

Tesis de Doctorado en Matemática

Agosto 2025

Construcción de álgebras de Lie rígidas a partir de álgebras de Lie semisimples

Mg. Estela Fátima Fernández

Doctorado en Ciencias Exactas e Ingeniería

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

Universidad Nacional de Tucumán

San Miguel de Tucumán - 2025, Argentina

Construcción de álgebras de Lie rígidas a partir de álgebras de Lie semisimples

*Tesis presentada en cumplimiento parcial de los requisitos
para la obtención del título de*

Doctora en Ciencias Exactas e Ingeniería

por

Estela Fátima Fernández

Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería

Universidad Nacional de Tucumán

Argentina

Agosto 2025

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un método para construir nuevas álgebras de Lie algebraicamente rígidas de dimensión finita sobre el campo complejo, es decir, aquellas que satisfacen la condición cohomológica $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$. Se determinan condiciones bajo las cuales ciertas álgebras conocidas del tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes V,$$

donde \mathfrak{s} es semisimple y V es una representación de \mathfrak{s} , son algebraicamente rígidas. A partir de estas estructuras iniciales, se estudian deformaciones de extensiones del tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes V \oplus \mathbb{C},$$

que en general no son rígidas, con el objetivo de obtener nuevas estructuras algebraicamente rígidas.

El método ha sido validado con éxito en distintos casos, en particular cuando $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2$. Para el análisis de ejemplos concretos se emplearon herramientas computacionales como Maple, lo que permitió explorar sistemáticamente casos específicos y obtener tanto resultados particulares como patrones generales. Además, este enfoque permitió recuperar y extender resultados previamente establecidos por Richardson (1967), Carles (1985) y Yao Folly-Aziamagnon en su tesis doctoral bajo la dirección de Michel Goze.

DEDICACIONES

A mi familia, especialmente a mis padres, esposo e hijos.

A mis padres, por haberme criado en un entorno lleno de afecto, buenos hábitos y sólidos valores, lo que me permitió rodearme de personas nobles y generosas.

A mi padre y a mis hermanos, que desde el cielo me guían e inspiran a seguir adelante en los momentos más difíciles.

A mi esposo, por allanar el camino y acompañarme con amor y paciencia en cada paso de mi crecimiento profesional.

Y a mis hijos, quienes han sido mi mayor fuente de inspiración y fortaleza, impulsándome a no rendirme y a seguir persiguiendo lo que me apasiona, con el anhelo de ser siempre su guía.

AGRADECIMIENTOS

A mi director y mentor, el Dr. Paulo Tirao, por su guía constante y generoso acompañamiento.

A mi compañera y amiga, Isabel Lomas, por su apoyo incondicional y su confianza a lo largo de este proceso.

A la Universidad Nacional, por el respaldo económico que hizo posible un avance sustancial en esta tesis, y a todas aquellas personas que, de una u otra forma, contribuyeron a que esto se hiciera realidad.

TABLA DE CONTENIDOS

Introducción		viii
I Álgebras de Lie		5
1 Preliminares		7
2 Algunas clases destacadas de álgebras de Lie		11
2.1 Álgebras de Lie simples y su clasificación		11
2.2 Álgebras de Lie solubles y nilpotentes		12
2.3 Álgebras de Lie semisimples		13
3 Representaciones de álgebras de Lie		15
3.1 Producto semidirecto		18
3.2 Descomposición de Levi		18
3.3 Representaciones de álgebras de Lie semisimples		19
3.3.1 Representaciones de \mathfrak{sl}_n		21
3.3.2 Descomposición de productos tensoriales y exteriores de orden 2 de representaciones		25
3.3.3 Irreducibles destacables en la descomposición de $\Lambda^2(V(\lambda))$		26
4 Cohomología de álgebras de Lie		29
4.1 Algunos resultados conocidos		30
4.2 Cohomología de productos semidirectos		33
II Álgebras de Lie rígidas		35
5 La variedad de álgebras de Lie		37
5.1 Corchetes de Lie		37
5.2 La variedad $\mathcal{L}(n)$		37
5.3 Deformaciones de álgebras de Lie		38
6 Rigidez		39
6.1 Rigidez topológica		39

6.2	Rigidez algebraica	39
7	Dos familias de álgebras de Lie rígidas conocidas	41
7.1	La familia de Richardson [R]	41
7.2	La familia de Carles [C]	42
III	Deformaciones algebraicamente rígidas	43
8	La familia $\mathfrak{sl}_n \ltimes \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}$	45
9	La familia $\mathfrak{sl}_2 \ltimes V \oplus \mathbb{C}$	51
9.1	Casos V irreducible	51
9.2	Casos V reducible con dos módulos irreducibles	63
9.2.1	De dimensiones pares	63
9.2.2	Dos irreducibles de dimensiones par e impar	75
9.3	Caso reducible con múltiples módulos irreducibles	79
10	Otras familias	85
10.1	El caso $\mathfrak{sl}_3 \ltimes V \oplus \mathbb{C}$	85
10.2	El caso $\mathfrak{sl}_4 \ltimes V \oplus \mathbb{C}$	86
11	Ejemplos con Maple	89
12	Un teorema general	115
12.1	Caso V irreducible	115
12.2	Caso $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, con V_i irreducible	118
IV	Bibliografía y referencias	123

INTRODUCCIÓN

Uno de los pilares fundamentales de la investigación científica es la clasificación, entendida como el proceso de organizar objetos en clases o grupos. Desde épocas antiguas hasta la actualidad, filósofos y científicos han jugado un papel central en el desarrollo de sistemas clasificatorios. A pesar del avance teórico y tecnológico, muchos de los enfoques actuales aún se basan en el análisis de semejanzas entre los objetos que componen los datos empíricos.

En el contexto matemático, clasificar implica definir una relación de equivalencia R sobre un conjunto E , lo cual da lugar al conjunto cociente E/R , formado por las clases de equivalencia. Este conjunto puede, a su vez, admitir una estructura jerárquica. La comparación entre elementos de E suele realizarse mediante el uso de invariantes, que permiten distinguir entre las distintas clases.

Dentro de la teoría de álgebras de Lie, el estudio de la variedad de todas las álgebras de Lie de una dimensión dada constituye un problema de gran interés, sobre el cual aún se conoce relativamente poco. En este marco, las llamadas álgebras rígidas ocupan un lugar destacado.

Para formalizar esta noción, consideremos una estructura de álgebra $\mu \in \text{Hom}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ sobre el espacio vectorial \mathbb{C}^n . El conjunto L_n de todas las estructuras de Lie de dimensión n puede identificarse con un subconjunto algebraico de ese espacio. El grupo $GL(n, \mathbb{C})$ actúa sobre L_n por cambio de base:

$$g \cdot \mu(x, y) = g(\mu(g^{-1}x, g^{-1}y)), \quad g \in GL(n, \mathbb{C}), \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

La órbita de μ es

$$O_\mu = \{g \cdot \mu \mid g \in GL(n, \mathbb{C})\},$$

agrupando todas las estructuras isomorfas a μ . Se dice que μ es rígida si su órbita es abierta en la topología de Zariski (entonces también lo es en la topología euclidiana). Esto equivale a afirmar que toda álgebra de Lie suficientemente cercana a μ (en el sentido de dicha topología) es isomorfa a ella. La clausura de la órbita de una álgebra de Lie rígida —que incluye tanto a μ como a las álgebras obtenidas por procesos de contracción o degeneración— constituye una componente irreducible de la variedad, L_n , que parametriza las estructuras de álgebras de Lie. Por esta razón, el estudio de las álgebras de Lie rígidas adquiere una importancia central dentro de los problemas de clasificación.

Determinar si una álgebra de Lie es rígida es, en general, una tarea altamente no trivial. Sin embargo, existen ciertos criterios algebraicos que permiten detectar la rigidez en casos específicos. Por ejemplo, se sabe que las álgebras de Lie (semi)simples son rígidas, ya que

su segundo grupo de cohomología con coeficientes en la representación adjunta - un invariante algebraico- es igual a cero. Por lo tanto, una subclase particularmente importante es la de las álgebras de Lie algebraicamente rígidas, que pueden identificarse mediante este invariante algebraico: su cohomología.

La cohomología de una álgebra de Lie constituye un invariante algebraico de naturaleza multilineal, que se obtiene a partir de un complejo definido en el álgebra exterior. En particular, si se verifica que $H^2(\mu, \mu) = 0$, entonces μ es rígida, y se dice que es algebraicamente rígida.

En el contexto de esta tesis, existen en la bibliografía dos familias bien estudiadas de álgebras de Lie rígidas, no solubles.

- Por un lado Richardson, (1967) [R], analizó productos semidirectos $\mathfrak{s} \ltimes V$, donde \mathfrak{s} es un álgebra de Lie semisimple y V una representación irreducible de \mathfrak{s} , obteniendo criterios de rigidez según la dimensión. Por ejemplo, cuando $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2$ y $V = \mathbb{C}^n$, resultan rígidas salvo para $n = 3, 5, 7, 11$. Además, si n es par, estas álgebras resultan algebraicamente rígidas.
- Por otro lado Carles, (1985) [C], presentó ejemplos que pueden describirse como sumas directas de la forma: $\mathfrak{g} = (\mathfrak{s} \oplus \mathbb{C}) \ltimes V$, donde \mathfrak{s} es simple, V es una representación irreducible de \mathfrak{s} , y \mathbb{C} actúa sobre V mediante la identidad. Estas álgebras de Lie son completas ($H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$) y tienen nilradical abeliano, no nulo. Se ha probado que estas estructuras son algebraicamente rígidas en todos los casos.

Asimismo, la familia $\mathfrak{sl}_2 \ltimes (\mathbb{C}^j \oplus \mathbb{C}^k)$, con \mathbb{C}^j y \mathbb{C}^k irreducibles de \mathfrak{sl}_2 , fue estudiada por Yao Folly-Aziamagnon en su tesis doctoral (1997), bajo la dirección de Michel Goze, encontrando que algunas de estas álgebras son algebraicamente rígidas, particularmente cuando j y k son pares.

Este trabajo se inserta en ese contexto teórico y propone un nuevo método para construir álgebras de Lie algebraicamente rígidas. El procedimiento parte de identificar condiciones bajo las cuales es posible construir álgebras de Lie, algebraicamente rígidas, del tipo $\mathfrak{s} \ltimes V$, con \mathfrak{s} semisimple y V una representación (no necesariamente irreducible), luego considera extensiones del tipo $\mathfrak{s} \ltimes V \oplus \mathbb{C}$. Estas extensiones, que en general no son rígidas, se someten a un análisis de deformaciones para detectar nuevas condiciones que nos aseguren casos de rigidez.

Este método ha demostrado ser efectivo en muchos casos, produciendo álgebras de Lie algebraicamente rígidas no documentadas. Por ejemplo en el caso $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2$, con diversas representaciones V se obtuvieron resultados como:

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}$, con \mathbb{C}^{2k} irreducible.

En este caso $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 2$ y existen dos cociclos σ_1 y σ_2 tales que las correspondientes deformaciones de \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}(\sigma_1)$ y $\mathfrak{g}(\sigma_2)$ son algebraicamente rígidas. Es importante notar que la primera es de tipo Carles y la segunda no. Más aún, $\mathfrak{g}(\sigma_2)$ no es completa ($H^1(\mathfrak{g}(\sigma_2), \mathfrak{g}(\sigma_2)) \neq 0$, $H^0(\mathfrak{g}(\sigma_2), \mathfrak{g}(\sigma_2)) \neq 0$) y su nilradical no es abeliano. El cociclo σ_2 es un corchete de Heisenberg.

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^j \oplus \mathbb{C}^k) \oplus \mathbb{C}$, con \mathbb{C}^j y \mathbb{C}^k irreducibles.

a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}^{2k}) \oplus \mathbb{C}$, $0 < j \leq k$. En estos casos resulta que $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 4, 7$ (si $j \neq k$ o si $j = k$ respectivamente) y para $k > 1$ existe un cociclo σ tal que la correspondiente deformación es algebraicamente rígida no completa con nilradical nilpotente no abeliano. En el caso $k = 1$ el álgebra de Lie, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}$, fue estudiada y tiene una deformación algebraicamente rígida no completa con nilradical nulo.

b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}^{4k+1}) \oplus \mathbb{C}$, con $k < j$. En este caso $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 3$ y existe un cociclo σ tal que la correspondiente deformación es algebraicamente rígida no completa con nilradical nilpotente no abeliano.

3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}) \oplus \mathbb{C}$, con \mathbb{C}^{2k_i} irreducibles y a lo sumo un $k_i = 1$.

En este caso $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \geq 2m$ y existe un cociclo σ tal que la correspondiente deformación es algebraicamente rígida no completa con nilradical nilpotente no abeliano.

Para el análisis de ejemplos concretos se emplearon herramientas computacionales como Maple, esto fue clave para realizar numerosos experimentos sistemáticamente, que permitieron identificar los primeros casos positivos. No obstante, la capacidad de análisis computacional se ve limitada a álgebras de dimensión menor que 12, con tiempos de cómputo que pueden alcanzar varios días. Los patrones observados sugerían una estructura recurrente que abrió la posibilidad a generalizaciones, aunque se identificaron casos particulares y excepciones. Además, se estudiaron otros ejemplos que, si bien no forman parte de una clasificación general por el momento, arrojaron resultados particulares de interés.

