MODELO DE FALLA PARA HORMIGONES EN CONTINUOS MICROPOLARES

Por María Marcela Nieto

Ing. Vial
Magister en Ingeniería Estructural

Dirigida por el Prof. Dr. Ing. Guillermo José Etse
Tesis presentada como requisito parcial para acceder al grado académico de Doctor en Ciencias Exactas e Ingeniería

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán

San Miguel de Tucumán, agosto de 2010

Resumen

MODELO DE FALLA PARA HORMIGONES EN CONTINUOS MICROPOLARES

María Marcela Nieto

Director: Prof. Dr. Ing. Guillermo José Etse

El mecanismo de colapso en los materiales cohesivo – friccionales, cuando están sometidos a compresión uniaxial, está precedido por un proceso disipativo caracterizado por la concentración de deformaciones en bandas de espesor muy pequeño, donde ocurren procesos irreversibles de degradación y disipación de energía mientras el resto del sólido experimenta descarga elástica. En el caso de tracción uniaxial, el proceso de falla y la localización de deformaciones es mas dramático, observándose fracturas localizadas en una línea de espesor nulo.

El proceso de falla material se inicia con la localización de deformaciones. Este proceso comienza a desarrollarse a nivel microscópico con formación de microfisuras, y puede propagarse hasta alcanzar niveles mesoscópicos o macroscópicos. Las microfisuras se convierten en fisuras o grietas donde se concentra la disipación de toda la energía suministrada al sistema.

Este fenómeno de localización de deformaciones puede inducir una respuesta material altamente anisotrópica. Las áreas de localización de deformaciones pueden considerarse como precursoras de la falla global o estructural.

En este trabajo se estudian dos líneas diferentes. Por una parte en el análisis macroscópico se estudia el Modelo Extendido de Leon, desarrollado para los continuos clásicos. A el se le aportan los grados de libertad adicionales propuestos por la teoría Micropolar de los hermanos Cosserat. Esta extensión incorpora además una constante que permite reproducir comportamientos de endurecimiento y ablandamiento en el régimen de pre y pospico.

Por otra parte se estudia el modelo de microplanos buscando incorporar información microscópica en la formulación material macroscópica por medio de consideraciones simples y consistentes, para modelar comportamientos materiales anisotrópicos.

El concepto de microplanos reproduce la anisotropía del material basado en la idea de formular relaciones constitutivas integrando la conducta de respuesta de un plano sobre todas las direcciones posibles del espacio.

Sin embargo la aplicación de estas teorías muestra que los resultados que se obtienen tienen una fuerte dependencia del tamaño y de la forma de los elementos de las mallas que se consideran, en el análisis computacional de elementos finitos.

Los medios micropolares tienen grados de libertad adicionales porque consideran, además de desplazamientos, rotaciones del punto que se estudia.

En este trabajo se busca superar las dificultades de regularización del Modelo Extendido de Leon incorporando las ventajas de los grados de libertad adicionales de Cossserat, y probar estas capacidades en el modelo de microplanos.

Se introduce un parámetro de longitud interna garantizando que el problema matemático permanezca bien planteado aun bajo régimen de ablandamiento y en presencia del fenómeno de localización de deformaciones.

Los valores que se obtienen de la predicción numérica de los modelos desarrollados se comparan con resultados de ensayos experimentales para verificar su capacidad de reproducir el comportamiento de hormigones con diferentes niveles de confinamiento.

Los aportes de esta tesis referidos tanto al modelo constitutivo microscópico y macroscópico apuntan a demostrar la capacidad de la Teoría Micropolar para reproducir y considerar de modo mas preciso, el comportamiento de materiales cohesivo – friccionales.

Además se demuestra la capacidad de esta teoría, de regularizar el comportamiento de ablandamiento y la efectividad de la combinación de la teoría micropolar con la teoría de microplanos, por un lado, y con la teoría de ablandamiento, basada en energía de fractura, por el otro.

Abstract

MODEL OF FAILURE FOR CONCRETE IN MICROPOLAR CONTINUUM

María Marcela Nieto

Director: Prof. Dr. Ing. Guillermo José Etse

The collapse mechanism in cohesive – frictional materials, when subjected to uniaxial compression, is preceded by a dissipative process characterized by the concentration of deformation bands of very small thickness, where irreversible processes occur of degradation and dissipation of energy while the rest of the solid undergoes elastic unloading. In the case of uniaxial tension, the failure process and the strain localization is more dramatic observing localized fractures in a line of zero thickness.

The material failure process starts with the strain localization. This process begins to develop at the microscopic level with the formation of microcracks, and can spread up to mesoscopic or macroscopic levels. Microcracks become cracks or crevices where dissipation is concentrated all the energy supplied to the system.

This phenomenon of strain localization can induce a highly anisotropic material response. The areas of strain localization can be considered as forerunners of the global or structural failure.

In this work two different lines are studied. On one hand in the macroscopic analysis examines the Extended Leon Model, developed for the classical continuum, to provide the additional degrees of freedom proposed by the micropolar theory of Cosserat brothers. This extension also includes a constant that allows to reproduce hardening and softening behaviors in the pre and pospick regime.

On the other hand the microplane model is studied looking for to incorporate microscopic information in the macroscopic material formulation by means of simple and consistent considerations, to anisotropic material behavior modeling.

The microplane concept describes the material anisotropy based on the idea of formulating constitutive relations by integrating the response behavior in a plane over all possible directions of space.

However, the application of these theories shows that the results obtained are strongly dependent on the size and shape of the mesh elements that are considered in the finite element computer analysis.

Micropolares media have additional degrees of freedom because they consider, in addition to displacements, rotations of the point under consideration.

This paper seeks to overcome the difficulties of adjustment Leon Extended Model incorporating the advantages of the additional degrees of freedom of Cossserat, and test these capabilities in microplane model.

A parameter of internal longitude is introduced guaranteeing that the mathematical problem remains well – posed even in a softening regime and in presence of the phenomenon of localization of deformations.

The values obtained from numerical prediction of developed models are compared with results of experimental tests to verify their capacity to reproduce the behavior of concrete with different levels of confinement.

The contributions of this thesis referred to both the microscopic and macroscopic constitutive model aimed to demonstrate the capacity of the Micropolar Theory to reproduce and to consider more precisely the behavior of materials cohesive - frictional.

Its also demonstrate the ability of this theory, to regularize the softening behavior and the effectiveness of the combination of the micropolar theory with the microplane theory , on one hand, and with the softening theory, fracture energy based on the another

Indice General

CAPITULO 1

Introducción…… 1
1.1.-Estado del Arte……..……..... 4
1.2.- Escala de Observación ……..…... 9
1.3.-Objetivos……..…..……..… 10
1.4.- Organización de la Tesis …… 11

CAPITULO 2

Teoría Micropolar de Cosserat …… 14
2.1.- Cinemática de Medios Micropolares …… 14
2.1.1.-Desplazamientos y Deformaciones ……. 15
2.2.- Linealización ……. 18
2.3.- Tensiones Micropolares …….. 19
2.4.- Termodinámica de Sólidos No Locales de Cosserat …… 22
2.4.1.- Primera Ley de la Termodinámica ……. 22
2.4.2.- Segunda Ley de la Termodinámica …… 24
2.5.- Ecuaciones de Balance en Sólidos Micropolares …..…… 27
2.5.1.- Balance de Masa …… 27
2.5.2.- Balance de la Cantidad de Movimiento Lineal ……. 28
2.5.3.- Balance del Momento de la Cantidad de Movimiento… 28
2.5.4.- Ecuaciones de Balance Geométricamente Lineales … 29
2.6.- Relaciones Constitutivas Micropolares ……. 30
2.6.1.- Elasticidad …… 30
2.6.1.1.-Elasticidad Lineal …… 31
2.6.2.- Ecuaciones Constitutivas Elastoplásticas Termodinámicamente Consistentes …… 32
2.6.3.- Unicidad y Estabilidad de la Solución Incremental . …… 35

CAPITULO 3

Localización de Deformaciones ……..… 40
3.1.- Indicadores de Falla …… 42
3.1.1.-Clasificación de Falla ……..… 42
3.2.-Diagnóstico de Falla …… 44
3.3.-Indicadores de Falla Localizada …… 45
3.3.1.-Primera Condición de Localización ……46
3.3.2.- Segunda Condición de Localización ……47

CAPITULO 4

Ley Constitutiva para Materiales Cohesivo Friccionales basada en
Teoría Macroscópica de Primer Orden ……...… 51
4.1.- Modelo Material Elastoplástico basado en Energía de Fractura ..51
4.2.- Formulación del Modelo Extendido de Leon para
Sólidos Micropolares ……..……52
4.3.- Superficie de Fluencia del Modelo Extendido de Leon en
Régimen de Pre y Pospico ……..……... 53
4.3.1.- Endurecimiento Isotrópico …….. 55
4.3.2.- Ablandamiento Isotrópico ……..…….. 55
4.4.- Función de Potencial Plástico ……..…… 57
4.5.- Ley de Ablandamiento Isotrópico. Formulación Basada en
Energía de Fractura …….…. 58
4.5.1.- Modo de Fractura I ……. 58
4.5.2.- Modo de Fractura II …… 60
4.5.3.- Modo de Fractura Rotacional …… 61
4.6.- Análisis de Localización en el Modelo Micropolar de Leon.
Primera y Segunda Condición de Localización ……. 64

CAPITULO 5

Teoría Material Microscópica de Cosserat Basada en Microplanos ..…… 72
5.1.- Teoría de Microplanos ……..……... 74
4.1.1. Tensiones y Momentos Tensionales en Microplanos …. 75
4.1.2.Deformaciones y Curvaturas en Microplanos ……..…… 76
4.1.3.Integración Hemisférica …… 77
5.2.- Modelado de Microplanos Termodinámicamente Consistente ... 78
5.3.- Elasticidad Micropolar de Microplanos …….…… 80
5.4.- Elastoplasticidad Micropolar de Microplanos …… 82
5.4.1.- Caso General …….. 83
5.4.2.- Modelo de Von Mises Elastoplástico de
Cosserat Basado en Microplanos …… 86
5.4.3.- Modelo de Drucker Prager Elastoplástico de

Cosserat Basado en Microplanos …….…… 87
5.5.- Análisis de Falla Difusa ……. 87
5.6.- Análisis Numérico ……... 89
5.6.1.- Ensayo de Tracción Uniaxial …….. 91
5.6.2.- Ensayo de Corte Simple ……. 95
5.7.- Conclusiones …….…. 101

CAPITULO 6

Implementación Numérica y Análisis de Problemas de Valores de Borde con el Modelo Macroscópico Basado en Teoría Micropolar…....…. 109
6.1.- Introducción ……..……..…….110
6.2.- Relaciones constitutivas Incrementales …….… 111
6.3.- Método de Proyección al Punto mas Cercano …… 113
6.3.1.- CPPM en el Espacio de Tensiones …….. 113
6.3.2.- Implementación Numérica ..……..... 115
6.4.- Calibración del Modelo Micropolar …….…... 116

6.4.1.- Régimen de Endurecimiento – Ablandamiento ……. 117
6.4.2.- Evaluación de la Predicción del Comportamiento del Hormigón en Régimen de Endurecimiento – Ablandamiento …… 119
6.5.- Análisis de Problemas de Valores de Borde y de la Objetividad de los Resultados Respecto de la Discretización ……..… 124
6.5.1.- Ensayo de Compresión Simple ……..……... 125
6.5.2.- Ensayo de Tracción Simple ……..…. 133
6.6.- Análisis de la Capacidad Regularizadora de los Continuos Micropolares …… 135

CAPITULO 7

Conclusiones …….……. 137

REFERENCIAS …….……..138

Indice de Figuras

CAPITULO 1

Figura 1.1.- Niveles de escala del modelado constitutivo …..…….…… 10

CAPITULO 2

Figura 2.1.- Tensores de rotación y ángulos ……..……...… 15
Figura 2.2.- Tensiones en continuos micropolares planos ……...…..….19
Figura 2.3.- Círculo de Mohr para tensiones micropolares
Estado bidimensional …….…… 21

CAPITULO 3

Figura 3.1.- Esquema de formación de una discontinuidad ……..……. 41
Figura 3.2.- Dominio material dividido por la superficie de
discontinuidad ……..……..… 42
Figura 3.3.- Deterioro Cinemático del continuo ……..……..… 43

CAPITULO 4

Figura 4.1.- Superficie de Fluencia del Modelo Extendido de Leon régimen
de endurecimiento. Descripción en plano meridional (a)
y desviador (b) …….. 54
Figura 4.2.- Superficie de Fluencia del Modelo Extendido de Leon en régimen
de ablandamiento. Descripción en plano meridional (a)
y desviador (b) …….……..……... 54
Figura 4.3.- Modo I. Banda de fisura en el elemento y
continuo equivalente ……..……..... 59
Figura 4.4.- Fractura rotacional en el elemento y continuo equivalente…… 62
Figura 4.5. Ensayo de Compresión simple. Puntos de evaluación de falla ..65
Figura 4.6. Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla Loca-
lizada de Continuos Micropolares. Flujo Asociado $G_c = 0$ ……66
Figura 4.7. Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla
Localizada de Continuos Micropolares.
Flujo No Asociado $G_c = 0$ ..……..……... 67
Figura 4.8.- Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla
Localizada de Continuos Micropolares.
Flujo Asociado $G_c > 0$ ..……..…….... 67
Figura 4.9.- Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla
Localizada de Continuos Micropolares.

Flujo No Asociado $G_c > 0$ 68
Figura 4.10.- Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla Localizada de Continuos Micropolares en el ensayo de Tracción Uniaxial 69

CAPITULO 5

Figura 5.1. Componentes de tensiones y deformaciones en microplanos .. 75
Figura 5.2.- Componentes de momentos tensionales y microrotaciones en microplanos 75
Figura 5.3: Condiciones de borde. Ensayos de corte simple y tracción simple en deformaciones planas 90
Figura 5.4. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta 91
Figura 5.5. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos.Régimen de Ablandamiento Lineal 91
Figura 5.6. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas Modelo Micropolar Clásico y Microplanos.Régimen de Endurecimiento Lineal 92
Figura 5.7. Proceso de evolución plástica de los microplanos en el ensayo de tracción uniaxial 92
Figura 5.8. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos Régimen de Plasticidad Perfecta 94
Figura 5.9. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Ablandamiento Lineal 94
Figura 5.10. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Endurecimiento Lineal 95
Figura 5.11. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta 96
Figura 5.12. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Ablandamiento Lineal 96
Figura 5.13. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Endurecimiento Lineal 97
Figura 5.14 Evolución del proceso plástico en microplanos. Ensayo de corte simple 97
Figura 5.15. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas.

Plasticidad de Von Mises y Drucker Praguer en Microplanos.
Régimen de Plasticidad Perfecta ……. 98
Figura 5.16. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas.
Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos.
Régimen de Ablandamiento Lineal …….…….. 98
Figura 5.17. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas.
Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos.
Régimen de Endurecimiento Lineal …….…..99
Figura 5.18. Determinante del tensor acústico del Modelo Micropolar
Clásico y del Modelo Micropolar de Microplanos en corte ...……..… 100
Figura 5.19. Determinante del tensor acústico del Modelo Von Mises y
Drucker Prager en corte …….….. 100

CAPITULO 6

Figura 6.1.- Interpretación geométrica del esquema
Predictor – Corrector ……. 114
Figura 6.2. Esquema del ensayo uniaxial de compresión y tracción …..… 117
Figura 6.3.- Ensayo de tracción uniaxial en estado cilíndrico de tensiones.
Comparación con ensayo de Hulburt ……..…….. 119
Figura 6.4.- Ensayo de compresión triaxial con bajo confinamiento
$\sigma_x = -0.69\,MPa$. Comparación con ensayo de Hulburt ….....120
Figura 6.5.- Ensayo de compresión triaxial con confinamiento medio
$\sigma_x = -3.44\,MPa$. Comparación con ensayo de Hulburt ……..… 120
Figura 6.6.- Ensayo de compresión triaxial con alto confinamiento
$\sigma_x = -13.79\,MPa$. Comparación con ensayo de Hulburt ……..……. 121
Figura 6.7.- Compresión Simple. Ensayo de Lu. [Lu05] ……..…. 122
Figura 6.8.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -68.0\,MPa$.
Ensayo de Lu. [Lu05] .. …….… 122
Figura 6.9.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -136.0\,MPa$.
Ensayo de Lu. [Lu05] . ……..……..…….. 123
Figura 6.10.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -272.0\,MPa$.
Ensayo de Lu. [Lu05] . ……..……..…….. 123
Figura 6.11.- Mallas de 18, 72 y 288 elementos regulares …….…… 125
Figura 6.12.- Mallas de 128 elementos regular e irregulares derecha
y girada 180º ……..……..…..... 125
Figura 6.13.- Diagrama Carga - desplazamiento. Ensayo de Compresión
Simple. Malla cuadrangular de 4 nodos ……... 126
Figura 6.14.- Diagrama carga - desplazamiento. Longitud característica
$l_c = 0.43cm$ ……..…… 126
Figura 6.15.- Diagrama carga - desplazamiento. Longitud característica
$l_c = 1.81cm$ ……..……..…… 127

Figura 6.16.- Diagrama Carga - Desplazamiento. Longitud característica $l_c = 5.40cm$ ……..…… 128
Figura 6.17.- Malla de 18 elementos 4 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalente ……..…. 128
Figura 6.18.- Malla de 72 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes ……..……..…….. 129
Figura 6.19.- Malla de 288 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes ……. 129
Figura 6.20.- Malla de 128 elementos irregular y regular. Deformaciones Plásticas Equivalentes. $l_c = 1.81cm$ ……..……..…… 130
Figura 6.21.- Diagrama Carga - Desplazamiento. Ensayo de Compresión Simple. Malla cuadrangular de 9 nodos ……. 131
Figura 6.22.- Malla de 18 elementos 9 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalente ……..…… 132
Figura 6.23.- Malla de 72 elementos 9 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalentes ……..……..……... 132
Figura 6.24.- Malla de 288 elementos 9 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalentes ……..……... 132
Figura 6.25.- Diagrama Carga - Desplazamiento. Ensayo de Tracción Simple . ……..……..……..…….. 133
Figura 6.26.- Malla de 18 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes ……..……... 133
Figura 6.27.- Malla de 72 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes ……..……... 134
Figura 6.28.- Malla de 288 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes ……..……... 134

CAPITULO 1

Introducción

La predicción de la falla causada por el deterioro de las propiedades materiales es un tema de gran interés en aplicaciones de ingeniería, que hasta hoy no está completamente comprendida. En contraste con los metales, los materiales cohesivo friccionales muestran una gran diferencia entre sus resistencias de tracción y compresión y una fuerte sensibilidad a la presión lateral.

La falla depende fuertemente de los estados tensionales y de propiedades microscópicas.

La necesidad de la microscopía surge debido a que a medida que avanza el conocimiento se continúan encontrando propiedades y características microscópicas que influyen en la respuesta macroscópica:

- Tamaño del agregado
- Relación agua cemento
- Tipo de agregado
- Estados y variaciones de las tensiones a nivel microscópico

Estos y muchos otros factores que continúan detectándose en las investigaciones actuales demuestran que todo modelo formulado macroscópicamente debe necesariamente incluir relevante y múltiple observación de la microscopía del material como las tensiones en direcciones críticas de la microestructura del material y el efecto en las condiciones de borde, en la cinemática y rigidez a nivel microscópico.

Por lo tanto la modelación de esta falla requiere de formulaciones, si bien macroscópicas, contengan información relevante de las propiedades

microscópicas y del estado y variación de estas propiedades durante los procesos de falla.

En consecuencia existe una necesidad creciente de contar con información a este nivel, en la formulación de modelos macroscópicos. Surge la necesidad de desarrollar teorías basadas en propiedades y observaciones microscópicas y formuladas a nivel macroscópico, compatibles con análisis de Elementos Finitos a nivel estructural.

En esta tesis se desarrollan modelos macroscópicos basados en teorías constitutivas que también se proponen en este trabajo y que permiten incorporar complejidades crecientes de las propiedades y estados microscópicos a fin de lograr respuestas altamente sensibles a dichos fenómenos.

Adicionalmente a esto, está el problema de la observación macroscópica de las variables de campo (tensiones – deformaciones) impiden un tratamiento preciso de los dramáticos cambios y de la evolución de los mecanismos de falla de los materiales debido a homogeneizaciones poco realistas. Además, en la descripción macroscópica el medidor de deformaciones resulta ser adimensional, lo cual priva de la información relativa a la longitud que caracteriza la cinemática de falla y que gobierna el proceso de cambio de forma (deformación) de los sólidos cohesivo friccionales.

En el marco del análisis de Elementos Finitos es este déficit del medidor de deformaciones macroscópico el responsable de la pérdida de objetividad de las soluciones de procesos de ablandamiento respecto al tamaño de la discretización.

En la última década ha habido distintos intentos por mejorar la descripción de la cinemática de sólidos a fin de salvar estas deficiencias.

Se destacan entre ellas las formulaciones materiales no locales basadas en gradientes de deformación y no locales integrales. Sin embargo la teoría Micropolar de Cosserat tiene como ventaja frente a las teorías no locales antes mencionadas el hecho de que la misma enriquece no solo el campo cinemático con información microscópica (microcurvaturas) sino también las tensiones o rigideces a través de las cuplas tensionales compatibles con las microcurvaturas.

Se señala sin embargo como déficit de la teoría micropolar al igual que otras teorías no locales, el hecho de que continúan basándose en homogeneizaciones del estado cinemático y tensional aún cuando contengan información microscópica, es decir que carecen de información de la geometría

de la microscopía y de sus direcciones críticas en las que pueden desarrollarse campos cinemáticos o de tensiones particulares.

Es interesante destacar que existen marcos conceptuales que permitirían subsanar este déficit direccional o de potencial anisotropía en la evaluación de las variables de campo cinemáticas y tensionales. Este sería el caso de la Teoría de Microplanos. No existen al presente antecedentes teóricos que combinen las ventajas de una teoría nolocal eficiente como la Teoría Micropolar de Cosserat con la Teoría de Microplanos a fin de incorporar efectivamente las complejidades microscópicas de los materiales cohesivo friccionales.

Solamente la consideración combinada de teorías basadas en información microscópica permitirá tener en cuenta todas las variables necesarias para predecir con precisión los complejos comportamientos de falla de estos materiales. Este será el objetivo central de esta tesis.

La falla de materiales cuasifrágiles cohesivo friccionales como el hormigón se produce en:

Tracción: donde se detecta una fuerte localización en una fractura o grieta única de ancho nulo. El ablandamiento es abrupto y prosigue al prepico lineal elástico. El endurecimiento de prepico es prácticamente inexistente. No hay ductilidad. La falla está gobernada enteramente por procesos de fractura. El marco teórico de análisis de estos procesos corresponde a la mecánica de fractura.

Compresión: en la que la localización es menos dramática y se produce una banda de corte de espesor no nulo.

En tracción/compresión en tres dimensiones con confinamiento creciente, donde se detecta mayor ductilidad en pre y pospico, aumentando el ancho de la banda de corte, evidenciando una fuerte sensibilidad a la presión lateral.

Se observa que el mecanismo de colapso en los materiales como hormigones, suelos, etc., cuando están sometidos a compresión uniaxial, está precedido por un proceso disipativo no lineal caracterizado por la concentración de deformaciones en bandas de espesor muy pequeño en comparación con las dimensiones globales de la estructura. En ellas se concentran procesos irreversibles de degradación y disipación de energía (daño, plasticidad) [SH87], [SH87], [HMP76], mientras que el resto del sólido experimenta descarga elástica. En el caso de tracción uniaxial, el proceso de falla y la localización de deformaciones son mas dramáticos, observándose fracturas localizadas en una línea de espesor nulo.

La aparición de mecanismos de localización de deformaciones implica directa o indirectamente el inicio del proceso de falla material, de allí la importancia de disponer de modelos matemáticos que puedan simular eficientemente el fenómeno.

El deterioro mecánico del material comienza su desarrollo a nivel microscópico. Dependiendo del proceso de carga, dicho deterioro microscópico puede propagarse hasta alcanzar niveles mesoscópicos o, mas aún macroscópicos. Es entonces cuando las microfisuras devienen en fisuras o grietas donde se concentra la disipación de toda la energía suministrada al sistema mientras que el material ubicado fuera de esta fractura registra descargas elásticas. Este fenómeno de localización de deformaciones puede inducir una respuesta material altamente anisotrópica. Las áreas de localización de deformaciones pueden considerarse como precursoras de la falla global o estructural. Esto refuerza la importancia de una predicción apropiada y precisa de los fenómenos de localización.

Este comportamiento característico puede ser apropiadamente capturado en el marco de teorías disipativas como la de la elastoplasticidad.

Si bien la teoría del flujo de la plasticidad planteada en el marco de formulaciones materiales macroscópicas ha sido y es un marco conceptual extensamente utilizado por la comunidad científica internacional para la modelación del comportamiento de falla de materiales ingenieriles, la necesidad creciente de incorporar propiedades de la escala microscópica de dichos materiales para capturar en forma realista los procesos de degradación macroscópicos, ha derivado en el requerimiento de teorías materiales mas abarcativas y sensibles a las características micromecánicas de los mismos.

Un modelo que puede cubrir un amplio espectro de respuesta bajo estados varios de tensiones y caminos de carga es el Modelo Extendido de Leon [Leo35], [WE90], [Ets92], [EW93], que provee una muy buena aproximación de los resultados numéricos y la información experimental obtenida en un amplio rango de tensiones.

El desarrollo de la falla localizada en una banda es un proceso anisotrópico y la formulación del Modelo Extendido de Leon es isotrópica, pero captura la falla indirectamente a través de la singularidad del tensor acústico.

Se estudia en este modelo la falla difusa o localizada que se produce, ya sea por la pérdida de unicidad de la respuesta incremental que corresponde a la singularidad del operador material elastoplástico tangente, o el comportamiento singular del tensor elastoplástico acústico que señala un cambio en el tipo de ecuaciones diferenciales de gobierno, que muestra la formación de una discontinuidad en la tasa de las deformaciones.

Por otra parte, el concepto de microplanos describe la anisotropía basado en la idea de formular relaciones constitutivas integrando la conducta material en un plano sobre todas las direcciones posibles del espacio. La ventaja de esta idea radica en que la anisotropía se tiene en cuenta de una manera natural y simple.

Sin embargo la aplicación de las teorías señaladas muestra, a la hora del análisis computacional en códigos de elementos finitos, una fuerte dependencia de los resultados que se obtienen, del tamaño y de la forma de los elementos de las mallas consideradas.

Las investigaciones tendientes a evitar esta deficiencia estudian formulaciones regularizantes del comportamiento de ablandamiento. Pueden citarse entre otras, las formulaciones no locales integrales, formulaciones no locales de gradientes, modelos elastoplásticos basados en energía de fractura, teorías viscoplásticas tiempo dependientes y las formulaciones basadas en sólidos micropolares de Cosserat [Car97], [dBo90], [dBo91], [DSW91], [EW93], [ECW97].

Las estrategias desarrolladas para superar este problema siguen dos caminos: por una parte la de mejorar las condiciones del método de los elementos finitos desarrollando elementos capaces de seguir las direcciones de localización, y por otra buscar modelos constitutivos capaces de regularizar el comportamiento material.

Siguiendo el segundo de ellos, las formulaciones que buscan regularizar el comportamiento de ablandamiento introducen una longitud característica en la relación tensión - deformación, aunque varía considerablemente el significado de este parámetro en las diferentes formulaciones.

La teoría micropolar [CC09] en particular, enriquece el continuo clásico al considerar además de tres grados de libertad translacionales, tres grados de libertad rotacionales independientes de cualquier campo de desplazamientos. Es así que en el continuo Cosserat cada punto material equivale a un cuerpo rígido infinitesimal de tal manera que se desarrollan no solo las tensiones convencionales sino también momentos tensionales. Introducen la influencia de los efectos en la vecindad de la zona de deformación localizada resultando una descripción no local del problema.

Los estudios de localización para estos materiales elastoplásticos micropolares, involucran el estudio de una segunda condición al considerarse los saltos que tienen lugar en el gradiente de rotaciones que debe satisfacerse simultáneamente con la discontinuidad en el gradiente de velocidades. Esta condición adicional juega un relevante rol para regularizar la localización.

En este trabajo se busca superar las dificultades de regularización del Modelo Extendido de Leon incorporando las ventajas de los grados de libertad adicionales de Cossserat, y probar estas capacidades en el modelo de microplanos, que puede reproducir la anisotropía material que se observa al producirse la falla.

1.1.- Estado del Arte

Existen numerosos desarrollos de modelos constitutivos que abordan el problema de la respuesta de los materiales cohesivo friccionales [Che82], [PW89a], [PW89b], [Kac86].

La atención aquí se centra en modelos independientes del tiempo y que consideran cargas monotónicas.

Estos pueden ser *continuos* o *discretos*. Los primeros establecen leyes entre deformaciones y tensiones y pertenecen al grupo o concepto conocido como “smeared crack” o fisura difusa.

Los segundos consideran las relaciones entre las fuerzas y sus desplazamientos relativos.

El presente desarrollo se enmarca en el grupo de modelos continuos elastoplásticos formulados en el espacio de tensiones, que aportan una base flexible y confiable para describir el comportamiento de materiales como el hormigón, ya que permiten describir su comportamiento no lineal, dependiente del camino de carga, el ablandamiento y el endurecimiento observados en diferentes escenarios de análisis.

Puede encontrarse formulaciones de este tipo en los trabajos de referencia [Pra88], [WBPS86], [WE90], [KAN97], [EW93], [SH87], [MSM01].

En la mecánica de los medios continuos se describe al proceso de degradación de los materiales como una acumulación de mecanismos disipativos en superficies en las cuales se observa discontinuidad en el campo cinemático. Ello lleva como consecuencia un cambio en las ecuaciones diferenciales del equilibrio de la plasticidad incremental.

El sistema de ecuaciones matemáticas pierde su elipticidad original y se transforman en un sistema hiperbólico. Esta situación puede presentarse en modelos constitutivos con reglas no asociativas o en régimen de ablandamiento [Hil58], [RR75], [Ric76], [OR91], [VMi84].

Para poder estudiar este proceso en modelos que pueden presentar localización de deformaciones, durante los últimos años se han propuesto diversas metodologías de análisis. Actualmente las estrategias utilizadas para el modelado de falla pueden clasificarse desde diferentes puntos de vista, ya sea que se tenga en cuenta la descripción cinemática (regularidad del campo de desplazamientos), el comportamiento constitutivo o bien la implementación numérica del modelo. Algunos modelos de falla material que estudian este problema son:

1. Mecánica de fractura clásica.
2. Modelos del continuo clásico.
3. Modelos del continuo enriquecido.

Como el problema de inestabilidad material se presenta ya a nivel del continuo, la forma más natural de solución consiste en redefinir el modelo evitando el cambio de carácter en las ecuaciones diferenciales de gobierno. La idea básica es enriquecer el continuo para capturar (a nivel macroscópico) los cambios microestructurales que ocurren en el material al estar sometido a estados críticos de tensión y que lo tornan inestable.

Los modelos continuos o de tipo fisura difusa efectúan una consideración tensorial, estableciendo una relación directa entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones con lo que cumplen el requerimiento de ser indiferentes al marco considerado [DS84]. Estas relaciones tensoriales o constitutivas pueden ser de primer orden o de orden superior. Las primeras son conocidas como modelos locales mientras que las segundas son no locales. Existen mas formas de no localidad material, como los modelos de gradientes que consideran gradientes de mayor orden de las deformaciones plásticas en el modelo material [MA91], [dBM92], [VA91] [Pam94] [Vre07], la aproximación de la medida de deformación sobre una región finita llamada Teoría no local integral , [Jir02] [PB87] [BBC84], la teoría micropolar de Cosserat [CC09], [Sch67], [Muh89], [dBo91].

La mayoría de estos métodos están basados en la inclusión explícita de un parámetro de longitud interna l_c que toma en consideración el tamaño y separación de las heterogeneidades que controlan el ancho de localización, es decir se considera ahora la configuración microestructural material. Estas estrategias introducen términos en las ecuaciones para regularizar el comportamiento constitutivo limitando la localización de deformaciones a un volumen de tamaño finito [dBSMP93] y, como consecuencia directa, la energía disipada durante el proceso de carga adquiere un valor no nulo. Los esquemas No Locales, de Gradientes de Deformación, el Modelo Continuo Micropolar de Cosserat y aquellas formulaciones que consideran efectos de viscosidad

pueden mencionarse como las más destacadas. En los modelos No Locales [BBC84], [BPC88], [PB87], [Jir02] se asume que la ecuación constitutiva no lineal en un punto queda expresada en función de la deformación media en la vecindad del punto. La porción del dominio adecuada en la cual se extiende la integral se hace depender explícitamente del parámetro de longitud interna l_c.

Las formulaciones de gradientes [Aif84b], [Aif84a], [LB88], [dBM92], [dBPPS95], [PdBBdV96], [Vre07], incorporan al modelo constitutivo términos de gradientes espaciales de alto orden de variables cinemáticas o internas, dependientes del parámetro de longitud intrínseca material.

Este enriquecimiento tiene como finalidad suavizar y regularizar la evolución de los mecanismos inelásticos responsables de la degradación. Se ha verificado una analogía directa entre las formulaciones No Locales y los modelos de Gradientes Implícitos [PGdBB01, PdBBG02], para determinadas funciones de peso. De esta forma, utilizando tales esquemas implícitos se asegura el carácter no local del problema con una ventaja adicional: desde el punto de vista computacional poseen la estructura típica de modelos locales. En estas formulaciones de alto orden generalmente se requiere la resolución de una ecuación adicional a la de equilibrio estándar, la cual puede discretizarse utilizando también interpolación por elementos finitos.

El Modelo Continuo Micropolar de Cosserat fue desarrollado a principios de 1900, para problemas de elasticidad. Esta formulación, a diferencia del Modelo Continuo Clásico, incorpora rotaciones locales como parámetros independientes adicionales. Una consecuencia directa de esta hipótesis es la pérdida de la estructura simétrica del tensor de tensiones. Muchas décadas después de ser propuesta, la teoría micropolar de Cosserat ha encontrado gran atención en la comunidad científica. Como consecuencia, autores varios han publicado trabajos prominentes en los cuales se establecían relaciones con el continuo clásico y se analizaban características particulares de la teoría micropolar. Entre otros podemos citar los trabajos de Mindlin [Min63] , Toupin [Tou64] , Schaefer [Sch67] y Eringen [Eri68] . Estos fueron atraídos mas por el aspecto teórico de los continuos no convencionales que por la potencialidad que ellos brindaban para la simulación computacional del campo de deformación de sólidos, cosa que en aquella época estaba fuera de alcance. En los trabajos de Mühlhaus et al.[MV87], [Muh89], Steinmmann et al. [SW91] [WD92], [Ste94a] [Ste94b], [Ste95], [Ste97], de Borst [dB91], [dB93], Sluys [Slu92] Etse et al [EN98] se han propuesto generalizaciones y extensiones de esta teoría al contexto de elastoplasticidad aplicada al análisis de localización de deformaciones.

En la formulación de estos modelos puede reconocerse la introducción de un parámetro de longitud interna garantizando que el problema matemático

permanezca bien planteado aun bajo régimen de ablandamiento y en presencia del fenómeno de localización de deformaciones.

En este trabajo se estudian dos líneas diferentes. Por una parte dentro del primer grupo mencionado se analiza el Modelo Extendido de Leon [Leo35a], [Leo35b] propuesto originalmente por Hoek y Brown, que combina los parámetros de fricción de Mohr Coulomb y el de cohesión de Rankine.

El modelo de Leon fue extendido por Etse y Willam, buscando evitar los quiebres de la traza del tensor desviatórico del modelo original. Esta extensión incorpora además una constante que permite reproducir comportamientos de endurecimiento y ablandamiento en el régimen de pre y pospico. El modelo desarrollado para los continuos clásicos se enriquece con el aporte de los grados de libertad adicionales propuestos por la teoría Micropolar de los hermanos Cosserat buscando mejorar la capacidad predictiva y la objetividad de las soluciones alcanzadas.

Por otra parte se estudia el modelo de microplanos buscando incorporar información microscópica en la formulación material macroscópica por medio de consideraciones simples y consistentes, para modelar comportamientos materiales anisotrópicos. Actualmente, este es uno de los objetivos más importantes de la propuesta original de Taylor [Tay38], desarrollada posteriormente por Bazant y Gambarova [BG84], [Jir99], entre otros, la cual se basa en la definición de relaciones totalmente independientes entre tensiones – deformaciones uniaxiales en varios planos en el material.

Se propone una aproximación termodinámicamente consistente por medio de la incorporación de la energía libre de Helmholtz en cada microplano extendiendo el planteo a los medios micropolares. El aporte fundamental es enriquecer la cinemática microscópica para reproducir comportamientos particulares y mas complejos de los materiales cuasi frágiles como el hormigón en el cual la presencia de agregados puede llevar al desarrollo de microrotaciones en planos característicos durante las historias de carga.

1.2.- Escala de Observación

La ciencia de los materiales estudia el comportamiento en diferentes escalas de observación dependiendo de los procesos físicos químicos que se traten de comprender o cuantificar. [Wil02]

Dependiendo de esta escala de observación, los materiales cohesivo friccionales muestran diferentes propiedades físicas y geométricas.

Teniendo en cuenta la escala elegida, la inhomogeneidad estructural juega un rol más o menos dominante y de este modo determinan la condición bajo la cual el hormigón puede ser visto como homogéneo.

El rango de aplicabilidad de diferentes modelos de comportamiento está directamente relacionado con la escala de observación. Los procesos físicos observados a escalas mayores están gobernados por procesos que ocurren a escalas menores.

Se pueden caracterizar estas escalas como ilustra la fig.1.1 [DKRH01]:

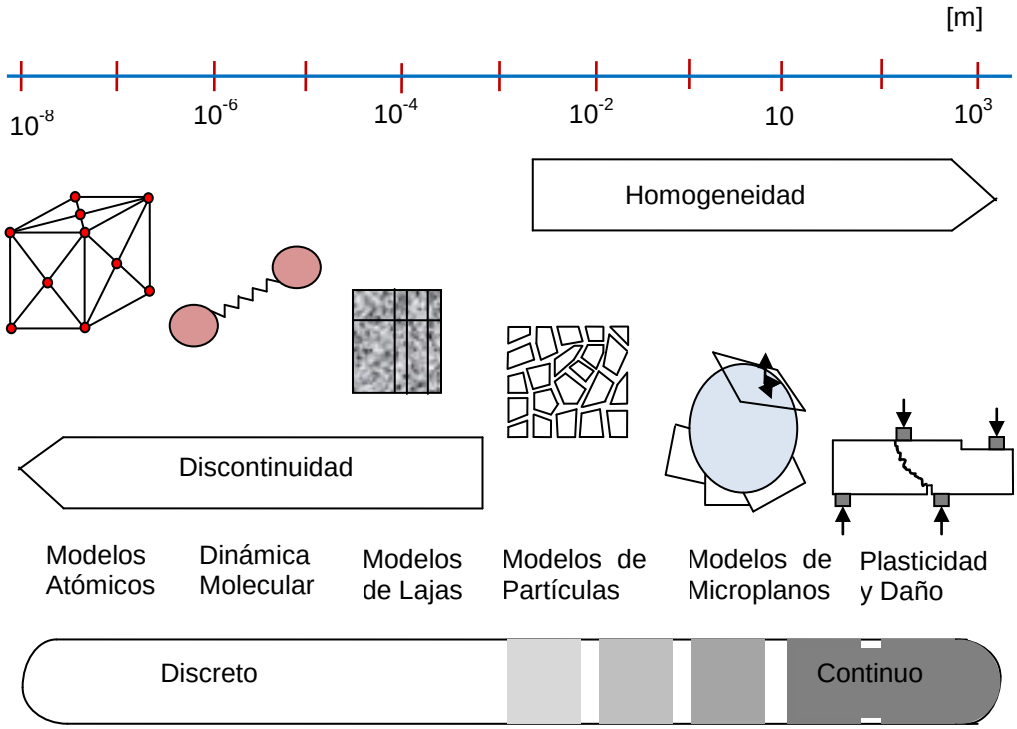


Figura 1.1.- Niveles de escala del modelado constitutivo

La teoría del continuo homogéneo es aplicable a materiales como el hormigón cuando el volumen del mismo es mucho mayor que el tamaño característico de la heterogeneidad del material. Durante la modelación al micronivel, la teoría del continuo homogéneo todavía es aplicable debido a que estas fisuras están en la escala de la heterogeneidad del hormigón

Cuando las fisuras al nivel macro empiezan a crecer, el nivel de escala de las fisuras rápidamente alcanza el nivel de escala de la estructura. Así la teoría del continuo no es aplicable. La apertura de fisuras tiene que ser tenida en cuenta al mismo tiempo junto con el continuo que determina el comportamiento de la estructura. La respuesta de la estructura se vuelve dependiente del tamaño y el ablandando que se observa así tiene que ser visto como una propiedad estructural más que como una propiedad material.

1.3.- Objetivos

Se proponen los siguientes modelos constitutivos de primer y segundo orden de complejidad microscópica para describir comportamientos de falla de materiales cuasifrágiles:

a) Modelo para materiales cuasifrágiles basado en la Teoría Micropolar y en observaciones macroscópicas de las magnitudes de campo (complejidad microscópica de primer orden).
b) Modelo para materiales cuasifrágiles basado en la Teoría Micropolar y en magnitudes de campo microscópicas (complejidad microscópica de segundo orden).

Para ello se desarrolla en esta tesis, como parte de la contribución original de la misma, la teoría elastoplástica de microplanos basada en continuos micropolares de Cosserat.

Los objetivos específicos de esta tesis son:

1.- Desarrollo de una Teoría No Local para hormigones basada en elastoplasticidad micropolar con leyes de ablandamiento que combinen Plasticidad del Flujo con Mecánica de Fractura tanto para Modo I como Modo II y Modo Rotacional de Fractura.

2.- Formulación del indicador de falla localizada para la Teoría Micropolar basada en plasticidad del flujo y mecánica de fractura.

3.- Formulación de una Teoría Constitutiva de Microplanos para Continuos Micropolares de Cosserat.

4.- Formulación de un Modelo Elastoplástico de Microplanos Micropolares para análisis de falla de materiales.

5.- Desarrollo del indicador matemático de falla localizada para materiales de microplanos micropolares.

6.- Implementación computacional de los modelos y del indicador de falla.

7.- Elaboración de conclusiones sobre las ventajas de los Modelos basados en complejidades crecientes de información de la microestructura. Discusión de las predicciones y propiedades.

1.4.- Organización de la Tesis

La tesis ha sido organizada en 7 capítulos.

El Capítulo 2 presenta las ecuaciones básicas de la Teoría Micropolar, la cinemática que describe el campo de los desplazamientos y deformaciones, luego la termodinámica, ecuaciones de balance y al final las relaciones constitutivas de los continuos Cosserat, tanto en el rango de la elasticidad como de la plasticidad.

El Capítulo 3 aborda el análisis de la falla localizada, efectuando una primera descripción de las formas de falla de los materiales, para luego centrar el análisis en la forma difusa de la misma. Describe la condición de falla en continuos micropolares y las dos condiciones de localización que permiten abarcar los grados de libertad adicionales.

En el Capítulo 4 el Modelo de Leon se extiende a los continuos enriquecidos, abarcando su formulación de endurecimiento y ablandamiento isotrópico, la degradación de la resistencia en compresión triaxial. Describe el proceso de homogeneización en la formulación de energía de fractura que permite abarcar el Modo I de falla y su extensión al Modo II, la implementación de esta formulación para el caso de continuos de Cosserat, con la determinación del tercer invariante de tensiones, para una condición de fluencia con valor de endurecimiento variable. Se desarrolla un Modo Rotacional de falla que abarca los grados de libertad adicionales de la formulación enriquecida. La primera y segunda condición de localización se desarrolla graficándose los valores del determinante del tensor de localización para diferentes condiciones de flujo y valores de los parámetros.

El Capítulo 5 estudia la teoría material microscópica de Cosserat basada en microplanos. Determina un Modelo de plasticidad tipo Von Mises y tipo Drucker Prager, efectuando el análisis de falla localizada para ambos casos. Se implementan problemas de valores de borde y se evalúan las predicciones del modelo en ensayos de tracción simple y corte simple. Las condiciones de localización se evalúan numéricamente, analizando la singularidad del tensor acústico y la segunda condición de los sólidos de Cosserat.

En el Capítulo 6 se implementa problemas de valores de borde para el Modelo Extendido de Leon Micropolar en ensayos de tracción, compresión uniaxial y triaxial con distintos niveles de confinamiento, comparándose los resultados con los obtenidos en forma experimental.

Usando códigos de elementos finitos se evalúan los resultados obtenidos con diferentes mallas para analizar la capacidad regularizadora de los continuos micropolares.

En el Capítulo7 se elabora una síntesis de los resultados obtenidos y se escriben las conclusiones obtenidas en base a ellos, así como el grado de cumplimiento de los objetivos planteados en el trabajo y las recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPITULO 2

Teoría Micropolar de Cosserat

En este capítulo se presentan las ecuaciones básicas de los continuos micropolares desarrollada por los hermanos Cosserat [CC09], [Eri68].

En la Sección 2.1. se introducen las relaciones de la cinemática. Las ecuaciones constitutivas se formularán para el caso geométricamente lineal. La linearización de las ecuaciones diferenciales representativas de la cinemática de los Continuos Cosserat se ilustra en Sección 2.2.

La sección 2.3 desarrolla la estática o equilibrio de estos continuos.

En la sección 2.4 se presentan la Primera y Segunda Ley de la Termodinámica, abarcando los grados de libertad adicionales.

La 2.5 contiene las ecuaciones micropolares de balance que permiten obtener las ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones constitutivas se discuten en Sección 2.6 para el caso elástico y para la plasticidad incremental en el marco de la cual se enmarcan los desarrollos de los modelos para este trabajo. La estabilidad y unicidad de la solución de equilibrio se plantea en la última parte del presente capítulo, con el fin de plantear algunos conceptos necesarios para introducir lo que se señala en el capítulo 3.

2.1.- Cinemática de Medios Micropolares

En el marco de la teoría Micropolar, un punto material se asume como una porción infinitesimal de cuerpo rígido o micropartícula, caracterizada no solamente por su posición espacial sino también por su orientación.

Entonces una completa descripción de las deformaciones micropolares debe tener en cuenta tanto el campo de los desplazamientos como el campo de rotaciones independiente del primero.

2.1.1.-Desplazamientos y Deformaciones.

El movimiento de un sólido micropolar en el espacio está gobernado por dos mecanismos cinemáticas, como se grafica en la fig. 2.1 [Sch07]. El primero es la función de movimiento

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t) \tag{2.1}$$

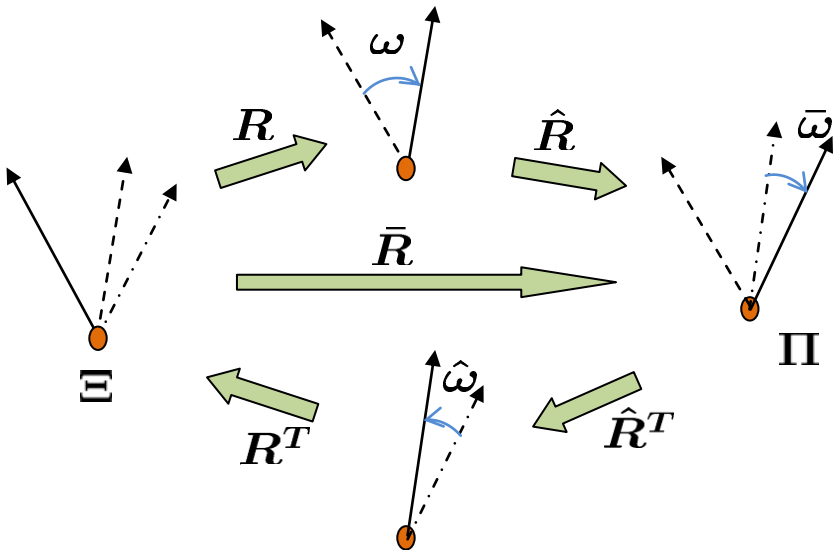


Figura 2.1.- Tensores de rotación y ángulos

Considerando que la medida de la deformación es calculada en los continuos clásicos por cuadrados de elementos de líneas representativas de la distancia entre puntos infinitesimalmente cercanos, en el caso de continuos micropolares deben tenerse además en cuenta los productos escalares entre elementos de línea y los vectores directores que representan la orientación local de un punto.

El segundo mecanismo se refiere a los micromovimientos

$$\boldsymbol{\Pi} = \bar{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{X}, t).\boldsymbol{\Xi} \tag{2.2}$$

donde $\boldsymbol{\Pi}$ y $\boldsymbol{\Xi}$ pueden interpretarse como los directores rígidos, fijados en el punto material, y $\bar{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{X}, t)$ describe el cambio de la orientación de la partícula en las diferentes configuraciones, es decir el vector de rotación $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ del director $\boldsymbol{\Xi}$.

Dado el valor de los desplazamientos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$, el gradiente Lagrangeano material se obtiene a partir de la ec.(2.1) y el medidor de cambio de forma resulta

$$\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t) = \nabla\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u} \tag{2.3}$$

Con el valor del gradiente de deformación material $\boldsymbol{F}$, el elemento diferencial de línea de la configuración de referencia, respecto a la configuración actual toma el valor $\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{dX}$ del cual se obtiene el tensor de deformación de Green- Lagrange

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) \tag{2.4}$$

Alternativamente, a partir del gradiente euleriano o espacial de los desplazamientos arribamos al tensor de deformaciones de Euler-Almansi

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{F}.\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}})^{-1}) \tag{2.5}$$

El tensor $\boldsymbol{F}$ satisface la descomposición polar

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}.\boldsymbol{R} \tag{2.6}$$

y por lo tanto, existen los tensores de segundo orden $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$ denominados tensor de extensión derecho e izquierdo, respectivamente y un tensor de rotación ortogonal propio $\boldsymbol{R}$ que satisface la ec.(2.6), siendo

$$\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \qquad y \qquad det(\boldsymbol{R}) = 1 \tag{2.7}$$

La rotación total $\bar{\boldsymbol{R}}$ del director $\boldsymbol{\Xi}$ en ec.(2.2) puede descomponerse en dos partes: una rotación del continuo $\boldsymbol{R}$, proveniente de la descomposición de $\mathbf{F}$ en ec.(2.6), y una rotación independiente o libre $\hat{\boldsymbol{R}}$ de modo que se obtiene

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \hat{\boldsymbol{R}}.\boldsymbol{R} \tag{2.8}$$

Utilizando la representación Euler – Rodríguez, para el tensor de rotación espacial, resultan para los tensores en ec.(2.8) las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{R}} &= \bar{\boldsymbol{e}} \otimes \bar{\boldsymbol{e}} + (\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{e}} \otimes \bar{\boldsymbol{e}}).\cos\bar{\omega} + (\bar{\boldsymbol{e}} \times \boldsymbol{I}).sen\bar{\omega} \\
\hat{\boldsymbol{R}} &= \hat{\boldsymbol{e}} \otimes \hat{\boldsymbol{e}} + (\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{e}} \otimes \hat{\boldsymbol{e}}).\cos\hat{\omega} + (\hat{\boldsymbol{e}} \times \boldsymbol{I}).sen\hat{\omega} \\
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}).\cos\omega + (\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{I}).sen\omega
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Donde $\bar{\omega}$, $\hat{\omega}$ y ω son los valores de rotación de los vectores, $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ y $\boldsymbol{\omega}$ se relacionan con los ejes correspondientes de la forma

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\omega}.\bar{\boldsymbol{e}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \hat{\omega}.\hat{\boldsymbol{e}} \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega.\boldsymbol{e}$$

Entonces, se obtiene el primer tensor de deformación micropolar expresando el producto escalar entre el elemento de línea $\boldsymbol{dx}$ y el director $\boldsymbol{\xi}$ de la configuración actual en términos del elemento $\boldsymbol{dX}$ y el director $\boldsymbol{\Xi}$ en la configuración de referencia

$$\boldsymbol{\Pi}.\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\Xi}.\bar{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F}.\boldsymbol{dX} = \boldsymbol{\Xi}.\bar{\boldsymbol{U}}.\boldsymbol{dX} \tag{2.11}$$

De la misma forma puede expresarse e tensor de deformaciones micropolares en función de la configuración actual como

$$\boldsymbol{\Xi}.\boldsymbol{dX} = \boldsymbol{\Pi}.\bar{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F}^{-1}.\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\Pi}.\bar{\boldsymbol{V}}^{-1}.\boldsymbol{dx} \tag{2.12}$$

Resultando los tensores

$$\boldsymbol{U} = \bar{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}.\bar{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{T}} \tag{2.13}$$

que pueden también obtenerse de la descomposición del tensor

$$\boldsymbol{F} = \bar{\boldsymbol{R}}.\bar{\boldsymbol{U}} = \bar{\boldsymbol{V}}.\bar{\boldsymbol{R}} \tag{2.14}$$

Análogamente a los continuos clásicos, en el caso micropolar se pueden obtener los tensores de tipo Lagrangeano y Euleriano

$$\bar{\boldsymbol{L}} = \bar{\boldsymbol{U}} - \boldsymbol{I} \qquad \text{y} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{V}}^{-1} \tag{2.15}$$

Para describir también completamente las deformaciones de sólidos micropolares, será necesaria una medida de la curvatura, que puede definirse mediante el tensor de tercer orden de la configuración de referencia.

