

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE PROCESOS DE FALLA LOCALIZADA BASADA EN TEORÍA DE GRADIENTES

por

Sonia Mariel Vrech
Ingeniera Civil
Magister en Ingeniería Estructural
Magister en Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería

Dirigida por: Prof. Dr. Ing. Guillermo Etse

Tesis presentada como requisito parcial
para acceder al grado académico de
Doctor en Ciencias Exactas e Ingeniería

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán

San Miguel de Tucumán, Septiembre de 2007

Resumen

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE PROCESOS DE FALLA LOCALIZADA BASADA EN TEORÍA DE GRADIENTES

Vrech, Sonia M.

Director : Dr. Ing. Guillermo Etse

El concepto de falla de sólidos y estructuras durante procesos de carga monotónica depende fuertemente del estado e historia de tensiones. En particular, en el caso de materiales cuasi-frágiles como hormigones, morteros, suelos, rocas, etc, el comportamiento y modo de falla bajo cargas crecientes depende del nivel de confinamiento. Es decir, un material que falla en forma frágil bajo cierto estado de cargas, manifestará un modo de falla de tipo dúctil cuando se incrementan las presiones de confinamiento por arriba de un cierto nivel que dependerá de la particular micro y mesoestructura del material.

En la presente tesis se desarrolla una formulación constitutiva termodinámicamente consistente basada en la teoría de gradientes superiores de deformaciones que se complementa con conceptos de mecánica de fractura para predecir apropiada y precisamente la transición de falla frágil a dúctil que presentan los materiales cuasi-frágiles como el hormigón cuando son sometidos a niveles de confinamiento crecientes.

El análisis del comportamiento de los materiales cuasi-frágiles, y en particular del hormigón, comprende tres etapas bien diferenciadas. Una etapa que puede considerarse (dentro de ciertos límites) elástica, seguida de una no linealidad de prepico. Una vez alcanzada la resistencia máxima sobreviene la fase de pospico en la que los microdefectos se colisionan para dar lugar a fisuras o, más aún, a grietas, en dependencia del estado tensional.

La etapa de prepico o "endurecimiento" está caracterizada por la reducción de vacíos y el acomodamiento interno sin pérdida de integridad y puede abordarse con la teoría de materiales locales. La localización de deformaciones en este periodo puede analizarse con teorías basadas en el concepto de *smearred crack* (fisura difusa).

El pospico o "ablandamiento", por el contrario, es un fenómeno estructural. La falla, que se inicia en una superficie, incorpora volúmenes crecientes de material a medida que se incrementa el nivel de la presión de confinamiento. En este caso, la resistencia degradada

de materiales cuasi-frágiles como el hormigón se debe a dos componentes. Por un lado, la contribución a la resistencia por el proceso de fracturación o microfisuración que responde a las propiedades de fractura del material y, por el otro, la contribución debida al daño o degradación de la porción de sólido ubicado entre microfisuras activas o dentro de las bandas de corte activas. Es por ello que la formulación constitutiva que se propone en esta tesis combina los conocimientos y propiedades de energía de fractura del hormigón con formas no locales de gradientes de las teorías materiales, para describir y tener en cuenta las dos contribuciones a la rigidez degradada en regimen de ablandamiento.

De esta manera se logra una formulación material que combina dos longitudes características, la longitud característica de fractura relacionada con propiedades de la energía de fractura y que describe la energía total disipada en la o las fisuras o microfisuras activas durante el proceso de falla del hormigón. La segunda, longitud interna característica de gradientes, es una medida del volumen de sólido que participa activamente en el proceso de degradación y mide el ancho de la banda de corte. La formulación constitutiva además está enmarcada consistentemente en las leyes de la termodinámica, tanto en el regimen de prepico como de ablandamiento.

El algoritmo numérico de elementos finitos desarrollado para llevar a cabo análisis predictivos del problema de valores de borde es una extensión del propuesto por la autora en la tesis de Magister "Modelación constitutiva basada en la teoría de gradientes" (2003)(1).

Las soluciones predictivas se comparan con series de ensayos de laboratorio en hormigones y se verifica numéricamente la capacidad de la formulación de gradientes propuesta para predecir el comportamiento de materiales cuasi-frágiles bajo distintos niveles de confinamiento.

Desde el punto de vista de los modos de falla discontinua o localizada se realiza en este trabajo una extensión de la descripción geométrica de la condición de bifurcación discontinua para incluir una formulación de gradientes termodinámicamente consistente como la propuesta. Los resultados del análisis geométrico de localización que se presentan demuestran los límites de la capacidad regularizadora de la teoría de gradientes en general y del caso particular de la basada en descripciones no constantes de la longitud característica, como la que aquí se propone para materiales cuasi-frágiles. En ese sentido se observa que el modelo reproduce ajustadamente las condiciones de falla localizada que se observan en hormigones en estados traccionantes uni y biaxiales, así como en los casos triaxiales con bajo confinamiento. Por el contrario la creciente longitud característica de gradientes con el nivel de confinamiento conlleva a modos de falla difusa de moderada y alta ductilidad, en casos bi y triaxiales con confinamientos no nulos y crecientes.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del Arte del Conocimiento y Modelación del Comportamiento Mecánico de Materiales	3
1.2. Escalas de Observación del Comportamiento de Materiales	4
1.3. Escalas de Observación del Comportamiento de Materiales Compuestos como el Hormigón	6
1.4. Objetivos de la Tesis	6
1.5. Marco Teórico	7
1.6. Organización de la Tesis	8
2. Teorías Constitutivas Locales y No Locales	10
2.1. Comportamiento Material No Disipativo o Elástico	12
2.1.1. Material Elástico Local	12
2.1.2. Material Elástico No Local	14
2.2. Material Local Disipativo Elastoplástico	14
2.2.1. Teoría del Flujo de la Plasticidad	16
2.2.2. Forma Termodinámicamente Consistente de la Teoría del Flujo de la Plasticidad	19
2.3. Material No Local Disipativo Elastoplástico	21

2.3.1. Teoría No Local del Flujo de la Plasticidad	21
2.3.2. Teoría No Local Basada en Mecánica de Fracturas	22
2.3.3. Teorías No Locales de Orden Superior	22
2.3.4. Teoría No Local Elastoplástica Basada en Gradientes	30
2.3.5. Teoría Termodinámicamente Consistente de la Elastoplasticidad No Local Basada en Gradientes	34
3. Criterios e Indicadores de Falla de Modelos Matemáticos de Materiales Cuasi-frágiles	39
3.1. Indicadores de Falla Difusa o Continua	41
3.1.1. Indicador de Pérdida de Estabilidad	41
3.1.2. Indicador de Máxima Resistencia	42
3.1.3. Indicador de Pérdida de Unicidad de la Solución	43
3.1.4. Indicadores de Falla Difusa para Material Elastoplástico de Gradientes Termodinámicamente Consistente	44
3.2. Indicador de Falla Localizada	45
3.2.1. Condición Analítica de Localización	46
3.2.2. Solución Analítica de Localización	47
3.2.3. Condición Geométrica de Localización	51
3.3. Condiciones de Localización para Materiales Elastoplásticos de Gradientes	54
3.3.1. Condición Geométrica de Localización para Materiales Elastoplásticos de Gradientes	56
4. Teoría Constitutiva Elastoplástica de Gradientes para Materiales Cuasi-frágiles	58
4.1. Características del Comportamiento de Falla del Hormigón	59
4.2. Criterios de Máxima Resistencia	64

4.3. El Criterio de Máxima Resistencia de Drucker-Prager	66
4.4. El Criterio de Máxima Resistencia de Leon para Hormigón	68
4.5. Modelo LDP de Elastoplasticidad de Gradientes Basado en Energía de Fractura	72
4.6. Ley de No Asociatividad del Modelo de LDP	74
4.7. Ley de Endurecimiento Isótropo del modelo LDP	74
4.7.1. Consistencia Termodinámica de la Formulación de Endurecimiento del Modelo LDP	76
4.8. Régimen de Ablandamiento en el Modelo LDP Basado en Gradientes y Energía de Fractura	77
4.8.1. Ley de Ablandamiento Isótropa Basada en Energía de Fractura	79
4.8.2. Ley de Ablandamiento Isótropa Basada Gradientes	80
4.8.3. Consistencia Termodinámica de la Formulación de Ablandamiento del Modelo LDP	81
5. Implementación Numérica del Modelo y Análisis de Problema de Valores de Borde	84
5.1. Aspectos Algorítmicos de la Formulación General de la Teoría de Gradientes. Discretización de Elementos Finitos	84
5.2. Algoritmo para la Formulación Termodinámicamente Consistente de la Teoría de Gradientes Basado la Formulación Mixta de EF	89
5.3. Calibración del Modelo LDP Basado en Teoría de Gradientes y Energía de Fractura	93
5.4. Predicciones Numéricas y Análisis de Localización en Procesos de Falla de Hormigones	95
6. Análisis y Predicción de Formas Localizadas de Falla en Hormigón	109
6.1. El Método Geométrico de Localización Aplicado al Modelo LDP de Plasticidad de Gradientes Termodinámicamente Consistente	109

<i>Tabla de Contenidos</i>	VII
6.2. Análisis de Localización del Modelo LDP de Plasticidad de Gradientes Termodinámicamente Consistente	112
7. Conclusiones	124
A. Espacio de Tensiones de Haigh-Westergaard	138
B. Teoría de la Termodinámica	141
B.1. Marco Histórico	141
B.2. El Rol de la Termodinámica en la Mecánica del Continuo	142
B.3. Definiciones Básicas	142
B.3.1. Sistema Termodinámico	142
B.3.2. Variables de Estado Termodinámicas	142
B.3.3. Procesos y Sistemas Reversibles e Irreversibles	143
B.4. Primera Ley de la Termodinámica. Balance Energético	144
B.5. Segunda Ley de la Termodinámica. Desigualdad de la Entropía	146
B.5.1. Desigualdad de la Entropía en Sistemas Irreversibles	146
B.5.2. Variables de Estado de Sistemas Irreversibles	148
B.6. Potenciales Termodinámicos. Relaciones Constitutivas de Coleman	148
B.7. Aplicaciones al Campo de la Elastoplasticidad Local	149
B.7.1. Ecuaciones Constitutivas	149
B.7.2. Superficie de Fluencia - Leyes de Endurecimiento y Ablandamiento	150
B.8. Principio de la Máxima Disipación Plástica para Flujo Plástico Asociado	151
B.8.1. Desigualdad de la Disipación	151
B.8.2. Regla de la Normalidad	151
B.9. Elastoplasticidad de Gradientes Termodinámicamente Consistente	152

Capítulo 1

Introducción

La caracterización y predicción del comportamiento de falla de materiales es de fundamental importancia en el análisis y diseño de las estructuras y los mecanismos que las componen, frente a acciones mecánicas variadas y complejas que pudieran acontecer en condiciones de servicio. La caracterización del comportamiento de los materiales constitutivos debe necesariamente abarcar el amplio espectro de los materiales dúctiles y cuasi-frágiles en regímenes que exceden largamente el rango elástico para permitir un dimensionado ajustado y consecuentemente, un diseño óptimo de las estructuras relacionadas. El análisis del comportamiento de materiales involucra las siguientes etapas:

- desarrollo de formulaciones constitutivas basadas en teorías anelásticas apropiadas,
- implementación numérica de las formulaciones constitutivas para la integración de tensiones en el marco de incrementos realmente finitos de acciones aplicadas (desplazamientos, deformaciones, fuerzas o combinaciones de éstas),
- calibración de las formulaciones y algoritmos numérico-computacionales desarrollados, y
- validación predictiva de los modelos y teorías propuestos frente a resultados experimentales confiables.

Una vez validados los modelos y formulaciones constitutivas de los materiales, sean estos dúctiles o cuasi-frágiles, se pasa entonces al uso combinado de los mismos en la solución de problemas de valores de borde o de valores iniciales mediante elementos finitos.

Los serios inconvenientes o patologías que caracterizan a las predicciones de elementos finitos basados en el concepto de fisura difusa (*smearred crack*) en el caso de procesos de falla localizada fueron advertidos en los '80 como resultado de los primeros trabajos de modelación no lineal de sólidos bajo este concepto [Willam et al (1984)(2) y (1987)(3), Bažant et al (1983)(4), Bažant (1986)(5), Oliver (1989)(6), Willam et al (1990) (7)]. La dependencia de los resultados respecto del tamaño y orientación de los elementos finitos en la discretización espacial se hace crítica mientras las ecuaciones se tornan mal condicionadas. Para resolver esta deficiencia de los modelos hay dos estrategias posibles de adoptar.

- Mejorar la tecnología de los elementos finitos, desarrollando formulaciones capaces de seguir las direcciones críticas de localización post-bifurcación.
- Regularizar la descripción del comportamiento material a nivel constitutivo.

Una combinación de ambos procedimientos parece ser la estrategia más efectiva. Se generan entonces dos líneas de investigaciones bien diferenciadas en la comunidad científica internacional:

- Los estudios tendientes a desarrollar formulaciones de elementos finitos aptos para falla localizada, que evitan los bloqueos y la distribución espuria de falla característica de los elementos convencionales o conformes. Responden a esta característica los elementos de junta [Lopez (1999)(8), Carol (2001)(9), Etse et al (2004)(10)], que permiten resolver el problema de las formas localizadas de falla mediante discontinuidades fuertes planteadas en el campo de desplazamientos. Asimismo, los elementos finitos basados en el concepto de discontinuidades fuertes (*strong discontinuities*) cuya respuesta en términos de desplazamiento cambia de continua a discontinua al activarse condiciones de salto particulares [Simo et al (1993)(11), Simo y Oliver (1994)(12), Oliver et al (2002)(13) (2003)(14)]. Finalmente, aunque con marcada menor eficiencia, pertenecen también a este grupo los elementos finitos mixtos basados en campos adicionales de deformaciones y/o tensiones que incorporan información de las direcciones de localización de los modelos constitutivos a nivel de punto de Gauss [Belytschko et al (1988)(15), Ortiz et al (1989)(16), Simo y Rifai (1990), Dvorkin et al (1990)(17), Etse et al (1991)(18), Borst et al (1993)(19), Armero et al (1996)(20), Larsson et al (1996)(21)].

- Los estudios tendientes a enriquecer las formulaciones constitutivas mediante teorías no locales que permiten incorporar longitudes características a las formulaciones macromecánicas. Tal es el caso de las teorías de la plasticidad y daño continuo basadas en conceptos de energía

de fractura [Griffith (1921)(22), Hillerborg et al (1976)(23), Vecchio y Collins (1981)(24), Lubliner et al (1989)(25), Luccioni et al (1996)(26)], la teoría micropolar de Cosserat [Borst (1991) (27), Willam et al (1995) (28), Etse et al (2003) (29), Etse et al (2004) (30), Sluys (1992) (31)], la viscoplasticidad que incorpora una regularización mediante un tiempo característico [Etse y Willam (1999)(32), Carosio et al (2000)(33)], la teoría no local integral [Eringen y Edelen (1972)(34), Bažant (1984) (35)] y la teoría de gradientes superiores [Vardoulakis y Aifantis (1991)(36), Sluys et al (1993)(37), Pamin (1994)(38), Svedberg (1999)(39), Vrech (2002)(40) y (2003)(1)].

En este trabajo de tesis las investigaciones se focalizan en el enriquecimiento de la teoría de gradientes mediante su replanteo para satisfacer la consistencia termodinámica y para incorporar conceptos de energía de fractura en la descripción del comportamiento de pospico de hormigones.

1.1. Estado del Arte del Conocimiento y Modelación del Comportamiento Mecánico de Materiales

El corto período de tiempo que va desde la propuesta y desarrollo de la teoría de gradientes superiores de deformaciones, a partir de los trabajos originales de Aifantis (1984 y 1987)(41) (42), Coleman y Hodgdon (1985)(43), Belytschko y Lasry (1989)(44), ha permitido la formulación de modelos constitutivos altamente promisorios para el estudio y simulación computacional de procesos de falla dúctil de materiales en forma objetiva respecto al tamaño y dirección de los elementos finitos. Las formulaciones propuestas han cubierto la descripción macro y micromecánica de materiales dúctiles.

Hasta aquí la teoría material no local basada en gradientes superiores de deformaciones incorpora una longitud característica que se mantiene constante en todo el espectro de tensiones y durante toda la historia de deformación en el sólido. Dicha longitud característica es calibrada a partir de cualidades micro o macroestructurales de los materiales, las cuales, sin embargo, experimentan dramáticas variaciones conforme la historia de deformaciones y los estados tensionales gobernantes en la vecindad de la partícula material analizada. Por lo tanto, el hecho de considerar longitudes características invariables significa un fuerte condicionante o, más bien, limitante para el caso de materiales cuasi-frágiles, en los que el comportamiento de falla presenta fuertes variaciones en función del nivel de presión de confinamiento, como en materiales dúctiles en los que la falla depende el nivel de hetero-

geneidad de la microestructura y el tipo de trabajo mecánico (historia de deformaciones), al que fue sometido.

Otra fuerte limitación de las propuestas de modelos constitutivos basados en gradientes es que los mismos carecen de la capacidad de reproducir procesos de falla fuertemente localizados. Este hecho deviene de las propiedades regularizantes del comportamiento de ablandamiento de esta teoría material, la cual conlleva a "ductilizar" las respuestas en las que el continuo clásico mostraba saltos del campo de deformaciones en la forma de bifurcaciones discontinuas. Los materiales cuasi-frágiles como hormigones, bajo estados tensionales traccionantes o compresivos con bajo o nulo confinamiento, desarrollan fisuras o fracturas, las cuales son discontinuidades fuertes. En estos casos la degradación está caracterizada por las propiedades de la mecánica de fractura de los mismos, las cuales trascienden las posibilidades de las formulaciones clásicas de gradientes.

Consiguientemente, la idea fundamental en esta tesis es incorporar a las definiciones básicas de longitud característica, conceptos enriquecedores o supletorios que permitan describir las variaciones que debe experimentar este parámetro geométrico representativo de la forma de falla. En particular se busca que la longitud característica de gradientes de la formulación no local esté controlada por funciones dependientes del estado tensional y de la historia de deformación. Esto permitirá ampliar las potencialidades de la teoría no local indicada para poder también describir formas localizadas de falla como las que caracterizan al hormigón.

Por otro lado, se busca extender la formulación de gradientes para incorporar la influencia de las propiedades de fractura que gobiernan los procesos de falla de materiales cuasi-frágiles en regímenes de bajo y nulo confinamiento. Todo esto define un objetivo bien detallado y a su vez novedoso y complejo para la presente tesis.

1.2. Escalas de Observación del Comportamiento de Materiales

La ciencia de materiales estudia el comportamiento de los mismos bajo diferentes escalas de observación. En general, las descripciones de los comportamientos mecánicos de los materiales ingenieriles se realizan a nivel macro o mesomecánico. Los procesos y propiedades físico-químicas en los niveles micromecánico, molecular y atómico son cuantificados y mapeados en las descripciones meso y/o macromecánicas. Para ello son necesarias teorías constituti-

vas enriquecidas, como la teoría de gradientes, que permitan a través de sus parámetros incorporar estas propiedades relevantes de la microestructura.

Para la caracterización de materiales ingenieriles se distinguen los niveles de observación descriptos a continuación y graficados en la Figura 1.1.

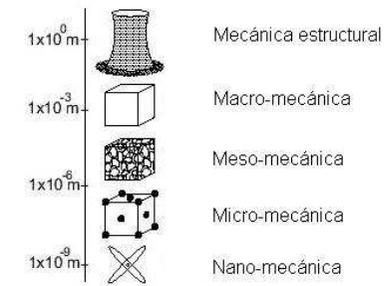


Figura 1.1: Niveles de observación de los materiales ingenieriles

Nivel Estructural: este nivel trabaja en escala métrica y es utilizado en problemas de estructuras civiles, mecánicas y aeroespaciales.

Nivel macromecánico: a escala milimétrica se obtienen la mayoría de las propiedades de los materiales en laboratorio. Constituye la macroescala, en la que los materiales se consideran continuos homogéneos y las propiedades caracterizadas se denominan "efectivas".

Nivel Micromecánico: en este nivel se utiliza una escala que permite la observación de las propiedades microestructurales tales como microdefectos y tamaño de granos. Constituye la mesoescala en la que los materiales se consideran compuestos heterogéneos.

Nivel Nanomecánico: nivel en el que tienen lugar los procesos moleculares y atómicos. Si se consideran procesos subatómicos en el marco de la mecánica cuántica, las relaciones causa-efecto están fuera del alcance de la mecánica newtoniana.

1.3. Escalas de Observación del Comportamiento de Materiales Compuestos como el Hormigón

El hormigón es un material multi-escala para el que pueden distinguirse los niveles de observación presentados en la Figura 1.2 [van Mier (1997)(45)].

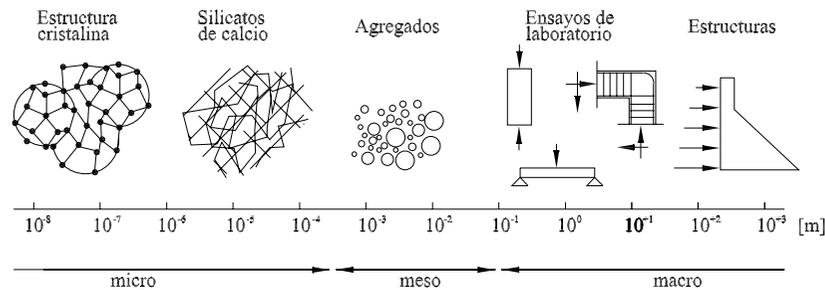


Figura 1.2: Escalas de observación del hormigón

A escala nanométrica (10^{-9} m) se observa la estructura atómica del cemento y los agregados. A escala micrométrica (10^{-6} m) se distinguen los granos de cemento deshidratados, silicatos de calcio, hidróxidos de calcio y la estructura de poros. En la mesoescala (10^{-3} m) se distinguen partículas individuales en la matriz cementicia. En la escala de laboratorio (10^1 m) no puede reconocerse la estructura interna y se suponen propiedades idénticas en cada punto.

1.4. Objetivos de la Tesis

Son objetivos específicos de esta tesis

- El desarrollo de una teoría constitutiva basada en la plasticidad de gradientes para materiales cuasi-frágiles, específicamente el hormigón, termodinámicamente consistente.
- El desarrollo de leyes de endurecimiento y ablandamiento no locales dependientes del estado tensional de confinamiento aplicables al modelo constitutivo desarrollado.
- El enriquecimiento de la formulación de ablandamiento con conceptos de mecánica de fractura para describir el proceso de degradación de resistencia debida al desarrollo de micro o macrofisuras en los materiales cuasi-frágiles como el hormigón en estados tensionales con bajo confinamiento.
- La formulación de una ley de flujo plástico no asociada que responda al comportamiento volumétrico del hormigón sometido a diferentes presiones de confinamiento.
- La implementación computacional en código de elementos finitos.
- La evaluación de las predicciones de falla localizada en bajos y altos niveles de confinamiento. Se considerarán metodologías numéricas y geométricas para dicha evaluación. Para los fines del análisis de falla localizada mediante el método geométrico se extenderá su formulación para el caso de continuos basados en gradientes.
- La determinación de los límites de validez de la regularización de la teoría utilizada.

1.5. Marco Teórico

En el campo de la mecánica computacional de sólidos, para un importante número de implementaciones computacionales en disciplinas de ingeniería son aplicables las soluciones de problemas estáticos donde los efectos inerciales no se toman en consideración.

Las soluciones de problemas de valores de borde relacionados con la mecánica de sólidos en esta tesis satisfacen las siguientes condiciones:

- Ecuaciones de movimiento
- Ecuaciones cinemáticas
- Relaciones constitutivas de materiales
- Condiciones de borde

- Leyes termodinámicas

Además se asumen las siguientes hipótesis:

- Material continuo, isótropo y homogéneo.
- Teoría de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones.

1.6. Organización de la Tesis

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico de las teorías constitutivas elásticas y elastoplásticas tanto locales como no locales, como así también la teoría del flujo de la plasticidad y nociones generales de leyes de endurecimiento y ablandamiento.

Se presentan las nociones básicas de teorías no locales, tales como los continuos Cosserat, la viscoplasticidad y la mecánica de fracturas y se detallan dos tipos de formulaciones de la teoría no local de gradientes:

- la formulación general en el marco de la hipo-elastoplasticidad, en la sección 2.3.4,
- la formulación termodinámicamente consistente, en la sección 2.3.5.

En el capítulo 3 se realiza el análisis teórico de criterios e indicadores de falla difusa y localizada, en forma analítica y geométrica.

En el capítulo 4 se describen criterios de resistencia máxima aplicables a la caracterización del comportamiento de materiales cuasi-frágiles. A partir del modelo de Leon original [Leon (1935)(46) (47)], y modificado [Willam y Wranke (1984)(48), Etse (1992)(49)] se desarrolla modelo material LDP¹, basado en la teoría de gradientes termodinámicamente consistente, parcialmente regularizante.

Se formulan las leyes de endurecimiento y ablandamiento en correspondencia con el comportamiento físico del hormigón en dichos regímenes y una ley de no asociatividad acorde con el efecto de dilatancia, demostrándose la consistencia termodinámica en todo el espectro de comportamiento del hormigón.

¹Leon - Drucker-Prager

En el capítulo 5 se describen los algoritmos utilizados en las formulaciones elastoplásticas de gradientes y la calibración los parámetros utilizados en la formulación del modelo de acuerdo a una serie de ensayos de laboratorio realizados por Hurlbut (1985) (50) en probetas de hormigón con distintos niveles de confinamiento y sometidas a distintos estados tensionales. A continuación, se presentan las predicciones de la implementación numérico-computacional y el análisis de localización para procesos de falla de hormigones. El análisis computacional del modelo se realiza con un programa computacional de elementos finitos basado en gradientes superiores de deformaciones que se desarrolló en el marco de este trabajo de tesis a partir de una extensión de la versión original del mismo, propuesto por la autora [Vrech (2003)(1)]. Esta extensión incluyó la implementación del estado axialsimétrico de tensiones y de longitudes características de gradientes variables en cada elemento en función del estado de tensiones gobernantes. El software computacional desarrollado es en base *matlab* y permite control de desplazamientos y mixto (desplazamientos y fuerzas parciales), con elementos finitos triangulares de deformación constante.

En el capítulo 6 se realiza el análisis de predicciones de falla localizada en forma analítica y geométrica. Se determinan los límites de la falla dúctil del modelo de gradientes propuesto y los límites de validez de la regularización del mismo.

Posteriormente se enuncian las conclusiones obtenidas respecto de los objetivos planteados para el desarrollo de esta tesis.

Por último se adjuntan las referencias bibliográficas y los apéndices conteniendo información sobre la representación de estados tensionales y una revisión de conceptos de la teoría de la termodinámica.

Capítulo 2

Teorías Constitutivas Locales y No Locales

Las teorías constitutivas describen el comportamiento de los materiales naturales o manufacturados bajo diferentes condiciones o acciones mecánicas. Enfocando la atención en los materiales ingenieriles, el comportamiento es estudiado generalmente a nivel macroscópico sin considerar estructuras atómicas ni cristalinas, siendo entonces homogéneos e isotrópicos. En este nivel de análisis, la respuesta mecánica material bajo condiciones isotermales puede expresarse en términos de tensiones, deformaciones y variables internas de estado que describen el efecto de la historia de carga, relacionando la cinemática del problema con la descripción cinética del movimiento.

La mecánica del continuo incluye una gran diversidad de modelos o teorías constitutivas de materiales sólidos que pueden a priori ser clasificados en dos grandes grupos:

- las teorías constitutivas no disipativas o elásticas, y
- las teorías materiales disipativas o inelásticas.

En segundo término las teorías materiales pueden ser clasificadas en independientes o dependientes del tiempo y la tasa de tiempo, en virtud que incluyan o no efectos reológicos y tiempo-dependientes en sus formulaciones. Existe una tercera posible clasificación que está relacionada con la existencia o no de una correlación entre las ecuaciones constitutivas y los principios termodinámicos que surgen de los balances principales. Esta clasificación

conduciría a agrupar los modelos o teorías materiales en termodinámicamente consistentes e inconsistentes.

Finalmente, un análisis más detallado que involucre el nivel de correlación entre la observación y respuesta macroscópica y las propiedades de los materiales a nivel microscópico, permitiría establecer una cuarta clasificación posible de las teorías constitutivas en locales y no locales.

Los desarrollos en esta tesis están orientados a una teoría constitutiva inelástica para materiales cuasi-frágiles como el hormigón, independiente del tiempo y/o tasa del tiempo, termodinámicamente consistente y no local.

Resulta clara y obvia la necesidad de incluir formas disipativas o inelásticas en los modelos constitutivos de materiales cuasi-frágiles, dada la preponderancia del régimen de respuesta no lineal disipativo en su comportamiento. Asimismo, la restricción a una descripción independiente del tiempo o tasa de tiempo significa que los desarrollos en esta tesis no están orientados a describir efectos reológicos o pseudo-dinámicos.

La necesidad de considerar una teoría material no local surge de la importancia de las propiedades micromecánicas en la respuesta macroscópica de los materiales. En ese sentido los desarrollos de la comunidad científica internacional en la última década muestran una tendencia creciente a incorporar mayor cantidad de propiedades micromecánicas en las formulaciones constitutivas, conduciendo a teorías con órdenes de no localidad crecientes.

Más allá de la ventaja que dicha incorporación implica, las formulaciones no locales tienen la ventaja de introducir una dimensión geométrica en la forma de una longitud o tiempo característico, que objetiviza la región de disipación inelástica respecto a tamaños y orientaciones de elementos finitos. En otras palabras, esta longitud o tiempo característico elimina el déficit dimensional que caracteriza al campo cinemático de los medios continuos clásicos, representado por el tensor de deformaciones de Green o Lagrange, otorgándole una dimensión geométrica definida.

Una de las mayores complejidades es compatibilizar las teorías constitutivas no locales con los principios termodinámicos. En este capítulo se presta especial atención a la consistencia termodinámica de la teoría de gradientes que se propone, de manera tal que las variables de estado locales y no locales, en régimen de endurecimiento y ablandamiento, son directamente deducidas del potencial total de deformaciones elásticas e inelásticas del material.

Partiendo de la clasificación general antes mencionada de las teorías constitutivas en no

disipativas o elásticas y disipativas o inelásticas, se presenta en las secciones siguientes un resumen de las ecuaciones fundamentales, tanto para el caso de las formulaciones locales como no locales. Una detallada discusión de los fundamentos matemáticos y fenomenológicos de las teorías que se abordan en este capítulo, puede consultarse en las bibliografías de Malvern (1969)(51), Kachanov (1974)(52), Eringen (1976)(53), Desai (1984)(54), Ogden (1997)(55), Holzapfel (2000)(56) y Dvorkin (2005)(57), entre otros.

En la parte final del capítulo se describe la teoría no local de gradientes termodinámica consistente que sirve de base al modelo constitutivo para hormigones desarrollado en el capítulo 4.

2.1. Comportamiento Material No Disipativo o Elástico

En este caso la respuesta material es completamente reversible luego de cesada la acción mecánica.

2.1.1. Material Elástico Local

En los modelos materiales elásticos locales, el tensor de tensiones de cada punto infinitesimal depende pura y exclusivamente de la cinemática del mismo punto, en contraposición a la definición de material no local de Noll [Truesdell y Noll (1965)(58)].

La forma más elemental de la teoría elástica local es la ley de proporcionalidad de Robert Hooke (1635-1703), que caracteriza el comportamiento de un resorte en el que las deformaciones ε se incrementan proporcionalmente con la carga aplicada σ . La definición del módulo de elasticidad E , siendo

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.1)$$

es atribuida a Thomas Young (1773-1829) y representa la proporcionalidad del comportamiento material elástico.

El carácter tensorial del estado de tensiones σ fue establecido por Cauchy mediante el tensor simétrico de segundo orden

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \quad ; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2)$$

en función de la posición en el espacio \mathbf{x} y del tiempo t . El estado de deformaciones conjugado ε se representa en coordenadas cartesianas con el tensor de segundo orden ε , también simétrico

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (2.3)$$

Así surge el más clásico de los modelos constitutivos elásticos locales, el **modelo elástico de Cauchy** que puede expresarse en forma general como

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{ij}) \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = f_{ij}^{-1}(\sigma_{ij}) \quad (2.4)$$

siendo f_{ij} una función tensorial lineal. Debido a la ausencia de disipación de energía estas relaciones son invertibles y reversibles.

Cuando la variable del problema depende de una función o potencial de densidad de energía $\Psi = \Psi(\varepsilon_{ij})$ o de su complemento $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\sigma_{ij})$, y se pueden establecer las relaciones

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{\Psi}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.5)$$

se obtiene la forma hiperelástica de la elasticidad basada en los trabajos de George Green (1723-1841) y da origen al **modelo de Green o hiperelástico**. Las relaciones de la ec. (2.5) también son invertibles y reversibles, implicando la ausencia de disipación energética. Este modelo es la forma más general de describir el comportamiento elástico tanto lineal como no lineal.

Sin embargo, la forma más difundida es la utilizada por el **modelo hipoeelástico**, basada en la observación experimental. La hipoeelasticidad fue introducida por Truesdell [ver Truesdell (1955)(59) y (1956)(60)] y constituye una ley incremental generalizada, en la que el incremento de tensiones se expresa en función del incremento de deformaciones. En forma general, una ley constitutiva hipoeelástica se expresa como

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad (2.6)$$

donde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ representan las tasas de tensiones y deformaciones respectivamente. Si bien dichas tasas representan derivadas temporales, pueden representar relaciones incrementales independientes del tiempo si la ec. (2.6) también lo es. El modelo hipoeelástico se expresa como

$$\dot{\sigma}_{ij} = f_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\varepsilon}_{kl}) \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}, \varepsilon_{kl}) \quad (2.7)$$

Al igual que en los otros modelos elásticos, debe cumplirse el concepto de reversibilidad termodinámica.

La ley generalizada de Hooke de ec. (2.1) se enmarca en los tres modelos anteriores. En forma tensorial se enuncia como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

siendo \mathbf{E}^e el tensor elástico de cuarto orden. A causa de la simetría de los tensores de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, el tensor elástico puede expresarse como

$$\mathbf{E}^e = \Lambda \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 + 2G \mathbf{I}_4^{sim} \quad (2.9)$$

siendo \mathbf{I}_2 el tensor identidad de segundo orden e \mathbf{I}_4^{sim} el tensor unitario simétrico cuarto orden donde Λ y G representan a las constantes elásticas definidas por *Gabriel Lamé* (1795–1870) en relación al módulo de elasticidad E y al coeficiente de Poisson ν

$$\Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.10)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

2.1.2. Material Elástico No Local

Existen teorías materiales elásticas que incorporan propiedades internas inherentes a la microestructura en las relaciones tensión-deformación. Dichas propiedades son descritas en términos de una dimensión geométrica o "longitud característica", caso de la teoría micropolar de Cosserat y de la teoría de gradientes de deformación elástica, o en términos de una dimensión temporal, "tiempo característico", en el caso de la viscoelasticidad. Las teorías elásticas no locales en términos de longitudes características describen a través de estas la dimensión de la microestructura que influye en la respuesta de cada punto material infinitesimal. Asimismo, las teorías elásticas no locales en términos de tiempos característicos describen mediante tasas de tiempo las propiedades reológicas de la microestructura material.

2.2. Material Local Disipativo Elastoplástico

Dentro de la gran gama de teorías constitutivas inelásticas (teoría de daño continuo, teoría endocrónica, mecánica de fractura, etc.) consideramos aquí la teoría de la elastoplasticidad.

En esta teoría, la respuesta disipativa se caracteriza por la descomposición del campo de deformaciones en una contribución elástica y otra plástica irreversible

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.12)$$

que induce a un comportamiento energético no conservativo dependiente del camino recorrido.

Mientras que en la teoría de la elasticidad los caminos de carga y descarga coinciden dada la biunicidad de la relación tensión-deformación, en elastoplasticidad la descarga es elástica y se observan deformaciones plásticas remanentes. Un nuevo proceso de carga coincidirá con la línea de descarga definiéndose un nuevo límite elástico.

Existen dos principios teóricos para describir el comportamiento elastoplástico:

- La teoría de la deformación total de Hencky (1924)(61) y Nadai(1950)(62), que relaciona tensiones y deformaciones totales en forma algebraica. Las deformaciones se descomponen aditivamente en sus partes elástica y plástica, esta última definida en función del estado tensional total. Esta forma de la plasticidad no ha tenido gran eco por las fuertes dificultades que presenta para resolver procesos incrementales de deformación anelástica en sólidos.

- La formulación incremental conocida como teoría del flujo de la plasticidad, basada en los trabajos de Saint-Venant, Lévy y Mises y completada con las contribuciones de Prandtl y Reuss. En ese sentido, fue Saint Venant (1871)(63) quien introdujo las relaciones constitutivas básicas para materiales perfectamente plásticos y sugirió que los ejes principales del incremento de deformaciones coincidiera con los ejes principales de las tensiones. Lévy (1871)(64) fue quien derivó las ecuaciones generales en tres dimensiones, mientras que von Mises en 1913 (65) formuló las ecuaciones generales de la plasticidad conjuntamente con su criterio de fluencia insensitivo a presiones (Teoría J_2). Finalmente, Prandtl en 1924 (66) extendió las ecuaciones de Saint Venant, Lévy y von Mises incluyendo las componentes de deformaciones elásticas en sólidos bidimensionales, y Reuss en 1939 (67) formuló las mismas para el caso tridimensional. Es importante notar que es el propio von Mises en 1928 quien completa la formulación teórica de la ley del flujo de la plasticidad cuando introduce formalmente el concepto de función de fluencia como potencial plástico en las relaciones incrementales tensión-deformación.