Cabe destacar que las álgebras semisimples que cumplen con las condiciones propuestas ya son bien conocidas. También se demostró que bajo estas condiciones, $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times V \oplus \mathbb{C}$ admite otra deformación algebraicamente rígida, perteneciente al tipo Cartan.

Las técnicas empleadas para calcular la cohomología son idénticas en todos los casos, y se basan en tres herramientas fundamentales:

- Una consecuencia de la sucesión espectral de Hochschild-Serre, que facilita descomponer el cálculo cohomológico en etapas más manejables.
- La teoría de representaciones de álgebras semisimples, que permite entender cómo se descompone una representación en irreducibles.
- El Lema de Schur, que garantiza que cualquier morfismo entre representaciones irreducibles debe ser trivial o un múltiplo escalar de la identidad.

Aunque estas herramientas son estándar en la literatura —como las empleadas por Richardson y consideradas en diversos artículos, por ejemplo [R, C, F, BW1, BW2], su aplicación efectiva requiere un dominio profundo. Los cálculos en los casos deformados resultan más complejos que en las estructuras de partida.

En resumen, este enfoque ofrece una vía sistemática para la exploración y construcción de nuevas familias de álgebras de Lie algebraicamente rígidas, ampliando el conocimiento existente y trazando nuevas líneas de investigación en el área.

Parte I

Álgebras de Lie

PRELIMINARES

En los primeros capítulos se exponen los conceptos fundamentales de álgebra de Lie que son necesarios para el desarrollo de esta tesis. Se incluyen definiciones básicas, ejemplos ilustrativos y resultados clásicos relevantes que serán utilizados en los capítulos posteriores. El tratamiento se presenta de manera lo más autocontenida posible, con el fin de facilitar la comprensión sin requerir una revisión exhaustiva de la literatura especializada. Se considerarán espacios vectoriales complejos de dimensión finita a lo largo de todo el trabajo.

Definiciones y primeros ejemplos

Definición 1.1. Un espacio vectorial \mathfrak{g} con una operación bilineal, llamada corchete, $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, se denomina *álgebra de Lie* si se cumplen los siguientes axiomas:

- A1. $[x, y] = -[y, x]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.
- A2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$, para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (*Identidad de Jacobi*).

Observemos que, como el campo es \mathbb{C} , A1 implica A1': $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Ejemplos 1.2.

- *Álgebra de Lie lineal general:* $\mathfrak{gl}(n)$. El espacio de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en \mathbb{C} y el corchete, *conmutador*, dado por

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x, \quad \text{con } x \text{ e } y \in \mathfrak{gl}(n).$$

- *El álgebra de Lie:* \mathfrak{sl}_2 . El subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}(2)$ de las matrices de traza cero con el conmutador de matrices.

- *Endomorfismos de V* : $\mathfrak{gl}(V)$. El espacio de las transformaciones lineales de V en V , con el corchete dado por

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f, \quad \text{con } f, g \in \mathfrak{gl}(V).$$

- *Álgebra de Lie abeliana*. \mathbb{C}^n con el corchete idénticamente nulo.
- *Álgebras de Lie de dimensión 2*. Dado un espacio vectorial V con base $\{x, y\}$, existen dos álgebras de Lie con espacio subyacente V , la abeliana o la de corchete definido por $[x, y] = x$.
- *Álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m + 1$* : \mathfrak{h}_m . El espacio vectorial con base $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z\}$ y el corchete definido por $[x_i, y_i] = z$.
- *Álgebra de Lie suma directa o producto directo*: $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Dadas \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 dos álgebras de Lie. El espacio $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ y el corchete dado por $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$, con $x_i, y_i \in \mathfrak{g}_i$. Cuando $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, con \mathfrak{g}_2 abeliana diremos que \mathfrak{g}_2 es un factor abeliano de \mathfrak{g} .

Conceptos adicionales

Definiciones 1.3.

- (i) Una transformación lineal $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$, con \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie, es un *homomorfismo de álgebras de Lie* si $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}_1$.

Si además f es biyectiva diremos que f es un *isomorfismo* y que \mathfrak{g}_1 es isomorfa a \mathfrak{g}_2 ($\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$).

- (ii) Dada el álgebra de Lie \mathfrak{g} , el *centro* de \mathfrak{g} es

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}.$$

Dados A y B subconjuntos del álgebra de Lie \mathfrak{g} , indicaremos con $[A, B]$ al subespacio generado por $\{[a, b] \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$.

- (iii) Un subespacio \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una *subálgebra de Lie* de \mathfrak{g} si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.
- (iv) Un subespacio I de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un *ideal* de \mathfrak{g} si $[\mathfrak{g}, I] \subset I$.
- (v) Dada una subálgebra \mathfrak{h} de una álgebra de Lie \mathfrak{g} , el *normalizador* de \mathfrak{h} es

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

- (vi) *Álgebra de Lie cociente*. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y \mathfrak{h} un ideal de \mathfrak{g} . En el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, con el corchete dado por $[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]}$, está bien definido y donde \bar{x} denota la clase de x .

Ejemplos 1.4.

- Si la $\dim(V) = n$, $\mathfrak{gl}(n) \simeq \mathfrak{gl}(V)$.
- Existen, salvo isomorfismo, solo dos álgebras de Lie de dimensión 2, presentadas en los Ejemplos 1.2.
- Si el álgebra de Lie es abeliana, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.
- Una subálgebra es en sí misma un álgebra de Lie. $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de \mathfrak{g} .
- El conjunto de matrices de traza cero de $\mathbb{C}^{n \times n}$, \mathfrak{sl}_n , es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$.
- El $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal de \mathfrak{g} . Los ideales de un álgebra de Lie son subálgebras. *Ideales triviales* de \mathfrak{g} son 0 y \mathfrak{g} .
- El núcleo de un homomorfismo es un ideal del dominio.

ALGUNAS CLASES DESTACADAS DE ÁLGEBRAS DE LIE

2.1 Álgebras de Lie simples y su clasificación

Definición 2.1. Decimos que un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *simple* si su dimensión es mayor que uno y no contiene ideales no triviales.

Ejemplo 2.2. Un ejemplo clásico de álgebra de Lie simple es \mathfrak{sl}_2 , que tiene dimensión 3. Consideremos la base estándar formada por las matrices

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los corchetes entre estos elementos satisfacen las relaciones:

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y.$$

Supongamos que existe un ideal no trivial $I \subset \mathfrak{sl}_2$. Entonces, cualquier elemento de I puede escribirse como una combinación lineal

$$ax + by + ch, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Calculamos los corchetes

$$[x, ax + by + ch] = bh - 2cx \in I,$$

$$[y, ax + by + ch] = -ah + 2cy \in I.$$

Si $a \neq 0$, entonces $y \in I$, luego $I = \mathfrak{sl}_2$. De forma análoga, si $b \neq 0$, $I = \mathfrak{sl}_2$. Por lo tanto, para que I sea un ideal propio, debe darse $a = b = 0$. En este caso, $ch \in I$, y nuevamente $I = \mathfrak{sl}_2$.

Así, la única posibilidad es que I sea 0 o todo \mathfrak{sl}_2 , lo que demuestra que \mathfrak{sl}_2 es simple.

Uno de los resultados más importantes en la teoría de álgebras de Lie es la clasificación completa de las álgebras simples de dimensión finita sobre \mathbb{C} , atribuida principalmente a Killing y a Cartan. Aunque el álgebra general de matrices $\mathfrak{gl}(n)$ no es simple, su subálgebra \mathfrak{sl}_n sí lo es, y da lugar a la primera familia de álgebras simples, llamada de tipo A: para cada natural $n \geq 1$,

$$A_n : \mathfrak{sl}_{n+1}.$$

Otras familias, simples, provienen de álgebras de matrices antisimétricas llamadas de tipo B y D,

$$B_n : \mathfrak{so}_{2n+1}, \quad D_n : \mathfrak{so}_{2n}.$$

Una cuarta familia, conocida como tipo C, corresponde al álgebra simpléctica, $C_n : \mathfrak{sp}_{2n}$, formada por matrices de la forma: $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P^t \end{pmatrix}$ con Q y R simétricas. Estas cuatro familias (A, B, C, D) constituyen las familias infinitas de álgebras de Lie simples clásicas. A ellas se suman cinco casos excepcionales, que no pertenecen a ninguna de las familias anteriores: E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2 .

2.2 Álgebras de Lie solubles y nilpotentes

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , se pueden definir dos series de subálgebras descendentes, definidas inductivamente, que permiten estudiar su estructura:

la *serie central descendente* $\{\mathfrak{g}^k\}$, donde

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \quad \text{y} \quad \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] \quad \text{y}$$

la *serie derivada* $\{\mathfrak{g}^{(k)}\}$, dada por

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \quad \text{y} \quad \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$$

Nota. Las subálgebras \mathfrak{g}^k y $\mathfrak{g}^{(k)}$ son ideales en \mathfrak{g} . Más aún si \mathfrak{h} es un ideal de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , $\mathfrak{h}^{(k)}$ también es un ideal en \mathfrak{g} .

Definiciones 2.3. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie.

- (i) \mathfrak{g} es *nilpotente* si $\mathfrak{g}^k = 0$ para algún k .
- (ii) \mathfrak{g} es *soluble* si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para algún k .
- (iii) \mathfrak{g} es *perfecta* si $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$.

Ejemplos 2.4.

- Como $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^k$, toda álgebra de Lie nilpotente es soluble.
- Las álgebras de Lie abelianas son nilpotentes.

2.3 Álgebras de Lie semisimples

En esta sección recolectamos resultados fundamentales clásicos muy conocidos que se los puede encontrar en [Hu].

Definición 2.5. Un álgebra de Lie es *semisimple* si no tiene ideales solubles no triviales.

Un resultado fundamental en esta teoría afirma lo siguiente:

Teorema 2.6. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple. Entonces existen ideales $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_t$ de \mathfrak{g} , simples como álgebra de Lie, tales que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_t$.*

Definición 2.7. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie.

Una subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ se dice que es una *subálgebra de Cartan* si cumple que es nilpotente y es igual a su normalizador.

Teorema 2.8. *Toda álgebra de Lie semisimple tiene subálgebra de Cartan abeliana.*

Dos subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} son isomorfas, este resultado permite definir el *rango* de \mathfrak{g} como la dimensión de una subálgebra de Cartan.

Ejemplo 2.9. Los rangos de las álgebras de Lie simples son:

	Álgebras de Lie simples								
	$A_n : \mathfrak{sl}_{n+1}$	$B_n : \mathfrak{so}_{2n+1}$	$C_n : \mathfrak{sp}_{2n}$	$D_n : \mathfrak{so}_{2n}$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
dim	$n(n+2)$	$n(2n+1)$	$n(2n+1)$	$n(2n-1)$	78	133	248	52	14
rango	$n, n \geq 1$	$n, n \geq 2$	$n, n \geq 3$	$n, n \geq 4$	6	7	8	4	2

REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS DE LIE

El concepto de una representación de un álgebra de Lie surge del deseo de entender estas estructuras abstractas a través de objetos más concretos, como las transformaciones lineales. Es decir, se trata de "representar" una álgebra de Lie como un conjunto de operadores lineales actuando sobre un espacio vectorial.

Definición 3.1. Sea V un espacio vectorial y \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una *representación* de \mathfrak{g} en V es un homomorfismo de Lie.

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

V es el *espacio de la representación* y su dimensión es la dimensión de la representación. Dada una representación de \mathfrak{g} en V y un subespacio W de V , W es *invariante* por ρ si $\rho(\mathfrak{g})(W) \subset W$, para todo $g \in \mathfrak{g}$.

Definición 3.2. Sea $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación, con $V \neq 0$. Se dice que ρ es *irreducible* si V no posee subespacios invariantes propios.

Definición 3.3. Se dice que una representación ρ es *completamente reducible* si V puede descomponerse como suma directa de subespacios:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

donde cada V_i es un subespacio invariante por ρ y la restricción de ρ en V_i es un subespacio irreducible.

Definiciones 3.4.

- (i) *Representación trivial.* La representación trivial es la representación en el espacio de dimensión 1 donde todos los operadores son cero.

(ii) *Representación adjunta.* Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. La función $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ tal que, para todo $x \in \mathfrak{g}$

$$ad(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \text{ definida por } ad(x)(y) = [x, y],$$

define una representación de \mathfrak{g} en \mathfrak{g} .

Dos representaciones, ρ_1 y ρ_2 , de la misma álgebra de Lie \mathfrak{g} en los espacios V_1 y V_2 respectivamente. Se dice que son *representaciones equivalentes* si existe un isomorfismo lineal $P : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\rho_2(x) \circ P = P \circ \rho_1(x)$ para cualquier $x \in \mathfrak{g}$. Viceversa, dada una representación ρ_1 y un isomorfismo lineal P , definiendo ρ_2 a partir de la expresión anterior se obtiene una representación isomorfa a ρ_1 .