El tensor de curvatura se obtiene con el gradiente de la rotación $\nabla\bar{\boldsymbol{R}}$ del tensor de rotación con respecto a la configuración de referencia [Ste94]

$$\bar{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{3}} = \bar{\boldsymbol{R}}^{T}\nabla\bar{\boldsymbol{R}} \tag{2.16}$$

El tensor de curvaturas de segundo orden puede definirse mediante los tensores axiales del tensor de curvatura de tercer orden

$$\bar{\boldsymbol{C}} = axl\bar{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{3}} = -\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{3}} : \bar{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{3}}) = -\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{3}} : \bar{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{T}}\nabla\bar{\boldsymbol{R}}) \tag{2.17}$$

donde el tensor $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{3}}$ es el tensor de permutación de Ricci.

2.2.- Linealización

Asumiendo un campo de pequeñas deformaciones, es decir pequeños gradientes de desplazamientos $\nabla \boldsymbol{u}$, en combinación con pequeñas rotaciones $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, la ecuación diferencial no lineal del campo cinemático puede simplificarse usando métodos de linealización estándar [Hau00], [Ehl02]. El tensor $\boldsymbol{L}$ prácticamente coincide con el tensor $\boldsymbol{A}$. De este modo el tensor de deformaciones lineales de Cosserat $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ resulta

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla^T \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}(\nabla^T \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}.\bar{\boldsymbol{\omega}}) \tag{2.18}$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \nabla \boldsymbol{u} - \mathrm{e}.\bar{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.19}$$

Que puede separarse en dos partes, una simétrica y una asimétrica como

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{sym} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.20}$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{skw} = \frac{1}{2}(\nabla^T \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u}) - \mathrm{e}.\bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{\Omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) \tag{2.21}$$

Las ec.(2.20) y ec.(2.21) muestran que la parte $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{sym}$ es igual al tensor de deformaciones linealizado $\boldsymbol{\epsilon}_{sym}$ de sólidos no polares y, por otra parte, que la parte asimétrica está directamente relacionada con las microrotaciones adicionales de la teoría de Cosserat.

Asimismo, el tensor linealizado de microcurvaturas resulta

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \nabla^T \bar{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.22}$$

El tensor $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ debe designarse más precisamente como tensor de torsión y radio de giro ya que sus tres componentes con igual subíndice describen deformaciones de torsión y aquellas con subíndices desiguales describen deformaciones de giro.

Las condiciones de borde cinemáticas a las que está sometido un volumen elemental representativo que se comporta como un sólido micropolar

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{L}}.\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}.\dot{\boldsymbol{A}} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}) \tag{2.23}$$

donde $\boldsymbol{X}$ es la coordenada de un punto arbitrario de referencia del elemento representativo de volumen.

2.3.- Tensiones Micropolares

El continuo micropolar de Cosserat está caracterizado por un tensor de tensiones Σ , definido mediante descomposición aditiva entre una componente tensorial clásica (aunque no simétrica) y otra representativa de las cuplas tensionales $\boldsymbol{\mu}$ por unidad de superficie.

Dado el cuerpo micropolar $\beta \in \Re^3$ y su contorno $\partial\beta$, el sistema de ecuaciones diferenciales que definen el balance del momento lineal y del momento angular [dBo90], [Ior96] en la vecindad infinitesimal de un punto arbitrario del continuo micropolar viene dado por

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}^T + \rho.\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.24}$$

$$\nabla \boldsymbol{\mu}^T + \mathrm{e} : \boldsymbol{\sigma} + \rho.\boldsymbol{B}_m = 0 \tag{2.25}$$

respectivamente, siendo :

ρ : densidad de masa

$\boldsymbol{B}$: fuerzas del cuerpo por unidad de masa

$\boldsymbol{B}_m$: momentos del cuerpo por unidad de masa

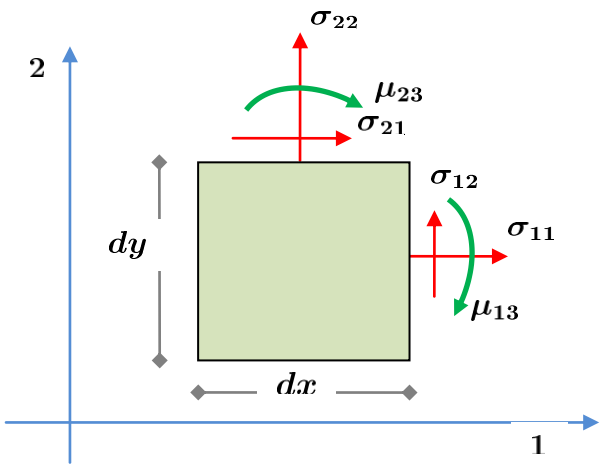


Figura 2.2.Tensiones en continuos micropolares planos.

De la ec.(2.25) se deduce que, para el caso $\boldsymbol{B}_m \to 0$, el tensor de tensiones es simétrico, $e.\boldsymbol{\sigma} = 0$ si y solo si las cuplas tensionales se anulan $\nabla \boldsymbol{\mu}^T = 0$, con lo cual resulta $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$. Es decir que las tensiones del continuo micropolar restituyen las correspondientes al continuo clásico o de Bolztmann en el caso que $\nabla \boldsymbol{\mu}^T = 0$

La fig. 2.2 indica el campo de tensiones en el elemento micropolar infinitesimal perteneciente al espacio $\Re^2$.

Las condiciones en la frontera del dominio β conducen a

$$\boldsymbol{N}.\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{t}^{\sigma} \qquad : en \qquad \partial\beta^{\sigma} \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{N}.\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{t}^{\mu} \qquad : en \qquad \partial\beta^{\mu} \tag{2.27}$$

donde $\partial\beta = \partial\beta^{\sigma} \cup \partial\beta^{\mu} \qquad y \qquad \partial\beta^{\sigma} \cap \partial\beta^{\mu} = \oslash$

Como se ve en la fig.2.2 para el caso $\Re^2$, el primer índice de las tensiones y momentos tensionales indica la dirección de la normal a la superficie sobre la cual estas componentes actúan, y el segundo define su dirección.

Si representamos el estado de tensiones no simétrico del continuo micropolar, en un plano definido por las coordenadas tensionales de Mohr [Ior96], observamos que el círculo correspondiente posee el centro desplazado del eje que representa a las tensiones normales. La componente normal y tangencial de las tensiones de Mohr se definen como

$$\sigma = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{N} \tag{2.28}$$

$$\tau = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{T} \tag{2.29}$$

Siendo $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{T}$, los vectores según las direcciones normal y tangencial a la superficie elemental arbitraria.

La tensión normal y la tensión de corte en un plano elemental de inclinación arbitraria θ resultan:

$$\sigma = \sigma_{11}.\cos^2\theta + \sigma_{22}.sen^2\theta + (\sigma_{12} - \sigma_{21})\cos\theta.sen\theta \tag{2.30}$$

$$\tau = \sigma_{12}.\cos^2\theta - \sigma_{21}.sen^2\theta + (\sigma_{22} - \sigma_{11})\cos\theta.sen\theta \tag{2.31}$$

$$\mu = \mu_{13}.\cos\theta + \mu_{23}.sen\theta \tag{2.32}$$

La representación geométrica de los estados tensionales no simétricos de continuos micropolares a través del círculo de Mohr resultan en una ecuación de segundo grado de la forma

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + (\tau - \tau_c)^2 = r^2 \tag{2.33}$$

donde

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \qquad \tau_c = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \tag{2.34}$$

$$r^2 = \left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}-\sigma_{21}}{2}\right)^2 \tag{2.35}$$

representando las coordenadas del centro del círculo y su radio respectivamente.

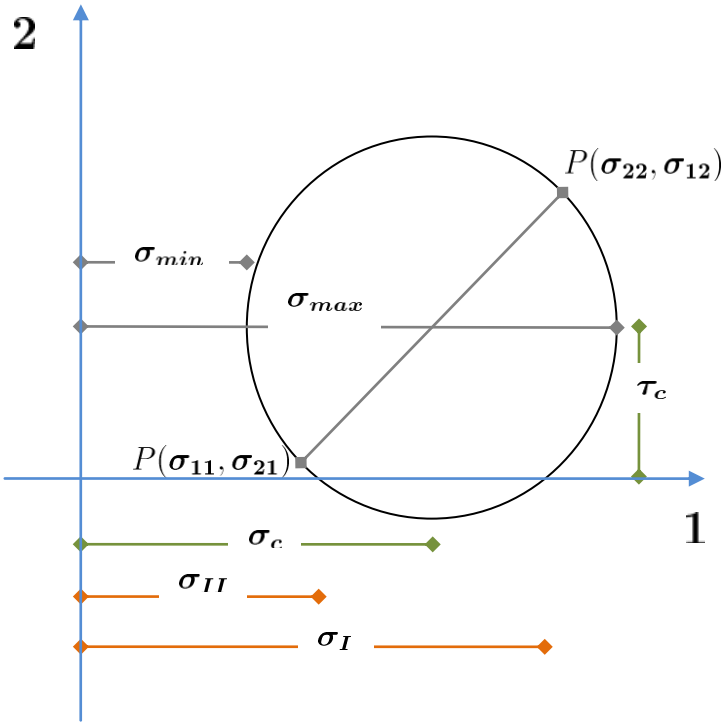


Figura 2.3. Círculo de Mohr para tensiones micropolares. Estado bidimensional.

El tensor de tensiones asimétrico $\boldsymbol{\sigma}$ puede ser descompuesto en dos subtensores, uno simétrico y otro antisimétrico. En la fig. 2.3 se puede apreciar que el desplazamiento del centro del Círculo de Mohr respecto del eje de las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ constituye una medida de la pérdida de simetría del tensor. Los autovalores y las tensiones principales serán reales en tanto el discriminante permanezca positivo. En el caso de estado bidimensional esta condición resulta

$$\triangle_\sigma = (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4.\sigma_{12}.\sigma_{21} > 0 \tag{2.36}$$

Si el discriminante es menor que cero, los autovalores serán complejos conjugados y este estado corresponde a un círculo de Mohr que no intersecta al eje de las tensiones normales $\boldsymbol{\sigma}$ y que por tanto, no tiene tensiones principales reales. El estado de tensiones simetrizado arroja autovalores que se relacionan con los autovalores mayor y menor del estado nosimétrico y, teniendo en cuenta los límites de Bromwich, esta relación puede expresarse

$$\sigma_{min} = \sigma_{II}^{sym} \leq R(\sigma_{II}) \leq R(\sigma_I) \leq \sigma_I^{sym} = \sigma_{max} \tag{2.37}$$

con

$$\boldsymbol{\sigma}_{II}^{sym} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}-\sigma_{21}}{2}\right)^2} \tag{2.38}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{I}^{sym} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}-\sigma_{21}}{2}\right)^2} \tag{2.39}$$

2.4.- Termodinámica de Sólidos No Locales de Cosserat

2.4.1.- Primera Ley de la Termodinámica

Consideramos una porción arbitraria de un sistema continuo micropolar, que ocupa una porción β del espacio con un contorno $\partial\beta$, el cual tiene una normal $\boldsymbol{N}$. Se puede demostrar que la energía suministrada al sistema estará dada por la suma de la energía cinética del mismo mas el calor suministrado [Run96].

La energía interna, siendo $\rho(\boldsymbol{x})$ la densidad de masa y $e(\boldsymbol{x})$ la densidad de energía de la región espacial β ocupada por la porción del continuo [Run96] resulta

$$E = \int_{\rho} \rho.e\, dV \tag{2.40}$$

Siendo Θ, el tensor de inercia microscópica, es decir la inercia rotacional de un punto material del continuo micropolar y $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, la velocidad angular, la energía cinética será, teniendo en cuenta los movimientos descriptos en la sección 2.1.1,

$$K = \frac{1}{2}\int_{\beta} \rho.\left|\dot{\boldsymbol{u}}\right|^2 dV + \frac{1}{2}\int_{\beta} \Theta.\left|\dot{\boldsymbol{\omega}}\right|^2 dV \tag{2.41}$$

La potencia mecánica puede evaluarse a partir de la fuerza por unidad de masa $\boldsymbol{b}$ y los momentos tensionales por unidad de volumen $\boldsymbol{m}$ actuando en el interior de β, las tracciones $\boldsymbol{t}$ actuando en la superficie $\partial\beta$, de modo que

$$P = \int_{\beta} \rho.\boldsymbol{b}.\dot{\boldsymbol{u}}\, dV \int_{\beta} \Theta.\boldsymbol{m}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV \int_{\partial\beta} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\sigma}}.\dot{\boldsymbol{u}}\, dS + \int_{\partial\beta} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\mu}}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dS \tag{2.42}$$

Por otra parte, la potencia calórica suministrada al sistema es

$$Q = \int_{\beta} \rho.r.\, dV - \int_{\partial\beta} h.n\, dS \tag{2.43}$$

Siendo la densidad de masa r y el vector de flujo de calor h en la superficie $\partial\beta$ de normal $\boldsymbol{N}$.

Usando el Teorema de la Divergencia de Gauss, la ec.(2.43) puede expresarse como

$$Q = \int_{\beta} \rho.r.\, dV - \int_{\beta} \nabla.h\, dS \tag{2.44}$$

La Primera Ley de la Termodinámica o de Balance Energético, establece que se debe satisfacer la igualdad

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q \tag{2.45}$$

La tasa de E y de K toman el valor

$$\dot{E} = \int_{\rho} \rho.\dot{e}\, dV \tag{2.46}$$

$$\dot{K} = \int_{\beta} \rho.\dot{\boldsymbol{u}}\,.\ddot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_{\beta} \Theta.\dot{\boldsymbol{\omega}}\,.\ddot{\boldsymbol{\omega}}\, dV \tag{2.47}$$

Usando la relación de Cauchy, para las tensiones

$$\boldsymbol{t}^{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{N} \tag{2.48}$$

y para las cuplas tensionales

$$\boldsymbol{t}^{\mu} = \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{N} \tag{2.49}$$

entonces la potencia mecánica resulta

$$P = \int_{\beta} \rho.\boldsymbol{b}.\dot{\boldsymbol{u}}\, dV \int_{\beta} \Theta.\boldsymbol{m}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV \int_{\partial\beta} \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{N}.\dot{\boldsymbol{u}}\, dS + \int_{\partial\beta} \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{N}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dS \tag{2.50}$$

Mediante el Teorema de la Divergencia de Gauss se puede uniformar las integrales en el volumen.

$$P = \int_{\beta} \rho.\boldsymbol{b}.\dot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_{\beta} \Theta.\boldsymbol{m}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV + \int_{\beta} \nabla(\boldsymbol{\sigma}.\dot{\boldsymbol{u}})\, dV + \int_{\beta} \nabla(\boldsymbol{\mu}.\dot{\boldsymbol{\omega}})\, dV + \tag{2.51}$$

Desarrollando el valor de los divergentes

$$P = \int_{\beta} (\rho.\boldsymbol{b} + \nabla\boldsymbol{\sigma}).\dot{\boldsymbol{u}}\, dV \int_{\beta} (\Theta.\boldsymbol{m} + \nabla\boldsymbol{\mu}).\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV$$
$$+ \int_{\beta} \boldsymbol{\sigma}.\nabla\dot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_{\beta} \boldsymbol{\mu}.\nabla\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV \tag{2.52}$$

y reemplazando gradientes espaciales de desplazamientos y microrotaciones según su definición en continuos micropolares, la última expresión resulta

$$P = \int_\beta (\rho.\boldsymbol{b} + \nabla\boldsymbol{\sigma}).\dot{\boldsymbol{u}}\, dV \int_\beta (\Theta.\boldsymbol{m} + \nabla\boldsymbol{\mu}).\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV + \int_\beta \boldsymbol{\sigma}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\, dV + \int_\beta \boldsymbol{\mu}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}\, dV \tag{2.53}$$

Las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad de los continuos de Cosserat son

$$\rho\,.\ddot{\boldsymbol{u}} = \rho.\boldsymbol{b} + \nabla\boldsymbol{\sigma} \tag{2.54}$$

$$\Theta\,.\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \Theta.\boldsymbol{m} + \nabla\boldsymbol{\mu} \tag{2.55}$$

Reemplazando esto en la ec.(2.53)

$$P = \int_\beta \rho.\dot{\boldsymbol{u}}\,.\ddot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_\beta \Theta.\dot{\boldsymbol{\omega}}\,.\ddot{\boldsymbol{\omega}}\, dV + \int_\beta \sigma : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\, dV + \int_\beta \mu : \dot{\boldsymbol{\kappa}}\, dV \tag{2.56}$$

Por lo tanto la ec.(2.45) de balance energético, luego de los reemplazos de sus términos, resulta

$$\int_\rho \rho.\dot{e}\, dV + \int_\beta \rho.\dot{\boldsymbol{u}}\,.\ddot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_\beta \Theta.\dot{\boldsymbol{\omega}}\,.\ddot{\boldsymbol{\omega}}\, dV = \int_\beta \rho.\dot{\boldsymbol{u}}\,.\ddot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_\beta \Theta.\dot{\boldsymbol{\omega}}\,.\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \int_\beta \sigma : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\, dV + \int_\beta \mu : \dot{\boldsymbol{\kappa}}\, dV + \int_\beta \rho.r\,.dV - \int_\beta \nabla h\, dV \tag{2.57}$$

Eliminando términos iguales a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\int_\rho \rho.\dot{e}\, dV = \int_\beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\, dV + \int_\beta \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{e}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV + \int_\beta \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}\, dV + \int_\beta \rho.r\,.dV - \int_\beta \nabla h\, dV \tag{2.58}$$

Dado que esta ecuación es válida en el dominio arbitrario seleccionado, la forma local o fuerte de la ecuación de la energía toma la forma

$$\rho.\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \rho.r - \nabla h \tag{2.59}$$

2.4.2.- Segunda Ley de la Termodinámica.

La Primera Ley de la Termodinámica establece que la energía puede transformarse en energía cinética, potencial, etc. sin establecer requisitos acerca de la dirección posible de esta transformación. Esta información la provee la Segunda Ley de la Termodinámica que está fuertemente asociada al concepto de Entropía.

Se asume la existencia de una función de Entropía S

$$S = \int_{\rho} \rho.s \, dV \tag{2.60}$$

Donde $s(\boldsymbol{\epsilon}, \theta)$ es la densidad de entropía o entropía con la temperatura por unidad de masa.

El Flujo de Entropía Q_θ , con $\theta(\boldsymbol{x})$ la temperatura, resulta

$$Q_\theta = \int_{\beta} \frac{\rho.r}{\theta} \, dV - \int_{\partial\beta} \frac{h.n}{\theta} \, dS \tag{2.61}$$

La Segunda Ley de la Termodinámica establece, en forma de axioma, que debe cumplirse la desigualdad

$$\dot{S} - Q_\theta \geq 0 \tag{2.62}$$

Reemplazando las expresiones anteriores y utilizando el Teorema de la Divergencia de Gauss, se obtiene la forma global de la desigualdad de Clausius Duhem

$$\int_{\beta} \left(\rho.s - \frac{\rho.r}{\theta} + \nabla \left(\frac{h}{\theta} \right) \right) \, dV \geq 0 \tag{2.63}$$

Reacomodando y multiplicando por la temperatura, con $\theta \geq 0$, la forma local de la desigualdad queda

$$\rho.\theta.\dot{s} - \rho.r + \theta \, \nabla \left(\frac{h}{\theta} \right) = \rho.\theta.\dot{s} - \rho.r + \nabla h - \frac{h \nabla \theta}{\theta} \geq 0 \tag{2.64}$$

En esta expresión se reemplazan los resultados de la forma local de la Primera Ley de la Termodinámica, expresada por la ec.(2.59), y la desigualdad resulta

$$\rho.\theta.\dot{s} - \rho.\dot{e} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \frac{h \nabla \theta}{\theta} \geq 0 \tag{2.65}$$

Si se considera que e la densidad de energía depende de las deformaciones elásticas $\boldsymbol{\epsilon}^{el}$ y $\boldsymbol{\kappa}^{el}$, la entropía elástica s^{el} y de las variables internas q_α, su tasa puede evaluarse como

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial \epsilon_{el}} : \dot{\epsilon}_{el} + \frac{\partial e}{\partial \kappa_{el}} : \dot{\kappa}_{el} + \frac{\partial e}{\partial s_{el}} : \dot{s}_{el} + \sum_{\alpha} \frac{\partial e}{\partial q_\alpha} : \dot{q}_\alpha \tag{2.66}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la desigualdad

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial e}{\partial \epsilon^{el}}\right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left(\boldsymbol{\mu} - \frac{\partial e}{\partial \kappa^{el}}\right) : \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \left(\rho.\theta - \rho\frac{\partial e}{\partial s^{el}}\right).\dot{s} + \frac{\partial e}{\partial \epsilon^{el}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{pl}} +$$
$$\frac{\partial e}{\partial \kappa_{el}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{pl}} + +\rho\frac{\partial e}{\partial s^{el}}.\dot{s_{pl}} - \rho\sum_{\alpha}\frac{\partial e}{\partial q_\alpha}.\dot{q_\alpha} - \frac{h.\nabla\theta}{\theta} \geq 0 \qquad (2.67)$$

Esta desigualdad se cumple para cualquier proceso termodinámico definido por valores arbitrarios de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$, $\dot{\boldsymbol{s}}$ y $\dot{q_\alpha}$ y para cualquier campo de temperaturas $\theta(\boldsymbol{x})$.

Para el caso especial de procesos reversibles, es decir cuando $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{pl}} = 0$, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{pl}} = 0$, $\dot{s^{pl}} = 0$ y $\dot{q_\alpha} = 0$, para todo valor de α, se obtienen las relaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial e}{\partial \epsilon_{el}} \qquad \boldsymbol{\mu} = \rho\frac{\partial e}{\partial \kappa_{el}} \qquad \theta = \frac{\partial e}{\partial s_{el}} \qquad (2.68)$$

que se denominan relaciones de Coleman.

Designando el valor de la disipación térmica como

$$D_{ter} = -\frac{h.\nabla\theta}{\theta} \qquad (2.69)$$

y la disipación mecánica

$$D_{mec} = \rho.\theta.\dot{s}_{pl} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{pl}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{pl}} + Q_\sigma.\dot{q_\alpha} \qquad (2.70)$$

Donde se introdujeron las Q_σ , definidas como

$$Q_\sigma = \sum_{\alpha}\frac{\partial e}{\partial q_\alpha} \qquad (2.71)$$

Se debe cumplir que

$$D_{mec} + D_{ter} \geq 0 \qquad (2.72)$$

La dificultad de definir el valor de la energía interna, que requiere de la determinación de la densidad de entropía, lleva a definir una nueva función de estado llamada Densidad de Energía Libre o Energía Libre de Helmholtz definida por de la transformación

$$\Psi = e - \theta.s_{el} \qquad (2.73)$$

Se obtiene entonces

$$\dot{\Psi} = \dot{e} - \dot{\theta}.s_{el} - \theta.\dot{s_{el}} =$$

$$= \frac{\partial e}{\partial \epsilon_{el}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{el}} + \frac{\partial e}{\partial \kappa_{el}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{el}} + \frac{\partial e}{\partial s_{el}}.\dot{s_{el}} + \sum_{\alpha} \frac{\partial e}{\partial q_{\alpha}}.\dot{q_{\alpha}} - \dot{\theta}.s_{el} - \theta.\dot{s}_{el} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{el}} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{el}} + \theta.\dot{s}_{el} + Q_{\alpha}.\dot{q_{\alpha}} - \dot{\theta}.s_{el} - \theta.\dot{s}_{el}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{el}} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{el}} + +Q_{\alpha}.\dot{q_{\alpha}} - \dot{\theta}.s_{el} \tag{2.74}$$

de donde se deduce con claridad que esta energía libre depende de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{el}$, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{el}$, $\dot{\boldsymbol{s}}_{el}$ y $\dot{q_{\alpha}}$, , bajo la consideración de los procesos reversibles planteados [SH98]. Las ecuaciones constitutivas pueden deducirse a partir de la energía libre de Helmhotz

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{el}} \qquad \boldsymbol{\mu} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_{el}} \qquad s_{el} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \qquad Q_{\alpha} = -\rho\frac{\partial \Psi}{\partial q_{\alpha}} \tag{2.75}$$

y el valor de la disipación mecánica, expresada en términos de las deformaciones y la densidad de entropía totales resulta

$$D_{mec} = -\rho.\dot{\Psi} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \rho.\dot{s}.\theta + \rho\frac{d}{dt}(\theta.s^{pl}) \geq 0 \tag{2.76}$$

2.5.- Ecuaciones de Balance en Sólidos Micropolares

En el marco de la mecánica de los medios continuos, las ecuaciones de equilibrio que son pertinentes para la descripción de problemas de valores de borde son las de conservación o balance de masa, la cantidad de movimiento lineal y angular y el momento de la cantidad de movimiento. Estas condiciones o balances serán planteados a continuación.

2.5.1.- Balance de Masa

El equilibrio de masa resulta del postulado de que la masa de un cuerpo se conserva,

$$\int_{\beta} \rho.dV = cte \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\beta} \rho.dV = \int_{\beta} \dot{\rho}.dV + \int_{\beta} \rho\nabla\dot{\boldsymbol{x}}.dV = 0 \tag{2.77}$$

siendo ρ la densidad de masa local.

La forma local del balance de masa conduce a la ecuación

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \dot{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{2.78}$$

2.5.2.- Balance de la Cantidad de Movimiento Lineal

La cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}$ del cuerpo β se define de la forma

$$\boldsymbol{p} = \int_{\beta} \rho . \dot{\boldsymbol{x}} . dV \tag{2.79}$$

El cambio temporal de la cantidad de movimiento se evalúa como la suma de las fuerzas de superficie y del cuerpo actuando

$$\frac{d}{dt} \int_{\beta} \rho . \dot{\boldsymbol{x}} . dV = \int_{\partial\beta} \boldsymbol{t_\sigma} . dA + \int_{\beta} \rho . \boldsymbol{b} . dV \tag{2.80}$$

Donde $\boldsymbol{t_\sigma}$ es el vector de tensión en la superficie $\partial\beta$ del cuerpo β que se relaciona con el tensor de tensiones de Cauchy, ver ec.(2.48), y $\boldsymbol{b}$ corresponde en general a las fuerzas gravitatorias.

Así, bajo la consideración del equilibrio de masa local, se obtiene la forma global del equilibrio de momento

$$\int_{\beta} \rho . \ddot{\boldsymbol{x}} . dV = \int_{l\beta} \nabla \boldsymbol{\sigma} . dV + \int_{\beta} \rho . \boldsymbol{b} . dV \tag{2.81}$$

que en su forma local o fuerte resulta

$$\rho . \ddot{\boldsymbol{x}} = \nabla \boldsymbol{\sigma} + \rho . \boldsymbol{b} \tag{2.82}$$

2.5.3.- Balance del Momento de la Cantidad de Movimiento

El equilibrio de la cantidad de movimiento, postula que el cambio temporal del momento de la cantidad de movimiento es igual a la suma de los momentos que actúan en el cuerpo β.

En el caso de materiales micropolares, las ecuaciones incluyen, por un lado, los momentos causados por el vector de tensión y, por otro lado, los vectores de cuplas tensionales

$$\frac{d}{dt} \int_{\beta} \left(\boldsymbol{x} \times \rho . \dot{\boldsymbol{x}} + \Theta . (\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}) \right) . dV =$$

$$= \int_{\partial\beta} \left(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t_\sigma} + \boldsymbol{t_\mu} \right) . dA + \int_{\beta} \left(\boldsymbol{x} \times \rho . \boldsymbol{b} + \rho . \boldsymbol{c} \right) . dV \tag{2.83}$$

siendo c la cupla de fuerza del cuerpo por unidad de masa, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ la velocidad angular o velocidad rotacional del volumen elemental representativo del sólido y $\boldsymbol{\mu}$ el vector de cupla tensional actuante en la superficie del cuerpo.

Desarrollando la derivada indicada en la ec.(2.83) y considerando la ec.(2.48) y ec.(2.49) resulta

$$\int_{\partial\beta} \left(\boldsymbol{x} \times \rho \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} \times \rho \ddot{\boldsymbol{x}} + \Theta.(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}) \right) .dV =$$

$$\int_{\partial\beta} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{n}) .dA + \int_{\beta} (\boldsymbol{x} \times \rho.\boldsymbol{b} + \rho.\boldsymbol{c}) .dV \tag{2.84}$$

Considerando la ec.(2.82) de , la expresión anterior se convierte en

$$\int_{\partial\beta} \Theta.(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}).dV = \int_{\beta} \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\sigma}^T.dV + \int_{\beta} \bigtriangledown \boldsymbol{\mu}.dV + \int_{\beta} \rho.\boldsymbol{c}.dV \tag{2.85}$$

La forma local o fuerte de la ecuación de balance del momento de la cantidad de movimiento toma la forma

$$\Theta.(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}) = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\sigma} + \nabla \boldsymbol{\mu} + \rho.\boldsymbol{c} \tag{2.86}$$

2.5.4.- Ecuaciones de Balance Geométricamente Lineales

En este caso, la configuración actual y referencial son infinitamente próximas. Los tensores de gradiente de desplazamientos $\nabla \boldsymbol{u}$ y las rotaciones $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, de ambas configuraciones son aproximadamente el mismo.

Asumiendo el caso estático, las variables aceleración $\ddot{x}$, velocidad $\dot{x}$, velocidad $\dot{\omega}$ y aceleración rotacional $\ddot{\omega}$ desaparecen, y las ecuaciones de balance toman la forma:

Balance de Masa

$$\rho = \rho_0.(det\boldsymbol{F})^{-1} \tag{2.87}$$

Balance de Cantidad de movimiento lineal

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \rho.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{2.88}$$

Balance de Momento de la cantidad de movimiento

$$\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\sigma}^T + \nabla \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0} \tag{2.89}$$

siendo ρ_0 la densidad de masa inicial del material. Las cuplas tensionales del cuerpo por unidad de masa $\mathbf{c}$ se consideran iguales a cero ya que la naturaleza de ellas se desconoce.

2.6.- Relaciones Constitutivas Micropolares

Una aproximación termodinámica de la descripción de un continuo puede ser caracterizada por un conjunto de variables de estado que se relacionan cada una de ellas con fenómenos físicos en el micronivel de una descripción material [Run96].

Es necesario definir las ecuaciones constitutivas a partir de la energía libre, de la que derivan las tensiones Σ las cuales abarcan tanto a las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ como a los momentos tensionales $\boldsymbol{\mu}$, la densidad de entropía y las tensiones disipativas, como así también las variables internas. De esta manera se asegura el cumplimiento de la restricción impuesta por la desigualdad de Clausius Duhem, respecto de la disipación mecánica positiva, lo que garantiza que el proceso que se describe sea admisible termodinámicamente. Las ec.(2.75) señalan

$$\Sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_{el}} \qquad s_{el} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \qquad Q_\alpha = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha}$$

En esta última expresión debe recordarse que $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{el}$, $\dot{\boldsymbol{s}}_{el}$ y $\dot{q}_\alpha$, son las variables de estado independientes, y que $\boldsymbol{\xi}$ engloba el valor de las deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ y de las microrotaciones $\boldsymbol{\kappa}$.

2.6.1.- Elasticidad

Un material elástico se define por la ausencia de variables internas en sus ecuaciones constitutivas. En condiciones isotérmicas, la forma general de la densidad de energía libre ec.(2.73) depende solo de la deformación $\boldsymbol{\xi}$.

El material elástico debe satisfacer las condiciones de:

1.- La densidad de energía libre debe ser estrictamente convexa

2.- Existe un “estado natural” caracterizado por $\Sigma = 0$

Si la función es convexa, existe un estado natural mínimo que sin pérdida de generalidad puede ser nulo. Bajo esta consideración

- un problema de valores de borde tendrá una solución única,
- la energía potencial alcanza un valor mínimo cuando se satisfacen las ecuaciones de equilibrio y
- la energía complementaria (en tensiones) es un mínimo cuando el campo de deformaciones y tensiones satisfacen las restricciones cinemáticas.

2.6.1.1.-Elasticidad Lineal

Está definida por una función cuadrática de energía en términos de las deformaciones [Ior96], [Nie98]

$$\Psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{E}_{el} : \boldsymbol{\xi} =$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{u\omega}} : \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{\omega u}} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad (2.90)$$

Cuando el acoplamiento del comportamiento viga – membrana disminuye, es decir

$$\boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{u\omega}} \to 0 \qquad \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{\omega u}} \to 0$$

El tensor de tensiones se relaciona solo con el de deformaciones y el de momentos tensionales solo con las microrotaciones, por lo que

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}_{el}} = \boldsymbol{E}_{el} : \boldsymbol{\xi} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \boldsymbol{\kappa} \qquad (2.91)$$

Donde $\boldsymbol{E}_{el}$ es el tensor material elástico el cual posee simetría mayor

$$\boldsymbol{E}_{ijkl} = \boldsymbol{E}_{klij} \qquad (2.92)$$

Para el caso de elasticidad lineal isotrópica la forma del tensor es

$$\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{\otimes} \partial \epsilon} \qquad y \qquad \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_{\otimes} \partial \kappa} \qquad (2.93)$$

Los tensores elásticos isotrópicos de cuarto orden, en el caso más general tridimensional, pueden ser representados de la forma

$$\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} = \phi_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (\phi_2 + \phi_3)\boldsymbol{I}^{sym} + +(\phi_2 - \phi_3)\boldsymbol{I}^{skw} \qquad (2.94)$$

$$\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \varphi_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (\varphi_2 + \varphi_3)\boldsymbol{I}^{sym} + +(\varphi_2 - \varphi_3)\boldsymbol{I}^{skw} \qquad (2.95)$$

Es decir incorporan seis constantes materiales independientes $\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \varphi_1,\ \varphi_2\ y\ \varphi_3$, cuatro mas que en el caso equivalente de continuos clásicos elásticos lineales.

Las constantes $\phi_1 = \lambda$, $(\phi_2 + \phi_3) = G$ conocidas como las constantes de Lamé, y $(\phi_2 - \phi_3) = G_c$ que es el módulo de corte micropolar que relaciona las componentes no simétricas de tensiones y deformaciones.

En el caso bidimensional el número de parámetros materiales elásticos se reducen a cuatro con $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$, y $\varphi_2 = 2\beta.lc^2$ indicando lc la longitud característica de Cosserat.

Los valores de $\boldsymbol{I}^{sym}$, $\boldsymbol{I}^{skw}$ y 1 están dados por

$$\boldsymbol{I}^{sym}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ij}.\delta_{kl} + \delta_{il}.\delta_{jk}) \qquad \boldsymbol{I}^{skw}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ij}.\delta_{kl} - \delta_{il}.\delta_{jk})$$
$$\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij} \tag{2.96}$$

El tensor unitario simétrico $\boldsymbol{I}^{sym}$ y el antisimétrico $\boldsymbol{I}^{skw}$ acoplan las componentes simétricas y antisimétricas de los tensores de segundo orden $\boldsymbol{\epsilon},\ \boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\sigma}\ y\ \boldsymbol{\mu}$.

Consecuentemente, un estado de tensiones se expresa como

$$\boldsymbol{\sigma} = \phi_1 tr(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1} + \phi_2.\boldsymbol{\epsilon} + \phi_3.\boldsymbol{\epsilon}^T \tag{2.97}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \varphi_1 tr(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{1} + \varphi_2.\boldsymbol{\kappa} + \varphi_3.\boldsymbol{\kappa}^T \tag{2.98}$$

2.6.2.- Ecuaciones Constitutivas Elastoplásticas Termodinámicamente Consistentes

Para describir los fenómenos y mecanismos disipativos que ocurren en el nivel microscópico es necesario introducir variables internas representativas de dichos fenómenos durante procesos arbitrarios de carga. La siguiente formulación está restringida a una teoría geométricamente lineal que conduce a una partición aditiva del tensor de deformaciones y de curvaturas en una parte elástica o reversible y otra plástica o irrecuperable [Hil50], [Pra24], en el marco de la teoría de la elastoplasticidad.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \tag{2.99}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_p \tag{2.100}$$

La energía libre $\boldsymbol{\Psi}$ para materiales disipativos se define en términos de las deformaciones totales, las deformaciones plásticas y las variables internas q_α . Este conjunto de cantidades define el estado de la microestructura del material, que tiene en cuenta el comportamiento de endurecimiento / ablandamiento del mismo

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_{pl}, \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\alpha}}\right) = \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{pl}\right) + \boldsymbol{\Psi}_{pl}\left(\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\alpha}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{E}_{\mathbf{0}} : \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Psi}_{pl}\left(\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\alpha}}\right) \tag{2.101}$$

siendo $\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_{pl}\right)$ la parte elástica de la energía mientras $\boldsymbol{\Psi}_{pl}\left(q_\alpha\right)$ es irrecuperable.

De la expresión de la energía (ec. 2.90), se pueden calcular las tensiones

$$\boldsymbol{\Sigma}=\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\xi}_e}=\boldsymbol{E_0}:\boldsymbol{\xi}_{el}=\boldsymbol{E}_0^{uu}:(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_{pl})+\boldsymbol{E}_0^{\omega\omega}:(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_{pl}) \qquad (2.102)$$

y las llamadas tensiones disipativas que son conjugadas energéticas de q_α

$$\boldsymbol{Q_\alpha}=-\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{q_\alpha}}=-\frac{\partial\Psi_{pl}}{\partial\boldsymbol{q_\alpha}} \qquad (2.103)$$

Para valores dados de $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{q_\alpha}$ se pueden calcular las variables de estado dependientes $\boldsymbol{\Sigma}$ y $\boldsymbol{Q_\alpha}$ de las relaciones anteriores. Para relacionar los valores de las deformaciones $\boldsymbol{\xi}$ con las variables de estado $\boldsymbol{q_\alpha}$, deben establecerse además relaciones constitutivas, que se expresan en forma de tasa

$$\dot{\boldsymbol{q_\alpha}}=f_\alpha\left(\boldsymbol{\xi},\dot{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{q_\alpha}\right) \qquad (2.104)$$

Las mismas pueden elegirse de modo que se cumpla la desigualdad de Clausius Duhem, o sea la positividad de la energía disipada:

$$D_{mec}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{pl}}+\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{pl}}+\boldsymbol{Q_\alpha}.\dot{\boldsymbol{q_\alpha}}\geq 0 \qquad (2.105)$$

que es la condición fundamental para garantizar que la formulación de un modelo sea termodinámicamente consistente [Bet86], para todos los valores posibles de α y de la tasa de deformaciones $\dot{\xi}$.

El módulo de endurecimiento se define como

$$H_{\alpha\beta}=-\frac{\partial\boldsymbol{Q_\alpha}}{\partial\boldsymbol{q_\beta}}=\frac{\partial^2\Psi_{pl}}{\partial\boldsymbol{q_\alpha}\partial\boldsymbol{q_\beta}} \qquad (2.106)$$

Valores positivos de $H_{\alpha\beta}$ definen respuesta de endurecimiento, mientras que si es negativo corresponde a respuesta de ablandamiento.

La plasticidad clásica se basa en la existencia de una superficie de fluencia convexa en el espacio de tensiones, en el interior de la cual los estados de tensiones son elásticos y la respuesta es reversible para cualquier cambio de las variables de control. Se asume que existe una función $\Phi(\Sigma,q_\alpha)$ de modo que los estados admisibles están dados por

$$B=(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{q_\alpha}/\Phi(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{q_\alpha})\leq 0) \qquad \text{que contiene al origen}$$

El par (Σ, q_α) está orientado en la dirección normal a la superficie. Cuando la superficie es uniforme este valor es único.

La función Φ de fluencia definida en el espacio de tensiones y momentos tensionales, está caracterizada por los gradientes

$$\boldsymbol{\nu_u} \doteq \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \boldsymbol{\nu_\omega} \doteq \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\mu}} \tag{2.107}$$

Las ecuaciones de evolución de las deformaciones plásticas y de las variables internas de endurecimiento o ablandamiento, están dadas por

La función de potencial plástico ϕ

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{p}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \tag{2.108}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha})}{\partial \boldsymbol{q_\alpha}} \tag{2.109}$$

cuyos gradientes caracterizan la dirección de la deformación plástica

$$\boldsymbol{\upsilon_u} \doteq \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \boldsymbol{\upsilon_\omega} \doteq \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\mu}} \tag{2.110}$$

Donde $\dot{\lambda}$ se denomina *multiplicador plástico* y se puede determinar de las condiciones de Kuhn Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0 \qquad \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) \leq 0 \qquad \dot{\lambda}\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) = 0 \tag{2.111}$$

de las que se puede deducir:

$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) \leq 0 \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = 0$	Comportamiento elástico o descarga
$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) = 0 \quad \Rightarrow \dot{\lambda} > 0$	Comportamiento plástico o carga
$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) = 0 \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = 0$	Carga plástica neutra
$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) > 0$	Estado incompatible

De la condición de consistencia

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) \doteq 0 \qquad \Rightarrow \dot{\lambda}\, \dot{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) = 0 \tag{2.112}$$

Se obtiene una solución explícita para el multiplicador plástico

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h_p}[\boldsymbol{\nu_u} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{h_p}[\boldsymbol{\nu_\omega} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}}] : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \tag{2.113}$$

donde

$$h_p = H_p + \boldsymbol{\nu_u} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\upsilon_u} + \boldsymbol{\nu_\omega} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \boldsymbol{\upsilon_\omega} \tag{2.114}$$

Finalmente, las ecuaciones constitutivas elastoplásticas pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \tag{2.115}$$

Si se desprecia en el comportamiento elástico el acoplamiento membranal-flexional, es decir que $\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{u\omega}} = \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega u}} = 0$, las particiones del tensor elastoplástico resultan

$$\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} = \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} - \frac{1}{h_p}\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\upsilon_u} \otimes \boldsymbol{\nu_u} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} \tag{2.116}$$

$$\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} = \quad -\frac{1}{h_p}\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\upsilon_u} \otimes \boldsymbol{\nu_\omega} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} \tag{2.117}$$

$$\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} = \quad -\frac{1}{h_p}\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \boldsymbol{\upsilon_\omega} \otimes \boldsymbol{\nu_u} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} \tag{2.118}$$

$$\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} - \frac{1}{h_p}\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \boldsymbol{\upsilon_\omega} \otimes \boldsymbol{\nu_\omega} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} \tag{2.119}$$

2.6.3.- Unicidad y Estabilidad de la Solución Incremental.

En el régimen plástico el operador material elastoplástico tangente define una relación lineal entre la tasa de tensiones y la tasa de deformaciones.

La tasa de cambio del equilibrio y las condiciones de borde, ec.(2.48), ec.(2.49), ec.(2.88) y ec.(2.89) se escriben de la forma:

$\nabla\boldsymbol{\sigma} + \rho.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ en el dominio β^σ

$\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\sigma}^T + \nabla\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$ en el dominio β^μ

$\boldsymbol{N}.\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{t}^\sigma}$ sobre $\partial\beta^\sigma$

$\boldsymbol{N}.\dot{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\boldsymbol{t}^\mu}$ en $\partial\beta^\mu$

$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\boldsymbol{\mu}}_0$ sobre $\partial\beta^\sigma$

$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0$ sobre $\partial\beta^{\mu}$

Donde $\dot{\boldsymbol{\mu}}_0$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$, $\dot{\boldsymbol{t}}_0^{\sigma}$ y $\dot{\boldsymbol{t}}_0^{\mu}$ son las condiciones de borde estática y cinemáticas prescriptas y $\partial\beta$ el contorno del dominio β del cuerpo.

La ***pérdida de estabilidad material*** [Wil02] está identificada con la pérdida de positividad de la densidad del trabajo interno. Es condición suficiente para la estabilidad material, que se cumpla

$$d^2W == \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Sigma}} : \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}} : \boldsymbol{E^T} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad para \quad todo \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} \neq 0 \tag{2.120}$$

En el caso de que el operador material tangente no es simétrico, o cuando se trata de comportamiento elastoplástico no asociado $\boldsymbol{E}_{ep} \neq \boldsymbol{E}_{ep}^{T}$, se considera solo la parte simétrica del funcional de energía dada por la expresión

$$d^2W = \frac{1}{4}\dot{\boldsymbol{\xi}} : \left(\boldsymbol{E_{ep}} + \boldsymbol{E_{ep}^T}\right) : \dot{\boldsymbol{\xi}} =$$
$$= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}} : \boldsymbol{E_0} : \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{4h_p} : \dot{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\boldsymbol{m}} \otimes \tilde{\boldsymbol{n}} + \tilde{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}\right) : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \; \forall \dot{\boldsymbol{\xi}} \neq 0 \tag{2.121}$$

con $\tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} : \boldsymbol{E} \quad y \quad \tilde{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m} : \boldsymbol{E}$

lo que conduce a la siguiente observación basada en los valores límites de Bromwich para matrices no simétricas

$$\lambda_{min}(\boldsymbol{E_{ep}^{sym}}) \leq R(\lambda_{min}(\boldsymbol{E_{ep}})) \leq R(\lambda_{max}(\boldsymbol{E_{ep}})) \leq \lambda_{max}(\boldsymbol{E_{ep}^{sym}}) \tag{2.122}$$

Es decir que la condición de inestabilidad coincide con singularidad del operador material simétrico

$$d^2W = 0 \rightarrow det(\boldsymbol{E_{ep}^{sym}}) \doteq 0 \rightarrow \lambda_{min}(\boldsymbol{E_{ep}^{sym}}) = 0 \tag{2.123}$$

La condición de punto límite para materiales incrementalmente lineales, se define como

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{E^T} : \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0 \tag{2.124}$$

La misma establece la estacionalidad de la respuesta en término de tensiones, para una determinada historia de carga. La ***pérdida de unicidad*** de la solución es equivalente a un comportamiento singular del operador material tangente

$$det(E^T) \doteq 0 \rightarrow \lambda_{min}(\boldsymbol{E^T}) = 0 \tag{2.125}$$

Termodinámica

Energía interna $E = \int_{\rho} \rho.e\, dV$

Energía cinética $K = \frac{1}{2}\int_{\beta} \rho.\, |\dot{\boldsymbol{u}}|^2\, dV + \frac{1}{2}\int_{\beta} \Theta.\, |\dot{\boldsymbol{\omega}}|^2\, dV$

Potencia mecánica $P = \int_{\beta} \rho.\boldsymbol{b}.\dot{\boldsymbol{u}}\, dV \int_{\beta} \Theta.\boldsymbol{m}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dV \int_{\partial\beta} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\sigma}}.\dot{\boldsymbol{u}}\, dS + \int_{\partial\beta} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\mu}}.\dot{\boldsymbol{\omega}}\, dS$

Potencia calórica $Q = \int_{\beta} \rho.r.\, dV - \int_{\beta} \nabla.h\, dS$

Primera Ley de la Termodinámica: $\dot{E} + \dot{K} = P + Q$

Forma integral

$$\int_{\rho} \rho.\dot{e}\, dV = \int_{\beta} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\, dV + \int_{\beta} \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}\, dV + \int_{\beta} \rho.r\, .dV - \int_{\beta} \nabla h\, dV$$

Forma local $\rho.\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \rho.r - \nabla h$

Entropía $S = \int_{\rho} \rho.s\, dV$

Flujo de Entropía $Q_{\theta} = \int_{\rho} \frac{\rho.r}{\theta}\, dV - \int_{\partial\rho} \frac{h.n}{\theta}\, dS$

Segunda Ley de la Termodinámica $\dot{S} - Q_{\theta} \geq 0$

Ecuaciones de Balance

Balance de masa

$$\int_{\beta} \rho.dV = cte \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\beta} \rho.dV = \int_{\beta} \dot{\rho}.dV + \int_{\beta} \rho\nabla\dot{\boldsymbol{x}}.dV = 0$$

Forma local $\dot{\rho} + \rho\nabla\dot{\boldsymbol{x}} = 0$

Balance de la Cantidad de Movimiento lineal

$$\int_{\beta} \rho.\ddot{\boldsymbol{x}}.dV = \int_{l\beta} \nabla\boldsymbol{\sigma}.dV + \int_{\beta} \rho.\boldsymbol{b}.dV$$

Forma local $\rho.\ddot{\boldsymbol{x}} = \nabla\boldsymbol{\sigma} + \rho.\boldsymbol{b}$

Balance del Momento de la Cantidad de Movimiento

$$\int_{\partial\beta} \Theta.(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}).dV = \int_{\beta} \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\sigma}^T.dV + \int_{\beta} \nabla\boldsymbol{\mu}.dV + \int_{\beta} \rho.\boldsymbol{c}.dV$$

Forma local $\Theta.(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}) = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\sigma} + \nabla\boldsymbol{\mu} + \rho.\boldsymbol{c}$

Cinemática

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \bar{\boldsymbol{L}} + \bar{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}(\nabla^T \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}(\nabla^T \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}.\bar{\boldsymbol{\omega}})$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \nabla \boldsymbol{u} - \mathrm{e}.\bar{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{sym} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{skw} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} - \nabla^T \boldsymbol{u}) - \mathrm{e}.\bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{\Omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}})$$

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \nabla \bar{\boldsymbol{\omega}}$$

Estática

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{T}} + \rho.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \qquad \nabla \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{T}} + \mathrm{e} : \boldsymbol{\sigma} + \rho.\boldsymbol{B_m} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{N}.\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\sigma}} \quad : en \quad \partial\beta^{\sigma} \qquad \boldsymbol{N}.\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\mu}} \quad : en \quad \partial\beta^{\mu}$$

Relaciones Constitutivas

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_{el}} \qquad s_{el} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \qquad Q_{\alpha} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{\alpha}}$$

Elasticidad

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_{el}}$$

Elasticidad lineal isotrópica

$$\Psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{E}_{el} : \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{u\omega}} : \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{E}_{el}^{\boldsymbol{u\omega}} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{\otimes} \partial \epsilon} \qquad y \qquad \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_{\otimes} \partial \kappa}$$

$$\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} = \phi_1 \boldsymbol{I}_2 \otimes \boldsymbol{I}_2 + (\phi_2 + \phi_3)\boldsymbol{I}_4^{sym} + +(\phi_2 - \phi_3)\boldsymbol{I}_4^{skw}$$

$$\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \varphi_1 \boldsymbol{I}_2 \otimes \boldsymbol{I}_2 + (\varphi_2 + \varphi_3)\boldsymbol{I}_4^{sym} + +(\varphi_2 - \varphi_3)\boldsymbol{I}_4^{skw}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \phi_1 tr(\boldsymbol{\epsilon}) I_2 + \phi_2.\boldsymbol{\epsilon} + \phi_3.\boldsymbol{\epsilon}^T \qquad \boldsymbol{\mu} = \varphi_1 tr(\boldsymbol{\kappa}) I_2 + \varphi_2.\boldsymbol{\kappa} + \varphi_3.\boldsymbol{\kappa}^T$$

Plasticidad

$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p$ $\qquad$ $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_p$

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_{pl}, q_\alpha\right) = \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{pl}\right) + \boldsymbol{\Psi}_{pl}\left(q_\alpha\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{E_0} : \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Psi}_{pl}\left(q_\alpha\right)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_e} = \boldsymbol{E_0} : \boldsymbol{\xi}_{el} = \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{pl}) + \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} : (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_{pl})$$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial \Psi_{pl}}{\partial q_\alpha} \qquad \dot{q_\alpha} = f_\alpha\left(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, q_\alpha\right)$$

$$D_{mec} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{pl}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{pl}} + Q_\alpha . \dot{q_\alpha} \geq 0$$

$$H_{\alpha\beta} = -\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial^2 \Psi_{pl}}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \qquad \boldsymbol{\nu_u} \doteq \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \boldsymbol{\nu_\omega} \doteq \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\mu}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{pl} = \dot{\lambda}\frac{\partial \Phi(\Sigma, q_\alpha)}{\partial \Sigma} = \dot{\lambda}.\boldsymbol{\nu_\zeta} \qquad con \qquad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{q_\alpha} = \dot{\lambda}\frac{\partial \Phi(\Sigma, q_\alpha)}{\partial \Sigma}\dot{\lambda} \geq 0 \qquad \Phi(\Sigma, q_\alpha) \leq 0 \qquad \dot{\lambda}\Phi(\Sigma, q_\alpha) = 0$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h_p}[\boldsymbol{\nu_u} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{h_p}[\boldsymbol{\nu_\omega} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}}] : \dot{\boldsymbol{\kappa}}$$

$$h_p = H_p + \boldsymbol{\nu_u} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\upsilon_u} + \boldsymbol{\nu_\omega} : \boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \boldsymbol{\upsilon_\omega}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix}$$

Flujo plástico no asociado

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda}\frac{\partial \phi(\Sigma, q_\alpha)}{\partial \Sigma}\dot{q_\alpha} = \dot{\lambda}\frac{\partial \phi(\Sigma, q_\alpha)}{\partial q_\alpha}$$

Leyes de flujo $\qquad \boldsymbol{\upsilon_u} \doteq \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \boldsymbol{\upsilon_\omega} \doteq \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\mu}}$

CAPITULO 3

Localización de Deformaciones

La localización de deformaciones en bandas de espesor reducido se considera como el factor responsable de falla estructural frágil, la cual es altamente peligrosa por su carácter imprevisto.