En lo que sigue se detalla la teoría de flujo de la plasticidad, que es a gran distancia la más utilizada por ser la más amigable en la implementación computacional, para resolver procesos de deformaciones anelásticas como resultado de incrementos monotónicos y sucesivos del campo de deformaciones y tensiones.

2.2.1. Teoría del Flujo de la Plasticidad

Se describen en esta sección las propiedades que caracterizan a la teoría del flujo de la plasticidad: la condición de fluencia, las leyes de endurecimiento y ablandamiento, la ley de flujo plástico, la condición de consistencia plástica y la relación constitutiva elastoplástica.

Condición de Fluencia

El inicio del flujo plástico queda definido por una condición de fluencia $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$ que delimita el dominio elástico, siendo $\boldsymbol{\kappa}$ el set de variables internas anelásticas.

Considerando comportamiento isótropo, la función F puede expresarse en términos de invariantes de tensiones (argumentos escalares) y de una variable interna κ , también escalar. En el caso de materiales metálicos, F resulta independiente de los estados tensionales hidrostáticos y puede expresarse en términos J_2 , segundo invariante del tensor desviador de tensiones S_{ij} . Por el contrario, los ensayos experimentales de hormigones, suelos y otros materiales cuasi-frágiles demuestran la dependencia de la función de fluencia respecto de los tres invariantes: I_1 , J_2 y J_3 [ξ , ρ y θ en las coordenadas de Haigh-Westergaard, ver Apéndice A]

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad , \quad J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{kl} \quad \text{siendo} \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \quad (2.13)$$

La variable interna κ puede definirse como una deformación plástica equivalente ε^p , o como un trabajo plástico ω^p , de acuerdo a

$$\kappa = \varepsilon^p = \lambda \sqrt{\mathbf{m} : \mathbf{m}} \quad , \quad \acute{o} \quad (2.14)$$

$$\kappa = \omega^p = \lambda \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m} \quad (2.15)$$

En el caso particular de comportamiento de endurecimiento o ablandamiento isótropo, la función de la superficie de fluencia

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \Gamma_y(\kappa) \leq 0 \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.16)$$

siendo \mathbf{n} la normal al plano tangente, se expande o contrae homogéneamente a medida que se incrementan las deformaciones plásticas.

Ley de Endurecimiento y Ablandamiento

El comportamiento plástico queda definido por la función Γ_y y su evolución viene dada por la ley de endurecimiento o ablandamiento

$$\dot{\Gamma}_y = H^p \dot{\kappa} \quad (2.17)$$

siendo H^p el módulo de endurecimiento o ablandamiento isótropo y $\dot{\kappa}$ la tasa de la variable escalar interna definida a partir de las ecs. (2.14) o (2.15) como

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \sqrt{\mathbf{m} : \mathbf{m}} \quad , \quad \acute{o} \quad (2.18)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\omega}^p = \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m} \quad (2.19)$$

Ley de Flujo Plástico

La tasa del tensor de deformaciones plásticas $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ se calcula mediante la regla de flujo plástico o de normalidad, expresada como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad , \quad \mathbf{m} = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.20)$$

donde \mathbf{m} define la dirección del flujo plástico y $\dot{\lambda}$ es la tasa del multiplicador plástico, un escalar positivo que define la magnitud de la plastificación.

La función $Q(I_1, J_2, J_3, \kappa)$ se conoce como potencial plástico y si coincide con la función de fluencia F , la regla de flujo plástico se denomina asociada [Chen (1988)(68), Desai(1984)(54)].

Los criterios de carga y descarga y la condición de consistencia plástica de Prager se satisfacen simultáneamente con las tres condiciones de Kuhn-Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad F(I_1, J_2, J_3, \kappa) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} F(I_1, J_2, J_3, \kappa) = 0 \quad (2.21)$$

Los criterios de carga y descarga se deducen como

$$\text{descarga elástica} \quad \mathbf{n} \mathbf{E}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} < 0 \quad (2.22)$$

$$\text{carga plástica neutral} \quad \mathbf{n} \mathbf{E}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (2.23)$$

$$\text{carga plástica} \quad \mathbf{n} \mathbf{E}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad (2.24)$$

Un cambio infinitesimal en la tasa de tensiones elásticas $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ causa carga, descarga o carga neutral dependiendo del ángulo que forma la trayectoria de las tensiones con el vector normal a la superficie de fluencia: agudo, obtuso o recto, respectivamente.

Condición de Consistencia Plástica

Durante la carga plástica el estado de tensiones debe permanecer en la superficie de fluencia, lo que conduce a la llamada condición de consistencia plástica, obtenida a partir de la expansión de la función F en una serie de Taylor de primer orden

$$\dot{F} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H^p \dot{\lambda} = 0 \quad , \quad H^p = -\frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\dot{\kappa}}{\dot{\lambda}} \quad (2.25)$$

El tipo de comportamiento plástico se determina de acuerdo al signo del módulo H^p :

$$\begin{cases} H^p > 0 & \text{comportamiento de endurecimiento,} \\ H^p = 0 & \text{plasticidad perfecta,} \\ H^p < 0 & \text{ablandamiento.} \end{cases}$$

A partir de la condición de consistencia plástica puede obtenerse la expresión que permite calcular la tasa del parámetro plástico. Sustituyendo la relación constitutiva elastoplástica expresada como combinación de las ecs. (2.8), (2.12) y (2.20)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{E}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{m}) \quad (2.26)$$

en la ec. (2.25), resulta

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h_p} \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad h_p = H^p + \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad (2.27)$$

Ley Constitutiva Elastoplástica Tangente

Sustituyendo en la ec. (2.26) la expresión correspondiente a la tasa del parámetro plástico de ec. (2.27) y operando, se obtiene la ley elastoplástica tangente

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \mathbf{E}^{ep} = \mathbf{E}^e - \frac{1}{h_p} \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{E}^e = \mathbf{E}^e - \frac{1}{h_p} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (2.28)$$

siendo

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad , \quad \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n} : \mathbf{E}^e \quad (2.29)$$

Con esta notación se evidencia que el tensor elastoplástico continuo \mathbf{E}^{ep} resulta de una degradación del operador elástico mediante un operador material de cuarto orden pero de rango 2, debido al producto tensorial $\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}$. A pesar de este déficit de rango de la componente anelástica del operador material, el mismo es suficiente para singularizar al operador elastoplástico continuo resultante, hecho que se verifica en la condición de tensión o resistencia máxima [ver sección 3.1.2].

2.2.2. Forma Termodinámicamente Consistente de la Teoría del Flujo de la Plasticidad

Se consideran en esta sección las propiedades de la teoría del flujo de la plasticidad (condición de fluencia, leyes de endurecimiento y ablandamiento, ley de flujo plástico, etc.), y otras propias de la formulación termodinámicamente consistente, como la adopción de un potencial total de energía libre de deformación y la ley de normalidad entre la tasa de la variable interna y del potencial plástico.

Los conceptos de la teoría termodinámica y sus aplicaciones a la elastoplasticidad se desarrollan en detalle en el Apéndice B y se resumen aquí las aplicaciones correspondientes a un modelo elastoplástico local isótropo.

Potencial Total de Energía Libre de Deformación

Extendiendo el concepto de hiperelasticidad al comportamiento elastoplástico, se adopta como potencial termodinámico la densidad de energía libre de deformación de Helmholtz, con la siguiente expresión aditiva

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \kappa) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^p(\kappa) \quad (2.30)$$

La energía libre de deformación elástica se define en la forma tradicional

$$\rho \Psi^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.31)$$

siendo ρ la densidad del material. Mientras que para la energía disipada durante el comportamiento plástico Ψ^p , se adopta una expresión arbitraria en términos de la variable plástica interna κ , magnitud escalar por tratarse de un modelo isótropo, sea éste lineal o no lineal.

Condición de Fluencia

La condición de fluencia termodinámicamente consistente se expresa de acuerdo a la función

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - K^p(\kappa) \leq 0 \quad (2.32)$$

en términos del tensor de tensiones totales $\boldsymbol{\sigma}$ y la variable plástica interna κ , energéticamente conjugada a la tensión disipativa local denominada K^p , calculados como

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.33)$$

$$K^p = -\rho \frac{\partial \Psi^p}{\partial \kappa} \quad (2.34)$$

Leyes de Normalidad

Definido un potencial plástico $Q(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$, tanto la tasa del tensor de deformaciones plásticas como la tasa de la variable interna deben permanecer normales a dicho potencial. Estas dos condiciones quedan aseguradas mediante la ley del flujo plástico de ec. (2.20) y la ley de normalidad [ver sección B.8.2]

$$\dot{\kappa} = \lambda \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial K^p}, \quad (2.35)$$

respectivamente.

Ley de Endurecimiento y Ablandamiento

La evolución del tensor de tensiones totales y de la tensión disipativa se obtiene combinando las ecs. (2.33) y (2.34) con las (2.20) y (2.35), resultando

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e - \dot{\lambda} \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad \text{con} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.36)$$

$$\dot{K}^p = -\dot{\lambda} H^p \frac{\partial Q}{\partial K^p}, \quad H^p = \rho \frac{\partial^2 \Psi^p}{\partial \kappa^2} \quad (2.37)$$

En la última expresión H^p representa el módulo de endurecimiento o ablandamiento "local".

Condición de Consistencia Plástica

La condición de consistencia plástica correspondiente a la forma consistente de la teoría del flujo de la plasticidad está dada por la expresión

$$\dot{F} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial K^p} \dot{K}^p = 0 \quad (2.38)$$

Combinando las ecs. (2.36), (2.37) y (2.38) es posible obtener la expresión para el cálculo de la tasa del parámetro plástico

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h} \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad h = H^p \frac{\partial F}{\partial K^p} \frac{\partial Q}{\partial K^p} + \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad (2.39)$$

Ley Constitutiva Elastoplástica Termodinámicamente Consistente

Sustituyendo en la ec. (2.36) la expresión correspondiente a la tasa del parámetro plástico de ec. (2.39), se obtiene la ley constitutiva elastoplástica consistente

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \mathbf{E}^{ep} = \mathbf{E}^e - \frac{1}{h} \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{E}^e \quad (2.40)$$

2.3. Material No Local Disipativo Elastoplástico

Como se citó al comienzo del capítulo, hay procesos que sólo pueden explicarse en forma apropiada si se consideran características micromecánicas del material.

Ejemplo de esto son el problema del ablandamiento y la localización de deformaciones en materiales cuasi-frágiles y friccionales. Modelos basados en la descripción continua local clásica conducen a sistemas de ecuaciones mal condicionados y a predicciones numéricas erróneas, tanto en plasticidad (*smearred crack*) como en daño continuo.

2.3.1. Teoría No Local del Flujo de la Plasticidad

Existe una gran variedad de formulaciones elastoplásticas no locales, entre las que se incluyen las basadas en mecánica de fractura, en la teoría micropolar de Cosserat, en formas no locales integrales y en la teoría no local de la plasticidad basada en gradientes superiores de deformaciones. A estas podrían agregarse también formulaciones viscoplásticas que pueden ser consideradas como formas no locales particulares de la teoría del flujo de la plasticidad, en las que la no localidad en la relación tensión-deformación se incorpora a través de las propiedades de dependencia temporal de las ecuaciones constitutivas. A continuación se resumen estas distintas formas no locales de la teoría de la plasticidad incluida la viscoplasticidad. Al final del capítulo se presenta en forma más detallada la forma no local de gradientes termodinámicamente consistente, base del modelo material desarrollado en este trabajo.

2.3.2. Teoría No Local Basada en Mecánica de Fracturas

En esta descripción se enriquece la relación constitutiva tensión-deformación mediante conceptos de energía de fractura, en porciones del dominio caracterizadas por una longitud característica. En el caso de modo de falla traccionante (modo I), el modelo de ablandamiento clásico puede asociarse a la energía de fractura G_f , tratada como una constante del material [Bažant y Oh (1983) (4), Willam (1984) (2)]

$$G_f = w \int \sigma du \quad (2.41)$$

donde w es el ancho de la zona de localización (la banda de falla en términos de *smearred crack*), donde las deformaciones se suponen constantes. Para eliminar la dependencia de la respuesta estructural carga-desplazamiento respecto de la malla, se asocia el ancho w al tamaño del elemento finito y en consecuencia, el diagrama de ablandamiento se ajusta a cada malla de elementos finitos.

La respuesta depende sólo de las propiedades del material y del tamaño estructural. Las soluciones carga-desplazamiento son independientes de la malla y reproducen el efecto tamaño, pero la energía de fractura disipada tiene lugar en un área distinta para cada malla, ya que la pérdida de elipticidad no fue evitada.

Extensiones al modo II de falla basadas en tasas de energía de fractura fueron desarrollados por Etse (1992)(49) en forma extensiva al concepto utilizado en el modo I de falla.

La seria desventaja de los modelos elastoplásticos basados en energía de fractura es que no solucionan el problema de la mala definición de las ecuaciones de equilibrio, lo cual implica potencialidades de inestabilidades numéricas. La patología de la plasticidad basada en mecánica de fractura se debe a que (de la misma forma que la elastoplasticidad de flujo clásica o local) las ecuaciones constitutivas resultantes corresponden a un truncamiento de primer orden de una serie de Taylor, aún cuando interviene una longitud característica.

2.3.3. Teorías No Locales de Orden Superior

Contrariamente a la elastoplasticidad basada en teoría de fractura, todas las otras formas no locales corresponden a truncamientos de orden superior de una serie de Taylor en términos de tensiones y representativos de la ecuación constitutiva.

En los modelos continuos, la cinemática debe incorporar la evolución de la microestructura,

las relaciones constitutivas macroscópicas deben ser no locales de orden superior. Esto significa esencialmente, una diferencia en la noción de sólido o material simple. Se admite que el tensor de tensiones en un punto material ξ depende de la historia del movimiento de todos los puntos materiales η en una cierta vecindad [Becker y Burguer (1975)(69)]

$$\sigma(\xi, t) = \varphi[\xi, x(\eta, t - \tau)] \quad , \quad 0 \leq \tau < \infty \quad (2.42)$$

siendo φ un funcional constitutivo no local, que puede tener la forma de una integral y puede depender solamente del movimiento relativo de los puntos η y ξ , que se aproxima mediante una serie de Taylor alrededor de ξ

$$x(\eta, t) - x(\xi, t) = F_1(\xi, t)(\eta - \xi) + \frac{1}{2}F_2(\xi, t)(\eta - \xi)^2 + \dots + \frac{1}{n!}F_n(\xi, t)(\eta - \xi)^n \quad (2.43)$$

donde F_2 representa el gradiente de segundo orden de deformación $\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}$ y F_n el de orden n , obteniéndose la relación constitutiva de grado n

$$\sigma(\eta, t) = \varphi[\xi, F_1(\xi, t - \tau), F_2(\xi, t - \tau), \dots, F_n(\xi, t - \tau)] \quad (2.44)$$

Los modelos no locales de orden superior son exitosos en este ámbito [de Borst (1993)(70)]. En el marco de la teoría del flujo de la plasticidad citamos los siguientes ejemplos de modelos no locales de orden superior: continuos elastoplásticos de Cosserat, continuos no locales integrales, continuos no locales tiempo-dependientes y continuos no locales de gradientes.

Teoría Micropolar Elastoplástica de Cosserat

La idea de los continuos Cosserat [Cosserat (1909)(71)] se basa en la suposición de que las fuerzas realizadas por una parte de un cuerpo sobre otra pueden representarse en una sección de corte con un vector tensión y una cupla, Figura 2.1. Dicha cupla es responsable de la existencia de microrotaciones que surgen como un campo cinemático adicional al clásico, constituido por deformaciones normales y tangenciales.

Para una configuración bidimensional en el plano (x, y) se definen las microcurvaturas κ_{zx} y κ_{zy} de la forma

$$\kappa_{zx} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad , \quad \kappa_{zy} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (2.45)$$

donde ω_z es la microrotación alrededor del eje z . Se supone que las cuplas μ_{zx} y μ_{zy} son las magnitudes energéticamente conjugadas a las microcurvaturas

$$\mu_{zx} = l^2 G_c \kappa_{zx} \quad , \quad \mu_{zy} = l^2 G_c \kappa_{zy} \quad (2.46)$$

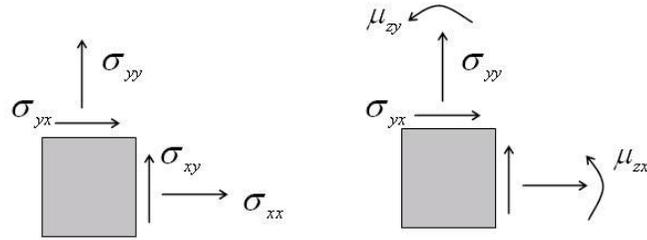


Figura 2.1: Componentes de tensiones para continuo clásico y micropolar.

donde G_c es el módulo elástico de corte de Cosserat y l la longitud interna del material. A partir del equilibrio rotacional de un elemento puede observarse que el tensor de tensiones no es simétrico ($\sigma_{yx} \neq \sigma_{xy}$).

Suponiendo que la microrotación ω_z es igual a

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.47)$$

donde u y v son los desplazamientos en las direcciones x e y respectivamente, las microcurvaturas pueden estimarse como

$$\kappa_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} \right), \quad \kappa_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.48)$$

El comportamiento anelástico del continuo micropolar de Cosserat está caracterizado por la descomposición aditiva de los tensores deformación y curvatura totales en las componentes elásticas y plásticas

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.49)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^e + \boldsymbol{\kappa}^p \quad (2.50)$$

Éstas pueden descomponerse a su vez en una componente simétrica y una antisimétrica.

La teoría elástica continua de Cosserat extendida a la elastoplasticidad se ha aplicado en al análisis de localización de deformaciones [Mühlhaus y Vardoulakis (1987) (72), de Borst (1991) (27), Etse et al. (2003)(29)]. La presencia de microrotaciones es relevante especialmente para materiales granulares (cohesivo-friccionales) y la longitud interna se ha utilizado

para determinar el ancho de las bandas de corte. La capacidad regularizadora del ablandamiento de los modelos basados en la teoría de Cosserat se limita a los casos en que los grados de libertad rotacionales se activan durante la deformación. Es por ello una teoría regularizante apropiada para problemas de corte dominante y no para el caso de tracción pura. Esta deficiencia de los modelos micropolares para regularizar el modo de falla de tracción fue eliminada en una propuesta de Etse y Nieto (1998)(73) que combina la teoría de Cosserat con la mecánica de fracturas.

Modelos Elastoplásticos No Locales Integrales

Los modelos no locales [ver Eringen y Edelen (1972)(34), Bažant (1984) (35)] se basan generalmente en el promedio espacial de campos tensoriales de orden arbitrario (deformaciones, tensiones, deformaciones anelásticas o medidas de daño), en una cierta vecindad \mathbf{s} de un punto caracterizado por su posición \mathbf{x} . Para el caso unidimensional, considerando una función de peso $g(s)$, se define la cantidad no local \bar{Y}

$$\bar{Y} = \frac{1}{V_g} \int_V \bar{Y}(x+s)g(s)dV, \quad V_g = \int g(s)dV \quad (2.51)$$

donde la función de peso es normalizada con su integral V_g , obteniéndose $\bar{Y} = Y$ si $Y(x)$ es constante en el volumen característico considerado. La función de peso suele tomarse igual a la función de error de Gauss [Pijaudier-Cabot y Bažant (1987)(74)]

$$g(s) = \exp \left[\frac{-|s|^2}{2l^2} \right] \quad (2.52)$$

que decrece con la distancia $|s|$ desde el punto de análisis x . El parámetro geométrico l tiene el rol de longitud interna, determina el tamaño de la vecindad del punto x que es afectado por la función no local $\bar{Y}(x)$.

Considerando la cantidad no local $\bar{Y}(x)$ para un dominio unidimensional infinito y desarrollando la función en serie de Taylor alrededor de $s = 0$, luego de la integración analítica se obtiene

$$\bar{Y}(x) = Y(x) + \frac{l^2}{4} \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + \frac{l^4}{16} \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} + \dots \quad (2.53)$$

Si el procedimiento se aplica a las deformaciones totales $Y = \varepsilon$ en una barra de longitud L , mucho mayor a la longitud interna l , se observa que la relación no local de ec. (2.53) introduce gradientes de deformación de orden superior en la formulación.

La regularización no local ha sido también introducida en la teoría de daño [ver Pijaudier-Cabot y Bazant (1987) (74), Bazant y Pijaudier-Cabot (1988) (75), Pijaudier-Cabot y Benallal (1993) (76), Peerlings (1999) (77)].

Modelos No Locales Viscoplasticos

En los modelos constitutivos elastoplásticos es natural la inclusión de la dependencia respecto de la velocidad de las deformaciones bajo condiciones de carga transitoria. En los problemas cuasi-estáticos la falla va acompañada normalmente por altas velocidades de deformación debido al daño o a los efectos friccionales. Numerosos métodos de regularización han incluido los efectos de la velocidad de deformaciones [ver Wu y Freund (1984)(78), Needleman (1988) (79), Loret y Prevost (1990)(80), Sluys y de Borst (1991)(81), Perzyna (1966) (82), Duvaut y Lions (1972)(83), Ponthot (1995)(84), Carosio (1997) (85), Etse y Willam (1999) (32), Carosio et al. (2001) (86)]. En ellos las ecuaciones de la dinámica permanecen hiperbólicas. Mediante el análisis de la dispersión de ondas [ver Sluys (1992)(31)] se ha demostrado que estos modelos introducen una longitud característica debida a la inclusión de un tiempo interno y que la simulación numérica resulta objetiva respecto de la discretización de la malla.

A continuación se consideran los modelos viscoplasticos de sobretensión de Perzyna, de Duvaut-Lions, viscoplastico continuo, viscoplastico consistente y de visco-gradientes. A diferencia de los métodos clásicos, en los modelos viscoplasticos de sobretensión el estado de tensiones puede encontrarse fuera de la superficie de fluencia y la evolución del flujo viscoplastico se limita mediante ecuaciones de relajación plástica.

El modelo de consistencia ha sido propuesto como un método alternativo, la contribución de la velocidad de deformación (viscosidad) se incorpora por medio de una superficie de fluencia dependiente de la velocidad y el flujo plástico se determina con las condiciones standard de Kuhn-Tucker. La superficie de fluencia puede expandirse o contraerse no sólo por endurecimiento o ablandamiento sino también por los efectos de la velocidad de deformación.

Incluyendo la dependencia de la superficie de fluencia respecto de los gradientes de deformaciones de segundo orden, Wang (1997)(87) ha desarrollado un modelo de visco-gradientes.

Viscoplasticidad de Duvaut-Lions

El modelo viscoplastico desarrollado por Duvaut y Lions en 1972 (83) está basado en la diferencia entre la respuesta de un material independiente de la velocidad y uno viscoplastico. El retorno de la tensión a la superficie de fluencia para cumplir con la condición $F = 0$ no se produce de inmediato, sino que existe un retardo en la respuesta material de acuerdo a la siguiente regla de flujo

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} (E^e)^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \dot{\epsilon}_0^{vp} - \dot{\epsilon}^\infty \quad (2.54)$$

donde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es la contribución del material no viscoso, η es el parámetro de viscosidad que representa el tiempo de relajación del material y es en general, dependiente de la deformación y su velocidad. A tensión constante, la tasa de deformación anelástica es constante y proporcional a la sobretensión inicial $(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})$, interpolando la solución tiempo-dependiente entre la solución instantánea (incremento elástico) y la solución en régimen (incremento elastoplástico).

Las variables de estado están gobernadas por la ley

$$\dot{\kappa} = -\frac{1}{\eta} (\kappa - \bar{\kappa}) \quad (2.55)$$

Al igual que en la viscoplasticidad de Perzyna no existe una condición de consistencia viscoplastica y en consecuencia no es posible derivar un operador material tangente.

El modelo de Duvaut-Lions tiene la ventaja de poder combinarse con una superficie de fluencia (Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Tresca). La ec. (2.54) se define directamente en el espacio de tensiones, por lo que puede reformularse para el criterio de fluencia de von Mises como

$$\boldsymbol{\tau}^{vp} = \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}} = 2G\boldsymbol{\gamma}^{vp} \quad (2.56)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^{vp}$ y $\boldsymbol{\gamma}^{vp}$ son el tensor desviador de tensiones y de deformaciones respectivamente. Definiendo una tensión viscosa equivalente $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^{vp}$ cuya ley evolutiva viene dada por

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_{eq}^{vp} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\boldsymbol{\tau}}^{vp} : \dot{\boldsymbol{\tau}}^{vp}} \quad (2.57)$$

y la velocidad de deformación equivalente

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{vp} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{vp}} \quad (2.58)$$

la ec. (2.57) resulta

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^{vp} = 3G\eta\dot{\boldsymbol{\kappa}} \quad (2.59)$$

El parámetro de viscosidad η puede determinarse midiendo las velocidad de tensiones y deformaciones en un ensayo de tracción simple.

Viscoplasticidad de Perzyna

En el modelo viscoplástico de Perzyna [Perzyna (1966) (82), Cormeau (1975)(88), Owen y Damjanic (1982)(89)] la tasa de deformación viscoplástica se define del mismo modo que en la plasticidad clásica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (2.60)$$

La magnitud del flujo plástico es proporcional a la sobretensión F (distancia entre la solución viscoplástica y la solución elastoplástica en el espacio de tensiones). La dirección del flujo plástico se define mediante el gradiente del potencial viscoplástico denominado \mathbf{m}

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\langle \psi(F) \rangle}{\eta} \mathbf{m} \quad (2.61)$$

donde η denota el parámetro de viscosidad y los corchetes de Mc Cauley $\langle \cdot \rangle$ se definen como $\langle x \rangle = 0,5(x + |x|)$. La función adimensional de sobretensión ψ tiene por lo general la forma

$$\psi(F) = \frac{F^N}{K} \quad (2.62)$$

donde K es un parámetro que normaliza la función de sobretensión. Las variables de estado evolucionan de la misma forma que en la elastoplasticidad, en particular en el caso de endurecimiento-ablandamiento isótropo.

Forma Continua de la Viscoplasticidad de Perzyna

En esta formulación presentada por Ponthot (1995)(84), se introduce una restricción adicional al problema, que corresponde a la condición de fluencia igualada a cero

$$\bar{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, \dot{\lambda}) = 0 \quad (2.63)$$

A partir de esta ecuación es posible derivar condiciones de consistencia viscoplásticas

$\bar{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, \dot{\lambda}) = 0$ y de carga-descarga. En consecuencia, la viscoplasticidad continua resulta formalmente idéntica a la elastoplasticidad.

El multiplicador viscoplástico está definido en función de la función de sobretensión $\psi(F)$ y la viscosidad η

$$\dot{\lambda} = \frac{\psi(F)}{\eta} \quad \text{tal que} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (2.64)$$

A partir de esta relación se establece la condición de fluencia

$$\bar{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, \dot{\lambda}) = \bar{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) - \psi^{-1}(\dot{\lambda}\eta) = 0 \quad (2.65)$$

cuyo formato es semejante al utilizado en elastoplasticidad con la adición de un término que depende explícitamente de $\dot{\lambda}$.

Forma Consistente de la Viscoplasticidad de Perzyna

Se considera en este caso un modelo en el que la contribución de la velocidad de deformación o viscosidad se incorpora a través de una superficie de fluencia dependiente de la velocidad [ver Wang (1997)(87), Carosio (2001)(86)]. La tasa de deformaciones se define en forma similar a la tasa de deformación plástica en plasticidad clásica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (2.66)$$

Son válidas las condiciones standard de Kuhn-Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad F \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} F = 0 \quad (2.67)$$

y la evolución del flujo viscoplástico se determina a partir de la condición de consistencia

$$\dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, \dot{\kappa}) = \mathbf{n} : \boldsymbol{\sigma} - H^p \dot{\lambda} - S \dot{\lambda} = 0 \quad (2.68)$$

Donde \mathbf{n} es gradiente de F respecto de $\boldsymbol{\sigma}$, H^p el módulo de endurecimiento o ablandamiento y s el parámetro de viscosidad

$$S = - \frac{\partial F}{\partial \dot{\kappa}} \frac{\partial \dot{\kappa}}{\partial \dot{\lambda}} \quad (2.69)$$

En este modelo la superficie de fluencia puede expandirse o reducirse no sólo a causa del endurecimiento o ablandamiento sino de la velocidad del mismo.

La mayor ventaja de la formulación consistente respecto de la viscoplasticidad clásica es el aspecto numérico, ya que permite aplicar métodos algorítmicos y consistentes de tipo *backward Euler* mediante el uso de la condición de fluencia viscoplástica [Carosio (2001)(86)].

Forma Viscoplastica de Gradientes de Perzyna

El modelo de visco-gradientes [Wang (1997)(87)] resulta de incorporar un término de gradiente al modelo consistente de la viscoplasticidad de Perzyna. La evolución del flujo plástico es gobernada por la condición de consistencia dependiente de visco-gradientes

$$\dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, \dot{\kappa}, \nabla^2 \kappa) = \mathbf{n} : \boldsymbol{\sigma} - H^p \dot{\lambda} - S \dot{\lambda} + G \nabla^2 \dot{\lambda} = 0 \quad (2.70)$$

con el parámetro de gradientes calculado como

$$G = \frac{\partial F}{\partial \nabla^2 \kappa} \frac{\dot{\kappa}}{\dot{\lambda}} \quad (2.71)$$

2.3.4. Teoría No Local Elastoplástica Basada en Gradientes

En esta sección se presentan dos tipos de formulaciones elastoplásticas basadas en la teoría de gradientes superiores de deformaciones. En primer lugar, una formulación general de acuerdo a los desarrollos de de Borst et al (1991)(90), Pamin (1994)(38), Wang (1997)(87), Vrech (2002)(40). Y en segundo lugar, una formulación termodinamicamente consistente basada en los desarrollos de Svedberg (1997)(91), Svedberg (1999)(39), Vrech (2003)(1), adoptada en el modelo material desarrollado en esta tesis. Vale destacar que la formulación general, a diferencia de esta última, no es termodinamicamente consistente.

Formulación General de la Plasticidad de Gradientes

La dependencia de la formulación elastoplástica respecto de los gradientes superiores de deformaciones fue propuesta originalmente por Aifantis (1984)(41) y (1987) (42) y por Coleman y Hodgdon (1985) (43) para el estudio de bandas de deslizamiento y corte en metales. Posteriormente Belytschko y Lasry (1989) (44) enunciaron una ley constitutiva unidimensional dependiente de gradientes y Zbib y Aifantis (1988) (92) los incluyeron en la condición de fluencia. Para el análisis de bandas de corte en materiales granulares, Vardoulakis y Aifantis (1991)(36) consideraron gradientes superiores en la ley de flujo y en la condición de fluencia de Coulomb, incluyendo una medida de longitud interna que podría asociarse al tamaño del grano.

Una variante del método de regularización basado en gradientes consiste en reemplazar una medida de la deformación plástica en un punto $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, por el promedio integral de

la misma en un volumen finito V de su vecindad. Elegida una variable asociada a la historia de deformación del material, por ejemplo la deformación plástica equivalente ε^p de la ec. (2.14), la deformación plástica equivalente no local $\bar{\varepsilon}^p$, en el caso general 3D, se define como

$$\bar{\varepsilon}^p(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{V(\mathbf{x}_1)} \int_V \varepsilon^p(\mathbf{x}) dV \quad (2.72)$$

donde \mathbf{x} indica la posición de los puntos del continuo involucrados en la vecindad. La ec. (2.72) implica la conversión del modelo constitutivo local en no local. El estado tensional en el punto \mathbf{x}_1 depende ahora no sólo de la deformación en el mismo sino también de la correspondiente a su vecindad. Físicamente esta no localidad representa interacciones y heterogeneidades micromecánicas que no deben ser despreciadas cuando la escala de variación de las variables constitutivas se aproxima a la correspondiente a la microestructura [Beran y McCoy (1970) (93), Eringen y Edelen (1972) (34), Bažant (1991) (94)].

La ec. (2.72) corresponde a un material cuyos elementos microestructurales son regulares y se conocen en detalle. Para microestructuras no periódicas, tal es el caso de materiales policristalinos como el hormigón, conviene reemplazar el promedio constante por un promedio variable en el volumen, que corresponda por ejemplo, al tamaño de grano promedio. En lugar de la función de peso parcialmente uniforme supuesta en la ec. (2.72) se utilizan por lo general funciones de tipo Gauss, ver Figura 2.2.

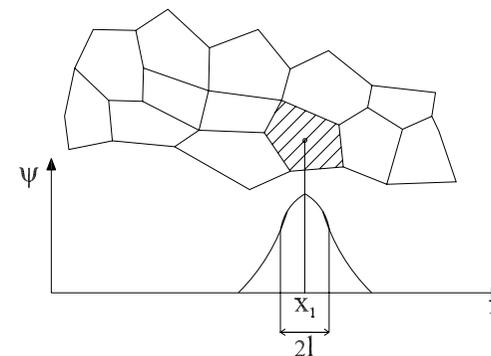


Figura 2.2: Función de peso para una microestructura irregular. Caso unidimensional.

La deformación plástica equivalente no local $\bar{\varepsilon}^p$ queda entonces definida como [ver Pijaudier-

Cabot y Bažant (1987)(74)]

$$\varepsilon^p(x_1) = \frac{1}{\zeta(x_1)} \int_V \varsigma(\mathbf{x}, x_1) \varepsilon^p(\mathbf{x}) dV \quad (2.73)$$

siendo $\varsigma(\mathbf{x}, x_1)$ la función de peso continua e isótropa, y $\zeta(x_1)$ la integral

$$\zeta(x_1) = \int_V \varsigma(x, x_1) dV \quad (2.74)$$

Para campos de deformaciones suficientemente homogéneos, la relación integral de ec. (2.73) puede escribirse en términos de los gradientes de $\varepsilon^p(\mathbf{x})$, efectuando su expansión en serie de Taylor [ver Bažant et al. (1984) (35)]

$$\varepsilon^p(x) = \varepsilon^p(x_1) + \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial x_1} (x - x_1) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varepsilon^p}{\partial x_1 y_1} (x - x_1)(y - y_1) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varepsilon^p}{\partial x_1 y_1 z_1} (x - x_1)(y - y_1)(z - z_1) + \dots \quad (2.75)$$

Sustituyendo la ec. (2.75) en la integral (2.73) e integrando resulta

$$\varepsilon^p = \varepsilon^p(x_1) + c_i \frac{\partial^2 \varepsilon^p}{\partial x_1^2} + c_{ij} \frac{\partial^4 \varepsilon^p}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \dots \quad (2.76)$$

con los coeficientes c_i y c_{ij} dados por

$$c_i = \frac{1}{2! \zeta} \int_V \varsigma(\rho)(x - x_1)^2 dV \quad y \quad c_{ij} = \frac{1}{4! \zeta} \int_V \varsigma(\rho)(x - x_1)^2 (y - y_1)^2 dV \quad (2.77)$$

Los términos que contienen derivadas impares desaparecen a causa de la isotropía de la función de peso y los coeficientes c_i ($i = 1, 2, 3$) son iguales, por lo que el subíndice puede eliminarse. Despreciando los términos de cuarto orden y superiores, la relación integral de la ec. (2.73) se aproxima a la relación diferencial

$$\bar{\varepsilon}^p \approx \varepsilon^p + c \nabla^2 \varepsilon^p \quad (2.78)$$

siendo c dependiente de la función de peso adoptada y el operador Laplaciano ∇^2 definido como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad (2.79)$$

La longitud interna del modelo no local que se impone en virtud de la homogeneización dimensional del término cuadrático queda incluida en el coeficiente de gradiente c , que puede interpretarse como el "área característica de gradientes" asociada a una longitud interna característica l_c .

Condiciones de Fluencia y Consistencia Plástica de la Elastoplasticidad de Gradientes

La condición de fluencia de la formulación general de la elastoplasticidad de gradientes se expresa en términos del tensor de tensiones totales $\boldsymbol{\sigma}$, la variable interna κ , y el laplaciano $\nabla^2 \kappa$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, \nabla^2 \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \Gamma_y(\kappa, \nabla^2 \kappa) = 0 \quad (2.80)$$

siendo Γ_y la función que representa la degradación de la resistencia y define la ley de endurecimiento o ablandamiento

$$\dot{\Gamma}_y = H^p \dot{\kappa} - G \nabla^2 \dot{\kappa} \quad (2.81)$$

con los coeficientes de endurecimiento o ablandamiento y de gradientes, H^p y G , definidos en las ecs. (2.25-b) y (2.71), respectivamente.

La ley de flujo plástico y los criterios de carga y descarga plástica coinciden con los correspondientes a la forma local de la teoría del flujo de la plasticidad, de ecs. (2.20) a (2.24).

La condición de consistencia de la teoría elastoplástica de gradientes se obtiene incorporando un término de gradientes de segundo orden en la condición de consistencia local clásica de ec. (2.25-a)

$$\dot{F} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H^p \dot{\lambda} + G \nabla^2 \dot{\lambda} = 0 \quad (2.82)$$

Esta última combinada con la relación constitutiva de ec. (2.36) conduce a la ecuación diferencial

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h_p} \left(\mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + G \nabla^2 \dot{\lambda} \right) \quad (2.83)$$

con h_p definido en la ec. (2.27-b), que no puede ser resuelta en forma directa, debiéndose recurrir a algoritmos iterativos de resolución como el desarrollado por de Borst y Mühlhaus (1991) (90), presentado en la sección 5.1 de esta tesis.

