Por lo tanto λ_0 es un valor propio de A y esto implica que $x \in \mathcal{N}(A - \lambda_0 I)$. Se concluye entonces que

$$\mathcal{R}(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}) \subset \mathcal{N}(A - \lambda_0 I). \quad (\text{B.21})$$

De (B.19) y (B.21) se tiene que vale (ii). ■

A continuación enunciaremos algunas propiedades simples de funciones de operadores autoadjuntos, las cuales son una consecuencia inmediata de la representación integral de esos operadores y serán muy importantes en las demostraciones de algunos resultados que se presentan en el Capítulo 2.

- a) Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es un operador autoadjunto estrictamente positivo (i.e. existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$), con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ entonces A tiene la representación integral

$$A = \int_{\alpha}^{+\infty} \lambda dE_\lambda,$$

i.e., $E_\lambda = 0$ para $\lambda \leq \alpha$. En consecuencia, para toda función $f \in \mathcal{M}_0$ se tiene que

$$f(A)x = \int_{\alpha}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x, \quad x \in \mathcal{D}(f(A)).$$

Luego, es suficiente con que la función f esté definida en el intervalo $[\alpha, \infty)$.

- b) Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es un operador autoadjunto tal que existe una constante $\beta > 0$ con $\langle Ax, x \rangle \leq \beta \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$, con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ entonces A tiene la representación integral

$$A = \int_{-\infty}^{\beta} \lambda dE_\lambda,$$

i.e., $E_\lambda = I$ para $\lambda > \beta$. En consecuencia, para toda función $f \in \mathcal{M}_0$ se tiene que

$$f(A)x = \int_{-\infty}^{\beta} f(\lambda) dE_\lambda x, \quad x \in \mathcal{D}(f(A)).$$

Luego, es suficiente con que la función f esté definida en el intervalo $(-\infty, \beta)$.

- c) Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es un operador autoadjunto tal que

$$\inf_{x \in \mathcal{D}(A): x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \doteq \alpha, \quad \sup_{x \in \mathcal{D}(A): x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \doteq \beta,$$

con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ entonces A tiene la representación integrales

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda dE_\lambda,$$

i.e., $E_\lambda = 0$ para $\lambda \leq \alpha$ y $E_\lambda = I$ para $\lambda > \beta$. En consecuencia, para toda función $f \in \mathcal{M}_0$ se tiene que

$$f(A)x = \int_\alpha^\beta f(\lambda) dE_\lambda x, \quad x \in \mathcal{D}(f(A)).$$

Luego, es suficiente con que la función f esté definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Consideraremos ahora el siguiente caso particular, que es de especial interés en la tesis. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $A \doteq T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con la familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ tal que

$$\inf_{x \in \mathcal{D}(A): x \neq 0} \frac{\langle T^*Tx, x \rangle}{\|x\|^2} = \alpha \geq 0, \quad \sup_{x \in \mathcal{D}(A): x \neq 0} \frac{\langle T^*Tx, x \rangle}{\|x\|^2} = \|T\|^2.$$

Entonces para toda función $f \in \mathcal{M}_0$ y $x \in \mathcal{D}(f(A))$ se tiene que

$$f(A)x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x = \int_0^{\|T\|^2 + \varepsilon} f(\lambda) dE_\lambda x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\|T\|^2 + \varepsilon} f(\lambda) dE_\lambda x.$$

Luego la función f puede ser restringida al intervalo $[0, \|T\|^2 + \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$.

Proposición B.13. (DESIGUALDAD DE INTERPOLACIÓN)

Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces, para todo $s > r \geq 0$, se tiene que

$$\|(T^*T)^r x\| \leq \|(T^*T)^s x\|^{\frac{r}{s}} \|x\|^{1 - \frac{r}{s}}. \quad (\text{B.22})$$

Demostración. Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada al operador autoadjunto $T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ y sean $s > r \geq 0$. Entonces

$$\|(T^*T)^r x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2r} d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (B.6)})$$