La localización de deformaciones se manifiesta de forma súbita y puede tener lugar aún en estados incipientes de deformación. El mecanismo de colapso de los materiales ingenieriles está precedido de un proceso disipativo no lineal caracterizado por la concentración de deformaciones en bandas de espesor muy pequeño en comparación con las dimensiones globales de la estructura o miembro estructural. Este proceso de localización de deformaciones implica el inicio del proceso de falla material.

La fig.3.1 esquematiza el proceso de formación de una discontinuidad [San06]. A medida que evoluciona el estado de solicitación, se puede ver como sedesarrolla el mecanismo de falla, con una progresiva reducción del ancho de banda en donde se localizan las deformaciones hasta alcanzarse el colapso en una superficie S:

(a) Proceso elástico reversible

(b) y (c) Mecanismo disipativo y el proceso de localización de las deformaciones

(d) y (e) Superficie de falla, discontinuidad o fisura.

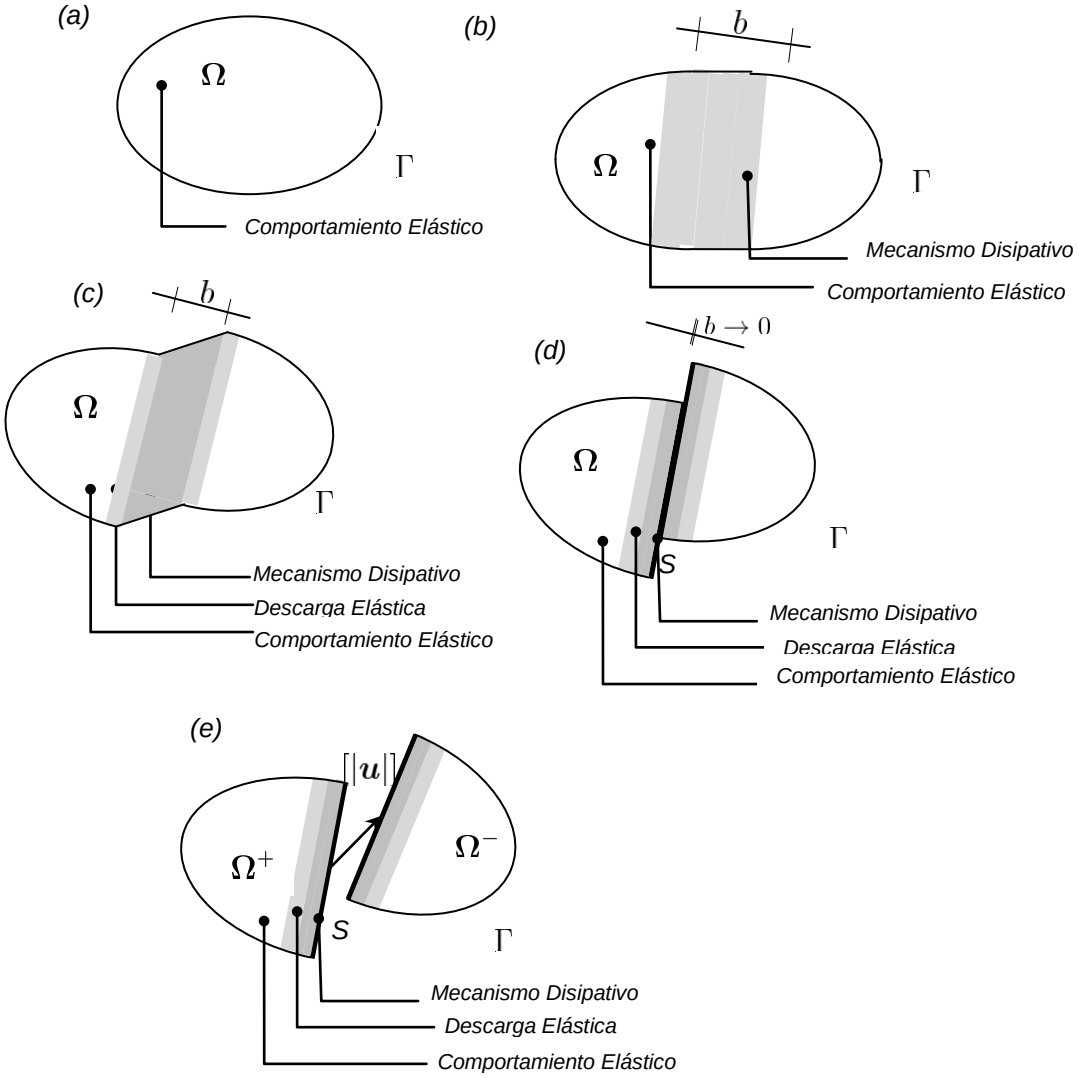


Figura 3.1.- Esquema de formación de una discontinuidad

Si no existe una restricción impuesta que limite el ancho de banda de localización, la solución termodinámicamente más estable corresponde a aquella que muestra un espesor nulo (superficie de fractura) [Baz76]. La localización se produce entonces en un volumen infinitamente pequeño y, por ende, la falla material se lleva a cabo sin disipación de energía. Esta inconsistencia es propia de los modelos continuos locales.

Para regularizar el comportamiento carga – desplazamiento en el régimen de ablandamiento aunque no la localización de deformaciones en bandas de ancho nulo, se propone, entre otras soluciones, el uso del concepto de energía de fractura como parámetro intrínseco del material.

El continuo micropolar incorpora naturalmente una longitud característica. Este enriquecimiento tiene como finalidad suavizar y regularizar la evolución de los mecanismos inelásticos responsables de la degradación.

3.1.- Indicadores de Falla

En este Capítulo se estudian los diferentes criterios que indican el inicio de la falla del material a nivel constitutivo. En el análisis de la localización es importante tener presente que la falla es un proceso que comienza en pequeña escala y progresa deteriorando el continuo hasta volverlo discontinuo.

3.1.1.-Clasificación de Falla

Dada la función $[|\phi|] : \Omega \in R^3$ y $S \subset \Omega$ una superficie que separa el dominio en dos partes $\Omega^+ \, y \, \Omega^- \left(\Omega^- \cup \Omega^+ = \Omega \, , \, \Omega^- \cap \Omega^+ = \oslash\right)$, el salto de la función ϕ través de la superficie S se define como

$$[|\phi|] = \phi^+ - \phi^- \tag{3.1}$$

Discontinuidad de orden ***n*** en un campo cinemático o estático del continuo a través de la superficie S designa la discontinuidad de la enésima derivada espacial o temporal del campo correspondiente [Die93], [Ior96], [IWC95].

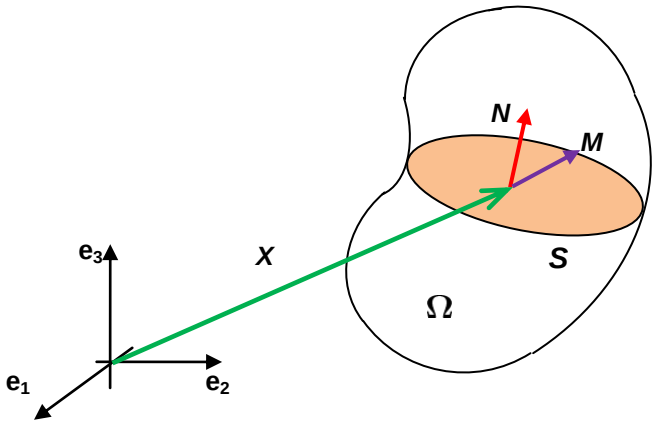


Figura 3.2.- Dominio material dividido por la superficie de discontinuidad

donde $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{M}^u, \boldsymbol{M}^\omega]$ define la dirección del salto y $\boldsymbol{N}$ la dirección normal de la superficie de falla.

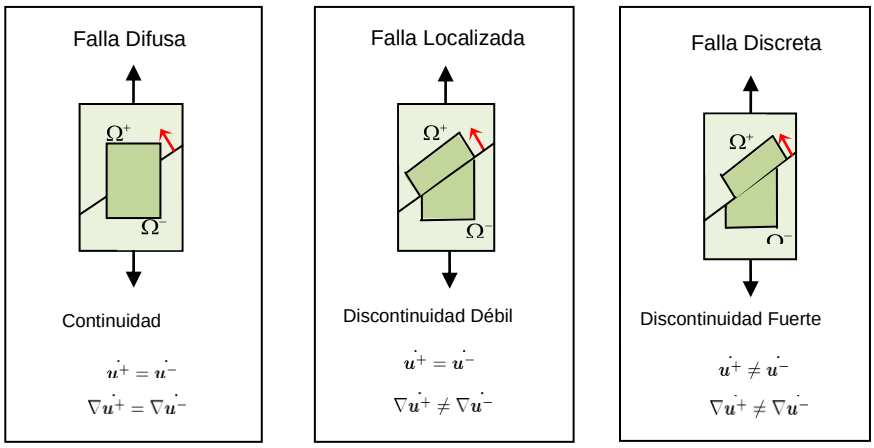


Figura 3.3.- Deterioro Cinemático del continuo.

- Falla continua:

Describe el proceso de falla en el cual se satisfacen las condiciones cinemáticas de compatibilidad.

$$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] = 0 \qquad [|\nabla\dot{\boldsymbol{u}}|] = 0 \tag{3.2}$$

$$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = 0 \qquad [|\nabla\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = 0 \tag{3.3}$$

La singularidad del operador material tangente, ec.(2.116)

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{E}^T : \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$$

resulta en tasas de deformación y microcurvatura críticas que permanecen siempre continuas sin exhibir saltos.

- Falla localizada:

El proceso de falla exhibe saltos en el campo de gradientes de velocidades en tanto el campo de tasas de desplazamientos permanece continuo, así como saltos en las tasas de microcurvaturas mientras el campo de tasas de giros permanece continuo:

$$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] = 0 \qquad [|\nabla\dot{\boldsymbol{u}}|] \neq 0 \tag{3.4}$$

$$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = 0 \qquad [|\nabla\dot{\boldsymbol{\omega}}|] \neq 0 \tag{3.5}$$

- Falla discreta:

Designa al proceso de falla que introduce saltos no solo en el campo de gradientes de velocidades y de tasas de microcurvaturas sino además en el campo de tasas de desplazamientos y microrotaciones. La formación de una discontinuidad en las tasas de los desplazamientos y de los microgiros conduce a un proceso de falla discreto.

$$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] \neq 0 \qquad [|\nabla \dot{\boldsymbol{u}}|] \neq 0 \tag{3.6}$$

$$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] \neq 0 \qquad [|\nabla \dot{\boldsymbol{\omega}}|] \neq 0 \tag{3.7}$$

3.2.-Diagnóstico de Falla

Los indicadores de falla que permiten caracterizar la falla a nivel constitutivo pueden clasificarse:

1. Condición de estado límite

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q_\alpha}) = 0 \tag{3.8}$$

La condición de estado límite es una generalización del tradicional concepto de máxima resistencia y delimita el estado triaxial de tensiones de acuerdo con la hipótesis de falla.

2. Condición de punto límite

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{E}^T : \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0 \Longleftrightarrow det(\boldsymbol{E}^T) = 0 \tag{3.9}$$

El punto límite caracteriza la estacionalidad de la respuesta de tensiones para una dada historia de carga. Para un camino de deformaciones, la condición de punto límite puede imaginarse como un diagrama de tensiones – deformaciones que se aproxima a una tangente horizontal o a un valor de tensión estacionario. El operador material tangente se vuelve singular y ello está caracterizado por el autovalor crítico, ec.(2.117)

$$\lambda_{min}(\boldsymbol{E^T}) = 0$$

Esta condición de tensión estacionaria, en caso de que no esté acompañada de saltos en el campo de tasa de deformaciones, señala una falla continua o difusa. Este criterio debe entenderse como una condición necesaria de la pérdida de unicidad continua de la solución.

En el caso de un operador elastoplástico tangente no simétrico que deviene de una formulación de plasticidad no asociada, la pérdida de estabilidad, de la forma $det(\boldsymbol{E^{Tsym}}) = 0$, provee una condición de borde inferior, en término de

los límites de Bromwich. Es decir: la pérdida de estabilidad que es sinónimo de singularidad del operador material tangente simétrico tiene lugar antes de que se alcanza la condición de punto límite.

3. Condición de localización

$$[|\dot{\boldsymbol{t}}|] = \boldsymbol{Q}_L.\boldsymbol{M} = 0 \Longleftrightarrow det(\boldsymbol{Q}_L) = 0 \tag{3.10}$$

Esta condición detecta la formación de discontinuidades espaciales a lo largo de la superficie de singularidad definida por el vector normal N. Se tendrán discontinuidades débiles en el caso de existir saltos en el campo de las deformaciones, o fuertes cuando se tengan saltos en el campo de los desplazamientos.

3.3.-Indicadores de Falla Localizada

Las condiciones de localización derivan de la existencia de una superficie de discontinuidad de segundo orden en el campo cinemático de los desplazamientos $\boldsymbol{u}$ y de las microrotaciones $\boldsymbol{\omega}$, o lo que es lo mismo, una superficie de discontinuidad de primer orden en el campo de deformaciones $\boldsymbol{\sigma}$ y de microcurvaturas $\boldsymbol{\kappa}$.

A través de una frontera común S entre las dos regiones que se visualizan en la fig. 3.2, y por las condiciones de continuidad asumidas, resulta

$$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] = \dot{\boldsymbol{u}}^+ - \dot{\boldsymbol{u}}^- = 0 \tag{3.11}$$

$$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = \dot{\boldsymbol{\omega}}^+ - \dot{\boldsymbol{\omega}}^- = 0 \tag{3.12}$$

mientras que se considera un salto en el gradiente de velocidad y en la tasa de microgiros [Ior96] ,

$$[|\nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{u}}|] = \nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{u}}^+ - \nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{u}}^- \neq 0 \tag{3.13}$$

$$[|\nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = \nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{\omega}}^+ - \nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{\omega}}^- \neq 0 \tag{3.14}$$

Aplicando el Teorema de Maxwell [TT60]

$$[|\nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{u}}|] = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} \tag{3.15}$$

$$[|\nabla_{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} \tag{3.16}$$

donde $\dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\ y\ \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}$ escalares que establecen las magnitudes de los saltos en los campos cinemáticos membranales y rotacionales respectivamente.

Con estas expresiones es posible describir completamente los saltos en la tasa de deformaciones como un tensor de rango uno y orden dos

$$[|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|] = \left[\left|\nabla_{\boldsymbol{x}}^{T}\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{e} : \dot{\boldsymbol{\omega}}\right|\right] = \dot{\gamma}^{u}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{u} \tag{3.17}$$

y el salto en la tasa de microcurvaturas

$$[|\dot{\boldsymbol{\kappa}}|] = \left[\left|\nabla_{\boldsymbol{x}}^{T}\dot{\boldsymbol{\omega}}\right|\right] = \dot{\gamma}^{\omega}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\omega} \tag{3.18}$$

Estas formulaciones de discontinuidad cinemática, en un estado elastoplástico considerado a ambos lados de la superficie de discontinuidad, conducen a un salto en las tensiones y en las cuplas tensionales, que resultan de las ecuaciones constitutivas

$$[|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = \boldsymbol{E}_{ep}^{uu}[|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|] + \boldsymbol{E}_{ep}^{u\omega}[|\dot{\boldsymbol{\kappa}}|] \qquad y \qquad [|\dot{\boldsymbol{\mu}}|] = \boldsymbol{E}_{ep}^{\omega u}[|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|] + \boldsymbol{E}_{ep}^{\omega\omega}[|\dot{\boldsymbol{\kappa}}|] \tag{3.19}$$

En virtud del requerimiento de continuidad, los vectores tracción superficial, que establece el Lema de Cauchy, deben estar en equilibrio a lo largo de la superficie de discontinuidad

$$\left[\left|\dot{\boldsymbol{t}^{\sigma}}\right|\right] = \boldsymbol{N}.[|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = 0 \qquad y \qquad \left[\left|\dot{\boldsymbol{t}^{\mu}}\right|\right] = \boldsymbol{N}.[|\dot{\boldsymbol{\mu}}|] = 0 \tag{3.20}$$

La relación direccional entre los autovectores $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$ determina el modo de falla, indicando Modo I cuando se cumple $\boldsymbol{M} \parallel \boldsymbol{N}$ y Modo II para la condición $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{N}$.

El momento de la historia de carga del continuo en que se verifica la condición de falla localizada merece particular atención en el escenario de falla, dado que a partir de él, las ecuaciones constitutivas elastoplásticas deben satisfacerse a ambos lados de la superficie pero no a través de ella.

En materiales reales, cuando se manifiesta la condición de localización, la descarga elástica ocurre en la mayor parte del cuerpo mientras que las deformaciones plásticas se concentran en una banda infinitamente delgada.

Precisamente, esta fuerte localización y salto del campo de gradientes cinemático deviene de la bifurcación discontinua del equilibrio, situación en la cual el sistema de ecuaciones representativo del continuo elastoplástico se torna mal definido.

3.3.1.- Primera Condición de Localización

Combinando las ec.(3.20a) y ec.(3.20b) obtenidas para los vectores superficiales con las expresiones de los saltos en las tasas de deformaciones y

de microcurvaturas ec.(3.19a) y ec.(3.19b), con las ecuaciones constitutivas desarrolladas precedentemente, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\left[\left|\dot{\boldsymbol{t}^{\sigma}}\right|\right] = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0} \tag{3.21}$$

$$\left[\left|\dot{\boldsymbol{t}^{\mu}}\right|\right] = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0} \tag{3.22}$$

de donde se deriva, la ***primera condición de localización***

$$\left[\left|\dot{\boldsymbol{t}^{\sigma}}\right|\right] = \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{uu}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{u\omega}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} \tag{3.23}$$

$$\left[\left|\dot{\boldsymbol{t}^{\mu}}\right|\right] = \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{\omega u}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} \tag{3.24}$$

que en forma compacta puede formularse

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

donde el ***tensor de localización*** $\boldsymbol{Q}_{L}$ esta definido por sus particiones

$$\boldsymbol{Q}_{Ljl}^{\eta\varsigma} = \boldsymbol{N}_{i}.\boldsymbol{E}_{ijkl}^{\eta\varsigma}.\boldsymbol{N}_{k} \quad con \quad \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varsigma} \in (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}) \tag{3.26}$$

Las dos contracciones simples del tensor elastoplástico de cuarto orden se efectúan en el primer y tercer subíndice.

Para satisfacer la condición de localización, el operador $\boldsymbol{Q}_{L}$ debe ser singular, o lo que es lo mismo su determinante debe ser cero

$$det(\boldsymbol{Q}_{L}) = det \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{Q}_{L}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.27}$$

3.3.2.- Segunda Condición de Localización

La condición anterior es necesaria pero no suficiente para la bifurcación discontinua o localización, ya que solo determina la necesidad de que las tracciones permanezcan continuas a través de la superficie de singularidad considerada. Una segunda condición se deriva del balance del momento angular y lineal [Ior96] en ambos lados de la superficie. Haciendo uso de los conceptos de campos de tensiones y momentos tensionales bifurcados a cada lado de la superficie de singularidad y, considerando la ec.(2.25), la segunda condición de localización toma la forma

$$\boldsymbol{e} : [|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} = 0 \tag{3.28}$$

Esta expresión deberá satisfacerse completamente en forma simultánea con la primera para admitir la condición de bifurcación discontinua en el estado tensional elastoplástico considerado.

Los dos términos vectoriales de la ec. (3.28) se definen como

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}}) \tag{3.29}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}}) \tag{3.30}$$

Desarrollando esta segunda condición de localización se puede deducir que

$$\boldsymbol{e} : [|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = 0 \Longleftrightarrow \left[\left|\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{T}\right|\right] = 0 \Longleftrightarrow \left[\left|\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{skw}\right|\right] = 0 \tag{3.31}$$

es decir que no pueden existir saltos en el tensor antisimétrico de tensiones a través de la superficie $\boldsymbol{Q}_{L}$.

La ec.(3.29) puede escribirse

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{e} : \left(\boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{uu}} - \frac{1}{h_p} \boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\upsilon}^{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{uu}} \right) : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}}) \tag{3.32}$$

mientras que la ec.(3.30)

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{e} : \left(-\frac{1}{h_p} \boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{\upsilon}^{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{\omega}} : \boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \right) : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}}) \tag{3.33}$$

La implementación la Segunda Condición de Localización en el marco de la teoría micropolar conduce a tensores de gradiente de potencial plástico asimétricos.

Si bien esta formulación no simétrica no suprime la localización para toda condición de carga, si reduce notablemente el espectro de estados tensionales o comportamientos de falla asociados con formas localizadas del campo de las deformaciones.

- Falla continua:

$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] = 0 \qquad [|\bigtriangledown \dot{\boldsymbol{u}}|] = 0$

$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = 0 \qquad [|\bigtriangledown \dot{\boldsymbol{\omega}}|] = 0$

- Falla localizada:

$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] = 0 \qquad [|\bigtriangledown \dot{\boldsymbol{u}}|] \neq 0$

$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = 0 \qquad [|\bigtriangledown \dot{\boldsymbol{\omega}}|] \neq 0$

- Falla discreta:

$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] \neq 0 \qquad [|\bigtriangledown \dot{\boldsymbol{u}}|] \neq 0$

$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] \neq 0 \qquad [|\bigtriangledown \dot{\boldsymbol{\omega}}|] \neq 0$

Falla localizada

$[|\dot{\boldsymbol{u}}|] = \dot{\boldsymbol{u}}^{+} - \dot{\boldsymbol{u}}^{-} = 0$

$[|\dot{\boldsymbol{\omega}}|] = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{+} - \dot{\boldsymbol{\omega}}^{-} = 0$

$[|\bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{u}}|] = \bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{u}}^{+} - \bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{u}}^{-} \neq 0$

$[|\bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{\omega}}|] = \bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{+} - \bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{-} \neq 0$

Teorema de Maxwell. Salto en el gradiente de velocidad y en el gradiente de la tasa de microgiros:

$[|\bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{u}}|] = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} \qquad [|\bigtriangledown_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{\omega}}|] = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}}$

Saltos en la tasa de deformaciones

$[|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|] = [\left|\bigtriangledown_{\boldsymbol{x}}^{T} \dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{e} : \dot{\boldsymbol{\omega}}\right|] = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}}$

Saltos en la tasa de microcurvaturas

$[|\dot{\boldsymbol{\kappa}}|] = [\left|\bigtriangledown_{\boldsymbol{x}}^{T} \dot{\boldsymbol{\omega}}\right|] = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}}$

Tasa de tensiones y momentos tensionales

$$[|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}}[|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|] + \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}}[|\dot{\boldsymbol{\kappa}}|] \qquad y \qquad [|\dot{\boldsymbol{\mu}}|] = \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}}[|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|] + \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}}[|\dot{\boldsymbol{\kappa}}|]$$

Vectores de tasa de las tensiones

$$[|\dot{\boldsymbol{t}^{\sigma}}|] = \boldsymbol{N}.[|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = 0 \qquad y \qquad [|\dot{\boldsymbol{t}^{\mu}}|] = \boldsymbol{N}.[|\dot{\boldsymbol{\mu}}|] = 0$$

$$[|\dot{\boldsymbol{t}^{\sigma}}|] = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

$$[|\dot{\boldsymbol{t}^{\mu}}|] = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} : \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

Primera Condición de Localización

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{uu}} = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ijkl}^{\boldsymbol{\eta\varsigma}}.\boldsymbol{N} \quad con \quad \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varsigma} \in (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega})$$

$$det(\boldsymbol{Q}_L) = det \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{Q}_L^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} = 0$$

Segunda Condición de Localización

$$\boldsymbol{e} : [|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}}) \qquad \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}})$$

$$\boldsymbol{e} : [|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = 0 \Longleftrightarrow [|\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T|] = 0 \Longleftrightarrow [|\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{skw}|] = 0$$

CAPITULO 4

Ley Constitutiva para Materiales Cohesivo Friccionales basada en Teoría Microscópica de Primer Orden

4.1.- Modelo Micropolar Elastoplástico basado en Energia de Fractura

Para analizar macroscópicamente la respuesta estructural del hormigón más allá del límite elástico se han formulado numerosos modelos y teorías constitutivas. Estos deben ser capaces de reproducir el comportamiento tanto de falla del hormigón bajo todo tipo y estado límite de tensiones cubriendo el rango de falla frágil en régimen uniaxial o debajo confinamiento y el de falla dúctil, bajo estado de alto confinamiento.

La mayor dificultad en los modelos desarrollados radica en el hecho de que ese material exhibe un complejo comportamiento no lineal, dilatación, histéresis, ablandamiento, cambios en la resistencia con la presión de confinamiento y una respuesta fuertemente dependiente del camino de carga. En la búsqueda de cubrir las respuestas observadas en el espectro total de las historias de carga, se han desarrollado modelos basados en elasticidad no lineal, elastoplasticidad con ablandamiento y endurecimiento, degradación elástica basada en formulaciones de daño mecánico, y otras.

En este capítulo se desarrolla una teoría constitutiva para el análisis de falla de hormigón a nivel macroscópico. La misma reformula, en el marco de la teoría micropolar de Cosserat, el criterio de máxima resistencia del Modelo de León modificado, [Ets92], [EW93], [Pra88], [WE90], [WW75], el que es extendido para medios micropolares.

La incorporación de la teoría micropolar de Cosserat tiene por objetivo mejorar los resultados, y suprimir la dependencia de ellos, de la forma y tamaño de las mallas de elementos finitos que se consideran.

La teoría de la elastoplasticidad del flujo es planteada en medios micropolares para formular las leyes de endurecimiento y ablandamiento del Modelo.

4.2.- Formulación del Modelo Extendido de León para Sólidos Micropolares

El criterio de falla considerado es propuesto por León y extendido luego por Etse [Ets92], en un todo de acuerdo al criterio de máxima resistencia de Hoek y Brown. El criterio combina parámetros de fricción de Mohr - Coulomb y de cohesión de Rankine.

Fue originalmente formulado en función de las tensiones principales mayor y menor, como una expresión parabólica de la envolvente de falla de Mohr como

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = F(\sigma_I, \sigma_{III}) = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{f_c}\right)^2 + m_0\left(\frac{\sigma_I}{f_c}\right) - c_0 = 0 \qquad (4.1)$$

siendo:

c_0 : parámetro de cohesión,
m_0 : parámetro de fricción
f_c : resistencia uniaxial de compresión

La calibración del parámetro de fricción se efectúa en términos de la resistencia uniaxial de tracción y de compresión, con $\sigma_{III} = 0 \quad y \quad \sigma_I = f_t$ conduce a

$$m_0 = \frac{c.f_c^2 - f_t^2}{f_c.f_t} \qquad (4.2)$$

El criterio de falla de Leon expresado en términos de las coordenadas de tensión de Haigh - Westergard, p, ρ y θ toman la forma

$$F(p, \rho, \theta) = \frac{\rho^2}{f_c}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}cos\theta + \frac{sin\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{m}{f_c}\left(p + \sqrt{\frac{3}{2}}\rho.cos\theta\right) - c = 0 \qquad (4.3)$$

con

$$p = \frac{I}{3} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)$$
$$\rho = \sqrt{2J_2}$$
$$cos3\theta = \frac{\sqrt{27}J_3}{2J_2^{\frac{2}{3}}}$$

que fuera modificado por Etse y Willam [EW93], buscando evitar los quiebres en la traza desviatórica del modelo. Ellos reemplazaron el radio vector desviatórico por la coordenada polar $\rho.r(\theta)$ con

$$r(\theta) = \frac{4\left(1-e^2\right)cos^2\theta + \left(2e-1\right)^2}{2\left(1-e^2\right)cos\theta + \left(2e-1\right)\sqrt{4\left(1-e^2\right)cos^2\theta + 5e^2 - 4e}} \tag{4.4}$$

siendo e la excentricidad, definida como $e = \frac{\rho_t}{\rho_c}$.La coordenada polar $r(\theta)$define la variación elíptica del parámetro ρ entre $\rho_t \quad y \quad \rho_c$, [MW95] y toma valores entre

$$r(\theta = 0) = \frac{1}{e} \qquad\qquad r(\theta = \frac{\pi}{3}) = 1$$

A fin de formular el criterio Extendido de Leon en campos continuos micropolares, se expresa el tercer invariante del desviador de tensiones de la forma

$$J_3 = det(\boldsymbol{s}) + \frac{det(\boldsymbol{\mu})}{l_c^3} \tag{4.5}$$

siendo

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} \qquad y \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

La plasticidad dependiente del tercer invariante provee mayor precisión en las mediciones de respuesta mecánica de materiales cohesivo friccionales.

4.3.- Superficie de Fluencia del Modelo Extendido de León en Régimen de Pre y Pospico

La condición de fluencia del Modelo Extendido de Leon es definida por

$$F(p,\rho,\theta,k,c) = \left[(1-k)\left(\frac{p}{f_c} + \frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}f_c}\right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\rho.r(\theta)}{f_c}\right]^2 +$$

$$+\frac{k^2.m}{f_c}\left(p+\frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}}\right)-k^2c=0$$

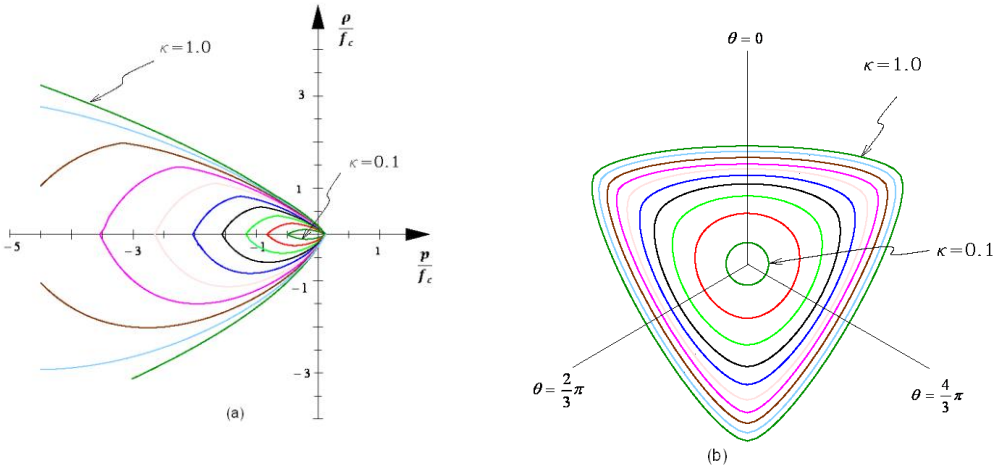


Figura 4.1.- Superficie de Fluencia del Modelo Extendido de Leon régimen de endurecimiento. Descripción en plano meridional (a) y desviador (b)

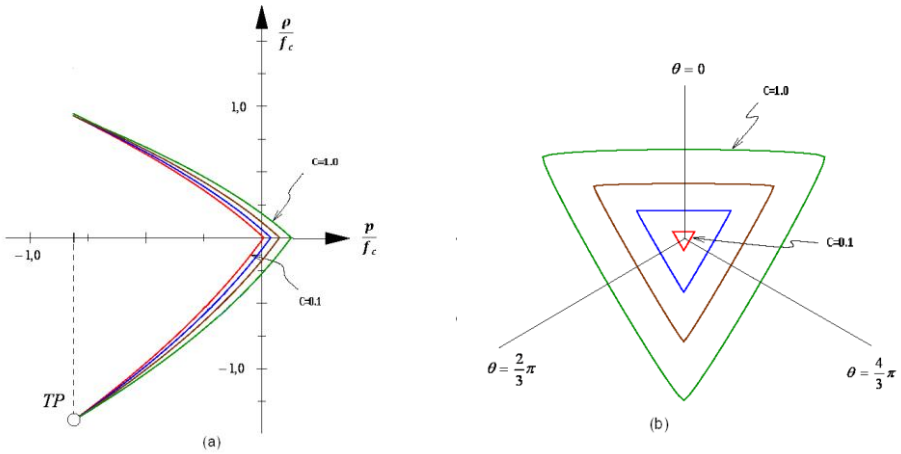


Figura 4.2.- Superficie de Fluencia del Modelo Extendido de Leon en régimen de ablandamiento. Descripción en plano meridional (a) y desviador (b)

La fig.4.1 y fig.4.2 muestran las variaciones de la superficie de fluencia del Modelo Extendido de Leon en los regímenes de endurecimiento - ablandamiento.

El criterio del Modelo Extendido de Leon se define en función de tres parámetros de estado y el parámetro de endurecimiento k y los que controlan el ablandamiento del material, que son la cohesión c y la fricción m.

La respuesta elástica del material corresponde a estados tensionales inferiores a la superficie plástica inicial que crece isotrópicamente con el incremento de las deformaciones plásticas mientras la cohesión y la fricción permanecen constantes. Esta evolución controla el comportamiento de endurecimiento -

ablandamiento antes de alcanzar la superficie de máxima resistencia. Cuando se inicia el proceso de fractura del material, comienza el proceso de ablandamiento en el cual decrece la cohesión mientras se incrementa el valor de la fricción del material.

4.3.1.- Endurecimiento Isotrópico

El parámetro de endurecimiento isotrópico k toma valores entre el mínimo $k = k_0$ que corresponde al límite elástico hasta el valor de $k = k_f = 1$ para la carga límite.

La evolución de la superficie de fluencia en el régimen de prepico se controla con el parámetro de endurecimiento k cuya expresión está dada por la función elíptica

$$k = k_0 + (1 - k_0)\sqrt{k_h(2 - k_h)} \tag{4.7}$$

en términos de la variable de endurecimiento k_h

La ley de endurecimiento isotrópico del modelo describe la evolución de la variable en términos de la tasa de la deformación plástica equivalente ξ_p y de χ_p que representa la máxima deformación plástica correspondiente a la carga límite, y se expresa en función de la variable k_h

$$\dot{k_h} = \frac{1}{\chi_p}\dot{\xi}_p \tag{4.8}$$

siendo la deformación plástica equivalente es

$$\dot{\xi}_p = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}} + l_c^2 . \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{p}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{p}}} \tag{4.9}$$

mientras que χ_p se valora a través de una poligonal cuadrática función de la presión hidrostática

$$\chi_p = A_h \left(\frac{p}{f_c}^2\right) + B_h \left(\frac{p}{f_c}\right) + C_h \tag{4.10}$$

4.3.2.- Ablandamiento Isotrópico

La consecuencia más importante de inestabilidad material que se manifiesta por la aparición de fisuras, es la localización de las deformaciones. La localización se produce bruscamente en un punto determinado de la historia de carga cuando la deformación adicional completa se confina en banda estrecha del cuerpo, mientras que el resto del cuerpo se encuentra en descarga. La localización es usualmente

acompañada por un decrecimiento de la rigidez y de la capacidad de carga después de alcanzar la carga máxima. Tal disminución gradual de la rigidez y la capacidad de carga con el aumento de la deformación impuesta al cuerpo se llama ablandamiento.

El fenómeno de ablandamiento se puede definir como una disminución gradual de la resistencia mecánica durante un aumento de deformación impuesto a una muestra de material o estructura. Es ampliamente aceptado que el ablandamiento del hormigón es un proceso macroscópico que resulta de los cambios que ocurren en el nivel microscópico como resultado del continuo crecimiento de las fisuras.

Debido a la heterogeneidad de hormigón, un esfuerzo o deformación uniformemente distribuido aplicado pueden dar lugar a una distribución altamente no uniforme de tensiones internas y deformaciones. Estos gradientes dan lugar a concentraciones locales de tensiones críticas que conduce a la ruptura de lazos internos. Este proceso resulta en el ablandamiento que se observa a nivel macroscópico. La degradación de la resistencia del material, tanto en tracción como en compresión, es causada por estos procesos de fractura [CT00].

El ablandamiento de hormigón y la localización de las deformaciones asociadas no pueden ser vistos como una propiedad puramente material. La tarea principal en el desarrollo de una formulación de ablandamiento es vincular la evolución de la superficie de fluencia con la degradación de la resistencia a la tracción e identificar a los internos variables que controlan el proceso. La evolución de la superficie de ablandamiento está controlada por el cambio en la cohesión, con lo que se traduce en una envolvente de máxima tensión a lo largo del eje hidrostática (lejos de la región a la tracción) para llegar finalmente a un estado residual.

El modo de falla del hormigón depende de su nivel de confinamiento. En régimen de compresión triaxial con bajo confinamiento, existe un punto de transición que separa el comportamiento de ablandamiento frágil del régimen de falla dúctil con pequeña o nula pérdida de resistencia [EW93].

En el régimen de ablandamiento, es decir cuando el parámetro de endurecimiento se mantiene en el máximo valor $k = 1$, la superficie de fluencia adquiere la forma

$$F(p, \rho, \theta, k, c) = \frac{3}{2}\left[\frac{\rho.r(\theta)}{f_c}\right]^2 + \frac{m_0}{f_c}\left(p + \frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}}\right) - c_0 = 0 \qquad (4.11)$$

La evolución de la superficie de ablandamiento se concreta mediante un doble proceso de decohesión con disminución de c y de incremento de la fricción material representada por m.

La superficie de resistencia residual es debida puramente a la resistencia friccional de las partículas y se obtiene cuando $c = 0$ y $m = m_r$

$$F(p, \rho, \theta, k, c) = \frac{3}{2}\left[\frac{\rho.r(\theta)}{f_c}\right]^2 + \frac{m_r}{f_c}\left(p + \frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}}\right) = 0 \qquad (4.12)$$

La superficie de resistencia residual en el plano meridional, pasa a través del origen O y del punto TP de transición de falla frágil - dúctil, donde se une con la superficie de resistencia máxima.

Los estados de ablandamiento describen la degradación de la resistencia de tracción en términos del parámetro de decohesión

$c_s = \dfrac{\sigma_t}{f_t}$ donde $0 \leq c_s \leq 1$ y σ_t : resistencia a la tracción

y el endurecimiento asociado al parámetro de fricción se relaciona al valor de la decohesión a través de

$$m_s = m_r - (m_r - m_o)c_s \qquad con \quad m_0 \leq m_s \leq m_r \qquad (4.13)$$

de modo que

$$m = m_o \qquad para \quad c = c_0 = 1$$

$$m = m_r \qquad para \quad c = c_r = 0$$

4.4.- Función de Potencial Plástico

Debido al efecto Poisson, y en el marco de la teoría de la plasticidad, el corrector de tensiones plásticos no es en general coaxial con la dirección del incremento plástico de las deformaciones.

La función de potencial plástico seleccionada en el ELM, para deducir el flujo no asociado, de acuerdo a Etse y Willam [EW93], está basada en una modificación del parámetro de fricción y tiene la forma

$$Q(p, \rho, \theta, k, c) = \left[(1-k)\left(\frac{p}{f_c} + \frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}f_c}\right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\rho.r(\theta)}{f_c}\right]^2 +$$
$$+\frac{k^2}{f_c}\left(m_q + m\frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}}\right) - k^2 c = 0 \qquad (4.14)$$

similar a la función de fluencia con excepción del parámetro m_q que ahora se define en términos de su gradiente como

$$\frac{\partial m_q}{\partial p} = D.exp\, Ex^2 + F \tag{4.15}$$

Donde

$$x = \frac{-p + f_t/3}{f_c} \tag{4.16}$$

Los parámetros materiales $D, E\, y\, F$ son calibrados a partir de tres diferentes ensayos midiendo valores de dilatación en tracción sin confinamiento y compresión con niveles de bajo y alto confinamiento.

4.5.- Ley de Ablandamiento Isotrópico.- Formulación Basada en Energía de Fractura.

La formulación de ablandamiento se basa en la homogeneización de la zona de falla localizada en una región finita, siguiendo el modelo de Fractura Compuesta propuesto por Willam, Bicanic, Pramono y Sture [WBP86]. En tracción esto corresponde a proponer un modelo donde la propagación de la fractura por tracción en un volumen elemental que se discontinua por dicha fractura, se describe mediante un proceso de ablandamiento plástico en un continuo equivalente en el cual la energía de deformación plástica desarrollada iguala a la energía de fractura [Ets92], [EW93], [WE90], [BO88].

4.5.1.- Modo de Fractura I

La energía en el Modo I de fractura es la que se desarrolla cuando se abre una fisura en tracción uniaxial y se extrae de la relación $\sigma_t - u_f$ siendo u_f la apertura de fisura. Por lo tanto la energía de fractura en Modo I resulta

$$G_f^I = \int_0^{u_f} \sigma_t.du_t \tag{4.17}$$

Del concepto de homogeneización de la fractura en un continuo equivalente, se obtiene

$$du_t = h_t.d\epsilon_t \tag{4.18}$$

Por lo tanto el valor de la energía en el continuo equivalente (fig.4.3)

$$G_f^I = h_t \int_0^{u_f} \sigma_t.\, d\epsilon_t \tag{4.19}$$

donde la magnitud ϵ_f designa la deformación de fractura equivalente en Modo *I* de falla y h_t representa la altura del continuo equivalente donde se homogeneiza el proceso de fractura [Ort85].

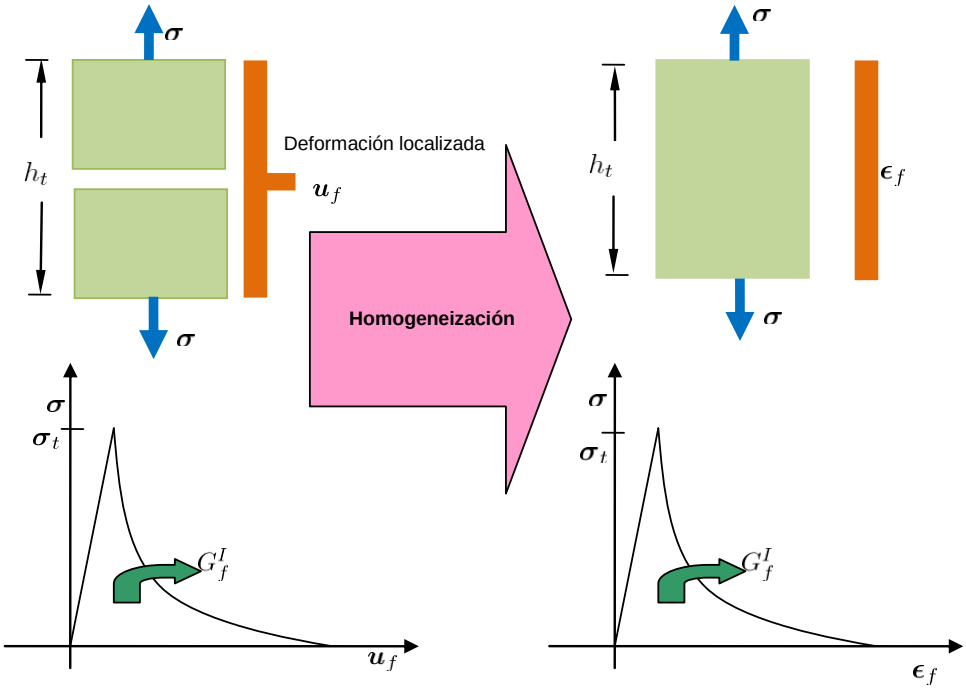


Figura 4.3.- Modo I. Banda de fisura en el elemento y continuo equivalente.

De acuerdo a los datos experimentales [Hul85], la degradación de la resistencia a la tracción es una función de la apertura de fisura, que para probetas cilíndricas de diferentes alturas, sigue una función exponencial decreciente de la forma

$$\sigma_t = f_t\, exp\left(-5\frac{u_f}{u_r}\right) \tag{4.20}$$

en la cual f_t representa la resistencia uniaxial de tracción y u_r el desplazamiento de rotura para resistencia residual de tracción. Reemplazando en la ec. (4.19) resulta

$$G_f^I = \int_0^{u_f} \sigma_t . du_f = f_t \frac{u_r}{5}\left[1 - exp\left(-5\frac{u_f}{u_r}\right)\right] \tag{4.21}$$

con G_f^I, valor de la densidad de energía de fractura en el modo I de falla que representa el área bajo la curva del diagrama $\sigma - u_f$ que se muestra en la fig.4.3.

El decaimiento del parámetro de decohesión se calcula con la expresión

$$c = \frac{\sigma_t}{f_t} = exp\left(-5\frac{u_f}{u_r}\right) = exp\left(-5\frac{\epsilon_f.h_t}{u_r}\right) \tag{4.22}$$

4.5.2.- Modo II de Fractura

El modelo de Willam, Bicanic, Pramono y Sture [WBP86] puede extenderse al Modo II de falla, efectuándose una generalización de los resultados anteriores, a través de un proceso de homogeneización similar. Se puede observar que en condiciones de bajo confinamiento, se forma una banda de corte inclinada, que puede ser tratada con las mismas consideraciones usadas en el Modo I .

$$G_f^{II} = \int_0^{u_f} \rho_c.\, du_{fc} \tag{4.23}$$

donde u_{fc} representa la apertura de fisura integradas de todas las microfisuras en Modo II de fractura. Considerando la igualdad de la energía de fractura por corte con aquella del continuo equivalente debido al proceso de homogeneización

$$du_{fc} = d\epsilon_{fc}\, h_c. \tag{4.24}$$

y de la misma forma que en el Modo I de fractura

$$\rho_c = \rho_c^{'}.\, exp\left(-5\frac{u_{fc}}{u_r}\right) \tag{4.25}$$

donde $\rho_c^{'}$ la resistencia de compresión que en materiales friccionales es función de la presión volumétrica *p.*

La expresión de la decohesión para el Modo II de falla queda definida de la forma

$$c = \frac{\rho_c^{'}}{\rho_c} = exp\left(-5\frac{u_{fc}}{u_r}\right) = exp\left(-5\frac{\epsilon_{fc}.h_c}{u_r}\right) \tag{4.26}$$

Una hipótesis fundamental del Modelo Extendido de Leon es la relación de las energías de fractura correspondientes a los modos I y II puede aproximarse mediante una función dependiente del nivel de confinamiento actuante que se evalúa a través del primer invariante de tensiones. Por lo tanto resulta

$$\frac{G_f^{II}}{G_f^{I}} = A_f R(p)^4 + B_f R(p)^2 + 1 \tag{4.27}$$

que está en función de la presión volumétrica *p* y donde las constantes A_f y B_f se obtienen de calibraciones en ensayos de compresión con diferentes niveles de confinamiento.

El parámetro de ablandamiento puede calcularse con la relación de las energías desarrolladas en ambos modos con la expresión

$$\dot{k}_f = \frac{G_f^{II}}{G_f^{I}} h_t . \dot{\xi}_f = \frac{1}{x_f} \dot{\xi}_f \tag{4.28}$$

donde x_f es una medida de la ductilidad en ablandamiento definida en función de la presión hidrostática y que representa la densidad de la microfisuración.

4.5.3.- Modo de Fractura Rotacional

Dado que los continuos micropolares presentan grados de libertad adicionales, la formulación basada en Energía de Fractura debe también contemplarlos. Como consecuencia de los giros o microcurvaturas que se desarrollan en el continuo de Cosserat y en el marco de la modelación de procesos de falla de materiales cuasi frágiles caracterizados por energía de fractura se formula un Modo de Fractura Rotacional, independiente de los dos modos de fractura descriptos anteriormente.

La hipótesis fundamental es que los giros que se producen en el continuo por los grados de libertad rotacionales del material micropolar, permite describir fisuras por micro rotaciones del continuo que representan y que corresponden a formas de falla independientes de las que devienen del Modo I y II. La fig.4.4 describe en proceso de homogeneización de fisura por microrotaciones

El microgiro en un continuo de Cosserat queda definido a partir de la Longitud de Cosserat l_c. Este microgiro define la rotación que se desarrolla en un continuo equivalente micropolar en esa longitud de Cosserat .

Usando el marco conceptual del Modelo Elastoplástico basado en Energía de Fractura pero extendido ahora a Continuos Cosserat, consideramos que en el discontinuo de área $A_p = H\,.b$ se ha desarrollado una fisura única por rotación o giro de esta probeta.

En el desarrollo de este giro ω ha participado toda el área de la probeta A_p.