Ley Constitutiva de Gradientes

La ley constitutiva correspondiente al material elastoplástico dependiente de gradientes se obtiene sustituyendo en la relación constitutiva de ec. (2.36) la expresión correspondiente a la tasa del parámetro plástico de ec. (2.83), resultando

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{g}_p \nabla^2 \dot{\lambda} \quad , \quad \mathbf{g}_p = -\frac{G}{h_p} \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad (2.84)$$

2.3.5. Teoría Termodinámicamente Consistente de la Elastoplasticidad No Local Basada en Gradientes

Esta formulación es una extensión de la correspondiente a la forma termodinámicamente consistente de la teoría del flujo de la plasticidad local de la sección 2.2.2 y al igual que ésta se basa en la teoría de la termodinámica desarrollada en el Apéndice B, y específicamente en la sección B.9.

Se considera en lo sucesivo que los efectos de gradientes se restringen sólo al comportamiento plástico de endurecimiento o ablandamiento isótropo, mediante la inclusión del gradiente de la variable interna escalar

$$\nabla\kappa = \left[\frac{\partial\kappa}{\partial x} \quad \frac{\partial\kappa}{\partial y} \right] \quad \text{en el caso } 2D \quad (2.85)$$

Los desarrollos de esta sección servirán de base al modelo material para hormigón que se presenta en el capítulo 4 y al algoritmo de elementos finitos empleado, descrito en la sección 5.2 de esta tesis.

Relaciones Constitutivas de Gradientes Termodinámicamente Consistentes

En los continuos elastoplásticos de gradientes la densidad de energía total de deformaciones es una expansión aditiva de la ec. (2.30) para incorporar el término energético no local $\Psi^g(\nabla\kappa)$

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \kappa, \nabla\kappa) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^p(\kappa) + \Psi^g(\nabla\kappa) \quad (2.86)$$

Los potenciales elástico y plástico local se definen de igual modo que en la sección 2.2.2, mientras que el potencial de gradientes se define en términos del gradiente de la variable plástica interna $\nabla\kappa$, definida en la ec. (2.85).

Los estados plásticos admisibles deben cumplir con la condición de fluencia

$$F(\boldsymbol{\sigma}, K) = f(\boldsymbol{\sigma}) - K(\kappa, \nabla\kappa) = 0 \quad , \quad K(\kappa, \nabla\kappa) = K^p(\kappa) + K^g(\nabla\kappa) \quad (2.87)$$

siendo K la tensión disipativa total definida como la sumatoria de la componente disipativa local $K^p(\kappa)$ de ec. (2.34), y la componente de gradientes $K^g(\nabla\kappa)$, calculada como

$$K^g = \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial\psi^g}{\partial(\nabla\kappa)} \right) \quad (2.88)$$

Además, del planteo termodinámico surge la existencia de tensiones disipativas debidas al gradiente de la variable interna en el borde de normal \mathbf{n}_s , que responden a la ecuación

$$K^{(b)} = -\mathbf{n}_s \cdot \rho \frac{\partial\psi^g}{\partial(\nabla\kappa)} \quad (2.89)$$

Las leyes de evolución del tensor de tensiones totales y la tensión disipativa local coinciden con las ecs. (2.36) y (2.37), respectivamente.

Considerando las leyes de normalidad, la ley de evolución del flujo plástico y de la variable interna coinciden con las ecs. (2.20) y (2.35), respectivamente. Combinando estas últimas con las ecs. (2.88) y (2.89) se obtienen las leyes de evolución de la tensión disipativa debida a los gradientes de la variable plástica

$$\dot{K}^g = l_c^2 \nabla \cdot \left(\mathbf{H}^g \cdot \nabla \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial K} \right) + l_c^2 \nabla \cdot \left(\dot{\lambda} \mathbf{H}^g \cdot \nabla K \frac{\partial^2 Q}{(\partial K)^2} \right) \quad (2.90)$$

$$\dot{K}^{(b)} = -l_c^2 \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial K} - \dot{\lambda} l_c^2 \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla K \frac{\partial^2 Q}{(\partial K)^2} \quad (2.91)$$

en el volumen de sólido y en el borde, respectivamente. En estas expresiones se incorporan el tensor de gradientes \mathbf{H}^g y la longitud interna característica l_c . El primero calculado como

$$\mathbf{H}^g = \rho \frac{1}{l_c^2} \frac{\partial^2 \psi^g}{\partial(\nabla\kappa) \otimes \partial(\nabla\kappa)} \quad (2.92)$$

dá una idea de la pendiente de las deformaciones plásticas no locales, del mismo modo que el módulo H^p determina la pendiente de endurecimiento y ablandamiento del comportamiento plástico local. Es un tensor definido positivo que en comportamiento isótropo se define como

$$\mathbf{H}^g = H^g \mathbf{I}_2 \quad (2.93)$$

siendo H^g una constante escalar positiva e \mathbf{I}_2 el tensor unitario de segundo orden. El tensor de gradientes posee un rol significativo en la regularización numérica.

En lo que respecta a l_c , Svedberg (1999)(39) indica que existen tres interpretaciones posibles:

- Un parámetro conveniente para que H^p y \mathbf{H}^g posean la misma dimensión.
- Una entidad física que define una medida característica de la microestructura.
- Un parámetro que estabiliza numéricamente a la teoría constitutiva no local.

En realidad l_c no es un parámetro sino una longitud característica de gradientes que según se la analice desde el punto de vista matemático, físico o numérico, homogeiniza la dimensión de H^p y \mathbf{H}^g ; establece la zona de disipación energética y depende de la microestructura del material o estabiliza el proceso algorítmico de solución, respectivamente.

Condición de Consistencia Plástica de la Elastoplasticidad de Gradientes Termodinámicamente Consistente

La condición de consistencia plástica correspondiente a la elastoplasticidad basada en gradientes termodinámicamente consistente reemplaza a la ec. (2.38) y está dada por la función

$$\dot{F} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} = 0 \quad , \quad \dot{K} = \dot{K}^p + \dot{K}^g \quad (2.94)$$

Con el propósito de formular la ley de evolución del parámetro plástico a partir de la condición de consistencia plástica, y a los fines de obtener una expresión más explícita de la ec. (2.90), se aplica la regla de la cadena resultando

$$\begin{aligned} \dot{K}^g = l_c^2 \frac{\partial Q}{\partial K} [(\nabla \cdot \mathbf{H}^g) \cdot \nabla \lambda + \mathbf{H}^g : \nabla^2 \lambda] + l_c^2 \frac{\partial^2 Q}{(\partial K)^2} [\nabla K \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla \lambda + \\ + \nabla \lambda \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla K + \dot{\lambda} (\nabla \cdot \mathbf{H}^g) \cdot \nabla K + \dot{\lambda} \mathbf{H}^g : \nabla^2 K] + l_c^2 \frac{\partial^3 Q}{(\partial K)^3} (\dot{\lambda} \nabla K \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla K) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Sustituyendo las leyes de evolución de las relaciones constitutivas de ecs. (2.36), (2.37) y (2.95) en la condición de consistencia de ec. (2.94) y operando, se obtiene la ecuación diferencial lineal en $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h + h_g} (\mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{F}^g) \quad (2.96)$$

con el coeficiente h calculado de acuerdo a la ec. (2.39-b) y siendo

$$h_g = -l_c^2 \frac{\partial F}{\partial K} \left[\frac{\partial^2 Q}{(\partial K)^2} [(\nabla \cdot \mathbf{H}^g) \cdot \nabla K + \mathbf{H}^g : \nabla^2 K] + \frac{\partial^3 Q}{(\partial K)^3} \nabla K \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla K \right] \quad (2.97)$$

$$\dot{F}^g = l_c^2 \frac{\partial F}{\partial K} \left[\frac{\partial Q}{\partial K} [(\nabla \cdot \mathbf{H}^g) \cdot \nabla \lambda + \mathbf{H}^g : \nabla^2 \lambda] + 2 \frac{\partial^2 Q}{(\partial K)^2} \nabla K \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla \lambda \right] \quad (2.98)$$

En el caso especial de variables de estado espacialmente homogéneas, se obtiene $h_g = 0$ y

$$\dot{F}^g = l_c^2 \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} \mathbf{H}^g : \nabla^2 \lambda \quad (2.99)$$

Suponiendo además comportamiento plástico isótropo, considerando la ec. (2.93), las expresiones anteriores resultan

$$h_g = 0 \quad (2.100)$$

$$\dot{F}^g = l_c^2 \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} (H^g \nabla^2 \lambda) \quad (2.101)$$

debido a que la expresión correspondiente a la tasa de la tensión disipativa se reduce a

$$\dot{K}^g = l_c^2 \frac{\partial Q}{\partial K} H^g \nabla^2 \lambda \quad (2.102)$$

Como fue citado en la sección 2.3.4, la tasa del parámetro plástico correspondiente a elastoplasticidad basada en gradientes no posee una solución directa. Un algoritmo de resolución aplicable a la ec. (2.96) se presenta en la sección 5.2 de esta tesis.

Nota: En el caso de comportamiento de endurecimiento y ablandamiento mixto isótropo y cinemático, las energías anelásticas local y de gradientes dependen de ambas variables de estado, isótropas y cinemáticas, κ y β , respectivamente.

Luego $\Psi^p = \Psi^p(\kappa, \beta)$ y $\Psi^g = \Psi^g(\kappa, \beta)$.

Por lo que pueden definirse dos tipos de tensiones disipativas, locales

$$\dot{K}^p = -\rho \frac{\partial \Psi^p}{\partial \kappa} \quad , \quad \dot{B}^p = -\rho \frac{\partial \Psi^p}{\partial \beta}$$

y de gradientes

$$\dot{K}^g = \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\nabla \kappa)} \right) \quad , \quad \dot{B}^g = \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\nabla \beta)} \right)$$

siendo $\dot{B} = \dot{B}^p + \dot{B}^g$ componentes de la tensión de retorno debido al endurecimiento o ablandamiento cinemático.

Ley Constitutiva Elastoplástica de Gradientes Termodinámicamente Consistente

Para el caso general de material elastoplástico de gradientes termodinámicamente consistente, la ley constitutiva elastoplástica responde a la relación

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{E}^g \dot{F}^g \quad , \quad \mathbf{E}^g = \frac{-1}{h + h_g} \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad (2.103)$$

con el tensor elastoplástico \mathbf{E}^{ep} definido en la ec. (2.40-b). Si se compara esta última con la ley constitutiva elastoplástica local termodinámicamente consistente de ec. (2.40-a), puede observarse que el aporte de la teoría de gradientes a la relación constitutiva está dado por un término adicional en función de los gradientes de primer y segundo orden de las deformaciones plásticas, representados por el gradiente y el laplaciano de la tasa el parámetro plástico.

Capítulo 3

Crterios e Indicadores de Falla de Modelos Matemáticos de Materiales Cuasi-frágiles

En este capítulo se investigan diferentes criterios de inicio de falla a nivel constitutivo.

El concepto original de envolvente de falla de Mohr no especifica el mecanismo que provoca la falla material. Si bien se realiza una distinción conceptual entre la falla por tracción en modo I que produce la separación del material, y el desplazamiento de interfaces adyacentes por corte en el modo II , no se brinda información sobre lo que sucede luego del inicio de la falla, suponiendo entonces el colapso.

Estudios más avanzados en el análisis de falla de materiales cuasi-frágiles como el hormigón reconocen una sucesión de eventos que comienzan en una escala pequeña del material y provocan el deterioro progresivo del continuo hasta convertirlo en discontinuo. La Figura 3.1 muestra los tres tipos de falla: difusa, localizada y discreta, que pueden acontecer en sólidos deformables.

La falla difusa está caracterizada por la pérdida de estabilidad material y de unicidad de la solución en el marco de distribuciones continuas del campo de deformaciones. La falla localizada resulta de discontinuidades débiles que señalan el inicio de la degradación cinemática del continuo, implicando la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el problema del equilibrio. La falla discreta es abordada por la mecánica de fracturas y escapa a la mecánica de sólidos continuos.

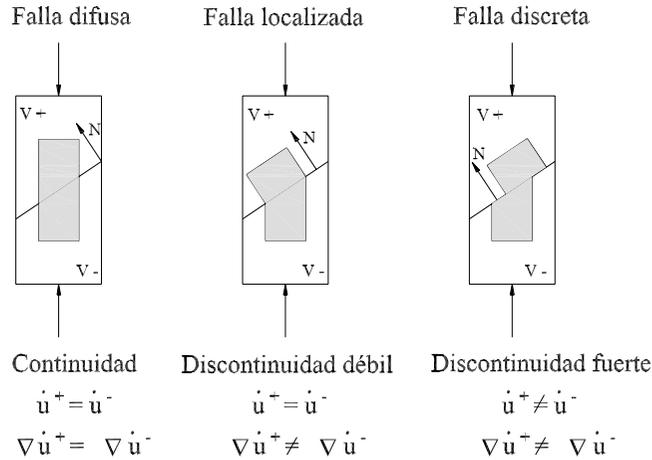


Figura 3.1: Tipos de la falla en materiales sólidos deformables.

Se detallan en las secciones siguientes, criterios e indicadores de los distintos tipos de falla correspondientes a modelos materiales elastoplásticos termodinámicamente consistentes locales y de gradientes. Se describen los métodos analítico y geométrico de análisis de falla localizada.

3.1. Indicadores de Falla Difusa o Continua

Se analizan a continuación los indicadores que caracterizan a la falla difusa en materiales elastoplásticos locales y se evalúan en particular las condiciones tensionales o cinemáticas que impiden el desarrollo de la forma difusa o continua en el caso de modelos constitutivos elastoplásticos basados en la teoría de gradientes termodinámicamente consistente.

3.1.1. Indicador de Pérdida de Estabilidad

La pérdida de estabilidad material instantánea fue definida por R. Hill como

$$d^2W = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \quad \forall \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \neq 0 \quad (3.1)$$

siendo d^2W el funcional de densidad de trabajo interno de segundo orden y \mathbf{E}^{ep} el operador material elastoplástico tangente definido en la ec. (2.40-b).

El funcional de segundo orden en la ec. (3.1) extrae sólo la parte simétrica del operador tangente. En el caso de flujo plástico no asociado, cuando dicho operador deja de ser simétrico, la ec. (3.1) puede expresarse como

$$d^2W = \frac{1}{4} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : [\mathbf{E}^{ep} + (\mathbf{E}^{ep})^T] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{4h} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : [\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{m}}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \quad (3.2)$$

con $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{m}}$ y h de ecs. (2.29) y (2.39-b). En base al Teorema de Bromwich sobre los límites de los autovalores de matrices simétricas [ver Mirsky (1983)(95)], resulta

$$\lambda_{mín}(\mathbf{E}_{sim}^{ep}) \leq \Re[\lambda_{mín}(\mathbf{E}^{ep})] \dots \leq \lambda_{máx}(\mathbf{E}_{sim}^{ep}) \quad (3.3)$$

siendo $\lambda_{mín}$ y $\lambda_{máx}$ los autovalores mínimo y máximo respectivamente, y $\mathbf{E}_{sim}^{ep} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}^{ep} + (\mathbf{E}^{ep})^T]$ la forma simetrizada del operador material.

El inicio de la inestabilidad se produce cuando el operador material simétrizado deja de ser definido positivo

$$\det[\mathbf{E}_{sim}^{ep}] \doteq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{mín}(\mathbf{E}_{sim}^{ep}) = 0 \quad (3.4)$$

Esta condición permite calcular el coeficiente crítico de endurecimiento o ablandamiento H_{est}^p , correspondiente a la pérdida de estabilidad [ver Maier y Hueckl (1979)].

Por otro lado, el indicador de pérdida de estabilidad material establecido por Drucker (1959)(96) se establece con la relación

$$d^2W^p = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \leq 0 \quad \forall \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq 0 \quad (3.5)$$

Considerando la segunda variación de la densidad de trabajo como la sumatoria de una componente elástica y una plástica (en base a la ley de descomposición aditiva de Prandtl-Reuss)

$$d^2W = d^2W^e + d^2W^p \quad (3.6)$$

y teniendo en cuenta que la componente elástica es siempre positiva, la condición $d^2W^p \leq 0$ implica un indicador de falla que antecede al de Hill ($d^2W \leq 0$). La condición de pérdida de estabilidad de Drucker es poco utilizada como indicador de falla dado que sólo se refiere a la componente plástica del operador material.

3.1.2. Indicador de Máxima Resistencia

De acuerdo a la Figura 3.1, la falla difusa está asociada con la tasa de desplazamientos y de deformaciones continuas. Cuando esto sucede en correspondencia con un estado de tensiones estacionario se alcanza el punto límite en la curva de respuesta del material, siendo su indicador

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

El punto de máxima resistencia es un indicador alternativo de falla difusa y coincide con la condición de singularidad del operador elastoplástico

$$\det[\mathbf{E}^{ep}] \doteq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{\min}(\mathbf{E}^{ep}) = 0 \quad (3.9)$$

Con el fin de determinar un valor crítico del coeficiente de endurecimiento $H_{l\acute{m}}^p$ para la condición de resistencia máxima, se premultiplica al operador elastoplástico por $(\mathbf{E}^e)^{-1}$

$$(\mathbf{E}^e)^{-1} : \mathbf{E}^{ep} = \mathbf{I}_2 - (\mathbf{E}^e)^{-1} : \frac{\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{h} \quad (3.10)$$

y se calcula el autovalor crítico

$$\lambda_{\min}[(\mathbf{E}^e)^{-1} : \mathbf{E}^{ep}] = 1 - d_E \quad (3.11)$$

siendo

$$d_E = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \mathbf{m}}{\bar{H}_{l\acute{m}}^p + \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \mathbf{m}} \quad , \quad \bar{H}_{l\acute{m}}^p = H_{l\acute{m}}^p \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (3.12)$$

Esta condición implica que debe cumplirse

$$1 - d_E = 0 \quad \rightarrow \quad H_{l\acute{m}}^p = 0 \quad (3.13)$$

La pérdida de estabilidad de Hill, sinónimo de singularidad del operador elastoplástico simétrico, antecede a la condición de máxima resistencia de ec. (3.9) en el caso de operador elastoplástico no simétrico y coincide con la misma en caso contrario. En consecuencia, se establece la siguiente relación jerárquica entre los coeficientes críticos

$$H_{est}^p \geq H_{l\acute{m}}^p \quad (3.14)$$

3.1.3. Indicador de Pérdida de Unicidad de la Solución

La pérdida de la unicidad de la solución de las ecuaciones incrementales de equilibrio puede considerarse como un indicador de falla difusa. Siendo $\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ la diferencia entre dos tasas de deformaciones sucesivas y $\Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ la diferencia entre las dos tasas de tensiones correspondientes, la pérdida de unicidad se define con la condición

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq 0 \quad (3.15)$$

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{E}^{ep} : \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq 0 \quad (3.16)$$

Cuando $\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ está asociado a un campo continuo de deformaciones incrementales corresponde a una bifurcación continua. En cambio, si está asociado a un campo discontinuo de deformaciones incrementales, se trata de una bifurcación discontinua.

En el caso de flujo plástico asociado, la unicidad de la solución en régimen de endurecimiento queda asegurada, mientras que para flujo plástico no asociado la solución es única siempre que $\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ no sea paralelo a la dirección principal crítica del operador elastoplástico simétrico.

En el caso de operadores simétricos, la condición de máxima resistencia y de pérdida de unicidad coinciden. Caso contrario, el indicador de pérdida de unicidad puede anteceder al

de resistencia máxima. Denominando H_u^p al coeficiente de endurecimiento para el que se produce la bifurcación continua, la relación jerárquica entre coeficientes críticos resulta

$$H_u^p \geq H_{l\acute{m}}^p \quad (3.17)$$

3.1.4. Indicadores de Falla Difusa para Material Elastoplástico de Gradientes Termodinámicamente Consistente

Se considera en primer lugar el indicador de pérdida de estabilidad de Hill de ec. (3.1). Teniendo en cuenta la relación constitutiva del material elastoplástico de gradientes de la ec. (2.103), la expresión resulta

$$d^2W = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^g \dot{F}^g] \leq 0 \quad \forall \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \neq 0 \quad (3.18)$$

con \dot{F}^g y \mathbf{E}^g definidos en las ecs. (2.98) y (2.103-b), respectivamente. Para que dicha desigualdad sea satisfecha se deben cumplir simultáneamente las siguientes condiciones

$$\det[\mathbf{E}_{sim}^{ep}] \doteq 0 \quad y \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^g \dot{F}^g \doteq 0 \quad (3.19)$$

o bien cuando

$$d^2W_{loc} \leq \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^g \dot{F}^g \quad \text{siendo} \quad d^2W_{loc} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.20)$$

La ec. (3.19) sólo se verifica cuando $l_c = 0$ ó $\mathbf{H}^g = 0$, que corresponde al caso en que la no linealidad de gradientes se elimina. Por otra parte, la ec. (3.20) demuestra que en el caso de plasticidad de gradientes la condición de pérdida de la estabilidad es retardada en relación a la forma local de la plasticidad, por lo que puede afirmarse que la teoría elastoplástica de gradientes suprime la condición de pérdida de estabilidad de Hill, y por lo expuesto en la sección 3.1.1, la de Drucker.

Procediendo del mismo modo, se analiza el criterio de máxima resistencia de ec. (3.7). Considerando la relación constitutiva correspondiente a elastoplasticidad dependiente de gradientes, el indicador de punto límite resulta

$$\mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{E}^g \dot{F}^g = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Esta igualdad implica la satisfacción simultánea de las condiciones

$$\det[\mathbf{E}^{ep}] \doteq 0 \quad y \quad \mathbf{E}^g \dot{F}^g \doteq 0 \quad (3.22)$$

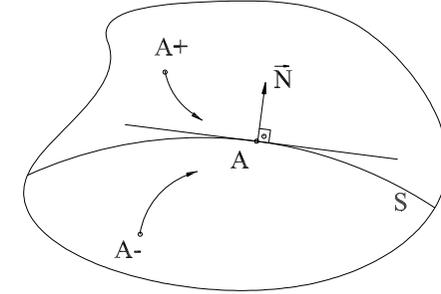


Figura 3.2: Superficie de discontinuidad de la falla localizada.

o bien

$$\mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq \mathbf{E}^g \dot{F}^g \quad (3.23)$$

Al igual que en el caso analizado anteriormente, sólo existe solución si uno o ambos parámetros de gradientes se anulan, o si la componente local del tensor de tensiones instantáneas es igual y de sentido contrario a la componente no local de gradientes.

De lo expuesto en esta sección se concluye que los modelos constitutivos basados en elastoplasticidad de gradientes termodinámicamente consistente retardan los indicadores de falla difusa de la solución local.

3.2. Indicador de Falla Localizada

En el marco del concepto de fisura difusa (*smearred crack*), los modos de falla localizada están relacionados con bifurcaciones discontinuas del equilibrio, y conducen a la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el equilibrio estático [ver Ottosen y Runesson (1991) (97) y Willam y Etsse (1990) (7), entre otros].

El análisis realizado en esta sección corresponde a materiales elastoplásticos locales y supone la existencia de una superficie de discontinuidad o falla S caracterizada por la dirección normal N , ver Figura 3.2.

3.2.1. Condición Analítica de Localización

La condición de localización se basa en los trabajos de Hadamard (1932)(98) y Hill (1962)(99). La falla localizada de discontinuidad débil se caracteriza por la discontinuidad de la tasa del campo gradiente de desplazamientos $\nabla \dot{\mathbf{u}}$, mientras la tasa del campo de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ permanece continua.

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = 0 \quad (3.24)$$

$$[[\nabla \dot{\mathbf{u}}]] = \nabla \dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla \dot{\mathbf{u}}^- \neq 0 \quad (3.25)$$

De acuerdo a la condición de compatibilidad de Maxwell [ver Truesdell y Toupin (1960)(100)], el salto en la tasa de deformaciones puede expresarse en términos de la amplitud escalar del salto γ , el vector unitario que determina la dirección del salto \mathbf{M} y el vector unitario \mathbf{N} normal a la superficie S de discontinuidad, de acuerdo a

$$[[\nabla \dot{\mathbf{u}}]] = \gamma \mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \quad \rightarrow \quad [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \gamma [\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^{sim} \quad (3.26)$$

La condición de equilibrio requiere que la tasa del vector tensión $\dot{\mathbf{t}}$ sea opuesta a ambos lados de S

$$[[\dot{\mathbf{t}}]] = \dot{\mathbf{t}}^+ - \dot{\mathbf{t}}^- = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

Aplicando el teorema de Cauchy, el salto de la tasa del vector tensión resulta

$$[[\dot{\mathbf{t}}]] = \mathbf{N} \cdot [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{N} \cdot [[\mathbf{E}^t : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

siendo \mathbf{E}^t el operador material tangente. Sustituyendo la ec. (3.26-b) en la expresión anterior, la condición de localización o discontinuidad débil queda expresada como

$$\mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \text{con} \quad \mathbf{Q}^t = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}^t \cdot \mathbf{N} \quad (3.29)$$

donde \mathbf{Q}^t representa al tensor tangencial de localización. La condición de inicio de la localización se caracteriza por la singularidad del tensor de localización que coincide con el tensor acústico correspondiente a propagación de ondas

$$\det[\mathbf{Q}^t] \doteq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{mín}(\mathbf{Q}^t) = 0 \quad (3.30)$$

La ec. (3.30) establece la conversión de las ecuaciones diferenciales de equilibrio estático de elípticas a hiperbólicas. Por este motivo, la singularidad del tensor de localización también se denomina pérdida de elipticidad (en el caso estático o tiempo-independiente)².

²En el caso dinámico la condición de localización corresponde, contrariamente, a la pérdida de hiperbolicidad de las ecuaciones de equilibrio

Por otro lado, basada en la teoría de propagación de ondas se establece la siguiente relación

$$\rho c^2 = (\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{E}^t : (\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{M} \quad (3.31)$$

siendo ρ la densidad del material y c la velocidad de onda. La condición $c = 0$ puede interpretarse como la existencia de una superficie de discontinuidad que impide la propagación de ondas en sólidos. Esta discontinuidad se conoce como pérdida de la elipticidad fuerte [ver Knops y Payne (1971)(101), Ogden (1984)(55)] y conduce a la singularidad del tensor de localización simetrizado

$$\det[\mathbf{Q}_{sim}^t] = 0 \quad (3.32)$$

Para operadores materiales no simétricos, en el caso de flujo plástico no asociado, la pérdida de la elipticidad fuerte, sinónimo de singularidad del operador simetrizado de localización, antecede a la condición de punto límite o máxima resistencia de la ec. (3.9), aún en régimen de endurecimiento (H^p positivo).

3.2.2. Solución Analítica de Localización

En el marco de la elastoplasticidad local, termodinámicamente consistente, se adopta como tensor acústico tangente al tensor de localización elastoplástico \mathbf{Q}^{ep} , obtenido a partir del tensor de localización elástico

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{N} \quad (3.33)$$

al que se degrada sustractivamente mediante un operador tensorial de orden 2 pero rango 1 (diad) de la forma

$$\mathbf{Q}^{ep} = \mathbf{Q} - \frac{1}{h} \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}_n \quad (3.34)$$

siendo h el parámetro plástico generalizado de ec. (2.39-b) y los tensores de primer orden

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{n} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{N} \quad (3.36)$$

En lugar de calcular los autovalores mínimos del tensor de localización elastoplástico se utiliza como recurso el análisis espectral de $[\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{ep}]$, bajo la condición [ver Ottosen y Runesson (1991)(97)]

$$\det[(\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{ep}] \doteq 0 \quad (3.37)$$

Siendo

$$(\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{ep} = \mathbf{I} - (\mathbf{Q})^{-1} \cdot \frac{\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}_n}{h} \quad (3.38)$$

con el tensor unitario de primer orden \mathbf{I} , la solución del mínimo autovalor resulta

$$\lambda_{\min}[(\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{ep}] = 1 - d_Q \quad \text{con} \quad d_Q = \frac{\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{a}_m}{\bar{H}^p + \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \mathbf{m}} \quad , \quad \bar{H}^p = H^p \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (3.39)$$

y define la condición de localización

$$1 - d_Q \doteq 0 \quad \rightarrow \quad \bar{H}^p(\mathbf{N}) = \mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{a}_m - \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad (3.40)$$

El módulo crítico \bar{H}_{loc}^p determina la pérdida de elipticidad de las ecuaciones diferenciales incrementales de equilibrio y se define como el valor máximo posible que puede adoptar \bar{H}^p para las distintas direcciones de la superficie de falla S

$$\bar{H}_{loc}^p = \text{máx} [\bar{H}^p(\mathbf{N})] \quad (3.41)$$

Soluciones explícitas generales del módulo crítico de endurecimiento o ablandamiento y del ángulo crítico de localización han sido desarrolladas por Ottosen y Runesson (1991)(97) mediante la utilización de multiplicadores de Lagrange para estados tensionales tridimensionales y por Runesson et al (1991)(102) y Perić (1990)(103) para estados planos de deformaciones y tensiones, incluyendo este último soluciones para estados axialsimétricos. Aplicaciones de estas soluciones analíticas para modelos de materiales cuasi-frágiles fueron desarrolladas por Etse (1992)(49) y (104).

Se resumen a continuación los procedimientos correspondientes a los estados axialsimétrico (caso especial: cilíndrico) y plano de deformaciones, que serán aplicados posteriormente en el capítulo 6 para el cálculo de valores críticos de localización del modelo material desarrollado en esta tesis.

Cabe recordar que dichos procedimientos son aplicables a los casos en que los tensores gradientes \mathbf{n} y \mathbf{m} , de componentes

$$n_{ij} = \bar{n}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} n_v \quad \text{y} \quad m_{ij} = \bar{m}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} m_v \quad (3.42)$$

respectivamente, poseen las mismas direcciones principales. El sistema coordenado adoptado para el análisis de la localización es entonces

$$\bar{n}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{n}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n}_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{m}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_3 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

con $\bar{n}_i = \bar{m}_i$ y las relaciones $\bar{n}_1 \geq \bar{n}_2 \geq \bar{n}_3$ y $\bar{m}_1 \geq \bar{m}_2 \geq \bar{m}_3$. Mientras para la componente volumétrica se cumple

$$m_v = \eta n_v \quad (3.44)$$

siendo η el coeficiente de no asociatividad volumétrica que varía entre los siguientes límites

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad , \quad \eta = \begin{cases} 0, & \text{para no asociatividad de von Mises;} \\ 1, & \text{para flujo asociado de plasticidad.} \end{cases} \quad (3.45)$$

Estado Cilíndrico de Tensiones

El estado cilíndrico de tensiones, tanto de tracción como de compresión, se considera como un caso especial del estado tridimensional general caracterizado por las relaciones

$$\bar{n}_1 > \bar{n}_2 = \bar{n}_3 \quad \text{y} \quad \bar{n}_1 = \bar{n}_2 > \bar{n}_3 \quad (3.46)$$

respectivamente. Distintos resultados se obtienen dependiendo del signo de las magnitudes escalares c_{31} y c_{13} , definidas como

$$c_{31} = \bar{n}_3 + (1 - 2\psi)\bar{n}_1 + r \quad , \quad c_{13} = \bar{n}_1 + (1 - 2\psi)\bar{n}_3 + r \quad (3.47)$$

con los valores auxiliares

$$\psi = \frac{1}{2(1-\nu)} \quad , \quad r = \frac{1+\nu}{6(1-\nu)}(n_v + m_v) \quad (3.48)$$

Los módulos críticos de localización \bar{H}_{loc}^p se expresan normalizados respecto del módulo de corte G . Las direcciones críticas de localización quedan definidas por θ_c , ángulo comprendido entre el eje N_1 y la normal a la superficie de discontinuidad.

a) $c_{31} \geq 0$ y $c_{31} \leq 0$

$$\frac{\bar{H}_{loc}^p}{4G} = \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{n_v^2(1-\eta)^2}{18(1-\nu)} - \left(\bar{n}_2 + \frac{n_v(1+\eta)}{6} \right)^2 \right] \quad (3.49)$$

$$\tan^2 \theta_c = -\frac{c_{31}}{c_{13}} \quad (3.50)$$

b) $r \geq 0$ y $c_{31} \geq 0$

$$\frac{\bar{H}_{loc}^p}{4G} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{(\bar{n}_2 - \bar{n}_3)^2}{2(1+\nu)} + \bar{n}_2 \bar{n}_3 + \frac{n_v(1+\eta)}{6}(\bar{n}_2 + \bar{n}_3) + \frac{1}{9} \eta n_v^2 \right] \quad (3.51)$$

$$\theta_c = 0 \quad (3.52)$$

c) $r \leq 0$ y $c_{13} \leq 0$

$$\frac{\bar{H}_{loc}^p}{4G} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{(\bar{n}_1 - \bar{n}_2)^2}{2(1+\nu)} + \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \frac{n_v(1+\eta)}{6} (\bar{n}_1 + \bar{n}_2) + \frac{1}{9} \eta n_v^2 \right] \quad (3.53)$$

$$\theta_c = \frac{\pi}{2} \quad (3.54)$$

Estado Plano de Deformaciones

Considerando el estado plano de deformaciones, las componentes principales de los tensores \mathbf{n} y \mathbf{m} contenidas en el plano se denominan n_1, n_2 y m_1, m_2 y verifican la relación $n_1 > n_2$ y $m_1 > m_2$. Mientras n_3 y m_3 representan las componentes principales fuera del plano.

Dependiendo del signo de las siguientes magnitudes escalares,

$$c_1 = 2(\bar{n}_1 - \bar{n}_2) \left[\bar{n}_1 + \nu \bar{n}_3 + \frac{1}{6}(1+\nu)n_v(1+\eta) \right] \quad (3.55)$$

$$c_2 = 2(\bar{n}_1 - \bar{n}_2) \left[\bar{n}_2 + \nu \bar{n}_3 + \frac{1}{6}(1+\nu)n_v(1+\eta) \right] \quad (3.56)$$

surgen tres soluciones diferentes

a) $c_1 \geq 0$ y $c_2 \leq 0$

$$\frac{\bar{H}_{loc}^p}{4G} = \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{n_v^2(1-\eta)^2}{18(1-\nu)} - \left(\bar{n}_3 + \frac{n_v(1+\eta)}{6} \right)^2 \right] \quad (3.57)$$

$$\tan^2 \theta_c = -\frac{c_2}{c_1} \quad (3.58)$$

b) $c_1 \leq 0$

$$\frac{\bar{H}_{loc}^p}{4G} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{(\bar{n}_1 - \bar{n}_3)^2}{2(1+\nu)} + \bar{n}_1 \bar{n}_3 + \frac{n_v(1+\eta)}{6} (\bar{n}_1 + \bar{n}_3) + \frac{1}{9} \eta n_v^2 \right] \quad (3.59)$$

$$\theta_c = \frac{\pi}{2} \quad (3.60)$$

c) $c_2 \geq 0$

$$\frac{\bar{H}_{loc}^p}{4G} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{(\bar{n}_2 - \bar{n}_3)^2}{2(1+\nu)} + \bar{n}_2 \bar{n}_3 + \frac{n_v(1+\eta)}{6} (\bar{n}_2 + \bar{n}_3) + \frac{1}{9} \eta n_v^2 \right] \quad (3.61)$$

$$\theta_c = 0 \quad (3.62)$$

3.2.3. Condición Geométrica de Localización

El procedimiento desarrollado a continuación está basado en la propuesta de Benallal (1992) (105), que fuera desarrollada luego por Pijaudier-Cabot y Benallal (1993)(76), Benallal y Comi (1996)(106) y Liebe y Willam (2001) (107) en el marco de la plasticidad clásica.

La condición de localización o bifurcación discontinua de la ec. (3.40) puede representarse geoméricamente como una envolvente, en forma análoga a la condición de contacto de O. Mohr. Para el caso de modelos elastoplásticos formulados en dos invariantes, I_1 y J_2 definidos en la ec. (2.13), se define una elipse envolvente en las coordenadas de Mohr $\sigma_N - \tau_N$

$$\frac{[\sigma_N - \sigma_0]^2}{A^2} - \frac{\tau_N^2}{B^2} = 1 \quad (3.63)$$

siendo

$$\sigma_N = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} \quad , \quad S_N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \quad (3.64)$$

$$\tau_N^2 = [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}] \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}] - \sigma_N^2 \quad (3.65)$$

y \mathbf{S} el tensor desviador de tensiones.

La dirección crítica \mathbf{N} y el módulo crítico o máximo de endurecimiento \bar{H}_{loc}^p para localización se obtienen cuando la elipse contacta tangencialmente al círculo de tensiones de Mohr definido por la ecuación

$$(\sigma_N - \sigma_c)^2 + \tau_N^2 = R^2 \quad (3.66)$$

en la que el centro σ_c y el radio R están dados por

$$\sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad \text{y} \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.67)$$

siendo σ_1 y σ_3 las tensiones principales mayor y menor, respectivamente.

Los parámetros de la elipse de localización y del círculo de Mohr se ilustran en la Figura 3.3. A continuación se detalla el proceso para la obtención de los mismos.

Se escriben en forma general las funciones de fluencia y de potencial plástico de acuerdo a [Liebe (1998)(108)]

$$F = J_2^m + z(c\alpha_1 I_1 - k_1)^n + C = 0 \quad (3.68)$$

$$Q = J_2^m + z(c\alpha_2 I_1 - k_2)^n + C = 0 \quad (3.69)$$

donde los exponentes m y n caracterizan la forma de las superficies, el factor z dá el signo al segundo término y c depende de la influencia del primer invariante de tensiones I_1 .