Entonces, usando la Desigualdad de Hölder¹ con $p = \frac{s}{r}$, $q = \frac{s}{s-r}$, $f(\lambda) = \lambda^{2r}$ y $g(\lambda) = 1$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|(T^*T)^r x\|^2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{2r})^{\frac{s}{r}} d\|E_\lambda x\|^2 \right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\|E_\lambda x\|^2 \right)^{\frac{s-r}{s}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2s} d\|E_\lambda x\|^2 \right)^{\frac{r}{s}} (\|x\|^2)^{\frac{s-r}{s}} \\ &= (\|(T^*T)^s x\|^2)^{\frac{r}{s}} (\|x\|^2)^{1 - \frac{r}{s}} \quad (\text{por (B.6)}) \\ &= \left(\|(T^*T)^s x\|^{\frac{r}{s}} \right)^2 \left(\|x\|^{1 - \frac{r}{s}} \right)^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue inmediatamente (B.22). ■

¹DESIGUALDAD DE HOLDER (para integrales): sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces

$$\int |f(\lambda)g(\lambda)| d\lambda \leq \left(\int |f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(\lambda)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposición B.14. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y f una función continua por tramos en el intervalo $[0, \|T\|^2]$. Entonces

(i) $T f(T^*T) = f(TT^*) T$;

(ii) $T^* f(TT^*) = f(T^*T) T^*$.

Demostración. Probaremos sólo (i) para el caso particular de f continua. En efecto, si $p(\lambda) = \sum_{j=0}^N a_j \lambda^j$ es un polinomio, es natural definir

$$p(A) \doteq \sum_{j=0}^N a_j A^j, \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

En consecuencia, $p(T^*T) \doteq \sum_{j=0}^N a_j (T^*T)^j$. Así, para todo $x \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$\begin{aligned} T p(T^*T)x &= T \sum_{j=0}^N a_j (T^*T)^j x = \sum_{j=0}^N a_j T (T^*T)^j x \\ &= \sum_{j=0}^N a_j (T T^*)^j T x = p(T T^*) T x. \end{aligned}$$

Luego, $T p(T^*T) = p(T T^*) T$.

Sea ahora $f \in C([0, \|T\|^2])$, por el Teorema de Aproximación de Weierstrass sabemos que existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $p_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{N_n} a_j^{(n)} \lambda^j$ tal que $\|f - p_n\|_\infty \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, donde $\|f - p_n\|_\infty = \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} \{(f(\lambda) - p_n(\lambda))^2\}$. Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral asociada a T^*T :

$$\begin{aligned} \|f(T^*T)x - p_n(T^*T)x\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\lambda) - p_n(\lambda))^2 d\|E_\lambda x\|^2 \\ &\leq \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} \{(f(\lambda) - p_n(\lambda))^2\} \int_{-\infty}^{+\infty} d\|E_\lambda x\|^2 \\ &= \|f - p_n\|_\infty \|x\|^2 \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así, $p_n(T^*T)x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(T^*T)x$, $\forall x \in \mathcal{X}$. En forma análoga se prueba que $p_n(T T^*)y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(T T^*)y$, $\forall y \in \mathcal{Y}$. En consecuencia, para todo $x \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$\begin{aligned} T f(T^*T)x &= T \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T^*T)x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T p_n(T^*T)x \quad (\text{pues } T \text{ es continuo}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T T^*)T x \\ &= f(T T^*)T x. \end{aligned}$$

Luego, $T f(T^*T) = f(T T^*)T$, como se quería probar. ■

Proposición B.15. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces

$$\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}\left((T^*T)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Demostración. Sean $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ y $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ las familias espectrales asociadas a los operadores autoadjuntos $T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ y $TT^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, respectivamente. Definamos para $\rho > 0$

$$f_\rho(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda} \chi_{[\rho, \infty)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \geq \rho \\ 0, & \lambda < \rho \end{cases}.$$

Notar que $f_\rho \in \mathcal{M}_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_\rho^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} d\|F_\lambda Tx\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\rho^2(\lambda) d\|F_\lambda Tx\|^2 \\ &= \|f_\rho(TT^*)Tx\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &= \|T f_\rho(T^*T)x\|^2 \quad (\text{por Proposición B.14 (i)}) \\ &= \langle T f_\rho(T^*T)x, T f_\rho(T^*T)x \rangle \\ &= \langle f_\rho(T^*T)x, T^*T f_\rho(T^*T)x \rangle \\ &= \left\langle f_\rho(T^*T)x, (T^*T)^{\frac{1}{2}} (T^*T)^{\frac{1}{2}} f_\rho(T^*T)x \right\rangle \\ &= \left\langle (T^*T)^{\frac{1}{2}} f_\rho(T^*T)x, (T^*T)^{\frac{1}{2}} f_\rho(T^*T)x \right\rangle \\ &= \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} f_\rho(T^*T)x \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f_\rho^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 \quad (\text{por (B.6)}) \\ &= \int_\rho^{+\infty} \frac{1}{\lambda} d\|E_\lambda x\|^2. \end{aligned}$$