Haciendo la equivalencia de esta probeta fisurada por giro a un continuo Cosserat de longitud característica l_c, el giro de continuo que se desarrollará en el volumen de Cosserat “equivalente” al giro que produjo la fisura en la probeta resulta

$$\boldsymbol{\omega}_f = \frac{V}{A_p}\boldsymbol{\kappa}_f = l_c\ \boldsymbol{\kappa}_f \tag{4.29}$$

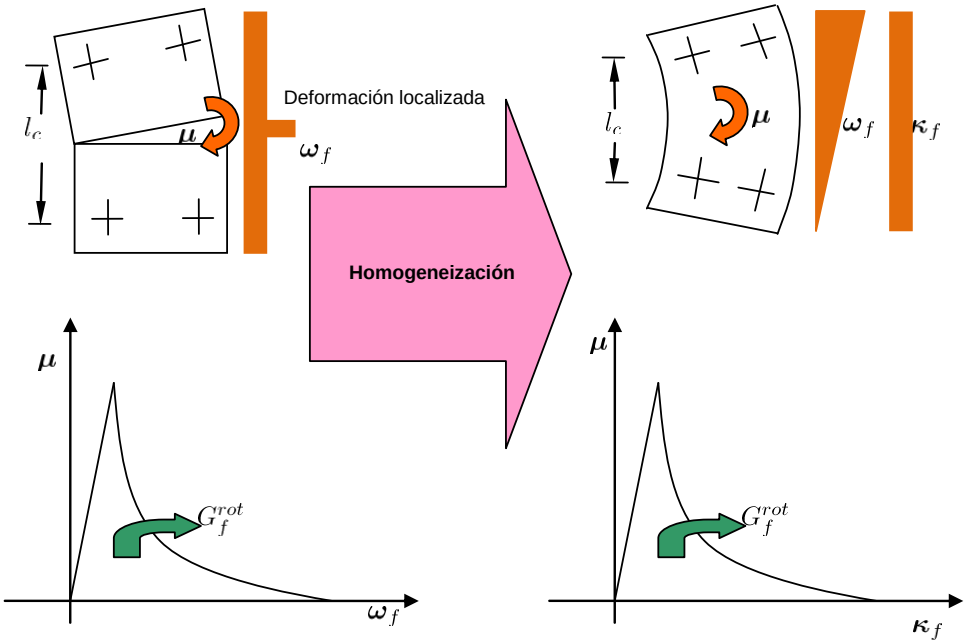


Figura 4.4.- Fractura rotacional en el elemento y continuo equivalente.

Una de las hipótesis básicas de este modelo es que la energía es una propiedad material que se mantiene invariable con cambios en las dimensiones de la probeta.

En el caso del continuo equivalente de Cosserat, caracterizado por l_c, la energía de deformación anelástica está definida por la relación entre las cuplas tensionales micropolares y la microcurvatura $\boldsymbol{\kappa}$ desarrollada en el continuo Cosserat que ocupa el área de la probeta. La energía de deformación se define por el área bajo la curva cupla tensional - microcurvatura.

Esta curva, a su vez, tiene como pendiente al Modulo de deformación rotacional de fractura $\boldsymbol{E}_{rf}$

$$\boldsymbol{E}_{rf} = \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\omega}_f} \tag{4.30}$$

Por lo tanto, reemplazando esta ultima en la ecuación anterior, resulta

$$\boldsymbol{E}_{rf} = \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\kappa}_f.l_c} \tag{4.31}$$

El modulo de deformación rotacional aumenta cuando menor es la longitud l_c, dando lugar a una respuesta más frágil.

El valor de la deformación por cuplas tensionales $\boldsymbol{\kappa}_f$ corresponde a la microcurvatura de fractura equivalente

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_f = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\kappa}}_p . \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p} \tag{4.32}$$

con

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{ij})} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\mu}_{ij}} = \dot{\lambda}\, \boldsymbol{v}_{\mu(ij)} \tag{4.33}$$

Como en el Modo I (tracción) y Modo II (corte) de fractura, también en Modo Rotacional, se puede interpretar que el parámetro que centraliza el proceso de ablandamiento es la cohesión

$$c = \frac{\sigma_t}{f_t} \tag{4.34}$$

En régimen de prepico, si se verifica que

$$\sigma_t = f_t \qquad \Longrightarrow c = 1$$

En procesos de ablandamiento bajo Modo I o Modo II (ver ec.(4.22) y ec.(4.26))

$$c = \frac{\sigma_t}{f_t} = exp\left(-5 \frac{d\epsilon_f\, h_t}{u_r}\right) \qquad ya\ que \qquad \frac{\sigma_t}{f_t} = 1$$

Por lo tanto la decohesión del continuo por la fractura del mismo producida por microgiro se define como

$$c = exp\left[-5\left(\frac{\kappa_f . l_c}{\omega_r}\right)\right] \tag{4.35}$$

En procesos de ablandamiento combinado se tendrá el valor de la decohesión dado por la expresión

$$c = exp\left[-5\left(\frac{d\epsilon_f\, h_s}{u_r} + \frac{d\kappa_f\, l_c}{\omega_r}\right)\right] \tag{4.36}$$

que combina el Modo Rotacional de fractura con el Modo I o II.

Por otra parte, la energía de fractura desarrollada para la generación de la fisura por giro en la probeta se obtiene de la relación integral entre la cupla tensional y el giro dado por el microgiro ω_f en el caso del continuo micropolar

equivalente. Tanto la cupla tensional aplicada para producir la fisura como el giro producido en la probeta son constantes, entonces, la relación integral entre estas variable permanece constante y también la energía de fractura por giro en este sólido equivalente.

Es decir, este modelo propuesto de deformación plástica basada en energía equivalente al material microfracturado real, resulta la extensión lógica y consistente del modelo de plasticidad basado en energía de fractura de Willam, Bicanic, Pramono y Sture [WBP86] para el caso de continuos elastoplásticos micropolares .

4.6.- Análisis de Localización en el Modelo Micropolar de Leon. Primera y Segunda Condición de Localización

La primera condición de localización, expresada por la ec.(3.27) se cumple cuando el tensor acústico se singulariza. A este fin se evalúa el determinante del tensor de segundo orden, que resulta de dimensiones de 6×6 , con las particiones que se indican en la ec.(4.39). El tensor se pre y postmultiplica por un vector, ec.(3.26) que representa las direcciones de la superficie de singularidad, evaluándose en cada caso el valor del determinante resultante.

En el caso de deformaciones planas, las particiones del tensor acústico tienen las componentes siguientes

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\boldsymbol{uu}} & Q_{12}^{\boldsymbol{uu}} & 0 \\ Q_{21}^{\boldsymbol{uu}} & Q_{22}^{\boldsymbol{uu}} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^{\boldsymbol{uu}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{13}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ 0 & 0 & Q_{23}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q_{31}^{\boldsymbol{\omega u}} & Q_{32}^{\boldsymbol{\omega u}} & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\boldsymbol{\omega\omega}} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22}^{\boldsymbol{\omega\omega}} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix}$$

La implementación numérica permite detectar las direcciones críticas para las cuales se verifica la singularidad del tensor acústico. Estas coinciden con las direcciones encontradas en la implementación del Modelo Extendido de Leon para el caso clásico [Ets92]. Se puede observar que son nulos los determinantes de las particiones que corresponden a los acoplamientos de desplazamientos y de microgiros para cualquier inclinación de superficie.

La segunda condición de localización [Nie98] está dada por las expresiones de la ec.(3.28), ec.(3.32) y ec.(3.33)

$$\boldsymbol{e} : [|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = 0 = \dot{\gamma}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}}) + \dot{\gamma}^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}})$$

La implementación del Modelo Extendido de Leon en el marco de la teoría micropolar conduce a tensores de gradiente de la función de potencial plástico asimétricos. La segunda condición de localización debe valorarse en forma numérica. Para ello es necesario comprobar la singularidad del tensor de localización y obtenida la dirección de la superficie de singularidad, encontrar el autovector que corresponde a un autovalor nulo, para evaluar la segunda condición para este estado.

El modo de falla resultante dependerá de la asimetría de los estados de tensiones evaluados.

Dada la condición adicional que debe satisfacerse para verificar una bifurcación discontinua en los continuos micropolares, se deduce que la Teoría de Cosserat proporciona una fuerte condición de regularización del comportamiento de ablandamiento.

Esto acontece en el caso del Modelo Extendido de Leon formulado en continuos micropolares en relación a las predicciones de falla del Modelo Extendido de Leon en medios clásicos.

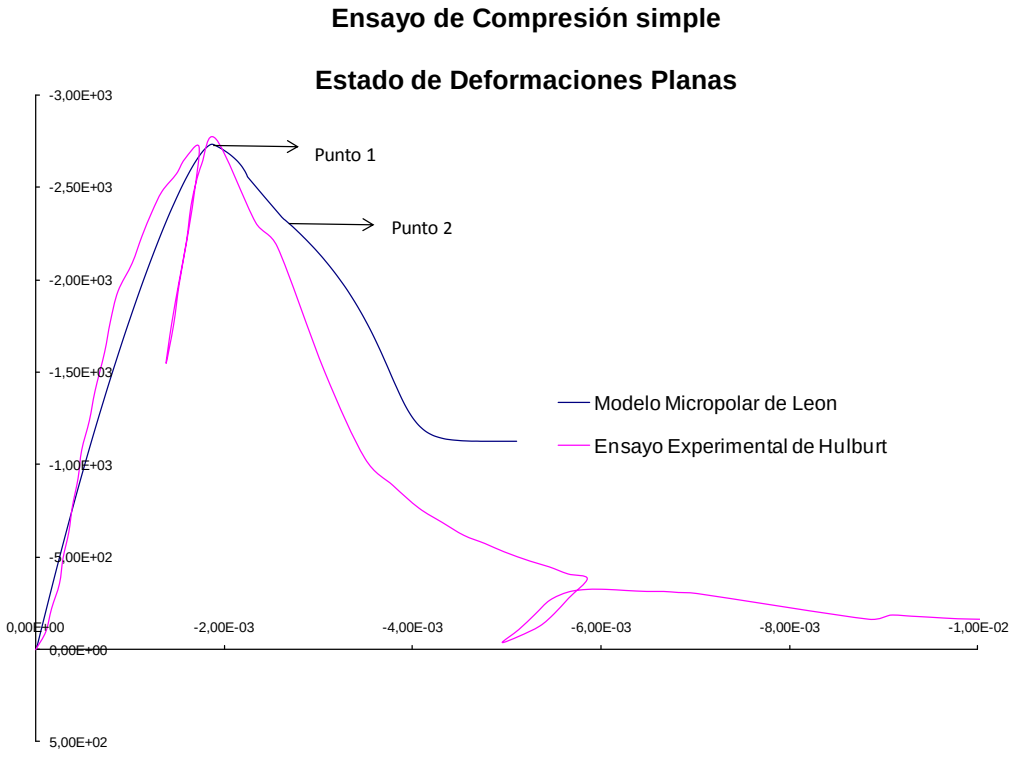


Figura 4.5. Ensayo de Compresión simple. Puntos de evaluación de falla.

El Modelo Extendido de Leon en medios micropolares conduce a obtener gradientes de fluencia y de potencial asimétricos, debido a la contribución del tercer invariante desviatórico de tensiones. Por ello, la segunda condición de

localización no permite arribar a simplificaciones en su evaluación analítica y esto deriva en la necesidad de su valoración numérica.

La fig.4.5 muestra los resultados del ensayo y los puntos para los cuales se evalúa las dos condiciones de localización, para comparar como evolucionan los resultados a medida que avanza el ablandamiento del material.

En la implementación numérica de las dos condiciones de localización se observa que para la condición simetrizada, con $G_c = 0$ la primera condición de localización se cumple para direcciones muy próximas a las del tensor clásico, como se muestra en la fig.4.6, adonde se grafica la condición del determinante en flujo asociado. Los ángulos de singularidad del tensor son $\alpha = 28^0$ y $\alpha = 154^0$.

En la fig.4.7 se muestra el caso de compresión no asociada con la función de potencial de la ec.(4.14) en condición de tensiones simetrizadas de forma que resulta $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ con el valor de la constante $G_c = 0$. Los ángulos de localización difieren de los que se obtienen en la condición de asociatividad y coinciden con los resultados del Modelo Extendido de Leon clásico con ángulos de $\alpha = 32^0$ y $\alpha = 148^0$ [Ets92], con la dirección de la tensión principal de compresión, lo que equivale a decir que la fractura se produce en modo mixto de falla.

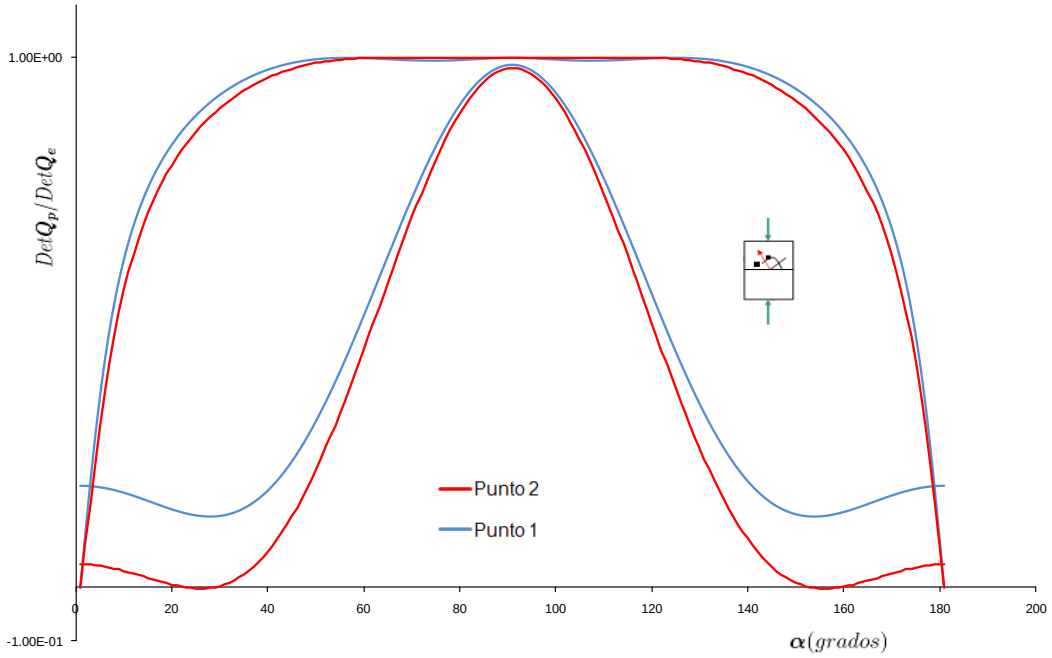


Figura 4.6. Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla Localizada de Continuos Micropolares. Flujo Asociado $G_c = 0$

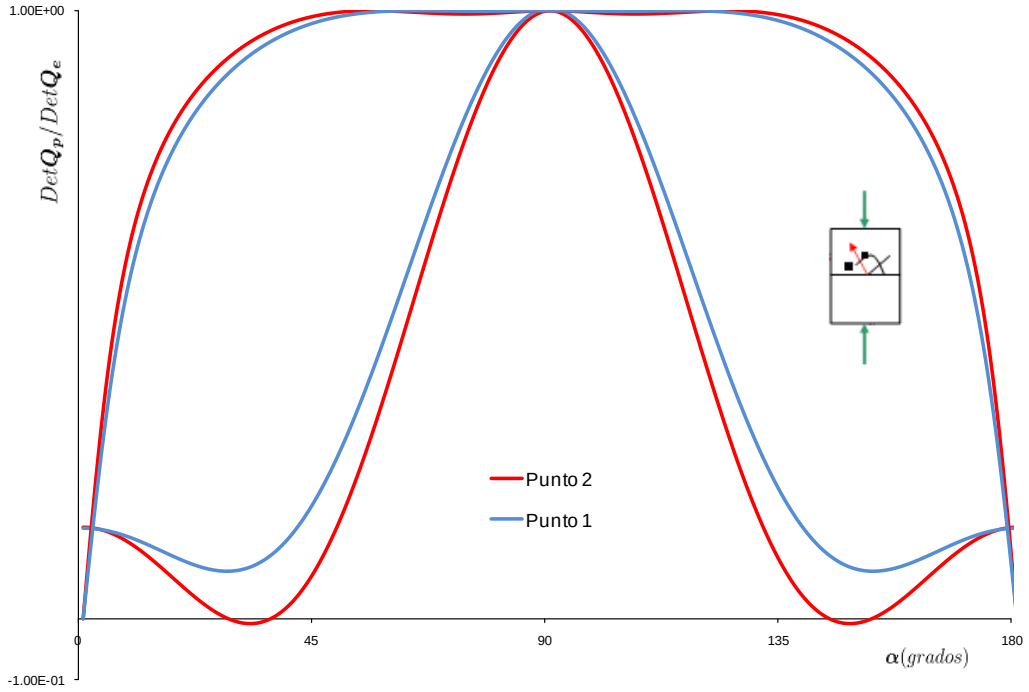


Figura 4.7. Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla Localizada de Continuos Micropolares. Flujo No Asociado $G_c = 0$

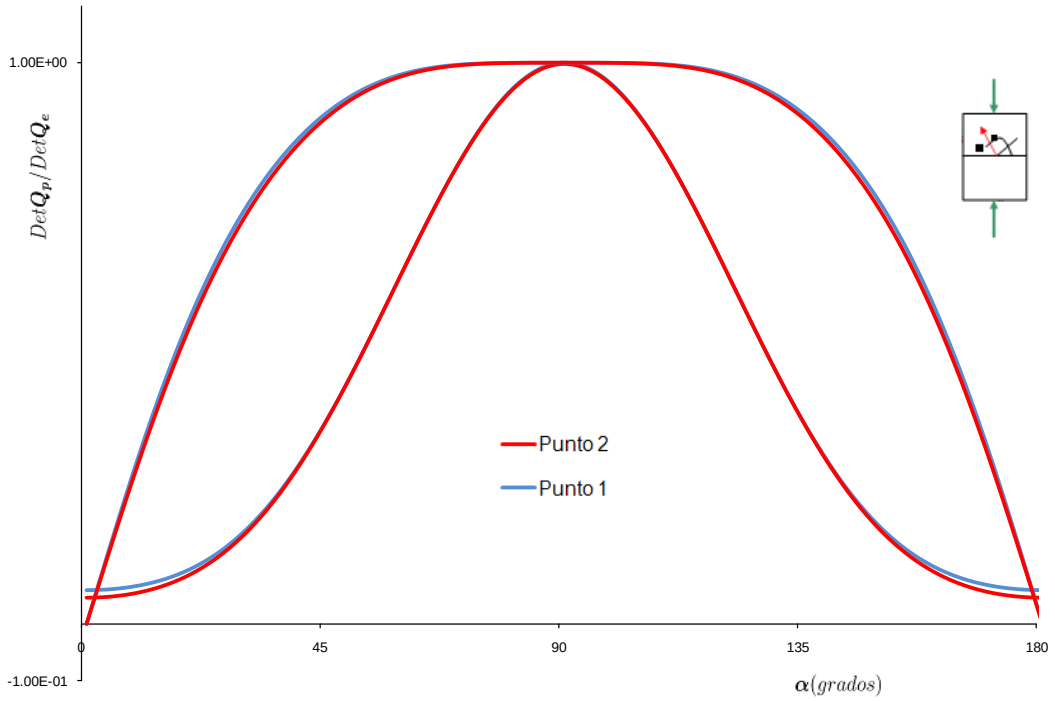


Figura 4.8.- Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla Localizada de Continuos Micropolares. Flujo Asociado $G_c > 0$

En la fig.4.8 y fig.4.9 se considera condición de flujo asociado y de flujo no asociado con valores de $l_c = 1$, siendo $G_c > 0$, en ambos.

Se observa que no se logra singularidad en el determinante del tensor acústico, en los dos casos analizados. En cualquier condición de flujo, solo se cumple la primera condición de localización para valores de la constante $G_c = 0$.

La segunda condición de localización solo se anula en ángulos de 0 y 180 grados en todos los casos estudiados por lo que ambas condiciones no se satisfacen simultáneamente.

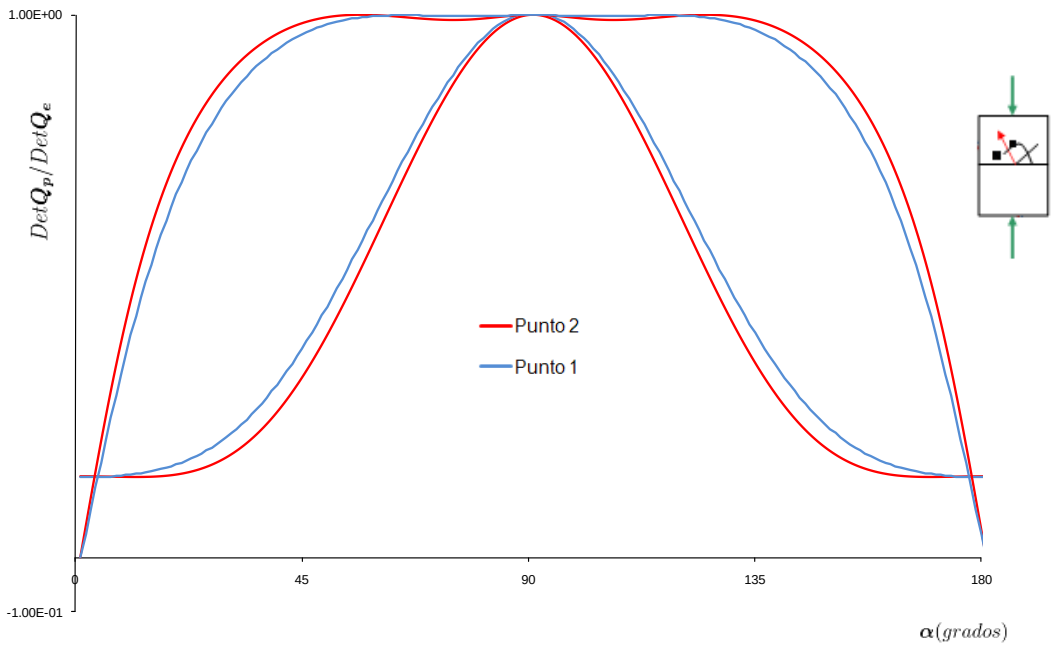


Figura 4.9.- Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla Localizada de Continuos Micropolares. Flujo No Asociado $G_c > 0$

La fig.4.9 muestra los valores obtenidos en condición de flujo no asociado para valores de $l_c = 1$, siendo $G_c > 0$.

La fig.4.10 muestra las condiciones de localización para el ensayo de tracción uniaxial.

El ensayo de tracción simple en estado de deformaciones planas muestra que ambas condiciones se satisfacen para ángulos de 0 y 180 grados por lo que la falla se produce en Modo I.

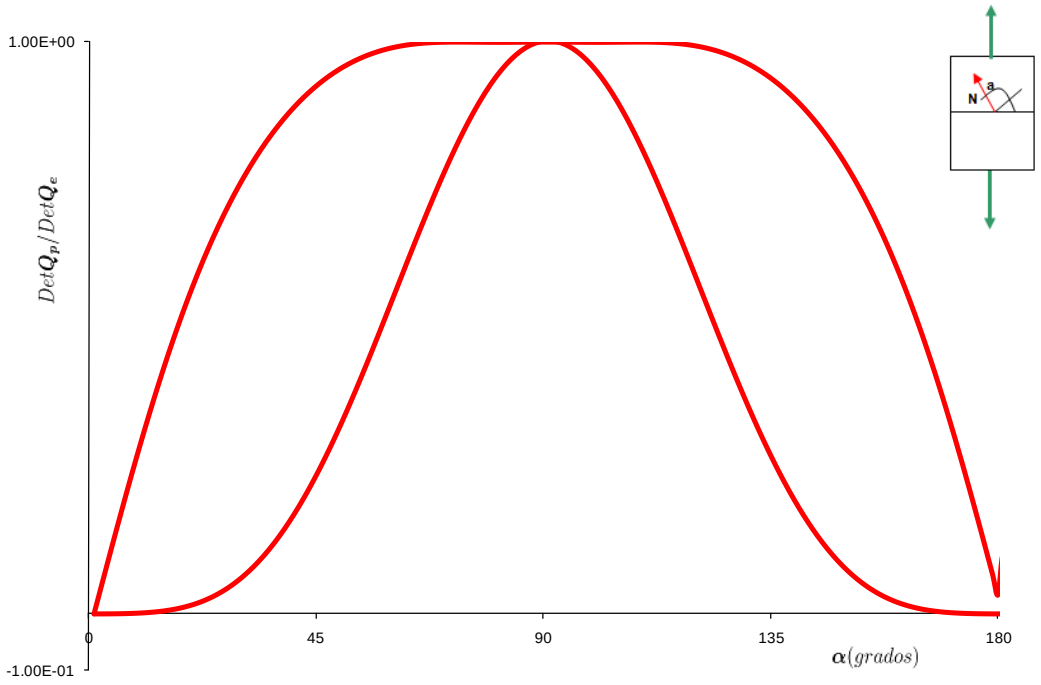


Figura 4.10.- Evolución de la Primera y Segunda Condición de Falla Localizada de Continuos Micropolares en el ensayo de Tracción Uniaxial.

Se puede concluir que los Continuos Micropolares de Cosserat proveen una regularización de los resultados que se obtienen en los continuos clásicos, limitando la localización a algunos escenarios de carga.

Modelo Extendido de Leon Micropolar

Función de Fluencia

$$F(p,\rho,\theta,k,c)=\left[(1-k)\left(\frac{p}{f_c}+\frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}f_c}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\rho.r(\theta)}{f_c}\right]^2+\frac{k^2.m}{f_c}\left(p+\frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}}\right)-k^2c=0$$

Coordenada polar

$$r(\theta)=\frac{4\left(1-e^2\right)cos^2\theta+\left(2e-1\right)^2}{2\left(1-e^2\right)cos\theta+\left(2e-1\right)\sqrt{4\left(1-e^2\right)cos^2\theta+5e^2-4e}}$$

$$e=\frac{\rho_t}{\rho_c} \qquad p=\frac{I}{3}=\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)$$

$$\rho=\sqrt{2J_2} \qquad cos3\theta=\frac{\sqrt{27}J_3}{2J_2^{\frac{2}{3}}}$$

Endurecimiento isotrópico

$$\dot{k_h}=\frac{1}{\chi_p}\dot{\xi}_p$$

Deformación plástica equivalente

$$\dot{\xi}_p=\sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}+l_c^2.\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{p}}}$$

$$\chi_p=A_h\left(\frac{p}{f_c}^2\right)+B_h\left(\frac{p}{f_c}\right)+C_h$$

Parámetro de Endurecimiento

$$k=k_0+(1-k_0)\sqrt{k_h(2-k_h)}$$

Ablandamiento isotrópico

$$F(p,\rho,\theta,k,c)=\frac{3}{2}\left[\frac{\rho.r(\theta)}{f_c}\right]^2+\frac{m_r}{f_c}\left(p+\frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}}\right)=0$$

Decohesión

$c_s=\dfrac{\sigma_t}{f_t}$ $\qquad 0\leq c_s\leq 1$ $\qquad \sigma_t$:resistencia a la tracción

Parámetro de fricción

$$m_s=m_r-(m_r-m_o)c_s \qquad con \quad m_0\leq m_s\leq m_r$$

$$m=m_o \qquad para \quad c=c_0=1$$

$$m=m_r \qquad para \quad c=c_r=0$$

Función de Potencial Plástico

$$Q(p,\rho,\theta,k,c) = \left[(1-k)\left(\frac{p}{f_c}+\frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}f_c}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\rho.r(\theta)}{f_c}\right]^2+\frac{k^2}{f_c}\left(m_q+m\frac{\rho.r(\theta)}{\sqrt{6}}\right)-k^2c=0$$

$$\frac{\partial m_q}{\partial p} = D.exp\,Ex^2+F \qquad\qquad x=\frac{-p+f_t/3}{f_c}$$

Ley de ablandamiento isotrópico.- Formulación basada en energía de fractura.

- Modo de Fractura I

  Energía $$G_f^I = \int_0^{u_f}\sigma_t.\,du_f\sigma_t = f_t\frac{u_r}{5}\left[1-exp\left(-5\frac{u_f}{u_r}\right)\right]$$

  Parámetro de decohesión

  $$c=\frac{\sigma_t}{f_t}=exp\left(-5\frac{u_f}{u_r}\right)=exp\left(-5\frac{\epsilon_f.h_t}{u_r}\right)$$

- Modo de Fractura II

  Energía $$G_f^{II} = \int_0^{u_f}\rho_c.\,du_{fc}$$

  Parámetro de decohesión

  $$c=\frac{\rho_t}{\rho_c}=exp\left(-5\frac{u_{fc}}{u_r}\right)=exp\left(-5\frac{\epsilon_{fc}.h_c}{u_r}\right)$$

- Modo de Fractura Rotacional

  Parámetro de decohesión

  $$c=exp\left[-5\left(\frac{d\epsilon_f\,h_s}{u_r}+\frac{d\kappa_f\,l_c}{\omega_{max}}\right)\right]$$

CAPITULO 5

Teoría Material Microscópica de Cosserat basada en Microplanos

La teoría constitutiva micropolar se extiende en el marco general del concepto de microplanos con el fin de obtener ecuaciones constitutivas y modelos que incluyan información más precisa de la compleja microestructura de los materiales ingenieriles. El principal objetivo del presente capítulo es el modelado macroscópico y la descripción del comportamiento de respuesta de materiales anisotrópicos por medio de la conocida teoría de microplanos cuando se aplica en continuos de Cosserat. Un concepto termodinámicamente consistente se considera para derivar la llamada *Teoría micropolar basada en microplanos*.

La principal suposición de la presente propuesta es la relación integral entre la energía libre macroscópica y la microscópica [dBo93] por medio de la cual las leyes de microplanos se eligen de forma que la desigualdad de Clausius-Duhem es totalmente satisfecha. Este marco teórico es usado para derivar los modelos elástico y elastoplástico micropolar con microplanos.

Una de las mas exitosas teorías constitutivas mas exitosas para el análisis de materiales ingenieriles es la teoría de microplanos la cual se caracteriza por tres rasgos principales: por una parte incorpora información microscópica en la formulación material macroscópica de un modo natural. Por otro lado ecuaciones constitutivas simples en el nivel microplano conducen a predicciones muy precisas del comportamiento macroscópico de los materiales.

El tercer aspecto relevante de la teoría de microplanos es su capacidad de modelar comportamiento material anisotrópico. Actualmente, este es uno de los

objetivos más importantes de la propuesta de Taylor [Tay38] la cual se basa en la definición de relaciones totalmente independientes entre tensiones – deformaciones uniaxiales en algunos planos del material. Como consecuencia se observa una tendencia definida a usar modelos macroscópicos basados en fundamentales aspectos de la estructura miscroscópica de los materiales. Sin duda, uno de los mas exitosos esfuerzos en este sentido es la teoría de microplanos introducida por Bazant - Gambarova [BG84], Bazant [Baz76], y Bazant - Oh [BO85] [BO86] sobre la base de la idea original de G. I. Taylor.

La principal suposición de la teoría de microplanos es la relación entre las componentes de deformaciones o tensiones local o microscópica y el correspondiente tensor global o macroscópico. En consecuencia, deben considerarse dos aproximaciones, la restricción estática o la cinemática requiere que las deformaciones o las tensiones sobre cada microplano sean las componentes resueltas de sus contrapartes macroscópicas. La restricción estática fue extensivamente usada hasta la primera aplicación de la teoría de microplanos en daño mecánico continuo y en materiales cohesivo friccionales. En estos trabajos es donde el nombre microplano aparece por primera vez en lugar de la terminología original de “slip theory” que está relacionada con la asunción de comportamiento plástico en planos de deslizamiento de Taylor [Tay38] y otros autores como Batdorf y Budianski [BB49]

El potencial de la teoría para describir comportamiento de respuesta no lineal de materiales de ingeniería cohesivo friccionales como el hormigón ha sido extensamente demostrado en las primeras contribuciones de Bazant y coautores, y mas recientemente en trabajos de Bazant y Prat [BP88], Carol y Bazant [CBP91] [CBP92], y otros muchos autores. Recientemente la falta de una aproximación termodinámicamente consistente para derivar formulaciones basadas en microplanos ha sido estudiada por Carol y otros [CB97] que demostraron que la satisfacción de la segunda ley de la Termodinámica no puede generalmente garantizarse.

Para resolver esta limitación fundamental propusieron un método para derivar formulaciones constitutivas en microplanos dentro de un marco termodinámicamente consistente por medio de la incorporación de la Energía libre de Helmholtz en cada microplano. Este concepto fue extendido exitosamente para el comportamiento material inelástico como en plasticidad y daño por Khul y otros [KR98] [KRW00], [KSC01]. Sin embargo este trabajo así como el previo de Carol y otros [CJB01] conciernen al continuo clásico de Bolztman (elástico e inelástico)

A pesar de las ventajas de la teoría de micro planos y los considerables progresos en los modelos relacionados desde la propuesta original de Taylor, todavía hay preguntas abiertas y la mas relevante es la de cómo incorporar

mas información microscópica detallada en las ecuaciones globales constitutivas capaces de reproducir comportamientos materiales particulares. Aquí la aproximación termodinámicamente consistente para derivar modelos de micro planos se extiende para los continuos micropolares en el espíritu de Cosserat y Cosserat [CC09]. El principal objetivo es el de enriquecer la cinemática microscópica y la capacidad de la formulación de micro planos de reproducir particulares y mas complejos comportamientos de la estructura interna de materiales compuestos cuasi frágiles como el hormigón en los que la presencia de agregados contribuye al desarrollo de microrotaciones en planos característicos durante su historia de carga mas allá del límite elástico.

La segunda motivación de la teoría micropolar de microplanos es relacionada con la regularización de las predicciones de pospico [dBo91]. En este sentido la incorporación de la longitud característica a nivel microscópico conduce a una relación constitutiva intrínsecamente no local cuando se activan los grados de libertad adicionales del continuo micropolar. Esta longitud característica cuanta para obtener objetividad de las mallas durante las simulaciones de comportamientos de ablandamiento en elementos finitos.

Se extiende el concepto de microplanos para el continuo micropolar. De este modo, las restricciones cinemática y estática se redefinen para incluir las proyecciones de la curvatura macroscópica y de las cuplas tensionales macroscópicas a microplanos, respectivamente.

Luego se plantean las integraciones hemisféricas las cuales se requieren para la formulación de modelos micropolares basados en microplanos y la deducción de las ecuaciones constitutivas basadas en microplanos para continuos de Cosserat. La teoría constitutiva propuesta permite la simulación de los procesos de degradación de materiales de ingeniería sobre la base de fenómenos microscópicos detallados que afectan fuertemente el comportamiento de respuesta. Es más, los resultados demuestran la capacidad de la aproximación para deducir modelos inelásticos micropolares basados en microplanos.

Finalmente, el análisis relacionado con el modelo elástico lineal 2D de Cosserat basado en microplanos permite una interpretación física de la longitud característica micropolar.

5.1.- Teoría de Microplanos

El comportamiento de respuesta macro mecánico de materiales está controlado por ecuaciones constitutivas de planos característicos o microplanos por medio de restricciones cinemáticas o estáticas, lo que requiere que tanto las tensiones

como las deformaciones en cada microplano deben ser derivadas por proyección de su contraparte macroscópica.

5.1.1. Tensiones y Momentos Tensionales en Microplanos

En el caso de restricción estática los vectores de tensiones y momentos tensionales microscópicos en cada microplano, fig.5.1 y fig.5.2, se obtienen premultiplicando por los vectores normales del microplano *n*

$$\bar{t_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \sigma_N.\boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{\sigma}_T} \qquad \bar{t_\mu} = \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{n} = \mu_N.\boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{\mu}_T} \tag{5.1}$$

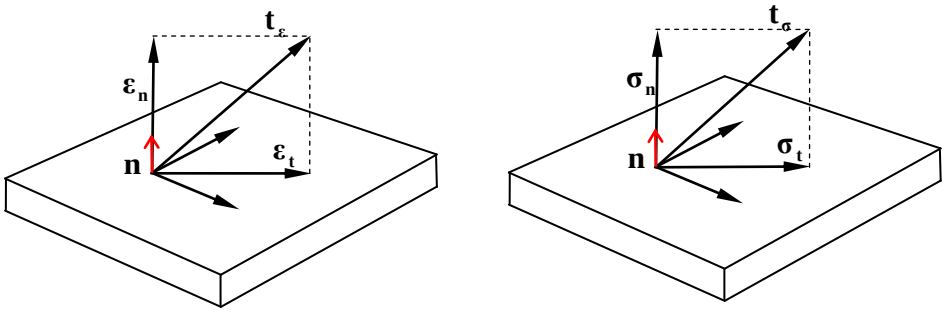


Figura 5.1. Componentes de tensiones y deformaciones en microplanos

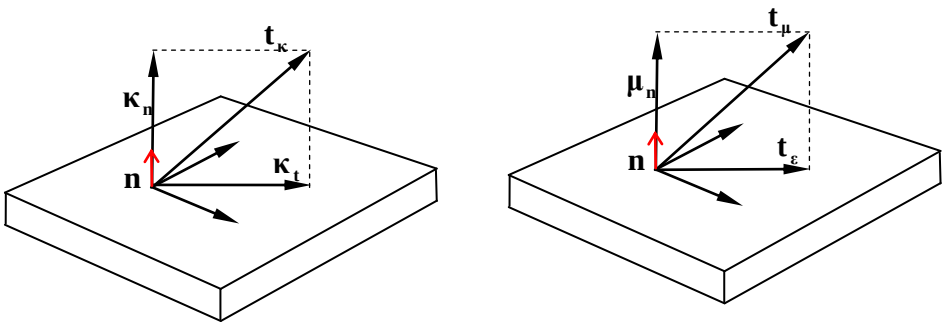


Figura 5.2. Componentes de momentos tensionales y microrotaciones en microplanos

Las componentes normal y tangencial de las tensiones y momentos tensionales de micro planos se obtienen como proyección de la contraparte macroscópica de acuerdo con las relaciones

$$\bar{\sigma}_N = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\sigma} \quad \bar{\mu}_N = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\mu} \tag{5.2}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_T = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\sigma} \qquad \bar{\boldsymbol{\mu}}_T = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\mu} \tag{5.3}$$

El tensor de proyección de segundo y de tercer orden $\boldsymbol{N} \quad y \quad \boldsymbol{T}$ son definidos como

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \tag{5.4}$$

Con $[\boldsymbol{I}]_{ijkl} = \boldsymbol{\delta_{ik}\delta_{jl}}$ el tensor identidad de cuarto orden y $\boldsymbol{n}$ el vector normal al plano.

Así $\bar{\sigma}_N \quad y \quad \bar{\mu}_N$ representan la tensión normal proyectada y el momento tensional proyectado, respectivamente, mientras $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_T \quad y \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}_T$ denota el vector de la tensión tangencial y del momento tangencial proyectados. Se debe notar que estas componentes proyectadas de las tensiones y momentos tensionales macroscópicas son en general diferentes de las componentes deducidas de las ecuaciones constitutivas en los microplanos las que serán denotadas a continuación como $\sigma_N\,, \mu_N\,, \boldsymbol{\sigma}_T \; y \; \boldsymbol{\mu}_T$. Las tensiones y cuplas tensionales normales y tangenciales de micro planos pueden ser descompuestas en partes simétrica y antisimétrica de acuerdo con la estrategia usual de descomposición de continuos Cosserat [ENSC03], [EN04].

5.1.2.- Deformaciones y Curvaturas en Microplanos

En el caso de restricciones cinemáticas los vectores de deformación y curvatura en cada microplano están dadas por pos multiplicación con el vector normal de cada microplano

$$\boldsymbol{t_\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{n} = \epsilon_N.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\epsilon_T} \qquad \boldsymbol{t_\kappa} = \boldsymbol{\kappa}.\boldsymbol{n} = \kappa_N.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\kappa_T} \tag{5.5}$$

Las deformaciones y curvaturas de microplanos tienen entonces, componentes normales y tangenciales La parte simétrica y la antisimétrica de las deformaciones y curvaturas tienen las propiedades

$$\boldsymbol{\epsilon^{skw}}.\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\epsilon^{skw}} \qquad \boldsymbol{\kappa^{skw}}.\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\kappa^{skw}} \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{\epsilon^{sym}}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\epsilon^{sym}} \qquad \boldsymbol{\kappa^{sym}}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\kappa^{sym}} \tag{5.7}$$

Y teniendo en cuenta las ec.(5.2) y (5.3)

$$\boldsymbol{\epsilon_N} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\epsilon^{sym}} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{\epsilon_T^{sym}} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\epsilon^{sym}} = \boldsymbol{T}^{sym} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \boldsymbol{\epsilon_T^{skw}} = -\boldsymbol{T} : \boldsymbol{\epsilon^{skw}} = -\boldsymbol{T}^{skw} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{5.9}$$

mientras que las componentes de curvatura correspondientes son

$$\kappa_N = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\kappa^{sym}} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\kappa} \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\kappa_T^{sym}} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\kappa^{sym}} = \boldsymbol{T}^{sym} : \boldsymbol{\kappa} \qquad \boldsymbol{\kappa_T^{skw}} = -\boldsymbol{T} : \boldsymbol{\kappa^{skw}} = -\boldsymbol{T}^{skw} : \boldsymbol{\kappa} \tag{5.11}$$

Aqui las componentes simétrica y antisimétrica del tensor de proyección $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{sym} + \boldsymbol{T}^{skw}$ están definidas

$$\boldsymbol{T}^{sym} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{I}^{sym} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{T}^{skw} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{I}^{skw} \tag{5.12}$$

$[\boldsymbol{I}^{sym}]_{ijkl} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\delta_{ik}\delta_{jl}} + \boldsymbol{\delta_{il}\delta_{jk}}]$, $[\boldsymbol{I}^{skw}]_{ijkl} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\delta_{ik}\delta_{jl}} - \boldsymbol{\delta_{il}\delta_{jk}}]$, $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}^{sym} + \boldsymbol{I}^{skw}$.

5.1.3.- Integración Hemisférica

Las propiedades de integración del vector normal documentadas en el trabajo de Bazant y Oh [BO86] y Lubarda y Krajcinovic [LK93] aplicadas al desarrollo de la integración analítica sobre la esfera

$$\int_{\Omega} d\Omega = 2\pi \tag{5.13}$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}\, d\Omega = \frac{2\pi}{3}\mathbf{1} \tag{5.14}$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}\, d\Omega = \frac{2\pi}{3}\left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{2}{5}\boldsymbol{I}^{sym}\right] \tag{5.15}$$

con $[\mathbf{1}]_{ij} = \delta_{ij}$ tensor identidad de segundo orden, y las proyecciones volumétrica y desviadora del tensor de cuarto orden definidas como

$$[\boldsymbol{T}^T.\boldsymbol{T}]_{ijkl} = T_{aij}.T_{akl} = n_i.n_k\delta_{jl} - n_i.n_j.n_k.n_l \tag{5.16}$$

$$[\boldsymbol{N} \otimes .\boldsymbol{N}]_{ijkl} = n_i.n_j.n_k.n_l \tag{5.17}$$

y sus integrales sobre la esfera

$$\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega} \boldsymbol{T}^T \otimes \boldsymbol{T}\, d\Omega = \boldsymbol{I}^{skw} + \frac{3}{5}\boldsymbol{I}^{sym} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{5.18}$$

$$\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega} \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}\, d\Omega = \frac{2}{5}\boldsymbol{I}^{sym} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{5.19}$$

Los productos de $\boldsymbol{T}^{sym}\, y\, \boldsymbol{T}^{skw}$ están dados por

$$\left[(\boldsymbol{T}^{sym})^T.\boldsymbol{T}^{sym}\right]_{ijkl} = \frac{1}{4}\left[n_i n_k.\delta_{jl} + n_i n_l.\delta_{jk} + n_j n_k.\delta_{il} + n_j n_l.\delta_{ik}\right] - n_i n_j.n_k n_l. \tag{5.20}$$

$$\left[(\boldsymbol{T}^{skw})^T.\boldsymbol{T}^{skw}\right]_{ijkl} = \frac{1}{4}\left[n_i n_k.\delta_{jl} - n_i n_l.\delta_{jk} - n_j n_k.\delta_{il} + n_j n_l.\delta_{ik}\right] \tag{5.21}$$

$$\left[(\boldsymbol{T}^{sym})^T.\boldsymbol{T}^{skw}\right]_{ijkl} = \frac{1}{4}\left[n_i n_k.\delta_{jl} - n_i n_l.\delta_{jk} + n_j n_k.\delta_{il} - n_j n_l.\delta_{ik}\right] \tag{5.22}$$

y las integrales sobre la esfera

$$\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}(\boldsymbol{T}^{sym})^{T}\otimes\boldsymbol{T}^{sym}\,d\Omega=\frac{3}{5}\boldsymbol{I}^{sym}-\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \tag{5.23}$$

$$\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}(\boldsymbol{T}^{skw})^{T}\otimes\boldsymbol{T}^{skw}\,d\Omega=\boldsymbol{I}^{skw} \tag{5.24}$$

$$\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}(\boldsymbol{T}^{skw})^{T}\otimes\boldsymbol{T}^{sym}\,d\Omega=0 \tag{5.25}$$

5.2.- Modelado de Microplanos Termodinámicamente Consistente

Basados en Carol *et al.* [CJB01] y Kuhl *et al.* [KSC01] se desarrolla aquí una forma general de leyes constitutivas termodinámicamente consistentes micropolares basadas en microplanos. La desigualdad macroscópica de Clausius-Duhem para procesos isotermales es

$$D^{mac}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}+\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}-\dot{\Psi}^{mac}\geq 0 \tag{5.26}$$

La principal suposición esta dada por la relación entre la Energía Libre de Helmholtz macroscópica y microscópica

$$\Psi^{mac}=\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\Psi^{mic}\,d\Omega \tag{5.27}$$

Es conveniente usar un formato desacoplado de la energía microscópica libre dependiente de las componentes de deformaciones y curvaturas $\epsilon_N\,,\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym}\,,\boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}\;y\;\kappa_N\,,\boldsymbol{\kappa}_T^{sym}\,,\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}$, respectivamente, como así también de las variables internas $\boldsymbol{q_u}\,y\;\boldsymbol{q_\omega}$ relacionadas con los movimientos de translación y rotación.

La ley de evolución de la energía microscópica libre relacionada con cada microplano toma la forma

$$\Psi^{mic}=\underbrace{\Psi^{mic}\left(\epsilon_N\,,\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym}\,,\boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}\,,\boldsymbol{q_u}\right)}_{energia\,membranal}+\underbrace{\Psi^{mic}\left(\kappa_N\,,\boldsymbol{\kappa}_T^{sym}\,,\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}\,,\boldsymbol{q_\omega}\right)}_{energia\,flexional} \tag{5.28}$$

Se asume entonces una descomposición aditiva de la energía libre microscópica en una energía de membrana y de viga. Ello se corresponde al caso particular de comportamiento de respuesta micropolar en el que el acoplamiento viga-membrana tiende a cero.

La ley de evolución de la energía microscópica libre deviene de la restricción cinemática de las ec.(5.8), ec(5.9), ec.(5.10) y ec.(5.11)

$$\Psi^{mic} = \left[\sigma_N \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\sigma_T^{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} - \boldsymbol{\sigma_T^{skw}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \tag{5.29}$$

$$+ \left[\mu_N \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\mu_T^{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} - \boldsymbol{\mu_T^{skw}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - D_{\boldsymbol{u}}^{mic} - D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic}$$

Con σ_N , $\boldsymbol{\sigma}_T^{sym}$, $\boldsymbol{\sigma}_T^{skw}$ tensiones constitutivas microscópicas,

$$\sigma_N \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_N} \qquad \boldsymbol{\sigma_T^{sym}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_T^{sym}} \qquad \boldsymbol{\sigma_T^{skw}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}} \tag{5.30}$$

y μ_N , $\boldsymbol{\mu}_T^{sym}$, $\boldsymbol{\mu}_T^{skw}$, cuplas tensionales constitutivas microscópicas.

$$\mu_N \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_N} \qquad \boldsymbol{\mu_T^{sym}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}} \qquad \boldsymbol{\mu_T^{skw}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}} \tag{5.31}$$

y $D_{\boldsymbol{u}}^{mic}\, y\, D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic}$, las tasas de disipación microscópica tipo membrana y viga respectivamente

$$D_{\boldsymbol{u}}^{mic} \doteq -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial q_{\boldsymbol{u}}}.\dot{q}_{\boldsymbol{u}} \qquad D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} \doteq -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial q_{\omega}}.\dot{q}_{\omega} \tag{5.32}$$

Se recalca que las tensiones constitutivas y cuplas tensionales en el microplano son en general diferentes de las tensiones proyectadas en el microplano y de las componentes de las cuplas tensionales $\bar{\sigma}_N$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_T^{sym}$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_T^{skw}$ y $\bar{\mu}_N$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}_T^{sym}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}_T^{skw}$ obtenidas por medio de la restricción estática.

Debido a la hipótesis de desacoplamiento membrana – viga, las componentes del tensor de tensiones pueden derivarse de la parte de la energía total microscópica la cual se relaciona solo con el movimiento de translación $\Psi_{\boldsymbol{u}}^{mic}$ así como la componente del tensor de cuplas tensionales depende solo de la otra parte de la energía relacionada con las microrotaciones $\Psi_{\boldsymbol{\omega}}^{mic}$.

La evolución de la energía microscópica libre puede ser obtenida aplicando la integral ec.(5.13) de la ley de evolución de la energía microscópica libre ec.(5.31) como

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{N}\sigma_N + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{\sigma}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{\sigma_T^{skw}}\right] d\Omega : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \tag{5.33}$$

$$+\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{N}\mu_N + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{\mu}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{\mu_T^{skw}}\right] d\Omega : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}(D_{\boldsymbol{u}}^{mic} + D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic})d\Omega$$

El tensor macroscópico de tensiones y cuplas tensionales se obtiene de las tensiones y cuplas tensionales microscópicas como

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{N}\sigma_N + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{\sigma}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}\right]d\Omega \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{N}\mu_N + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{\mu}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}\right]d\Omega \tag{5.35}$$

Para satisfacer la desigualdad de la disipación macroscópica

$$D^{mac} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}(D_{\boldsymbol{u}}^{mic} + D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic})d\Omega \geq 0 \tag{5.36}$$

se requiere que la disipación total de energía microscópica en todos los microplanos sea positiva $D^{mic} = D_{\boldsymbol{u}}^{mic} + D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} \geq 0$

lo que constituye un fuerte requerimiento y condición suficiente para cumplir la segunda ley de la termodinámica, es decir para lograr una formulación termodinámicamente consistente.