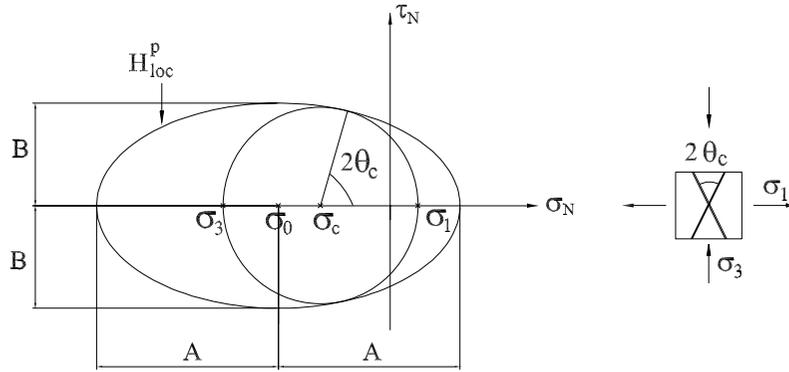


Figura 3.3: Círculo de Mohr y elipse de localización.

El parámetro C depende de las resistencias uniaxiales a compresión y tracción, f_c y f_t respectivamente. Los gradientes de las ecs. (3.68) y (3.69) respecto del tensor de tensiones resultan

$$\mathbf{n} = mJ_2^{(m-1)}\mathbf{S} + nz(c\alpha_1 I_1 - k_1)^{(n-1)}c\alpha_1 \mathbf{I}_2 \quad (3.70)$$

$$\mathbf{m} = mJ_2^{(m-1)}\mathbf{S} + nz(c\alpha_2 I_1 - k_2)^{(n-1)}c\alpha_2 \mathbf{I}_2 \quad (3.71)$$

Otros factores que intervienen en las operaciones son el operador elástico \mathbf{E}^e , el tensor elástico de localización \mathbf{Q} y su inversa $(\mathbf{Q})^{-1}$ definidos como

$$\mathbf{E}^e = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 + \frac{E}{(1+\nu)}\mathbf{I}_4^{sim} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\mathbf{I}_2 + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \quad (3.73)$$

$$(\mathbf{Q})^{-1} = 2\frac{(1+\nu)}{E} \left[\mathbf{I}_2 - \frac{1}{(1-2\nu)}\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \quad (3.74)$$

Los tensores de primer orden \mathbf{a}_n y \mathbf{a}_m de ecs. (3.35) y (3.36) resultan

$$\mathbf{a}_n = \frac{E}{(1+\nu)}mJ_2^{(m-1)}\mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + \frac{E}{(1-2\nu)}znc\alpha_1(cp\alpha_1 - k_1)^{(n-1)}\mathbf{N} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{a}_m = \frac{E}{(1+\nu)}mJ_2^{(m-1)}\mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + \frac{E}{(1-2\nu)}znc\alpha_2(cp\alpha_2 - k_2)^{(n-1)}\mathbf{N} \quad (3.76)$$

con

$$p_1 = cI_1\alpha_1 - k_1 \quad (3.77)$$

$$p_2 = cI_1\alpha_2 - k_2 \quad (3.78)$$

Al reformular la ec. (3.40) en la forma de la elipse (3.63), se obtienen las expresiones de los semiejes A y B y del centro de la elipse σ_0

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}I_1 - \frac{1+\nu}{(1-2\nu)}[\alpha_1 p_1^{(n-1)} + \alpha_2 p_2^{(n-1)}] \frac{znc}{2mJ_2^{(m-1)}} \quad (3.79)$$

$$A^2 = 2\frac{1-\nu}{(1-2\nu)}B^2 \quad (3.80)$$

$$B^2 = \frac{1}{m^2 J_2^{(m-1)2}} \left[\frac{\bar{H}^p}{4G} + m^2 J_2^{(m-1)2} J_2 + n^2 c^2 \alpha_1 \alpha_2 (p_1 p_2)^{(n-1)} \frac{3(1+\nu)}{2(1-2\nu)} \right] + \frac{1}{m^2 J_2^{(m-1)2}} \left[\frac{(1+\nu)^2}{2(1-2\nu)(1-\nu)} n^2 c^2 (\alpha_1 p_1^{(n-1)} + \alpha_2 p_2^{(n-1)})^2 \frac{1}{4} \right] \quad (3.81)$$

siendo G el módulo de corte

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.82)$$

El contacto tangencial entre la elipse de localización y el círculo de Mohr se produce simultáneamente en dos puntos, indicando dos planos críticos de localización. Expresiones algebraicas generales para el cálculo de \bar{H}_{loc}^p y θ_c han sido propuestas por Liebe (1998)(108) a partir de esta condición.

Dependiendo de la ubicación de los puntos de contacto entre la elipse de localización y el círculo de Mohr puede interpretarse el modo de falla material, de acuerdo al siguiente criterio:

- Modo *I*. Punto de contacto: $[\sigma_1, 0]$, siendo $\sigma_1 > 0$, $\sigma_c = 0$ y $2\theta_c = 0^\circ$.
- Modo *II*. Dos puntos de contactos: $[0, R]$ y $[0, -R]$, siendo $\sigma_c = 0$ y $2\theta_c = 90^\circ$.

- Modos mixtos. Dos puntos de contactos fuera de los ejes $[\sigma_N - \tau_N]$, siendo $2\theta_c < 180^\circ$.

El centro σ_0 y la forma de la elipse dada por la relación A/B , no dependen del parámetro de endurecimiento o ablandamiento \bar{H}^p . Éste sólo influye en el tamaño de la misma, determinado por los semiejes A y B .

3.3. Condiciones de Localización para Materiales Elasto-plásticos de Gradientes

Con el objeto de realizar el análisis de las condiciones de bifurcación discontinua del modelo material elastoplástico de gradientes termodinámicamente consistente, se desarrolla en este trabajo la condición geométrica de localización para este tipo de formulaciones no locales. Para ello se considera primeramente la forma analítica de localización que se deduce a partir de las ecuaciones de consistencia plástica, equilibrio y constitutiva de la formulación de gradientes

$$-l_c^2 \bar{\mathbf{H}}^g : \nabla^2 \dot{\lambda} + h \dot{\lambda} = \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \dot{\varepsilon} \quad , \quad \bar{\mathbf{H}}^g = \mathbf{H}^g \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (3.83)$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^e : \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \mathbf{E}^e : \mathbf{m} \quad (3.85)$$

y se plantean los campos solución de dichas ecuaciones diferenciales en términos de ondas planas [Svedberg (1999)(39)]

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{U}(t) \exp\left(\frac{i2\pi}{\delta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}\right) \quad \text{y} \quad \dot{\lambda} = \dot{\Lambda}(t) \exp\left(\frac{i2\pi}{\delta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}\right) \quad (3.86)$$

siendo \mathbf{x} la posición del vector en coordenadas cartesianas, \mathbf{N} la dirección normal a la onda y δ la longitud de onda, mientras las amplitudes de onda se simbolizan con $\dot{U}(t)$ y $\dot{\Lambda}(t)$, ver Figura 3.4.

Sustituyendo las expresiones de la ec. (3.86) en el set de ecs. (3.83) a (3.85) se concluye que éstas se satisfacen para todo \mathbf{x} mientras se satisfaga la condición

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \left[\mathbf{Q} - \frac{\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}_n}{h + h_g} \right] \cdot \dot{U} = 0 \quad (3.87)$$

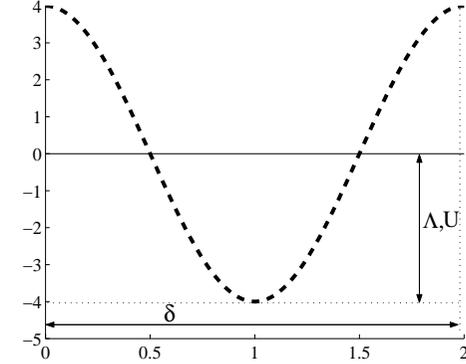


Figura 3.4: Características de las ondas planas.

siendo h_g el módulo generalizado de gradientes definido como

$$h_g = \mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{H}}^g \cdot \mathbf{N} \left(\frac{2\pi l_c}{\delta} \right)^2 \quad (3.88)$$

En el caso especial de plasticidad isótropa vale la igualdad $\mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{H}}^g \cdot \mathbf{N} = \bar{H}^g$ y el módulo h_g se reduce a

$$h_g = \bar{H}^g \left(\frac{2\pi l_c}{\delta} \right)^2 \quad , \quad \bar{H}^g = H^g \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (3.89)$$

La expresión del tensor de localización de gradientes \mathbf{Q}^g se deduce de la ec. (3.87) y resulta

$$\mathbf{Q}^g = \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}_n}{h + h_g} \quad (3.90)$$

Para determinar la condición de localización es necesario realizar el análisis espectral del tensor \mathbf{Q}^g . Procediendo en forma equivalente a ec. (3.38), se premultiplica por $(\mathbf{Q})^{-1}$

$$(\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^g = \mathbf{1} - (\mathbf{Q})^{-1} \cdot \frac{\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}_n}{h + h_g} \quad (3.91)$$

para plantear el problema de autovalores generalizado $\det[(\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^g] = 0$. La solución del mínimo autovalor resulta

$$\lambda_{\min}[(\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^g] = 1 - d_G \quad \text{con} \quad d_G = \frac{\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{a}_m}{\bar{H}^p + \mathbf{n} : \mathbf{E}^e : \mathbf{m} + h_g} \quad (3.92)$$

y define la condición de localización para plasticidad dependiente de gradientes

$$1 - d_G \doteq 0 \quad \rightarrow \quad \bar{H}^p + \bar{H}^g \left(\frac{2\pi l_c}{\delta} \right)^2 = \mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{a}_m - \mathbf{n} : \mathbf{E}^{ep} : \mathbf{m} \quad (3.93)$$

La formulación material elastoplástica dependiente de gradientes conduce a modos de falla localizados, en la misma forma que el modelo material local en los casos siguientes:

Caso 1: Cuando la longitud de onda $\delta \rightarrow \infty$, resultando $h_g = 0$. La ec. (3.93) se transforma en la condición de localización local de la ec. (3.40).

Caso 2: Bajo ciertas condiciones, cuando el coeficiente de ablandamiento cumple la condición $\bar{H}^p < \bar{H}_{loc}^p$. Y se verifica la relación

$$\bar{H}_{loc}^p = \bar{H}^p + H^g \left(\frac{2\pi l_c}{\delta} \right)^2 \quad (3.94)$$

A partir la ec. (3.94) puede calcularse el ancho de la zona de localización δ equivalente a la longitud de la onda, como

$$\frac{\delta}{l_c} = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{H}^g}{\bar{H}_{loc}^p - \bar{H}^p}} \quad (3.95)$$

En consecuencia, el coeficiente de gradientes resulta ser crítico si verifica la relación

$$\bar{H}_{loc}^g = (\bar{H}_{loc}^p - \bar{H}^p) \left(\frac{\delta}{2\pi l_c} \right)^2 \quad (3.96)$$

Es importante hacer notar en esta última ecuación, que adoptando valores de \bar{H}^g menores a \bar{H}_{loc}^g se suprimen las propiedades regularizantes de la teoría de gradientes obteniéndose modos de falla localizados. Esto resulta una propiedad (o déficit) de la teoría elastoplástica de gradientes no conocida hasta el presente, que se estudia con detalle en la sección siguiente mediante el análisis geométrico de localizaciones en medios elastoplásticos de gradientes.

3.3.1. Condición Geométrica de Localización para Materiales Elastoplásticos de Gradientes

El método geométrico de localización ha sido extendido durante este trabajo de tesis a modelos elastoplásticos de gradientes [ver Vrech y Etse (2005)(109) y (2006)(110) (111)].

Las expresiones correspondientes al centro de la elipse y al semieje A responden a las ecs. (3.79) y (3.80) respectivamente, mientras que el semieje B se calcula como

$$B^2 = \frac{1}{m^2 J_2^{(m-1)^2}} \left[\frac{\bar{H}^p + \bar{H}^g \frac{2\pi l_c}{\delta}}{4G} + m^2 J_2^{(m-1)^2} J_2 + n^2 c^2 \alpha_1 \alpha_2 (p_1 p_2)^{(n-1)} \frac{3(1+\nu)}{2(1-2\nu)} \right] + \frac{1}{m^2 J_2^{(m-1)^2}} \left[\frac{(1+\nu)^2}{2(1-2\nu)(1-\nu)} n^2 c^2 (\alpha_1 p_1^{(n-1)} + \alpha_2 p_2^{(n-1)})^2 \frac{1}{4} \right] \quad (3.97)$$

Los efectos no locales en términos de la longitud característica l_c y del módulo de endurecimiento/ablandamiento de gradientes \bar{H}^g , sólo afectan a las expresiones de los semiejes A y B de la elipse de localización, influyendo sólo en el tamaño de la misma.

Además, de la ec. (3.97) se concluye que el semieje B de la elipse de localización basada en plasticidad de gradientes adopta la expresión de la plasticidad local de ec. (3.81) cuando la relación $l_c/\delta \rightarrow 0$.

Capítulo 4

Teoría Constitutiva Elastoplástica de Gradientes para Materiales Cuasi-frágiles

En este capítulo se describe primeramente el comportamiento mecánico de materiales cuasi-frágiles como el hormigón caracterizado por su fuerte dependencia en el estado e historia de tensiones y deformaciones.

Posteriormente se desarrolla una teoría constitutiva elastoplástica basada en gradientes y energía de fractura para predecir el comportamiento de falla de los materiales cuasi-frágiles como el hormigón. En este sentido se presentan los criterios de máxima resistencia de Mohr, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager y Leon, utilizado este último en la formulación constitutiva propuesta.

Una vez planteado el criterio de máxima resistencia, se formulan las leyes de endurecimiento y ablandamiento como así también la ley de evolución de flujo plástico no asociado.

En el capítulo 5 se calibran las funciones propuestas de acuerdo a ensayos de laboratorio seleccionados y se verifica la eficacia del modelo para predecir el comportamiento de falla del hormigón en los regímenes pre y pospico.

4.1. Características del Comportamiento de Falla del Hormigón

Durante un proceso de carga monotónica creciente en compresión simple, bi o triaxial, en medio o alto confinamiento, se observan tres etapas bien diferenciadas en el comportamiento mecánico del hormigón:

- una etapa inicial de respuesta lineal elástica,
- una etapa de endurecimiento en régimen de pre-pico, con no linealidad dependiente del nivel de confinamiento, y
- una etapa de pospico o ablandamiento, con no linealidad variable de acuerdo al nivel de confinamiento.

Cualquier descarga que interrumpe el proceso de carga monotónica sigue un comportamiento muy similar al elástico.

La respuesta elástica inicial está limitada por una superficie de carga que crece isotrópamente con el incremento de las deformaciones anelásticas durante un proceso denominado endurecimiento. En esta etapa el material sufre una degradación creciente de su rigidez sin localización de los microdefectos que se desarrollan bajo valores constantes de cohesión.

El comportamiento de ablandamiento se inicia a partir de la resistencia pico, cuando los microdefectos se agrupan dando lugar a macrofisuras. La relación tensión-desplazamiento durante la apertura de fisuras se evalúa a través de una propiedad mecánica del material que es la energía liberada durante dicho proceso de fractura.

El proceso de coalición de microdefectos en fisuras o grietas, que dá lugar al fenómeno de ablandamiento depende fuertemente de las condiciones de borde, de la geometría y del estado tensional gobernante. Las condiciones de borde pueden generar zonas de fuertes concentraciones de presiones confinantes o contrariamente, dar lugar a campos cinemáticos que lleven a relajaciones de tensiones. Asimismo, la geometría del espécimen puede potenciar o reducir la influencia de las condiciones de contorno y, consiguientemente, del estado tensional dominante. Es en esta fuerte influencia de las condiciones de borde y de la geometría que se sustenta la interpretación del ablandamiento como un fenómeno estructural más que material, hecho que en el presente está fuera de toda discusión o cuestionamiento. Como consecuencia, existe una demanda lógica y filosófica de teorías materiales "no locales" para

modelar el fenómeno de ablandamiento. En este sentido, y en el marco teórico de la mecánica del continuo, se interpreta que el ablandamiento es un proceso de localización de deformaciones en una banda finita definida por una longitud característica, la cual deberá depender del problema estructural o estado tensional dominante.

Como se indicó anteriormente, el comportamiento de falla del hormigón en régimen de endurecimiento y ablandamiento es fuertemente dependiente del estado de tensiones o, más precisamente, del nivel de confinamiento existente. Niveles crecientes de confinamiento conducen a ductilidades superiores en pre y pospico. A partir de un valor determinado de confinamiento (punto de transición entre falla frágil y dúctil), se observa que la ductilidad en pre-pico crece en forma significativa de manera tal que no se desarrolla el proceso de ablandamiento.

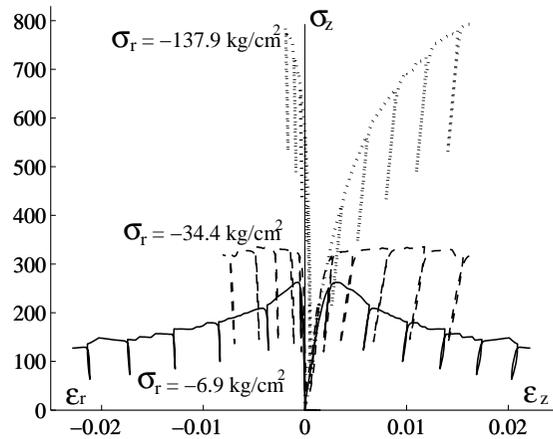


Figura 4.1: Ensayos de compresión bajo distintas presiones de confinamiento σ_r . Hormigón $f_c = 220.63 \frac{kg}{cm^2}$ [Hurlbut (1985)(50)].

Al igual que las ductilidades en pre y pospico, también la resistencia máxima del hormigón es fuertemente dependiente del nivel de confinamiento. El set de resultados experimentales de Hurlbut (1985)(50) en hormigones de resistencia a compresión $f_c = 220.6 \frac{kg}{cm^2}$ muestra

claramente la fuerte sensibilidad del material respecto del nivel de confinamiento en procesos de cargas monotónicas crecientes en compresión triaxial, ver Figura 4.1. En estos resultados se observa también la fuerte disminución de la deformación lateral con el nivel de confinamiento.

Todos estos elementos y resultados experimentales demuestran el dramático cambio de comportamiento frágil a dúctil del hormigón con el incremento de la presión confinante donde tanto la ductilidad, resistencia, cambio volumétrico y de rigidez muestran una sensibilidad destacada.

Desde el punto de vista teórico, numerosos modelos han sido propuestos para describir el proceso de microfisuración y degradación del hormigón.

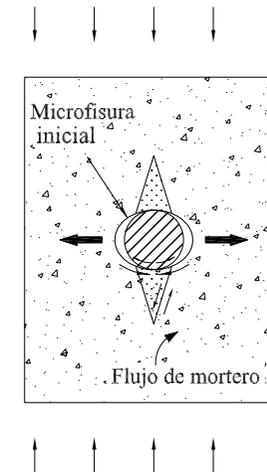


Figura 4.2: Proceso de fisuración de hormigón. Modelo de Vile

El modelo desarrollado por Vile (1968) (112) se grafica en la Figura 4.2. Se presenta allí un agregado rígido rodeado por una matriz cementicia de menor rigidez, que tiende a fluir alrededor de la partícula originando tensiones de tracción por desplazamiento. Estas fisuras son estables, se propagan sólo si se incrementa la carga externa. El material por arriba y debajo del agregado resulta confinado triaxialmente y en consecuencia aumenta su resisten-

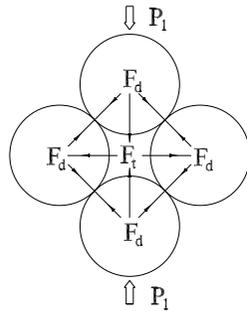


Figura 4.3: Interacciones del modelo material de van Mier para procesos de fisuración

cia. Se desarrollan entonces fisuras a lo largo del eje que define las zonas cónicas superior e inferior. La existencia de los conos de corte ha sido verificada en ensayos experimentales.

Otro modelo es el formulado por van Mier (1997)(45), esquematizado en la Figura 4.3. Resulta de considerar al material compuesto en conjunto y las interacciones entre las partículas de los agregados, representando a éstas como esferas. Con el incremento de la carga de compresión externa P_1 se desarrollan tensiones de tracción F_t por desplazamiento. Experimentos realizados en discos de material foto-elástico demuestran las grandes concentraciones de tensiones que se desarrollan en los puntos de contacto y que simulan igual fenómeno entre agregados de hormigones. En la Figura 4.4 se observa un experimento de este tipo, desarrollado por Wischers y Lusche (1972)(113).

En el caso de estados tensionales traccionantes el comportamiento del hormigón se torna típicamente frágil. El ensayo de tracción uniaxial de Hurlbut en probetas cilíndricas de hormigón muestra que el comportamiento de endurecimiento se limita a una respuesta lineal sin cambio de rigidez hasta casi alcanzado el pico de resistencia, ver Figura 4.5. A partir de allí se desarrolla un marcado y altamente inestable proceso de pospico donde tiene lugar una fuerte localización de microfisuras en una grieta única en la que se disipa toda la energía suministrada durante la carga. El comportamiento del hormigón en tracción uniaxial ha sido la base para el desarrollo del modelo de falla ficticia (*FCM*) de Hillerborg, Modéer, y Petersson (1976)(23).



Figura 4.4: Transferencia de carga entre agregados de hormigón. Modelo de Wischers y Lusche.

Al igual que en el proceso de fractura por compresión, la fisuración está presente aun en etapas incipientes de carga traccionante. Las microfisuras se extienden a medida que se aplica la carga y el proceso pasa a depender de las interacciones entre las microfisuras y entre ellas y los agregados.

Como fue demostrado por Petersson (1981)(114), el ancho de la zona de localización de deformaciones depende de la estructura del material. Tamaños mayores de agregados producen anchos de fisuración mayores, con mayor consumo de energía. Además influyen el tamaño de la probeta y las restricciones impuestas por las condiciones de borde. Otros factores de importancia son la relación agua-cemento en la matriz cementicia, la edad del hormigón, que afectan ambos la porosidad de la interfase matriz-agregado y, finalmente, la velocidad de la acción mecánica aplicada, debido a la reología intrínseca del mortero cementicio.

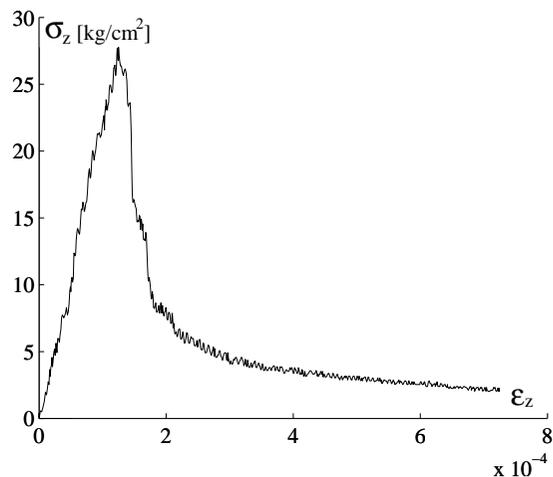


Figura 4.5: Ensayo de tracción uniaxial. Hormigón $f_c = 220.63 \frac{kg}{cm^2}$ y $f_t = 27.58 \frac{kg}{cm^2}$ [Hurlbut (1985)(50)].

4.2. Criterios de Máxima Resistencia

De acuerdo a la hipótesis de falla utilizada, los criterios de máxima capacidad delimitan la resistencia, la deformabilidad o la densidad energética del material

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = F(\boldsymbol{\sigma}) - Y_\sigma = 0 \quad (4.1)$$

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}) = F(\boldsymbol{\varepsilon}) - Y_\varepsilon = 0 \quad (4.2)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) = F(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) - Y_W = 0 \quad (4.3)$$

En el más simple de los casos esta generalización del concepto de resistencia máxima conduce a la idea clásica de envolvente de falla de Mohr, que define las tensiones normales y tangenciales sobre la superficie de falla mediante la condición $F = F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$. La superficie crítica de falla se expresa en términos de las coordenadas de Mohr (σ_N, τ_N) sólo como un límite de tensiones sin introducir formulaciones materiales no lineales ni anelásticas. La falla del material ocurre cuando el radio del mayor círculo de tensiones principales es tangente a la curva envolvente $F = F(\sigma_N, \tau_N)$ como se grafica en la Figura 4.6. La dirección del plano

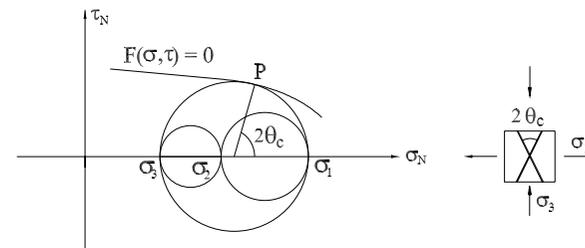


Figura 4.6: Envolvente de falla de Mohr

de falla puede obtenerse en relación a las direcciones principales. Una de las formas más simples de la envolvente de Mohr es la línea recta denominada envolvente de Mohr-Coulomb

$$|\tau_N| = c - \sigma_N \tan \phi \quad (4.4)$$

donde c es la cohesión y ϕ el ángulo de fricción interna. La Figura 4.7 demuestra la principal deficiencia del criterio de Mohr-Coulomb: resulta el mismo modo de falla independientemente del estado tensional (tracción y compresión uniaxial o corte puro) y los planos de falla poseen siempre la misma orientación $\theta_c = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$.

Esta desventaja condujo a diferentes propuestas, siendo la más significativa la aportada por Leon (1935)(46)(47), quien introdujo la versión parabólica de la envolvente de Mohr, ver Figura 4.8. El ángulo de falla varía entre $0 \leq \theta_c < \frac{\pi}{4}$, y el ángulo de fricción interna ϕ corresponde a la pendiente de la curva envolvente parabólica en el punto de contacto con el círculo Mohr $P = P(\sigma_N, \tau_N)$.

Ninguno de estos criterios incluye información del material superado el estado tensional límite. Para describir el comportamiento material antes y una vez iniciada la falla, es necesario incluir la relación constitutiva tangente

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^t : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.5)$$

cuyo operador material se torna singular

$$\det[\mathbf{E}^t] = 0 \quad \forall \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0 \quad (4.6)$$

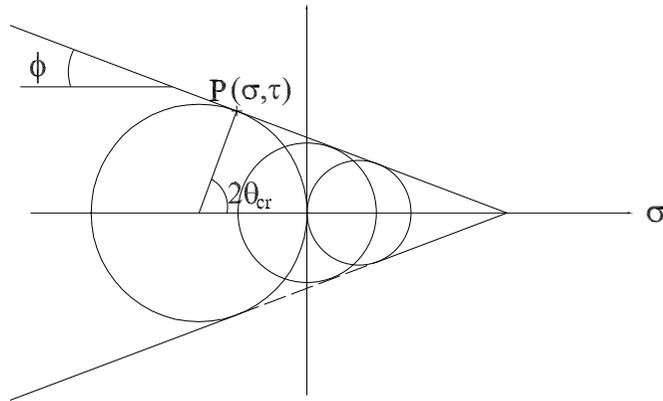


Figura 4.7: Envolvente de falla de Mohr-Coulomb.

al alcanzar la máxima resistencia material. En este caso, los autovectores asociados a los autovalores nulos identifican las tasas de deformaciones críticas que generan los valores estacionarios de tensiones, representados por una horizontal en el punto límite de la curva tensión-deformación del material.

4.3. El Criterio de Máxima Resistencia de Drucker-Prager

La formulación clásica del criterio de Drucker-Prager (1952) es una modificación simple del criterio de fluencia de von Mises. Se incluye un término adicional en función de la componente hidrostática o primer invariante del tensor de tensiones en la condición de fluencia de von Mises $F(J_2) = J_2 - k^2$, donde k es la tensión de fluencia en corte puro y J_2 el segundo invariante del tensor desviador de tensiones definido en la ec. (2.13)

$$F(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (4.7)$$

Los dos parámetros materiales, α y k calibrados en términos de las resistencias a tracción y

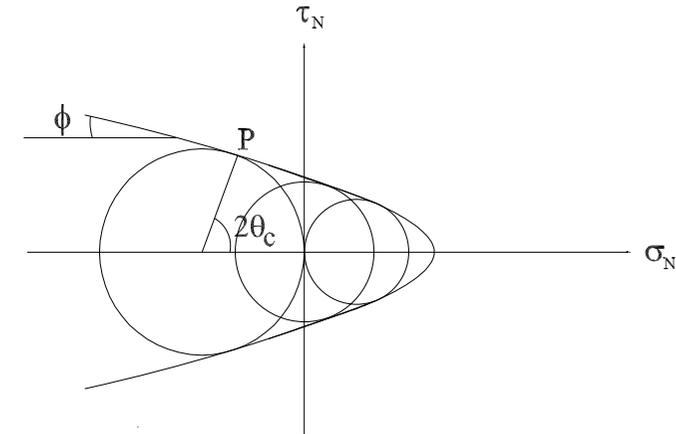


Figura 4.8: Envolvente de falla del criterio de Leon.

compresión uniaxiales f_t y f_c respectivamente, resultan

$$\alpha = \frac{f_c - f_t}{\sqrt{3}(f_c + f_t)} \quad , \quad k = \frac{2f_c f_t}{\sqrt{3}(f_c + f_t)} \quad (4.8)$$

Cuando ambas resistencias coinciden, α es igual a cero y la ec. (4.7) se reduce al criterio de von Mises. La función F representada en el espacio de tensiones principales resulta una superficie cónica, mientras en las coordenadas de Haigh-Westergaard

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad , \quad p = \frac{\sqrt{3}}{3}\xi \quad (4.9)$$

$$\rho = \sqrt{2J_2} = \sqrt{(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2} \quad (4.10)$$

representa una función lineal, ver Figura 4.9.

La principal deficiencia de la formulación lineal de Drucker-Prager es la excesiva dilatación plástica en fluencia. Para mejorar esta limitación se plantea una versión parabólica del criterio.

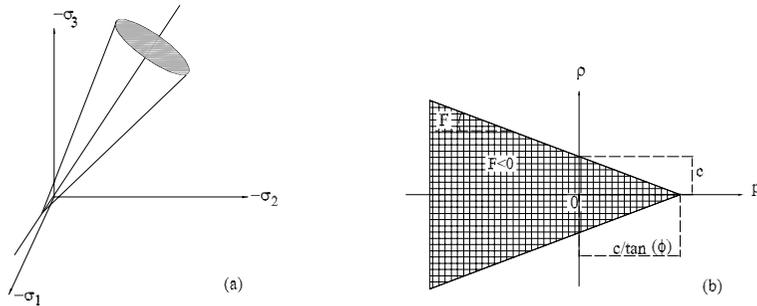


Figura 4.9: Función de fluencia de Drucker-Prager lineal

Formulación Parabólica del Criterio de Drucker-Prager

La expresión del criterio de máxima resistencia de Drucker-Prager de segundo orden es

$$F(I_1, J_2) = J_2 + \alpha I_1 - k = 0 \quad (4.11)$$

con los parámetros de fricción y cohesión

$$\alpha = \frac{f_c - f_t}{3}, \quad k = \frac{f_c f_t}{3} \quad (4.12)$$

La representación de la función F en el espacio de tensiones principales y en las coordenadas de Haigh-Westergaard se grafica en la Figura 4.10.

4.4. El Criterio de Máxima Resistencia de Leon para Hormigón

Numerosos criterios basados en el análisis de tensiones han sido desarrollados para la descripción del comportamiento triaxial del hormigón [Eibl y Iványi (1976)(115), Chen y Han

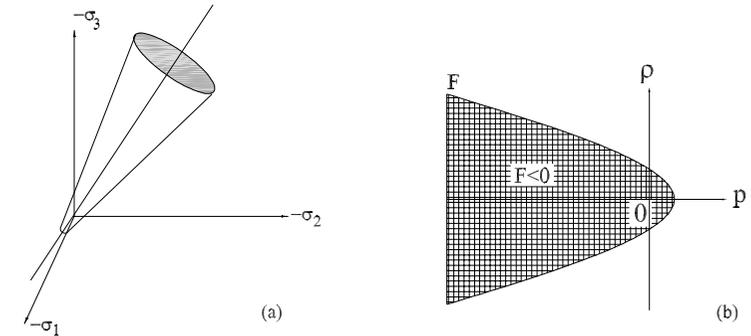


Figura 4.10: Función de fluencia de Drucker-Prager parabólico

(1988)(68), Desai y Siriwardane (1984)(54)].

Se considera en este trabajo el criterio de máxima resistencia de Leon (1935)(46) (47) que combina las condiciones de fluencia de Mohr-Coulomb (basada en dos parámetros) y la de Rankine (basada en un parámetro). Similarmente a todos los criterios isotrópicos de máxima resistencia, el criterio de Leon puede también ser expresado en el espacio de tensiones principales o de invariantes de tensiones. En el primer caso, la función de máxima resistencia resulta

$$F(\sigma) = F(\sigma_1, \sigma_3) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f_c} \right)^2 + m_0 \frac{\sigma_1}{f_c} - c_0 = 0 \quad \text{con } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (4.13)$$

siendo los parámetros de cohesión y fricción c_0 y m_0 respectivamente, calibrados a partir de los valores de las resistencias uniaxiales máximas a tracción y compresión f_t y f_c

$$c_0 = 1 \quad \text{y} \quad m_0 = \frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c f_t} \quad (4.14)$$

La resistencia material en el ensayo de tracción uniaxial σ_t , no manifiesta degradación respecto a la máxima resistencia uniaxial a tracción f_t hasta alcanzar el pico de tensión y durante toda la etapa de pre-pico .

La principal característica del modelo original de Leon está dada por los ángulos o esquinas en el plano desviador cuyo tratamiento numérico en el marco de la teoría de la plasticidad

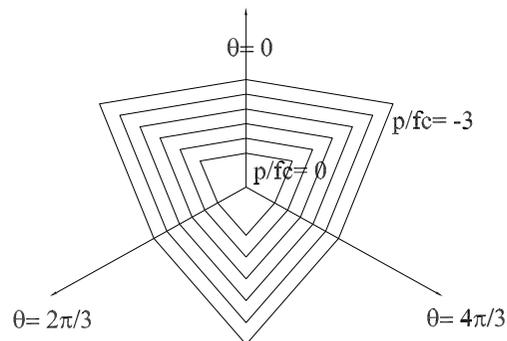


Figura 4.11: Criterio de falla de Leon en el plano desviador.

requiere consideraciones especiales, ver Figura 4.11. Para superar esta dificultad y obtener una superficie de continuidad C^1 en plano desviador, el modelo de Leon fue extendido por Etse (1992)(49) mediante la consideración de la variación elíptica del segundo invariante del desviador de tensiones de acuerdo al criterio de Willam y Wranke (1974)(48), ver Figura 4.12.

En el espacio de invariantes de tensiones en términos de las coordenadas de Haigh-Westergaard $[p, \rho, \theta]$ definidas en las ecs. (4.9), (4.10) y

$$\theta = \arccos \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_1 - p}{\rho} \right) \quad (4.15)$$

la condición de máxima resistencia de ec. (4.13) resulta

$$F(p, \rho, \theta) = \left(\frac{\rho}{f_c} \right)^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{m_0}{f_c} \left(p + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \cos \theta \right) - c_0 = 0 \quad (4.16)$$

El meridiano de tracción se obtiene cuando $\theta = 0$

$$F_t(p, \rho_t) = \frac{3}{2} \left(\frac{\rho_t}{f_c} \right)^2 + \frac{m_0}{f_c} \left(p + \sqrt{\frac{3}{2}} \rho_t \right) - c_0 = 0 \quad (4.17)$$

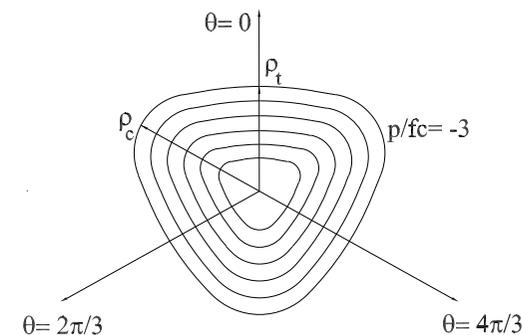


Figura 4.12: Criterio de falla de Leon extendido en el plano desviador.

y el de compresión cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$F_c(p, \rho_c) = \frac{3}{2} \left(\frac{\rho_c}{f_c} \right)^2 + \frac{m_0}{f_c} \left(p + \frac{\rho_c}{\sqrt{6}} \right) - c_0 = 0 \quad (4.18)$$

Introduciendo la excentricidad e de la resistencia deviatorica

$$e = \frac{\rho_t}{\rho_c} \quad (4.19)$$

puede definirse entonces la función de Willam-Wranke

$$g(\theta) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}} \quad (4.20)$$

que controla la variación elíptica de la resistencia deviatorica en función del tercer invariante

$$\rho = \rho(\theta) = \frac{\rho_c}{g(\theta)} \quad (4.21)$$

y evita o suprime las esquinas de la función de máxima resistencia en el plano deviatorico. De esta manera, el criterio extendido de Leon [Etse (1992)(49)], resulta

$$F(p, \rho, \theta) = \frac{3}{2} \left(\frac{\rho g(\theta)}{f_c} \right)^2 + \frac{m_0}{f_c} \left(p + \frac{\rho g(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - c_0 = 0 \quad (4.22)$$

representado gráficamente en el plano desviador, en la Figura 4.12. La convexidad en el plano desviador queda asegurada mientras la excentricidad permanezca en el intervalo $0,5 \leq e \leq 1$. La representación gráfica de los meridianos de tracción y compresión comparada con datos de tensiones máximas de ensayos de laboratorio puede apreciarse en la Figura 4.13.