Construcción de nuevas representaciones

Suma directa de representaciones Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y ρ_1, \dots, ρ_n representaciones de \mathfrak{g} en V_1, \dots, V_n respectivamente. Definimos una representación en $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ como

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) \text{ tal que } \rho(x) = \rho_1(x) \oplus \dots \oplus \rho_n(x).$$

Producto tensorial de representaciones Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\rho_i, i = 1, \dots, n$ representaciones de \mathfrak{g} en V_i . Definimos una representación en $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ como

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n) \text{ tal que } \rho(x) = \rho_1(x) \otimes I \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes \rho_n(x),$$

donde I representa la identidad en cada uno de los espacios. Para $n = 2$, el producto tensorial es $\rho(x)(u \otimes v) = \rho(x)u \otimes v + u \otimes \rho(x)v$.

A partir de la representación definida sobre el producto tensorial $V^{\otimes k}$, es posible construir representaciones en el producto exterior $\Lambda^k V$. Esta se encuentra naturalmente asociada a la representación sobre el producto tensorial, al surgir como submódulo (o cociente) de este espacio ver [FH].

Representación dual Sea ρ una representación de \mathfrak{g} en V . Definimos una representación ρ^* de \mathfrak{g} en el dual de V, V^* , como $\rho^*(x)(f) = -f \circ \rho(x), f \in V^*$.

Restricción de representaciones Dada una representación ρ de \mathfrak{g} en V y W un subespacio invariante por ρ , es decir $\forall x \in \mathfrak{g} \quad \rho(x)W \subset W$. Definimos una representación de \mathfrak{g} en W como $\rho|_W : x \in \mathfrak{g} \mapsto \rho(x)|_W \in \mathfrak{gl}(W)$.

Cociente de representaciones Dada una representación ρ de \mathfrak{g} en V y $W \subset V$ un subespacio invariante por ρ . Definimos una representación de \mathfrak{g} en V/W como

$$\bar{\rho}|_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/W) \text{ tal que } \rho(x) = \overline{\rho(x)},$$

donde, $\bar{\rho}(x)V/W \rightarrow V/W$ es la única transformación lineal que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(x)} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\overline{\rho(x)}} & V/W \end{array} ,$$

conmute y donde π es la proyección canónica.

Módulos y representaciones de álgebras de Lie

La teoría de representaciones de álgebras de Lie se puede reformular de manera completamente equivalente usando el lenguaje de módulos. En este contexto, un módulo sobre un álgebra de Lie se entiende como un espacio vectorial donde actúan los elementos del álgebra de forma lineal y compatible con su estructura.

Definición 3.5. Un *módulo* sobre un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un espacio vectorial V junto con una operación producto $\mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$, denotada por $(g, v) \mapsto x \cdot v$, que satisface, para $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$, $u, v \in V$ y un escalar λ , las siguientes propiedades:

- $(g_1 + g_2) \cdot v = g_1 \cdot v + g_2 \cdot v$,
- $g_1 \cdot (u + v) = g_1 \cdot u + g_1 \cdot v$,
- $\lambda g_1 \cdot v = g_1 \cdot (\lambda v)$,
- $[g_1, g_2] \cdot v = g_1 g_2 \cdot v - g_2 g_1 \cdot v$.

Nota. Si la acción del \mathfrak{g} -módulo V es nula, decimos que V es un \mathfrak{g} -módulo *trivial*. En un módulo V cada $g \in \mathfrak{g}$ define una aplicación lineal de V , $v \in V \mapsto g \cdot v \in V$. Por las propiedades de módulo, esas aplicaciones lineales definen una representación de \mathfrak{g} en V . Viceversa, dada una representación ρ de \mathfrak{g} en V , dado por $g \cdot v = \rho(g)v$ define un módulo sobre \mathfrak{g} , luego los conceptos de módulo y representación son equivalentes.

Definición 3.6. Un *homomorfismo de \mathfrak{g} -módulos* es una función lineal $\phi : V \longrightarrow W$ tal que $\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Si $W = V$ se dice *endomorfismo* y si ϕ es biyectiva, ϕ es un *isomorfismo de \mathfrak{g} -módulos* en tal caso V y W ofrecen representaciones de \mathfrak{g} equivalentes.

Notación: $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \{\phi \in \text{Hom}(V, W) \mid \phi \text{ es un morfismo de } \mathfrak{g}\text{-módulos}\}$.

Definición 3.7. Dado un \mathfrak{g} -módulo V , un subespacio vectorial W de V se dice *submódulo* de V si para todo $w \in W$ y $x \in \mathfrak{g}$, $x \cdot w \in W$.

El núcleo de un homomorfismo de \mathfrak{g} -módulos es un submódulo. Por lo tanto los teoremas generales de isomorfismos (Teorema del cociente, de la suma e intersección y cociente de cociente) son válidos.

Dada ρ una representación de \mathfrak{g} sobre V (es decir, un \mathfrak{g} -módulo V), un \mathfrak{g} -submódulo de V distinguido es

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V \mid \rho(g)v = 0, \text{ para todo } g \in \mathfrak{g}\},$$

el conjunto de vectores invariantes bajo la acción de \mathfrak{g} .

Si $\phi : V \longrightarrow W$ es un homomorfismo de \mathfrak{g} -módulos, entonces $\phi(V^{\mathfrak{g}}) \subset W^{\mathfrak{g}}$. En particular $\text{Hom}(V, W)^{\mathfrak{g}}$ coincide con $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$.

Lemma 3.1 (Schur). *Sea $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación irreducible. Entonces los únicos endomorfismos de V que conmutan con la imagen de ρ son los múltiplos escalares de la identidad.*

3.1 Producto semidirecto

Definición 3.8. Sean \mathfrak{g} y \mathfrak{h} álgebras de Lie, y sea ρ una representación de \mathfrak{g} en \mathfrak{h} . Se define una nueva estructura de álgebra de Lie en el producto vectorial $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, mediante el corchete dado por:

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2] + \rho(x_1)y_2 - \rho(x_2)y_1),$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, $y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$.

Esta álgebra de Lie se denominada *producto semidirecto* de \mathfrak{g} con \mathfrak{h} mediante la representación ρ , y se denota $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho} \mathfrak{h}$. Cuando la representación ρ es evidente por el contexto, simplemente se escribe $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$.

Tres propiedades destacables de $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho} \mathfrak{h}$, que serán de nuestro interés, son las siguientes: \mathfrak{g} es una subálgebra y \mathfrak{h} es un ideal de $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho} \mathfrak{h}$. La acción de \mathfrak{g} sobre \mathfrak{h} está inducida por ρ :

$$[(x, 0), (0, y)] = (0, \rho(x)(y)).$$

3.2 Descomposición de Levi

Las propiedades de nilpotencia y solubilidad se heredan por subálgebras y por imágenes de homomorfismos. Por definición, un álgebra de Lie \mathfrak{g} es soluble si y solo si existe una sucesión de subálgebras de Lie.

$$0 = \mathfrak{g}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g},$$

tal que cada \mathfrak{g}_{i+1} es un ideal en \mathfrak{g}_i y los cocientes $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ son álgebras de Lie abeliana.

A partir de esta caracterización se deduce que si \mathfrak{h} es un ideal de \mathfrak{g} , entonces \mathfrak{g} es soluble si y solo si \mathfrak{h} y $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son solubles.

En particular, la suma de dos ideales solubles de \mathfrak{g} es de nuevo un ideal soluble, ver [Hu]. Por lo tanto, la suma de todos los ideales solubles de \mathfrak{g} es un ideal soluble maximal, llamado *radical* de \mathfrak{g} , denotado $\text{Rad}(\mathfrak{g})$.

Análogamente, el ideal nilpotente maximal se denomina *nilradical* y se denota $\text{Nil}(\mathfrak{g})$. Luego, por definición, el cociente $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$ es semisimple. Por tanto, cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} es parte de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

donde la primera álgebra es soluble y la última es semisimple, luego como espacios vectoriales

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \text{Rad}(\mathfrak{g}).$$

Teorema 3.9 (Descomposición de Levi). *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces existe una subálgebra semisimple \mathfrak{s} , $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$, tal que*

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{s} \ltimes_{\rho} \text{Rad}(\mathfrak{g}),$$

con ρ la representación adjunta.

Con esta justificación, podemos decir que para estudiar la teoría de representación de un álgebra de Lie arbitraria, tenemos que entender individualmente las álgebras de Lie solubles y semisimples.

3.3 Representaciones de álgebras de Lie semisimples

Teorema 3.10 (Completa Reducibilidad). *Toda representación compleja de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple es completamente reducible.*

A partir de este resultado el estudio de las representaciones de las álgebras de Lie semisimples se reduce al estudio de sus representaciones irreducibles.

Descomposición de Cartan

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple. Por teorema 2.8, \mathfrak{g} admite una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, que es abeliana y está formada por elementos diagonalizables bajo la representación adjunta. La acción de \mathfrak{h} sobre cualquier representación de \mathfrak{g} es completamente diagonalizable. Aplicando este hecho a la representación adjunta se obtiene una descomposición de \mathfrak{g} , como suma directa:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

donde, $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ es un conjunto finito de funcionales lineales distintos de cero, llamados raíces del álgebra \mathfrak{g} , para cada $\alpha \in \Phi$ el subespacio

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} / [H, x] = \alpha(H)x \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}$$

se denominan *espacios raíces* correspondientes a la raíz α y $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ es el espacio propio correspondiente al valor propio cero.

Esta descomposición se conoce como la *descomposición de Cartan* del álgebra de Lie \mathfrak{g} . La acción de \mathfrak{h} preserva cada \mathfrak{g}_{α} y actúa sobre él mediante multiplicación escalar por α , es decir:

$$ad(H)(x) = \alpha(H)x, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

La estructura del sistema de raíces Φ asociada a una álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} con subálgebra de Cartan \mathfrak{h} cumple las siguientes propiedades fundamentales:

1. Cada espacio raíz \mathfrak{g}_{α} tiene dimensión uno.
2. El conjunto de raíces Φ es simétrico respecto al origen (si $\alpha \in \Phi$, entonces $-\alpha \in \Phi$ también) y genera un retículo $\Lambda_{\Phi} \subset \mathfrak{h}^*$ de rango igual a $\dim \mathfrak{h}$.
3. La acción adjunta satisface: $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
con la convención de que $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$ si $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$.

Esta estructura permite describir la acción de \mathfrak{g} sobre una representación V de dimensión finita, ya que permite descomponer V en espacios propios de \mathfrak{h} , análogamente a la descomposición de \mathfrak{g} en espacios raíces.

Descomposición de representaciones en espacios pesos

Sea V una representación irreducible de \mathfrak{g} . La acción de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ sobre V es diagonalizable, lo que permite descomponer V como suma directa de subespacios invariantes bajo \mathfrak{h} :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda,$$

donde cada subespacio $V_\lambda \subset V$ está definido por:

$$V_\lambda = \{v \in V : H \cdot v = \lambda(H)v \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Los elementos $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tales que $V_\lambda \neq 0$ se denominan *pesos* de la representación V . Los subespacios correspondientes V_λ se denominan *espacios peso* de V . La dimensión de V_λ se conoce como *multiplicidad del peso* λ en V .

La acción de \mathfrak{g} sobre V está controlada por la estructura de raíces. Para cada $\beta \in \Phi$, el subespacio raíz \mathfrak{g}_β , actúa sobre los espacios de peso de V mediante :

$$\mathfrak{g}_\beta \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+\beta}.$$

Esta acción puede interpretarse como una traslación en el conjunto de pesos, lo que implica que los pesos de una representación irreducible están relacionados mediante la red de raíces Λ_Φ .

Vectores de peso máximo

Para estudiar las representaciones irreducibles, se introduce una dirección privilegiada en \mathfrak{h}^* , mediante la elección de un sistema de raíces positivas $\Phi^+ \subset \Phi$, tal que $\Phi = \Phi^+ \cup (-\Phi^+)$. Esta elección permite ordenar los pesos de una representación.

Se dice que un vector $v \in V$ es un *vector de peso máximo* si:

1. $v \in V_\lambda$ para algún $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (es decir, v es un vector propio de \mathfrak{h}).
2. $\mathfrak{g}_\alpha \cdot v = 0$ para todo $\alpha \in \Phi^+$.

El siguiente teorema establece resultados fundamentales en la teoría de representaciones de álgebras de Lie semisimples. En particular, proporciona una caracterización estructural de las representaciones irreducibles de dimensión finita, y constituye la base para su clasificación mediante pesos dominantes.

Teorema 3.11. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple y sea V una representación irreducible de \mathfrak{g} . Entonces:*

- *Existe un vector de peso máximo, $v_\lambda \in V$, único salvo por un factor escalar no nulo, que es vector propio de una subálgebra de Cartan y es aniquilado por todos los elementos correspondientes a las raíces positivas.*
- *La acción repetida de los elementos asociados a raíces negativas sobre v_λ genera todo el espacio V .*

Esta estructura permite una clasificación completa de las representaciones irreducibles de álgebras de Lie semisimples a través de sus pesos máximos dominantes. A cada peso dominante entero λ , le corresponde una única clase de isomorfismo de representaciones irreducibles de dimensión finita, denotada por $V(\lambda)$.