La ley de evolución de la energía libre microscópica puede entenderse como la forma microscópica de la desigualdad de Clausius – Duhem para el caso isotérmico, que puede ahora reescribirse como

$$D^{mic} = D_{\boldsymbol{u}}^{mic} + D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} = P_{\boldsymbol{u}}^{mic} - \dot{\Psi}_{\boldsymbol{u}}^{mic} + D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} - \dot{\Psi}_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} \geq 0 \tag{5.37}$$

Con el potencia microscópica de las tensiones y cuplas tensionales

$$P_{\boldsymbol{u}}^{mic} = \sigma_{\boldsymbol{N}} : \dot{\epsilon}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \tag{5.38}$$

$$P_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} = \mu_{\boldsymbol{N}} : \dot{\kappa}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \tag{5.39}$$

5.3.- Elasticidad Micropolar de Microplanos

El comportamiento hiper elástico de cada componente de rigidez membrana viga está caracterizado por variables internas nulas $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}} \equiv 0$. Entonces el valor de la disipación es nulo y la energía microscópica libre se reduce a

$$\Psi^{mic} = \Psi_{\boldsymbol{u}}^{mic}\left(\epsilon_N, \boldsymbol{\epsilon}_T^{sym}, \boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}\right) + \dot{\Psi}_{\boldsymbol{\omega}}^{mic}\left(\kappa_N, \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}, \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}\right) \tag{5.40}$$

La energía libre concuerda con la energía almacenada que aquí se asume compuesta por una contribución desacoplada membrana viga de la forma

$$\Psi_{\boldsymbol{u}}^{mic} = W_{N\boldsymbol{u}}\left(\epsilon_N\right) + W_{T\boldsymbol{u}}^{sym}\left(\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{sym}\right) + W_{T\boldsymbol{u}}^{skw}\left(\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{skw}\right) \tag{5.41}$$

$$\Psi_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} = W_{N\boldsymbol{\omega}}\left(\kappa_N\right) + W_{T\boldsymbol{\omega}}^{sym}\left(\boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{sym}\right) + W_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}\left(\boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{skw}\right)$$

Considerando una función de energía almacenada cuadrática en deformaciones, para el caso de elasticidad lineal se introducen los módulos elásticos $E_{N\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{u}}^{sym}$, $\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{u}}^{skw}$, $E_{N\boldsymbol{\omega}}\kappa_N$, $\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{\omega}}^{sym}$ y $\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{\omega}}^{skw}$ en las funciones de energía microscópica

$$W_{N\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}\epsilon_N E_{N\boldsymbol{u}}\epsilon_N \qquad W_{N\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym/skw}.\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{u}}^{sym/skw}.\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym/skw} \tag{5.42}$$

$$W_{N\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\kappa_N E_{N\boldsymbol{\omega}}\kappa_N \qquad W_{T\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}_T^{sym/skw}.\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{\omega}}^{sym/skw}.\boldsymbol{\kappa}_T^{sym/skw}$$

La definición anterior de la desigualdad microscópica de Clausius – Duhem conduce a tensiones y cuplas tensionales microscópicas como variables termodinámicamente conjugadas de las componentes de deformaciones y microcurvaturas, respectivamente

$$\sigma_{\boldsymbol{N}} := \frac{\partial\Psi^{mic}}{\partial\epsilon_{\boldsymbol{N}}} = E_{\boldsymbol{Nu}}.\epsilon_{\boldsymbol{N}} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym/skw}} := \frac{\partial\Psi^{mic}}{\partial\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym/skw}}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{sym/skw}}.\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym/skw}} \tag{5.43}$$

$$\mu_{\boldsymbol{N}} := \frac{\partial\Psi^{mic}}{\partial\kappa_{\boldsymbol{N}}} = E_{\boldsymbol{N\omega}}.\epsilon_{\boldsymbol{N}} \quad \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym/skw}} := \frac{\partial\Psi^{mic}}{\partial\boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym/skw}}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{sym/skw}}.\boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym/skw}}$$

De la versión macroscópica de la desigualdad de Clausius-Duhem se tienen los tensores macroscópicos de tensiones y momentos tensionales como funciones de las componentes microscópicas.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[\boldsymbol{N}E_{\boldsymbol{Nu}}.\epsilon_{\boldsymbol{N}} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{sym}}\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{skw}}\boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}\right] d\Omega \tag{5.44}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[\boldsymbol{N}E_{\boldsymbol{N\omega}}.\kappa_{\boldsymbol{N}} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{sym}}\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{skw}}\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}\right] d\Omega$$

que puede ser re escritas como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega}} : \boldsymbol{\kappa} \tag{5.45}$$

donde el módulo constitutivo macroscópico membranal y flexional definido como sigue

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[E_{\boldsymbol{Nu}}\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} + [\boldsymbol{T}^{skw}]^T.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] d\Omega \tag{5.46}$$

$$\boldsymbol{E}_{\omega} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[E_{\boldsymbol{N\omega}}\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} + [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{skw}}\boldsymbol{T}^{skw}\right] d\Omega$$

Asumiendo isotropía de los microplanos, la deformación tangencial y los vectores de curvatura y la tensión tangencial y cuplas tensionales permanecen

paralelos durante toda la historia de carga. En consecuencia se consideran las siguientes simplificaciones

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} \parallel \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} \rightarrow \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{sym}} = E_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \parallel \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \rightarrow \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{skw}} = E_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}\boldsymbol{I} \quad (5.47)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} \parallel \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} \rightarrow \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{sym}} = E_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \parallel \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \rightarrow \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{skw}} = E_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}\boldsymbol{I}$$

Suponiendo además que los módulos constitutivos son independientes de la orientación de los microplanos

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} = \frac{3}{2\pi}E_{\boldsymbol{Nu}}\int_{\Omega}[\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N}]\,d\Omega + \frac{3}{2\pi}E_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}\int_{\Omega}[\boldsymbol{T}^{sym}]^{T}.\boldsymbol{T}^{sym}d\Omega + \\ + \frac{3}{2\pi}E_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{T}^{skw}\right]^{T}\boldsymbol{T}^{skw}d\Omega \quad (5.48)$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega}} = \frac{3}{2\pi}E_{\boldsymbol{N\omega}}\int_{\Omega}[\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N}]\,d\Omega + \frac{3}{2\pi}E_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}\int_{\Omega}[\boldsymbol{T}^{sym}]^{T}.\boldsymbol{T}^{sym}d\Omega + \\ + \frac{3}{2\pi}E_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{T}^{skw}\right]^{T}\boldsymbol{T}^{skw}d\Omega$$

Las fórmulas de integración ec.(5.14), ec.(5.15), ec.(5.18) y ec.(5.19) permiten la evaluación de las integrales

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} = \left[\frac{3}{5}E_{\boldsymbol{Nu}} - \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}\right]\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \left[\frac{2}{5}E_{\boldsymbol{Nu}}^{symT} + \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}\right]\boldsymbol{I}^{sym} + E_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}\,\boldsymbol{I}^{skw} \quad (5.49)$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega}} = \left[\frac{3}{5}E_{\boldsymbol{N\omega}} - \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}\right]\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \left[\frac{2}{5}E_{\boldsymbol{N\omega}}^{symT} + \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}\right]\boldsymbol{I}^{sym} + E_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}\,\boldsymbol{I}^{skw}$$

La comparación de esta ecuación con el tensor general no simétrico elástico para comportamiento membranal flexional desacoplado conduce a

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} = \phi_1\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + (\phi_2+\phi_3)\,\boldsymbol{I}^{sym} + (\phi_2-\phi_3)\,\boldsymbol{I}^{skw} \quad (5.50)$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} = \varphi_1\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + (\varphi_2+\varphi_3)\,\boldsymbol{I}^{sym} + (\varphi_2-\varphi_3)\,\boldsymbol{I}^{skw}$$

5.4.- Elastoplasticidad Micropolar de Microplanos

En esta sección se presenta la formulación termodinámicamente consistente del modelo elastoplástico micropolar de microplanos para el caso general y el modelo tipo Von Mises

5.4.1.- Caso General

El tipo de comportamiento de respuesta elastoplástico del continuo micropolar está caracterizado por la descomposición aditiva del tensor de deformación y curvatura macroscópico total en las componentes elásticas y plásticas, ec.(2.99) y ec.(2.100)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \qquad\qquad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_p$$

La suposición de restricción cinemática extiende la aplicabilidad de la descomposición aditiva al nivel microscópico. Como consecuencia, las componentes de deformación y curvatura total en los microplanos pueden ser expresadas como

$$\epsilon_{\boldsymbol{N}} = \epsilon_{\boldsymbol{Ne}} + \epsilon_{\boldsymbol{Np}} \qquad \kappa_{\boldsymbol{N}} = \kappa_{\boldsymbol{Ne}} + \kappa_{\boldsymbol{Np}} \tag{5.51}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{sym} = \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Te}}^{sym} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{sym} \qquad \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{sym} = \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Te}}^{sym} + \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Tp}}^{sym} \tag{5.52}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{skw} = \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Te}}^{skw} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{skw} \qquad \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{skw} = \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Te}}^{skw} + \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Tp}}^{skw} \tag{5.53}$$

En el caso mas general el tensor de las variables internas incluye todas las partes plásticas de las componentes de deformación y curvatura las cuales caracterizan el campo cinemático en microplanos

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\left(\epsilon_{\boldsymbol{N}p}, \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{sym}, \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{skw}, \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Np}}, \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Tp}}^{sym}, \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Tp}}^{skw}, \xi^{mic}\right) \tag{5.54}$$

donde la variable escalar interna ξ^{mic} tiene en cuenta la respuesta plástica endurecimiento / ablandamiento isotrópico.

La energía libre microscópica obtenida de la definición de la energía libre elástica y de las funciones de energía libre microscópica en las ec.(5.40), ec.(5.41) y ec.(5.42) como

$$\Psi^{mic} = W_{\boldsymbol{Nu}}\left(\epsilon_N - \epsilon_{Np}\right) + W_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}\left(\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{sym} - \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{sym}\right) + W_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}\left(\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{skw} - \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{skw}\right) + \tag{5.55}$$

$$+W_{\boldsymbol{N\omega}}\left(\kappa_N - \kappa_{Np}\right) + W_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}\left(\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} - \boldsymbol{\kappa}_{Tp}^{sym}\right) + W_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}\left(\boldsymbol{\kappa}_T^{skw} - \boldsymbol{\kappa}_{Tp}^{skw}\right) + \int_{\Omega}^{\xi^{mic}} \phi(\xi^{mic}) d\xi^{mic}$$

donde el comportamiento endurecimiento/ablandamiento es tenido en cuenta por medio del término $\int_{\Omega}^{\xi^{mic}} \phi(\xi^{mic}) d\xi^{mic}$

Las tensiones y cuplas tensionales en el microplano se obtienen de la evaluación de la desigualdad de Clausuis – Duhem

$$\sigma_{\boldsymbol{N}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_{\boldsymbol{N}e}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}}.\epsilon_{Ne} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{sym} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}e}^{sym}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}}^{sym}.\epsilon_{\boldsymbol{T}e}^{sym} \tag{5.56}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{skw} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}e}^{skw}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}}^{skw}.\epsilon_{\boldsymbol{T}e}^{skw}$$

$$\mu_{\boldsymbol{N}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_{\boldsymbol{N}e}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{\omega}}.\kappa_{Ne} \qquad \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{sym} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}e}^{sym}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\omega}}^{sym}.\kappa_{\boldsymbol{T}e}^{sym} \tag{5.57}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{skw} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}e}^{skw}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\omega}}^{skw}.\kappa_{\boldsymbol{T}e}^{skw}$$

La evolución de las variables internas se restringe a la desigualdad de la disipación microscópica

$$D^{mic} = \sigma_{\boldsymbol{N}}\dot{\epsilon}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{sym}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{skw}} + \mu_{\boldsymbol{N}}\dot{\kappa}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}} + \tag{5.58}$$

$$+\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{sym}} + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{skw}} - \phi^{mic}\dot{\xi}^{mic} \geq 0$$

La función de fluencia puede ser definida en la forma

$$\Phi^{mic} = \varphi\left(\sigma_{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}, \mu_{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}\right) - \phi^{mic}\left(\dot{\xi}^{mic}\right) \leq 0 \tag{5.59}$$

donde la función φ de las tensiones y momentos tensionales constitutivos microscópicos esta caracterizada por los gradientes

$$\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}}^{sym} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{\boldsymbol{T}}^{sym}} \qquad \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}}^{skw} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{\boldsymbol{T}}^{skw}} \tag{5.60}$$

$$\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{\omega}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\omega}}^{sym} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{\boldsymbol{T}}^{sym}} \qquad \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\omega}}^{skw} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{\boldsymbol{T}}^{skw}} \tag{5.61}$$

Para el caso de plasticidad asociada las leyes de evolución de las deformaciones y curvaturas plásticas son obtenidas del problema variacional definido por la desigualdad de disipación ec.(5.58) bajo la consideración de la condición de convexidad y de la restricción ec.(5.59). Para el caso general no asociado se postula que

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{sym} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}}^{sym} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{skw} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}}^{skw} \tag{5.62}$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N}\boldsymbol{\omega}} \qquad \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{sym} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\omega}}^{sym} \qquad \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}}^{skw} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\omega}}^{skw} \tag{5.63}$$

$$\dot{\xi}^{mic} = \dot{\gamma}^{mic} \tag{5.64}$$

en términos del *Lagrangeano* o multiplicador plástico γ^{mic} y de los gradientes de potenciales plásticos microscópicos. Las leyes de flujo en cada microplano

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Nu}} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Tu}}^{sym} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{sym}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Tu}}^{skw} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{skw}} \tag{5.65}$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N\omega}} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \mu_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{sym}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{skw}} \tag{5.66}$$

Las condiciones de carga- descarga de Kuhn-Tucker así como la condición de consistencia pueden ser definidas como

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}) \leq 0 \qquad \dot{\gamma}^{mic} \geq 0 \qquad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}).\dot{\gamma}^{mic} = 0 \qquad \dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}).\dot{\gamma}^{mic} = 0 \tag{5.67}$$

Una solución implícita para el multiplicador plástico puede ser obtenida de la condición de consistencia

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}^{mic} = \frac{1}{h}\left[\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Nu}} E_{\boldsymbol{Nu}} \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}.\boldsymbol{T}^{sym} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \\ + \frac{1}{h}\left[\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N\omega}} E_{\boldsymbol{N\omega}} \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}.\boldsymbol{T}^{sym} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\kappa}}\end{aligned} \tag{5.68}$$

Donde

$$\begin{aligned}h = H^{mic} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Nu}} E_{\boldsymbol{Nu}} \boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Nu}} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}.\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Tu}}^{sym} - \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}.\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Tu}}^{skw} + \\ + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N\omega}} E_{\boldsymbol{N\omega}} \boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N\omega}} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}.\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym} - \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}.\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}\end{aligned} \tag{5.69}$$

$$H^{mic} = \frac{\partial \phi\left(\xi^{mic}\right)}{\partial \xi^{mic}} \tag{5.70}$$

Las ecuaciones constitutivas macroscópicas elastoplásticas pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \tag{5.71}$$

Con los operadores elastoplásticos

$$\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} = \boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{uu}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{u}} d\Omega \qquad \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} = -\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{\omega}} d\Omega \tag{5.72}$$

$$\boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} = -\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\omega}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{u}} d\Omega \qquad \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{\omega\omega}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\omega}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{\omega}} d\Omega$$

Donde los gradientes modificados se definen como

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_i = E_{\boldsymbol{N}i}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N}i} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}i}^{sym}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T}i}^{sym}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}i}^{skw}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{T}i}^{skw}\right] \tag{5.73}$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_i = E_{\boldsymbol{N}i}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N}i} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}i}^{sym}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T}i}^{sym}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T}i}^{skw}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{T}i}^{skw}\right] \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}$$

El formato resultante del operador tangente elastoplástico micropolar basado en microplanos es bastante similar al del modelo micropolar clásico [WDI95] con excepción de las integrales que tienen en cuenta las contribuciones microscópicas al operador macroscópico en caso de formulación micropolar de microplanos.

5.4.2.- Modelo de Von Mises Elastoplástico de Cosserat Basado en Microplanos

El modelo clásico o macroscópico elastoplástico de von Mises para continuos Cosserat [dBo91] , está caracterizado por la condición de fluencia

$$\Phi^{mac} = \sqrt{3.J_2} - \phi^{mac} = 0 \quad con \quad \phi^{mac} = \bar{\sigma}_y^{mac} + E_p^{mac}.\xi^{mac} \tag{5.74}$$

Siendo el segundo invariante de tensiones

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{s}^s : \boldsymbol{s}^s + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu}\right) \quad con \quad \boldsymbol{s}^s = \frac{\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^T}{2} \quad y \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3} \tag{5.75}$$

El endurecimiento lineal

$$\phi^{mac} = \phi_0^{mac} + H^{mac}\xi^{mac} \tag{5.76}$$

y la ley de evolución del parámetro de endurecimiento / ablandamiento

$$\dot{\xi}^{mac} = \sqrt{\frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{T}} + \frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{p}}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}_p} = \dot{\gamma}^{mac} \tag{5.77}$$

Asumiendo que el segundo invariante del tensor desviador de tensiones es una función de los vectores tangenciales de tensiones y momentos tensionales de los microplanos, la condición de fluencia de von Mises en el nivel microscópico puede ser expresada en la forma

$$\Phi^{mic} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}} - \tag{5.78}$$

$$-\phi^{mic} \leq 0$$

Con las tensiones de fluencia con endurecimiento lineal

$$\phi^{mic} = \phi_0^{mac} + H^{mic}\xi^{mic} \tag{5.79}$$

Los parámetros de endurecimiento/ablandamiento con la ley de evolución

$$\dot{\xi}^{mic} = \sqrt{\frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{Tp}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{Tp}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{Tp}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{Tp}} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{Tp}}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{Tp}} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{Tp}}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{Tp}}} = \dot{\gamma}^{mic} \quad (5.80)$$

el cual, de forma similar a la descripción macroscópica, coincide con el multiplicador plástico.

5.4.3.- Modelo de Drucker Prager Elastoplástico de Cosserat Basado en Microplanos

El modelo clásico o macroscópico elastoplástico de Drucker Prager para continuos Cosserat, está caracterizado por la condición de fluencia

$$\Phi^{mac} = \alpha^{mac} I_1 + \sqrt{3.J_2} - \phi^{mac} = 0 \quad con \quad \phi^{mac} = \bar{\sigma}^{mac}_y + E^{mac}_p.\xi^{mac} \quad (5.81)$$

donde el primer invariante de tensiones

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = tr[\boldsymbol{\sigma}] \quad (5.82)$$

Este Modelo de dos parámetros está caracterizado por el ángulo de fricción α^{mac} y la tensión de fluencia $\bar{\sigma}^{mac}_y$, que puede expresarse en función de las resistencias de tracción y compresión del material

$$\alpha^{mac} = \frac{f_c - f_t}{3} \qquad \bar{\sigma}^{mac}_y = \frac{f_c.f_t}{3} \quad (5.83)$$

$$\Phi^{mic} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}}} +$$
$$+\alpha^{mic}\left(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{N}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{N}}\right) - \phi^{mic} \leq 0 \quad (5.84)$$

5.5.- Análisis de Falla Difusa

En el Capítulo 3 se han introducido las condiciones de localización de falla para los modelos de plasticidad macroscópicos.

Para el caso del modelo de microplanos que se estudia, la primera condición de localización puede expresarse como

$$det(\boldsymbol{Q}_{ep}) = det\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{uu}}_{ep} & \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{u\omega}}_{ep} \\ \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\omega u}}_{ep} & \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\omega\omega}}_{ep} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.85)$$

Las cuatro particiones del tensor de localización son

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{uu}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega \tag{5.86}$$

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{u\omega}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega \tag{5.87}$$

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{\omega u}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega \tag{5.88}$$

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{\omega\omega}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega \tag{5.89}$$

$$\boldsymbol{Q}_{L}^{\eta\varsigma} = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{E}_{ijkl}^{\eta\varsigma}.\boldsymbol{N} \quad con \quad \boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varsigma} \in (\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})$$

Donde los gradientes modificados se definen como

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}} = E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ni}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right] \tag{5.90}$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{i}} = E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ni}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right] \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{N}.\left[E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ni}}.\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right) - \boldsymbol{T}^{skw}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right)\right].\boldsymbol{N} \tag{5.91}$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{N}.\left[E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ni}}.\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right) - \boldsymbol{T}^{skw}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right)\right].\boldsymbol{N} \tag{5.92}$$

$$con \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}$$

Se ha utilizado la aclaración del subíndice en la normal$\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{m}}$, para diferenciar de las direcciones en las que se estudia la localización del tensor elastoplástico, de aquella que corresponde al microplano.

En el caso de los sólidos micropolares debe estudiarse la segunda condición de localización que resulta de la ecuación de balance del momento de la cantidad de movimiento y que incorpora los grados de libertad adicionales de estos continuos, ec.(3.28)

$$\boldsymbol{e} : [|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|] = \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

Esta condición deberá satisfacerse completamente en forma simultánea con la primera para admitir bifurcación discontinua.

Los dos términos vectoriales de las ec.(3.29) y ec.(3.30) se definen como

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} = \dot{\gamma}\, \boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}}) =$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \dot{\gamma}^{mic}\, d\Omega\, \boldsymbol{e} : \left[\boldsymbol{E}_0^{\boldsymbol{uu}} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{u}}\, d\Omega \right] : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}}) \qquad (5.93)$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\gamma}\, \boldsymbol{e} : \boldsymbol{E}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}}) =$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \dot{\gamma}^{mic}\, d\Omega\, \boldsymbol{e} : \left[-\frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{\omega}}\, d\Omega \right] : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}}) \qquad (5.94)$$

Dada la dificultad de desarrollar las integrales planteadas en el caso de los sólidos de Cosserat por la asimetría de los gradientes de fluencia, ambas condiciones se evalúan numéricamente, en la sección siguiente.

5.6.- Análisis Numérico

En esta sección analizamos las predicciones del modelo elastoplástico de von Mises y de Drucker Prager para continuos Cosserat basados en microplanos para ensayos de tracción y compresión uniaxial y corte simple, desarrollado en una descomposición en 42 direcciones de microplanos de la esfera representativa del punto material. La fig. 5.3 ilustra las condiciones de borde de los ensayos que se realizan en estado plano de deformaciones. Se usaron elementos finitos Standard cuadriláteros bilineales con cuatro puntos de integración.

La formulación de elementos finitos de problemas micropolares se obtiene por medio de discretizaciones de la forma débil de las ecuaciones de balance conforme al principio variacional de Dirichlet [WDI95]. De esa forma, los desplazamientos y rotaciones, y sus variaciones, son aproximados con las mismas funciones de forma de acuerdo con el método Galerkin-Bubnov.

En el ensayo de corte simple, se consideraron restricciones totales de desplazamientos y rotaciones en los nodos localizados en la base del elemento cuadrilátero mientras sólo los desplazamientos verticales se restringen en los otros nodos.

Por otra parte, en el caso de tracción y compresión uniaxial, la restricción total de desplazamiento y rotación ha sido solo considerada en un nodo del elemento como se indica en la fig. 5.3 mientras sobre otros nodos tienen solo una posibilidad de desplazamiento.

Las rotaciones son restringidas de forma similar al del ensayo de tracción uniaxial de probetas cilíndricas, considerando la doble simetría del problema.

Los parámetros elásticos de Cosserat en microplanos para el análisis numérico son obtenidos de acuerdo con las ec.(5.49) y se muestran en tabla 5.1.

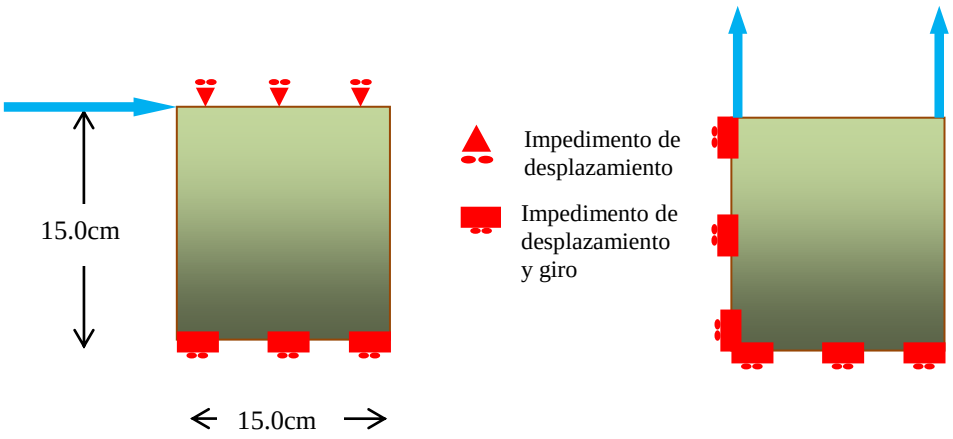


Figura 5.3: Condiciones de borde. Ensayos de corte simple y tracción simple en deformaciones planas

E	$30.000\,N/mm^2$
ν	0.2
G	$12.500\,N/mm^2$
G_c	$6.250\,N/mm^2$
l_c	$15\,mm$
E_{Nu}	$12.500\,N/mm^2$
E_{Tu}^{sym}	$21.667\,N/mm^2$
E_{Tu}^{skw}	$12.500\,N/mm^2$
$E_{T\omega}^{sym}$	$12.500\,N/mm^2$
$E_{T\omega}^{skw}$	$12.500\,N/mm^2$

Tabla 5.1. Parámetros Materiales

El campo de tensiones no simétricas en el caso de continuo micropolar y la forma compleja resultante del segundo invariante J_2 impiden desarrollar un procedimiento analítico para obtener la relación entre las tensiones de von Mises y Drucker Prager microscópicas ϕ^{mic} y macroscópicas ϕ^{mac}, respectivamente.

En consecuencia y para el análisis numérico en este trabajo, las tensiones han sido elegidas para obtener similares predicciones de la máxima resistencia tipo J_2 correspondientes a los ensayos de tracción y compresión uniaxial y corte simple, para el modelo micropolar microscópico y macroscópico.

De la calibración numérica se obtienen los valores de $\phi_0^{mic} = 23,5 N/mm^2$ y $\phi_0^{mac} = 50,00 N/mm^2$ para el ensayo de extensión axial, siendo estos valores $\phi_0^{mic} = 29,00 N/mm^2$ y $\phi_0^{mac} = 50,00 N/mm^2$ para el ensayo de corte simple.

5.6.1.- Ensayo de Tracción Uniaxial

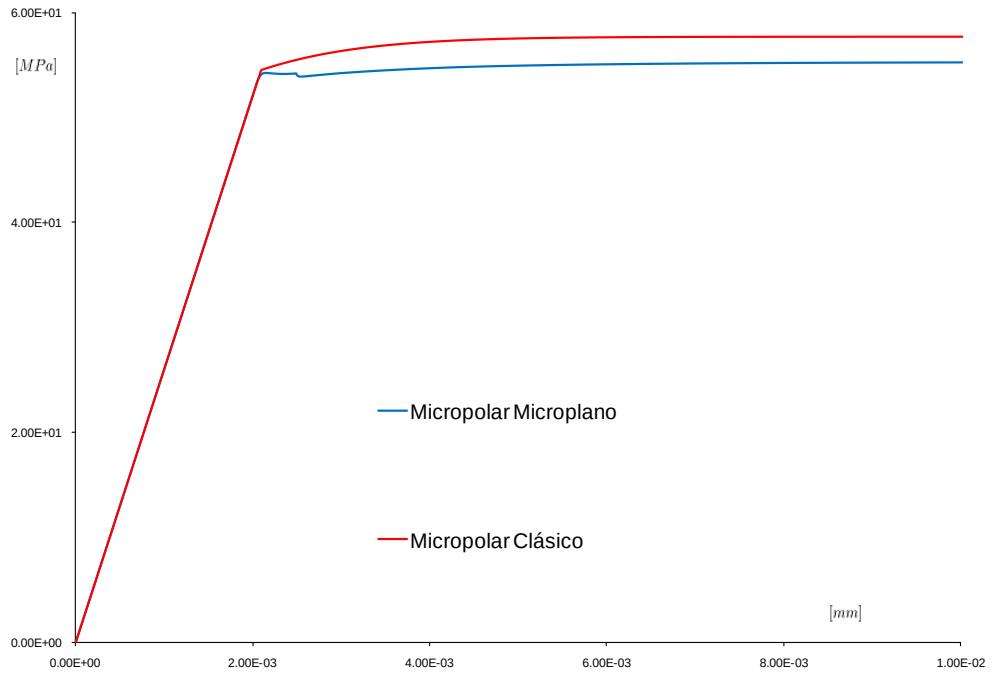


Figura 5.4. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

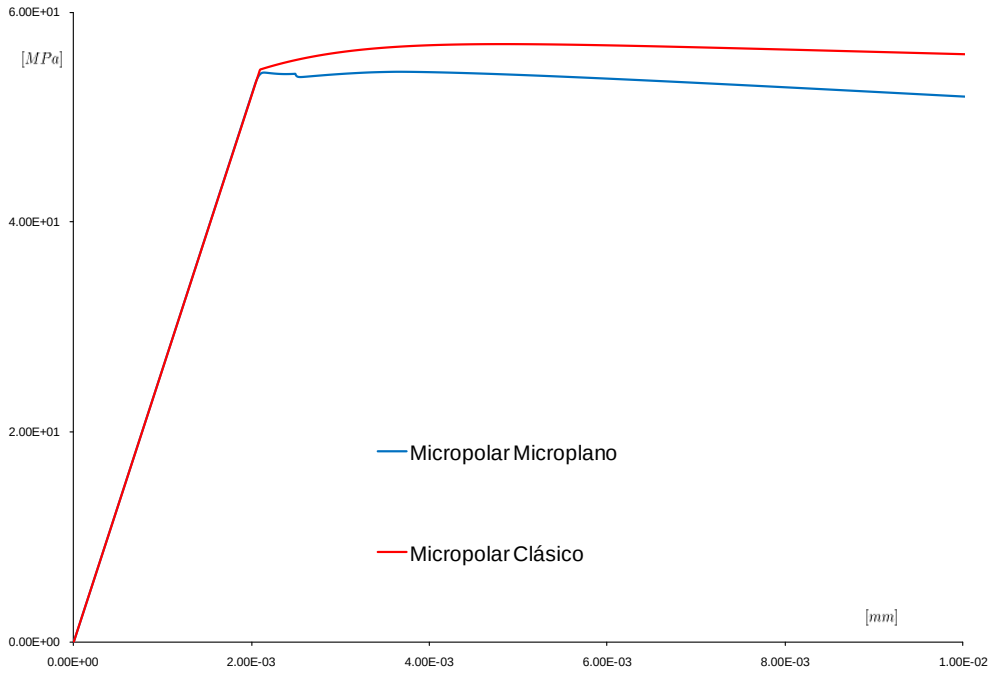


Figura 5.5. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas.. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos.Régimen de Ablandamiento Lineal.

La fig. 5.4 compara las predicciones numéricas de ensayo de tracción uniaxial con el modelo elastoplástico de microplanos micropolar con el modelo

elastoplástico micropolar clásico. Se consideran tres tipos diferentes de leyes de evolución de las funciones de tensión ϕ^{mic} y ϕ^{mac}para estos modelos que corresponden a comportamientos plasticidad perfecta, endurecimiento y ablandamiento lineal.

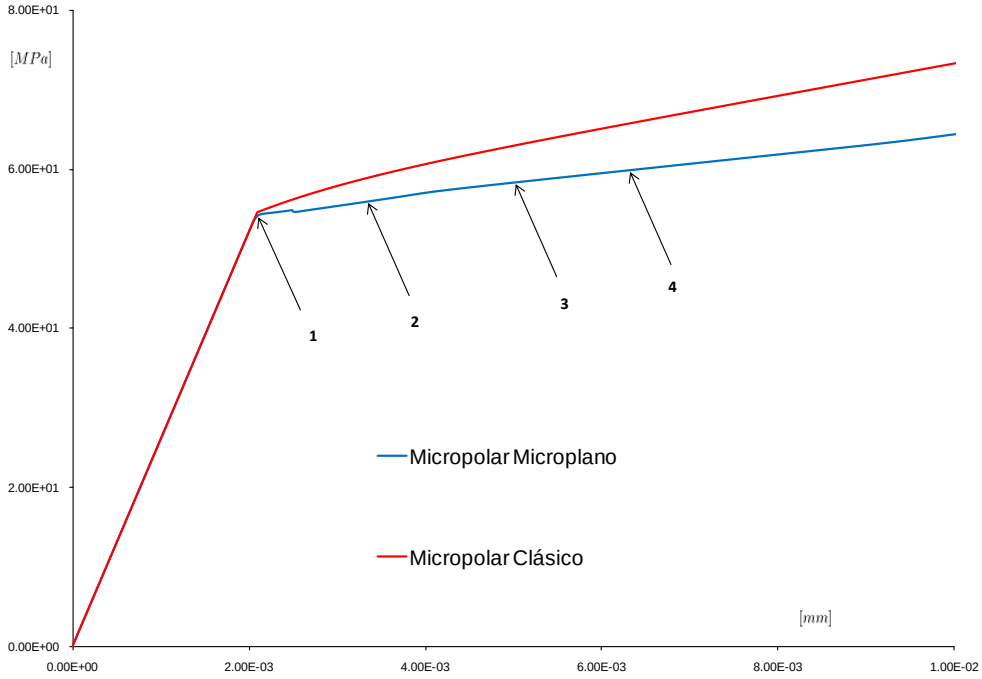


Figura 5.6. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas.. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos.Régimen de Endurecimiento Lineal.

De la comparación de las observaciones de cada tipo de modelo micropolar, la primera observación que surge es que el comportamiento de respuesta durante el rango elástico concuerda muy bien. También las predicciones globales de ambos modelos en el rango plástico bajo ablandamiento lineal y plasticidad perfecta resultan muy similares. Sin embargo en el caso de endurecimiento lineal, el modelo clásico micropolar conduce a un comportamiento de respuesta mucho mas dúctil indicando que esta formulación es mucho mas sensible a las variaciones de la ley de endurecimiento.

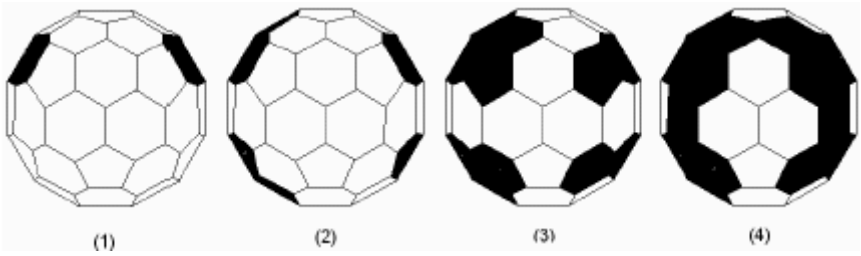


Figura 5.7. Proceso de evolución plástica de los microplanos en el ensayo de tracción uniaxial

El modelo macroscópico permite un análisis mucho mas detallado del mecanismo de falla y su evolución como puede observarse en la fig. 5.7 que muestra el desarrollo espacial del proceso plástico en el caso del ensayo de tracción uniaxial predicho por el modelo micropolar de microplanos con endurecimiento lineal. Cada diagrama en esta figura corresponde al paso de carga indicado en la curva carga desplazamiento (fig.5.6). Si bien las tensiones volumétricas son idénticas en el caso del ensayo de tracción, la influencia de las tensiones tangenciales simétricas y asimétricas que se desarrollan y la componente normal no equilibrada no volumétrica de los tensores evaluados, lleva a la plastificación de los planos que se grafican en inclinaciones de aproximadamente 45 grados. Estos entran en fluencia en primer lugar mientras se mantienen en el período elástico las otras direcciones.

Es decir que durante la historia de carga puede reconocerse una tendencia hacia la evolución de la textura. Bajo tracción uniaxial, el comportamiento plástico se desarrolla en los planos localizados con ángulos de alrededor de 45° con el eje de carga en el plano de carga.

Similar efecto fue observado por Kuhl *et al.* [KSC01] en las predicciones del ensayo de tracción uniaxial en el modelo elastoplástico de micro planos en continuos de Bolztman.

Se analizan las diferencias fundamentales entra las predicciones numéricas de los modelos de microplanos micropolares y microplanos clásicos en plasticidad perfecta de la fig.5.4. En el caso del modelo de microplano clásico con plasticidad perfecta, el requerimiento para los valores de las constantes de J_2 debidas a la condición de fluencia

$$\Phi^{mac} = \sqrt{3.J_2} - \phi^{mac} = 0$$

es responsable del plató en la evolución de lo cual conduce a la respuesta elástica, como se indica en la fig.5.4.

El modelo micropolar de microplanos con plasticidad perfecta conduce a una evolución del tensor de tensiones macroscópico durante el ensayo de tracción uniaxial caracterizado por una respuesta de ablandamiento suave de J_2 y el subsiguiente plató.

Las fig.5.8, fig.5.9 y fig.5.10 muestran los resultados de los ensayos de tracción uniaxial para el Modelo de Plasticidad de Microplanos de Von Mises y de Drucker Prager, en régimen de plasticidad perfecta, ablandamiento y endurecimiento lineal. Se ve que las tensiones que predice la formulación de Drucker Prager son siempre superiores a las de Von Mises para todos los escenarios de carga.

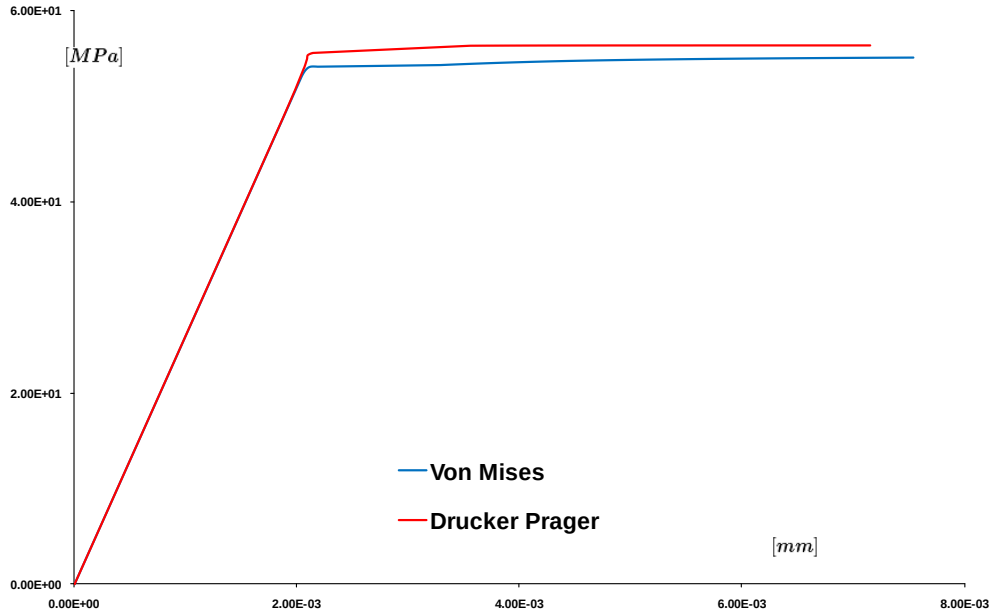


Figura 5.8. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

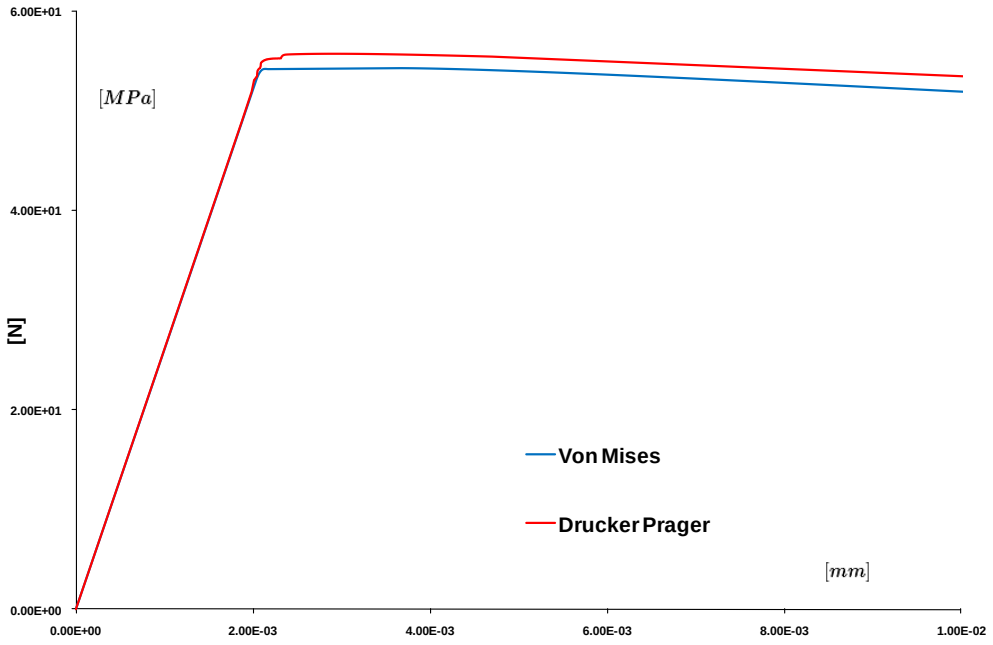


Figura 5.9. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Ablandamiento Lineal.

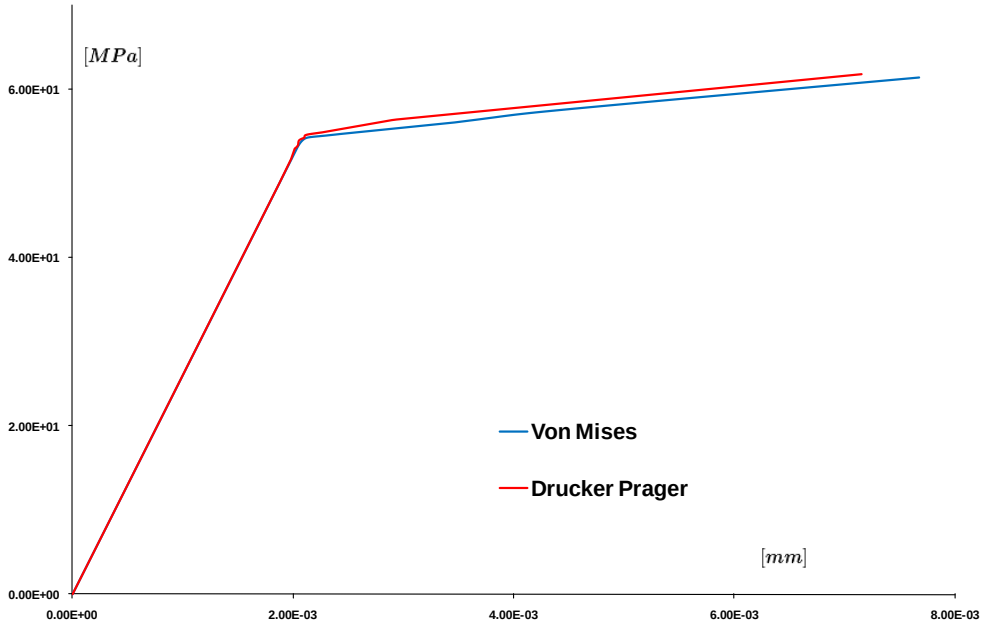


Figura 5.10. Ensayo de Tracción uniaxial. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Endurecimiento Lineal.

5.6.2. Ensayo de Corte Simple

Las predicciones numéricas del modelo de Cosserat basado en microplanos para el ensayo de corte simple y la comparación con las correspondientes predicciones del modelo clásico micropolar se muestran en la fig.5.11, fig.5.12 y fig.5.13.

Es importante notar que en el ensayo de corte simple contrariamente con el ensayo de tracción uniaxial, se activan las microrotaciones. La fig.5.14 ilustra el desarrollo de la falla que predice el modelo de microplanos micropolar con endurecimiento lineal. De nuevo se puede reconocer la evolución de la textura. Sin embargo en el caso del ensayo de corte simple, el proceso de deformación inelástica tiene lugar en los microplanos superior, inferior, izquierdo y derecho. Esta distribución de falla pronunciada en microplanos el comportamiento mas dúctil que predice el ensayo de corte simple del modelo micropolar de microplanos cuando se compara con las predicciones correspondientes del ensayo de tracción uniaxial.

Los resultados de la fig.5.11 también indican que el modelo micropolar de microplanos con plasticidad perfecta conduce, como se esperaría, a un plató de la fuerza externa de corte, al igual al modelo clásico de Cosserat.

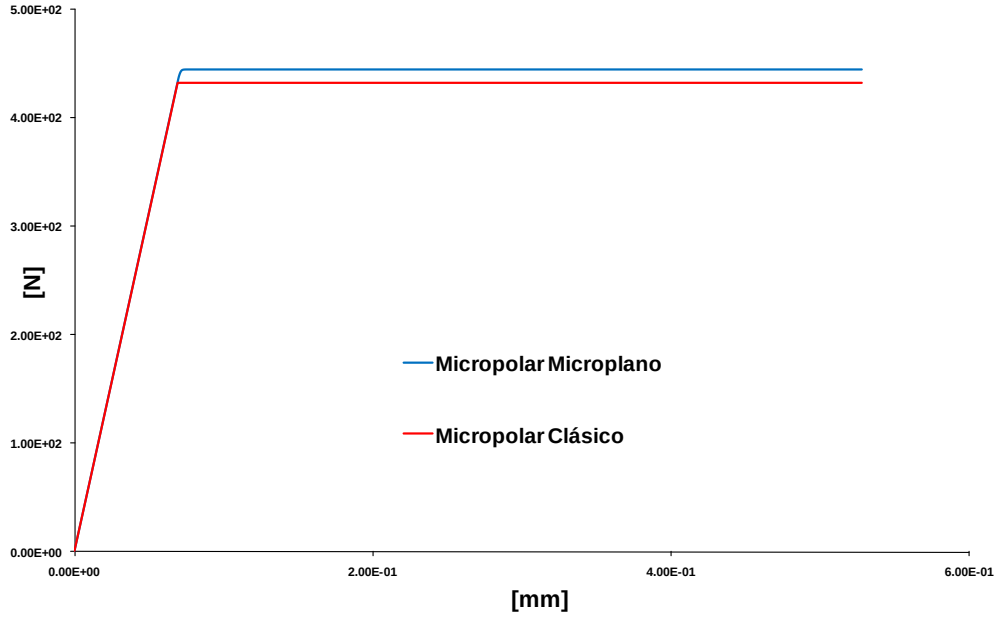


Figura 5.11. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

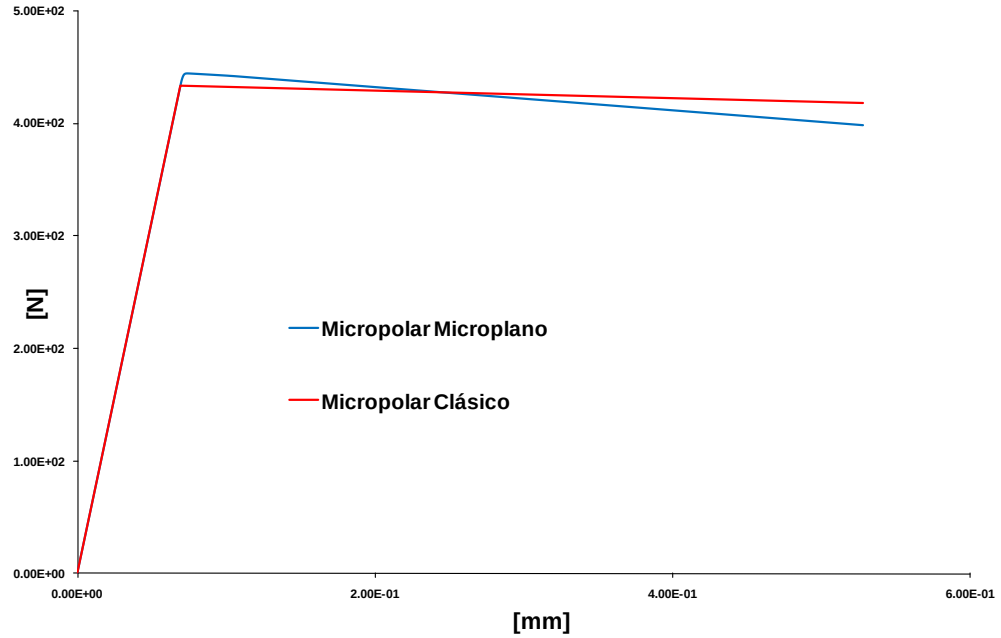


Figura 5.12. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Ablandamiento Lineal.

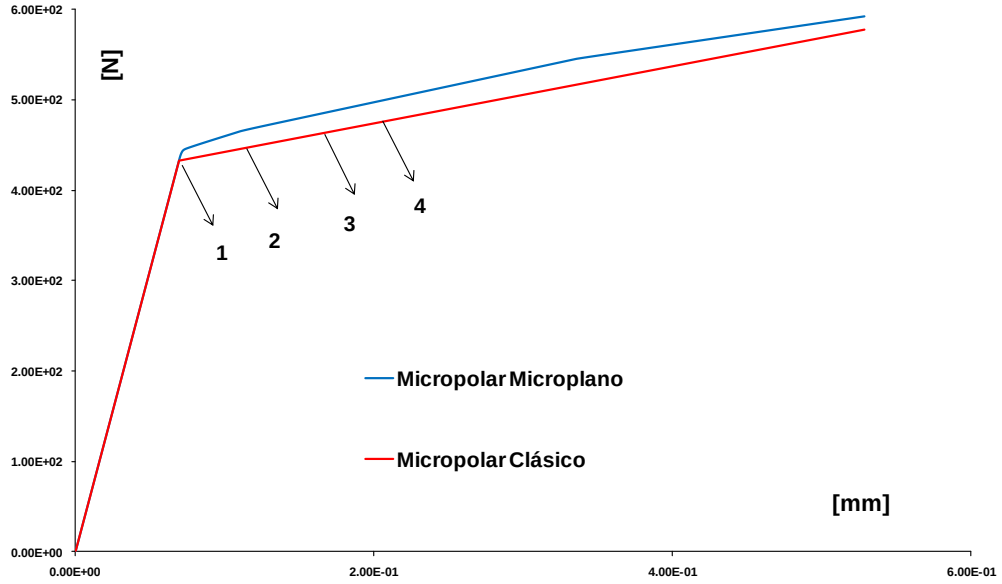


Figura 5.13. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Modelo Micropolar Clásico y Microplanos. Régimen de Endurecimiento Lineal.

En la fig. 5.14 se muestra la evolución de la plasticidad en los microplanos en que ha sido discretizada la esfera representativa del punto material. Aquí se tendrán nulos los valores de las tensiones volumétricas que integran las tensiones normales y el inicio de la plastificación estará en función de los valores de tensiones tangenciales en planos situados arriba, abajo a derecha y a izquierda, es decir a 45 grados con la normal al plano de cargas como se espera del esfuerzo de corte implementado.

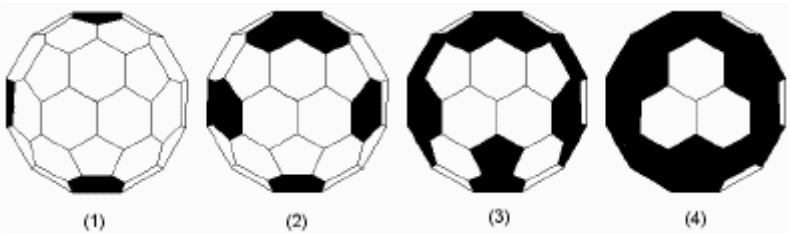


Figura 5.14 Evolución del proceso plástico en microplanos. Ensayo de corte simple.

En las fig.5.15, fig.5.16 y fig.5.17 se muestran los valores que arroja el ensayo de corte simple para las funciones de fluencia de Von Mises y Drucker Prager, y se puede observar que a la inversa del ensayo de tracción uniaxial la predicción del ensayo arroja valores de tensiones mayores para la primera formulación de plasticidad.