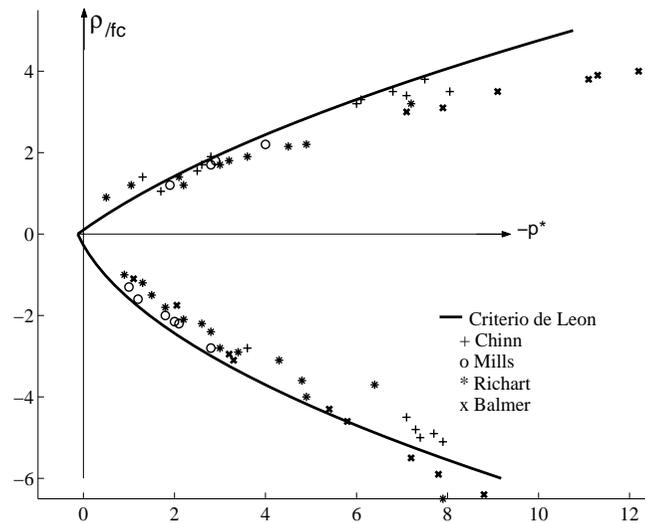


Figura 4.13: Criterio de fluencia de Leon extendido en el plano de invariantes.

4.5. Modelo LDP de Elastoplasticidad de Gradientes Basado en Energía de Fractura

Para modelar y predecir la respuesta del hormigón en el marco de la teoría elastoplástica de gradientes termodinámicamente consistente y de la energía de fractura, se formula en este trabajo el criterio Leon - Drucker-Prager (LDP).

El marco termodinámico se incorpora a través de las leyes que gobiernan los procesos de endurecimiento y ablandamiento, calibradas utilizando los resultados de ensayos experimentales de Hurlbut (1985)(50).

El criterio de falla LDP se formula a partir del criterio de falla de Leon extendido [ver Etse (1992)(49)], mediante la eliminación de la dependencia en el tercer invariante (ángulo de Lode), transformándose en un criterio dependiente de los invariantes I_1 y J_2 (ó p y ρ), característica propia del criterio de Drucker-Prager. De esta manera, la excentricidad e que interviene en las ecuaciones del criterio de Leon (4.19), (4.20) y (4.22) toma el valor máximo

1 (y en consecuencia $g(\theta) = 1$), conllevando a la coincidencia entre los meridianos de tracción y compresión que responden a la función

$$F(p, \rho) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + m_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - c_0 = 0 \quad ; \quad \rho^* = \frac{\rho}{f_c} \quad , \quad p^* = \frac{p}{f_c} \quad (4.23)$$

con los parámetros

$$c_0 = 1 \quad y \quad m_0 = \frac{3 f_c^2 - f_t^2}{2 f_c f_t} \quad (4.24)$$

En la Figura 4.14 se comparan los valores de los meridianos de tracción y compresión correspondientes a la carga máxima, con los obtenidos en ensayos triaxiales sobre probetas de hormigón. Se observa en esta figura que el criterio LDP, contrariamente al criterio de Leon (ver Figura 4.13), sobre-estima la resistencia a tracción triaxial del hormigón. Sin embargo el nivel de error por dicha sobre-resistencia se considera admisible en esta formulación en virtud de la considerable ventaja computacional y matemática que trae aparejada. De todas maneras, la formulación del modelo termodinámicamente consistente de gradientes para hormigón en este trabajo puede ser fácilmente extendida para tener en cuenta otros criterios de tensiones más complejos o realistas para materiales cuasi-frágiles como el hormigón.

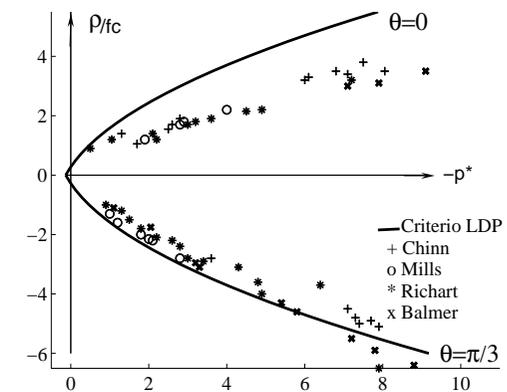


Figura 4.14: Comparación del criterio de falla LDP con datos experimentales de tensiones pico en probetas de hormigón.

La expresión general de la superficie de carga del modelo LDP está dada por la función

$$F(p, \rho, k, c) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + km_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - kc = 0 \quad (4.25)$$

con el parámetro de endurecimiento k , que satisface la relación $k_0 \leq k \leq 1$, y el parámetro de cohesión c , definido entre los valores $0 \leq c \leq 1$.

4.6. Ley de No Asociatividad del Modelo de LDP

Se adopta una regla de flujo no asociada para evitar la excesiva dilatación volumétrica que implicaría una regla de flujo asociada, en la que la dirección de las deformaciones anelásticas quedaría definida por la dirección normal a la superficie de fluencia. De esta manera se logra predecir más ajustadamente el comportamiento pre y posfalla y, particularmente, el complejo comportamiento volumétrico del hormigón en régimen de bajo confinamiento.

La función general del potencial plástico se formula como

$$Q(p, \rho, k, c) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + km_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + \eta p^* \right) - kc = 0 \quad (4.26)$$

siendo η la variable de no asociatividad. Para el caso de hormigón toma el valor $\eta = 0$, correspondiente a la no asociatividad de von Mises.

4.7. Ley de Endurecimiento Isótropo del modelo LDP

Superado el límite elástico, el hormigón posee la propiedad de desarrollar endurecimiento. Este comportamiento consiste en la degradación de la rigidez con el incremento de las deformaciones anelásticas hasta alcanzar la carga pico, sin desarrollar localización de macrodefectos y a valor de cohesión constante $c = c_0 = 1$.

La expresión general de la superficie de carga de ec. (4.25) en régimen de endurecimiento resulta

$$F(p, \rho, k) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + km_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - k = 0 \quad (4.27)$$

y crece isótricamente a medida que se incrementa el valor del parámetro de endurecimiento k , desde el valor mínimo $k = k_0 = 0,1$ correspondiente al límite elástico, hasta un máximo $k = k_f = 1$ para la carga límite [ver Figura 4.15].

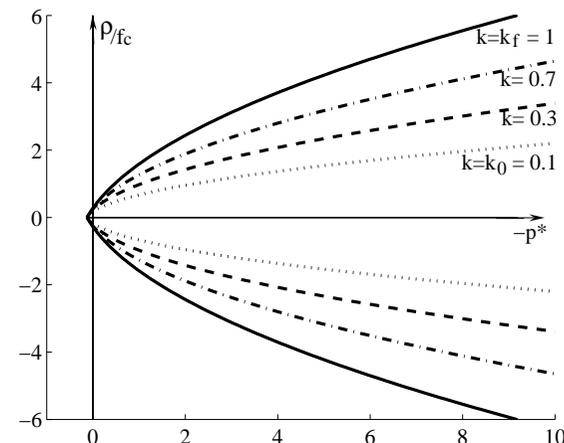


Figura 4.15: Evolución de la función de fluencia del criterio LDP durante el comportamiento de endurecimiento.

Se define una ley evolución del trabajo de endurecimiento χ_h en función de la tasa de la deformación plástica equivalente $\dot{\epsilon}_p$

$$\dot{\chi}_h = \frac{\dot{\epsilon}_p}{x_p} \quad , \quad \dot{\epsilon}_p = \sqrt{\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} = \dot{\lambda} \|\mathbf{m}\| \quad (4.28)$$

donde x_p representa la deformación plástica equivalente máxima correspondiente a la carga límite y puede interpretarse como una medida de la ductilidad de endurecimiento, la cual depende fuertemente del nivel de confinamiento o presión de volumétrica p . Dicha dependencia se define en este trabajo mediante una ley exponencial de acuerdo a

$$x_p(p^*) = A_h \exp(B_h p^*) \quad (4.29)$$

La dependencia del parámetro de endurecimiento k respecto del trabajo de endurecimiento χ_h se establece mediante una función senoidal del tipo

$$k(\chi_h) = 0,1 + 0,9 \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \chi_h \right) \quad (4.30)$$

Se grafica en la Figura 4.16 la variación de la función de endurecimiento k correspondiente a distintos niveles de presiones de confinamiento p .

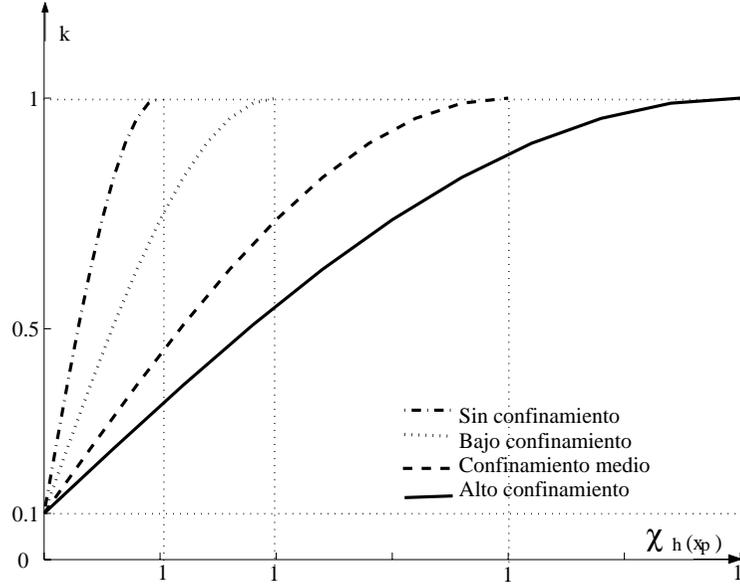


Figura 4.16: Funciones de endurecimiento correspondientes a distintos niveles de confinamiento.

4.7.1. Consistencia Termodinámica de la Formulación de Endurecimiento del Modelo LDP

Se definen la energía libre de deformación debida al proceso de endurecimiento del hormigón (normalizada respecto de f_c), la superficie de carga y el potencial plástico del modelo LDP, siendo

$$\rho\Psi^{*p}(\kappa) = - \left[0,1\kappa + \frac{0,9}{\alpha_h} \cos(-\alpha_h\kappa) \right] , \quad \alpha_h = \frac{\pi \|\mathbf{m}\|}{2 x_p} \quad (4.31)$$

$$F(p, \rho, \kappa) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + K^*m_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - K^* = 0 , \quad K^* = K^*(\kappa) \quad (4.32)$$

$$Q(p, \rho, \kappa) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + m_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + \eta p^* \right) - K^* = 0 \quad (4.33)$$

respectivamente, en términos de la variable de estado termodinámica κ , cuya evolución queda determinada por la regla de normalidad de la ec. (2.35), de acuerdo a

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial K^*} = -\dot{\lambda} \quad (4.34)$$

La consistencia termodinámica requiere la verificación de la igualdad entre la tensión disipativa normalizada $K^*(\kappa)$ y la función de endurecimiento definida en la ec. (4.30)

$$K^*(\kappa) \doteq k \quad (4.35)$$

La tensión disipativa normalizada, obtenida a partir de las ecs. (2.34) y (4.31), resulta

$$K^*(\kappa) = -\rho \frac{\partial \Psi^{*p}(\kappa)}{\partial \kappa} = 0,1 + \frac{0,9}{\alpha_h} \text{sen}(-\alpha_h\kappa) \quad (4.36)$$

En términos del parámetro plástico, la última expresión resulta

$$K^*(\lambda) = 0,1 + \frac{0,9}{\alpha_h} \text{sen}(\alpha_h\lambda) , \quad (4.37)$$

satisface la igualdad (4.35) y con ello se verifica la consistencia termodinámica.

4.8. Régimen de Ablandamiento en el Modelo LDP Basado en Gradientes y Energía de Fractura

El régimen de pospico o ablandamiento en el modelo LDP queda definido entre la superficie de fluencia de la ec. (4.23), correspondiente al material intacto en el estado de máxima resistencia, y la superficie de fluencia residual

$$F(p, \rho) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + m_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) = 0 \quad (4.38)$$

correspondiente a un estado de resistencia puramente friccional, caracterizado por un valor de cohesión nula. En forma general, la superficie de fluencia del modelo LDP en régimen de ablandamiento responde a la función

$$F(p, \rho, c) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + m_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - c = 0 \quad (4.39)$$

El proceso de ablandamiento en el modelo LDP, basado en gradientes y energía de fractura, es controlado por la variación de la cohesión c . Este parámetro define instantáneamente el valor de la rigidez reducida o degradada en relación al valor pico de rigidez mediante la ecuación

$$c = \frac{\rho_i}{\rho_m} \quad (4.40)$$

siendo ρ_i la rigidez deviatórica instantánea y $\rho_m = \rho_m(p)$ la rigidez deviatórica máxima, definida por la función LDP de ec. (4.39).

En la presente formulación de ablandamiento se considera que la rigidez instantánea está definida aditivamente mediante dos componentes o contribuyentes. Por un lado, la contribución a la rigidez instantánea reducida debida al proceso de macro o microfisuración, denominada ρ_i^f , que conlleva a la separación del continuo y que está controlada exclusivamente por las propiedades de energía de fractura.

Por otro lado, la contribución a la rigidez reducida debida al proceso de degradación en la porción del sólido o continuo alojado entre fisuras o microfisuras activas, denominada ρ_i^c . Matemáticamente la descomposición aditiva de la rigidez instantánea reducida en el proceso de ablandamiento se define mediante la ecuación

$$\rho_i = \rho_i^f + \rho_i^c \quad (4.41)$$

Estos dos contribuyentes tienen en cuenta todos los mecanismos que se desarrollan durante los procesos de ablandamiento en materiales cuasi-frágiles como hormigón y conducen a los parámetros de cohesión c^f y c^c , respectivamente. En particular, debe observarse que la mayor o menor incidencia de estos contribuyentes dependerá fuertemente del estado de tensiones gobernante de manera de poder describir con suficiente precisión la transición de falla frágil a dúctil en dependencia de la presión de confinamiento actuante, que caracteriza los procesos de ablandamiento de hormigones.

En lo que sigue se formulan las leyes que gobiernan la evolución de las contribuciones de fractura y de continuo a la rigidez instantánea reducida.

4.8.1. Ley de Ablandamiento Isótropa Basada en Energía de Fractura

La evolución de la degradación de la rigidez debida al proceso de macro o microfisuración se define mediante la ecuación

$$\frac{\rho_i^f}{\rho_m} = \exp\left(-5\frac{\dot{u}_f}{u_r}\right) \quad (4.42)$$

siendo \dot{u}_f el valor instantáneo de la apertura de fisuras y u_r la apertura máxima. El valor instantáneo de apertura de fisura se define a partir del proceso de homogeneización de la energía de fractura disipada en el material discontinuo y la energía o trabajo disipado en una porción del continuo equivalente ubicado entre dos fisuras adyacentes [ver Willam et al (1985)(116), Willam y Etse (1990)(7)], en términos de la separación entre fisuras o microfisuras h_f y la deformación plástica equivalente de fractura $\dot{\epsilon}_f$

$$\dot{u}_f = \frac{V}{A_t} \dot{\epsilon}_f = h_f \dot{\epsilon}_f \quad , \quad \dot{\epsilon}_f = \sqrt{\langle \dot{\epsilon}_f^p \rangle : \langle \dot{\epsilon}_f^p \rangle} = \|\langle \mathbf{m} \rangle\| \dot{\lambda} \quad (4.43)$$

siendo

$$\langle m_i \rangle = 0,5[m_i + |m_i|] \quad (4.44)$$

La separación entre fisuras o microfisuras h_f define la longitud característica de fractura en la presente formulación.

De esta última expresión surge que la deformación plástica equivalente de fractura extrae solamente los modos traccionantes de las propiedades espectrales del tensor de deformación y que son los que definen la medida de la microfisuración en el continuo equivalente.

La influencia del nivel de presión de confinamiento instantáneo está dada en la separación entre fisuras o microfisuras h_f . La evidencia física demuestra que la microfisuración se potencia y, por lo tanto, la separación entre fisuras tiende a cero cuando la presión de confinamiento crece hasta superar valores de alrededor de $1.5f_c$. Por el contrario, la microfisuración tiende a concentrarse en macrodefectos cuando la presión de confinamiento se reduce llegando al caso extremo de una única fisura o macrodefecto cuando la presión de confinamiento resulta positiva. En este caso límite la separación entre fisuras igualaría a la altura total del continuo equivalente h_t , ver Figura 4.17. De esta manera la variación de la longitud característica de fractura se define en función de la presión de confinamiento instantánea normalizada,

mediante una ley senoidal con las siguientes características

$$h_f(p^*) = \frac{h_t}{R_G(p^*)} \quad ; \quad R_G(p^*) = \begin{cases} 1, & p^* \geq 0; \\ C_u + D_u \text{sen} \left(2p^* - \frac{\pi}{2} \right), & -1,5 \leq p^* < 0; \\ 100, & p^* < -1,5. \end{cases} \quad (4.45)$$

esquematzada en la Figura 4.18, siendo el valor normalizado p^* una medida objetiva de la presión de confinamiento actuante en cada punto material. La función R_G puede interpretarse como la relación entre la energía de fractura disipada durante el proceso de fractura del hormigón en modo de falla II o mixto G_{II} , y la correspondiente al modo de falla I por tracción

$$G_I = \int_0^{u_r} \sigma_t du_f = f_t \frac{u_r}{5} \left[1 - \exp \left(-5 \frac{u_f}{u_r} \right) \right] \quad (4.46)$$

Caso límite: Fractura bajo modo I

En este caso, la presión instantánea p^* es positiva y por lo tanto $R_G = 1$, luego

$$\frac{\dot{\rho}_i^f}{\rho_m} = \exp \left(-5 \frac{h_t \dot{\epsilon}_f}{u_r} \right) \quad (4.47)$$

4.8.2. Ley de Ablandamiento Isótropa Basada Gradientes

La decohesión en la porción de sólido entre fisuras activas se describe en esta formulación mediante una teoría elastoplástica de gradientes en la cual la longitud interna característica correspondiente define el ancho de dicha porción de sólido. La rigidez instantánea reducida debida a la degradación en el continuo entre fisuras activas se define de la forma

$$\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_m} = -H^g l_c^2 \nabla^2 \dot{\lambda} \quad (4.48)$$

siendo H^g el módulo de gradientes y ∇^2 el laplaciano de la tasa del parámetro plástico en la porción de sólido definida por la longitud característica l_c . La dependencia de la longitud característica de gradientes l_c en la presión de confinamiento se define de acuerdo a una ley senoidal del tipo

$$l_c(p^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } p^* \geq 0; \\ E_l l_{c,m} \left[1 + \sin \left(F_l p^* - \frac{\pi}{2} \right) \right] & \text{si } -1,5 \leq p^* < 0; \\ l_{c,m} & \text{si } p^* < -1,5. \end{cases} \quad (4.49)$$

siendo $l_{c,m}$ el máximo valor posible adoptado para altas presiones de confinamiento. Además, para la condición $p^* = 1$, correspondiente al ensayo de compresión uniaxial, debe ser $l_c = l_{c,i}$, valor coincidente con el tamaño máximo de agregado.

En la Figura 4.19 se representa la variación correspondiente a la ec. (4.49).

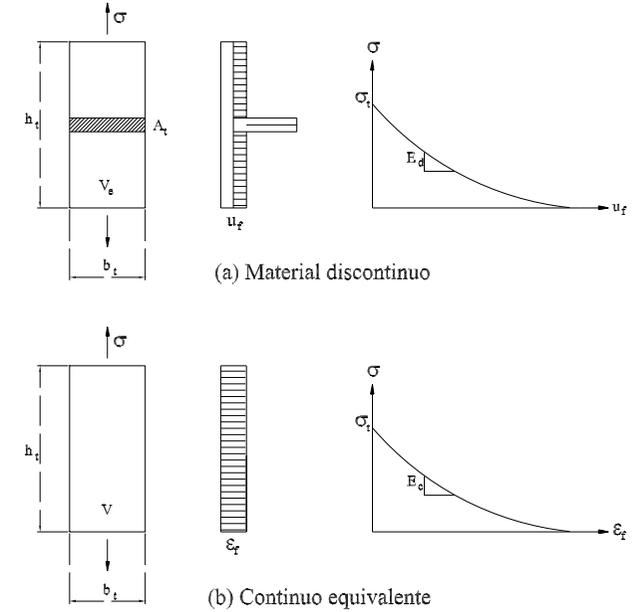


Figura 4.17: Modelo continuo para fractura por tracción uniaxial.

4.8.3. Consistencia Termodinámica de la Formulación de Ablandamiento del Modelo LDP

En base a la formulación en las secciones anteriores, la evolución del parámetro de ablandamiento definido a través de la cohesión c resulta

$$\dot{c} = \exp \left(-5 \frac{h_t}{R_G(p^*)} \frac{\langle \|\mathbf{m}\| \rangle}{u_r} \dot{\lambda} \right) + H^g l_c^2 \nabla^2 \dot{\lambda} \quad (4.50)$$

La energía libre debida a los procesos de fractura y de plasticidad de gradientes en régimen de ablandamiento normalizada respecto de f_c y en términos de la variable de estado

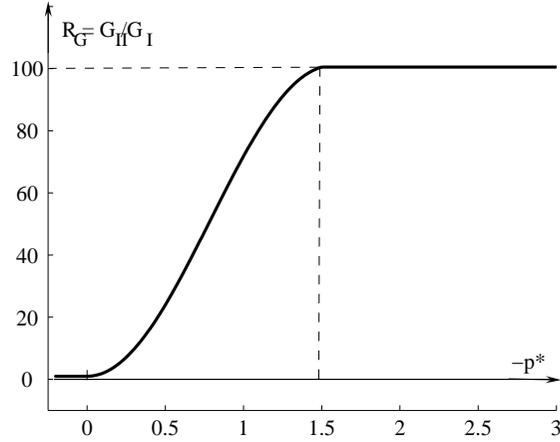


Figura 4.18: Variación de la función R_G correspondiente a la longitud característica de fractura

termodinámica κ , se define como

$$\rho\Psi^* = \rho\Psi^{*p} + \rho\Psi^{*g} \quad (4.51)$$

siendo

$$\rho\Psi^{*p}(\kappa) = -\frac{1}{\alpha_s} \exp(\alpha_s \kappa) \quad , \quad \alpha_s = 5 \frac{h_t \|\langle \mathbf{m} \rangle\|}{R_G(p^*)} \quad (4.52)$$

$$\rho\Psi^{*g}(\nabla\kappa) = \frac{1}{2} l_c^2 H^g \nabla \cdot \nabla \kappa \quad , \quad l_c = l_c(p^*) \quad (4.53)$$

Se definen a su vez, la superficie y el potencial plástico termodinámicos en régimen de ablandamiento

$$F(p, \rho, \kappa, \nabla\kappa) = \frac{3}{2} \rho^{*2} + m_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - K^*(\kappa, \nabla\kappa) = 0 \quad (4.54)$$

$$Q(p, \rho, \kappa, \nabla\kappa) = \frac{3}{2} \rho^{*2} + m_0 \left(\frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + \eta p^* \right) - K^*(\kappa, \nabla\kappa) = 0 \quad (4.55)$$

La consistencia termodinámica requiere de la verificación de la igualdad

$$K^*(\kappa, \nabla\kappa) = K^{*p}(\kappa) + K^{*g}(\nabla\kappa) \doteq c \quad (4.56)$$

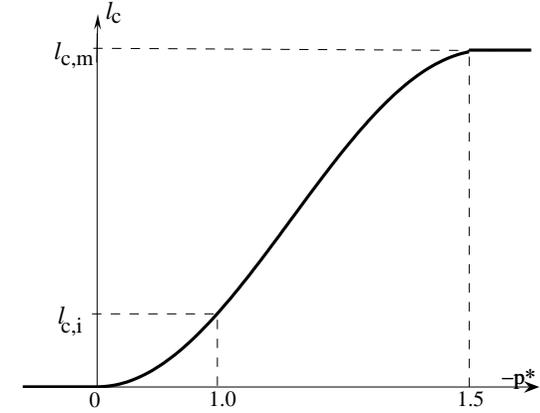


Figura 4.19: Variación de la longitud interna característica.

siendo

$$K^{*p}(\kappa) = -\rho \frac{\partial \Psi^{*p}}{\partial \kappa} = \exp(\alpha_s \kappa) \quad (4.57)$$

$$K^{*g}(\nabla\kappa) = \nabla \cdot \rho \frac{\partial \Psi^{*g}}{\partial (\nabla\kappa)} = l_c^2 H^g \nabla^2 \kappa \quad (4.58)$$

Considerando la ley de evolución de la variable plástica termodinámica de la ec. (4.34), las ecuaciones anteriores en términos del parámetro plástico se reescriben como

$$K^{*p}(\lambda) = \exp(-\alpha_s \lambda) \quad (4.59)$$

$$K^{*g}(\nabla\lambda) = -l_c^2 H^g \nabla^2 \lambda \quad (4.60)$$

y la tensión disipativa total resulta equivalente a c , con lo cual se verifica la consistencia termodinámica.

Capítulo 5

Implementación Numérica del Modelo y Análisis de Problema de Valores de Borde

En este capítulo se analizan los aspectos algorítmicos de las formulaciones elastoplásticas basadas en la teoría de gradientes superiores de deformaciones, tanto general como termodinamicamente consistente.

Se calibran las leyes de endurecimiento y ablandamiento correspondientes al modelo LDP basado en teoría de gradientes superiores de deformaciones termodinamicamente consistente del capítulo 4.

Por último se presentan las predicciones numéricas del modelo a los fines de verificar su capacidad de predecir el comportamiento del hormigón.

5.1. Aspectos Algorítmicos de la Formulación General de la Teoría de Gradientes. Discretización de Elementos Finitos

Para la formulación general de la plasticidad de gradientes presentada en la sección 2.3.4 del capítulo 2, de Borst y Mühlhaus (1991)(90) desarrollaron un algoritmo iterativo de

resolución que fue posteriormente adoptado por otros autores y extendido a modelos de visco-gradientes [ver Pamin (1994)(38), Wang (1997)(87), Vrech (2002)(40)].

Considerando que la condición de consistencia elastoplástica de gradientes de ec. (2.82) no se puede satisfacer a nivel local sino en forma integral en un dominio plástico V_λ , para todo incremento diferencial de parámetro plástico $\delta\lambda$ y en cada paso de carga $(I+1)$, vale

$$\int_{V_\lambda} \delta\lambda F(\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)}, \lambda_{(I+1)}, \dot{\lambda}_{(I+1)}, \nabla^2 \lambda_{(I+1)}) dV_\lambda = 0 \quad (5.1)$$

Utilizando notación matricial, se expresa la función de fluencia en la serie de Taylor truncada $F_{(I+1)} = F_{(I)} + \dot{F} = 0$, resultando

$$F(\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)}) = F(\boldsymbol{\sigma}_{(I)}) + \mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} - H^p d\lambda_{(I+1)} + G \nabla^2 d\lambda_{(I+1)} = 0 \quad (5.2)$$

Se considera la forma incremental de la relación constitutiva

$$d\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} = \mathbf{E}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)} - d\lambda_{(I+1)} \mathbf{m}_{(I+1)}) \quad (5.3)$$

y sustituyendo ambas expresiones en la primera, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{V_\lambda} \delta\lambda [\mathbf{n}^T \mathbf{E}^e d\boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)} - (H^p + \mathbf{n}^T \mathbf{E}^e \mathbf{m}_{(I+1)}) d\lambda_{(I+1)}] dV_\lambda + \\ + \int_{V_\lambda} G \nabla^2 (d\lambda_{(I+1)}) dV_\lambda = - \int_{V_\lambda} \delta\lambda F_{(I)} dV_\lambda \end{aligned} \quad (5.4)$$

Por otro lado, se plantea la forma débil o integral de la condición de equilibrio que se debe satisfacer para todo incremento diferencial de desplazamiento $\delta\mathbf{u}$ en el dominio V , en cada paso de carga $(I+1)$

$$\int_V \delta\mathbf{u} (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}_{(I+1)}) dV = 0 \quad (5.5)$$

siendo \mathbf{L} la matriz de operadores derivadas espaciales parciales. Integrando por partes la ec. (5.5) y utilizando la descomposición de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{(I)} + d\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} \quad (5.6)$$

resulta la expresión del principio de los trabajos virtuales. Despreciando las fuerzas volumétricas y llamando \mathbf{t} al vector de fuerzas aplicadas en la superficie de normal \mathbf{n}_s , la expresión resultante es

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} dV = \int_S \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}_{(I+1)} dA - \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_{(I)} dV \quad (5.7)$$

En esta formulación, el multiplicador plástico no puede determinarse de modo directo a partir de la condición de consistencia. En el marco del Método de los Elementos Finitos se lo considera una variable independiente y se lo aproxima utilizando funciones de interpolación contenidas en un vector $\mathbf{H}(\mathbf{x})$. Dichas funciones deben ser al menos de continuidad C^1 . Siendo $\mathbf{\Lambda}$ el vector de valores nodales de la variable parámetro plástico, se plantea la siguiente aproximación en cada elemento

$$\lambda \cong \mathbf{H}^T \mathbf{\Lambda} \quad (5.8)$$

Considerando un vector $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ formado por los gradientes de las funciones de forma \mathbf{H} , y el vector $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ por los laplacianos de las mismas, las aproximaciones del campo gradiente $\nabla\lambda$ y del campo del laplaciano $\nabla^2\lambda$ resultan

$$\nabla\lambda \cong \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \quad (5.9)$$

$$\nabla^2\lambda \cong \mathbf{P}^T \mathbf{\Lambda} \quad (5.10)$$

En la discretización de campo de desplazamientos \mathbf{u} se requieren funciones de interpolación $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ de continuidad C^0 mínimamente, tal que

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (5.11)$$

siendo \mathbf{a} el vector de desplazamientos nodales.

Incorporando la matriz $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ de derivadas espaciales de las funciones de forma \mathbf{N}

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} \quad (5.12)$$

la ecuación cinemática permite expresar las deformaciones en términos de las variables nodales fundamentales

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (5.13)$$

Reemplazando las aproximaciones anteriores en las ecs. (5.4) y (5.7) y operando, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial

$$\begin{pmatrix} K^{aa} & K_{(I)}^{a\lambda} \\ K_{(I)}^{\lambda a} & K_{(I)}^{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{a}_{(I+1)} \\ d\mathbf{\Lambda}_{(I+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{(I+1)}^e + \mathbf{f}_{(I)}^a \\ \mathbf{f}_{(I)}^\lambda \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

con los operadores matriciales

$$\mathbf{K}^{aa} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}^e \mathbf{B} dV \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K}_{(I)}^{\lambda\lambda} = \int_{V_\lambda} [H^p + \mathbf{n}^T \mathbf{E}^e \mathbf{m}_{(I+1)} \mathbf{H} \mathbf{H}^T - G \mathbf{H} \mathbf{P}^T] dV_\lambda \quad (5.16)$$

$$\mathbf{K}_{(I)}^{a\lambda} = - \int_{V_\lambda} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^e \mathbf{m}_{(I+1)} \mathbf{H}^T dV_\lambda \quad (5.17)$$

$$\mathbf{K}_{(I)}^{\lambda a} = [\mathbf{K}_{(I)}^{a\lambda}]^T \quad (5.18)$$

y los vectoriales

$$\mathbf{f}_{(I+1)}^e = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{(I+1)} dA \quad (5.19)$$

$$\mathbf{f}_{(I)}^a = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{(I)} dV \quad (5.20)$$

$$\mathbf{f}_{(I)}^\lambda = \int_{V_\lambda} F_{(I)} \mathbf{H} dV_\lambda \quad (5.21)$$

En el Cuadro 5.1 se describe el algoritmo de resolución correspondiente al caso de plasticidad de gradientes, con funciones de interpolación de continuidad C^1 para los dos campos incógnita: el parámetro plástico λ y los desplazamientos \mathbf{u} . En el marco de una aplicación numérica, la actualización $(I+1)$ de las variables nodales se realiza en forma incremental y en cada iteración se calculan los incrementos finitos totales a partir de un estado previo de equilibrio.

La formulación general de la plasticidad de gradientes tiene dos serios inconvenientes. Por un lado su falta de consistencia termodinámica que conduce a leyes de endurecimiento/ablandamiento que no garantizan el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica. En segundo término, y lo que es una limitación de tipo numérico, consiste en la dificultad de trabajar con funciones de interpolación de continuidad C^1 , las cuales imponen fuertes restricciones para el proceso resolutivo en historias de deformación altamente no lineales.

A partir de un estado de equilibrio, siendo $\sigma_{(0)}$ y $\lambda_{(0)}$ conocidos, se desean calcular $\sigma_{(I+1)}$ y $\lambda_{(I+1)}$.

- Con K^{aa} , $K_{(I)}^{a\lambda}$, $K_{(I)}^{\lambda a}$, $K_{(I)}^{\lambda\lambda}$, $\mathbf{f}_{(I+1)}^e$, $\mathbf{f}_{(I)}^a$, $\mathbf{f}_{(I)}^\lambda$
- Calcular $d\mathbf{a}_{(I+1)}$ y $d\lambda_{(I+1)}$ a partir del sistema matricial de ec. (5.14)

- Calcular

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)} = \mathbf{B}d\mathbf{a}_{(I+1)}$$

$$\Delta\lambda_{(I+1)} = \mathbf{H}d\lambda_{(I+1)}$$

$$\lambda_{(I+1)} = \lambda_{(I)} + \Delta\lambda_{(I+1)}$$

$$\nabla^2(\Delta\lambda_{(I+1)}) = \mathbf{P}\Delta\lambda_{(I+1)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_{(0)} + \mathbf{E}^e\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)}$$

- Si $F(\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)}, \lambda_{(I+1)}, \nabla^2\lambda_{(I+1)}) > 0$: Estado plástico

$$\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{(0)} + \Delta\lambda_{(I+1)}\mathbf{E}^e\mathbf{m}_{(I+1)}$$

$$\text{Caso contrario: } \boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{(I+1)}^{trial}$$

- Control de convergencia

Cuadro 5.1: Algoritmo correspondiente al modelo standard de plasticidad de gradientes

5.2. Algoritmo para la Formulación Termodinámicamente Consistente de la Teoría de Gradientes Basado la Formulación Mixta de EF

Se describe en esta sección el algoritmo iterativo de resolución desarrollado por Svedberg (1999)(39), correspondiente a la formulación termodinámicamente consistente de la plasticidad de gradientes de la sección 2.3.5, considerando homogeneidad espacial de las variables de estado y comportamiento plástico isotrópico.

En el incremento de deformaciones totales $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ correspondiente a un paso de carga $(I+1)$, las tensiones actualizadas totales $\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)}$ y disipativas $K_{(I+1)}$, se obtienen aplicando una generalización del método de proyección del punto más cercano, o *Backward Euler Method*, donde \mathbf{E}^e , H^p y H^g definen la métrica de las proyecciones de la deformación elástica, de la deformación plástica local y de la deformación de gradientes, respectivamente.

Se definen los incrementos de las variables internas integrando las leyes de evolución de las ecs. (2.20) y (2.35)

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda\mathbf{m}_{(I+1)} \quad (5.22)$$

$$\Delta\kappa = -\Delta\lambda\frac{\partial Q_{(I+1)}}{\partial K} \quad (5.23)$$

Se introduce el concepto de deformación elástica *trial* o prueba

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)}^{trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(I)}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(I)}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{(I)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(I)}^p \quad (5.24)$$

y se obtiene el tensor de tensiones actualizado utilizando la relación constitutiva elástica

$$\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} = \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)}^e \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)}^{trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (5.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(I+1)} = \mathbf{E}^e : [\boldsymbol{\varepsilon}_{(I+1)}^{trial} - \Delta\lambda\mathbf{m}_{(I+1)}] \quad (5.26)$$

Siendo $\lambda_{(I+1)} = \lambda_{(I)} + \Delta\lambda$, integrando las ecs. (2.37) y (2.102), y considerando la ec. (2.93), la tensión disipativa actualizada responde a la expresión

$$K_{(I+1)} = K_{(I)} - H^p\Delta\lambda\frac{\partial Q}{\partial K} + I_c^2 H^g \nabla^2(\Delta\lambda)\frac{\partial Q}{\partial K} \quad (5.27)$$

El problema de valores de borde basado en la condición de consistencia plástica, en términos del incremento del multiplicador plástico $\Delta\lambda_{(I+1)}$, resulta

$$-I_c^2 \bar{H}^g \nabla^2(\Delta\lambda) + h_{(I+1)}\Delta\lambda = F_{(I+1)}^{trial} - F_{(I+1)} \quad , \quad \bar{H}^g = H^g \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (5.28)$$

$$\Delta\lambda \geq 0 \quad , \quad F_{(I+1)} \leq 0 \quad , \quad \Delta\lambda F_{(I+1)} = 0 \quad (5.29)$$

con h definido en la ec. (2.39-b) y siendo $F_{(I+1)}^{trial}$ y $F_{(I+1)}$ los valores correspondiente a la función de fluencia en σ^{trial} y $\sigma_{(I+1)}$, respectivamente.

Nota: Si se considera la tensión disipativa de borde se obtiene una condición de borde adicional para $\Delta\lambda$.

Se adopta para $K^{(b)}$ una expresión del tipo [ver Svedberg (39)]

$$\dot{K}^{(b)} = -l_c H^g c \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial K}$$

con la constante escalar adimensional $c \geq 0$, y se combina con la ec. (2.91), obteniendo una condición de borde extra para $\Delta\lambda$

$$\mathbf{n}_s \cdot \nabla(\Delta\lambda) = -\frac{c}{l_c} \Delta\lambda$$

En la literatura es común la elección de $c = 0$. Una justificación sobre el valor adecuado de c fue dada por Svedberg y Runesson (1997)(91).

El criterio local de carga plástica $F_{(I+1)}^{trial} > 0$ no puede ser utilizado en forma única en el caso de plasticidad de gradientes. En su lugar conviene considerar

$$F_{(I+1)}^{g,trial} > 0 \quad , \quad F_{(I+1)}^{g,trial} = F_{(I+1)}^{trial} + l_c^2 \bar{H}^g \nabla^2(\Delta\lambda) \quad (5.30)$$

Como $F_{(I+1)}^{trial}$ depende de las derivadas espaciales parciales de segundo orden de $\Delta\lambda$, que no son conocidas hasta encontrarse la solución completa para $(I + 1)$, las ecs. (5.28) y (5.29) deben resolverse en forma iterativa.