3.3.1 Representaciones de \mathfrak{sl}_n

En esta sección se particularizan definiciones y resultados generales de la teoría de representaciones de álgebras de Lie semisimples, comenzando por el caso de \mathfrak{sl}_2 , que es un modelo y es accesible. A continuación, se abordan como ejemplos, un poco más complejos, a \mathfrak{sl}_3 y \mathfrak{sl}_4 , con el propósito de identificar patrones estructurales que permitan, en una etapa posterior, entender la generalización al caso de \mathfrak{sl}_n para $n \geq 2$.

Este recorrido progresivo permite aplicar el algoritmo clásico de clasificación de representaciones irreducibles de dimensión finita sin necesidad de introducir nociones adicionales, lo que facilita una transición natural hacia el caso general de álgebras de Lie semisimples. La estrategia consiste, por tanto, en comprender en profundidad la estructura de las representaciones de \mathfrak{sl}_n como paso previo a abordar la clasificación completa mediante pesos máximos dominantes.

Representaciones de \mathfrak{sl}_2

El caso \mathfrak{sl}_2 es el ejemplo prototípico y más simple de la teoría de representaciones de álgebras de Lie semisimples. Su base estándar $\{h, x, y\}$, es tal que

$$[h, x] = 2x, [h, y] = -2y, [x, y] = h.$$

Descomposición de Cartan de \mathfrak{sl}_2

$$\mathfrak{sl}_2 = \langle y \rangle \oplus \langle h \rangle \oplus \langle x \rangle,$$

con $\mathfrak{h} = \langle h \rangle$ su álgebra de Cartan, el conjunto de raíces $\Phi = \{-2, 2\}$ y los espacios raíces

$$V_2 = \langle x \rangle \quad \text{y} \quad V_{-2} = \langle y \rangle$$

Teorema de peso máximo

Sea V una representación irreducible de \mathfrak{sl}_2 . Entonces,

1. Existe un único vector no nulo, salvo combinación no nula, $a_1 \in V$, llamado vector de peso máximo, tal que para algún $\lambda \in \mathbb{N}$, se verifican:

$$h \cdot a_1 = \lambda a_1, \quad x \cdot a_1 = 0.$$

2. La representación V tiene dimensión $\lambda + 1$, y una base formada por los vectores :

$$a_1, \quad a_2 = y \cdot a_1, \quad \dots, \quad a_{\lambda+1} = y^{\lambda+1} a_1,$$

donde la acción de los generadores de \mathfrak{sl}_2 sobre esta base está dada por las siguientes fórmulas:

$$(3.1) \quad h \cdot a_i = (\lambda + 2 - 2i)a_i, \quad x \cdot (a_i) = (i - 1)a_{i-1}, \quad y \cdot a_i = (\lambda - i + 1)a_{i+1}, \quad a_0 = a_{\lambda+2} = 0.$$

Caracterización. Para cualquier número entero no negativos λ existe una única representación irreducible $V(\lambda)$ de \mathfrak{sl}_2 , de dimensión finita $\lambda + 1$, isomorfa a $\text{Sym}^\lambda V$.

Representaciones de \mathfrak{sl}_3

El estudio de las representaciones comienza con la identificación de una subálgebra de Cartan. Para \mathfrak{sl}_3 esta subálgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_3$, se elige como el subespacio de matrices diagonales con traza nula, el cual es bidimensional.

Descomposición de \mathfrak{sl}_3

Para extender el análisis, consideramos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ actuando sobre sí misma por la representación adjunta. Esta representación se descompone como:

$$\mathfrak{sl}_3 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

\mathfrak{h}^* esta generado por los funcionales $E_{i,i}$ que extraen la i -ésima entrada diagonal, las raíces son los funcionales del tipo $E_{i,i} - E_{j,j}$ para $i \neq j$:

$$\Phi = \{\pm(E_{1,1} - E_{2,2}), \pm(E_{1,1} - E_{3,3}), \pm(E_{2,2} - E_{3,3})\}$$

Cada espacio raíz $\mathfrak{g}_{E_{i,i} - E_{j,j}}$ esta generada por los vectores $E_{i,j} \in \mathfrak{sl}_3$, cuyas entradas son ceros excepto en la posición (i, j) que es 1. Así

$$\mathfrak{sl}_3 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j}.$$

Elegimos una dirección, l de tal manera que para $i < j$, las matrices $E_{i,j}$ generan los espacios raíz positivos, y las $E_{j,i}$ generan los espacios raíz negativos, Luego

$$\mathfrak{sl}_3 = \bigoplus_{i > j} E_{i,j} \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i < j} E_{i,j}.$$

Teorema de peso máximo

Sea V una representación irreducible de \mathfrak{sl}_3 . Las dos partes del teorema 3.11 aplicados en este caso

1. Existe un único vector no nulo, salvo combinación no nula, $a_1 \in V$, llamado vector de peso máximo de peso λ , tal que:

$$h \cdot a_1 = \lambda(h)a_1, \quad x_\alpha \cdot a_1 = 0,$$

para todo $h \in \mathfrak{h}$ y para todo $\alpha \in \Phi^+$. Es decir que a_1 es vector propio de \mathfrak{h} y es aniquilado los, tres, espacios de raíces positivas.

2. Las sucesivas aplicaciones de los, tres, espacios de raíces negativas generan la representación V .

Caracterización. Algunas de las representaciones obvias de \mathfrak{sl}_3 , que nos ayudará a familiarizarnos con lo que sucede y nos dará una construcción general es la representación estándar de \mathfrak{sl}_3 en $V \simeq \mathbb{C}^3$, los valores propios por la acción de \mathfrak{h} sobre los vectores de la base estándar, e_1, e_2 y e_3 , son $(1, 0)$, $(-1, 1)$ y $(0, -1)$, respectivamente. La representación de $\mathbb{C}^{3*} \simeq \Lambda^2 \mathbb{C}^3$ donde los valores propios son, los opuestos de los valores propios del original, $(-1, 0)$, $(1, -1)$ y $(0, 1)$. Las representaciones irreducibles $\text{Sym}^a V$ y $\text{Sym}^b V^*$, tienen pesos máximos $(a, 0)$ y $(0, b)$ respectivamente y, por producto tensorial de representaciones, (a, b) es un peso máximo de la representación completamente reducible $\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b \Lambda^2 V$ generado por el vector de peso producto de vectores máximos de cada factor.

Luego como para cualquier par de números enteros no negativos (a, b) existe una única representación irreducible de dimensión finita $V(a, b)$ de \mathfrak{sl}_3 esta es isomorfa a la contenida en $\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b \Lambda^2 V$.

La fórmula general de Weyl, adaptada a la estructura de \mathfrak{sl}_3 , para determinar la dimensión de la representación irreducible $V(\lambda)$, se puede expresar como

$$\dim V(m, n) = \frac{(m+1)(n+1)(m+n+2)}{2}.$$

Representaciones de \mathfrak{sl}_4

Sea el álgebra de Cartan tridimensional convencional de \mathfrak{sl}_4 ,

$$\mathfrak{h} = \langle \{E_{i,i} - E_{j,j} / 1 \leq i < j \leq 4\} \rangle.$$

Descomposición de \mathfrak{sl}_4

Considerando \mathfrak{h} y los vectores propios vía la acción adjunta de \mathfrak{h} en \mathfrak{sl}_4 , obtenemos

$$\mathfrak{sl}_4 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Las matrices $E_{i,j} \in \mathfrak{sl}_4$ con $i \neq j$, cuyas entradas son ceros excepto (i, j) que es 1, generan los autoespacios unidimensionales \mathfrak{g}_α . De nuevo cada uno de los espacios \mathfrak{g}_α actúa llevando un autoespacio \mathfrak{g}_β , ídem V_β , a otro $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, $V_{\alpha+\beta}$ siendo V una representación de \mathfrak{sl}_4 y V_α sumando de su descomposición en espacios propios bajo la acción de \mathfrak{h} .

Para identificar un auto espacio extremo, determinamos una dirección l de tal manera que estos \mathfrak{g}_β corresponden a matrices con una entrada distinta de cero por encima de la diagonal. Así, para $i < j$, las matrices $E_{i,j}$ generan los espacios raíz positivos, y las $E_{j,i}$ generan los espacios raíz negativos.

Teorema de peso máximo

Para cualquier representación irreducible de dimensión finita V de \mathfrak{sl}_4 , existe un *vector de peso máximo* v , $v \in V_\alpha$ para algún α , v es aniquilado por $E_{1,2}, E_{1,3}, E_{1,4}, E_{2,3}, E_{2,4}$ y $E_{3,4}$ y genera todo V bajo aplicaciones sucesivas de los tres operadores $E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{3,2}, E_{4,2}$ y $E_{4,3}$.

Caracterización. De nuevo con la representación estándar de \mathfrak{sl}_4 , $V = \mathbb{C}^4$. Los vectores base estándar e_i de \mathbb{C}^4 son vectores propios para la acción del álgebra de Cartan tridimensional convencional, \mathfrak{h} , cuyo vector de peso máximo es e_1 de peso $(1, 0, 0)$. Del mismo modo que en la sección anterior,

$$\text{Sym}^n V = V(n, 0, 0), \quad \text{Sym}^n(\Lambda^2 V) = V(0, n, 0) \quad \text{y} \quad \text{Sym}^n(\Lambda^3 V) = V(0, 0, n).$$

Podemos entonces garantizar, para toda terna de números naturales a, b y c , la existencia $V(a, b, c)$ en la descomposición en irreducibles de $\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b(\Lambda^2 V) \otimes \text{Sym}^c(\Lambda^3 V)$.

Representaciones de \mathfrak{sl}_n

Sea el álgebra de Cartan $n - 1$ dimensional, convencional de \mathfrak{sl}_n ,

$$\mathfrak{h} = \langle \{E_{i,i} - E_{j,j} / 1 \leq i < j \leq n\} \rangle.$$

Descomposición de \mathfrak{sl}_n

Considerando el álgebra de Cartan \mathfrak{h} y los vectores propios vía la acción adjunta de \mathfrak{h} en \mathfrak{sl}_n , obtenemos

$$\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Las matrices $E_{i,j} \in \mathfrak{sl}_n$ con $i \neq j$, cuyas entradas son ceros excepto (i, j) que es 1, generan los autoespacios unidimensionales \mathfrak{g}_α . De nuevo cada uno de los espacios \mathfrak{g}_α actúa llevando un autoespacio \mathfrak{g}_β , ídem V_β , a otro $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, $V_{\alpha+\beta}$ siendo V una representación de \mathfrak{sl}_n y V_α sumando de su descomposición en espacios propios bajo la acción de \mathfrak{h} .

Determinamos una dirección l de tal manera que estos \mathfrak{g}_β corresponden a matrices con una entrada distinta de cero por encima de la diagonal. Así, para $i < j$, las matrices $E_{i,j}$ generan los espacios raíz positivos, y las $E_{j,i}$ generan los espacios raíz negativos.

Teorema de peso máximo

Para cualquier representación irreducible de dimensión finita V de \mathfrak{sl}_n , existe un *vector de peso máximo* v , $v \in V_\alpha$ para algún α , v es aniquilado por los $E_{i,j}$, $i < j$ y genera todo V bajo aplicaciones sucesivas de los tres operadores $E_{i,j}$, $i > j$.

Caracterización. Sea la representación estándar de \mathfrak{sl}_n , $V = \mathbb{C}^n$. Los vectores de la base estándar e_i de \mathbb{C}^n son vectores propios para la acción del álgebra de Cartan tridimensional convencional, \mathfrak{h} , cuyo vector de peso máximo es e_1 de peso $(1, 0, \dots, 0)$. Del mismo modo que en la sección anterior,

$$\text{Sym}^n V = V(n, 0, 0), \quad \text{Sym}^n(\Lambda^2 V) = V(0, n, 0) \quad \dots \quad \text{Sym}^n(\Lambda^{n-1} V) = V(0, \dots, 0, n).$$

Podemos entonces garantizar, para toda $n - 1$ -upla de números naturales (a_1, \dots, a_{n-1}) , la existencia $V(a_1, \dots, a_{n-1})$ en la descomposición en irreducibles de $\bigotimes_{i=1}^{n-1} \text{Sym}^{a_i} \Lambda^i V$.

3.3.2 Descomposición de productos tensoriales y exteriores de orden 2 de representaciones

Para el cálculo de la cohomología adjunta de primer y segundo orden de las álgebras de Lie consideradas en esta tesis, las potencias exteriores de segundo orden y los productos tensoriales de representaciones de álgebras semisimples constituyen herramientas esenciales. Mediante su descomposición en componentes irreducibles, es posible analizar la estructura de los complejos de cohomología asociados a distintos módulos.