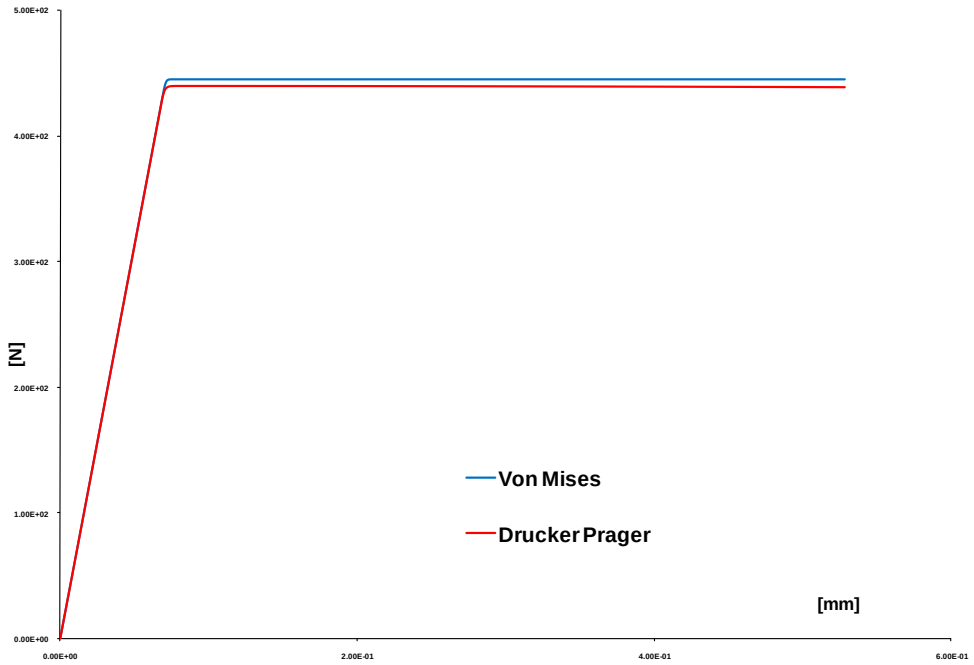


Figura 5.15. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Praguer en Microplanos. Régimen de Plasticidad Perfecta.

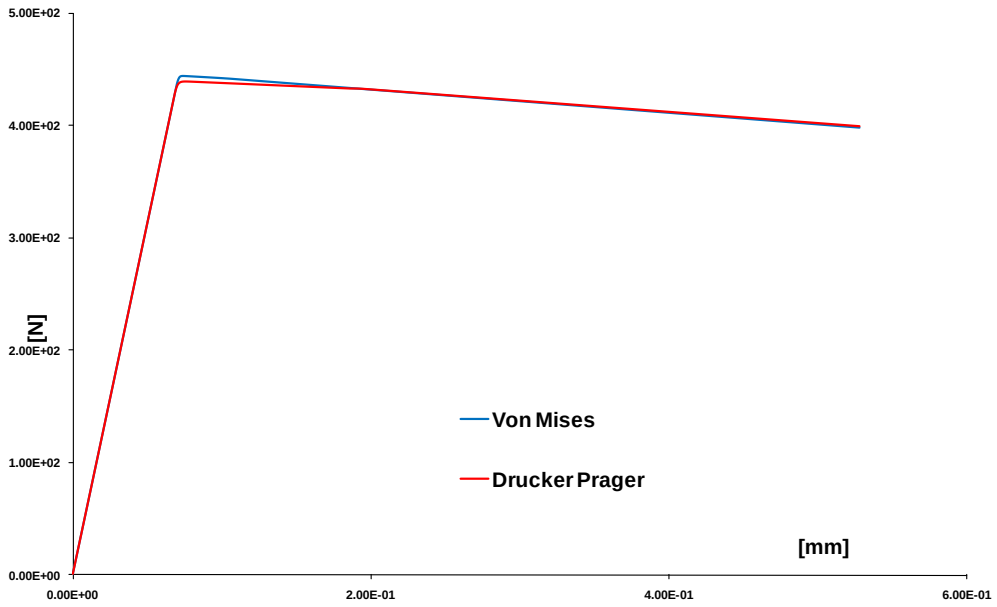


Figura 5.16. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Ablandamiento Lineal.

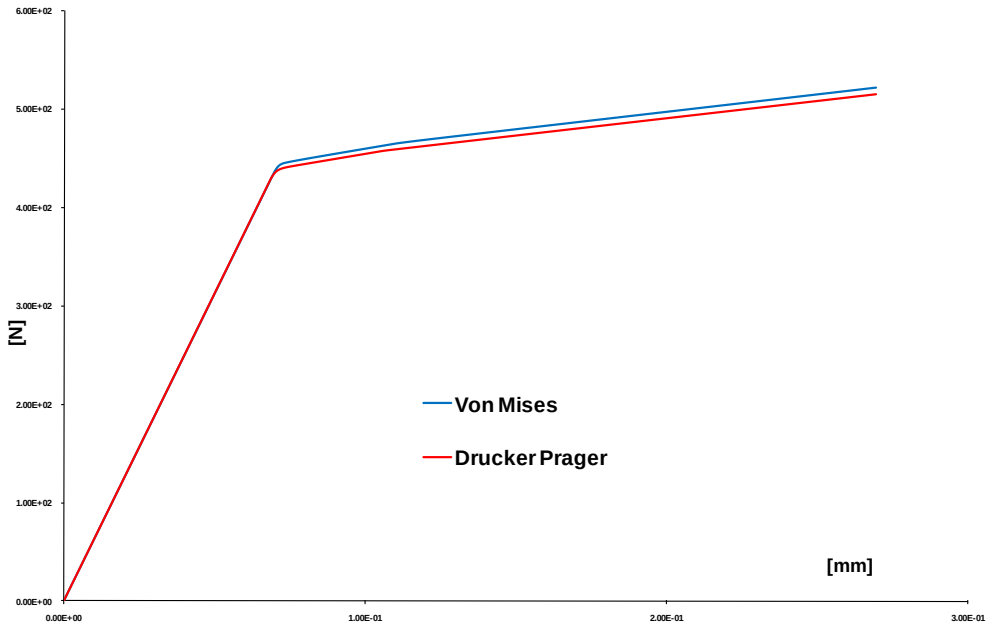


Figura 5.17. Ensayo de Corte. Estado de Deformaciones Planas. Plasticidad de Von Mises y Drucker Prager en Microplanos. Régimen de Endurecimiento Lineal.

La evaluación numérica de las dos condiciones de localización que se estudian en los modelos micropolares se muestra en la fig.5.18. En la misma se compara la localización que se obtiene en el modelo de Cosserat con plasticidad de Von Mises clásico (Modelo Macro Cosserat) con los valores de localización del Modelo de Microplanos con la misma función de fluencia integrada en la esfera discretizada en 42 direcciones.

En ella se comparan los modelos macro y microplano de Cosserat en estado de deformaciones planas. El menor valor del determinante del tensor acústico se presenta en $\alpha = 36^o$ y $\alpha = 144^o$ en ambos casos. La segunda condición de localización se cumple para $\alpha = 0^o$.

La segunda condición de localización que resulta del balance del momento de la cantidad de movimiento, se presenta de igual manera en ambos modelos, en los que la condición de falla se da en el valor $\alpha = 0^o$ que no se corresponde con el ángulo en el que se cumple la primera condición. La consideración del módulo de corte de Cosserat $Gc \neq 0$ lleva a que no se cumplan simultáneamente ambas condiciones de localización. El modo de Falla I será posible solo cuando este parámetro sea nulo, y en ausencia de momentos tensionales, solo una condición se satisface.

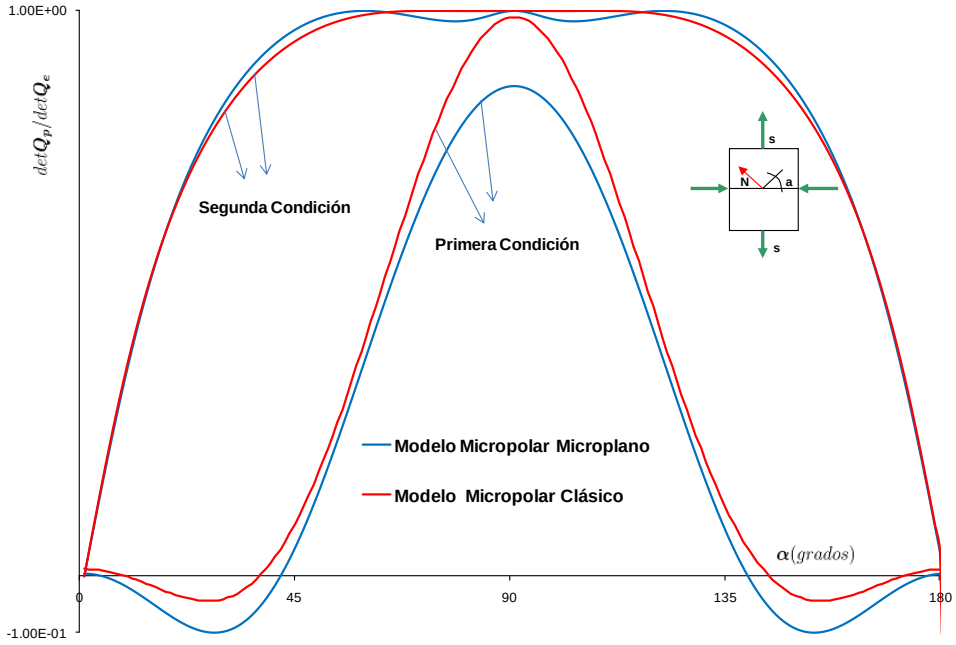


Figura 5.18. Determinante del tensor acústico del Modelo Micropolar Cásico y del Modelo Micropolar de Microplanos en corte.

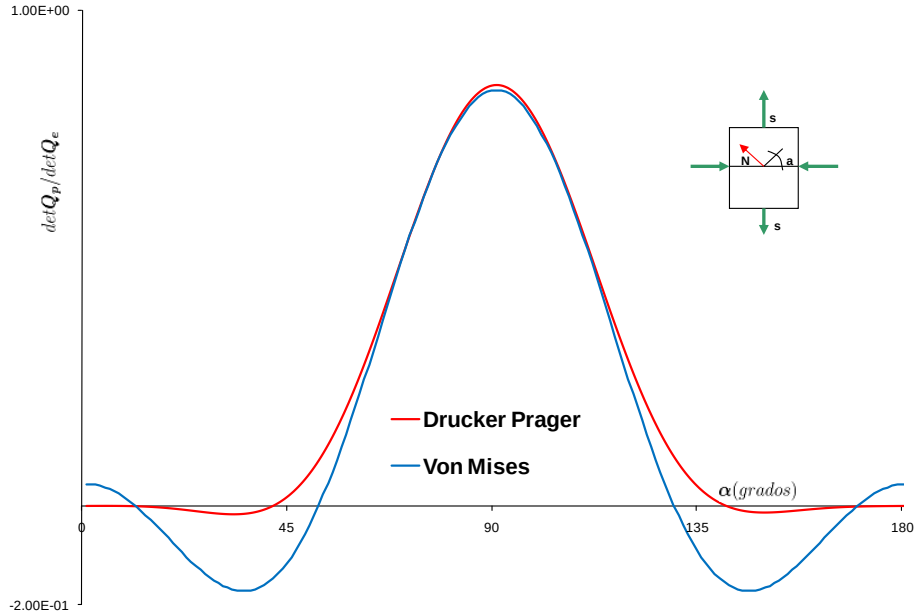


Figura 5.19. Determinante del tensor acústico del Modelo Von Mises y Drucker Prager en corte

La fig.5.18 muestra que si bien hay coincidencia de valores extremos de ambos modelos, los valores relativos son menores en el modelo de Micropolar de Microplanos cuando se evalúa la primera condición de falla.

La fig.5.19 compara el desarrollo de las dos condiciones de localización en los medios micropolares para función de plasticidad tipo Von Mises y tipo Drucker Prager. El valor mínimo del determinante del tensor acústico se presenta en el mismo ángulo en ambos modelos $\alpha = 42^o$.

5.7.- Conclusiones

En este trabajo ha sido reformulada para continuos micropolares de Cosserat elásticos e inelásticos, la aproximación termodinámicamente consistente para derivar formulaciones constitutivas de microplanos de Carol, Jirasek \- Bazant [CJB01] y por Kuhl, Steinmann, Carol [KSC01]. Como en trabajos previos, la principal suposición es la incorporación de la energía libre microscópica de Helmholtz en todos los microplanos, los cuales incluyen en el presente caso las contribuciones de los grados de libertad adicionales y la rigidez de los continuos de Cosserat, representados por las microrotaciones y los momentos tensionales. También, se considera una forma desacoplada de la energía libre en términos de las contribuciones ``membrana'' y ``viga''.

De las ecuaciones constitutivas resultantes para el modelo micropolar elástico basado en microplanos se obtiene una solución explícita para la longitud característica en términos de la relación entre el módulo de viga elástico tangencial y el módulo de corte de Cosserat. Las soluciones para el modelo micropolar elastoplástico basado en microplanos incluye la formulación explícita macroscópica del módulo constitutivo tangencial en términos de las contribuciones microscópicas. La formulación general elastoplástica del modelo micropolar basado en microplanos se ha particularizado para elastoplasticidad tipo von Mises y tipo Drucker Praguer.

Los resultados numéricos en este trabajo muestran las predicciones del modelo elastoplástico tipo *J2* para el ensayo tracción uniaxial y de corte simple, indicando también las principales diferencias con las predicciones del modelo clásico de Cosserat macroscópico elastoplástico. La teoría constitutiva propuesta permite la formulación de modelos materiales basados en diferentes y relevantes aspectos de la microestructura de los materiales de la Ingeniería. Estos exceden la capacidad del marco teórico desarrollado hasta ahora por el modelado macroscópico de comportamientos anisotrópicos de materiales heterogéneos cohesivos-friccionales como el hormigón.

Vectores de tensiones y momentos tensionales microscópicos

$$\bar{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \sigma_N.\boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}} \qquad \bar{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\mu}}} = \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{n} = \mu_N.\boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}}$$

Componentes normal y tangencial de tensiones y momentos tensionales

$$\bar{\sigma}_N = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\sigma} \quad \bar{\mu}_N = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\mu}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_T = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\sigma} \qquad \bar{\boldsymbol{\mu}}_T = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\mu}$$

Vectores de deformación y curvatura

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{n} = \epsilon_N.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}} \qquad \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}.\boldsymbol{n} = \kappa_N.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}$$

Deformaciones y curvaturas de microplanos

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{sym}} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{sym}} = \boldsymbol{T}^{sym} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} = -\boldsymbol{T} : \boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{skw}} = -\boldsymbol{T}^{skw} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\kappa_N = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\kappa}^{\boldsymbol{sym}} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\kappa}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\kappa}^{\boldsymbol{sym}} = \boldsymbol{T}^{sym} : \boldsymbol{\kappa} \qquad \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} = -\boldsymbol{T} : \boldsymbol{\kappa}^{\boldsymbol{skw}} = -\boldsymbol{T}^{skw} : \boldsymbol{\kappa}$$

Desigualdad macroscópica de Clausius-Duhem

$$D^{mac} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0$$

Tensiones y cuplas tensionales microscópicas

$$\sigma_N \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_N} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_T^{sym}} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}}$$

$$\mu_N \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_N} \qquad \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}} \qquad \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} \doteq \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}}$$

Tensores macroscópicos de tensiones y momentos tensionales

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{N}E_{\boldsymbol{Nu}}.\epsilon_{\boldsymbol{N}} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{sym}}\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{skw}}\boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}\right]d\Omega$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[\boldsymbol{N}E_{\boldsymbol{N\omega}}.\kappa_{\boldsymbol{N}} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{sym}}\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} - [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{skw}}\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}\right]d\Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega}} : \boldsymbol{\kappa}$$

Módulo constitutivo macroscópico membranal y flexional

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[E_{\boldsymbol{Nu}}\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} + [\boldsymbol{T}^{skw}]^T.\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Tu}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right]d\Omega$$

$$\boldsymbol{E}_{\omega} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\left[E_{\boldsymbol{N\omega}}\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N} + [\boldsymbol{T}^{sym}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} + [\boldsymbol{T}^{skw}]^T\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{T\omega}}^{\boldsymbol{skw}}\boldsymbol{T}^{skw}\right]d\Omega$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} = \left[\frac{3}{5}E_{\boldsymbol{Nu}} - \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}\right]\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \left[\frac{2}{5}E_{\boldsymbol{Nu}}^{symT} + \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{Tu}}^{sym}\right]\boldsymbol{I}^{sym} + E_{\boldsymbol{Tu}}^{skw}\,\boldsymbol{I}^{skw}$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega}} = \left[\frac{3}{5}E_{\boldsymbol{N\omega}} - \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}\right]\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \left[\frac{2}{5}E_{\boldsymbol{N\omega}}^{symT} + \frac{3}{5}E_{\boldsymbol{T\omega}}^{sym}\right]\boldsymbol{I}^{sym} + E_{\boldsymbol{T\omega}}^{skw}\,\boldsymbol{I}^{skw}$$

Elastoplasticidad

Deformación y curvatura total $\epsilon_{\boldsymbol{N}} = \epsilon_{\boldsymbol{Ne}} + \epsilon_{\boldsymbol{Np}} \qquad \kappa_{\boldsymbol{N}} = \kappa_{\boldsymbol{Ne}} + \kappa_{\boldsymbol{Np}}$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{sym} = \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Te}}^{sym} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{sym} \qquad \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{sym} = \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Te}}^{sym} + \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Tp}}^{sym}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{T}}^{skw} = \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Te}}^{skw} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{Tp}}^{skw} \qquad \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{T}}^{skw} = \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Te}}^{skw} + \boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{Tp}}^{skw}$$

Energía Libre de Helmholtz macroscópica y microscópica

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\Psi^{mic}\,d\Omega$$

Ley de evolución de la energía microscópica libre

$$\Psi^{mic} = \underbrace{\Psi^{mic}\left(\epsilon_N\,,\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym}\,,\boldsymbol{\epsilon}_T^{skw}\,,\boldsymbol{q_u}\right)}_{energia\,membranal} + \underbrace{\Psi^{mic}\left(\kappa_N\,,\boldsymbol{\kappa}_T^{sym}\,,\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}\,,\boldsymbol{q_\omega}\right)}_{energia\,flexional}$$

$$\Psi^{mic} = \left[\sigma_N\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\sigma_T^{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} - \boldsymbol{\sigma_T^{skw}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} +$$

$$+\left[\mu_N\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\mu_T^{sym}}.\boldsymbol{T}^{sym} - \boldsymbol{\mu_T^{skw}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - D_{\boldsymbol{u}}^{mic} - D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic}$$

Desigualdad de la disipación macroscópica

$$D^{mac} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega (D_{\boldsymbol{u}}^{mic} + D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic})d\Omega \geq 0$$

Desigualdad de la disipación microscópica

$$D^{mic} = D_{\boldsymbol{u}}^{mic} + D_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} \geq 0$$

Elasticidad

$$\Psi_{\boldsymbol{u}}^{mic} = W_{N\boldsymbol{u}}\left(\epsilon_N\right) + W_{T\boldsymbol{u}}^{sym}\left(\boldsymbol{\epsilon_T^{sym}}\right) + W_{T\boldsymbol{u}}^{skw}\left(\boldsymbol{\epsilon_T^{skw}}\right)$$

$$\Psi_{\boldsymbol{\omega}}^{mic} = W_{N\boldsymbol{\omega}}\left(\kappa_N\right) + W_{T\boldsymbol{\omega}}^{sym}\left(\boldsymbol{\kappa_T^{sym}}\right) + W_{T\boldsymbol{\omega}}^{skw}\left(\boldsymbol{\kappa_T^{skw}}\right)$$

Funciones de energía microscópica

$$W_{N\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}\epsilon_N E_{N\boldsymbol{u}}\epsilon_N \qquad W_{N\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym/skw}.\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{u}}^{sym/skw}.\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym/skw}$$

$$W_{N\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\kappa_N E_{N\boldsymbol{\omega}}\kappa_N \qquad W_{T\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}_T^{sym/skw}.\boldsymbol{E}_{T\boldsymbol{\omega}}^{sym/skw}.\boldsymbol{\kappa}_T^{sym/skw}$$

Elastoplasticidad

Deformación y curvatura total

$$\epsilon_{\boldsymbol{N}} = \epsilon_{\boldsymbol{Ne}} + \epsilon_{\boldsymbol{Np}} \qquad \kappa_{\boldsymbol{N}} = \kappa_{\boldsymbol{Ne}} + \kappa_{\boldsymbol{Np}}$$

$$\boldsymbol{\epsilon_T^{sym}} = \boldsymbol{\epsilon_{Te}^{sym}} + \boldsymbol{\epsilon_{Tp}^{sym}} \qquad \boldsymbol{\kappa_T^{sym}} = \boldsymbol{\kappa_{Te}^{sym}} + \boldsymbol{\kappa_{Tp}^{sym}}$$

$$\boldsymbol{\epsilon_T^{skw}} = \boldsymbol{\epsilon_{Te}^{skw}} + \boldsymbol{\epsilon_{Tp}^{skw}} \qquad \boldsymbol{\kappa_T^{skw}} = \boldsymbol{\kappa_{Te}^{skw}} + \boldsymbol{\kappa_{Tp}^{skw}}$$ Variables internas

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\left(\epsilon_{\boldsymbol{N}p}, \boldsymbol{\epsilon_{Tp}^{sym}}, \boldsymbol{\epsilon_{Tp}^{skw}}, \boldsymbol{\kappa_{Np}}, \boldsymbol{\kappa_{Tp}^{sym}}, \boldsymbol{\kappa_{Tp}^{skw}}, \xi^{mic}\right)$$

Energía libre microscópica

$$\Psi^{mic} = W_{\boldsymbol{Nu}}\left(\epsilon_N - \epsilon_{Np}\right) + W^{sym}_{\boldsymbol{Tu}}\left(\boldsymbol{\epsilon}^{sym}_{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{\epsilon}^{sym}_{\boldsymbol{Tp}}\right) + W^{skw}_{\boldsymbol{Tu}}\left(\boldsymbol{\epsilon}^{skw}_{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{\epsilon}^{skw}_{\boldsymbol{Tp}}\right) +$$

$$+W_{\boldsymbol{N\omega}}\left(\kappa_N - \kappa_{Np}\right) + W^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}}\left(\boldsymbol{\kappa}^{sym}_{T} - \boldsymbol{\kappa}^{sym}_{Tp}\right) + W^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}\left(\boldsymbol{\kappa}^{skw}_{T} - \boldsymbol{\kappa}^{skw}_{Tp}\right) + \int_{\Omega}^{\xi^{mic}} \phi(\xi^{mic}) d\xi^{mic}$$

Las tensiones y cuplas tensionales

$$\sigma_{\boldsymbol{N}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_{\boldsymbol{N}e}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Nu}}.\epsilon_{Ne} \qquad \boldsymbol{\sigma}^{sym}_{\boldsymbol{T}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{sym}_{\boldsymbol{T}e}} = \boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}}.\epsilon^{sym}_{\boldsymbol{T}e}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{skw}_{\boldsymbol{T}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{skw}_{\boldsymbol{T}e}} = \boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}}.\epsilon^{skw}_{\boldsymbol{T}e}$$

$$\mu_{\boldsymbol{N}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_{\boldsymbol{N}e}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{N\omega}}.\kappa_{Ne} \qquad \boldsymbol{\mu}^{sym}_{\boldsymbol{T}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{sym}_{\boldsymbol{T}e}} = \boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}}.\kappa^{sym}_{\boldsymbol{T}e}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{skw}_{\boldsymbol{T}} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{skw}_{\boldsymbol{T}e}} = \boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}.\kappa^{skw}_{\boldsymbol{T}e}$$

Desigualdad de la disipación microscópica

$$D^{mic} = \sigma_{\boldsymbol{N}}\dot{\epsilon}_{\boldsymbol{Np}} + \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{Tp}} + \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{Tp}} + \mu_{\boldsymbol{N}}\dot{\kappa}_{\boldsymbol{Np}} +$$

$$+\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{Tp}} + \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{Tp}} - \phi^{mic}\dot{\xi}^{mic} \geq 0$$

La función de fluencia puede ser definida en la forma

$$\Phi^{mic} = \varphi\left(\sigma_{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}}, \mu_{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{sym}}_{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{skw}}_{\boldsymbol{T}}\right) - \phi^{mic}\left(\dot{\xi}^{mic}\right) \leq 0$$

Gradientes

$$\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Nu}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\nu}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma^{sym}_{\boldsymbol{T}}} \qquad \boldsymbol{\nu}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma^{skw}_{\boldsymbol{T}}}$$

$$\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N\omega}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\nu}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \mu^{sym}_{\boldsymbol{T}}} \qquad \boldsymbol{\nu}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \mu^{skw}_{\boldsymbol{T}}}$$

Leyes de evolución de las deformaciones y curvaturas plásticas

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{Np}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Nu}} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{sym}_{\boldsymbol{Tp}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{skw}_{\boldsymbol{Tp}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}}$

$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{Np}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N\omega}} \qquad \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{sym}_{\boldsymbol{Tp}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}} \qquad \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{skw}_{\boldsymbol{Tp}} = \dot{\gamma}^{mic}\boldsymbol{\upsilon}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}$

$\dot{\xi}^{mic} = \dot{\gamma}^{mic}$

Las leyes de flujo en el microplano

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Nu}} \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}} \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\sigma}^{sym}_{\boldsymbol{T}}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}} \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\sigma}^{skw}_{\boldsymbol{T}}}$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N\omega}} \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\mu_{\boldsymbol{N}}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}} \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\mu}^{sym}_{\boldsymbol{T}}} \qquad \boldsymbol{\upsilon}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}} \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\mu}^{skw}_{\boldsymbol{T}}}$$

Las condiciones de carga- descarga de Kuhn-Tucker y la condición de consistencia

$\Phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}) \leq 0 \qquad \dot{\gamma}^{mic} \geq 0 \qquad \Phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}).\dot{\gamma}^{mic} = 0 \qquad \dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}).\dot{\gamma}^{mic} = 0$

El multiplicador plástico

$$\dot{\gamma}^{mic} = \frac{1}{h}\left[\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Nu}}E_{\boldsymbol{Nu}}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\nu}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{T}^{sym} + \boldsymbol{\nu}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} +$$

$$+\frac{1}{h}\left[\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N\omega}}E_{\boldsymbol{N\omega}}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\nu}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{T}^{sym} + \boldsymbol{\nu}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\kappa}}$$

$$h = H^{mic} + \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Nu}}E_{\boldsymbol{Nu}}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Nu}} + \boldsymbol{\nu}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{\upsilon}^{sym}_{\boldsymbol{Tu}} - \boldsymbol{\nu}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}}.\boldsymbol{\upsilon}^{skw}_{\boldsymbol{Tu}} +$$

$$+\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{N\omega}}E_{\boldsymbol{N\omega}}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{N\omega}} + \boldsymbol{\nu}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{\upsilon}^{sym}_{\boldsymbol{T\omega}} - \boldsymbol{\nu}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}.\boldsymbol{\upsilon}^{skw}_{\boldsymbol{T\omega}}$$

Donde $$H^{mic} = \frac{\partial\phi\left(\xi^{mic}\right)}{\partial\xi^{mic}}$$

Las ecuaciones constitutivas macroscópicas elastoplásticas pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T\\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{uu}}_{ep} & \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{u\omega}}_{ep}\\ \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\omega u}}_{ep} & \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\omega\omega}}_{ep}\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}\end{bmatrix}$$

Con los operadores elástoplásticos

$$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{uu}}_{ep} = \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{uu}}_{0} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}}\otimes\tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{u}}d\Omega \qquad \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{u\omega}}_{ep} = -\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}}\otimes\tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{\omega}}d\Omega$$

$$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\omega u}}_{ep} = -\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\omega}}\otimes\tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{u}}d\Omega \qquad \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\omega\omega}}_{ep} = \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\omega\omega}}_{0} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\omega}}\otimes\tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{\omega}}d\Omega$$

Donde los gradientes modificados se definen como

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}} = E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ni}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{Ti}}\boldsymbol{\nu}^{sym}_{\boldsymbol{Ti}}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{Ti}}\boldsymbol{\nu}^{skw}_{\boldsymbol{Ti}}\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{i}} = E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ni}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}^{sym}_{\boldsymbol{Ti}}\boldsymbol{\upsilon}^{sym}_{\boldsymbol{Ti}}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}^{skw}_{\boldsymbol{Ti}}\boldsymbol{\upsilon}^{skw}_{\boldsymbol{Ti}}\right] \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}$$

Modelo de von Mises Elastoplástico de Cosserat basado en Microplanos

Condición de fluencia

$$\Phi^{mac} = \sqrt{3.J_2} - \phi^{mac} = 0 \quad con \quad \phi^{mac} = \bar{\sigma}_y^{mac} + E_p^{mac}.\xi^{mac}$$

Segundo invariante de tensiones

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{s}^s : \boldsymbol{s}^s + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu}\right) \quad con \quad \boldsymbol{s}^s = \frac{\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^T}{2} \quad y \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3}$$

Endurecimiento lineal $\phi^{mac} = \phi_0^{mac} + H^{mac}\xi^{mac}$

Ley de evolución del parámetro de endurecimiento / ablandamiento

$$\dot{\xi}^{mac} = \sqrt{\frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{T}} + \frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{p}}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}_p} = \dot{\gamma}^{mac}$$

Condición de fluencia de von Mises microscópica

$$\Phi^{mic} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}} - \phi^{mic} \leq 0$$

Tensiones de fluencia con endurecimiento lineal

$$\phi^{mic} = \phi_0^{mac} + H^{mic}\xi^{mic}$$

Parámetro de endurecimiento/ablandamiento

$$\dot{\xi}^{mic} = \sqrt{\frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{sym}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{sym}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{skw}}.\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{skw}} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{sym}}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{sym}} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{skw}}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\boldsymbol{Tp}}^{\boldsymbol{skw}}} = \dot{\gamma}^{mic}$$

Modelo de Drucker Prager Elastoplástico de Cosserat basado en Microplanos

$$\Phi^{mac} = \alpha^{mac}I_1 + \sqrt{3.J_2} - \phi^{mac} = 0 \quad con \quad \phi^{mac} = \bar{\sigma}_y^{mac} + E_p^{mac}.\xi^{mac}$$

Primer invariante de tensiones

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = tr[\boldsymbol{\sigma}]$$

Angulo de fricción y tensión de fluencia

$$\alpha^{mac} = \frac{f_c - f_t}{3} \qquad \bar{\sigma}_y^{mac} = \frac{f_c.f_t}{3}$$

Condición de fluencia en el microplano

$$\Phi^{mic} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}}.\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{sym}} + \frac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}.\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{skw}}} +$$

$$+\alpha^{mic}\left(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{N}} + \tfrac{1}{l_c^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{N}}\right) - \phi^{mic} \leq 0$$

Análisis de Falla Difusa

Primera condición de localización

$$det(\boldsymbol{Q}_{ep}) = det \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} & \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} \\ \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} & \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{uu}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{uu}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega \qquad \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{u\omega}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{u\omega}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega$$

$$\boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega u}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{\omega u}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega \qquad \boldsymbol{Q}_{ep}^{\boldsymbol{\omega\omega}} = \boldsymbol{Q}_{0}^{\boldsymbol{\omega\omega}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{n}} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{m}} d\Omega$$

Gradientes modificados

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{N}.\left[E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ni}}.\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right) - \boldsymbol{T}^{skw}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right)\right].\boldsymbol{N}$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{N}.\left[E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ni}}.\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right) - \boldsymbol{T}^{skw}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right)\right].\boldsymbol{N}$$

$$con \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}$$

Segunda condición de localización

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{u}} = \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\dot{\gamma}^{mic}\, d\Omega\, \boldsymbol{e} : \left[\boldsymbol{E}_{0}^{\boldsymbol{uu}} - \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{u}}\, d\Omega\right] : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{u}})$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\omega}} == \frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\dot{\gamma}^{mic}\, d\Omega\, \boldsymbol{e} : \left[-\frac{3}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{\omega}}\, d\Omega\right] : (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\omega}})$$

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}} = E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ni}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{i}} = E_{\boldsymbol{Ni}}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ni}} + \boldsymbol{T}^{sym}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{sym}\right] - \boldsymbol{T}^{skw}\left[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{Ti}}^{skw}\right] \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}$$

CAPITULO 6

Implementación Numérica y Análisis de Problemas de Valores de Borde con el Modelo Macroscópico Basado en Teoría Micropolar

En relación al Modelo Extendido de Leon Micropolar, se presentan en este capítulo los algoritmos numéricos que son considerados e implementados para la integración de las tensiones en el marco del Método de los Elementos Finitos.

Asimismo se calibran las funciones de endurecimiento y ablandamiento del Modelo Extendido de Leon Micropolar.

Se presentan también las predicciones numéricas del Modelo y se efectúa el análisis de la capacidad regularizadora de los continuos micropolares.

La implementación numérica tiene un rol muy importante en el desarrollo y la aplicación de los modelos constitutivos. La formulación de esta implementación está basada en el cumplimiento de la condición de consistencia elastoplástica en forma incremental, donde las variables de estado internas son función solo del incremento de las deformaciones plásticas [Ets92] [Jer94], [VMi84], [VGe95], y el última instancia, del parámetro plástico.

En el análisis de Elementos Finitos [AM88], [Bat86], [ZT94], [Hug87] usando elementos isoparamétricos, las ecuaciones constitutivas se integran en puntos de evaluación de tensiones, llamados puntos de Gauss. En cada paso los

incrementos de deformación son dados o conocidos y las incógnitas son las tensiones resultantes y la variación de las variables plásticas.

6.1.- Introducción

Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones constitutivas elastoplásticas son ecuaciones diferenciales con valores iniciales o “de borde” conocidos.

El resolver el problema de la integración de las ecuaciones constitutivas debe enmarcarse en el cumplimiento de la condición de consistencia plástica.

Dada la complejidad de las ecuaciones constitutivas la integración debe hacerse en forma numérica, lo cual conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que pueden resolverse con algoritmos de tipo Newton.

Los algoritmos de integración numérica pueden ser de paso simple o múltiple, los que a su vez pueden ser subdivididos en métodos implícitos o explícitos. Los conceptos fundamentales de la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que describen el problema elastoplástico son la consistencia, la estabilidad numérica, la convergencia y la consistencia incremental plástica [Piv01]:

1. Consistencia: El problema está caracterizado por la ecuación de campo

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})) \quad con \quad \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi_0}) = \boldsymbol{\Sigma}_0 \tag{6.1}$$

La relación calculada con un método de paso simple

$$\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}^n + \Delta\, t\, \phi(\boldsymbol{\xi}^n, \boldsymbol{\Sigma^n}, \Delta t) \tag{6.2}$$

Este método es consistente con la ecuación diferencial fundamental

$$lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}^n}{\Delta t} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\xi}^n) = \phi(\boldsymbol{\xi}^n,\, \boldsymbol{\Sigma}^n,\, \Delta\, t) = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})) \tag{6.3}$$

Entonces cuando $\Delta t \to 0$ el algoritmo de integración numérica resulta igual a la ecuación diferencial.

2. Convergencia

El error de convergencia $\Delta\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}$ es definido como la diferencia entre el valor aproximado de la tensión en el paso $n+1$ y el valor exacto de la misma

$$\Delta\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{ex}}(\boldsymbol{t^{n+1}}) \tag{6.4}$$

Un método de discretización es llamado convergente si cumple

$$\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}\| \to 0 \quad cuando \quad \Delta t \to 0 \tag{6.5}$$

con Δt el paso de tiempo entre $\boldsymbol{\Sigma}^{n}$ y $\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}$.

Se denomina convergente de orden *p* si

$$\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}\| = \mathcal{O}(t^p) \tag{6.6}$$

3. Estabilidad numérica

Se requiere además que el efecto global de los errores locales permanezca limitado uniformemente para la condición $\Delta t \to 0$. Esto se denomina estabilidad del esquema de discretización. El análisis de la precisión y estabilidad de las relaciones constitutivas elastoplásticas fue realizado por Ortiz y Popov [OP84]:

La principal diferencia entre los métodos explícitos e implícitos es su comportamiento estable. Mientras los métodos implícitos son incondicionalmente estables independientemente del tamaño del paso Δt, la estabilidad numérica de los métodos explícitos depende fuertemente del tamaño del paso.

4. Consistencia Plástica Incremental

La solución de la ecuación diferencial elastoplástica juntamente con el cumplimiento del criterio de fluencia, resulta en un problema analítico no lineal. La forma incremental de la condición de consistencia puede escribirse como

$$\Delta f^{n+1} = 0 \tag{6.7}$$

La estabilidad numérica y exactitud de los diferentes esquemas de integración han sido investigados por ejemplo por Ortiz y Popov [OP84] y Runesson et al. [RSW88].

La implementación computacional de los modelos elastoplásticos requiere una integración numérica apropiada de las ecuaciones diferenciales fundamentales.

6.2.- Relaciones Constitutivas Incrementales

La ecuación incremental de la relación constituva elastoplástica, ec.(2.115)

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{ep}^{uu} & \boldsymbol{E}_{ep}^{u\omega} \\ \boldsymbol{E}_{ep}^{\omega u} & \boldsymbol{E}_{ep}^{\omega\omega} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix}$$

aplicando un método de paso simple se convierte en

$$\Delta\boldsymbol{\Sigma} = \int_{\Delta t} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}\, dt \tag{6.8}$$

La integración de la ley constitutiva elastoplástica conduce a la relación incremental constitutiva, con $\boldsymbol{\upsilon}$ gradientes de la función de potencial plástico ec.(2.110)

$$\Delta\boldsymbol{\Sigma} = \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\xi}}\, dt - \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{p}}\, dt = \boldsymbol{E} : \Delta\boldsymbol{\xi} - \Delta\lambda\, \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\upsilon} \tag{6.9}$$

En el instante de tiempo t^{n+1}

$$\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{tr}^{n+1} - \Delta\lambda^{n+1}\, \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\upsilon} \tag{6.10}$$

Con el valor del tensor de tensión de prueba elástica

$$\boldsymbol{\Sigma}_{tr}^{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}^{n} + \boldsymbol{E} : \Delta\boldsymbol{\xi}^{n+1} \tag{6.11}$$

La ec.(6.10) representa el esquema predictor elástico – corrector plástico, que es consistente con la estructura aditiva de la ley constitutiva. En el caso de carga plástica, el parámetro de consistencia plástica incremental $\Delta\lambda^{n+1}$ se obtiene de la condición $f(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}, \boldsymbol{q}^{n+1}) = 0$

De la elección del instante de tiempo para los gradientes de potencial $\boldsymbol{\upsilon}$, el método de integración será explícito o implícito. El método explícito “Foward Euler” se plantea en general, de tres maneras [Piv01]

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}(\boldsymbol{\Sigma}^{n}, \boldsymbol{q}^{n}) \tag{6.12}$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}(\boldsymbol{\Sigma}_{tr}^{n+1}, \boldsymbol{q}^{n}) \tag{6.13}$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}(\boldsymbol{\Sigma}_{tr}^{n+\alpha}, \boldsymbol{q}^{n}) \tag{6.14}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$ y $f(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q}) = 0$

En consecuencia se pueden establecer tres formas típicas de métodos explícitos

- Método de Retorno de Euler Backward Euler Method

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}, \boldsymbol{q}^{n+1}) \tag{6.15}$$

- Regla del punto medio generalizada

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}(\boldsymbol{\Sigma}^{n+\alpha}, \boldsymbol{q}^{n+\alpha}) \tag{6.16}$$

- Regla del trapecio medio generalizada

$$\boldsymbol{v} = \alpha\, \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}, \boldsymbol{q}^{n+1}) + (1-\alpha)\, \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{\Sigma}^{n}, \boldsymbol{q}^{n}) \tag{6.17}$$

Debido a su pobre estabilidad numérica los métodos explícitos se usan poco en la plasticidad computacional. El esquema de integración más utilizado es el Método “Backward Euler”. El esquema predictor corrector, llamado algoritmo de retorno maperado (RMA) o algoritmo de proyección de punto cerrado (Closest Point Proyection Algorithm, CPPA) [RSW88], que es una variante del método anterior propuesto por Simo y Taylor [ST86], el cual se usa para aplicaciones de ingeniería caracterizadas por grandes incrementos de carga. Este método conduce a un sistema de ecuaciones no lineales que se resuelven en general por el Método de Newton que presenta la ventaja de su convergencia cuadrática.

Son de gran importancia en la resolución de los problemas de sistemas de ecuaciones no lineales, la robustez y tasa de convergencia de los algoritmos que involucra. En elastoplasticidad los principales parámetros que gobiernan la estructura matemática del sistema de ecuaciones son la curvatura de la superficie de fluencia, la regla de potencial plástico y las leyes de endurecimiento – ablandamiento [PW03].

6.3.- Método de Proyección al Punto mas Cercano

6.3.1. CPPM en el Espacio de Tensiones

Este procedimiento consiste en la formulación del Variacional de la regla de flujo basado en el principio de máxima disipación plástica

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^{'}) : \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{p}} \geq 0 \quad ,\forall\ \boldsymbol{\Sigma}^{'} \in B\{\boldsymbol{q}\ \} \tag{6.18}$$

$B\{\boldsymbol{q}\ \}$ define la zona convexa de tensiones admisibles

$$B\{\boldsymbol{q}\ \} = \{\boldsymbol{\Sigma}/F(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q}) \leq 0\ \} \tag{6.19}$$

El aumento de la deformación plástica en el momento $t+1$

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_p = \Delta\boldsymbol{\xi}^{n+1} - \Delta\boldsymbol{\xi}_e^{n+1} = \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{\Sigma}_e^{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) \tag{6.20}$$

Donde $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}^{-1}$ es el tensor de flexibilidad elástico y $\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}$ el estado de tensión, que debe satisfacer la condición de fluencia.

Reemplazando la ec.(6.20) en la forma incremental de la ec.(6.18), se obtiene la desigualdad variacional

$$(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}^{'}) : \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{\Sigma}_e^{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}^{n+1}) \geq 0 \quad ,\forall\ \boldsymbol{\Sigma}^{'} \in B\{\boldsymbol{q}^{n+1}\} \tag{6.21}$$

Esta desigualdad resultante que se deriva del Principio de la Máxima Disipación Plástica, contiene a la convexidad de la superficie de fluencia en el espacio de tensiones. La fig.6.1 muestra el CPPM en el Espacio de Tensiones.

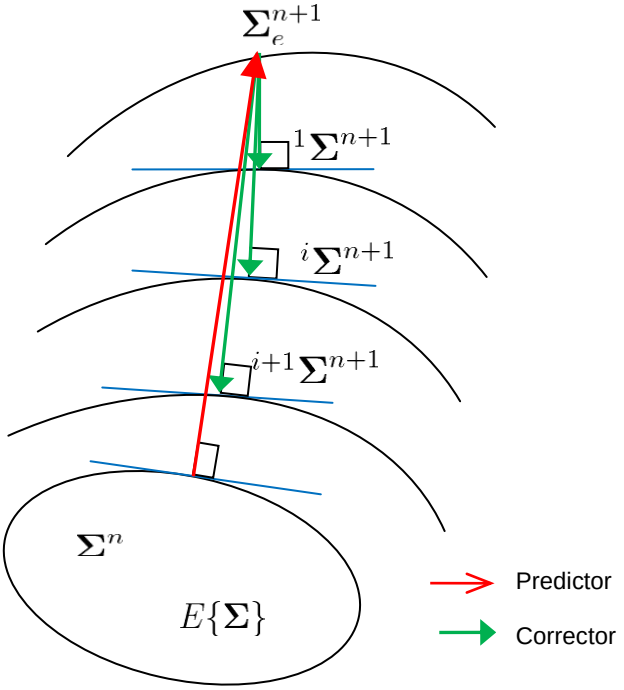


Figura 6.1.- Interpretación geométrica del esquema Predictor – Corrector

En cada iteración la restricción es linealizada para hallar la intersección con $F = 0$. La iteración siguiente $i+1$, ${}^{i+1}F^{n+1}$, corresponde al punto mas cercano al estado alcanzado en la iteración previa i, en la métrica definida por el operador $\boldsymbol{C}$. Se efectúa la proyección de tensiones mediante la norma euclideana, lo que es equivalente a la solución del problema de minimización clásico

$$min\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Sigma}) = 0 \tag{6.22}$$

con la restricción

$$F(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}, \boldsymbol{q}^{n+1}) = 0 \tag{6.23}$$

donde la energía

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_e^{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}) : \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{\Sigma}_e^{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}) \rightarrow min \tag{6.24}$$

La solución de la ec.(6.5), se obtiene como la proyección de la tensión de prueba $\boldsymbol{\Sigma}_e^{n+1}$ sobre $B\{\boldsymbol{q}^{n+1}\}$, de manera que la tensión necesaria $\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}$ es la solución al problema de la ec.(6.22).

La generalización de estas condiciones para flujo no asociado, [RSW88], introduce un tensor de transformación $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{q})$, cuya inversa se define como

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{A}^{-1} : \boldsymbol{\nu} \tag{6.25}$$

La aplicación del tensor de transformación conduce al tensor de flexibilidad modificado

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{C} \tag{6.26}$$

De este modo la ec.(6.21) y el problema de minimización de la ec.(6.24), con la métrica de la energía modificada, conduce al tensor de flexibilidad modificado, que será igual al tensor de cuarto orden $\boldsymbol{I}$ en el caso de flujo asociado.

6.3.2.- Implementación Numérica

La solución del sistema de ecuaciones en el Modelo Extendido de Leon se efectúa mediante el Método de Newton Raphson con dirección constante, en el cual no se actualiza la dirección del flujo plástico cuando se proyectan las tensiones.

Las ecuaciones de evolución de las deformaciones plásticas de la ec.(2.108)

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{p}}{}^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{p}}{}^{n} = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda}\, \boldsymbol{\upsilon}\, dt \tag{6.27}$$

El incremento de las tensiones y momentos tensionales de obtiene por las integrales

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\Sigma} = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}\, dt = \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{E}_0 : \dot{\boldsymbol{\xi}}\, dt - \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{E}_0 : \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{p}}\, dt = \\ = \boldsymbol{E}_0 : \Delta\boldsymbol{\xi} - \Delta\lambda\, \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{\upsilon}\end{aligned} \tag{6.28}$$

de modo que en el paso $n+1$ se proyecta un valor de tensión elástica de prueba [DS84], [dBM92] [Gun58] con valor

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{n+1}} = \boldsymbol{\Sigma}^{n} + \boldsymbol{E}_0 \Delta\, \boldsymbol{\xi} \tag{6.29}$$

que se corrige luego descontando el valor del corrector plástico, de modo que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{n+1}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{n+1}} - \Delta\lambda\, \boldsymbol{E}_0\, \Delta\, \boldsymbol{\xi} \tag{6.30}$$

Para obtener el valor actualizado de las variables de estado se utiliza el algoritmo de iteración de Newton Raphson. Con este, el valor de $\Delta\lambda$ en el punto j para el paso $n+1$ en la iteración $i+1$ tiene la forma

$$\left[{}^{i+1}\Delta\lambda^{n+1}\right]_j = \left[{}^{i}\Delta\lambda^{n+1}\right]_j - \left[\frac{F({}^{i}\Delta\lambda^{n+1})}{{}^{i}g^{n+1}}\right]_j \tag{6.31}$$

con

$$g = \frac{\partial F(\Delta\lambda)}{\partial\Delta\lambda} = \boldsymbol{\nu}\,\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\lambda} + \left[\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial c}\right]\frac{\partial c}{\partial k_f}\frac{\partial k_f}{\partial\Delta\lambda} \tag{6.32}$$

en régimen de ablandamiento y

$$g = \frac{\partial F(\Delta\lambda)}{\partial\Delta\lambda} = \boldsymbol{\nu}\,\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\lambda} + \left[\frac{\partial F}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial k_h}\frac{\partial k_h}{\partial\Delta\lambda}\right] \tag{6.33}$$

en régimen de endurecimiento.

Las iteraciones se interrumpen cuando se verifica la tolerancia dada por

$$\left[\frac{\|{}^{i+1}\Delta\lambda^{n+1} -^{i} \Delta\lambda^{n+1}\|}{\|{}^{i+1}\Delta\lambda^{n+1}\|}\right]_j < tol \tag{6.34}$$

La expresión de las tensiones y momentos tensionales en el punto $n+1$ para la iteración $i+1$ se expresa como

$$\left[{}^{i+1}\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}\right]_j = \boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{\Delta\xi}^{\boldsymbol{n+1}} - \left[{}^{i+1}\Delta\lambda^{n+1}\boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{\upsilon}^{n+1}\right]_j \tag{6.35}$$

La condición de consistencia se verifica cuando se cumple

$$\Delta F^{n+1} = 0 \tag{6.36}$$

La forma diferencial de esta condición de consistencia es

$$dF|^{n+1} = \left[\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}\, d\boldsymbol{\Sigma} + \frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{q}}\, d\boldsymbol{q}\right]^{n+1} = \left[\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}\, d\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}} : d\lambda\right]^{n+1} = 0 \tag{6.37}$$

6.4- Calibración del Modelo Micropolar

A los fines de analizar varios aspectos del modelo macroscópico de hormigón propuesto en el capítulo 4, se tienen en cuenta varios ensayos o caminos de tensiones. En primer término se analiza la predicción de la respuesta de ablandamiento obtenida en el Modelo Extendido de Leon Micropolar,

comparando los resultados con los obtenidos en el Modelo Extendido de Leon Clásico.

El segundo término se comparan las predicciones de respuesta mecánica de hormigones obtenida con el Modelo Extendido de Leon Micropolar respecto a resultados experimentales.

En la parte final de este capítulo se implementa el modelo en códigos de elementos finitos para evaluar numéricamente la falla del hormigón bajo distintos escenarios de carga y analizar los resultados obtenidos y la dependencia de ellos con la forma y tamaño de los elementos usados.

6.4.1.- Régimen de Endurecimiento - Ablandamiento

Para la implementación numérica del modelo se asume un campo uniforme de tensiones y deformaciones de modo que la respuesta constitutiva del espécimen de hormigón puede ser evaluada en un único punto material. Se desarrollan pequeños incrementos de desplazamiento a los fines de minimizar errores numéricos en los procesos de integración de tensiones.

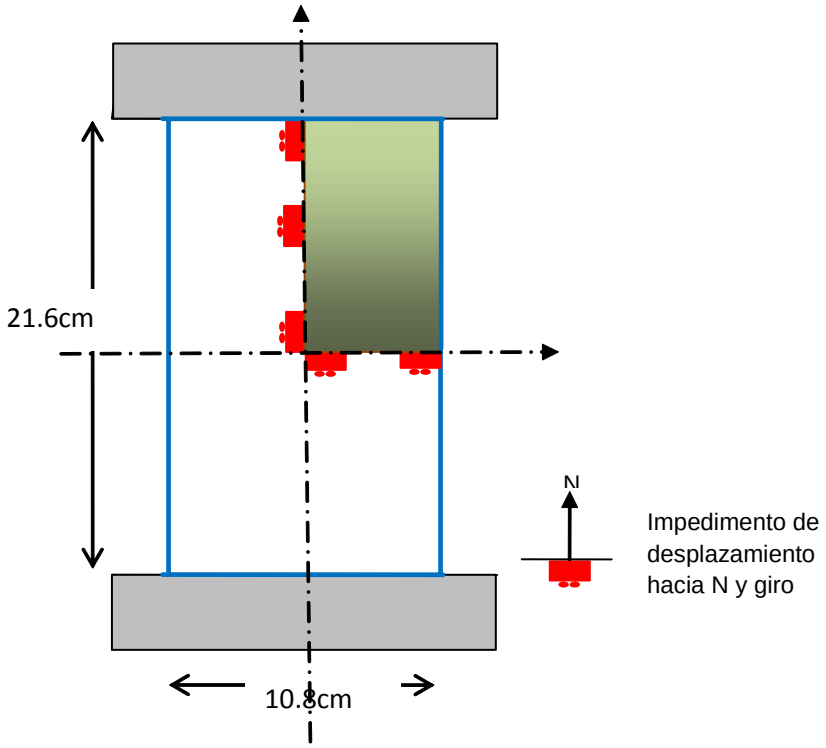


Figura 6.2. Esquema del ensayo uniaxial de compresión y tracción

La fig. 6.2 muestra el esquema del ensayo, las condiciones de borde utilizadas y las dimensiones de la pieza, cuyo espesor se considera unitario.