Formulación Mixta Dual de Elementos Finitos para el Subproblema Constitutivo

El incremento del multiplicador plástico $\Delta\lambda$ correspondiente a un paso de carga $(I + 1)$ se calcula utilizando un método mixto dual que resulta de fácil implementación en un código de elementos finitos. Se omiten de aquí en más los subíndices correspondientes al incremento particular.

Con el objeto de obtener la misma precisión para el incremento $\Delta\lambda$ y el laplaciano $\nabla^2(\Delta\lambda)$, se adopta para el campo de gradientes la notación

$$\mathbf{g} = \bar{H}^g \nabla(\Delta\lambda) \quad (5.31)$$

y se reformula el PBV de las ecs. (5.28) y (5.29) como

$$-l_c^2 \nabla \cdot \mathbf{g} + h \Delta\lambda = F^{trial} - F \quad (5.32)$$

$$(\bar{H}^g)^{-1} \mathbf{g} - \nabla(\Delta\lambda) = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

con la condición de borde

$$\Delta\lambda = -\frac{l}{c} \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{g} \quad (5.34)$$

en el caso de considerarse tensiones desipativas en el borde.

Como base para la discretización de elementos finitos se escriben en forma variacional las ecs. (5.32) y (5.33), incluyendo los espacios $\Lambda = L_2(V)$ y $G = [H(V)]^M$ con la dimensión espacial M , para todo $\Delta\lambda' \in \Lambda$ y $\mathbf{g}' \in G$

$$-l_c^2 \int_A \Delta\lambda' \nabla \cdot \mathbf{g} dA + \int_A h \Delta\lambda' \Delta\lambda dA = \int_A \Delta\lambda' (F^{trial} - F) dA \quad (5.35)$$

$$\int_V (\bar{H}^g)^{-1} \mathbf{g}' \cdot \mathbf{g} dA + \frac{l}{c H^g} \int_{\partial S} \mathbf{g}' \cdot \mathbf{n}_s \otimes \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{g} d(\partial A) + \int_A \nabla \cdot \mathbf{g}' \Delta\lambda dA = 0 \quad (5.36)$$

Esta formulación variacional mixta, denominada *dual* por Brezzi y Fortain(1991)(117), se obtiene operando del siguiente modo:

- Se multiplica la ec. (5.32) por $\Delta\lambda'$ y se integra en el área A para obtener la ec. (5.35).
- Se multiplica la ec. (5.33) por \mathbf{g}' y se integra en el área A para obtener la ec. (5.36). El segundo término se integra por partes y se considera la condición de borde de la ec. (5.34).

Para elementos finitos triangulares de deformación constante (CST), se adopta la aproximación λ' parcialmente constante en cada elemento y \mathbf{g}' parcialmente lineal. En notación matricial, las condiciones anteriores quedan determinadas por

$$\lambda' = \hat{\lambda}'_e \quad (5.37)$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{N}_e^T \hat{\mathbf{g}}'_e \quad (5.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g}' = \mathbf{B}_e^T \hat{\mathbf{g}}'_e \quad (5.39)$$

siendo $\hat{\lambda}'_e$ un valor constante en el elemento y $\hat{\mathbf{g}}'_e$ el vector de valores nodales definido como

$$\hat{\mathbf{g}}'_e = \begin{bmatrix} \hat{g}'_{ex} \\ \hat{g}'_{ey} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

La matriz \mathbf{N}_e contiene las funciones de forma lineales del CST y \mathbf{B}_e las derivadas espaciales parciales de \mathbf{N}_e .

Sustituyendo las aproximaciones anteriores en las integrales (5.35) y (5.36) se obtiene el set de ecuaciones

$$-l_c^2 \mathbf{B}_e^T \widehat{\mathbf{g}}_e + h \Delta \widehat{\lambda}_e = \widehat{F}_e^{trial} - \widehat{F}_e \quad (5.41)$$

$$\Lambda_{e=1}^{NEL} [(\mathbf{M}_e + \frac{l_c}{c} \mathbf{M}_e^{(b)}) \widehat{\mathbf{g}}_e + A_e \mathbf{B}_e \Delta \widehat{\lambda}_e] = 0 \quad (5.42)$$

Los operadores matriciales se calculan como

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{H^g} \int_{A_e} \mathbf{N}_e \mathbf{N}_e^T dA \quad (5.43)$$

$$\mathbf{M}_e^{(b)} = \frac{1}{H^g} \int_{\partial A_e} \mathbf{N}_e \mathbf{n}_s (\mathbf{N}_e \mathbf{n}_s)^T d(\partial A) \quad (5.44)$$

De la combinación de las ecs. (5.41) y (5.42) resulta

$$\Lambda_{e=1}^{NEL} [(\mathbf{M}_e + \frac{l_c}{c} \mathbf{M}_e^{(b)} + l_c^2 \mathbf{C}_e) \widehat{\mathbf{g}}_e - \widehat{\mathbf{f}}_e] = 0 \quad (5.45)$$

con

$$\mathbf{C}_e = \frac{A_e}{h} \mathbf{B}_e \mathbf{B}_e^T \quad (5.46)$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_e = -A_e \mathbf{B}_e \Delta \widehat{\lambda}_e^1 \quad (5.47)$$

$$\Delta \widehat{\lambda}_e^1 = \frac{1}{h} (\widehat{F}_e^{trial} - \widehat{F}_e) \quad (5.48)$$

Finalmente, se reformula el sistema con la notación

$$h \Delta \widehat{\lambda}_e = \widehat{F}_e^{g,trial} - \widehat{F}_e \quad , \quad \widehat{F}_e^{g,trial} = \widehat{F}_e^{trial} + l_c^2 \mathbf{B}_e^T \widehat{\mathbf{g}}_e \quad (5.49)$$

$$(\mathbf{M} + \frac{l_c}{c} \mathbf{M}^{(b)} + l_c^2 \mathbf{C}) \widehat{\mathbf{g}} = \widehat{\mathbf{f}} \quad (5.50)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \Lambda_{e=1}^{NEL} \mathbf{M}_e \quad , \quad \mathbf{M}^{(b)} = \Lambda_{e=1}^{NEL} \mathbf{M}_e^{(b)} \\ \mathbf{C} &= \Lambda_{e=1}^{NEL} \mathbf{C}_e \quad , \quad \widehat{\mathbf{f}} = \Lambda_{e=1}^{NEL} \widehat{\mathbf{f}}_e \end{aligned} \quad (5.51)$$

Para el caso especial de teoría local valen $l_c = 0$ y $\widehat{F}_e^{g,trial} = \widehat{F}_e^{trial}$. Entonces, $\widehat{\lambda}_e$ puede ser obtenido a partir de la ec. (5.45). Conocido \widehat{F}_e^{trial} , el problema definido por las ecs. (5.45) y (5.46) se resuelve utilizando el esquema iterativo del Cuadro 5.2.

1. Fijar $\widehat{\mathbf{g}}^0 = \mathbf{0}$
2. Dado $\widehat{\mathbf{g}}_{e(I)}$ para $e=1,2,\dots,NEL$, calcular $\Delta \widehat{\lambda}_{e(I+1)}$ del siguiente modo:

$$\widehat{F}_{e(I)}^{g,trial} = \widehat{F}_e^{trial} + l_c^2 \mathbf{B}_e^T \widehat{\mathbf{g}}_{e(I+1)}$$
 Si $\widehat{F}_{e(I)}^{g,trial} > 0 \Rightarrow \Delta \widehat{\lambda}_{e(I+1)} = \frac{1}{h} \widehat{F}_{e(I)}^{g,trial}$ y $\widehat{F}_{e(I+1)} = 0$
 Si $\widehat{F}_{e(I)}^{g,trial} \leq 0 \Rightarrow \Delta \widehat{\lambda}_{e(I+1)} = 0$ y $\widehat{F}_{e(I+1)} = \widehat{F}_{e(I)}^{g,trial}$

$$\Delta \widehat{\lambda}_{e(I+1)}^1 = \frac{1}{h} (\widehat{F}_e^{trial} - \widehat{F}_{e(I+1)}) \quad ; \quad \mathbf{f}_{e(I+1)} = -V_e \mathbf{B}_e \Delta \widehat{\lambda}_{e(I+1)}^1$$
3. Calcular $\widehat{\mathbf{g}}_{(I+1)}$ de

$$\mathbf{f}_{(I+1)} = \Lambda_{e=1}^{NEL} \widehat{\mathbf{f}}_{e(I+1)}$$

$$\widehat{\mathbf{g}}_{(I+1)} = (\mathbf{M} + \frac{l_c}{c} \mathbf{M}^{(b)} + l_c^2 \mathbf{C})^{-1} \widehat{\mathbf{f}}_{(I)}$$
4. Chequear convergencia
 Si $|\widehat{\mathbf{g}}_{(I+1)} - \widehat{\mathbf{g}}_{(I)}| < tol$ y $\frac{1}{NEL} \sum_{e=1}^{NEL} |\Delta \widehat{\lambda}_{e(I+1)} - \Delta \widehat{\lambda}_{e(I)}| < tol$, detenerse.
 De lo contrario, volver a 2.

Cuadro 5.2: Esquema iterativo para encontrar $\Delta \widehat{\lambda}_{e(I+1)}$ y $\widehat{\mathbf{g}}_{(I+1)}$

5.3. Calibración del Modelo LDP Basado en Teoría de Gradientes y Energía de Fractura

Las constantes de las leyes de endurecimiento y ablandamiento y de las funciones auxiliares del modelo LDP propuesto en el capítulo 4, fueron calibradas en base a una serie de resultados de ensayos experimentales pertenecientes a Hurlbut (1985)(50):

- Tracción uniaxial
- Compresión uniaxial
- Compresión uniaxial con confinamiento lateral $\sigma_0 = 0.03 f_c$
- Compresión uniaxial con confinamiento lateral $\sigma_0 = 0.15 f_c$
- Compresión uniaxial con confinamiento lateral $\sigma_0 = 0.60 f_c$

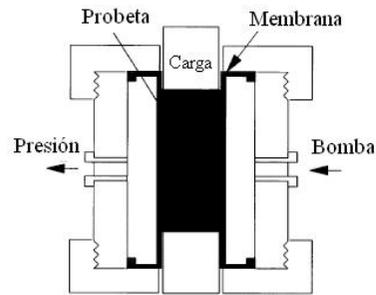


Figura 5.1: Celda de Hoek.

para un hormigón con las siguientes características

Módulo de Young - E	=	193053,2	$\frac{kg}{cm^2}$
Módulo de Poisson - ν	=	0,2	
Resistencia máxima a compresión - f_c	=	220,60	$\frac{kg}{cm^2}$
Resistencia a tracción - f_t	=	27,50	$\frac{kg}{cm^2}$
Máxima apertura de fisura - u_r	=	0,0127	cm
Separación entre fisuras de tracción - h_t	=	10,80	cm
Longitud interna inicial ^(*) - $l_{c,i}$	=	2,50	cm
Longitud interna máxima ^(**) - $l_{c,m}$	=	11,00	cm
Módulo de gradientes - H^g	=	556,0	$\frac{kg}{cm^2}$

(*) La longitud interna inicial o mínima coincide con el tamaño máximo de agregado.

(**) La longitud interna máxima coincide con la altura de la probeta.

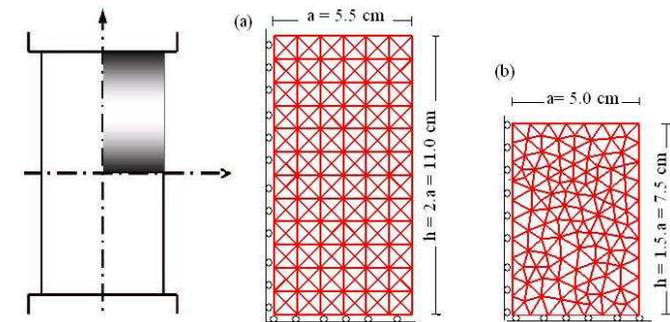


Figura 5.2: Esquema de mallas de elementos finitos.

Los valores calculados para las constantes de las ecs. (4.29), (4.45) y (4.49) son

$$\begin{aligned}
 A_h &= 0,0007481 \\
 B_h &= -0,1949750 \\
 C_u &= 51 \\
 D_u &= 50 \\
 E_l &= 0,5 \\
 F_l &= 2,0
 \end{aligned}$$

5.4. Predicciones Numéricas y Análisis de Localización en Procesos de Falla de Hormigones

Se presentan en esta sección las predicciones numéricas del modelo LDP basado en teoría de gradientes superiores de deformaciones y energía de fractura, termodinámicamente consistente, llevadas a cabo mediante el desarrollo de un programa computacional de elementos finitos triangulares bidimensionales de deformación constante CST, basado en el algoritmo numérico del cuadro 5.2.

En primer lugar se reproducen los ensayos de Hurlbut (1985)(50) citados en la sección

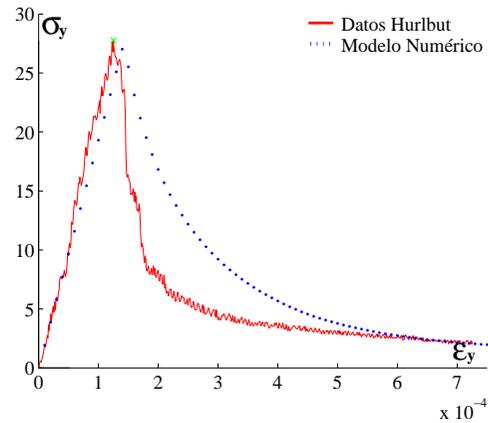


Figura 5.3: Ensayo de tracción uniaxial. Hurlbut (1985).

anterior, realizados en una celda de Hoek (ver Figura 5.1), sobre probetas cilíndricas de 10.8 cm de diámetro y 21.6 cm de altura.

Sólo un cuarto de la probeta se modela debido a su doble simetría geométrica y a la utilización de elementos axialsimétricos. Se emplean mallas 216 elementos alineados uniformemente en forma tal que sus diagonales definen ángulos de 45° con la vertical, ver Figura 5.2-(a). Se adoptan condiciones de borde homogéneas. La inhomogeneidad inducida en el modelo consiste en una pequeña reducción de la resistencia en un elemento del extremo inferior izquierdo. Se adopta como carga prescrita el desplazamiento axial de los nodos superiores. La existencia del confinamiento inicial se considera en un estado previo de cargas laterales de compresión aplicadas sobre los nodos del borde derecho.

Una comparación entre las predicciones del programa de elementos finitos y los resultados experimentales se presenta a continuación. Las curvas tensión axial vs. deformación axial $[\sigma_y, \epsilon_y]$ y tensión axial vs. deformación radial $[\sigma_y, \epsilon_r]$ para los ensayos de tracción uniaxial y compresión uni y triaxial con presiones de confinamiento de 6.9, 34.4 y 137.9 $\frac{kg}{cm^2}$, demuestran una alta aproximación a las curvas de ensayos, ver Figuras 5.3 a 5.7.

Se reproducen en segundo término ensayos de compresión uniaxial y triaxial pertenecientes a Xiaobin Lu (2005)(118), realizados en celda triaxial sobre probetas cilíndricas de 10 cm

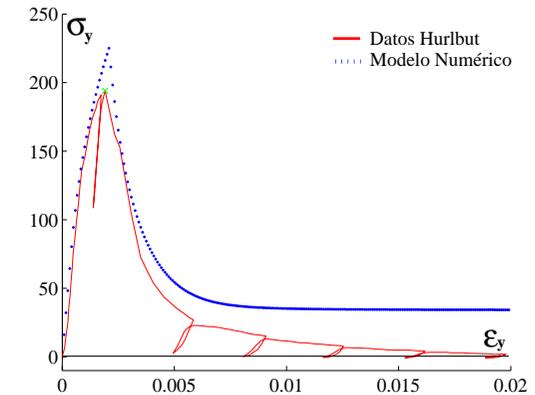


Figura 5.4: Ensayo de compresión uniaxial. Hurlbut (1985).

de diámetro y 15 cm de altura, para hormigón de alta resistencia:

$$\begin{aligned} \text{Módulo de Young - } E &= 272000,2 \frac{kg}{cm^2} \\ \text{Módulo de Poisson - } \nu &= 0,2 \\ \text{Resistencia máxima a compresión - } f_c &= 680,00 \frac{kg}{cm^2} \\ \text{Resistencia a tracción - } f_t &= 90,00 \frac{kg}{cm^2} \end{aligned}$$

Se considera la malla de la Figura 5.2-(b) compuesta por 210 elementos triangulares CST distribuidos en forma aleatoria en estado plano axialsimétrico, con condiciones de borde homogéneas y la inhomogeneidad inducida mediante una pequeña reducción en la rigidez de un elemento. Las predicciones de los ensayos de compresión uniaxial y triaxial bajo presiones de confinamiento inicial crecientes desde $\sigma_0 = 0.1 f_c$ a $\sigma_0 = 0.8 f_c$ se presentan en las Figuras 5.8 a 5.14.

Los resultados demuestran la capacidad predictiva del modelo LDP basado en gradientes y energía de fractura, no sólo en la predicción de las resistencias pico sino de las deformaciones para estas resistencias máximas, de los comportamientos de pre y pospico y de la dilatación volumétrica en regímenes de bajo y alto confinamiento.

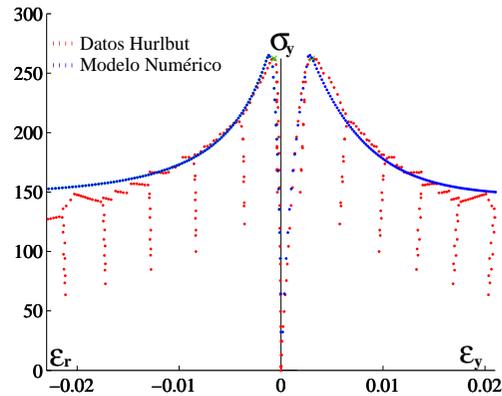


Figura 5.5: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.03f_c = 6.9 \frac{kg}{cm^2}$. Hurlbut (1985).

Análisis de Predicciones Numéricas de la Localización en Mallas Deformadas de EF

Se comparan en esta sección, para la serie de ensayos Hurlbut(1985)(50), la configuración de mallas deformadas y la distribución de deformaciones plásticas equivalentes correspondientes a los estados planos axialsimétrico y plano de deformaciones, considerando en este último la condición $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, siendo σ_x y σ_y las tensiones el plano y σ_z la tensión fuera del plano.

Este análisis corresponde a mallas de EF cuya relación de lados es 1.5, siendo la base $a = 5.5$ cm y la altura $h = 8.25$ cm, con condiciones de borde no homogéneas. Los desplazamientos laterales de los nodos superiores están impedidos para reproducir la situación impuesta por los platos de carga de acero durante el ensayo.

Considerando en primer lugar el ensayo de tracción uniaxial, se analizan las configuraciones de mallas deformadas y deformaciones plásticas equivalentes correspondientes a la carga residual en los estados axialsimétrico y plano de deformaciones, graficadas en la Figura 5.15-(a) y (b), respectivamente. Se observa que, mientras para ambos estados las deformaciones plásticas se desarrollan horizontalmente, en estado plano de deformaciones se produce la

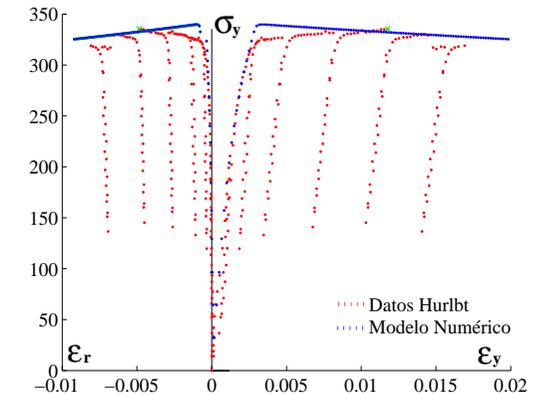


Figura 5.6: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.15f_c = 34.4 \frac{kg}{cm^2}$. Hurlbut (1985).

localización en una línea de elementos. Mientras en el estado axialsimétrico se produce la falla difusa o continua.

En segundo término se analizan las mallas deformadas correspondientes a la carga residual del ensayo de compresión uniaxial, ver Figura 5.16. Mientras en estado axialsimétrico no puede distinguirse claramente una banda de corte, en estado plano de deformaciones se manifiesta una dirección crítica de localización y un ancho de banda coincidente con la longitud interna mínima adoptada $l_{c,i} = 2.5$ cm. Imponiendo la condición $l_{c,i} = 0$ cm, se obtiene la respuesta local que evidencia la localización de las deformaciones plásticas en una banda de elementos, ver Figura 5.17.

Por último se consideran las configuraciones correspondientes a la carga residual de los ensayos de compresión triaxial con presiones de confinamiento iniciales $\sigma_0 = 0.03, 0.15$ y $0.6f_c$, en los estados planos axialsimétrico y plano de deformaciones.

Los análisis axialsimétrico y plano de deformaciones de las Figuras 5.18 y 5.19 evidencian la supresión de la localización, la distribución homogénea de las deformaciones plásticas es característica de la falla continua. En estado plano de deformaciones puede distinguirse una banda de corte que tiende a incrementarse a medida que lo hace la presión de confinamiento inicial.

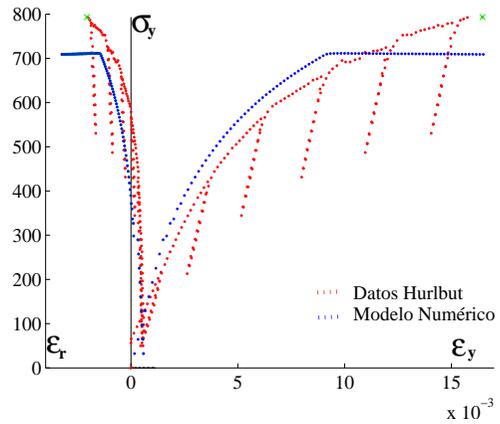


Figura 5.7: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.60f_c = 137.9 \frac{kg}{cm^2}$. Hurlbut (1985).

Se compara la predicción del ensayo de compresión triaxial con confinamiento inicial $\sigma_0 = 0.6f_c = 137.9 \frac{kg}{cm^2}$ de la Figura 5.19-c, con las respuestas correspondiente a mallas de EF con diferentes orientaciones y cantidades de elementos. La malla aleatoria se adopta a los efectos de comparar la orientación crítica de la zona de localización. En la Figura 5.20 pueden apreciarse las predicciones obtenidas con mallas de 600 y 620 elementos, respectivamente y en la 5.21 las respuestas en términos de la relación tensión vs. deformación. Queda así demostrada la independencia y objetividad de la solución respecto de la orientación y la cantidad de elementos en la malla de EF.

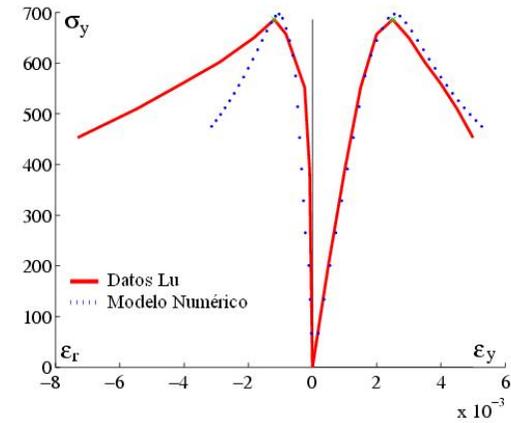


Figura 5.8: Ensayo de compresión uniaxial. Lu (2005).

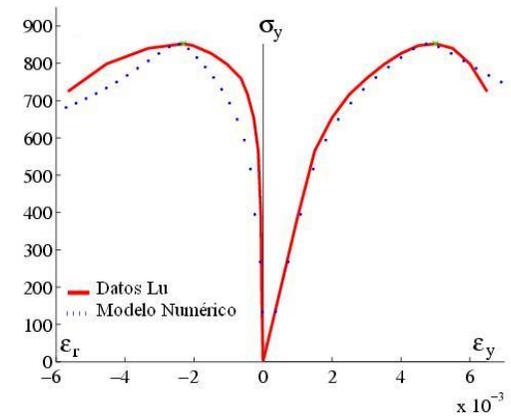


Figura 5.9: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.05f_c = 34.0 \frac{kg}{cm^2}$. Lu (2005).

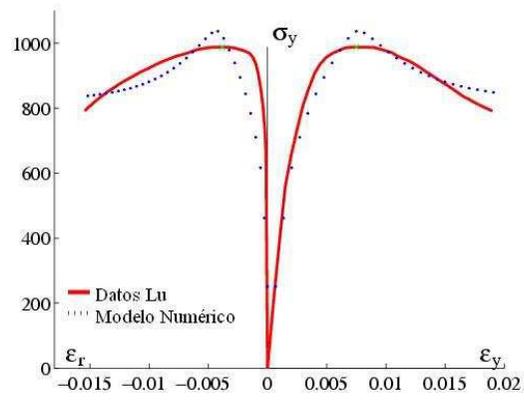


Figura 5.10: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.1 f_c = 68.0 \frac{kg}{cm^2}$. Lu (2005).

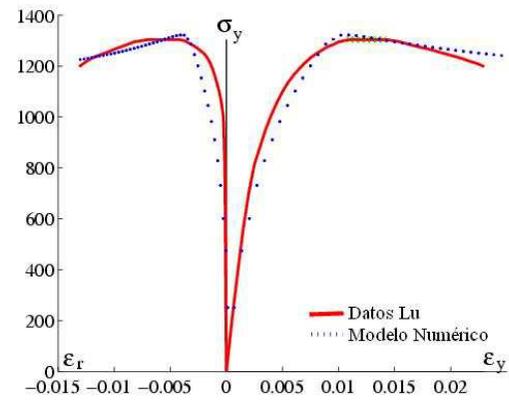


Figura 5.11: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.2 f_c = 136.0 \frac{kg}{cm^2}$. Lu (2005).

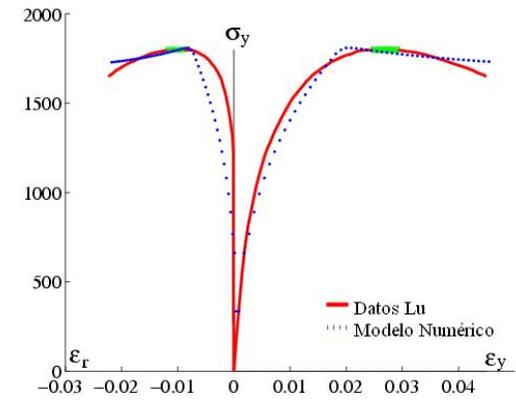


Figura 5.12: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.4 f_c = 272.0 \frac{kg}{cm^2}$. Lu (2005).

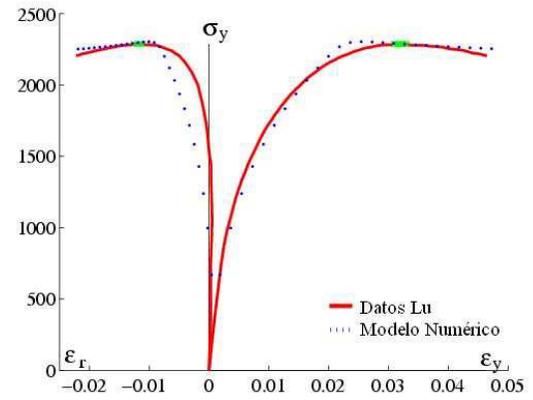


Figura 5.13: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.6 f_c = 408.0 \frac{kg}{cm^2}$. Lu (2005).

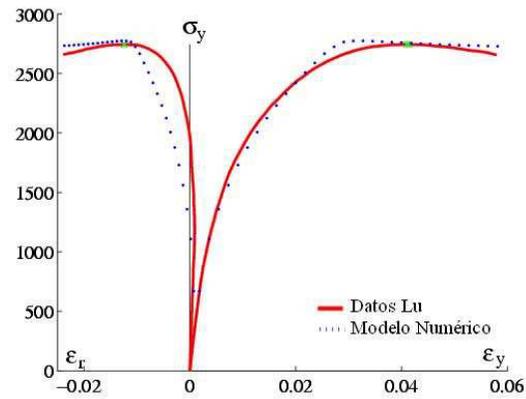


Figura 5.14: Ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.8f_c = 544.0 \frac{kg}{cm^2}$. Lu (2005).

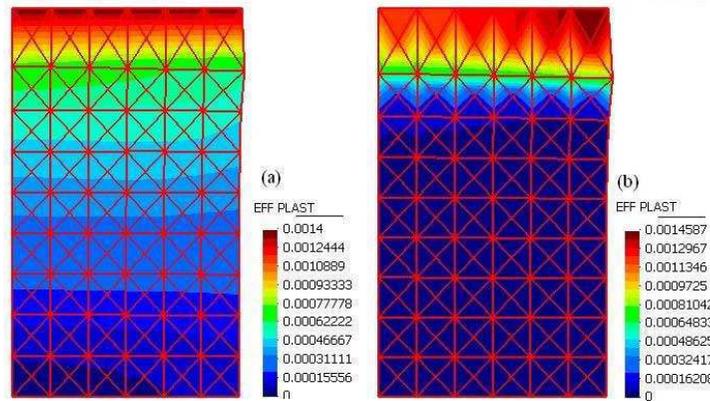


Figura 5.15: Mallas deformadas y distribución de deformaciones plásticas en el ensayo de tracción uniaxial. (a): Estado axisimétrico. (b): Estado plano de deformaciones.

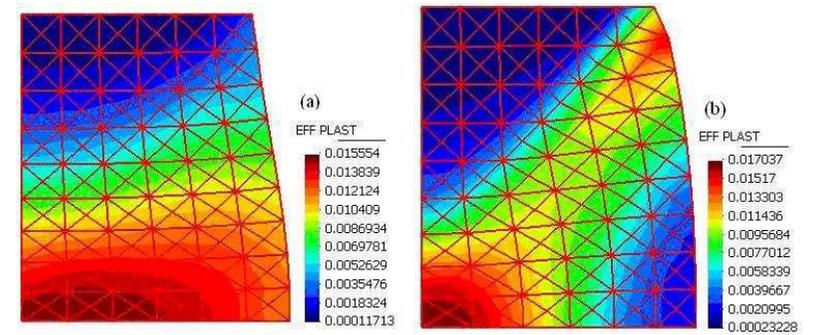


Figura 5.16: Mallas deformadas y distribución de deformaciones plásticas en el ensayo de compresión uniaxial. (a): Estado axisimétrico. (b): Estado plano de deformaciones.

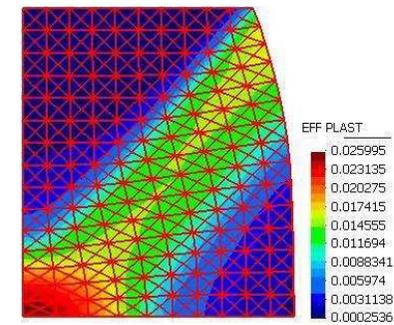


Figura 5.17: Malla deformada y distribución de deformaciones plásticas en el ensayo de compresión uniaxial. Forma local del modelo LDP.

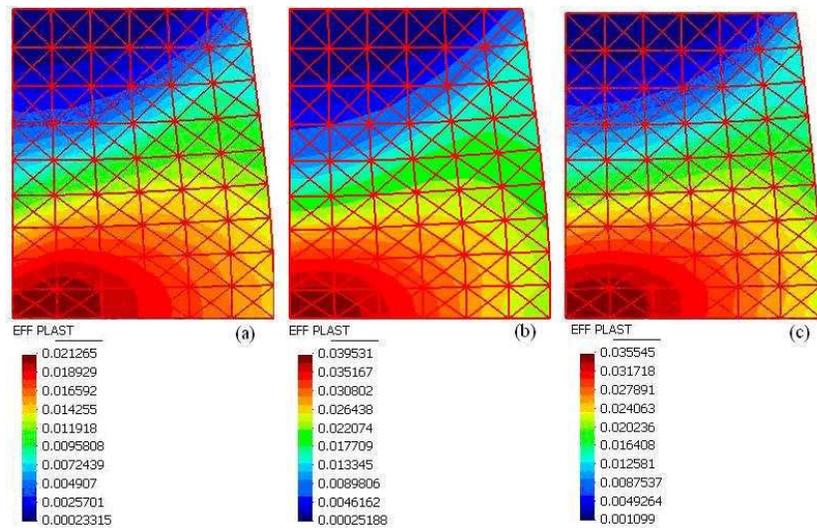


Figura 5.18: Mallas deformadas y distribución de deformaciones plásticas en el ensayo de compresión triaxial. Estado axisimétrico. (a) : $\sigma_0 = 0.03f_c$. (b) : $\sigma_0 = 0.15f_c$. (c) : $\sigma_0 = 0.6f_c$.

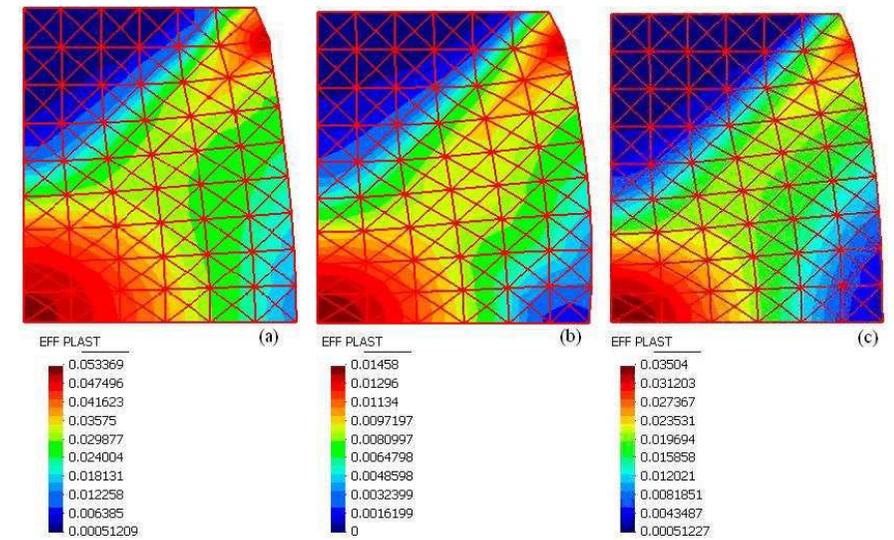


Figura 5.19: Mallas deformadas y distribución de deformaciones plásticas en el ensayo de compresión triaxial. Estado plano de deformaciones (a) : $\sigma_0 = 0.03f_c$. (b) : $\sigma_0 = 0.15f_c$. (c) : $\sigma_0 = 0.6f_c$.

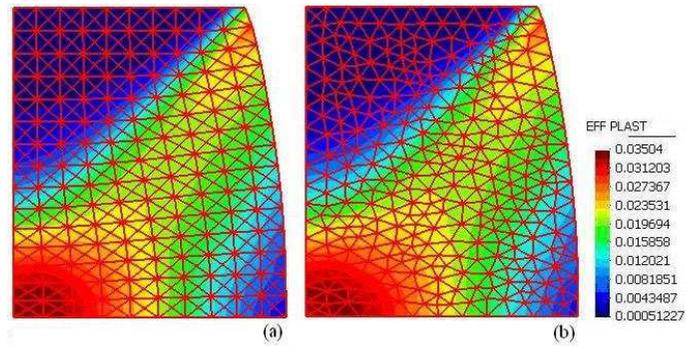


Figura 5.20: Mallas deformadas y distribución de deformaciones plásticas en el ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.6f_c$

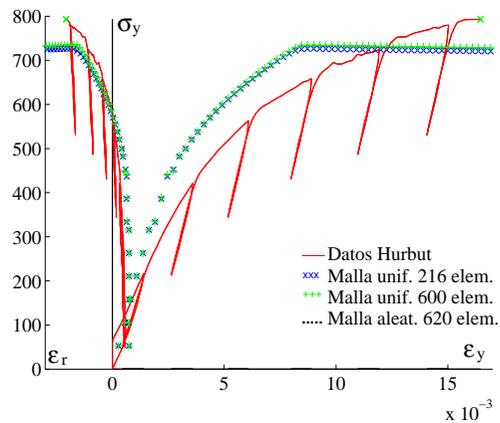


Figura 5.21: Curvas tensión vs. deformación correspondientes al ensayo de compresión triaxial. $\sigma_0 = 0.6f_c$. Hurlbut (1985)

Capítulo 6

Análisis y Predicción de Formas Localizadas de Falla en Hormigón

En este capítulo se investigan los indicadores de falla discontinua o localizada en correspondencia con el modelo constitutivo de gradientes para hormigones LDP propuesto en el capítulo anterior.

Los desarrollos tienen dos contribuciones novedosas al análisis de falla localizada en continuos elastoplásticos de gradientes. Por un lado, se extiende el análisis geométrico de localización (y la formulación matemática que lo sustenta) al caso de elastoplasticidad basada en gradientes. Por otro lado, los análisis de localización en este capítulo permiten concluir que la propiedad regularizante de la teoría de gradientes tiene límites y que no se extiende para todo el amplio espectro de estados tensionales admisibles.