En particular, las potencias exteriores de orden 2 de un álgebra de Lie compleja simple —consideradas como módulos bajo la acción adjunta u otras representaciones— se descomponen en sumas directas de representaciones irreducibles. Estudiar esta descomposición resulta clave para identificar cociclos, cobordes y, en última instancia, clases no triviales en la cohomología. La complejidad de dicho análisis crece con el grado de la potencia exterior, aunque ya en orden 2 pueden aparecer fenómenos significativos.

Asimismo, los productos tensoriales de dos representaciones permiten construir nuevos módulos y su descomposición revela cómo interactúan las distintas componentes del álgebra en el nivel representacional.

El conocimiento preciso de estas descomposiciones permite aplicar criterios de anulación o no trivialidad de los grupos de cohomología y facilita la interpretación geométrica de ciertas clases, especialmente cuando interviene la representación adjunta. Por tanto, su dominio es fundamental para el desarrollo de los resultados principales de esta tesis.

Para abordar esta cuestión, se recurrirá a resultados conocidos, como por ejemplo la fórmula de Clebsch–Gordon, en su versión aplicable a álgebras de Lie semisimples, y un resultado específico para álgebras de Lie simples que se encuentra detallado en [Re]. Ambos se presentan a continuación.

Teorema 3.12. (Clebsch–Gordon) *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple. Sean $V(\lambda)$ y $V(\mu)$ representaciones irreducibles de \mathfrak{g} . Entonces el producto tensorial se descompone como*

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in \Phi^+} c_{\lambda, \mu}^{\nu} V_{\nu}$$

donde cada $c_{\lambda, \mu}^{\nu} \in \mathbb{N}_0$ indica la multiplicidad con la que aparece V_{ν} en la descomposición.

Fórmula de Weyl para \mathfrak{sl}_n

Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ un peso dominante expresado en la base de pesos fundamentales de \mathfrak{sl}_n , con $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$. Entonces, la dimensión de la representación irreducible $V(\lambda)$ de \mathfrak{sl}_n está dada por la fórmula de Weyl:

$$\dim V(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_{j-1} + j - i}{j - i}.$$

Para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

Dadas $V(n-1)$ y $V(l-1)$ dos representaciones de \mathfrak{sl}_2 ,

$$(3.2) \quad \Lambda^2 V(n-1) \simeq \bigoplus_{m=1}^{[n/2]} V(2n-4m).$$

Ejemplo: $\Lambda^2 V(3) \simeq V(4) \oplus V(0)$.

Teorema de Clebsch-Gordon para \mathfrak{sl}_2

$$(3.3) \quad V(n-1) \otimes V(l-1) \simeq \bigoplus_{m=1}^{\min\{n,l\}} V(n+l-2m).$$

Ejemplo: $V(3) \otimes V(1) \simeq V(3) \oplus V(1)$.

Dadas W, Z dos representaciones de \mathfrak{sl}_2

$$(3.4) \quad \Lambda^2(W \oplus Z) \simeq \Lambda^2 W \oplus \Lambda^2 Z \oplus W \otimes Z,$$

luego

$$(3.5) \quad \Lambda^2(V(n-1) \oplus V(l-1)) \simeq \bigoplus_{m=1}^{[n/2]} V(2n-4m) \oplus \bigoplus_{m=1}^{[l/2]} V(2l-4m) \oplus \bigoplus_{m=1}^{\min\{n,l\}} V(n+l-2m)$$

Ejemplo: $\Lambda^2(V(2) \oplus V(1)) \simeq V(2) \oplus V(3) \oplus V(1) \oplus V(0)$.

3.3.3 Irreducibles destacables en la descomposición de $\Lambda^2(V(\lambda))$

La existencia (o inexistencia) de ciertas componentes irreducibles en la potencia exterior de orden dos de representaciones irreducibles de álgebras de Lie semisimples resulta relevante para los problemas abordados en esta tesis. A continuación, se presentan enunciados que describen condiciones bajo las cuales esto sucede (o no). Estos resultados son seguidos de ejemplos concretos que ilustran su aplicación.

Existencia de $V(0)$ en la descomposición de $\Lambda^2(V(\lambda))$

La presencia de una componente trivial $V(0)$, es decir, un submódulo unidimensional de peso máximo igual a cero, en la descomposición de la potencia exterior de orden dos de una representación irreducible $V(\lambda)$, significa que

$$\Lambda^2(V(\lambda)) = V(0) \oplus (\text{otros módulos}),$$

es poco común y se halla profundamente vinculada con la estructura interna de $V(\lambda)$ y de la álgebra de Lie semisimple subyacente. Esta propiedad es esencial en el desarrollo de esta tesis. A continuación se proporciona un enunciado formal de las condiciones que garantizan su existencia, seguido por algunos ejemplos relevantes.

Se sabe que $V(0)$ aparece exactamente una vez en la descomposición en irreducibles de $\Lambda^2(V(\lambda))$ si y solo si

- $V(\lambda)$ es auto dual y
- la forma invariante en $V(\lambda)$ es alternante,

La existencia de un vector de peso máximo de peso cero en $\Lambda^2 V$, con V representación irreducible de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple, es equivalente a la existencia de una forma bilineal alternante no degenerada e invariante en V . Esta propiedad caracteriza a las representaciones irreducibles de tipo simplécticas, y se manifiesta a través del indicador de Frobenius–Schur, el cual en este caso toma el valor -1 . En este caso, la forma invariante induce una estructura simpléctica en V . En particular, existe una base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de V en la cual el vector de peso máximo en $\Lambda^2 V$ es de la forma

$$\sum_{i=1}^n e_i \wedge f_i.$$

Este vector es de peso cero, y corresponde a un vector invariante bajo la acción del álgebra de Lie semisimple.

Ejemplo 3.13. Un ejemplo clásico lo constituyen las representaciones irreducibles de dimensión finita del álgebra de Lie \mathfrak{sl}_2 . Todas estas representaciones son autoduales; en consecuencia, en cada una de ellas existe una única forma bilineal (salvo escalar) que es invariante, no degenerada y que además es:

- simétrica cuando la dimensión es impar;
- alternante (antisimétrica) cuando la dimensión es par.

Utilizando la formula de la ecuación (3.2),

$$\Lambda^2 V(n-1) \simeq \bigoplus_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} V(2n-4m),$$

si n es par, para $m = \frac{n}{2}$, la descomposición de $\Lambda^2 V(n-1)$ contiene una componente irreducible de peso 0.

Existencia de $V(\lambda)$ en la descomposición de $\Lambda^2(V(\lambda))$

La no existencia de componentes irreducibles en común entre $\Lambda^2(V(\lambda))$ y tanto $V(\lambda)$ como \mathfrak{g} es de sumo interés por lo que veamos en que caso esto sucede

Teorema 3.14. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie simple, $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_2$. Entonces $\Lambda^2 \mathfrak{g}$ contiene una componente irreducible isomorfa a \mathfrak{g} .*

Ejemplo 3.15. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_6$, el álgebra de Lie simple de tipo C_3 . Consideramos la representación irreducible $V(\lambda)$ de \mathfrak{g} con peso dominante $\lambda = (0, 0, 1)$. Esta representación tiene dimensión 14 y es autodual.

La potencia exterior de segundo orden de esta representación se descompone como

$$\Lambda^2 V(0, 0, 1) = V(1, 0, 1) \oplus V(0, 1, 0) \oplus V(0)$$

Esta descomposición presenta las siguientes características:

- La representación trivial $V(0)$ aparece como subrepresentación de $\Lambda^2 V(0, 0, 1)$, lo que confirma la existencia de una forma alternada \mathfrak{g} -invariante sobre $V(0, 0, 1)$.
- La representación original $V(0, 0, 1)$ no aparece como subrepresentación.
- La representación adjunta, $\mathfrak{sp}_6 \simeq V(2, 0, 0)$, tampoco aparece.

Este ejemplo demuestra que la presencia de una forma bilineal alternada invariante (reflejada en la aparición de $V(0)$) no implica necesariamente la aparición de otras estructuras canónicas como la adjunta o la representación misma. Esta observación será relevante en capítulos posteriores al analizar condiciones para la construcción de álgebras de Lie algebraicamente rígidas.

COHOMOLOGÍA DE ÁLGEBRAS DE LIE

El complejo de Chevalley-Eilenberg

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y ρ una representación de \mathfrak{g} sobre el espacio vectorial V . El *complejo de Chevalley-Eilenberg*

$$\dots \longrightarrow C^n(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_{n+1}} C^{n+2}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_{n+2}} \dots$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el espacio vectorial n -cocadenas es

$$C^n(\mathfrak{g}, V) = \{f : \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \longrightarrow V \mid f \text{ es multilineal y alternante}\}$$

y el operador diferencial exterior $d_n : C^n(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$ es tal que para cada $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathfrak{g}$ y $f \in C^n(\mathfrak{g}, V)$ se tiene que

$$d_n f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i) \cdot f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) + \sum_{1 \leq p < q \leq n+1} (-1)^{p+q} f([x_p, x_q], x_1, \dots, \hat{x}_p, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_{n+1}).$$

Notas.

- $d_n \circ d_{n+1} = 0$ o equivalentemente $\text{Im}(d_{n-1}) \subset \ker(d_n)$.
- De acuerdo a las convenciones usuales tenemos que $\mathfrak{g}^{\times 0} = \mathbb{C}$ y por lo tanto $C^0(\mathfrak{g}, V)$ se identifica de manera canónica con V .
- $C^n(\mathfrak{g}, V)$ es un \mathfrak{g} -módulo y d_n es un morfismo de \mathfrak{g} -módulos.
- $C^n(\mathfrak{g}, V) \simeq \text{Hom}(\Lambda^n \mathfrak{g}, V) \simeq (\Lambda^n \mathfrak{g})^* \otimes V \simeq \Lambda^n \mathfrak{g}^* \otimes V$.

- $C(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_n C^n(\mathfrak{g}, V)$, es el complejo de cadenas de \mathfrak{g} con coeficientes en V .

Definición 4.1. Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie y ρ una representación de \mathfrak{g} sobre V , considerando el complejo de cadenas anterior, definimos el n -ésimo grupo de cohomología de \mathfrak{g} con coeficientes en V

$$H^n(\mathfrak{g}, V) = \ker(d_n) / \text{Im}(d_{n-1}).$$

Notas.

- $H(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_n H^n(\mathfrak{g}, V)$.
- $Z^n(\mathfrak{g}, V) = \ker(d_n)$ es el conjunto de cociclos y $B^n(\mathfrak{g}, V) = \text{Im}(d_{n-1})$ es el conjunto de cobordes.
- $C^n(\mathfrak{g}, V)$ y por lo tanto $H^n(\mathfrak{g}, V)$ se anulan si $n > \dim \mathfrak{g}$.

4.1 Algunos resultados conocidos

Algunos de los resultados que se emplearán en esta sección, en particular aquellos relacionados con la cohomología de álgebras de Lie semisimples y sus representaciones, pueden consultarse en el Capítulo 7.8 de [W]. Allí se presentan de manera sistemática teoremas clásicos como los de Whitehead, que serán útiles en el desarrollo de esta tesis.

Teorema 4.2. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple sobre un cuerpo \mathbb{K} , de característica 0. Si M es un \mathfrak{g} -módulo irreducible, $M \neq \mathbb{K}$, entonces $H^i(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo i .

Teorema 4.3 (Whitehead). Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita sobre un cuerpo de característica 0 y ρ una representación de \mathfrak{g} en V de dimensión finita. Entonces $H^1(\mathfrak{g}, V)$ y $H^2(\mathfrak{g}, V)$ se anulan.

En particular, en muchas ocasiones utilizaremos este resultado aplicado a la representación trivial, en cuyo caso resulta

$$(4.1) \quad H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = 0.$$

Observación 4.4. Dada \mathfrak{g} un álgebra de Lie y \mathfrak{h} un ideal de \mathfrak{g} . La acción adjunta restringida de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{g} , hace que \mathfrak{g} sea un \mathfrak{h} -módulo.

La acción del álgebra de Lie \mathfrak{h} sobre el complejo de cohomología de Chevalley–Eilenberg de \mathfrak{g} con coeficientes en \mathfrak{g} está dado por

$$(h \cdot f)(h_1 \wedge \cdots \wedge h_n) = [h, f(h_1 \wedge \cdots \wedge h_n)] - \sum_{i=1}^n f(h_1 \wedge \cdots \wedge [h, h_i] \wedge \cdots \wedge h_n),$$

con $h, h_i \in \mathfrak{h}$ y $f \in C^n(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$.

Esta acción es lineal y respeta la estructura del complejo, es decir, es compatible con el diferencial $d : C^n(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, de modo que

$$d(h \cdot f) = h \cdot (df), \quad \forall h \in \mathfrak{h}, f \in C^n(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}).$$

De esta forma, los subespacios de cociclos y cobordes respectivamente

$$Z^n(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \ker(d) \quad \text{y} \quad B^n(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \text{Im}(d)$$

son submódulos de \mathfrak{h} . Por lo tanto, los grupos de cohomología heredan una estructura natural de \mathfrak{h} -módulo para todo $n \geq 0$, inducida por la acción de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{g} .

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos enunciar la siguiente proposición, que será de utilidad en el análisis estructural de la cohomología de ideales en álgebras de Lie.