Tomando límite para $\rho \rightarrow 0$ se tiene que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} d\|F_\lambda Tx\|^2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} d\|E_\lambda x\|^2. \quad (\text{B.23})$$

Probaremos ahora que $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}\left((T^*T)^{\frac{1}{2}}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{R}(T^*) &\iff \exists y \in \mathcal{Y} : x = T^*y \\ &\iff \exists y \in \mathcal{Y} : Tx = TT^*y \wedge x \in \mathcal{N}(T)^\perp \\ &\iff Tx \in \mathcal{R}(TT^*) \wedge x \in \mathcal{N}(T)^\perp \\ &\iff Tx \in \mathcal{D}\left((TT^*)^\dagger\right) \wedge x \in \mathcal{N}(T)^\perp \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} d\|F_\lambda Tx\|^2 < \infty \wedge x \in \mathcal{N}(T)^\perp \quad (\text{por (B.23)}) \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \wedge x \in \mathcal{N}(T)^\perp \\ &\iff x \in \mathcal{D}\left((T^*T|_{\mathcal{N}(T)^\perp})^{-\frac{1}{2}}\right) \wedge x \in \mathcal{N}(T)^\perp \\ &\iff x \in \mathcal{R}\left((T^*T)^{\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

como se quería probar. ■

Bibliografía

- [1] R. ACAR Y C. R. VOGEL: *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*, Inverse Problems 10, 1994, 1217-1229.
- [2] R. A. ADAMS: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York-London, 1975.
- [3] N. I. AKHIEZER Y I. M. GLAZMAN: *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Volume II, Frederick Ungar Publishing, 1963.
- [4] H. ATTOUCH, G. BUTTAZZO Y G. MICHAILLE: *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces*. MPS/SIAM Series on Optimization, Vol. 6, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2006, Applications to PDEs and optimization.
- [5] G. BACHMAN Y L. NARICI: *Functional Analysis*, Academic Press, 1966.
- [6] A. B. BAKUSHINSKII: *Remarks on choosing a regularization parameter using the quasi-optimality and ratio criterion*, USSR Comp. Math. Phys. 24.4 (1984), 181-182.
- [7] J. BECK, B. BLACKWELL Y C. S. CLAIR: *Inverse Heat Conductions*, Wiley, Sussex, 1985.
- [8] A. BINDER, H. W. ENGL Y S. VESSELLA: *Some inverse problems for a nonlinear parabolic equation connected with continuous casting of steel: stability estimates and regularization*, Numer. Funct. Anal. Optim. 11, 1990, 643-672.
- [9] E. CASAS, K. KUNISCH Y C. POLA: *Regularization by functions of bounded variation and applications to image enhancement*, Appl. Math. Optim. 40, 1999, 229-257.
- [10] A. CHAMBOLLE Y P. L. LIONS: *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Numerische Mathematik, 76, 1997, 167-188.
- [11] G. CHAVENT Y K. KUNISCH: *Regularization of linear least squares problems by total bounded variation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2, 1997, 359-376.
- [12] J. B. CONWAY: *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2da edición, 1994.
- [13] C. E. CREEFFIELD, E. G. KLEPFISH, E. R. PIKE Y S. SANKAR: *Spectral weight functions for the half-filled Hubbard model: a singular value decomposition approach*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995), 517-520.