6.1. El Método Geométrico de Localización Aplicado al Modelo LDP de Plasticidad de Gradientes Termodinámicamente Consistente

Para obtener la ecuación de la elipse de localización del modelo elastoplástico LDP, las funciones de fluencia y potencial plástico correspondientes al estado de carga máxima y sus

respectivos gradientes respecto del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, deben adecuarse a los formatos

$$F = J_2^m + a_1 J_2^q + z(c\alpha_1 I_1 - k_1)^n + C = 0 \quad (6.1)$$

$$Q = J_2^m + a_2 J_2^q + z(c\alpha_2 I_1 - k_2)^n + C = 0 \quad (6.2)$$

que reemplazan a las ecs. (3.68) y (3.69), respectivamente. Siendo los exponentes $m = 1$ y $q = \frac{1}{2}$ y las constantes

$$a_1 = a_2 = f_c m_0 \frac{\sqrt{3}}{9}, \quad m_0 = \frac{3(f_c^2 - f_t^2)}{2 f_c f_t} \quad (6.3)$$

$$\alpha_1 = f_c \frac{m_0}{9}, \quad \alpha_2 = \eta \alpha_1 \quad (6.4)$$

$$k_1 = k_2 = \frac{f_c^2}{3} \quad (6.5)$$

$$n = c = z = 1 \quad (6.6)$$

$$C = 0 \quad (6.7)$$

Las expresiones de los gradientes de las ecs. (6.1) y (6.2) respecto del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ resultan

$$\mathbf{n} = \left[m J_2^{(m-1)} + a_1 q J_2^{(q-1)} \right] \mathbf{S} + n z (c\alpha_1 I_1 - k_1)^{(n-1)} c\alpha_1 \mathbf{I}_2 \quad (6.8)$$

$$\mathbf{m} = \left[m J_2^{(m-1)} + a_2 q J_2^{(q-1)} \right] \mathbf{S} + n z (c\alpha_2 I_1 - k_2)^{(n-1)} c\alpha_2 \mathbf{I}_2 \quad (6.9)$$

y reemplazan a las ecs. (3.70) y (3.71). Las correspondientes a los tensores de primer orden \mathbf{a}_n y \mathbf{a}_m de ecs. (3.75) y (3.76)

$$\mathbf{a}_n = \left[m J_2^{(m-1)} + a_1 q J_2^{(q-1)} \right] \frac{E}{(1+\nu)} \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + \frac{E}{(1-2\nu)} z n c \alpha_1 (c p \alpha_1 - k_1)^{(n-1)} \mathbf{N} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{a}_m = \left[m J_2^{(m-1)} + a_2 q J_2^{(q-1)} \right] \frac{E}{(1+\nu)} \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + \frac{E}{(1-2\nu)} z n c \alpha_2 (c p \alpha_2 - k_2)^{(n-1)} \mathbf{N} \quad (6.11)$$

Sustituyendo en las ecs. (6.8) a (6.11) los coeficientes correspondientes al modelo LDP, las mismas se reformulan como

$$\mathbf{n} = \left(1 + \frac{a_1}{2\sqrt{J_2}} \right) \mathbf{S} + \alpha_1 \mathbf{I}_2 \quad (6.12)$$

$$\mathbf{m} = \left(1 + \frac{a_2}{2\sqrt{J_2}} \right) \mathbf{S} + \alpha_2 \mathbf{I}_2 \quad (6.13)$$

$$\mathbf{a}_n = \left(1 + \frac{a_1}{2\sqrt{J_2}} \right) 2GN \cdot \mathbf{S} + \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha_1 \mathbf{N} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{a}_m = \left(1 + \frac{a_2}{2\sqrt{J_2}} \right) 2GN \cdot \mathbf{S} + \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha_2 \mathbf{N} \quad (6.15)$$

Los coeficientes de la elipse de localización del modelo LDP, correspondientes a las ecs. (3.79), (3.80) y (3.97), se calculan en general de acuerdo

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_1 - \frac{1+\nu}{(1-2\nu)} \left[\alpha_1 p_1^{(n-1)} + \alpha_2 p_2^{(n-1)} \right] \frac{znc}{2 \left(m J_2^{(m-1)} + a_1 q J_2^{(q-1)} \right)} \quad (6.16)$$

$$A^2 = 2 \frac{1-\nu}{(1-2\nu)} B^2 \quad (6.17)$$

$$B^2 = \frac{1}{\left(m^2 J_2^{(m-1)2} + a_1^2 q^2 J_2^{(q-1)2} \right)} \left[\frac{\bar{H}^p + \bar{H}^g \frac{2\pi l_c}{\delta}}{4G} + m^2 J_2^{(m-1)2} J_2 + a_1^2 q^2 J_2^{(q-1)2} J_2 \right] + \left[n^2 c^2 \alpha_1 \alpha_2 (p_1 p_2)^{(n-1)} \frac{3(1+\nu)}{2(1-2\nu)} + \frac{(1+\nu)^2}{2(1-2\nu)(1-\nu)} n^2 c^2 (\alpha_1 p_1^{(n-1)} + \alpha_2 p_2^{(n-1)})^2 \frac{1}{4} \right] \quad (6.18)$$

resultando

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_1 - \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\sqrt{J_2}}{(a_1 + 2\sqrt{J_2})} \quad (6.19)$$

$$A^2 = 2 \frac{1-\nu}{(1-2\nu)} B^2 \quad (6.20)$$

$$B^2 = \frac{4J_2}{(a_1^2 + 4J_2)} \left[\frac{H^p}{4G} + \frac{H^g}{4G} \left(\frac{2\pi l_c}{\delta} \right)^2 + J_2 + \frac{a_1^2}{4} + \frac{(1+\nu)^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{8(1-2\nu)(1-\nu)} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_1 \alpha_2 \right] \quad (6.21)$$

En el caso particular de elastoplasticidad clásica, el parámetro B^2 que representa el eje vertical de la elipse en la ec. (3.81), adopta la expresión

$$B^2 = \frac{4J_2}{(a_1^2 + 4J_2)} \left[\frac{H^p}{4G} + J_2 + \frac{a_1^2}{4} + \frac{(1+\nu)^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{8(1-2\nu)(1-\nu)} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_1 \alpha_2 \right] \quad (6.22)$$

De acuerdo a los desarrollos de esta sección, la formulación de la plasticidad dependiente de gradientes termodinámicamente consistente permite una extensión simple del método geométrico de localización.

Los efectos no locales en términos de la longitud característica l_c y del módulo de endurecimiento o ablandamiento de gradientes H^g sólo afectan las expresiones de los semiejes A y B de la elipse de localización. Además, de la ec. (6.21) se concluye que el semieje B de la elipse de localización basada en plasticidad de gradientes, adopta la expresión de la plasticidad local de la ec. (6.22) cuando la relación $l/\delta \rightarrow 0$.

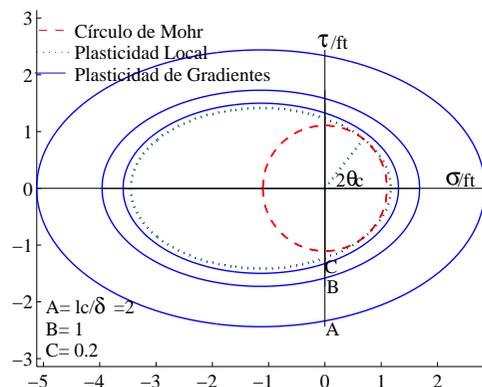


Figura 6.1: Análisis geométrico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de corte puro para plasticidad local y dependiente de gradientes. Modelo LDP.

6.2. Análisis de Localización del Modelo LDP de Plasticidad de Gradientes Termodinámicamente Consistente

Se analizan las propiedades de la localización del modelo LDP dependiente de gradientes y termodinámicamente consistente, para los estados tensionales de corte puro y tracción y compresión uniaxiales considerando estado plano de deformaciones, correspondientes a un material con las características presentadas en la sección 5.3

Se consideran a continuación los dos casos particulares analizados en las sección 3.3. En primer lugar el caso en que el módulo de endurecimiento o ablandamiento coincide con el valor crítico (máximo) para localización de la formulación local $H^p = H_{loc}^p$, y en segundo lugar el caso en que es menor $H^p < H_{loc}^p$.

Caso $H^p = H_{loc}^p$

Se realiza el análisis geométrico de localización para los ensayos de corte simple y de tracción y compresión uniaxial en el estado plano de deformaciones, cuando $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ y se

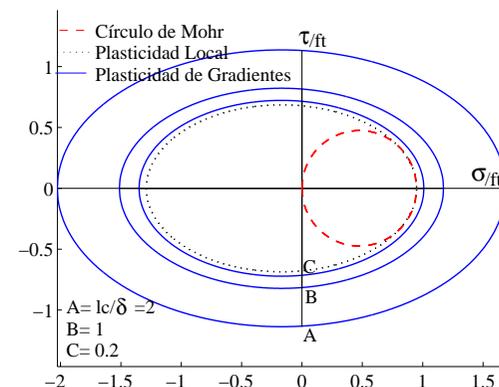


Figura 6.2: Análisis geométrico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de tracción uniaxial para plasticidad local y dependiente de gradientes. Modelo LDP.

	Corte puro		Tracción uniaxial		Compresión uniaxial	
Modelo	θ_{cr}	$\frac{H_{loc}^p}{E}$	θ_{cr}	$\frac{H_{loc}^p}{E}$	θ_{cr}	$\frac{H_{loc}^p}{E}$
LDP	19.5°	13.2	0.0°	7.2	38.0°	-4.2

Cuadro 6.1: Direcciones críticas de localización θ_c y parámetros críticos de endurecimiento/ablandamiento normalizados $\frac{H_{loc}^p}{E}$.

visualizan los resultados en las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3, respectivamente. Estos resultados ilustran la influencia de la longitud característica l_c y del ancho de la zona de localización δ . En el análisis del estado límite de tensiones, cuando $l_c > 0$, no existe contacto entre las elipses de localización y los círculos de Mohr correspondientes. Esto indica que para los tres estados de tensiones límite tiene lugar un modo de falla difusa.

Sin embargo, cuando $l_c/\delta \rightarrow 0$ las elipses de localización basadas en gradientes se aproximan a las elipses locales, que contactan a los círculos de Mohr, indicando que se satisface la condición de localización y entonces, tiene lugar la bifurcación discontinua.

Los valores de las direcciones críticas de localización θ_c y los parámetros críticos de endurecimiento o ablandamiento normalizados $\frac{H_{loc}^p}{E}$, correspondientes al material clásico (local) se

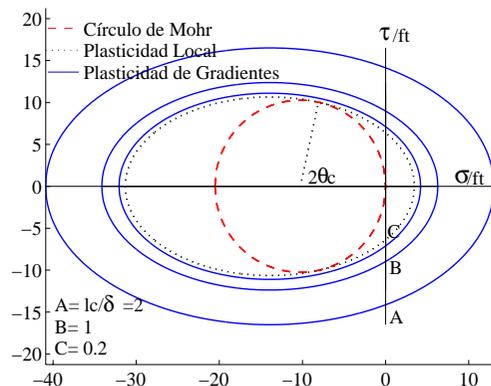


Figura 6.3: Análisis geométrico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de compresión uniaxial para plasticidad local y dependiente de gradientes. Modelo LDP.

presentan en el Cuadro 6.1.

Los resultados en las Figuras 6.1 a 6.3 demuestran que la formulación no local de gradientes conduce a las mismas direcciones críticas de localización (potenciales) que las correspondientes al modelo local. Sin embargo, la ausencia de contacto entre los círculos de Mohr y las elipses de localización del modelo de gradientes indican que la teoría no local suprime la condición de bifurcación discontinua para cualquier relación $l_c/\delta > 0$.

Para los tres estados tensionales analizados, los resultados en términos de $\det[\mathbf{Q}]$ se presentan en las Figuras 6.4 a 6.6. Se verifica que mientras el indicador elastoplástico de localización $\det[\mathbf{Q}^{ep}]$ toma valores iguales o menores a cero para las direcciones críticas de localización, el indicador correspondiente a la plasticidad de gradientes $\det[\mathbf{Q}^g]$, permanece positivo.

Caso $H^p < H_{loc}^p$

Se considera el caso particular de módulo de endurecimiento o ablandamiento adoptado menor al módulo crítico de localización de la formulación del modelo elastoplástico local. En la sección 3.3 se concluyó que cuando se satisface la condición de la ec. (3.94) para el coeficiente de gradientes H^g , la formulación material elastoplástica dependiente de gradientes

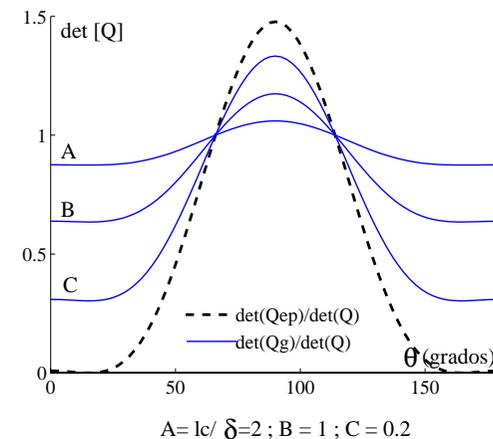


Figura 6.4: Análisis analítico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de corte puro para plasticidad local y dependiente de gradientes. Modelo LDP.

conduce a modos de falla localizados, en la misma forma que el modelo material local.

A continuación, para los distintos estado tensionales se seleccionan módulos de endurecimiento/ablandamiento que satisfacen la relación $H^p < H_{loc}^p$, siendo H_{loc}^p valores pertenecientes al Cuadro 6.1, y valores críticos de H_{loc}^g de acuerdo a la ec. (3.96).

Se grafican en las Figuras 6.7 a 6.9 las elipses de localización de gradientes correspondientes al estado de carga límite para los ensayos de corte puro, tracción y compresión uniaxial, respectivamente.

Los resultados demuestran la desventaja de la formulación del modelo elastoplástico dependiente de gradientes para eliminar bifurcaciones discontinuas (falla localizada) cuando $H^p < H_{loc}^p$. En los casos de ensayos de corte simple y de tracción uniaxial, el modelo dependiente de gradientes no asociado conduce también a falla localizada en régimen de prepico, similar a la formulación elastoplástica local.

Para suprimir las bifurcaciones discontinuas es necesario adoptar un módulo de gradientes H^g que satisfaga la relación $H^g > H_{loc}^g$.

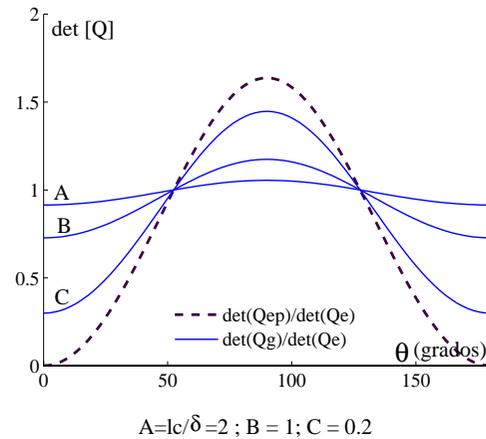


Figura 6.5: Análisis analítico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de tracción uniaxial para plasticidad local y dependiente de gradientes. Modelo LDP.

Con el objeto de verificar esta condición se adopta el valor $H^g = 2H_{loc}^g$. En las Figuras 6.10 a 6.12 se presentan las predicciones de falla del modelo LDP en términos de la elipse de localización para el estado de carga máxima de los ensayos de corte puro, tracción y compresión uniaxial. Se observa la falta de contacto entre la elipse de localización y el círculo Mohr, lo que indica que no tienen lugar modos de falla localizada.

La capacidad de regularización de la formulación de la elastoplasticidad dependiente de gradientes termodinámicamente consistente no depende sólo de la longitud interna característica l_c , sino también de la relación entre los módulos H^p , H_{loc}^p , H^g y l_c .

Aplicaciones a los Ensayos uni y triaxiales

Utilizando las predicciones de los ensayos a tracción uniaxial y compresión uni y triaxial de Hurlbut (1985)(50), se grafican para cada caso el círculo de Mohr y la elipse de localización correspondiente a la formulación no local de gradientes del modelo LDP. Los resultados obtenidos, en correspondencia con las Figuras 6.13 a 6.17, definen el tipo de falla que acontece

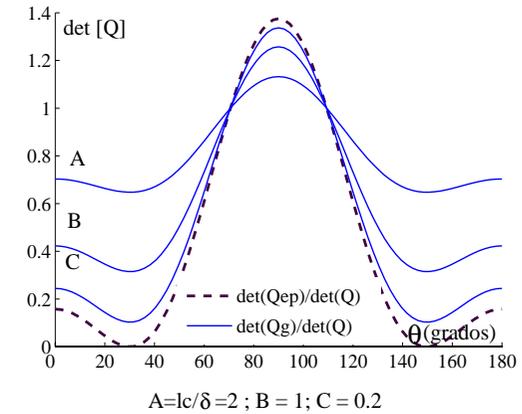


Figura 6.6: Análisis analítico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de compresión uniaxial para plasticidad local y dependiente de gradientes. Modelo LDP.

en coincidencia con carga pico.

Los ensayos uniaxiales de tracción y compresión evidencian la localización mediante la existencia de puntos de tangencia entre elipse y círculo de Mohr. Mientras en el primer caso el punto es único y corresponde al modo de falla I , en el segundo se observan dos puntos en las direcciones $2\theta_c = 76^\circ$ y 284° indicando modo de falla mixto, ver Figuras 6.13 y 6.14.

Considerando las elipses correspondientes a los ensayos de compresión triaxial se verifica la ausencia de contacto entre elipse y círculo de Mohr y en consecuencia, la supresión de la condición de localización, ver Figuras 6.15 a 6.17.

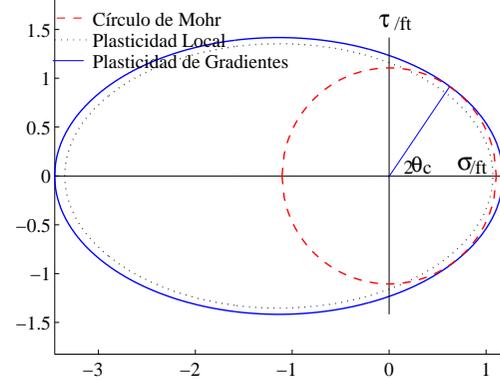


Figura 6.7: Elipses de localización correspondientes al ensayo de corte puro para $H^p = 0,8H_{loc}^p$ y $H^g = H_{loc}^g$. Modelo LDP.

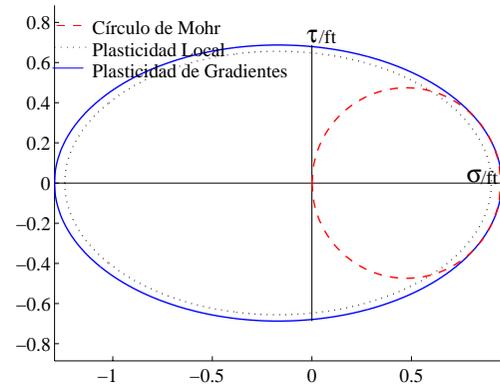


Figura 6.8: Elipses de localización correspondientes al ensayo de tracción uniaxial para $H^p = 0,8H_{loc}^p$ y $H^g = H_{loc}^g$. Modelo LDP.

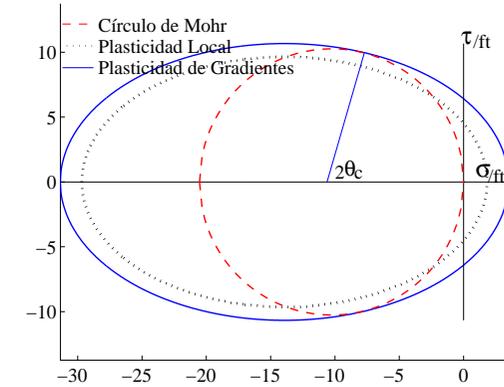


Figura 6.9: Elipses de localización correspondientes al ensayo de compresión uniaxial para $H^p = 2,8H_{loc}^p$ y $H^g = H_{loc}^g$. Modelo LDP.

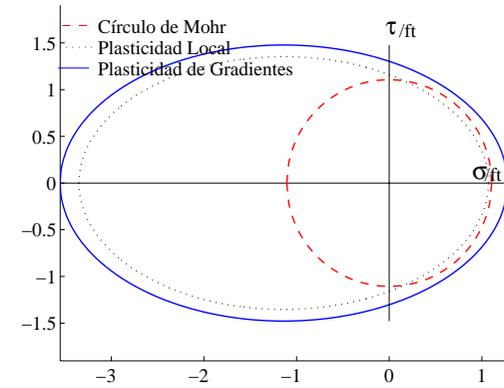


Figura 6.10: Elipses de localización correspondientes a la carga pico del ensayo de corte puro para $H^p = 0,8H_{loc}^p$ y $H^g = 2,0H_{loc}^g$. Modelo LDP.

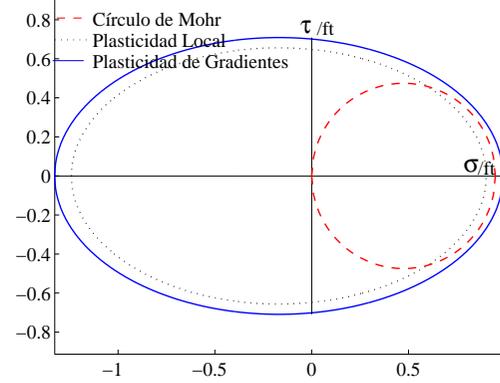


Figura 6.11: Elipses de localización correspondientes a la carga pico del ensayo de tracción uniaxial para $H^p = 0,8H_{loc}^p$ y $H^g = 2,0H_{loc}^g$. Modelo LDP.

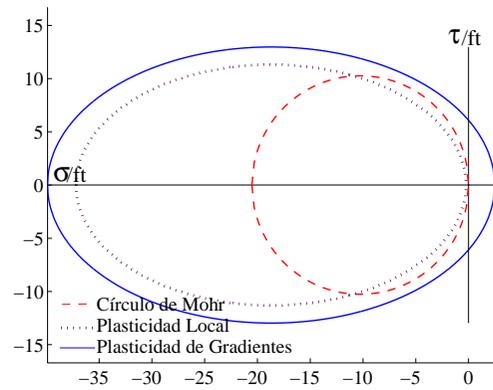


Figura 6.12: Elipses de localización correspondientes a la carga pico del ensayo de compresión uniaxial para $H^p = 2,8H_{loc}^p$ y $H^g = 2H_{loc}^g$. Modelo LDP.

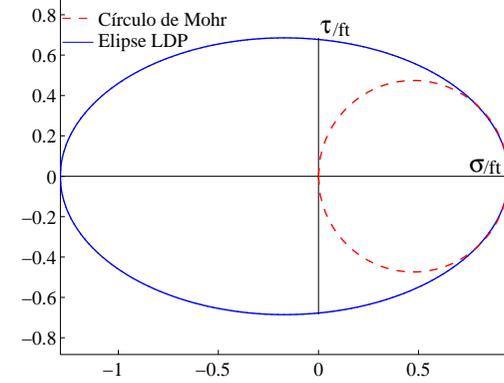


Figura 6.13: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de tracción uniaxial de Hurlbut (1985). Modelo LDP.

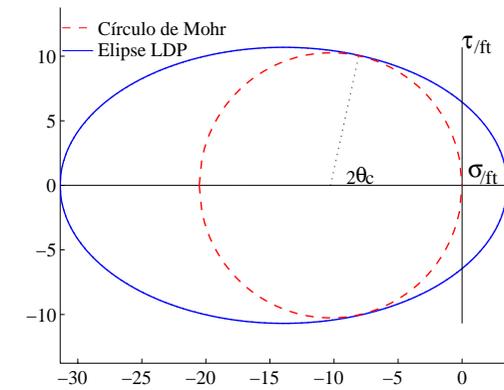


Figura 6.14: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión uniaxial de Hurlbut (1985). Modelo LDP.

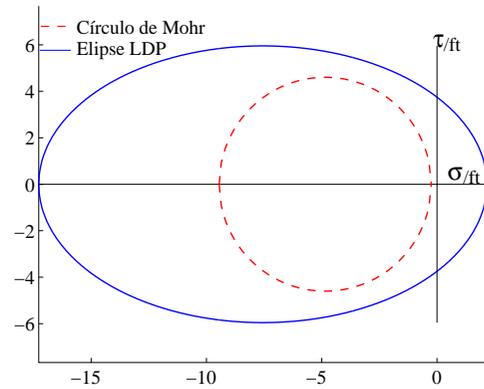


Figura 6.15: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión triaxial de Hurlbut (1985). $\sigma_0 = 0.03f_c$. Modelo LDP.

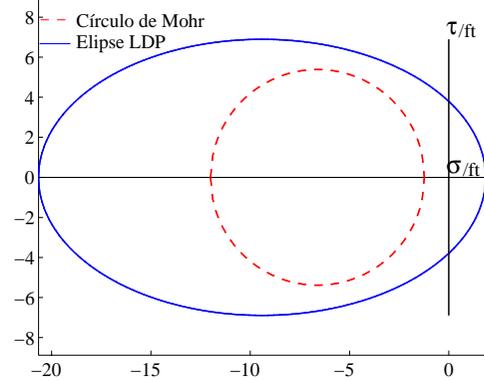


Figura 6.16: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión triaxial de Hurlbut (1985). $\sigma_0 = 0.15f_c$. Modelo LDP.

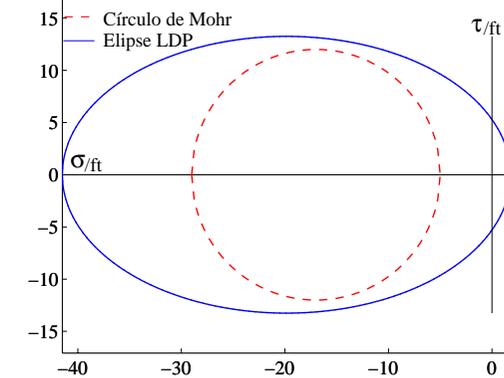


Figura 6.17: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión triaxial de Hurlbut (1985). $\sigma_0 = 0.6f_c$. Modelo LDP.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un modelo constitutivo elastoplástico termodinámicamente consistente basado en la teoría de gradientes superiores de deformaciones y energía de fractura para predecir el comportamiento de falla de materiales cuasi-frágiles como el hormigón.

La teoría material propuesta tiene dos propiedades relevantes que dan originalidad a la misma. Por un lado, fue formulada en forma consistente con los principios de la termodinámica, tanto en lo referente a la parte disipativa local en régimen de prepico como a la parte disipativa no local que tiene lugar en el pospico o ablandamiento. Por otro lado, realiza una descripción aditiva de la degradación de la resistencia en la etapa de ablandamiento mediante la consideración de dos mecanismos que tienen en cuenta fenómenos micro y macromecánicos que contribuyen a dicha resistencia. Estos mecanismos son el proceso de microfisuración y el proceso de decohesión en la porción del material alojada entre fisuras activas. Para modelarlos se propone una teoría basada en conceptos de energía de fractura, coherente con el fenómeno de microfisuración, y una formulación basada en elastoplasticidad de gradientes, que describe la decohesión en el continuo entre fisuras activas. Ambas teorías o mecanismos se combinan aditivamente y son formuladas en función de la presión de confinamiento actuante, para describir con precisión la transición de falla frágil a dúctil con el aumento del confinamiento. Esto último permite también simular los fuertes cambios de la no localidad volumétrica de los materiales cuasi-frágiles como el hormigón con el estado e historia de tensiones.

Para el condición de máxima resistencia del modelo propuesto se ha considerado el criterio de Leon, simplificado mediante el criterio de Drucker-Prager, a fin de contar con mayor

precisión en las descripciones de tensiones límites de hormigones. El mismo permite una predicción altamente precisa de la máxima resistencia del hormigón en el meridiano de compresión, aunque conduce a sobre-resistencias en el meridiano de tracción. Sin embargo, el criterio de máxima resistencia propuesto para el modelo tiene la ventaja de ser relativamente simple (sólo depende de dos invariantes de tensiones) y de suficiente precisión. El modelo incluye funciones isotropas no lineales del estado tensional para la variación de las variables internas en régimen de pre y pospico. En régimen de endurecimiento la evolución de la superficie de fluencia del modelo es controlada por la variación del parámetro de endurecimiento, que incluye una función interna no lineal del estado de tensiones para tener en cuenta la dependencia de la ductilidad de prepico en la tensión confinante. En esta etapa la cohesión se mantiene constante en su máximo valor. Contrariamente, en régimen de ablandamiento es la cohesión la que decrece y es controlada por las contribuciones de los dos mecanismos (energía de fractura y plasticidad de gradientes) considerados. Se desarrollaron funciones realistas para la descripción de la longitud característica de gradientes en términos del primer invariante de tensiones que representa el nivel de confinamiento. Todas estas funciones internas fueron calibradas con ensayos experimentales confiables en hormigones bajo diferentes niveles de confinamiento lateral.

Los resultados de las predicciones del modelo material propuesto demuestran que el mismo reproduce realísticamente el cambio de falla frágil a dúctil con el incremento de la tensión de confinamiento. Más aún, se observa que la formulación de gradientes es capaz de reproducir la fuerte no localidad de la forma de falla que se desarrolla en el caso de estados triaxiales de compresión con alto confinamiento.

Para el análisis de las predicciones de falla localizada del modelo elastoplástico de gradientes, se ha desarrollado un método geométrico que conduce a una solución cerrada de la condición de localización o de bifurcación discontinua. La ecuación de localización elastoplástica dependiente de gradientes se ha expresado en términos de las coordenadas de Mohr para obtener una elipse de segundo orden que representa la envolvente de localización para cada estado particular de tensiones. La condición de localización se ha definido geoméricamente mediante la tangencia entre la elipse de localización y el círculo principal de Mohr, mientras que el modo de falla queda definido por la inclinación del radio que pasa por el punto de tangencia del círculo y la elipse de localización.

Los resultados de los análisis geométricos de localización indican que la formulación del modelo LDP propuesto suprime las bifurcaciones discontinuas de la elastoplasticidad clásica cuando el módulo de endurecimiento/ablandamiento instantáneo H^p iguala al crítico de

localización correspondiente a la formulación local H_{lim}^p .

La capacidad de regularización de la formulación de gradientes se reduce cuando la relación $l_c/\delta \rightarrow 0$. Por esto, la longitud interna característica l_c define el nivel de difusión del modo de falla. Cuando l_c se aproxima a cero, se obtiene una transición desde elastoplasticidad de gradientes no local a elastoplasticidad local. En el caso extremo, cuando $l_c = 0$ se obtiene la formulación local de la teoría constitutiva.

Por el contrario, adoptando un módulo de endurecimiento/ablandamiento que satisfaga $H^p < H_{lim}^p$, la formulación material elastoplástica de gradientes puede conducir a modos de falla localizada, siempre que el módulo no local de gradientes H^g sea menor al valor límite definido en términos de H_{lim}^p y l_c . Entonces, se concluye que la capacidad de regularización de la formulación de la plasticidad dependiente de gradientes termodinámicamente consistente no depende sólo de la longitud característica l_c , sino también de la relación entre H^g , H_{lim}^p , H^p y l_c . En definitiva, el análisis geométrico de la condición de falla localizada llevado a cabo permitió corroborar la capacidad predictiva del modelo respecto de la fuerte dependencia y variación de los mecanismos de falla de materiales cuasi-frágiles como el hormigón respecto del camino y estado de tensiones dominante. En ese sentido, los resultados muestran que la falla altamente localizada se desarrolla en los casos de tracción uni o biaxial y también en los casos triaxiales con bajo confinamiento. Por otro lado, falla difusa con anchos de banda crecientes se observan en estados triaxiales con medio o alto confinamiento.

En el análisis numérico se utilizó un algoritmo de EF standard, basado en la integración implícita de las tensiones y en el método Backward Euler, con control de deformaciones. Se adoptaron elementos triangulares de deformación constante (CST) con funciones de interpolación planas y en estado plano axialsimétrico. El problema constitutivo se resolvió mediante un método mixto iterativo en las variables λ y $\mathbf{g} = H^g \nabla(\lambda)$, interpoladas mediante funciones de forma lineales.

Los análisis de PVB en esta tesis demuestran la eficiencia de los algoritmos numéricos desarrollados y de la implementación computacional de los mismos.

Bibliografía

- [1] S. Vrech. *Modelación constitutiva basada en teoría de gradientes*. Tesis de Magister. Universidad Nacional de Tucumán, (2003).
- [2] K.J. Willam, N. Bicanic, and S. Sture. Constitutive and computational aspects of strain-softening and localization in solids. In *Int. Conf. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, pages 33–70. Eds. Damianić et al., Pineridge Press, Swansea, (1984).
- [3] K. Willam, H. Y. Ko, S. Sture, K. Gerstle, E. Pramono, T. Stankowski, M. Klisinyki, and S. Smith. *Constitutive driver for triaxial response behavior of plain concrete*. *Struct. Res.* Number 87-08. Univ. of Colorado, Boulder, (1987).
- [4] Z.P. Bažant and B. Oh. Crack band theory for fracture of concrete. *RILEM Materials and Structures*, **16**, 155–177, (1983).
- [5] Z.P. Bažant. Mechanics of distributed cracking. *Appl. Mech. Rev.*, **39**, 675–705, (1986).
- [6] J. Oliver. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 461–474, (1989).
- [7] K.J. Willam and G. Etse. Failure assessment of the extended Leon model for plain concrete. In *SCI-C Conf., Zell and See, Austria*, pages 851–870. Pineridge Press, Swansea, UK, (1990).
- [8] C.M. Lopez. *Análisis Microestructural de la Fractura del Hormigón utilizando Elementos Finitos Tipo Junta. Aplicación a diferentes Hormigones*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España, (1999).
- [9] I. Carol, M. Lopez, and O. Roa. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **52**, 193–215, (2001).

- [10] G. Etse, R. Lorefice, A. Carosio, and I. Carol. Rate dependent interface model formulation for quasi-brittle materials. *IA-FramCos*, pages 301–306, (2004).
- [11] J.C. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-dependent inelastic solids. *Computational Mechanics*, **12**, 277–296, (1993).
- [12] J.C. Simo and J. Oliver. A new approach to the analysis and simulation of strong discontinuities. *Fracture and damage in Quasi-brittle structures*, pages 25–39, (1994).
- [13] J. Oliver, A. Huespe, M. Pulido, and E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, **69**, 113–136, (2002).
- [14] J. Oliver, A. Huespe, and E. Samaniego. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **56**, 2135–2161, (2003).
- [15] T. Belytschko, J. Fish, and B.E. Engelmann. A study of localization limiters for strain-softening in statics and dynamics. *Comp. and Struct.*, **33**, 707–715, (1988).
- [16] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localization failure analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng.*, **61**, 189–224, (1989).
- [17] E.N. Dvorkin, A. Cuitiño, and G. Gioia. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *J. of Num. Meth. in Eng.*, **30**, 541–564, (1990).
- [18] G. Etse, P. Steinmann, and K. Willam. Computational aspects of localized failure simulations in plain concrete. *Int. RILEM/ESIS Publication on Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics*, **2**, 651–660, (1991).
- [19] R. de Borst, L. Sluys, H. Mühlhaus, and J. Pamin. Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation. *Eng. Comp.*, **10**, 99–121, (1993).
- [20] F. Armero and K. Garikipati. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *Int. J. Solids Struct.*, **33(20-23)**, 2863–2885, (1996).
- [21] R. Larsson, K. Runesson, and S. Sture. Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity-theory and FE-analysis. *Int. J. Solids Struct.*, **33(20-22)**, 3081–3101, (1996).

- [22] A. Griffith. The phenomena of the rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Series A*, **221**, 163, (1921).
- [23] A. Hillerborg, M. Modéer, and P.E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Research*, **6**, 773–782, (1976).
- [24] F. Vecchio and M.P. Collins. Stress-strain characteristics of reinforced concrete in pure shear. *Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, IABSE Colloquium Delft 1981, IABSE, Zürich*, **34**, 21, (1981).
- [25] J. Lubliner, J. Oliver, Oller S., and E. Oñate. A plastic-damage model for concrete. *Int. J. of Solids and Structures*, **25**, 3:299–326, (1989).
- [26] B. Luccioni, S. Oller, and R. Danesi. Coupled plastic-damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **37**, 81–90, (1996).
- [27] R. de Borst. Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum. *Eng. Comp.*, **8**, 317–332, (1991).
- [28] K. Willam, H. Y. Ko, S. Sture, K. Gerstle, E. Pramono, T. Stankowski, M. Klisinyki, and S. Smith. *Localization in Micro polar Continua. Cont. Models for Materials with Microstructure*. Number 297-339,. Eds. H. Mühlhaus. J. Wiley & Sons Ltd. edition, (1995).
- [29] G. Etse, P. Steinmann, and M. Nieto. A micropolar microplane theory. *Int. Journal of Engineering Sciences*, **41**, 1631–1648, (2003).
- [30] G. Etse and M. Nieto. Cosserat continua-based micropolar modeling. Theory and numerical analysis. *Latin American Applied Research*, **34**, 229–240, (2004).
- [31] L.J. Sluys. *Wave propagation, localization and dispersion in softening solids*. PhD thesis, University of Technology, Delft, The Netherlands, (1992).
- [32] G. Etse and K. Willam. Failure analysis of elasto-viscoplastic material models. *ASCE, Journal of Eng. Mech.*, **125**, 60–69, (1999).
- [33] A. Carosio, K. Willam, and G. Etse. On the consistency of viscoplastic formulations. *Int. J. of Solids and Structures*, **37**, 7349–7369, (2000).