Proposición 4.4.1. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y sea \mathfrak{h} un ideal abeliano de \mathfrak{g} , entonces $H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ y $H^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ son \mathfrak{h} -módulos triviales.*

Demostración

- Queremos probar que para todo $a \in \mathfrak{h}$ y $\mu \in \ker(d_1)$, $[a, \mu(\cdot)] \in \text{Im}(d_0)$.

Sea $\mu \in \ker(d_1)$ y $a, v \in \mathfrak{h}$, entonces $d_1(\mu)(a, v) = 0$, luego

$$[a, \mu(v)] - [v, \mu(a)] - \underbrace{\mu([a, v])}_{=0} = 0 \implies [v, \mu(a)] = [a, \mu(v)] \implies d_0(\mu(a))(v) = [a, \mu(v)],$$

por lo tanto

$$[a, \mu(\cdot)] \in \text{Im}(d_0) \implies [a, \mu(\cdot)] = 0 \quad \text{en} \quad H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}).$$

- Para la segunda afirmación, de forma análoga, sea $\sigma \in \ker(d_2)$ y $a, v, w \in \mathfrak{h}$

$$d_2(\sigma)(a, v, w) = 0 \implies [a, \sigma(v, w)] - [v, \sigma(a, w)] + [w, \sigma(a, v)] = 0 \implies$$

$$[v, \sigma(a, w)] - [w, \sigma(a, v)] = [a, \sigma(v, w)] \implies d_1(\sigma(a, \cdot))(v, w) = [a, \sigma(v, w)]$$

por lo tanto

$$[a, \sigma(\cdot, \cdot)] \in \text{Im}(d_1) \implies [a, \sigma(\cdot, \cdot)] = 0 \quad \text{en} \quad H^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}).$$

Definición 4.5. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *completa* si los dos primeros grupos de cohomología adjunta son nulos ($H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$).

Teorema 4.6 (Carles). *Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} completa con nilradical abeliano verifica que*

$$H(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

La sucesión de Hochschild-Serre

El siguiente resultado se sigue de la sucesión espectral de Hochschild-Serre para álgebras de Lie y se puede ver en [W].

Teorema 4.7. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita. Si I es un ideal de \mathfrak{g} tal que \mathfrak{g}/I es semisimple, entonces para todo $n \geq 0$*

$$H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq \sum_{i+j=n} H^i(\mathfrak{g}/I, \mathbb{C}) \otimes H^j(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

Usando (4.1) para el cálculo de los tres primeros grupos de cohomología

$$(4.2) \quad n = 0, \quad H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq \underbrace{H^0(\mathfrak{g}/I, \mathbb{C})}_{=\mathbb{C}} \otimes H^0(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^0(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{g}}.$$

$$n = 1, \quad H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq \underbrace{H^1(\mathfrak{g}/I, \mathbb{C})}_{=0} \otimes H^0(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \oplus \underbrace{H^0(\mathfrak{g}/I, \mathbb{C})}_{=\mathbb{C}} \otimes H^1(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq H^1(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

$$(4.3) \quad H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq H^1(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

En forma análoga para $n = 2$

$$(4.4) \quad H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq H^2(I, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

Fórmula de Kunneth

Teorema 4.8. Sean \mathfrak{g} y \mathfrak{h} dos álgebras de Lie, entonces

$$H^*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \simeq H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes H^*(\mathfrak{h}) \oplus H^*(\mathfrak{g}) \otimes H^*(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}).$$

En particular para

$$(4.5) \quad n = 0, \quad H^0(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \simeq H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes H^0(\mathfrak{h}) \oplus H^0(\mathfrak{g}) \otimes H^0(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}).$$

$$(4.6) \quad n = 1, \quad H^1(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \simeq H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes H^0(\mathfrak{h}) \oplus$$

$$H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes H^1(\mathfrak{h}) \oplus H^1(\mathfrak{g}) \otimes H^0(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \oplus H^0(\mathfrak{g}) \otimes H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}).$$

$$(4.7) \quad n = 2, \quad H^2(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \simeq H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes H^2(\mathfrak{h}) \oplus H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes H^1(\mathfrak{h}) \oplus$$

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes H^0(\mathfrak{h}) \oplus H^0(\mathfrak{g}) \otimes H^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \oplus H^1(\mathfrak{g}) \otimes H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \oplus H^2(\mathfrak{g}) \otimes H^0(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}).$$

De la teoría de Kunneth se deduce el siguiente resultado:

Proposición 4.8.1. Sea \mathfrak{g} producto directo de álgebras de Lie \mathfrak{g}_k , $1 \leq k \leq p$, y sea $r \in \mathbb{N}_0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $H^j(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, para todo j , $0 \leq j \leq r$;
- $H^j(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) = 0$, para todo j , $0 \leq j \leq r$ y $1 \leq k \leq p$.

4.2 Cohomología de productos semidirectos

En esta sección haremos un análisis del producto semidirecto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes_{\rho} V$, de condiciones que posee o necesita con el fin de obtener su rigidez. Este análisis conduce a una serie de ejemplos de álgebras de Lie que resultan rígidas bajo ciertas hipótesis.

Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie semisimple y sea V una representación, de dimensión finita, de \mathfrak{s} . Consideremos el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes V$$

Describamos los tres primeros grupos de cohomología adjunta. Por propiedad del producto semidirecto, V es un ideal de \mathfrak{g} tal que \mathfrak{g}/V es semisimple, aplicando las fórmulas 4.2, 4.3 y 4.4

$$(4.8) \quad H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\mathfrak{g}}, \quad H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^1(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \quad \text{y} \quad H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^2(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$$

Además como V es abeliano, por 4.4.1, $H^1(V, \mathfrak{g})$ y $H^2(V, \mathfrak{g})$ es un V -módulo trivial, luego

$$H^1(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^1(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{s}} \quad \text{y} \quad H^2(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^2(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{s}}.$$

Luego

$$(4.9) \quad H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = V, \quad H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^1(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{s}} \quad \text{y} \quad H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^2(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{s}}.$$

Por otro lado, considerando la sucesión exacta de \mathfrak{g} -módulos

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/V \longrightarrow 0,$$

la correspondiente sucesión exacta de complejos de cadena

$$0 \longrightarrow C(V, V) \longrightarrow C(V, \mathfrak{g}) \longrightarrow C(V, \mathfrak{g}/V) \longrightarrow 0$$

también es una sucesión exacta de \mathfrak{g} -módulos. Consecuentemente la correspondiente sucesión exacta de cohomología

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(V, \mathfrak{g}/V) \longrightarrow H^n(V, V) \longrightarrow H^n(V, \mathfrak{g}) \longrightarrow H^n(V, \mathfrak{g}/V) \longrightarrow \dots$$

es una sucesión exacta de \mathfrak{g} -módulos. Como \mathfrak{s} es una subálgebra semisimple de \mathfrak{g} que es suplementaria a V , como espacios vectoriales, podemos considerar a las cadenas como \mathfrak{s} -módulo por lo que

$$(4.10) \quad \dots \longrightarrow H^{n-1}(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^n(V, V)^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^n(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^n(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \dots$$

es una sucesión exacta. Como V es álgebra de Lie abeliana y tanto V como \mathfrak{g}/V son V -módulos triviales se sigue que $H^n(V, V) = C^n(V, V)$ y $H^n(V, \mathfrak{g}/V) = C^n(V, \mathfrak{g}/V)$, reemplazando en 4.10

$$(4.11) \quad \dots \longrightarrow C^{n-1}(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{s}} \longrightarrow C^n(V, V)^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^n(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow C^n(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \dots$$

Para

$n = 1$

$$(4.12) \quad 0 \longrightarrow C^1(V, V)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow \boxed{H^1(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})} \longrightarrow C^1(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow C^2(V, V)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow \dots$$

$n = 2$

$$(4.13) \quad \dots \longrightarrow C^1(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow C^2(V, V)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow \boxed{H^2(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})} \longrightarrow C^2(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow \dots$$

Observaciones

1. Como $C^1(V, V)^{\mathfrak{g}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$ y $C^1(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{g}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \mathfrak{g}/V)$, entonces, si la dimensión de $C^1(V, \mathfrak{g}/V)^{\mathfrak{g}}$ es cero, se deduce que

$$(4.14) \quad H^1(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq C^1(V, V)^{\mathfrak{g}}.$$

En tal caso, la cohomología adjunta de \mathfrak{g} verifica que $\dim(H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) \geq 1$. Más aún, si $\{a_i / i = 1, \dots, n\}$ es una base de V , y si consideramos $\{a^i / i = 1, \dots, n\}$ la base dual correspondiente en V^* , entonces una clase no trivial en la cohomología de grado 1 de \mathfrak{g} es

$$(4.15) \quad \sum_{i=1}^n a^i \otimes a_i \in H^1(V, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

2. Si $\wedge^2 V$ no comparte componentes en común con \mathfrak{g} , entonces $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$.

Parte II

Álgebras de Lie rígidas

LA VARIEDAD DE ÁLGEBRAS DE LIE

5.1 Corchetes de Lie

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión n , con base $\{v_1, \dots, v_n\}$, su corchete se puede recuperar a partir de las *constantes de estructura*, $x_{i,j}^k$, que aparecen en las expresiones $[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^n x_{i,j}^k v_k$. Es posible definir un álgebra de Lie abstracta de dimensión n desde cero simplemente especificando un conjunto de n^3 constantes de estructuras. Naturalmente, no vale para cualquier conjunto de escalares $\{x_{i,j}^k\}$, se deben cumplir las condiciones que implican los axiomas A1 y A2, que en los coeficientes se traducen a

$$(5.1) \quad x_{i,i}^k = 0 = x_{i,j}^k + x_{j,i}^k \quad \text{y} \quad \sum_k \left(x_{i,j}^k x_{k,l}^m + x_{j,l}^k x_{k,i}^m + x_{l,i}^k x_{k,j}^m \right) = 0.$$

En la práctica, no construiremos álgebras de Lie de esta manera artificial sin embargo, como sabemos que todo espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a \mathbb{C}^n , identificaremos $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \simeq (\mathbb{C}^n, \mu)$ con μ corchete en \mathbb{C} que verifica [5.1], por lo tanto consideraremos las álgebras de Lie en \mathbb{C}^n y nos referiremos a un álgebra de Lie \mathfrak{g} o a su corchete de Lie μ indistintamente, según la notación que mejor se adapte.

5.2 La variedad $\mathcal{L}(n)$

La variedad $\mathcal{L}(n)$ de álgebras de Lie n -dimensionales sobre \mathbb{C} es la variedad algebraica afín de todos los mapas bilineales $\mu: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ que satisfacen antisimetría y la identidad de Jacobi, 5.1, denominados corchetes de Lie sobre \mathbb{C} .

En el conjunto $\mathcal{L}(n)$ conviven álgebras de Lie isomorfas. Dada $\mu \in \mathcal{L}(n)$, un álgebra de Lie isomorfa a ella se consigue cambiando la base de \mathbb{C}^n . Esto es, la acción natural del grupo $GL(n)$ dada por

$$A \cdot \mu(x, y) = A(\mu(A^{-1}(x), A^{-1}(y))) \quad \text{con} \quad A \in GL(n)$$

es un álgebra de Lie isomorfa a μ . Más aún, todas las álgebras de Lie isomorfas a μ son de esta forma. Por lo tanto pertenecer a la órbita de μ ,

$$\mathcal{O}(\mu) = \{A \cdot \mu \mid A \in GL(n)\},$$

es pertenecer a la misma clase de isomorfismo.

Y así clasificar, salvo isomorfismo, las álgebras de Lie de dimensión n sobre \mathbb{C} es equivalente a entender cuáles son las órbitas de la acción por cambio de base de $GL(n)$ en el conjunto algebraico afín $\mathcal{L}(n)$.

Notaremos un álgebra de Lie con $\mu \in \mathcal{L}(n)$, $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ cuando se necesite especificar el espacio vectorial subyacente o $(\mathfrak{g}, [,])$.

Operación de composición \circ

Dados $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V \otimes V, V)$, se define:

$$(\varphi \circ \psi)(x, y, z) := \varphi(\psi(x, y), z) + \varphi(\psi(y, z), x) + \varphi(\psi(z, x), y).$$

La identidad de Jacobi puede expresarse de manera concisa mediante esta operación como:

$$\mu \circ \mu = 0.$$

Sea $\mu \in \mathcal{L}(n)$ una ley de Lie. Una aplicación bilineal alternante $\psi : V \otimes V \rightarrow V$ se dice un **2-cociclo** de μ si satisface:

$$\mu \circ \psi + \psi \circ \mu = 0.$$

Esta condición coincide con la definición de 2-cociclo para la cohomología de Chevalley–Eilenberg (o cohomología adjunta) de μ con coeficientes en el módulo adjunto.

5.3 Deformaciones de álgebras de Lie

Definición 5.1. Una *deformación* de un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}(n)$, es un álgebra de Lie

$$\mu + \sigma,$$

con σ una forma bilineal antisimétrica sobre \mathbb{C}^n .