El espécimen de hormigón se discretiza en un cuarto de su dimensión debido a las características de doble simetría geométrica que presenta el problema y al uso de elementos axialsimétricos.

Los análisis en esta sección se realizan en el estado plano de deformaciones aplicando desplazamientos axiales en los nodos superiores. Las condiciones de borde consideradas corresponden a apoyos móviles con dispositivos que impiden los giros en ciertos puntos del contorno y son homogéneas. La doble simetría del problema es reproducida mediante apoyos móviles e impedimentos de giros en el lateral vertical izquierdo y horizontal inferior del cuarto de probeta sombreado de la fig.6.2.

En los casos de compresión con confinamiento, este se implementa con un estado previo de carga de compresión que se aplica sobre el borde lateral derecho.

Las constantes materiales del hormigón se indican en la tabla 6.1.

Módulo de Elasticidad Longitudinal	$E = 19305.3 MPa$
Coeficiente de Poisson	$\nu = 0.2$
Tensión máxima de compresión	$f_c = 22.063 MPa$
Tensión máxima de tracción	$f_t = 2.758 MPa$
Apertura de fisura máxima	$u_r = 0.0127 cm$
Separación de fisuras de tracción	$h_t = 10.795\, cm$
Longitud característica de Cosserat	$0.45\, cm < l_c < 5.5\, cm$

Tabla 6.1. Parámetros Materiales

Las constantes calibradas para las ec.(4.10), ec.(4.15) y ec.(4.27) [Ets92] se incluyen en la tabla 6.2.

A_h	-0.000425
B_h	-0.004950
C_h	0.000212
A_f	12.517168
B_f	23.753470
D	$8.675 + 5.115\, e^{5.(1-h)}$
E	$-14.956 + 6.726\, e^{5.(1-h)}$
F	-6.3

Tabla 6.2. Parámetros de las funciones internas

6.4.2.-Evaluación de la Predicción del Comportamiento del Hormigón en Régimen de Endurecimiento - Ablandamiento

En esta sección se presentan los análisis numéricos desarrollados con el modelo, tanto en régimen de endurecimiento y como de ablandamiento.

Las predicciones del modelo son comparadas con resultados de ensayos experimentales efectuados por Hulburt [Hul85], realizados sobre probetas cilíndricas en una celda de Hoek para ensayos triaxiales y con los ensayos efectuados por Xiaobin Lu, en probetas de hormigón de alta resistencia. [Lu05]

El Modelo de Leon Micropolar se implementa en condición de flujo no asociado con la función de potencial descripta en la ec.(4.14). La condición de no asociatividad reduce la excesiva dilatancia volumétrica que predice la regla de flujo asociado.

La predicción de los ensayos triaxiales que se grafican en las fig.6.4, fig.6.5 y fig.6.6, muestran las predicciones del modelo en el punto material juntamente con los resultados experimentales de Hulburt y se lleva adelante con diferentes niveles de tensión de confinamiento, desde el valor de $\sigma_x = -0.69\,MPa$ al de $\sigma_x = -13.79\,MPa$.

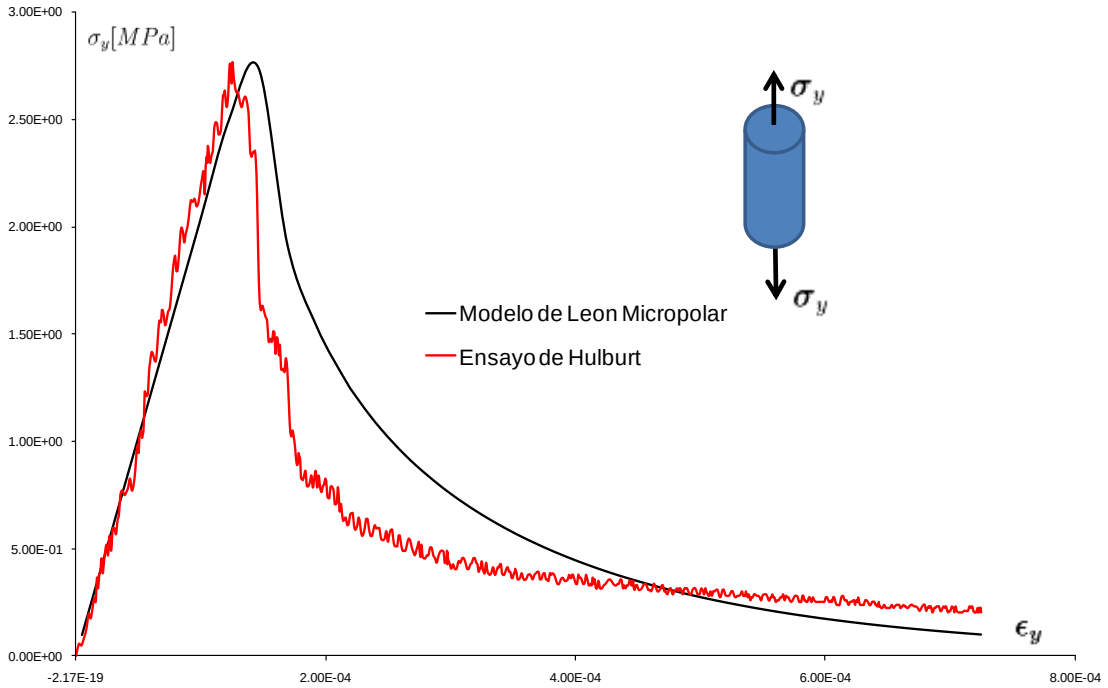


Figura 6.3.- Ensayo de tracción uniaxial en estado cilíndrico de tensiones. Comparación con ensayo de Hulburt. [Hul85]

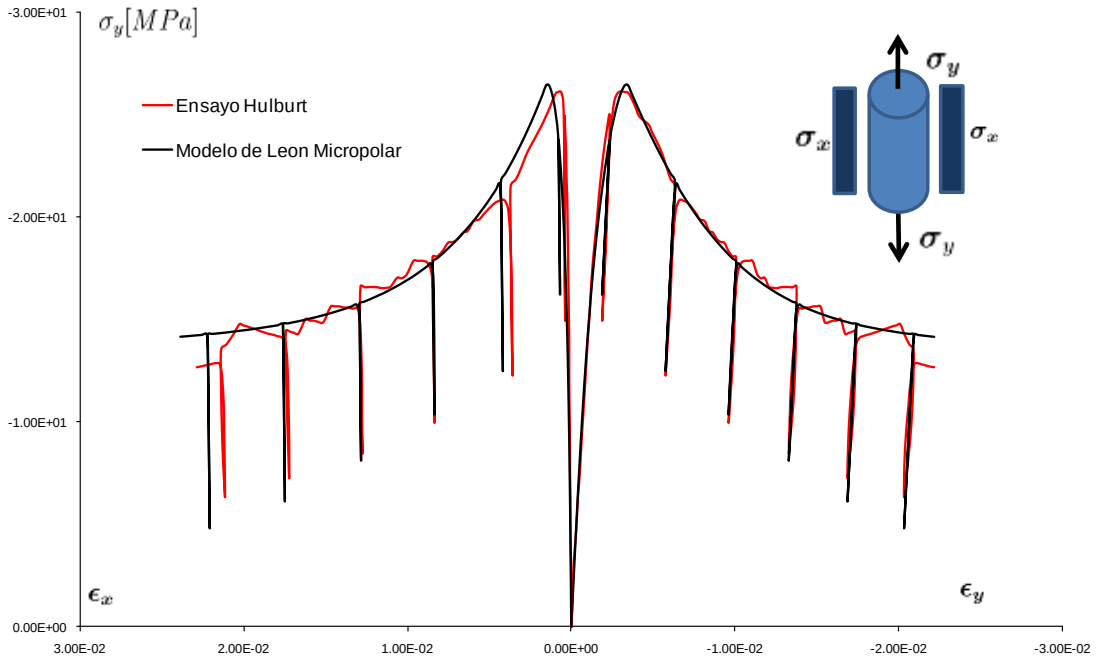


Figura 6.4.- Ensayo de compresión triaxial con bajo confinamiento $\sigma_x = -0.69\,MPa$. Comparación con ensayo de Hulburt

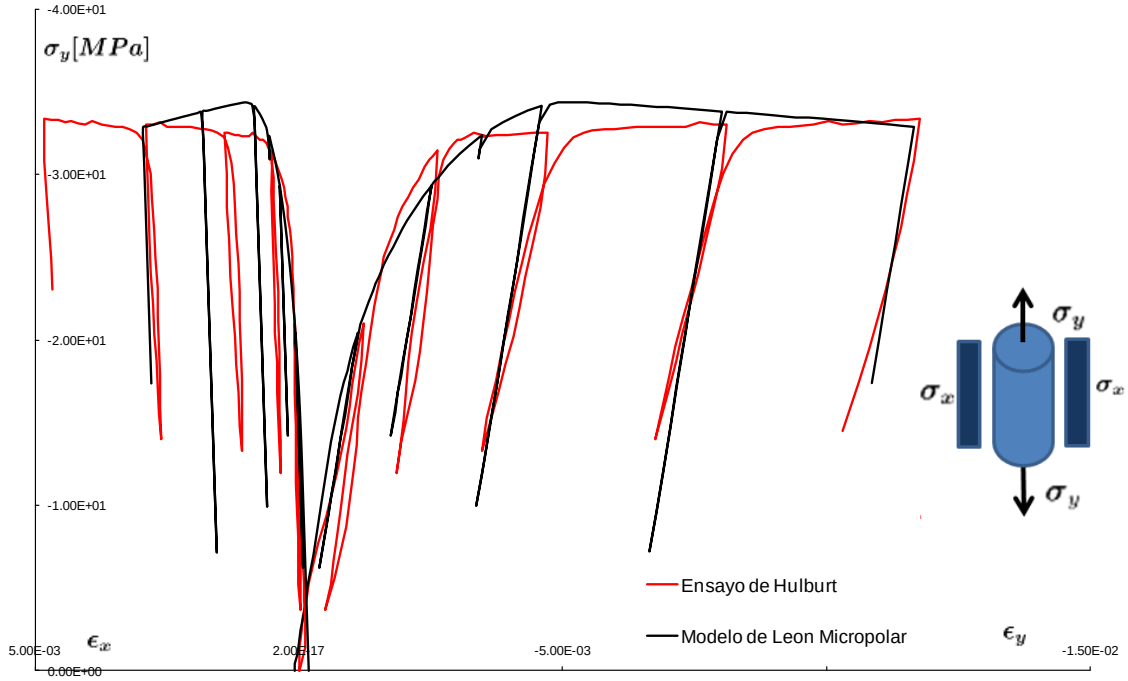


Figura 6.5.- Ensayo de compresión triaxial con confinamiento medio $\sigma_x = -3.44\,MPa$. Comparación con ensayo de Hulburt

En las figuras se ve que el Modelo de Leon Micropolar puede reproducir variaciones del comportamiento del hormigón para estos escenarios de tensiones. El ensayo de Hurbult se efectúa con incrementos de carga y descarga en compresión con confinamiento, que son reproducidos por el

Modelo de Leon Micropolar con una muy buena aproximación a las curvas experimentales.

En particular el ensayo de tracción y el de compresión con confinamiento $\sigma_x = -0.69\,MPa$ muestran un alto grado de ajuste, mientras que para valores de confinamiento mayores los resultados son menos cercanos a los valores del experimento.

Se ve que el modelo puede reproducir la variación de la respuesta del material ante los aumentos de la presión de confinamiento, y muestra ablandamiento para presiones menores, cuando la presión de confinamiento varía entre $\sigma_x = -0.69\,MPa$ y $\sigma_x = -3.44\,MPa$, y endurecimiento para valores de $\sigma_x = -13.79\,MPa$.

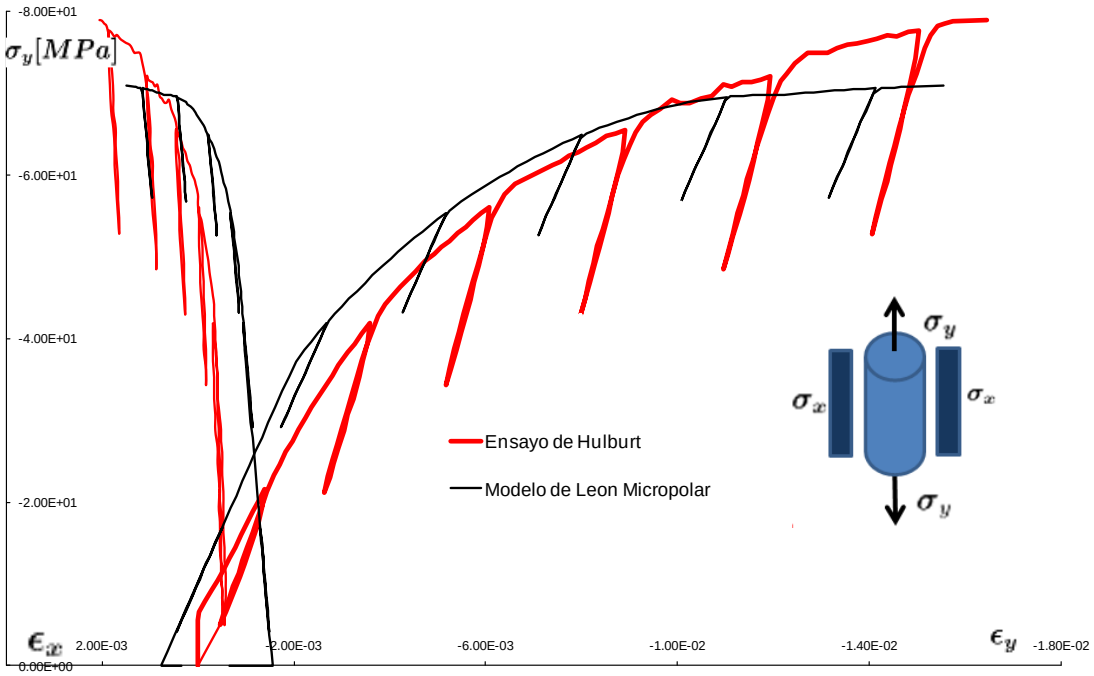


Figura 6.6.- Ensayo de compresión triaxial con alto confinamiento $\sigma_x = -13.79\,MPa$. Comparación con ensayo de Hulburt

En las fig.6.7, fig.6.8, fig.6.9 y fig.6.10, se comparan los resultados experimentales de Xiaobin Lu (2005) [Lu05] con los valores calculados con el modelo. Los ensayos corresponden a compresiones triaxiales con confinamiento creciente. Se incluye el ensayo de compresión simple en a fig. 6.7.

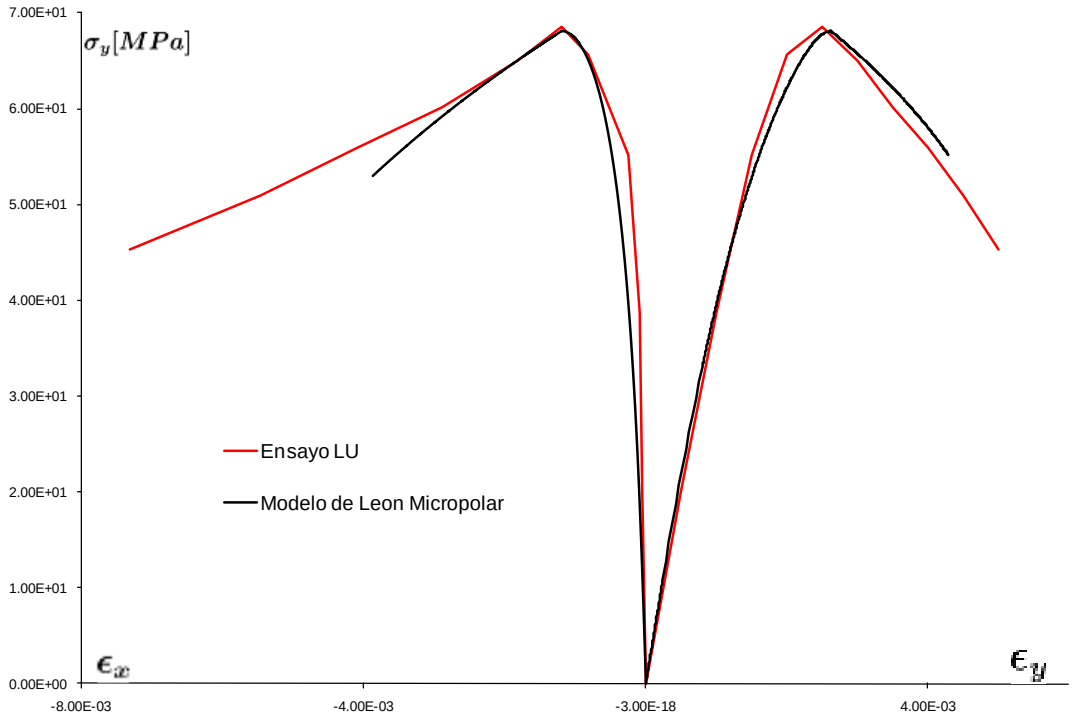


Figura 6.7.- Compresión Simple. Ensayo de Lu. [Lu05]

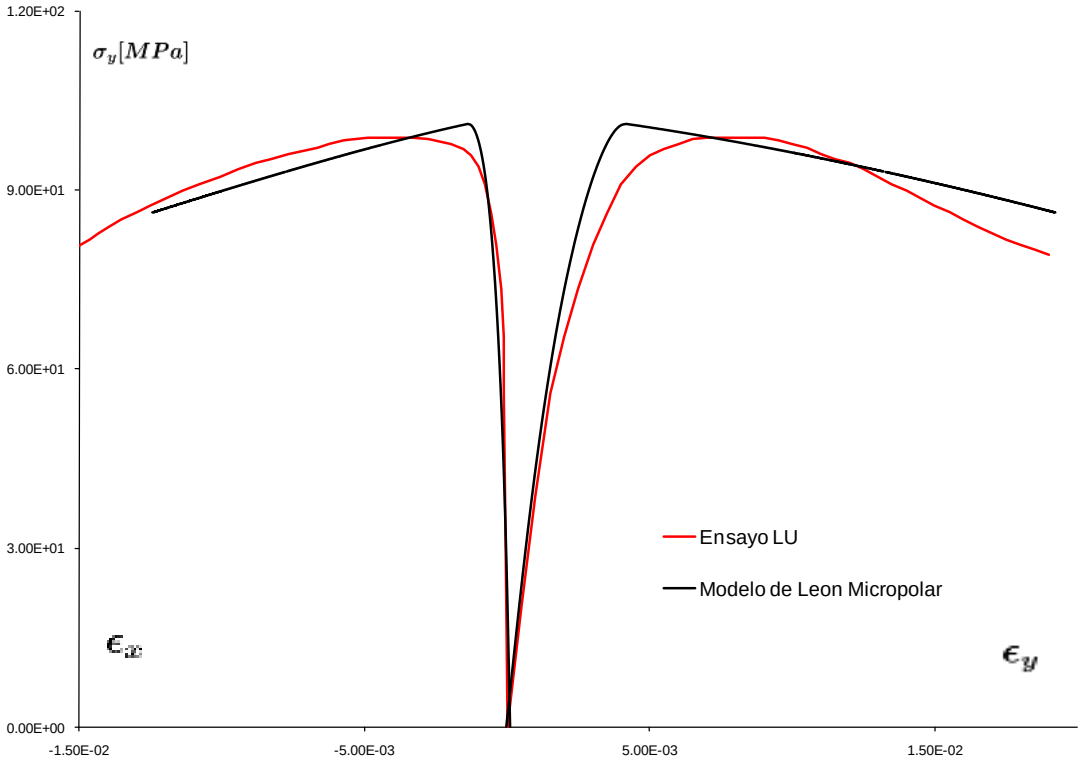


Figura 6.8.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -68.0\,MPa$. Ensayo de Lu. [Lu05]

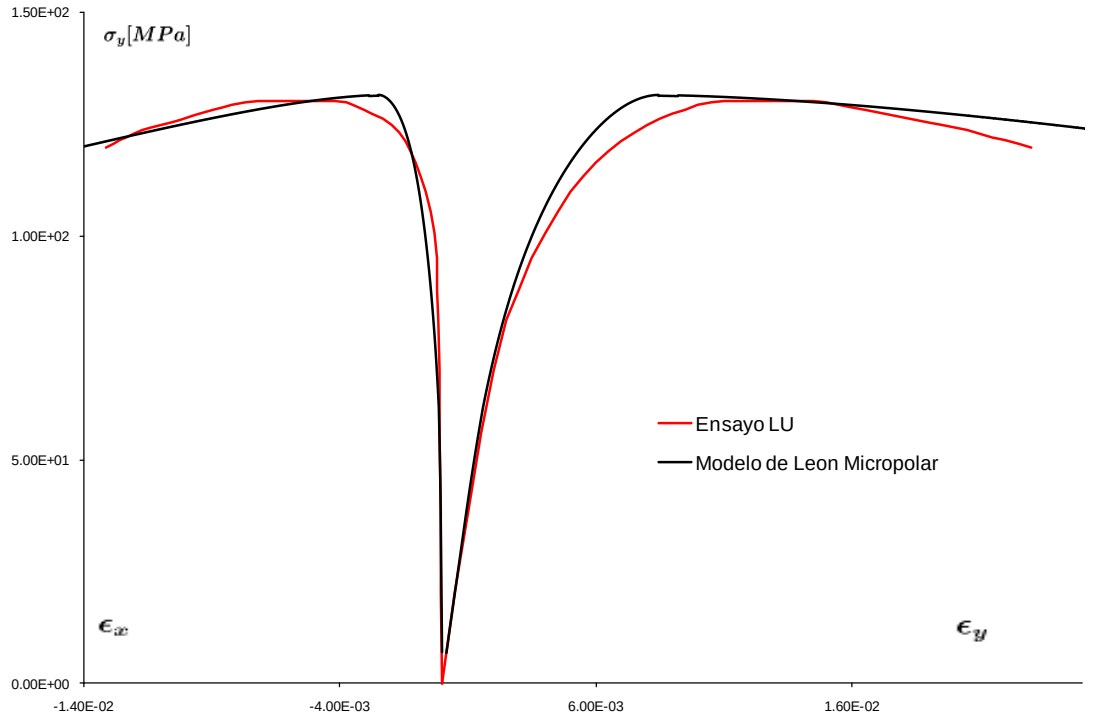


Figura 6.9.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -136.0\,MPa$. Ensayo de Lu. [Lu05]

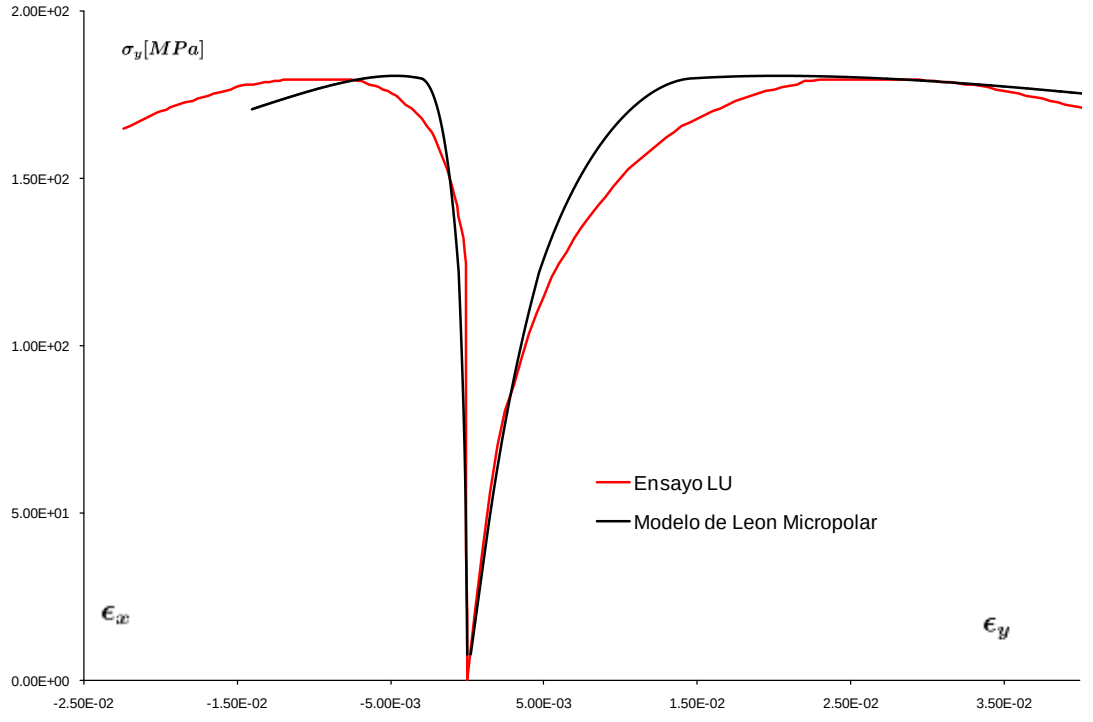


Figura 6.10.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -272.0\,MPa$. Ensayo de Lu. [Lu05]

Las presiones de confinamiento consideradas por Lu varían entre $-272.0MPa < \sigma_x < -68.0\,MPa$. La modelación del comportamiento de

respuesta ofrece resultados próximos a los valores experimentales, como se observa en las figuras.

La ley de no asociatividad utilizada muestra, al igual que en continuos clásicos, una reducción considerable de la ductilidad de la respuesta que controla el cambio de volumen inelástico del material.

6.5.- Análisis de Problemas de Valores de Borde y de la Objetividad de los Resultados respecto de la Discretización

La localización de las deformaciones juega un papel central en la plasticidad computacional, dado que la formación de discontinuidades trae como consecuencia la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de gobierno. Como consecuencia se llega a una alta dependencia de los resultados con el tamaño y orientación de los elementos de las discretizaciones espaciales usadas.

La formulación de elementos finitos deberá ser capaz de reproducir la singularidad del tensor acústico detectada a nivel constitutivo, también a nivel estructural [SW91].

El Modelo de Leon Microplar se ha implementado en códigos de Elementos Finitos con elementos isoparamétricos planos de 4 nodos y posteriormente cuadrangular de 9 nodos, para reproducir la configuración deformada con las bandas de localización diagonales típicas de ensayos de compresión simple en hormigón. Las mallas se refinan para estudiar como esto influye en los resultados y distribución de las deformaciones correspondientes. Las mallas deformadas permiten el análisis de la relación entre las predicciones obtenidas y las longitudes características de Cosserat usadas.

Las respuestas del Modelo Extendido de Leon Micropolar se obtienen usando mallas regulares e irregulares de elementos finitos con elementos cuadrangulares de 4 y 9 nodos, que se muestran en la fig.6.11 y fig.6.12.

Se usan mallas de 18 (3x6) elementos, 72 (6x12) elementos y 288 (12x24) elementos, cuadrangulares regulares, fig.6.11. Luego se incorporan mallas de 128 (8x16) elementos con distribución regular e irregular de cuatro nodos, fig.6.12 con el fin de indagar la influencia del tamaño y orientación de las discretizaciones en las predicciones de falla.

La condición de inhomogeneidad se introduce por medio de los vínculos. En el borde superior, apoyos fijos instalados en los nodos impiden desplazamientos horizontales de la cara [Pam94].

Se lleva adelante además ensayos de tracción simple y se grafican las deformaciones plásticas desarrolladas.

La configuración de las bandas de deformaciones localizadas reproduce los modos de falla I y II del hormigón.

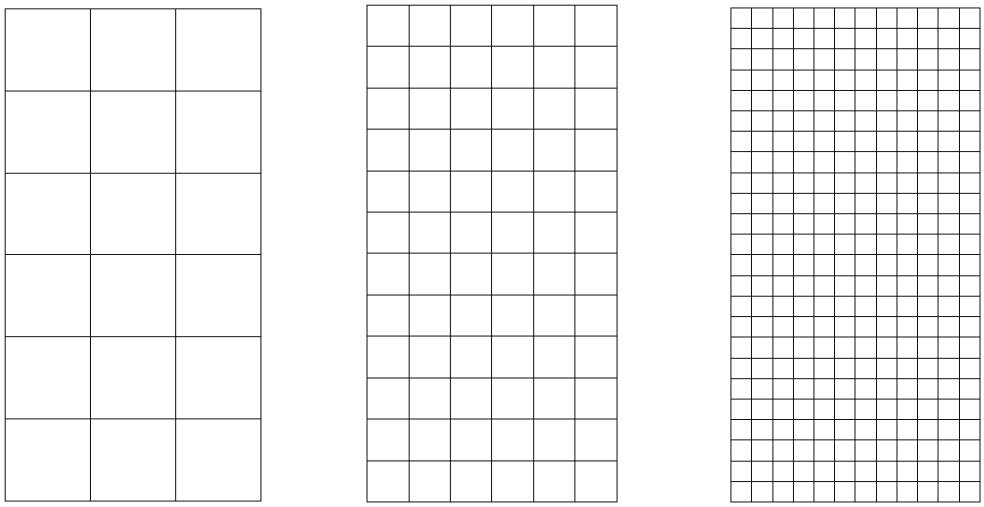


Figura 6.11.- Mallas de 18, 72 y 288 elementos regulares

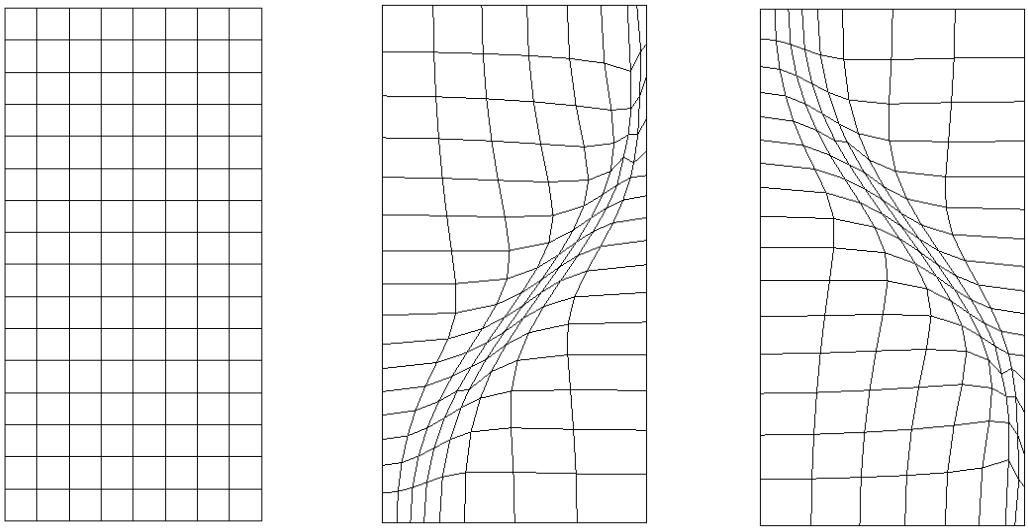


Figura 6.12.- Mallas de 128 elementos regular e irregulares derecha y girada 180º

6.5.1.- Ensayo de Compresión Simple

Implementado en estado de deformaciones planas, este ensayo ha sido desarrollado para las cuatro mallas regulares descriptas, con tres valores de longitud característica: una muy pequeña de valor igual a $l_c = b/24 = 0.43cm$, un valor intermedio de $l_c = b/6 = 1.81cm$ hasta el valor superior de

$l_c = b/2 = 5.4cm$. La malla de 128 elementos se evalúa solo para el valor intermedio de la longitud de Cosserat.

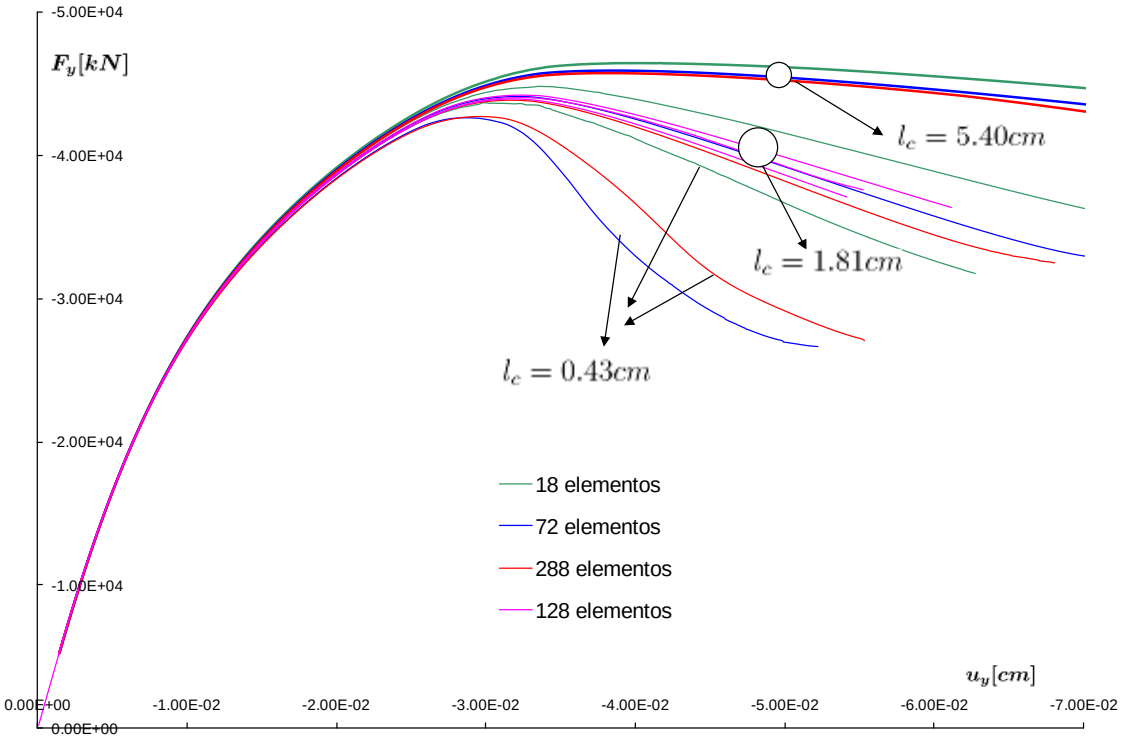


Figura 6.13.- Diagrama Carga - desplazamiento. Ensayo de Compresión Simple. Malla cuadrangular de 4 nodos

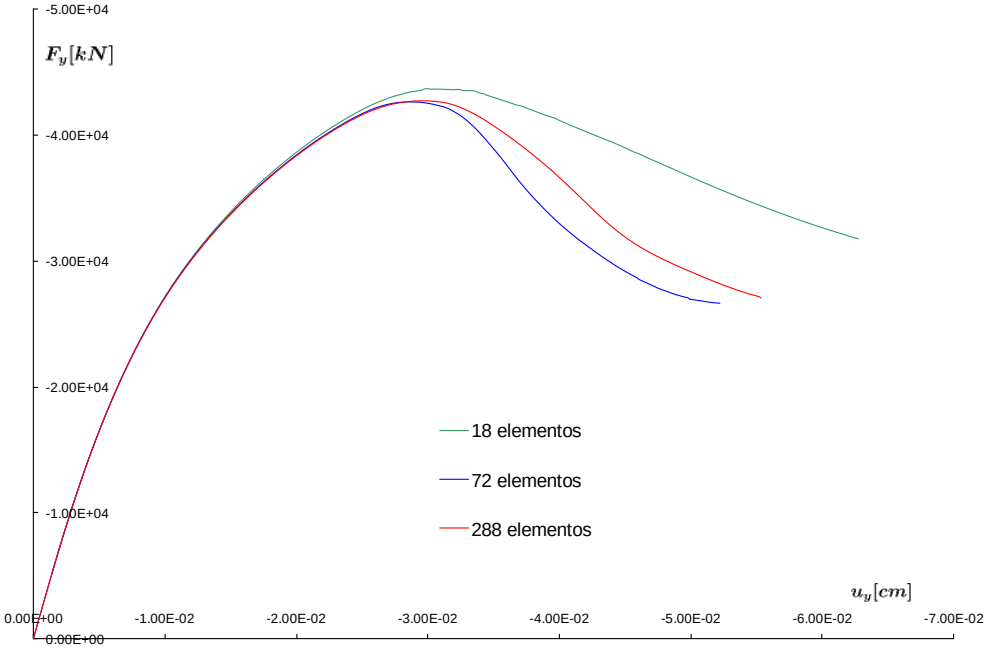


Figura 6.14.- Diagrama carga - desplazamiento. Longitud característica $l_c = 0.43cm$

En la fig.6.13 se puede ver la variación de la respuesta evaluada con el modelo para las diferentes mallas usadas y diferentes valores de longitud característica.

Con el objeto de mejorar la comparación de resultados, se grafican en la fig. 6.14 los resultados para el menor valor de l_c usado.

La respuesta alcanzada para valores bajos de longitud de Cosserat, provee curvas similares a las del modelo clásico con una fuerte variación de los valores conforme se cambia el tamaño de la malla. Si difiere de los resultados alcanzados con el Modelo Extendido de Leon clásico en que se obtiene menor decaimiento de la curva de ablandamiento, producto de la activación del modo de fractura rotacional, que depende de la longitud característica l_c.

El valor de este parámetro $l_c = 1.81cm$ se implementa en los ensayos de todas las mallas descriptas y se grafica en la fig.6.15.

Es claro que la variabilidad de los resultados que se obtienen para las diferentes mallas, disminuye cuando crece el valor del parámetro l_c.

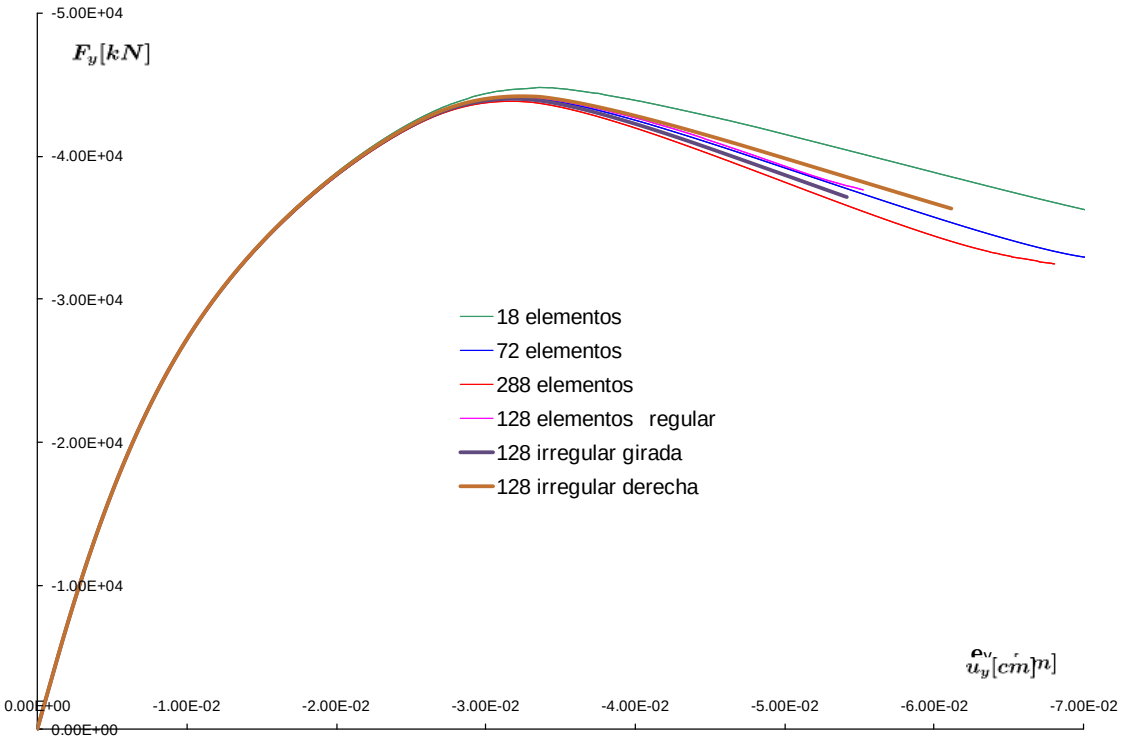


Figura 6.15.- Diagrama carga - desplazamiento. Longitud característica $l_c = 1.81cm$

En la fig.6.16 se puede observar que los resultados son muy próximos para las diferentes mallas, siendo las diferencias detectadas muy inferiores a la correspondiente a $l_c = 0.43cm$.

En todos los casos que se analizan se puede ver que la respuesta obtenida con la implementación numérica es más dúctil para mallas menos densas.

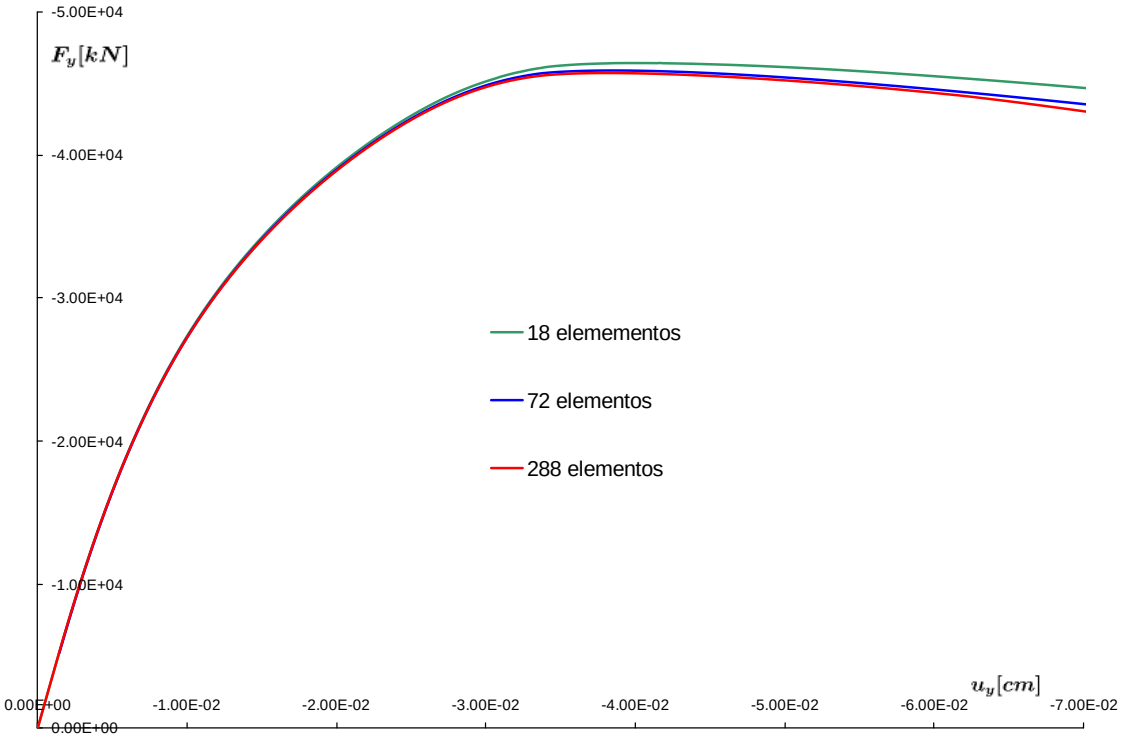
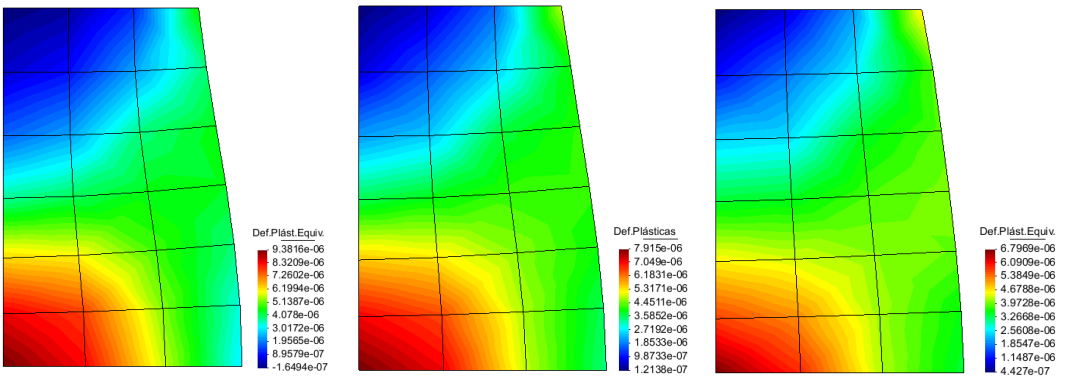


Figura 6.16.- Diagrama Carga - Desplazamiento. Longitud característica $l_c = 5.40cm$

En las fig.6.17, fig.6.18, fig.6.19 y fig.6.20 se presentan las mallas deformadas correspondientes a la carga residual de los ensayos anteriores.

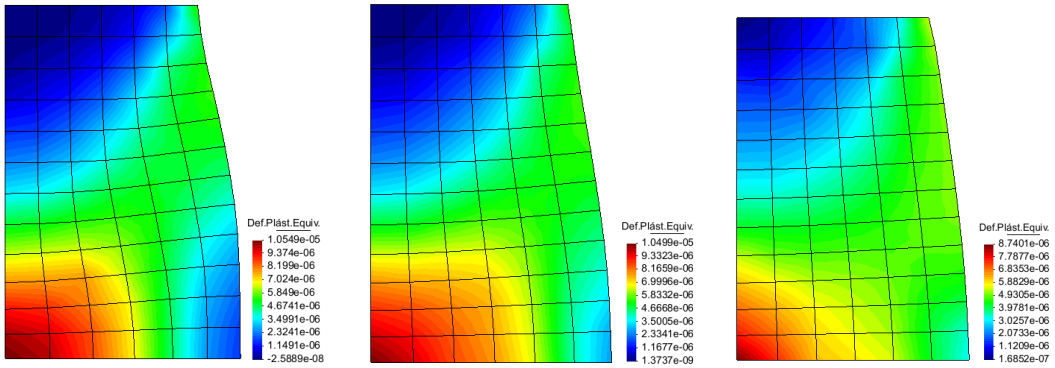
La configuración deformada de 18 elementos (3x6) muestra localización de deformaciones muy similares para los diferentes valores de l_c.



$l_c = 0.43cm$ $l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.17.- Malla de 18 elementos 4 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

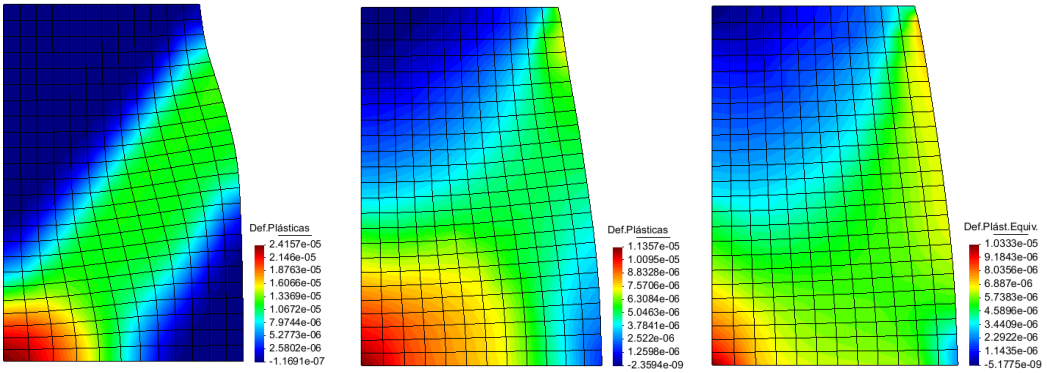
Se puede apreciar que cuando la longitud característica crece, la probeta se deforma de modo más regular para las diferentes discretizaciones consideradas. El borde libre (derecho) deformado tiende a formar un arco con curvatura menos pronunciada. La banda de corte que se observa no presenta cambios significativos con las distintas longitudes seleccionadas.



$l_c = 0.43cm$ $l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.18.- Malla de 72 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

Las mallas de 72 elementos (6x12) de la fig.6.18, comienzan a mostrar algunas diferencias entre ellas en la banda de localización, la que resulta de menor ancho para menores valores de la longitud característica y se difunde en una zona mayor cuando l_c toma el valor máximo.



$l_c = 0.43cm$ $l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.19.- Malla de 288 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

Este efecto es aún más claramente apreciable en la malla de 288 elementos de la fig.6.19. La banda de localización más difundida se obtiene cuando la longitud característica toma un valor máximo. La concentración de las deformaciones equivalentes en una banda de corte estrecha se hace más evidente cuando aumenta la densidad de los elementos de las mallas.

Las deformaciones de mallas de 128 elementos (8x16) regular e irregulares de la fig.6.20 permiten visualizar la manera en que cambia el ancho e inclinación de la banda de corte con la orientación de los elementos.

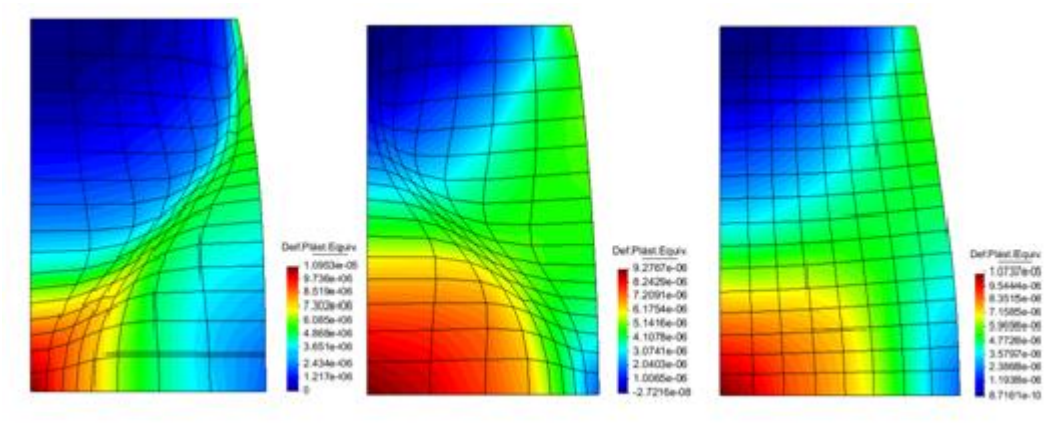


Figura 6.20.- Malla de 128 elementos irregular y regular. Deformaciones Plásticas Equivalentes. $l_c = 1.81cm$

Se ve con claridad cómo se concentran las deformaciones equivalentes en la banda de corte cuando se orientan y densifican los elementos en esa área, como se muestra en la fig.6.20. Se ve que el giro de la malla irregular conduce a un cambio muy fuerte en la forma y el ancho de la banda de corte de la malla con elementos mas densos en la misma dirección de esta, que también cambia cuando se estudia la malla regular.

En definitiva se observa que esta longitud característica intermedia, $l_c = 1.81cm$ es insuficiente para regularizar la respuesta de mallas de 128 elementos cuando se cambia el tamaño y orientación de los mismos.