- [14] R. F. CURTAIN Y A. J. PRITCHARD: *Functional analysis in modern applied mathematics*, Academic Press, [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1977, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 132.
- [15] R. DAUTRAY Y J. L. LIONS: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 3: Spectral Theory and Applications*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- [16] D. DOBSON Y F. SANTOSA: *An image enhancement technique for electrical impedance tomography*, Inverse Problems, Vol. 10, 1994, 317-334.
- [17] L. ELDEN: *A weighted pseudoinverse, generalized singular values, and constrained least squares problems*, BIT 22 (1982), 487-502.
- [18] H. W. ENGL, M. HANKE Y A. N. NEUBAUER: *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [19] H. W. ENGL Y T. LANGTHALER: *Control of the solidification front by secondary cooling in continuous casting of steel*, in: H. W. Engl, H. Wacker and W. Zulehner, eds., Case Studies in Industrial Mathematics, Teubner/Kluwer, Stuttgart/Dordrecht, 1988.
- [20] H. W. ENGL, A. K. LOUIS Y W. RUNDELL: *Inverse Problems in Geophysics*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [21] H. W. ENGL Y W. RUNDELL, eds: *Inverse Problems in Diffusion Processes*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [22] L. C. EVANS: *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [23] G. B. FOLLAND: *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons. New York, 1984.
- [24] E. GIUSTI: *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation* (Basel: Birkhäuser), 1984.
- [25] C. W. GROETSCH: *Comments on Morozov's discrepancy principle*, in: G. Hämerlin and K. H. Hoffmann, eds., Improperly Posed Problems and Their Numerical Treatment, Birkhäuser, Basel, 1983, 97-104.
- [26] C. W. GROETSCH: *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Pitman, Boston, 1984.
- [27] C. W. GROETSCH Y C. R. VOGEL: *Asymptotic theory of filtering for linear operator equations with discrete noisy data*, Math. Comp. 49, 1987, 499-506.
- [28] S. GUTMAN: *Identification of discontinuous parameters in flow equations*, SIAM Journal on Control and Optimizations, 1990, Vol. 28, 1049-1060.
- [29] J. HADAMARD: *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, 1923.

- [30] M. HANKE: *Regularization with differential operators: an iterative approach*, Numer. Funct. Anal. Optim. 13 (1992), 523-540.
- [31] P. C. HANSEN: *Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve*, SIAM Rev. 34 (1992), 561-580.
- [32] P. C. HANSEN: *The L-curve and Its Use in the Numerical Treatment of Inverse Problems*, in Computational Inverse Problems in Electrocardiology, ed. P. Johnston, Advances in Computational Bioengineering, WIT Press, 2000, 119-142.
- [33] P. C. HANSEN Y D. P. O'LEARY: *The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems*, SIAM J. Sci. Comput. 14 (1993), 1487-1503.
- [34] T. HERMAN, R. D. SPIES Y K. G. TEMPERINI: *Generalized Qualification and Qualification Levels for Spectral Regularization Methods*, Journal of Optimization Theory and Applications, 141, 2009, 547-567.
- [35] J. HONERKAMP: *Ill-posed problems in Rheology*, Rheol. Acta 28 (1989), 363-371.
- [36] J. KELLER: *Inverse Problems*, Amer. Math. Monthly 83 (1976), 107-118.
- [37] J. T. KING Y A. NEUBAUER: *A variant of finite-dimensional Tikhonov regularization with a-posteriori parameter choice*, Computing 40 (1988), 91-109.
- [38] R. L. LAGENDIJK Y J. BIEMOND: *Iterative Identification and restoration of Images*, Kluwer, Boston, Dordrecht, London, 1991.
- [39] G. LANDL, T. LANGTHALER, H. W. ENGL Y H. F. KAUFFMANN: *Distribution of event times in time-resolved fluorescence: the exponential series approach - algorithm, regularization, analysis*, J. Comput. Phys. 95, 1991, 1-28.
- [40] J. LUCKER Y P. PRENTER: *Regularization with differential operators I: General theory*, J. Math. Anal. Appl. 74 (1980), 504-529.
- [41] A. K. LOUIS: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner, Stuttgart, 1989.
- [42] R. LUCE Y S. PEREZ: *Parameter identification for an elliptic partial differential equation with distributed noisy data*, Inverse Problems 15, 1999, 291-307.
- [43] D. G. LUENBERGER: *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, New York, 1969.
- [44] P. MATHE Y S. V. PEREVERZEV: *Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales*. Inverse Problems, 19(3): 789-803, 2003.
- [45] G. L. MAZZIERI, R. D. SPIES Y K. G. TEMPERINI: *Existence, uniqueness and stability of solutions of generalized Tikhonov-Phillips functionals*, Inverse Problems, 2011, enviado para su publicación.
- [46] N. G. MEYERS Y W. P. ZIEMER: *Integral Inequalities of Poincaré and Wirtinger type for BV functions*, American Journal of Mathematics, Vol. 99, No. 6, 1977, pp. 1345-1360.