Lema 5.2. Sea $\mu \in \mathcal{L}(n)$ un álgebra de Lie y σ una forma bilineal antisimétrica sobre \mathbb{C}^n . La aplicación $\mu + \sigma$ es un álgebra de Lie si y sólo si σ es un álgebra de Lie y σ es un 2-cociclo de μ .

Notas.

- Diremos a $\mu + \sigma$ deformación de μ por σ .
- Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , denotaremos con $\mathfrak{g}(\sigma)$ la deformación de \mathfrak{g} por σ .

6.1 Rigidez topológica

En el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^n se pueden considerar dos topologías, la Euclidiana y la de Zariski. En esta última, un subconjunto U de \mathbb{C}^n es cerrado si y solo si consta de todas las soluciones de algún sistema de ecuaciones polinómicas. Dado que cualquiera de estos U también es un conjunto cerrado en la primera, pero no a la inversa, la topología Euclidiana es más fina que la de Zariski.

Un álgebra de Lie μ se dice *rígida* si su órbita, con la topología de Zariski es abierta, o equivalentemente μ no es rígida si y sólo si en cualquier entorno Zariski, de ella existe una álgebra de Lie no isomorfa. Determinar todas las álgebras de Lie rígidas n -dimensionales es un problema complejo y muy relevante. Hay un número finito de ellas y la clausura de la órbita es una componente irreducible de $\mathcal{L}(n)$.

Sean $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ y $\mathfrak{g}' = (V, \mu')$ álgebras de Lie, \mathfrak{g} es una *contracción* de \mathfrak{g}' si $\mu \in \overline{\mathcal{O}(\mu')}$. Si \mathfrak{g} es rígida y es una contracción de \mathfrak{g}' , entonces \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' son isomorfas.

6.2 Rigidez algebraica

Un teorema clásico debido a Nijenhuis y Richardson establece un criterio suficiente para la rigidez de una álgebra de Lie. En concreto, dicho teorema afirma que si el segundo grupo de cohomología adjunta, de Chevalley–Eilenberg, de μ se anula, es decir, $H^2(\mu, \mu) = 0$, entonces μ es rígida.

Sin embargo, la inversa del teorema no es cierta en general. Es decir, la rigidez de una álgebra de Lie no implica necesariamente que $H^2(\mu, \mu) = 0$. Un ejemplo que demuestra esto fue construido por Richardson, y puede consultarse en la referencia [R].

Este resultado pone de manifiesto que, si bien la cohomología es una herramienta muy poderosa para estudiar deformaciones de álgebras de Lie, no captura todos los aspectos

del comportamiento geométrico dentro de $\mathcal{L}(n)$.

DOS FAMILIAS DE ÁLGEBRAS DE LIE RÍGIDAS CONOCIDAS

En el contexto de esta tesis, existen en la bibliografía dos familias bien estudiadas de álgebras de Lie rígidias, que han sido fundamentales para el desarrollo del estudio de deformaciones y rigidez.

La primera de ellas fue construida por Richardson en [R] y mostró que, bajo ciertas condiciones sobre la representación, estas álgebras pueden ser rígidias, incluso en casos en los que el segundo grupo de cohomología $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ no se anula. Esto proporciona contraejemplos a la implicación recíproca del teorema de Nijenhuis–Richardson y muestra que la *rigidez geométrica no implica necesariamente rigidez algebraica*.

La segunda familia fue desarrollada por Carles en [C], quien construyó ejemplos explícitos de álgebras de Lie rígidias. Las álgebras de Carles también ilustran fenómenos sutiles en torno a la noción de rigidez.

Estas dos familias constituyen una base esencial para el análisis de rigidez en productos semidirectos y motivan los resultados presentados en esta tesis.

7.1 La familia de Richardson [R]

En esta sección describiremos una parte del contenido de la familia descrita en [R], que resulta relevante para este trabajo.

Sea \mathfrak{sl}_2 la única álgebra de Lie simple de dimensión 3 y sea ρ_k la única representación irreducible, salvo isomorfismo, de \mathfrak{sl}_2 de dimensión $2k + 1$. Consideremos la familia de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{sl}_2 \times_{\rho_k} \mathbb{C}^{2k+1}.$$

Combinando que, la cantidad de componentes irreducibles de \mathfrak{g}_k es dos, la dimensión es $2k + 4$, la clasificación de álgebras de Lie semisimple y el teorema de condición necesaria sobre la no rigidez (ver [R]), Richardson obtuvo que, salvo para los casos $k = 1, 2, 3, 5$, las álgebras de Lie \mathfrak{g}_k son rígidias.

Por otro lado utilizando la sucesión espectral de Hochschild-Serre (ver [HS]), la nulidad del primer y segundo grupo de cohomología trivial de un álgebra de Lie simple (ver [CE]) y la fórmula de Clebsch-Gordan para la descomposición del producto tensorial en suma directa de representaciones irreducibles (ver [GS]) obtuvo que $H^2(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) \neq 0$ para k impar. Con estos dos resultados concluyó que para k impar mayor que 5, la familia \mathfrak{g}_k es una familia de álgebras de Lie rígidas con $H^2(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) \neq 0$ y para k par mayor que 2, \mathfrak{g}_k tiene $H^2(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) = 0$.

Completando el análisis de esta familia, considerando que \mathfrak{sl}_2 se encuentra embebida como una subálgebra de $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, \mathfrak{sl}_3 , \mathfrak{so}_5 y \mathfrak{g}_2 , álgebras de Lie semisimples de rango 2, obtuvimos que si denotamos con $\{a_1, \dots, a_{2k+1}\}$ a la base de la representación irreducible de dimensión $2k+1, \mathbb{C}^{2k+1}$, para:

$$\boxed{k=1} \quad \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^3, \text{ cumple}$$

$$H^2(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1) = \langle \sigma \rangle \neq 0 \text{ con } \sigma = -a^1 \wedge a^2 \otimes x + a^1 \wedge a^3 \otimes h + a^2 \wedge a^3 \otimes y.$$

$$\mathfrak{g}_1(\sigma) \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2.$$

$$\boxed{k=3} \quad \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^7, \text{ cumple}$$

$$H^2(\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_3) = \langle \sigma \rangle \neq 0.$$

$$\mathfrak{g}_3(\sigma) \simeq \mathfrak{so}_5, \text{ (de rango 2) ambos de dimensión 10.}$$

$$\boxed{k=5} \quad \mathfrak{g}_5 = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^{11}, \text{ cumple}$$

$$H^2(\mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_5) \neq 0$$

$$\mathfrak{g}_5(\sigma) = \mathcal{G}_2 \text{ el álgebra de Lie excepcional de dimensión 14.}$$

Por otro lado, para

$$\boxed{k=2}, \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^5,$$

$$H^2(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2) = \langle \sigma \rangle \neq 0,$$

σ se obtuvo como un ejemplo de la familia $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}^{4k+1}$, Ejemplo 9.4.

$\mathfrak{g}_2(\sigma) \simeq \mathfrak{sl}_3$ verifica las condiciones necesaria y suficiente de no rigidez.

$$\boxed{k=4}, \mathfrak{g}_4 = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^9, \text{ es rígida pues } H^2(\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_4) = 0.$$

7.2 La familia de Carles [C]

En [C], Carles describe la clase de álgebras de Lie, \mathfrak{g}_c , completas con nilradical abeliano, luego algebraicamente rígidas, más aún la cohomología es cero. Estas álgebras son suma directa de álgebras de Lie \mathfrak{g}_i , donde $\mathfrak{g}_i = (\mathfrak{s}_i \oplus \mathbb{C}) \ltimes V_i$ con \mathfrak{s}_i simple, V_i una representación irreducible de \mathfrak{s}_i y la acción de \mathbb{C} sobre V_i es la identidad. En particular,

$$\mathfrak{g}_c = (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}) \ltimes V$$

es algebraicamente rígida e isomorfa a $(\mathfrak{sl}_2 \ltimes V \oplus \mathbb{C})(\sigma)$ para un dado σ .

Parte III

Deformaciones algebraicamente rígid

LA FAMILIA $\mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}$

Esta primera familia se estudió utilizando la representación estándar, lo cual permitió ilustrar de manera concreta cómo aplicar el marco de análisis que se desarrollará en las secciones posteriores. A través de este caso inicial,

$$\mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}^n \quad \text{y} \quad \mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C},$$

así como ciertas deformaciones de esta última, se establecieron las herramientas fundamentales y se puso en práctica la metodología que guiará el desarrollo general del trabajo.

Con la intención de avanzar hacia resultados más generales y profundizar en la estructura de las representaciones, se explorarán otras familias de álgebras de Lie, cuyas propiedades presentan un mayor grado de complejidad y riqueza. El estudio de estas nuevas familias permitirá extender las conclusiones obtenidas inicialmente y revelar fenómenos que no aparecen en el caso estándar, aportando así una visión más completa del problema en cuestión.

Para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}^n$, donde \mathbb{C}^n representa la acción natural de \mathfrak{sl}_n sobre un espacio vectorial de dimensión n ; es decir su representación irreducible más sencilla. Si consideramos los isomorfismos

$$C^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)^{\mathfrak{sl}_n} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_n}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \quad \text{y} \quad C^2(\mathbb{C}^n, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_n}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n, \mathfrak{sl}_n)$$

y los \mathfrak{sl}_n -módulos irreducibles

$$\mathfrak{sl}_n = V(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad \mathbb{C}^n = V(\epsilon_1) \quad \text{y} \quad \Lambda^2 \mathbb{C}^n = V(2\epsilon_1 + \epsilon_2),$$

donde $V(\lambda)$ denota el módulo irreducible de \mathfrak{sl}_n de peso dominante λ , como no existen aplicaciones lineales compatibles con la acción de \mathfrak{sl}_n entre $\Lambda^2 \mathbb{C}^n$ con \mathbb{C}^n y $\Lambda^2 \mathbb{C}^n$ con \mathfrak{sl}_n , por Lema de Schur

$$C^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)^{\mathfrak{sl}_n} = 0 \quad \text{y} \quad C^2(\mathbb{C}^n, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} = 0.$$

Reemplazado en la sucesión (4.13)

$$\dots \longrightarrow C^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)^{\mathfrak{sl}_n} \longrightarrow \boxed{H^2(\mathbb{C}^n, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_n} = H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})} \longrightarrow C^2(\mathbb{C}^n, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} \longrightarrow \dots$$

resulta que

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Lema 8.1. Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}$, con \mathbb{C} factor abeliano. Entonces $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0$. Más aún, $\dim H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 2 \\ 2 & \text{si } n = 2, \end{cases}$ y está generado por las clases de cohomología representadas por los 2-cociclos:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n a^i \wedge a^* \otimes a_i \quad \text{para todo } n \quad \text{y} \quad \sigma_2 = a^1 \wedge a^2 \otimes a \quad \text{para } n = 2,$$

siendo $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base de \mathbb{C}^n , $\{a^1, \dots, a^n\}$ base asociada de \mathbb{C}^* y $\mathbb{C} = \langle a \rangle$.

Demostración. Teniendo en cuenta los isomorfismos

$$C^1(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_n}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_n),$$

$$C^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_n}(\Lambda^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{sl}_n) \quad \text{y}$$

$$C^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_n} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_n}(\Lambda^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}), \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}),$$

y las descomposiciones en irreducibles de los espacios involucrados:

- para $n > 2$, $\Lambda^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}) \simeq \Lambda^2 \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} = V(\epsilon_1 + \epsilon_2) \oplus V(\epsilon_1)$,

$$\mathfrak{sl}_n = V(2\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C} = V(\epsilon_1) \oplus V(0),$$

- para $n = 2$, $\Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}) = V(0) \oplus V(1)$, $\mathfrak{sl}_2 = V(2)$, $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} = V(1) \oplus V(0)$,

y el Lema de Schur 3.1

$$\dim C^1(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} = 0, \quad \dim C^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} = 0 \quad \text{y}$$

$$\dim C^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 2 \\ 2 & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Además por la sucesión (4.13)

$$\dots \longrightarrow C^1(V, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} \longrightarrow C^2(V, V)^{\mathfrak{sl}_n} \longrightarrow \boxed{H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq H^2(V, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_n}} \longrightarrow C^2(V, \mathfrak{sl}_n)^{\mathfrak{sl}_n} \longrightarrow \dots$$

concluimos que

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq C^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_n},$$

luego

$$\dim H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 2 \\ 2 & \text{si } n = 2 \end{cases} .$$

Proponemos

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n a^i \wedge a^* \otimes a_i \in \Lambda^2(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C})^* \otimes \mathbb{C}^n \quad \text{y} \quad \sigma_2 = a^1 \wedge a^2 \otimes a \in \Lambda^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C},$$

siendo $\langle a \rangle$ y $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ bases de \mathbb{C} y \mathbb{C}^n respectivamente.