- [34] A.C. Eringen and D.G.B. Edelen. On nonlocal elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, **10**, 233–248, (1972).
- [35] Z.P. Bažant, T. Belytschko, and T.P. Chang. Continuum theory for strain softening. *ASCE, J. Eng. Mech.*, **110**, 1666–1692, (1984).
- [36] I. Vardoulakis and E.C. Aifantis. A gradient flow theory of plasticity for granular materials. *Acta Mechanica*, **87**, 197–217, (1991).
- [37] L.J. Sluys, R. de Borst, and M. Mühlhaus. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium. *Int. J. of Solids and Structures*, **30**, 1153–1171, (1993).
- [38] J. Pamin. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. PhD thesis, TU-Delft, The Netherlands, (1994).
- [39] T. Svedberg. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Sweden, (1999).
- [40] S. Vrech. *Teoría constitutiva viscoplástica de gradientes*. Tesis de Magister. Universidad Nacional de Rosario, (2002).
- [41] E.C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *J. Eng. Mater. Technol.*, **106**, 326–330, (1984).
- [42] E.C. Aifantis. The physics of plastic deformation. *Int. J. Plasticity*, **3**, 211–247, (1987).
- [43] B.D. Coleman and M.L. Hodgdon. On shear bands in ductile materials. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **90**, 219–247, (1985).
- [44] T. Belytschko and D. Lasry. A study of localization limiters for strain-softening in statics and dynamics. *Comp.y and Struct.*, **33**, 707–715, (1989).
- [45] J.G.M. van Mier. *Fracture processes of concrete*. CRC Press, (1997).
- [46] A. Leon. Ueber die Scherfestigkeit des Betons. *Beton und Eisen*, **28**, 461–474, (1935).
- [47] A. Leon. Ueber das Mass der Anstrengung bei Beton. *Ingenieur Archiv*, **4**, 421–431, (1935).

- [48] K. Willam and E. Wranke. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. In *Concrete Structures Submitted to Triaxial Stresses*. International Association of Bridge and Structural Engineers, (1974).
- [49] G. Etese. *Theoretische und numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton*. PhD thesis, Universidad de Karlsruhe, Alemania, (1992).
- [50] B. Hurlbut. Experimental and computational investigation of strain-softening in concrete. Master's thesis, University of Colorado, (1985).
- [51] L. Malvern. *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N., (1969).
- [52] L.M. Kachanov. *Fundamentals of the Theory of Plasticity*. Mir Publishers, (1974).
- [53] A.C. Eringen. *Continuum physics. Polar and Nonlocal field theories*, volume IV. Academic Press, (1976).
- [54] C. Desai and J. Siriwardane. *Constitutive Laws for Engineering Materials*. Prentice Hall, (1984).
- [55] R.W. Ogden. *Non-linear elastic deformation*. Ellis Horwood Ltd., Oxford, (1984).
- [56] G.A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics. A continuum approach for engineering*. Wiley, (2000).
- [57] E. Dvorkin and M. Goldschmit. *Nonlinear Continua: Fundamentals for the Computational Techniques*. Wiley, (2005).
- [58] C. Truesdell and W. Noll. *Non-linear field theories of mechanics. Fluegge's Handbuch der Physik*, volume III. Springer-Verlag, (1965).
- [59] C. Truesdell. Hypoelasticity. *J. Ration. Mech. Anal*, **4**, 83–133, (1955).
- [60] C. Truesdell. Hypoelasticity shear. *J. Appl. Phys.*, **27**, 441–467, (1956).
- [61] H. Hencky. *Zeit. Angew. Math. und Mech.*, volume 4. (1924).
- [62] A. Nadai. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, volume 1. Mc Graw, New York, (1950).

- [63] J.B. de Saint Venant. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles... *J. Math. Pures et Appl.*, **16**, 308–316, (1871).
- [64] M. Lévy. Extrait du memoire sur les equations generales des mouvements interieurs des corps solides ductiles au dela des limites ou l'elasticite pourrait les ramener a leur premier etat. *J. Math. Pures et Appl.*, **16**, 369–372, (1871).
- [65] R. Mises von. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Gött Nachricht Math. Phys. Kl.*, pages 582–592, (1913).
- [66] L.T Prandtl. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. In *First Intern. Congr. Mechanics*, pages 43–54. Delft, (1924).
- [67] A. Reuss. Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie. *Zeit. Angew. Math. und Mech.*, **10**, 26–274, (1939).
- [68] W.F. Chen and D.J. Han. *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, (1988).
- [69] A. Becker and W. Bürger. *Kontinuumsmechanik, Cap. 7*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, (1975).
- [70] R. de Borst. A generalization of J_2 -flow theory for polar continua. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **103**, 347–362, (1993).
- [71] E. Cosserat and F. Cosserat. *Theory des corps deformables*. Herman et fils, Paris, (1909).
- [72] H.B. Mühlhaus and I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnique*, **37**, 271–283, (1987).
- [73] G. Etse and M. Nieto. Micropolar regularization in concrete plasticity. *Fourth World Congress on Computational Mechanics, IACM, Buenos Aires*, (1998).
- [74] G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bažant. Non local damage theory. *ASCE, J. Eng. Mech.*, **113**, 1512–1533, (1987).
- [75] Z.P. Bažant and G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *ASME, J. Appl. Mech.*, **55**, 287–293, (1988).
- [76] G. Pijaudier-Cabot and A. Benallal. Strain localization and bifurcation in a non-local continuum. *Int. J. of Solids and Structures*, **13**, 1761–1775, (1993).

- [77] R.H.J. Peerlings. *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. PhD thesis, CIP-Data Library Technische Universiteit Eindhoven, (1999).
- [78] F.H. Wu and L.B. Freund. Deformation trapping due to thermoplastic instability in one-dimensional wave propagation. *J. Mech. Solids*, **32(2)**, 119–132, (1984).
- [79] A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng.*, **67**, 69–86, (1988).
- [80] B. Loreet and J.H. Prevost. Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids. Part 1. General formulation and one-dimensional examples. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**, 247–273, (1990).
- [81] L.J. Sluys and R. de Borst. Solution methods for localization in fracture dynamics. In *Conf. on fracture in Concrete, Rock and Ceramics*, pages 661–671. Eds. van Mier J., Rots J.G., Bakker A., London, (1991).
- [82] P. Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. *Recent Advances in Appl. Mech., Academic Press, New York*, **9**, 243–377, (1966).
- [83] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inequations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, (1972).
- [84] J.P. Ponthot. Radial return extensions for visco-plasticity and lubricated friction. In *Int. Conf. on Structural Mechanics and Reactor Technology SMIRT-13*, pages 711–722. Porto Alegre, Brasil, (1995).
- [85] A. Carosio. *Análisis teórico computacional del comportamiento tiempo-dependiente de materiales*. Tesis de Magister. Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, (1997).
- [86] A. Carosio. *Estudio de la condición de consistencia Viscoplastica*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, (2001).
- [87] W. Wang. *Stationary and propagative instabilities in metals - A computational point of view*. PhD thesis, TU-Delft, The Netherlands, (1997).
- [88] I.C. Cormeau. Numerical stability in quasi-static elasto/visco-plasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **9**, 109–127, (1975).
- [89] D.R.J. Owen and F. Damjanic. Viscoplastic analysis of solids: stability considerations. *Recent Advances in Non-linear Computational Mechanics. Eds Hinton E., Owen D.R.J. and Taylor, Swansea*, pages 225–253, (1982).

- [90] R. de Borst and H.B. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, pages 521–539, (1991).
- [91] T. Svedberg and K. Runesson. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *Int. J. of Plasticity*, **13 (6-7)**, 669–696, (1997).
- [92] H.M. Zbib and E.C. Aifantis. On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation. *III, Res. Mechanica*, **23**, 261–305, (1988).
- [93] M.J. Beran and J.J. McCoy. Mean field variations in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids. *Int. J. Solids Struct.*, **6**, 1035–1054, (1970).
- [94] Z.P. Bažant. Why continuum damage mechanics is nonlocal: micromechanics arguments. *J. Eng. Mech.*, **117**, 1070–1087, (1991).
- [95] L. Mirsky. *An Introduction to Linear Algebra*. Dover Public. Inc. New York, (1983).
- [96] D.C. Drucker. A definition of stable inelastic materials. *J. Appl. Mech.*, **26**, 101–106, (1959).
- [97] N.S. Ottosen and K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Structures*, **27**, 401–421, (1991).
- [98] J. Hadamard. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. *Hermann, Chapter 6, Paris*, (1903).
- [99] R. Hill. Acceleration waves in solids. *J. for Mechanics of Physics and Solids*, **10**, 1–16, (1962).
- [100] C. Truesdell and R. Toupin. The classical field theories of mechanics. *Fluegge's Handbuch der Physik, Eds. Springer-Verlag*, **III/1** (1956).
- [101] R. Knops and L. Payne. *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*. Springer-Verlag, (1971).
- [102] K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Perić. Plane stress and strain discontinuous bifurcations in elastic-plastic materials. *Int. J. of Plasticity*, **7/1-2**, 99–121, (1991).
- [103] D. Perić. *Localized deformation and failure analysis of pressure sensitive granular materials*. PhD thesis, University of Colorado, CEAE Dept., Boulder, (1990).

- [104] G. Etse. Numerical failure analysis of pull-out test. *Zeit. Angew. Math. und Mech.*, **4**, 158–161, (1992).
- [105] A. Benallal. On localization phenomena in thermo-elasto-plasticity. *Arch. Mech.*, **44**, 15–29, (1992).
- [106] A. Benallal and Comi C. Localization analysis via a geometrical method. *Arch. Mech.*, **33**, 15–29 (1996).
- [107] T. Liebe and K. Willam. Localization results of generalized Drucker-Prager elasto-plasticity. *ASCE JEM*, **127/6**, 616–619, (2001).
- [108] T. Liebe. Analytical and geometrical representation of localization analysis of curvilinear Drucker-Prager elastoplasticity. Technical report, University of Colorado, Boulder, (1998).
- [109] S. Vrech and G. Etse. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic Drucker-Prager elastoplasticity. *Int. J. of Plasticity*, **22**, 943–964, (2005).
- [110] S. Vrech and G. Etse. Geometrical method for localization analysis in gradient-dependent J_2 plasticity. *Computational Plasticity VIII. Fundamentals and Applications. Part I. CIMNE. Barcelona*, pages 454–458, (2006).
- [111] S. Vrech and G. Etse. Análisis geométrico de localización del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes. *Rev. Int. de Mét. Num. para Cálculo y Diseño en Ing.*, **22,3**, 277–297, (2006).
- [112] G.W.D. Vile. The strength of concrete under short term static biaxial stress. In *Int. Conference on The Structure of Concrete. Cement & Concrete Association*, page 275. London, (1968).
- [113] G. Wischers and Lusche M. Einfluss der inneren Spannungsverteilung das Tragverhalten von druckbeanspruchten Normal-und Leichtbeton. *Beton-technische Berichte*, **18**, 137, (1972).
- [114] P.E. Petersson. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Report TVBM-1006. Technical report, Lund Institute of Technology, Sweden, (1981).
- [115] J. Eibl and G. Iványi. Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, **260**, 582, (1976).

- [116] K. Willam, B. Hurbult, and S. Sture. Experimental and constitutive aspects of concrete failure. In *US-Japan Seminar on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, pages 226–254. ASCE-Special Publication, (1985).
- [117] S. Brezzi and M. Fortain. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer Verlag, New York, (1991).
- [118] X. Lu. *Uniaxial and triaxial behavior of high strength concrete with and without steel fibers*. PhD thesis, New Jersey Institute of Technology, (2005).
- [119] B.D. Coleman. Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **17**, 1–46, (1964).
- [120] B.D. Coleman and M.E. Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *J. Chem. Phys.*, **47**, 597–613, (1967).
- [121] K.C. Valanis. Irreversibility and existence of entropy. *J. Non-Lin. Mech.*, **6**, 337–360, (1971).
- [122] J.C. Simo and C. Miehe. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **98**, 41–104, (1992).
- [123] K. Runesson. *Constitutive theory and computational technique for dissipative materials with emphasis on Plasticity, Viscoplasticity and Damage, Part II: models and algorithms for geometrically linear theory*. Division of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, (1998).

Publicaciones de la Autora

- S. Vrech, G. Etse. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic Drucker-Prager elatoplasticity. *International Journal of Plasticity*, **22**, 943-964, (2005).
- S. Vrech, G. Etse. Análisis geométrico de localización del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **22-3**, 277-297, (2006).
- G. Etse, S. Vrech. Geometrical method for localization analysis in gradient-dependent J_2 plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, **73-6**, 1026-1030, (2006).
- S. Vrech, G. Etse. FE approach for thermodynamically consistent gradient-dependent Plasticity. *Latin American Applied Research*, **37**, 127-132, (2007).

Apéndice A

Espacio de Tensiones de Haigh-Westergaard

La alternativa más simple para la representación geométrica del estado tensional en un punto del continuo es adoptar las tres tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 como coordenadas y representarlo en ese espacio tridimensional llamado espacio de tensiones de Haigh-Westergaard, representado en la Figura A.1.

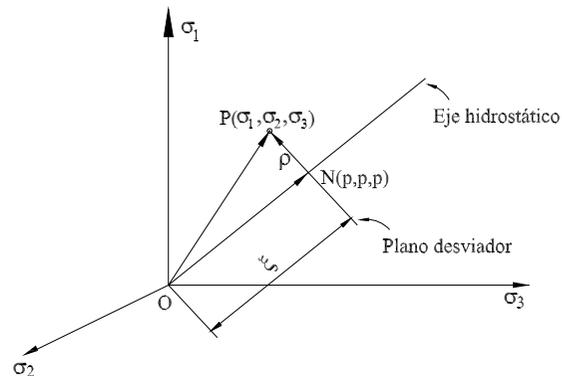


Figura A.1: Espacio de tensiones de Haigh-Westergaard

Los puntos situados sobre la línea $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ corresponden al estado hidrostático

de tensiones, correspondiente a tensiones desviadoras S_1 , S_2 y S_3 iguales a cero. Esta línea se denomina eje hidrostático. Los planos perpendiculares a él se denominan desviadores y responden a la ecuación

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}\xi \quad (\text{A.1})$$

La longitud hidrostática ξ es la distancia desde el origen al plano desviador, medida a lo largo de la diagonal \overline{ON} . El plano desviador que pasa por el origen O se denomina plano π y corresponde a la ecuación

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (\text{A.2})$$

La longitud \overline{NO} se denomina desviadora y está dada por

$$\rho = \sqrt{2J_2} \quad (\text{A.3})$$

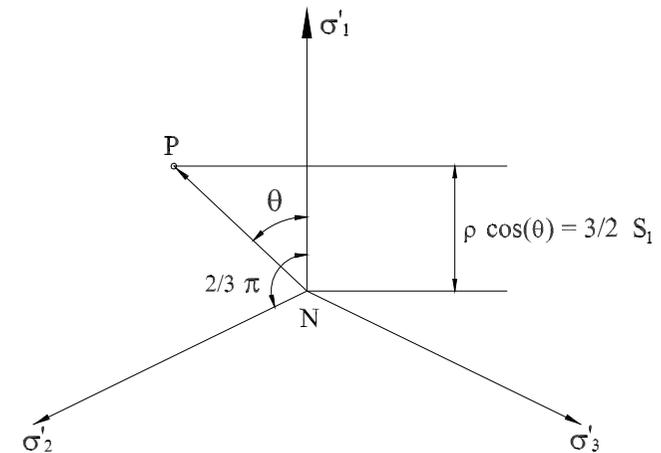


Figura A.2: Proyección del estado de tensiones en un punto sobre el plano desviador

Proyectando sobre un plano desviador los ejes coordenados σ_1 , σ_2 y σ_3 y el vector \overline{NP} , se obtienen los ejes σ'_1 , σ'_2 y σ'_3 y el segmento \overline{NP} que forma el ángulo θ (ángulo de Lode) con

la dirección vertical, ver Figura A.2. Mediante relaciones geométricas se llega a la expresión del ángulo θ [ver Chen y Hang (1987) (68)]

$$\theta = \arccos \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{S_1}{\rho} \right) \quad (\text{A.4})$$

Las magnitudes ξ , ρ y θ pueden utilizarse como coordenadas cilíndricas para la representación de estados tensionales.

Apéndice B

Teoría de la Termodinámica

En este apéndice se presenta una revisión de conceptos de la teoría de la termodinámica aplicables a la mecánica del continuo. A partir de las leyes de la termodinámica se obtienen las ecuaciones constitutivas y leyes en términos de disipación, tanto locales como no locales, de utilidad en la formulación de modelos materiales.

B.1. Marco Histórico

La termodinámica clásica, desarrollada por los científicos Clausius, Thompson y Hugoniot, fue utilizada a fines del siglo *XIX* para la descripción de la dinámica de gases por Hadamard y Duhem, y en los últimos 50 años como base racional de la mecánica del continuo. Una de las dificultades conceptuales en la formulación de las relaciones termodinámicas es la modelación de los efectos disipativos que originan deformaciones irreversibles. En torno a este tema se han desarrollado dos escuelas:

- La descripción de los efectos disipativos considerando a las tensiones como funcionales de la historia termo-cinética [Truesdell y Noll (1965)(58) y Coleman (1964)(119)].
- El empleo de variables internas junto con variables observables como la temperatura o las deformaciones.

Este último procedimiento, propuesto originalmente por Meixner (1953) y Coleman y Gurtin (1967)(120), ha sido el de mayor aceptación en la comunidad científica.

B.2. El Rol de la Termodinámica en la Mecánica del Continuo

La termodinámica tiene un rol básico en el campo de la mecánica del continuo: a partir de la primera ley de la termodinámica es posible obtener los principios de conservación de masa, la ecuación del movimiento (o momentum) y la simetría del tensor de tensiones de Cauchy (o momento de momentum).

Por otro lado, las ecuaciones constitutivas de los modelos materiales continuos deben satisfacer los requerimientos impuestos por la segunda ley de la termodinámica, aunque ésta no provea la estructura matemática de dichas ecuaciones.

B.3. Definiciones Básicas

B.3.1. Sistema Termodinámico

Un sistema termodinámico es una región espacial que contiene una determinada cantidad de materia que no puede intercambiar con el medio. Sin embargo, puede intercambiar energía en diferentes modos.

Si se considera la energía total entregada al sistema, mecánica P y calórica Q , parte de la misma puede convertirse en energía cinética K y parte almacenarse como energía interna E .

B.3.2. Variables de Estado Termodinámicas

Una variable de estado $y_\alpha(t)$ de un sistema termodinámico es considerada una entidad física siempre que una variación en su valor implique la variación de la energía interna del sistema. Un sistema se encuentra en equilibrio termodinámico si ninguna de sus variables de estado varían temporalmente.

Las variables independientes o primitivas de un sistema termodinámico se clasifican en observables (deformaciones y temperatura) y no observables, denominadas también internas u ocultas y a su vez, en escalares, tal es el caso del coeficiente de daño, y tensoriales. En lo sucesivo y por simplicidad, las variables internas serán tratadas como variables escalares.

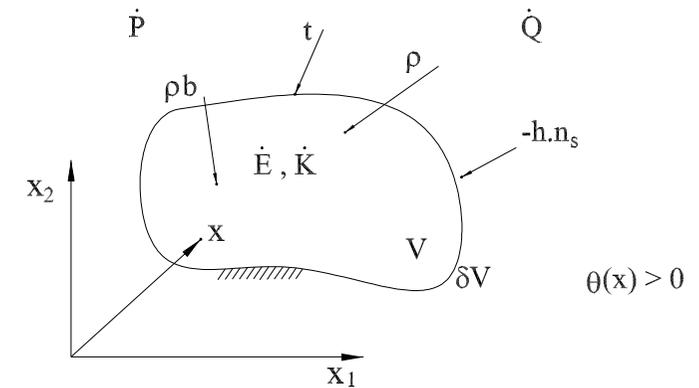


Figura B.1: Sistema termodinámico.

La independencia de las variables de estado implica que no es posible establecer entre ellas ninguna relación algebraica. Sin embargo, pueden existir relaciones entre sus variaciones respecto del tiempo como es el caso de las ecuaciones constitutivas expresadas en términos de tasas.

En la teoría de continuos locales las relaciones constitutivas involucran sólo derivadas temporales, mientras que la teoría de continuos no locales incluye derivadas espaciales y/o variables promediadas espacialmente.

B.3.3. Procesos y Sistemas Reversibles e Irreversibles

Los procesos termodinámicos, que consisten en general en la aplicación de trabajo mecánico y energía calórica, pueden clasificarse en:

- Procesos puramente térmicos en los que sólo se transmite al sistema energía calórica en ausencia de trabajo mecánico, siendo $P = 0$ y $Q \neq 0$.
- Procesos puramente mecánicos o adiabáticos en los que la energía es transmitida al sistema como el trabajo mecánico de fuerzas volumétricas y de superficie en ausencia de transmisión de calor, resultando $P \neq 0$ y $Q = 0$.

- Procesos isotérmicos, caracterizados por una temperatura constante (respecto del tiempo) $\theta = 0$, que puede ser considerada como un parámetro constante.

Considerando un proceso termodinámico durante el cual las variables de estado varían con la aplicación de trabajo mecánico y calor, el mismo es irreversible si al extraer la misma cantidad de trabajo aplicada todas las variables de estado recuperan sus valores originales. Las funciones de estado, como es el caso de la energía interna, también recuperan sus valores originales.

Los sistemas termodinámicos son reversibles si su energía interna es función de variables observables únicamente. Si la energía interna es función tanto de variables observables como internas, se trata de sistemas irreversibles.

B.4. Primera Ley de la Termodinámica. Balance Energético

La primera ley de la termodinámica establece mediante un axioma el principio de conservación de la energía. Suponiendo que la energía se entrega al sistema (o cuerpo) mediante trabajo mecánico y transmisión de calor, se expresa la ecuación de balance entre las tasas de energía interna \dot{E} y energía cinética \dot{K} , y el trabajo mecánico P y calórico Q

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q \quad (\text{B.1})$$

Se considera una porción arbitraria de materia en un sistema continuo ocupando una región V con borde ∂V y normal \mathbf{n}_s . En el interior de V actúa la fuerza volumétrica $\rho\mathbf{b}$ y en el borde ∂V la fuerza superficial \mathbf{t} . Siendo r la densidad de masa de calor (energía por unidad de masa), ρr el calor suministrado al interior y \mathbf{h} el vector de flujo, el transporte de calor en la superficie se define como $\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{h}$. Todas estas variables se grafican esquemáticamente en la Figura B.1.

Si se consideran además la densidad de energía e y el vector de desplazamientos \mathbf{u} , se

obtienen

$$E = \int_V \rho e dV \quad (\text{B.2})$$

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 dV \quad (\text{B.3})$$

$$P = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \quad (\text{B.4})$$

$$Q = \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}_s dV \quad (\text{B.5})$$

Considerando la relación de Cauchy, el vector de tensiones \mathbf{t} en el borde ∂V en términos de las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, vale

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_s \quad (\text{B.6})$$

Aplicando el teorema de Green para transformar la integral de borde de ec. (B.4) en integral de volumen, se obtiene

$$P = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV = \int_V (\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \quad (\text{B.7})$$

donde, aprovechando la simetría del tensor de tensiones $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, se considera $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

Del mismo modo, la ec. (B.5) se transforma en

$$Q = \int_V (\rho r - \nabla \cdot \mathbf{h}) dV \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo las eqs. (B.7) y (B.8) en (B.1), la ecuación de balance energético se expresa como

$$\int_V \rho \dot{e} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = \int_V (\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV + \int_V (\rho r - \nabla \cdot \mathbf{h}) dV \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo la ecuación del movimiento

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.10})$$

en la ec. (B.9), se obtiene la forma integral o débil de la ecuación de la energía

$$\int_V (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho r + \nabla \cdot \mathbf{h}) dV = 0 \quad (\text{B.11})$$

Como la ec. (B.11) debe ser válida para cualquier región arbitraria del dominio V , se formula la forma fuerte de la ecuación de la energía

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{h} \quad (\text{B.12})$$

que puede simplificarse de acuerdo a

$$\rho \dot{e} = p + pq \quad , \quad p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad q = r - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{h} \quad (\text{B.13})$$

donde p y q pueden ser interpretados como fuerzas mecánicas y calóricas respectivamente.

B.5. Segunda Ley de la Termodinámica. Desigualdad de la Entropía

La primera ley de la termodinámica establece que la energía puede transformarse en diferentes formas (interna, cinética) pero no dice nada respecto de la dirección de dicha conversión. La información necesaria para determinarla está dada por la segunda ley de la termodinámica, ligada al concepto de entropía. La entropía es una función de estado que no puede ser medida ni observada físicamente y que se puede definir como una medida de la probabilidad de encontrar estados desordenados. En medios continuos su existencia ha sido probada matemáticamente por Valanis (1971)(121).

B.5.1. Desigualdad de la Entropía en Sistemas Irreversibles

Considerando la densidad de energía interna e como una función de estado de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y la temperatura θ y suponiendo la existencia de una función de entropía S

$$S = \int_B \rho s dV \quad (\text{B.14})$$

donde $s = s(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta)$ es la densidad de entropía (entropía por unidad de masa), se define el flujo de entropía Q_θ como

$$Q_\theta = \int_V \frac{\rho r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}_s}{\theta} d(\partial V) \quad , \quad (\text{B.15})$$

y se establece la segunda ley de la termodinámica

$$\dot{S} - Q_\theta \geq 0 \quad (\text{B.16})$$

Sustituyendo las ecs. (B.14) y (B.15) en (B.16) y transformando la integral de superficie de (B.15) en integral de volumen, se obtiene la desigualdad de Clausius-Duhem

$$\int_B \left[\rho \dot{s} - \frac{\rho r}{\theta} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{\theta} \right) \right] dV \geq 0 \quad (\text{B.17})$$

Recordando que $\theta > 0$, se formula la forma fuerte de la ec. (B.17) de acuerdo a

$$\rho \theta \dot{s} - \rho r + \theta \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{\theta} \right) = \rho \theta \dot{s} - pq - \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta}{\theta} \geq 0 \quad (\text{B.18})$$

donde q es la fuerza calórica definida en la ec. (B.13). Sustituyendo la misma en la ec. (B.18) se obtiene

$$\rho \theta \dot{s} \geq \rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta}{\theta} \quad (\text{B.19})$$

Aún cuando no haya entrada de calor en todo el cuerpo, cuando $Q = 0$ (ó $q = 0$), debe ser $S \geq 0$ (ó $\dot{s} \geq 0$) debido a la posibilidad de conducción de calor distinta de cero ($\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ en ec. (B.18)).

Se analizan a continuación las implicancias de la desigualdad (B.19). De acuerdo a Simo y Miehe (1992)(122), un estado queda determinado mediante la deformación elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$, la entropía elástica $s^e = s - s^p$ y las variables internas q_α .

Considerando el caracter no local de las variables internas, tanto q_α como $\boldsymbol{\nabla} q_\alpha$ aparecen como argumentos de la energía interna $e = e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, s^e, q_\alpha, \boldsymbol{\nabla} q_\alpha)$. Esta tasa de esta magnitud resulta

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial e}{\partial s^e} \dot{s}^e + \sum_\alpha \frac{\partial e}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial e}{\partial (\boldsymbol{\nabla} q_\alpha)} \cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{q}_\alpha \quad (\text{B.20})$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (B.19) se obtiene

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\rho \theta - \rho \frac{\partial e}{\partial s^e} \right) \dot{s} + \rho \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \rho \frac{\partial e}{\partial s^e} \dot{s}^p - \sum_\alpha \rho \frac{\partial e}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha - \sum_\alpha \rho \frac{\partial e}{\partial (\boldsymbol{\nabla} q_\alpha)} \cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{q}_\alpha - \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta}{\theta} \geq 0 \quad (\text{B.21})$$

Esta desigualdad debe valer para cualquier proceso termodinámico independiente. A partir de esta consideración se deducen las ecuaciones constitutivas de Coleman

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad , \quad \theta = \frac{\partial e}{\partial s^e} \quad , \quad D_m + D_t \geq 0 \quad (\text{B.22})$$

con la notación

$$D_m = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \rho \theta \dot{s}^p + \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^{(b)} \dot{q}_{\alpha} \quad , \quad D_t = -\frac{1}{\theta} \mathbf{h} \cdot \nabla \theta \quad (\text{B.23})$$

D_m representa la disipación de energía mecánica y D_t la correspondiente a energía térmica. Las tensiones disipativas Q_{α} en el volumen V , energéticamente conjugadas con q_{α} , se definen como

$$Q_{\alpha} = -\rho \frac{\partial e}{\partial q_{\alpha}} + \theta \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\theta} \frac{\partial e}{\partial (\nabla q_{\alpha})} \right) \quad (\text{B.24})$$

y en el borde ∂V

$$Q_{\alpha}^{(b)} = -\mathbf{n}_s \cdot \rho \frac{\partial e}{\partial (\nabla q_{\alpha})} \quad (\text{B.25})$$

B.5.2. Variables de Estado de Sistemas Irreversibles

En un sistema irreversible un estado termodinámico no queda completamente definido con los valores de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y entropía s (o $\boldsymbol{\varepsilon}$ y θ). Se requiere un set de variables internas como argumentos independientes de la energía interna e , ellos pueden ser:

- La deformación plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, componente de la deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- La entropía de la configuración plástica s^p , componente de la densidad de entropía total.
- Variables internas auxiliares q_{α} que representan cambios microestructurales irreversible que no pueden ser descriptos por $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ o s^p . Ejemplos típicos de q_{α} son la variables de endurecimiento y ablandamiento en plasticidad.

B.6. Potenciales Termodinámicos. Relaciones Constitutivas de Coleman

Hasta aquí, a partir del potencial de densidad de energía interna $e = e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, s^e, q_{\alpha}, \nabla q_{\alpha})$ fueron obtenidas las ecuaciones de Coleman en las ec. (B.22), (B.24) y (B.25)

Dependiendo de la elección de las variables de estado independientes, es posible definir otros potenciales a través de transformaciones de Legendre, como la densidad de energía libre de

Helmholtz, definida por la transformación

$$\psi = e - \theta s^e \quad (\text{B.26})$$

de la que se obtienen las relaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad , \quad s^e = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{B.27})$$

$$Q_{\alpha} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}} + \theta \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla q_{\alpha})} \right) \quad (\text{B.28})$$

$$Q_{\alpha}^{(b)} = -\mathbf{n}_s \cdot \rho \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla q_{\alpha})} \quad (\text{B.29})$$

B.7. Aplicaciones al Campo de la Elastoplasticidad Local

En esta sección se aplican conceptos termodinámicos al campo de la elastoplasticidad local isotérmica, donde la temperatura θ se considera un parámetro constante.

Se establece el principio fundamental de máxima disipación plástica, que conduce a leyes de normalidad y a los criterios de carga plástica.

B.7.1. Ecuaciones Constitutivas

En primer lugar se recuerda la descomposición aditiva de deformaciones de la elastoplasticidad dada por la relación $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$, donde el tensor de deformaciones plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ representa una variables interna. Las otras variables internas de estado, denominadas κ_{α} con $\alpha = 1, 2, \dots$ son las variables de endurecimiento y ablandamiento, escalares en el caso de comportamiento plástico isótropo.

La energía libre para elastoplasticidad isotérmica, suponiendo el comportamiento elástico lineal definido por el tensor elástico constante de cuarto orden \mathbf{E}^e , es

$$\rho \psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \rho \psi^p(\kappa_{\alpha}) \quad (\text{B.30})$$

siendo $\rho \psi^p(\kappa_{\alpha})$ una función arbitraria de las variables de estado. La ecuación constitutiva para las tensiones totales, obtenida aplicando la ec. (B.27) es

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{B.31})$$

Las tensiones disipativas, denominadas K_α , están energéticamente conjugadas con el set de variables internas κ_α . Despreciando el término de gradientes de la ec. (B.28), se calculan como

$$K_\alpha = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_\alpha} \quad (\text{B.32})$$

y las tensiones disipativas en el borde $K_\alpha^{(b)}$ resultan nulas.

Con esta notación, la desigualdad de la disipación plástica de la ec. (B.23) se expresa como

$$D = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \sum_\alpha \kappa_\alpha \dot{\kappa}_\alpha \geq 0 \quad (\text{B.33})$$

B.7.2. Superficie de Fluencia - Leyes de Endurecimiento y Ablandamiento

La plasticidad clásica está basada en la existencia de una superficie de fluencia convexa en el espacio de tensiones. Dentro de ella los estados tensionales son elásticos y la respuesta reversible. Definida la función de dicha superficie $F(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha)$, los estados plásticos admisibles que pertenecen a B deben cumplir la condición

$$B = \{\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha \mid F(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha) \leq 0\} \quad (\text{B.34})$$

El cambio de tamaño de la superficie en espacio de tensiones debido a la evolución de K_α , se denomina endurecimiento o ablandamiento, según sea de expansión o contracción.

La pendiente de endurecimiento o ablandamiento queda determinada por el módulo $H_{\alpha,\beta}^p$, definido como

$$H_{\alpha,\beta}^p = -\frac{\partial K_\alpha}{\partial \kappa_\beta} = \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \kappa_\alpha \partial \kappa_\beta} \quad (\text{B.35})$$

Si $H_{\alpha,\beta}^p$ es definido positivo, la respuesta corresponde a comportamiento de endurecimiento, de lo contrario a ablandamiento.

B.8. Principio de la Máxima Disipación Plástica para Flujo Plástico Asociado

De acuerdo a la ec. (B.33) la función de disipación se expresa como

$$D(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \sum_\alpha \bar{K}_\alpha \dot{\kappa}_\alpha \quad \text{para } (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) \in B \quad (\text{B.36})$$

El principio de la máxima disipación plástica indica que los valores $(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha)$ satisfacen la condición de disipación máxima si

$$(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha) = \arg [\text{Máx } D(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) \quad , \quad \forall (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) \in B] \quad (\text{B.37})$$

Otra forma equivalente de expresarlo es la denominada desigualdad variacional

$$D(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha) - D(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) \geq 0 \quad , \quad \forall (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) \in B \quad (\text{B.38})$$

B.8.1. Desigualdad de la Disipación

El cumplimiento del principio de la máxima disipación plástica implica la verificación de la desigualdad de Clausius-Duhem de la ec. (B.17). Esto se debe a que B contiene el origen del espacio de tensiones disipativas. Eligiendo $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) = (\mathbf{0}, 0)$ en la ec. (B.37), se concluye que $D(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha) \geq 0$. Esta es la principal consecuencia del principio de la máxima disipación.

B.8.2. Regla de la Normalidad

Considerando un estado $(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha) \in B$, se reformula la desigualdad de la ec. (B.37) como

$$(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \sum_\alpha (K_\alpha - \bar{K}_\alpha) \dot{\kappa}_\alpha \geq 0 \quad , \quad \forall (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{K}_\alpha) \in B \quad (\text{B.39})$$

y se deduce que el par $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\kappa}_\alpha)$ debe estar orientado en dirección normal a la superficie de fluencia. Esta dirección es única si la superficie es uniforme.

En el caso de flujo plástico asociado, las leyes de flujo y endurecimiento o ablandamiento valen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_\alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{B.40})$$

$$\dot{\kappa}_\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_\alpha)}{\partial K_\alpha} \quad (\text{B.41})$$

mientras el multiplicador plástico se determina con las condiciones complementarias

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_\alpha) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_\alpha) = 0 \quad (\text{B.42})$$

En el caso de flujo plástico no asociado se verifica que la regla de normalidad se establece con el potencial plástico Q [ver Runesson (1998)(123)]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_\alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{B.43})$$

$$\dot{\kappa}_\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_\alpha)}{\partial K_\alpha} \quad (\text{B.44})$$

B.9. Elastoplasticidad de Gradientes Termodinámicamente Consistente

Todos los principios y reglas enunciados hasta aquí son válidos también para la elastoplasticidad basada en teoría de gradientes superiores de deformaciones. La energía libre de deformación total se calcula como

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \rho\psi^p(\kappa_\alpha) + \rho\psi^g(\nabla\kappa_\alpha) \quad , \quad \nabla\kappa_{\alpha i} = \frac{\partial\kappa_\alpha}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.45})$$

siendo $\rho\psi^g(\nabla\kappa_\alpha)$ una función arbitraria del gradiente de las variables de estado, en la que se incorpora una longitud interna de gradientes l_c que caracteriza a la microestructura del material y fija a su vez el tamaño final de la zona de localización de deformaciones plásticas.

En cuanto al cálculo tensiones disipativas, debe considerarse el término adicional de gradientes. Utilizando la notación K_α en lugar de Q_α , la ec. (B.28) se reescribe como

$$K_\alpha = -\rho \frac{\partial\psi^p}{\partial\kappa_\alpha} + \nabla \cdot \left[\rho \frac{\partial\psi^g}{\partial(\nabla\kappa_\alpha)} \right] \quad (\text{B.46})$$

y las tensiones disipativas en el borde $K_\alpha^{(b)}$, se calculan a partir de la ec. (B.29) como

$$K_\alpha^{(b)} = -\mathbf{n}_s \cdot \rho \frac{\partial\psi^g}{\partial(\nabla\kappa_\alpha)} \quad (\text{B.47})$$

Así como en elastoplasticidad local el comportamiento de endurecimiento y ablandamiento quedaba determinado por un módulo $H_{\alpha,\beta}^p$, la elastoplasticidad de gradientes depende del tensor de gradientes definido positivo $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}^g$, calculado como

$$\mathbf{H}_{\alpha,\beta}^g = \rho \frac{1}{l_c} \frac{\partial^2\psi^g}{\partial(\nabla\kappa_\alpha) \otimes \partial(\nabla\kappa_\alpha)} \quad (\text{B.48})$$

Por otro lado, la disipación plástica D_m , de acuerdo a la ec. (B.23), vale

$$D_m = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \sum_\alpha \kappa_\alpha \dot{\kappa}_\alpha + \sum_\alpha \nabla K_\alpha^{(b)} \dot{\kappa}_\alpha \geq 0 \quad (\text{B.49})$$