- [47] H. MORITZ: *Advanced Physical Geodesy*, Wishmann, Karlsruhe, 1980.
- [48] V. A. MOROZOV: *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [49] V. A. MOROZOV: *On the solution of functional equations by the method of regularization*, Soviet Math. Dokl. 7 (1996), 414-417.
- [50] D. A. MURIO: *The mollification method and the numerical solution of Ill-posed problems*, Wiley, New York, 1993.
- [51] M. Z. NASHED: *Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. 9 (1987), 261-325.
- [52] F. NATTERER: *The Mathematics of Computerized Tomography*, Teubner Stuttgart, 1986.
- [53] A. NEUBAUER: *On converse and saturation results for regularization methods*, in: E. Schock, ed., Beiträge zur Angewandten Analysis und Informatik, Helmut Brakhage zu Ehren, Shaker, Aachen (1994), 262-270.
- [54] A. PAZY: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied mathematical sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [55] D. L. PHILLIPS: *A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind*, J. Assoc. Comput. Mach. 9, 1962, 84-97.
- [56] R. PLATO: *Optimal algorithms for linear ill-posed problems yield regularization methods*, Numer. Funct. Anal. Optim. 11 (1990), 111-118.
- [57] T. RAUS: *Residue principle for ill-posed problems*, Acta et comment. Univers. Tartuensis 672, 1984, 16-26, in Russian.
- [58] W. RUDIN: *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [59] L. I. RUDIN, S. OSHER Y E. FATEMI: *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Proceedings of the 11th Annual International Conference of the Center for Nonlinear Studies, Physica D, Vol. 60, Nov. 1992, 259-268.
- [60] F. SANTOSA Y W. SYMES: *Reconstruction of blocky impedance profiles from normal-incidence reflection seismographs which are band-limited and miscalibrated*, Wave Motion 10, 1988, 209-238.
- [61] T. I. SEIDMAN: *Non convergence results for the applications of least-squares estimation to ill-posed problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 30, N 4, 1980, 535-547.
- [62] R. D. SPIES Y K. G. TEMPERINI: *Global saturation of regularization methods for inverse ill-posed problems*. Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, preprint, 2215, 2008.

- [63] U. TAUTENHAHN: *On the asymptotical regularization method for nonlinear ill-posed problems*, in: D. D. Ang et al., eds., *Inverse Problems and Applications to Geophysics, Industry, Medicine and Technology*, HoChiMinh City Math. Soc., HoChiMinh City, 1995, 153-169.
- [64] U. TAUTENHAHN: *Tikhonov regularization for identification problems in differential equations*, in: J. Gottlieb and P. DuChateau, eds., *Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology*, Kluwer, Dordrecht, 1997, 261-270.
- [65] A. E. TAYLOR: *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons, Japan, 1958.
- [66] R. TEMAM: *Problèmes Mathématiques en Plasticité*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [67] A. N. TIKHONOV: *Regularization of incorrectly posed problems*, Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 1624-1627.
- [68] A. N. TIKHONOV: *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method*, Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 1035-1038.
- [69] G. M. VAINIKKO: *The discrepancy principle for a class of regularization methods*, USSR Comp. Math. Math. Phys. 22,3 (1982), 1-19.
- [70] G. M. VAINIKKO: *The critical level of discrepancy in regularization methods*, USSR Comp. Math. Math. Phys. 23,6 (1983), 1-9.
- [71] G. M. VAINIKKO: *On the optimality of methods for ill-posed problems*, Z. Anal. Anwendungen 6 (1987), 351-362.
- [72] G. M. VAINIKKO: *On the discretization and regularization of ill-posed problems with non-compact operators*, Numer. Funct. Anal. Optim. 13 (1992), 381-396.
- [73] C. R. VOGEL: *Total Variation regularization for ill-posed problems*, Technical Report Department of Mathematical Sciences, Montana State University, 1993.
- [74] C. R. VOGEL: *Non-Convergence of the L-curve Regularization Parameter selection Method*, Inverse Problems, Vol. 12, 1996, 535-547.
- [75] G. WAHBA: *Spline Models for Observational Data*, SIAM, Philadelphia, 1990.
- [76] J. WEIDMAN: *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1980.