Se analizan ahora las predicciones numéricas cuando se consideran mallas con elementos cuadrangulares de 9 nodos en las mismas condiciones que en los ensayos anteriores.

Se observa, comparando los resultados de la fig.6.13 con los de la fig.6.21 que incrementando el orden del polinomio de interpolación de elementos finitos (convergencia p), las predicciones se vuelven menos sensibles al tamaño de los elementos para las distintas longitudes características consideradas. Esto se debe a que elementos con mayor orden del polinomio “p” poseen una longitud interna (distancia entre puntos de Gauss) menor que los elementos de menor “p” y, por lo tanto, un menor valor de la longitud característica de Cosserat genera un efecto no local mas efectivamente.

En los resultados que se muestran en las fig.6.13 y fig.6.21, la elección de longitudes características mayores lleva a comportamientos mas dúctiles debido a que el valor de la cohesión es inversamente proporcional a este

parámetro como se indica en la ec.(4.38). En escenarios de carga – desplazamiento en los que los microgiros y los momentos tensionales de los continuos micropolares adquieren valores significativos, el modo de fractura rotacional llevará a obtener respuestas mas frágiles cuanto menores valores de l_c se adopten.

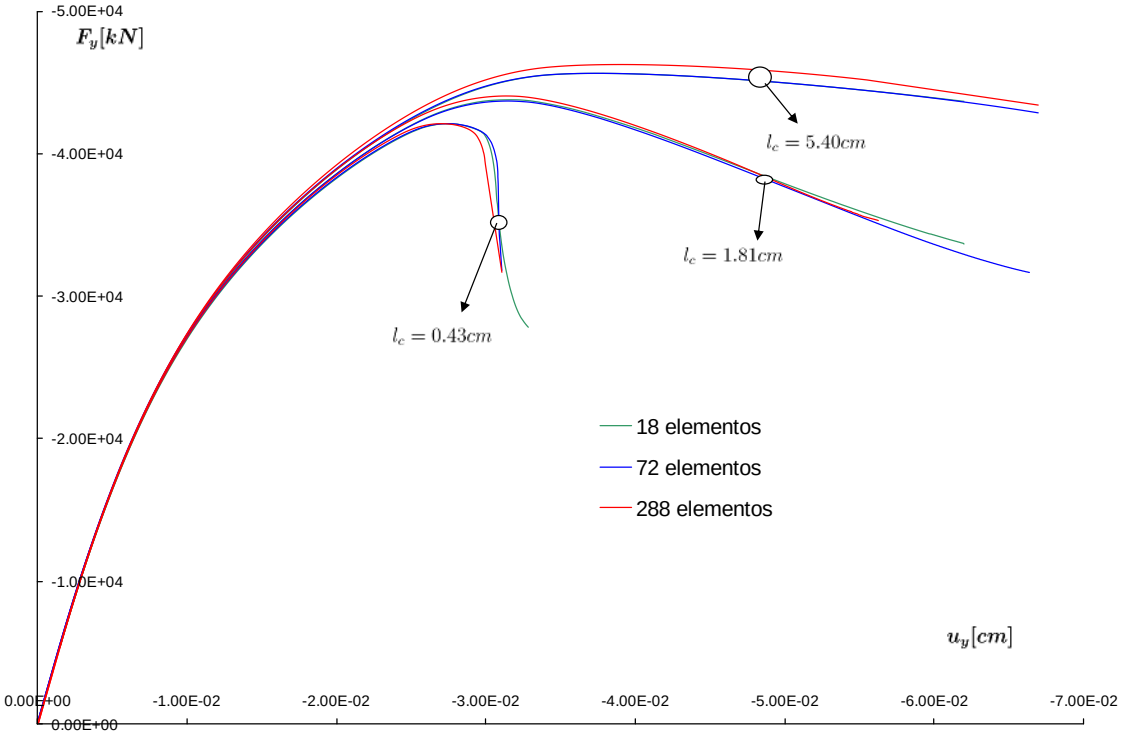
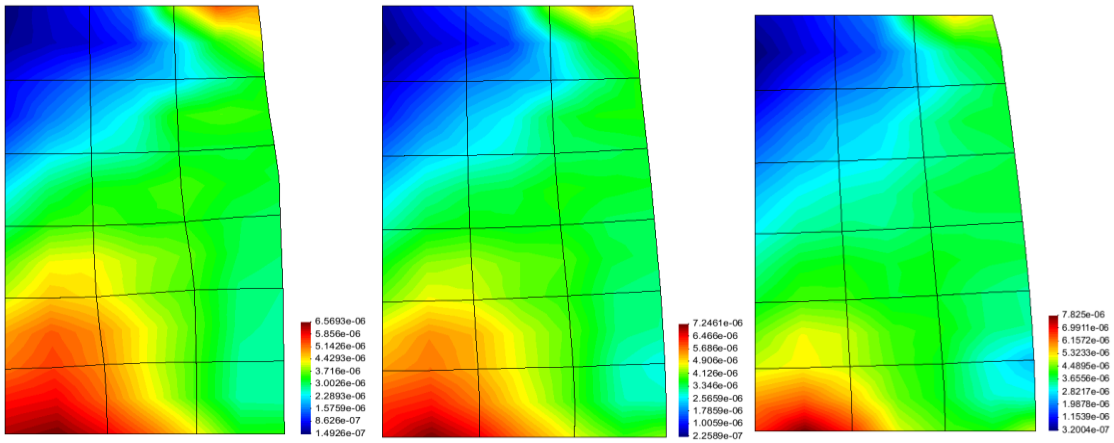


Figura 6.21.- Diagrama Carga - Desplazamiento. Ensayo de Compresión Simple. Malla cuadrangular de 9 nodos

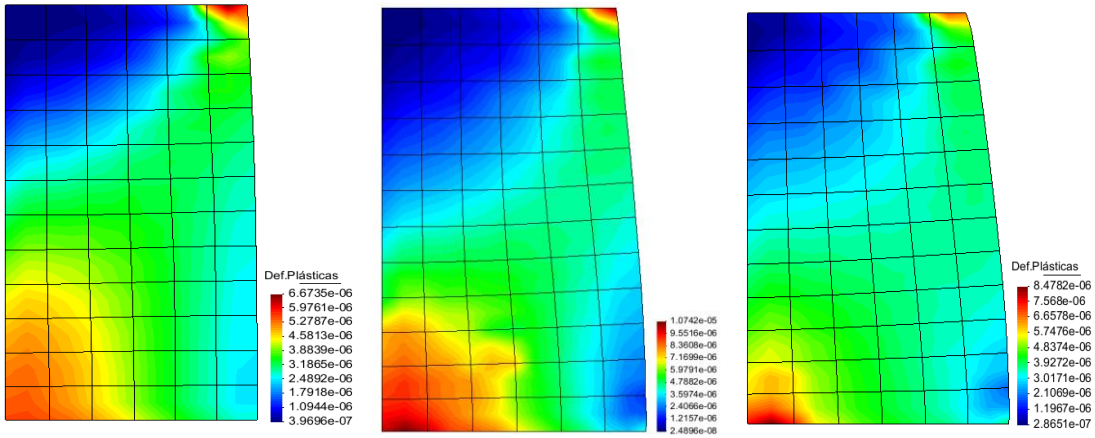
En las fig.6.22, fig.6.23 y fig.6.24 se grafican las mallas deformadas de 18, 72 y 288 elementos con 9 nodos, correspondientes a los mismos ensayos que los desarrollados para mallas de 4 nodos.

De la observación de las bandas de corte graficadas para estas mallas con elementos de 9 nodos, no se obtienen diferencias significativas cuando se trata de malla de 18 elementos, pero si se pueden apreciar en las mallas de 72 elementos que la banda de localización es mas ancha aún para valores pequeños de l_c que cuando se usan elementos de 4 nodos. Este efecto es mas marcado aún en la malla mas densa en la que para el valor de $l_c = 5.40cm$, no puede distinguirse claramente la formación de una banda de deformaciones localizadas.



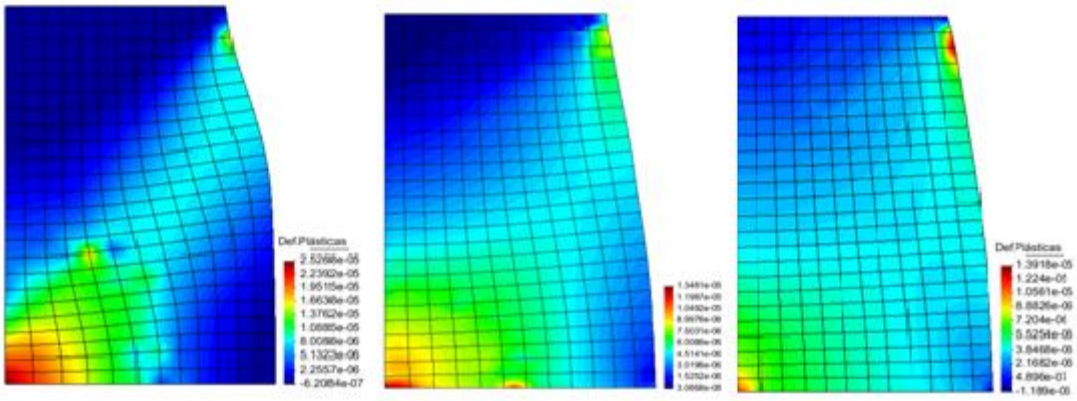
$l_c = 0.43cm$ $l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.22.- Malla de 18 elementos 9 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalentes



$l_c = 0.43cm$ $l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.23.- Malla de 72 elementos 9 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalentes



$l_c = 0.43cm$ $l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.24.- Malla de 288 elementos 9 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

6.5.2.- Ensayo de Tracción Simple

Para el ensayo de tracción simple en estado de deformaciones planas se han usado las mallas regulares de 18, 72 y 288 elementos y se muestran las mallas deformadas graficándose las deformaciones plásticas equivalentes en el estado de la tensión residual.

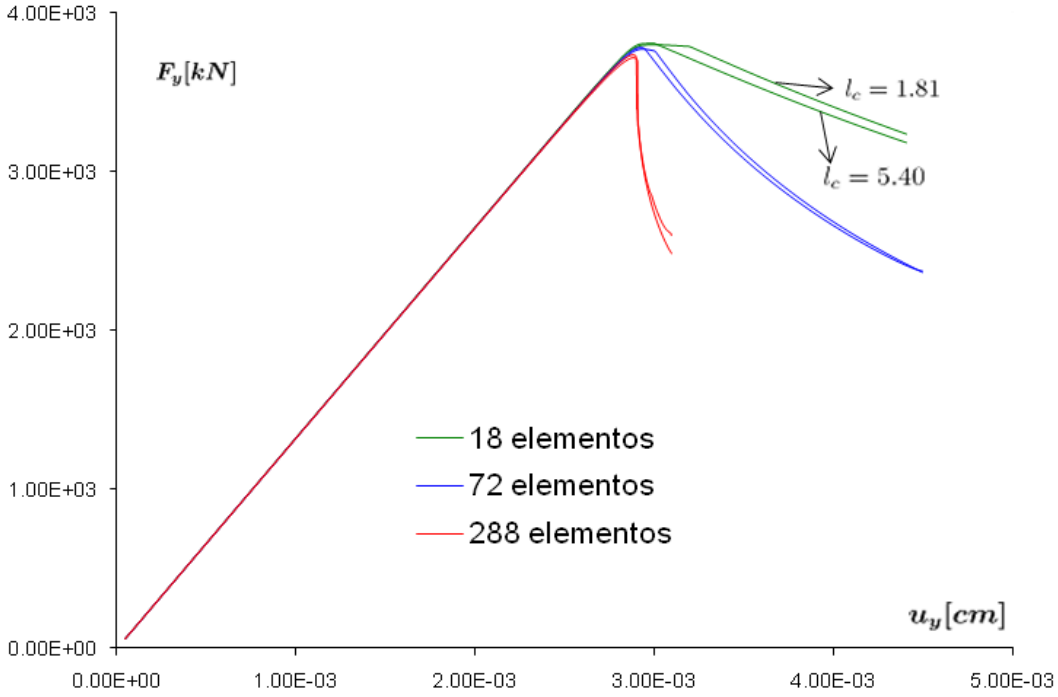
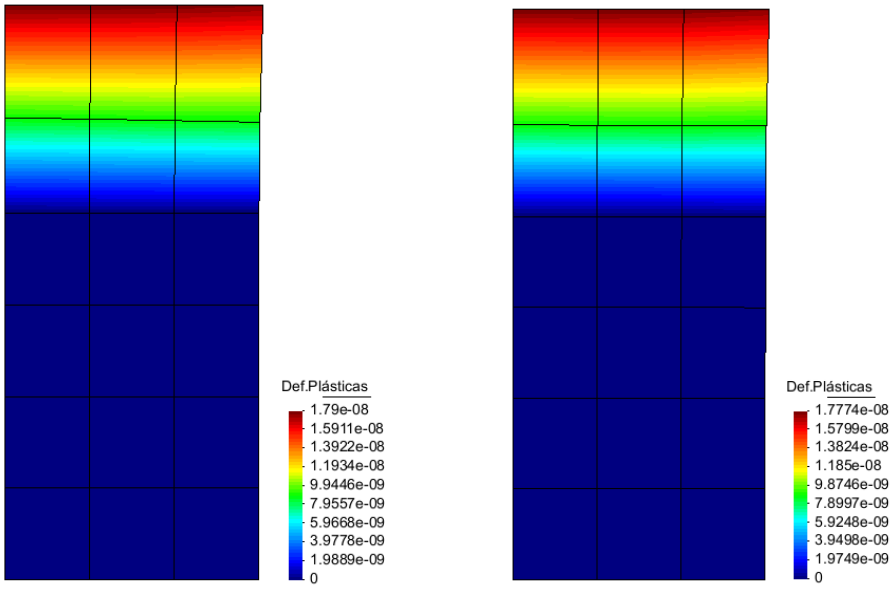


Figura 6.25.- Diagrama Carga - Desplazamiento. Ensayo de Tracción Simple

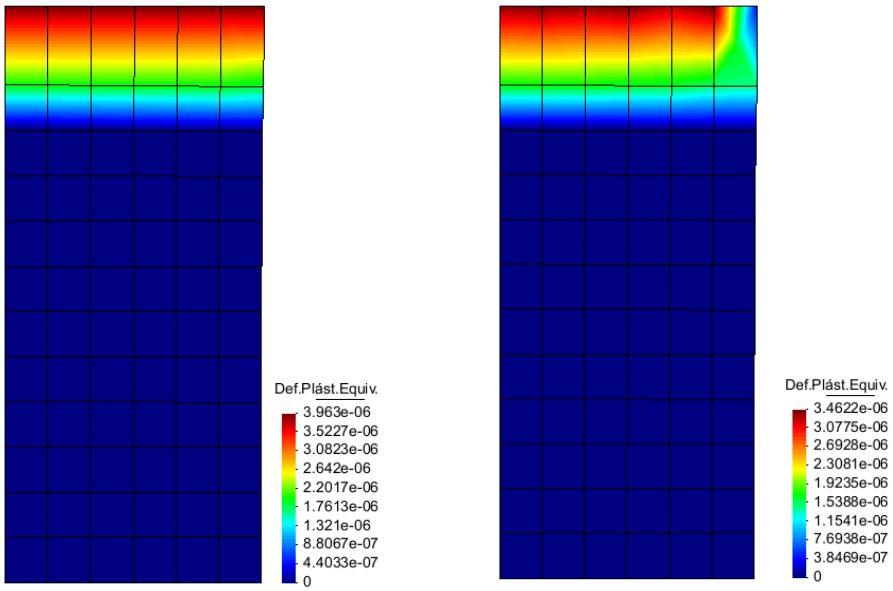


$l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.26.- Malla de 18 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

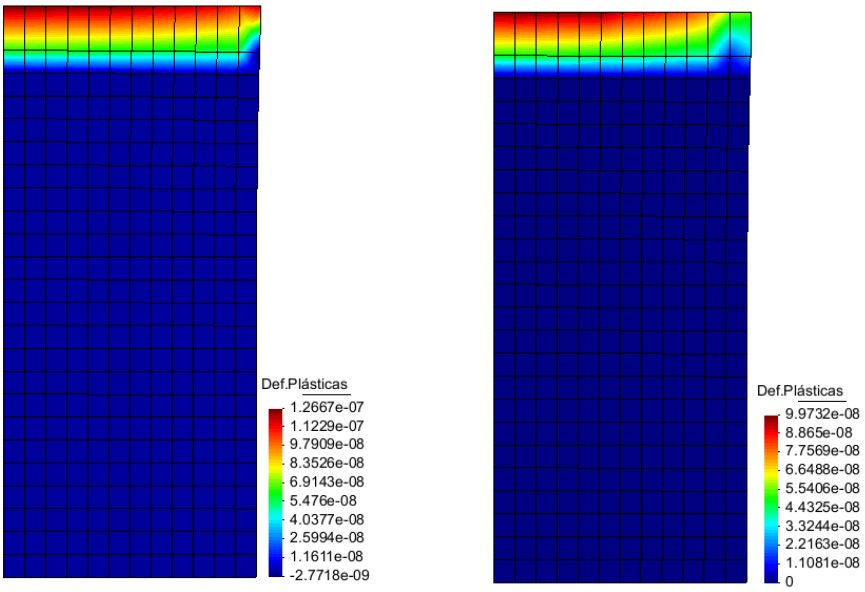
La fig.6.25 presenta las relaciones de carga desplazamiento para diferentes valores de longitud característica $l_c = 1.81cm$ y $l_c = 5.40cm$.

Se observa en la fig.6.25 que los resultados para las diferentes mallas graficadas no registran importantes variaciones cuando se cambia el valor de la longitud característica. En este ensayo las microrotaciones de Cosserat no adquieren valores significativos que puedan hacer variar las curvas de relación carga – desplazamiento. Las respuestas que se muestran son fuertemente dependientes de las mallas de elementos finitos seleccionadas.



$l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.27.- Malla de 72 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes



$l_c = 1.81cm$ $l_c = 5.40cm$

Figura 6.28.- Malla de 288 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

Las gráficas de las mallas deformadas de las fig.6.26, fig.6.27 y fig.6.28, donde se visualizan las deformaciones plásticas equivalentes muestran la concentración de las deformaciones en una banda horizontal que disminuye su ancho a medida que se aumenta la densificación de elementos de la malla, abarcando en general a la primera y segunda fila de elementos cualquiera sea el tamaño de la malla.

Las respuestas que se obtienen no difieren de las esperadas para el Modelo Extendido de Leon Clásico. La banda de corte varía con el tamaño de las mallas seleccionadas y ninguna regularización se obtiene del uso de este Modelo No Local. El ensayo de tracción uniaxial no activa las microrotaciones de los continuos micropolares por lo que la longitud característica no es un parámetro que produzca variaciones en el comportamiento de falla.

6.6.- Análisis de la Capacidad Regularizadora de los Continuos Micropolares

En la discretización del problema de valores de borde, se extendió la aplicación de las funciones de interpolación lineales a los grados de libertad adicionales que corresponden a los giros micropolares. Los resultados obtenidos muestran que los continuos micropolares de Cosserat brindan objetividad de las soluciones cuando se utilizan valores adecuados de la longitud característica, en combinación con el uso de elementos de orden “p” adecuados. En este caso las ecuaciones diferenciales de equilibrio no pierden sus características elípticas durante historias de deformaciones cuasiestáticas monotónicamente crecientes, obteniéndose modos de falla difusos en lugar de localizados.

Los resultados muestran además que valores bajos de la longitud característica conducen a resultados idénticos a los obtenidos en los continuos elastoplásticos clásicos caracterizados por fuertes dependencias de la densidad de las mallas de elementos finitos.

Mallas más densas conducen a resultados las frágiles cuando se usan elementos de 4 nodos en el ensayo de compresión y tracción uniaxial para longitudes características menores. Como en los continuos clásicos, el Modelo Extendido de Leon conduce a una respuesta mas frágil cuando se usan mallas con mayor número de elementos, que calcula valores menores de carga para un dado valor de desplazamiento [Ets92].

Sin embargo, se obtienen resultados mucho menos dependientes de la discretización elegida cuando se aumenta la longitud característica usando elementos de 4 nodos o incrementando el orden del polinomio de interpolación

usando elementos de 9 nodos. Al usar estos últimos, la respuesta de carga se regulariza para las longitudes características seleccionadas, y se ve claramente una respuesta mas frágil cuando menor es este parámetro.

También se puede establecer que las predicciones obtenidas con continuos micropolares y con elementos isoparamétricos lineales son sensibles a la orientación de los elementos.

CAPITULO 7

Conclusiones

El presente trabajo tiene por objeto desarrollar formulaciones materiales basadas en la Teoría Micropolar de Cosserat, considerando variables de campo tanto a nivel macroscópico como microscópico para simular el comportamiento de respuesta de materiales cohesivo - friccionales como el hormigón.

La implementación de la teoría micropolar Cosserat en formulaciones constitutivas macro y microscópicas tiene el fin primero de regularizar el comportamiento de ablandamiento del material en el marco de análisis de elementos finitos.

En este trabajo la teoría de Microplanos ha sido reformulada para continuos micropolares de Cosserat en los regímenes elástico e inelástico. Se efectúa una aproximación termodinámicamente consistente que permite obtener una formulación constitutiva de microplanos como la de Carol, Jirasek y Bazant y por Kuhl, Steinmann y Carol.

La incorporación de los grados de libertad adicionales y la rigidez de los continuos de Cosserat es realizada en la formulación de la energía libre microscópica de Helmholtz en cada microplano, pero abarcando la cinemática y estática enriquecida de los continuos micropolares.

De las ecuaciones constitutivas resultantes para el modelo micropolar elástico basado en microplanos se obtiene una solución explícita para la longitud característica de Cosserat en términos de la relación entre el módulo de rigidez elástico flexional y el módulo elástico de corte de Cosserat.

Las soluciones para el modelo micropolar elastoplástico basado en microplanos en esta tesis incluye la formulación explícita macroscópica del tensor constitutivo tangente continuo del material basado en microplanos micropolares. La formulación general elastoplástica del modelo micropolar basado en microplanos se ha particularizado para elastoplasticidad de Von Mises y Drucker Praguer. Estas constituyen teorías contitutivas originales que permiten modelar diversas propiedades de la microestructura de materiales cohesivo – friccionales como el hormigón.

Los resultados numéricos en este trabajo muestran las predicciones del modelo elastoplástico tipo *J2* y Drucker Prager para ensayos de tracción uniaxial y de corte simple, indicando también las principales diferencias con las predicciones del modelo de Cosserat macroscópico elastoplástico. Un aporte adicional de este trabajo es el análisis de las predicciones de falla localizada de los materiales de microplanos basados en teoría micropolar según criterios de Von Mises y Drucker Prager.

En este sentido y dada la compleja estructura del operador material elastoplástico tangente, las dos condiciones de localización de los continuos de Cosserat se evalúan en forma numérica y se grafican los resultados.

Los resultados demuestran que al considerar el Módulo de corte de Cosserat $G_c \neq 0$ dejan de satisfacerse simultáneamente las dos condiciones de localización de los sólidos micropolares. El modo de Falla I será posible solo cuando este parámetro sea nulo, y en ausencia de momentos tensionales, solo una de las dos condiciones se satisface.

La teoría constitutiva propuesta permite reproducir la anisotropía material que se observa al producirse la falla, lo cual deviene de las propiedades intrínsecas de los microplanos.

La capacidad regularizadora de los continuos micropolares otorga a la formulación posibilidad de estudiar problemas de valores de borde con resultados independientes de las discretizaciones seleccionadas.

Esta formulación permite abarcar aspectos de la microestructura de los materiales de la Ingeniería, que en general muestran respuestas anisotrópicas.

A nivel o escala macroscópica se ha propuesto en esta tesis un modelo constitutivo para hormigones basado en la Teoría Micropolar de Cosserat. Como particularidad especial, el mismo incluye una formulación de ablandamiento basada en mecánica de fractura. Esta permite regularizar la energía de fractura liberada en Modo I cuando la teoría de Cosserat pierde capacidad regularizadora.

El modelo constitutivo macroscópico basado en Teoría de Cosserat y en energía de fractura es un aporte original que brinda amplias posibilidades en la modelación y análisis del comportamiento de falla de hormigones.

El estudio de la falla localizada con el modelo macroscópico permite analizar las dos condiciones de localización que deben ser satisfechas en los continuos micropolares. Ambas condiciones se implementan con el criterio de fluencia del Modelo Extendido de Leon Micropolar para el caso de deformaciones planas, evaluándose la estructura de los gradientes de fluencia y de potencial, y luego la conformación del tensor elastoplástico.

La valoración numérica del tensor acústico o de localización se realiza considerando diferentes valores de longitud característica y del módulo de corte de Cosserat G_c, en condición de flujo asociado y no asociado, y en estado de tensiones no simétricas y simetrizadas.

Las gráficas de las variaciones del tensor acústico muestran que se suprime la condición de localización para el caso de flujo asociado para todos los valores de Módulo de Corte de Cosserat y longitudes características.

En la condición de flujo asociado no se verifica la singularidad del tensor Q_L, en ninguna inclinación de superficie mientras que en flujo no asociado el determinante del tensor de localización se anula en superficies cuyas normales forman ángulos de 32 y 138 grados con la dirección de la tensión principal de compresión, lo que equivale a decir que la fractura se produce en modo mixto de falla.

La segunda condición de localización se satisface solo en los valores de ángulos de 0^0 y 180^0.

Las técnicas utilizadas en la implementación computacional del modelo macroscópico se han seleccionado de modo de lograr la minimización de los errores numéricos.

La calibración de los parámetros del modelo se realiza en ensayos de compresión y tracción simple bajo estado de deformaciones planas, y ensayos de compresión triaxial con valores variables de presión de confinamiento. En primer término se calibran las funciones en régimen de ablandamiento comparando con los resultados del Modelo en continuos Bolztmann, y luego con la función de endurecimiento implementada.

El ensayo de compresión con diferentes niveles de confinamiento arroja resultados que reproducen la sensibilidad del hormigón con la variación de la presión de confinamiento.

La función de potencial usada permite controlar los valores de la deformación lateral, reduciendo la ductilidad de la respuesta que controla el cambio de volumen inelástico del material.

.El caso asociado provee una dilatación excesiva, muy lejos de los valores que se obtienen en los ensayos experimentales.

El estudio de problemas de valores de borde del modelo macroscópico basado en Cosserat y en energía de fractura se implementa con un espécimen cilíndrico bajo cargas de compresión y tracción uniaxial, ensayado con mallas de elementos finitos regulares e irregulares con condiciones de vínculo inhomogéneas.

Los análisis numéricos fueron realizados con elementos finitos isoparamétricos planos de 4 y 9 nodos

En resumen, los aportes de esta tesis referidos tanto al modelo constitutivo microscópico y macroscópico permiten demostrar la capacidad de la Teoría Micropolar de Cosserat para reproducir y considerar con precisión fenómenos relevantes del comportamiento de materiales cohesivo – friccionales como hormigones. Asimismo permiten demostrar la capacidad regularizadora del comportamiento de ablandamiento y la efectividad de la combinación de la teoría micropolar con la teoría de microplanos, por un lado, y con la teoría de ablandamiento, basada en energía de fractura, por el otro.

REFERENCIAS

[Aif84a] Aifantis, E. (1984) On the microestructural origin of certain inelastic models. ASME J. Engrg Mat. Tech., Vol. 106. Pag. 326 - 334.

[Aif84b] E. Aifantis, E. (1984). On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. J. Engrg Sci., Vol. 30. Pag. 1279 – 1299.

[AM88] ARGYRIS J., MLEJNEK H. (1988).- *Die Methode der Finiten Elemente*. Tomos I, II. Friedr. Vieweg & Shon, Braunschweig / Wiesbaden.

[Bat96] BATHE K. J. (1996).- *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*. Prentice Hall Inc. New Jersey.

[Baz76] Bazant, Z.P. (1976). Instability, ductility and size efect in strain softening concrete. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol. 102. Pag. 331 - 344.

[Baz94] Bazant, Z.P. (1984). Imbricate continuum and its variational derivation, J. Eng. Mech. Vol. 110. Pag. 1693–1712.

[BBC86] Bazant, Z., Bishop, F., and Chang, T. (1986). Con_ned compression tests of cement paste and concrete up to 300 ksi. ACI-MJ, Vol. 108. Pag. 553 - 560.

[BCCA00] Bazant, Z., Caner, F., Carol, I., Adley, M., and Akers, S. (2000). Microplane model M4 for concrete. I: Formulation with work-conjugate deviatoric stress. ASCE-EM, Vol. 126(9). Pag. 944 - 953.

[BK90] Bazant, Z. and Kaxemi, M. (1990). Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size e_ect, with application to rock and concrete. International Journal of Fracture, Vol. 44. Pag. 111 - 131.

[BO88] Bazant, Z. and Oh, B. (1988). Crack band theory for fracture of concrete. Materials and Structures, Vol. 16. Pag.155 - 177.

[BB01] Brocca, M. and Bazant, Z. (2001). Microplane _nite element analysis of tube-squash test of concrete with shear angles up to 70_ International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 52 Pag..1165 - 1188.

[BB49] Batdorf, S.B. Budiansky, B. (1949). A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, Technical Note 1871, National Advisory Committee for aeronautics (NACA), Washington, DC.

[BBC84] Bazant, Z. Belytschko, T. and Chang. T. (1984) Continuum theory for strain softening. ASCE J. Engr. Mech., Vol. 110. Pag.. 1666 - 1692.

[BCC00] Bazant, Z.P., Caner, C., Carol,I (2000) Microplane Model M4 for Concrete, J. Eng. Mech. Pag.. 944 - 961.

[BD04] Bazant, Z.P. and DiLuzio, G. (2004). ``Nonlocal microplane model with strain softening yield limits." *Int. J. of Solids and Strucures.*, Elsevier, Vol. 41. Pag.. 7209 - 7240.

[BG84] Bazant, Z.P. and Gambarova, P.G. (1984). ``Crack shear in concrete: Crack band microplane model." *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 110. Pag.. 2015 - 2036.

[BO85] Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock, J. Eng. Mech. Vol. 111 Pag.. 559 – 582.

[BO86] Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1986), Efficient numerical integration on the surface of a sphere, ZAMM Vol. 66 (1) Pag.. 37 – 49.

[BPC88] Bazant, Z. and Pijaudier-Cabot, G..(1988) Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. ASME J. Appl. Mech., Vol. 55(2) Pag.. 287 - 293.

[BP88] Bazant, Z.P. and Prat, P. (1988). Microplane model for brittle plastic material: Part I—theory, Part II—verification, J. Eng. Mech. Vol. 114. Pag..1672 - 1702.

[BXP96] Bazant, Z., Xiang, Y., and Prat, P. (1996). Microplane model for concrete. I: Stress-strain boundaries and _nite strain. ASCE-EM, Vol. 122. Pag. 245 - 254.

[Car97] CAROSIO A. (1997).- *Estudio Teórico Computacional del Comportamiento Tiempo Dependiente de Materiales*. Mag. Thesis of the University of Tucumán.

[CB97] Carol,I. and Bazant, Z.P. (1997) Damage and plasticity in microplane theory, Int. J. Solids Struct. Vol. 34. Pag.. 3807 – 3835.

[CBP91] Carol,I., Bazant, Z.P., Prat, P. (1991) Geometric damage tensor based on microplane model, J. Eng. Mech. Vol. 117. Pag.. 2429 – 2448.

[CBP92] Carol,I., Bazant, Z.P., Prat, P. (1992) New explicit microplane model for concrete: theoretical aspects and numerical implementation, Int. J. Solids Struct. Vol. 29. Pag.. 1173 – 1191.

[CC09] COSSERAT, E.y F.(1909).- *Théorie des Corps Déformable*..París

[Che82] CHEN, W (1982).- Plasticity in Reinforce Concrete. McGraw – Hill. London. England

[CJB01] Carol, I., Jirasek, M., Bazant, Z.P. (2001) A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I: free energy and consistent microplane stresses, Int. J. Solids Struct. Vol. 38. Pag.. 2921 – 2931.

[CJB04] Carol, I., Jirasek, M., Bazant, Z.P. (2004) A Framework for microplane model of large strain, with applications to hyperelasticity, Int. J. Solids Struct. Vol. 41. Pag.. 511 - 547.

[CT00] Crouch R., Tahar B. (2000) *Elastoplastic Hardening – Softening Models With High Yield Surface Curvature.* European Congress on Computational

[dBo91] de Borst, R. (1991) Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. Eng. Comput., Vol. 8. Pag.. 317 – 332.

[dBo90] DE BORST, R. (1990) *Simulation of Localization using Cosserat Theory*. SCI - C Conf. Procceding, Eds N. Bicanic & H. Mang, Pineridge Press, Vol II, Pag.. 931-944.

[dBM92] R. de Borst and H. Mühlhaus.(1992) Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. Int J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 35(3). Pag.. 521 – 539.

[dBM92] DE BORST R., MUEHLHAUS H.B (1992*).- Continuum Models for Discontinuous Me0dia*. RILEM Proc. Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics. London. Pag. 601-618.

[dBo93] R. de Borst. (1993) A generalisation of j2- fow theory for polar continua. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 103. Pag.. 347 - 362.

[dBPPS95] R. de Borst, J. Pamin, R. Peerlings, and L. Sluys. (1995). On gradient-enhanced damage and plasticity models for failure in quasi-brittle and frictional materials. Comp. Mech., Vol. 17. Pag.. 130 - 141.

[dBSMP93] R. de Borst, L. Sluys, H. Muhlhaus, and J. Pamin (1993). Fundamental issues in _nite element analyses of localization of deformation. Engineering Computations, Vol. 10. Pag.. 99 - 121.

[DCG88] Dvorkin, E., Cuiti~no, A., and Gioia, G. (1988). Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 90. Pag. 829 - 844.

[Die93] DIETSCHE A.- (1993) *Lokale Effekte in Linear - Elastischen und Elasto - Plastischen Cosserat Kontinua*. PhD Thesis. University of Karlsruhe. Alemania.

[DKRH01] D´Addetta, G., Kum, F., Ramm, E., Herrmann, H. (2001) For solids to granulates – discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials. Continuous and discontinuous modeling of cohesive

– frictional materials. Lecture notes in physics. Springer. Berlin.Vol. 58. Pag.. 231 – 258.

[Dru59] Drucker, D. (1959). A de_nition of stable inelastic materials. Journal of Applied Mechanics, Vol. 26. Pag..101 - 106.

[DS84] DESAI C., SIRIWARDANE J. (1984).- *Constitutive Laws for Engineering Materials*. Prentice Hall.

[DSW91] DIETSCHE A., STEINMANN P., WILLAM K. (1991).- *Micropolar Elasto - Plasticity and its Role in Localization Analysis*. III International Symposium on Plasticity and its Current Applications, Eds. J Boehler & A. Khan, Grenoble, Francia. Vol.9. Pag. 813-831.

[ECW97] ETSE G., CAROSIO A., WILLAM K. (1997*).- Limit Point and Localization Analysis of Elastoviscoplastic Material Models*. Submitted to Int.J. on Mechanic of Cohesive - Frictional Materials.

[Ehl91] Ehlers, W. (1991) Toward finite theories of liquid-saturated elasto-plastic porous media. International Journal of Plasticity. Vol. 7. Pag.. 443 – 475.

[Ehl02] Ehlers, W. (2002) Foundations of multiphasic and porous materials. In Ehlers, W.; Bluhm, J., editors, Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications. Springer-Verlag, Berlin. Pag.. 3 – 86.

[EN98] Etse, G. and Nieto, M. (1998) Micropolar regularization in concrete pasticity. In Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Springer Verlag.

[ENSC03] ETSE G., NIETO M., STEINMAN P., CAROSIO A. (2003). A micropolar microplane theory. Int. Journal on Mechanics of Cohesive-Friccional Materials. Int. Journal of Engineering Sciences. Pergamon. ISSN 00207225. Vol. 41. Pag.. 1631 – 1648.

[EN04] ETSE G., NIETO M..(2004) Cosserat continua-based micropolar modeling. Latin American Applied Research. ISSN 03270793 Vol.34. Nº4. Pag. 229 - 240.

[Eri68] ERINGEN, A.C. (1968).- *Theory of Micropolar Elasticity, in Fracture and Advanced Treatise*, Academic Press.

[Ets92] ETSE G. (1992).- *Theoretische und Numerische Untersuchung zum Diffusen und Lokalisierten Versagen in Beton*. PhD Thesis. University of Kalsruhe. Alemania.

[EW93] ETSE G. , WILLAM K. (1993).- *Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavoir of Plain Concrete.* Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120. Pag. 1983 - 2009.

[EW96] ETSE G. , WILLAM K. (1996).- *Integrations Algorithms for Concrete Plasticity.* Engineering Computations, Vol. 13. Pag. 38 -65.

[Gun58] GUNTHER W. (1958).- *Zur Statik und Kinematik des Cosserat'schen Kontinums*, Abh. Braunschweig. Wiss.Ges. Pag. 195-213

[Hau85] Haupt, P.: On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. International Journal of Plasticity 1 (1985), Pag. 303–316.

[Hau00] Haupt, P.: Continuum Mechanics and Theory of Materials. Springer-Verlag, Berlin. 2000.

[Hil50] HILL R. (1950).- *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, London

[Hil58] Hill, R. (1958) General theory of uniquesses and stability in elasto-plastic solids. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6. Pag. 236_249.

[HMP76] Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and _nite elements. Cement and Concrete Research, Vol. 6. Pag. 773 - 782.

[Hug87] HUGHES T. (1987).- *The Finite Element Method*. Prentice Hall International. London.

[Hul85] HULBURT, B. (1985) Experimental and computational investigation of strain-softening in concrete. Master's thesis, University of Colorado..

[Ior96] IORDACHE, M. M. (1996*).- Failure Analysis of Classical and Micropolar Elastoplastic Materials*. PhD Thesis. University of Colorado. Bolder. Pag. 104-167.

[IWC95] IORDACHE M.M., WILLAM K., CAROL I. (1995).- *Failure Modes of Degradation Process in Cosserat Continua*. Computational Plasticity - Fundamentals and Applications. Pineridge Press. Swansea. Pag. 611 - 622.

[IW96] IORDACHE, M. and Willam, K. (1996). Localized failure modes in cohesive-frictional materials. Technical Report CU/SR 96/3, Department of Civil, Enviromental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, USA.

[Jer94] JEREMIC B. (1994*).- Implicit Integration Rules in Plasticity: Theory and Implementation.* PhD. Thesis of the University of Colorado.

[Jir99] JIRASEK, M. (1999). Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials. Lecture notes, Rheinisch-Westf• alische Technische Hochschule Aachen, Aachen, Germany.

[Jir02] JIRASEC, M. (2002*).- Objetive Modeling of Strain Localization*. Revue Francaise de Genie Civvil. Vol. 6. Pag. 1119 – 1132.

[JZ98] JIRASEK, M. and Zimmermann, T. (1998). Analysis of rotating crack model. ASCE-EM, Vol.124(8). Pag. 842 - 851.

[Kac86] KACHANOV, L. (1986). Introduction to damage mechanics. Mechanics of elastic stability. Martinus Nijho_ Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster.

[Kan97] KANG, H. (1997) Triaxial Constitutive Model for Plane and Reinforced Concrete Behavior. PhD Thesis of the University of Colorado. Boulder. USA..

[Koi53] KOITER, W. (1953). Stress strain relations, uniqueness and variational theorems for elasticplastic materials with a singular yield surface. Quarterly Journal of Applied Mathematics, Vol. 11. Pag. 350 - 354.

[KRW00] KULH, E. RAMM, E. WILLAM, K. (2000) Failure analysis of elasto-plastic material models on different levels of observation, Int. J. Solids Struct. Vol. 37. Pag. 7259 – 7280.

[KR98] KULH, E. RAMM, E.. (1998) On the linearization of the microplane model. *Mech*. *Cohes*.-*Frict*. *Mater*. Vol. 3. Pag. 343 - 364.

[KSC01] KULH, E., STEINMAMM, P., CAROL, I. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modeling, Int. J. Solids Struct. Vol. 38. Pag. 2933 – 2952.

[LB88] LASRY, D. and BELYTSCHKO, T. (1998). Localization limiters in transient problems. Int J. Solids Struct., Voil. 24. Pag. 581 - 597.

[Leo35a] LEON A. (1935).- *Uber die Scherfestigkeit des Betons*. Beton und Eisen 34. Pag. 130 - 135.

[Leo35b] LEON A. (1935).- *Uber das Mab der Anstrengung bei Beton*. Ingenieur Archiv, Vol.4. Pag. 421 - 431.

[LK93] LUBARDA, V. and KRAJCINOVIC, D. (1993) Damage tensors and the crackdensity distribution, Int. J. Solids Struct,. Vol. 30. Pag. 2859 – 2877.

[Lu05] X. LU.(2005) *Uniaxial and triaxial behavior of high strength concrete with and without steel.bers*. PhD thesis, New Jersey Institute of Technology.

[MW95] MENETREY, P. and WILLAM, K. (1995). Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. ACI-SJ, Vol. 92(3). Pag. 311 - 318.

[Min63] MINDLIN R.D. (1963).- *Influence of Couple- Stress on Stress Concentration*. Exp. Mech. Vol. 3. Pag.1 - 7.

[MSM01] MUHLHAUS, H., SAKAGUCHI, H., MORESI L., and FAHEY, M. (2001). Discrete and continuum modelling of granular materials. In Vermeer, P., Diebels, S., Ehlers, W., Herrmann, H., Luding, S., and Ramm, E., editors, Continuous and discontinuous modelling of cohesivefrictional materials, Lecture notes in Physics. Springer, Berlin.Vol. 568. Pag. 185 - 204.

[MV87] MUHLHAUS, H.B. and VARDOULAKIS, I. (1987). The thickness of shear bands in granulars materials.Geotechnic. Vol. 37. Pag. 271 - 283.

[Muh89] MUHLHAUS, H.B. (1989) Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems, Ing. Arch. Vol. 59. Pag. 124 – 137.

[MA91] MUHLHAUS H.B.; AIFANTIS, E. C. (1991): *A variational principle for gradient plasticity.*International Journal of Solids and Structures 28, 845–857.

[Nie98] NIETO, M. (1998) Teoría Elastoplástica Micropolar de Cosserat para Materiales Cohesivo Friccionales. Tesis de Magister en Ingeniería Estructural. Universidad Nacional deTucumán. Argentina

[Per02] PEREZ RAMOS, P. (2002). Implementación de Modelos de Microplanospara Análisis no Lineal de Estructuras de Hormigón. Tesis de Maestría en Estructuras. Belo Horizonte.

[Oli89] OLIVER, J. (1989). A consistent characteristic length for smeared cracking models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28. Pag. 461 - 474.

[Ort85] ORTIZ, M. (1985). A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. Mechanics of Materials, Vol. 4. Pag. 67 - 93.

[OR91] OTTOSEN, N. and RUNESSON, K. (1991). Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity. Int. J. Solids Structures. Vol. 27(4). Pag. 401 - 421.

[OP84] ORTIZ, M. POPOV, E.P.(1984) Accuracy and Stability of Integrations Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations. Int J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 21. Pag. 1561 – 1576.

[Pam94] PAMIN, J. (1994). Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena. PhD thesis, TU Delft, The Netherlands.

[PB87] PIJAUDIER-CABOT, G. BAZANT, Z.P.(1987) Non Local Damage Theory. ASCE Journal of Engineering Mechanics. Vol.13. Pag.. 1512 – 1533.

[PdBBdV96] PEERLINGS, R., de BORST, R., BREKELMANS, W. and de VREE, J. (1996) Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. Int J. Numer. Meth. Engrg. Vol. 39. Pag. 3391 - 3403.

[PdBBG02] PEERLINGS, R., de BORST, R., BREKELMANS, W. and GEERS, M. (2002). Localization issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. European Journal of Mechanics A/Solids. Vol. 21. Pag. 175 - 189.

[PE03] PERALTA, M. H., ETSE, J.G.(2003). Análisis Computacional del Mecanismo de Respuesta de Pernos Anclados en Hormigón. Mecánica Computacional Vol. XXII. Bahía Blanca, Argentina.

[PGdBB01] PEERLINGS, R., GEERS, M., de BORST, R. and BREKELMANS, W. (2001) A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. Int J. Solids Struct. Vol. 38: Pag. 7723 - 7746.

[Piv01] PIVONKA P. (2001) Constitutive Modeling of triaxially Loaded Concrete Considering Large Compressive Stresses: Application to Pull Out Test of Anchor Bolts. PhD Thesis. Technic University of Wien. Alemania.

[PW03] PIVONKA P., WILLAM K. (2003). *The effect of the third Invariant in Computational Plasticity.* Engineering Computations, 20 (5/6), pg. 741-753.

[Pra88] PRAMONO E. (1988*).- Numerical Simulation of Distributed and Localized Failure in Concrete*. PhD Thesis, University of Colorado. Bolder.

[Pra24] PRANDTL, L. (1924) First International Congress Applied Mathematics. Delft. Pag. 43 – 56

[PW89a] PRAMONO E., WILLAM, K. (1989*).- Fracture Energy- Based Plasticity Formulation of Plane Concrete*. ASCE – EM, Vol. 115. Pag. 1183 - 1204

[PW89b] PRAMONO E., WILLAM, K. (1989*).- Implicit Integration of Composite Yield Surface with Corners. Engineering Computation.* Vol. 6. Pag. 186 – 197

[Ric76] RICE, J. (1976) The localization of plastic deformation. In W. Koiter, editor, Theoretical and Applied Mechanics, 14th IUTAM Congress. Amsterdam, North-Holland. Pag. 207 - 220.

[RR75] RUDNICKI, J. and Rice, J. (1975) Condition for the localization of deformations in pressure sensitive dilatant materials. J. Mech. Phys. Solids. Vol. 23. Pag. 371 - 394.

[RSW88] RUNESON K., STURE S., WILLAM K. (1988*).- Integration in Computational Plasticity.* Computers & Structures. Vol. 30. Pag. 119 - 130.

[Run96] RUNESON, K.. 1996. Constitutive Theory and Computational Technique for Dissipative Materials.

[San06] SANCHEZ, P.J. (2006). Desarrollo en Mecánica Computacional de Falla Material. Aplicación a Modelos de Plasticidad y Daño. PhD Tesis. Universidad Nacional del Litoral. Argentina

[Sch67] SCHAEFER, H. (1967).- Das Cosserat-Continuum, ZAMM 47. Pag. 34 - 498.

[Sch07] SCHOLZ, B. (2007) Application of a Micropolar Model to the Localization Phenomenain Granular Materials: General Model, Sensitivity Analysis and Parameter Optimization. PhD Thesis. University of Stuttgard. Alemania.

[SOA93] SIMO, J.C., OLIVER, J., and ARMERO, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-idependent inelastic solids. Computational Mechanics. Vol. 12. Pag. 277 - 296.

[SH98] SIMO, J.C and HUGHES, T.J.R. (1998). Computational inelasticity. Springer, Berlin, Germany.

[SH87] SIMO, J.C and JU, J.W. (1987). Strain- and stress based continuum Jdamage models - I. Formulation. International Journal of Solids and Structures, Vol. 23(7). Pag. 821 - 840.

[Slu92] SLUYS, P. (1992) Wave propagation, localization and dispersion in softening solids, Dissertation, Delft University of Technology, Delft.

[SOA93] SIMO, J.C., OLIVER, J., and ARMERO, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-idependent inelastic solids. Computational Mechanics, 12:277{ 296.

[ST86] SIMO, J. and TAYLOR, R. (1986).A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity. Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol. 22.(3) Pag. 649 – 670.

[Ste94a] STEINMANN, P.(1994). A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elasto-plasticity. International Journal of Solids and Structures Vol. 31. Pag. 1063 – 1084.

[Ste94b] STEINMANN, P.,(1994) An improved FE expansion for micropolar localization analysis, Commun. Numer. Meth. Engrg. Vol. 10. Pag. 1005 – 1012.

[Ste95] STEINMANN, P. (1995) Theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage, Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol. 38. Pag. 583 – 606.

[Ste97] STEINMANN, P.,(1997) A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua, Acta Mech. Vol. 121. Pag. 215 – 232.

[SW91a] STEINMANN, P WILLAM, K. (1991). Localization within the framework of micropolar elastoplasticity. In V. Mannl et al., editor, Advances in continuum mechanics, Berlin, Springer Verlag. Pag. 296_313.

[SW91b] STEINMANN, P WILLAM, K. (1991). Performance of Enhanced Finite Element Formulations in Localized Failure Computations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Pag. 845 – 867.

[Tay38]. TAYLOR,G.I. (1938) Plastic strain in metals, *J. Inst. Metals*, Vol. 62 . Pag. 307 - 324.

[Tou64] TOUPIN, R.A. (1964).- *Theories of Elasticity with Couple-stress*, Arch. Rat. Mech. Analysis 17.

[TT60] TRUESDELL, C. and TOUPIN, R. (1960). The Classical Field Theories. Handbuch der Physik. In S. Flugge, editor, Springer, iii/1 edition.

[VGe95] VAN GEEL, H. (1995). Behavior of concrete in plane strain compression. Technical Report BKO95.19, TH Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands.

[VMi84] VAN MIER, J. (1984). Strain Softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions. PhD thesis, TH Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands.

[VA91] VARDOULAKIS I., AIFANTIS E.C.(1991) *A gradient flow theory of plasticity for granular materials.* Acta Mechanica, 87, 197–217

[Vre07] VRECH, S. 2007. Simulación Computacional de Procesos de Falla Localizada basada en Teoría de Gradientes. Tesis de Doctor en Ciencias Exactas e Ingeniería. Universidad Nacional de Tucumán

[WBP86] WILLAM, K., BICANIC, N., PRAMONO, E., STURE S. (1986).- *Composite Fracture Model for Strain Softening Computations of Concrete.* Fracture Mechanics of Concrete- Fundamentals and Applications. De Wittmann. Vol I. Pag. 221 - 235.

[WD92] WILLAM, A. and DIESTSCHE, A. (1992). Regularization of localized failure computations, in: E. Onate, E. Hinton, R. Owen (Eds.), Proceedings of International Conference on Computational Plasticity, COMPLAS III, Pineridge Press, Swansea. Pag. 2185 – 2204.

[WDI95] WILLAM, A., DIESTSCHE, A., STEINMANN, P. and IORDACHE, M. M. (1995). Localization in micropolar continua, in: H.-B. M€uhlhaus (Ed.), Continuum Models for Materials with Microstructure, John Wiley and Sons. Pag. 297 – 339.

[WE90] WILLAM K., ETSE G. (1990*).- Failure Assessment of the Extended Leon Model for Plain Concrete*. SCI - C Conf.Proceed., Eds N.Bicanic & H.Mang. Pineridge Press. Vol. II. Pag. 851 - 870.

[WI94] WILLAM, A., and IORDACHE, M. M . (1994) Fundamental Aspects of failure nodels in brittle solids. In Fracture and Damage in Quasibrittle Materials. Eds. E&F, Chapman and Hall. Pag. 35 – 67.

[Wil02] WILLAM, A., (2002). Encyclopedia of physical Science & Technology. Accademic Press. Vol.3. Pag. 603 - 633

[WW75] WILLAM, K., WARNKE, E. (1975*).- Constitutive Models for the Triaxial Behavior of Concrete.* Int. Assoc. Bridge Struc. Engr. Proc. Vol. 19. Bergamo. Italia.

[ZT94] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R. (1994).- *El método de los Elementos Finitos*. Ed. Mc Graw Hill. España.