Demostraremos que ambos son vectores de peso máximo unidimensionales. Para facilitar la presentación de los resultados, consideraremos la base estándar de \mathfrak{sl}_n y trabajaremos con su subálgebra de Cartan:

$$\mathfrak{h} = \langle \{E_{1,1} - E_{j,j} : 1 \leq j \leq n\} \rangle.$$

Recordamos que los elementos $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ actúan sobre \mathbb{C}^n y su dual como:

$$E_{i,j} \cdot a_k = \delta_{j,k} a_i \quad \text{y} \quad E_{i,j} \cdot a^k = -\delta_{i,k} a^j$$

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, σ_1 es vector de peso máximo de peso cero.

La acción de los operadores de crecimiento, $1 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} E_{i,j} \cdot \left(\sum_{k=1}^n a^k \wedge a^* \otimes a_k \right) &= \sum_{k=1}^n (E_{i,j} \cdot a^k) \wedge a^* \otimes a_k + \sum_{k=1}^n a^k \wedge \underbrace{(E_{i,j} \cdot a^*)}_{=0} \otimes a_k + \\ &\quad \sum_{k=1}^n a^k \wedge a^* \otimes (E_{i,j} \cdot a_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (-\delta_{i,k} a^j) \wedge a^* \otimes a_k + \sum_{k=1}^n a^k \wedge a^* \otimes \delta_{j,k} a_i \\ &= -a^j \wedge a^* \otimes a_i + a^j \wedge a^* \otimes a_i = 0. \end{aligned}$$

La acción de los elementos de la base del álgebra de Cartan, $E_{1,1} - E_{j,j}$, $2 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} (E_{1,1} - E_{j,j}) \cdot \sum_{k=1}^n a^k \wedge a^* \otimes a_k &= \sum_{k=1}^n \left((E_{1,1} - E_{j,j}) \cdot a^k \right) \wedge a^* \otimes a_k + \\ &\quad \sum_{k=1}^n a^k \wedge \left((E_{1,1} - E_{j,j}) \cdot a^* \right) \otimes a_k + \sum_{k=1}^n a^k \wedge a^* \otimes (E_{1,1} - E_{j,j}) \cdot a_k = \\ &\quad \sum_{k=1}^n (-\delta_{1,k} a^1 + \delta_{j,k} a^j) \wedge a^* \otimes a_k + \sum_{k=1}^n a^k \wedge a^* \otimes (\delta_{1,k} a_1 - \delta_{j,k} a_j) = \\ &\quad -a^1 \wedge a^* \otimes a_1 + a^j \wedge a^* \otimes a_j + a^1 \wedge a^* \otimes a_1 - a^j \wedge a^* \otimes a_j = 0, \end{aligned}$$

σ_1 es vector de peso máximo de peso cero.

- Para $n = 2$, σ_2 es vector de peso máximo de peso cero.

La acción del operador de crecimiento

$$\begin{aligned} x \cdot (\sigma_2) &= x \cdot (a^1) \wedge a^2 \otimes a + a^1 \wedge x \cdot (a^2) \otimes a + a^1 \wedge a^2 \otimes x \cdot (a) \\ &= (-1)a^2 \wedge a^2 \otimes a_i + a^1 \wedge 0 \otimes a + a^1 \wedge a^2 \otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

La acción del elemento de la subálgebra de Cartan

$$\begin{aligned} h \cdot (\sigma_2) &= h \cdot (a^1) \wedge a^2 \otimes a + a^1 \wedge h \cdot (a^2) \otimes a + a^1 \wedge a^2 \otimes h \cdot (a) \\ &= (-1)a^1 \wedge a^2 \otimes a + a^1 \wedge (1)a^2 \otimes a + 0 = 0. \end{aligned}$$

σ_2 es vector de peso máximo de peso cero.

Para $n = 2$, claramente σ_1 y σ_2 son linealmente independientes por pertenecer a espacios diferentes, luego

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \begin{cases} \langle \sigma_1 \rangle & \text{si } n > 2, \\ \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle & \text{si } n = 2 \end{cases}.$$

□

Teorema 8.2. *Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}$. Entonces, para todo $n \geq 2$, existe una deformación de \mathfrak{g}_a , $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$, completa con nilradical abeliano, algebraicamente rígida.*

Además, para $n = 2$, existe otra deformación de \mathfrak{g}_a , $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$, algebraicamente rígida, no completa, con nilradical no abeliano.

Demostración.

- Consideremos el 2-cociclo del álgebra de Lie \mathfrak{g}_a , del lema anterior,

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n a^i \wedge a^* \otimes a_i.$$

Observemos que σ_1 es un corchete de Lie soluble, ya que corresponde a la identidad en \mathbb{C}^n . En consecuencia, aplicando el Lema 5.2, $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ es una deformación de \mathfrak{g}_a . Más precisamente, se verifica que:

$$(\mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C})(\sigma_1) \simeq (\mathfrak{sl}_n \oplus \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$$

donde \mathbb{C}^n es la representación estándar de \mathfrak{sl}_n de dimensión n y la acción de \mathbb{C} sobre \mathbb{C}^n es la identidad. Esto implica que $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ pertenece a una familia de álgebras de Lie estudiada por Carles, caracterizada por tener nilradical abeliano y una acción semisimple. En virtud del Teorema 4.6, se concluye que $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ es algebraicamente rígida.

- Para $n = 2$, el cociclo $\sigma_2 = a^1 \wedge a^2 \otimes a$, introducido en el Lema anterior, define un corchete de Lie nilpotente, ya que su estructura coincide con la del álgebra de Heisenberg de dimensión 3. En consecuencia, por el Lema 5.2, se deduce que $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es una deformación de \mathfrak{g}_a .

Si consideramos el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$, $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ es un ideal no abeliano, por lo tanto, por ecuación (4.8)

$$H^1(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = H^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)} \quad \text{y}$$

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = H^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}.$$

Aplicando la técnica del apartado anterior podemos determinar la estructura de los espacios de cocadenas que intervienen:

- Para $C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$, utilizando el isomorfismo

$$C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))$$

y la descomposición en espacios irreducibles de

$$\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} = V(1) \oplus V(0) \quad \text{y} \quad \mathfrak{g}_a(\sigma_2) = V(2) \oplus V(1) \oplus V(0),$$

concluimos que la dimensión de $C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$ es 2.

Si $\mathbb{C}^2 = \langle \{a_1, a_2\} \rangle$ y $\mathbb{C} = \langle \{a\} \rangle$, es fácil verificar que,

$$C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \{u_1, u_2\} \rangle,$$

con $u_1 = a^1 \otimes a_1 + a^2 \otimes a_2$ y $u_2 = a^* \otimes a$.

- Para $C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$, como $C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} = C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2}$, por el lema anterior

$$C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle.$$

Sean $u, v \in \{a_1, a_2, a\}$, ordenados de manera estrictamente creciente, según un orden total fijado sobre el conjunto generador. Consideramos la acción de los operadores exteriores :

* $d_1(a^1 \otimes a_1)(u, v) = [u, a^1 \otimes a_1(v)] - [v, a^1 \otimes a_1(u)] - a^1 \otimes a_1([u, v])$. Se verifica que $d_1(a^1 \otimes a_1)(u, v) \neq 0 \iff (u, v) = (a_1, a_2)$, en cuyo caso $d_1(a^1 \otimes a_1) = a^1 \wedge a^2 \otimes a = \sigma_2$.

De manera análoga se obtiene, $d_1(a^2 \otimes a_2) = a^1 \wedge a^2 \otimes a$. Por lo tanto

$$d_1(a^1 \otimes a_1 + a^2 \otimes a_2) = 2\sigma_2.$$

* $d_1(a^* \otimes a)(u, v) = [u, a^* \otimes a(v)] - [v, a^* \otimes a(u)] - a^* \otimes a([u, v])$.

Como se cumple que $[\cdot, a] = 0$, se obtiene $d_1(a^* \otimes a)(u, v) = 0$, excepto en el caso que $(u, v) = (a_1, a_2)$, donde $d_1(a^* \otimes a)(a_1, a_2) = -a$. Por lo tanto

$$d_1(a^* \otimes a) = -a^1 \wedge a^2 \otimes a = -\sigma_2.$$

Se concluye entonces que, σ_2 es un coborde, es decir que su clase de cohomología es trivial, y que la combinación lineal

$$u_1 + 2u_2 = a^1 \otimes a_1 + a^2 \otimes a_2 + 2a^* \otimes a \in H^1(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)).$$

$$* \quad d_2(\sigma_1)(a_1, a_2, a) = [a_1, \sigma_1(a_2, a)] - [a_2, \sigma_1(a_1, a)] + [a, \sigma_1(a_1, a_2)] - \sigma_1([a_1, a_2], a) + \sigma_1([a_1, a], a_2) - \sigma_1([a_2, a], a_1) = [a_1, a_2] - [a_2, a_1] + [a, 0] - \sigma_1(a, a) + \sigma_1(0, a_2) - \sigma_1(0, a_1) = 2a.$$

Luego $d_2(\sigma_1) = 2a^1 \wedge a^2 \wedge a^* \otimes a \neq 0$, por lo tanto

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = 0 \quad \text{y} \quad H^1(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) \neq 0.$$

Observar además que:

$$H^0(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = \langle a \rangle,$$

por lo cual el álgebra no es completa y $\text{Nil}(\mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ no es abeliano. \square

Observaciones 8.3. Notemos que en esta familia, \mathfrak{g} :

1. Las descomposiciones en \mathfrak{sl}_n -módulos de $\Lambda^2 \mathbb{C}^n$, \mathfrak{sl}_n y \mathbb{C}^n no tienen componentes irreducibles en común.
2. $\Lambda^2 \mathbb{C}^n$ solo contiene un espacio irreducible unidimensional en el caso $n = 2$ y en tal caso $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida.

9.1 Casos V irreducible

El caso $n = 2$, estudiado en el capítulo anterior, constituye sin duda una situación particular y significativa. Como se mencionó en la introducción, algunas de las familias consideradas en este capítulo ya han sido estudiadas previamente por Richardson, Carles, y en la tesis doctoral de Yao Folly-Aziamagnon. No obstante, en este capítulo retomamos el análisis de dichas familias —entre otras— con el objetivo de describir de manera explícita ciertas deformaciones que no solo contribuyen a una mejor comprensión de este caso específico, sino que también sirven como base para abordar casos más generales.

Dimensión de V par

Para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^{2k}$, con $k \in \mathbb{N}$, $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$. Esta afirmación se deduce, en forma análoga a la sección anterior, si consideramos los siguientes isomorfismos de espacios de cohomología de Lie relativa a \mathfrak{sl}_2 :

$$C^2(\mathbb{C}^{2k}, \mathbb{C}^{2k})^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}, \mathbb{C}^{2k}) \quad \text{y} \quad C^2(\mathbb{C}^{2k}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}, \mathfrak{sl}_2)$$

y utilizamos las descomposiciones en \mathfrak{sl}_2 -módulos irreducibles:

$$\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k} = \bigoplus_{i=1}^k V(4k - 4i), \quad \mathfrak{sl}_2 = V(2) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^{2k} = V(2k - 1),$$

entonces, como no existen aplicaciones lineales compatibles con la acción de \mathfrak{sl}_2 entre $\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}$ y \mathbb{C}^{2k} , ni entre $\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}$ y \mathfrak{sl}_2 , por el Lema de Schur 3.1, se concluye

$$\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}, \mathbb{C}^{2k}) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}, \mathfrak{sl}_2) = 0.$$

Por lo tanto

$$C^2(\mathbb{C}^{2k}, \mathbb{C}^{2k})^{\mathfrak{sl}_2} = 0 \quad \text{y} \quad C^2(\mathbb{C}^{2k}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} = 0.$$

Además como \mathbb{C}^{2k} es un ideal abeliano de \mathfrak{sl}_2 , por 4.13

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow H^2(\mathbb{C}^{2k}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} = H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

Luego

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Además como $H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}^{2k}$, \mathfrak{g} no es completa.

Lema 9.1. Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}$ con \mathbb{C} factor abeliano. Entonces $\dim H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = 2$. Más aún, si $\mathbb{C}^{2k} = \langle \{a_1, \dots, a_{2k}\} \rangle$ y $\mathbb{C} = \langle \{a\} \rangle$, las clases de cohomología representadas por los dos cociclos se pueden escribir como:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes a_i \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a, \quad i\lambda_i + (2k-i)\lambda_{i+1} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Demostración. Teniendo en cuenta las descomposiciones en irreducibles de los espacios:

$$\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}) = \Lambda^2 \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2k} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{m=1}^k V(4k-4m) \oplus V(2k-1),$$

$$\mathfrak{sl}_2 = V(2), \quad \mathbb{C}^{2k} = V(2k-1) \quad \text{y} \quad \mathbb{C} = V(0),$$

y utilizando el lema de Schur 3.1, se tiene

$$\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = 0, \quad \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{sl}_2) = 0 \quad \text{y}$$

$$\dim \left(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}), \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}) \right) = 2.$$

Usando los isomorfismos clásicos de cohomología de Chevalley-Eilenberg se deduce que:

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = 0,$$

$$C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{sl}_2) = 0 \quad \text{y}$$

$$\dim \left(C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \right) = \dim \left(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}), \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}) \right) = 2.$$

Como $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g}_a por la Proposición 4.4.1, $H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{g}_a}$ es un $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}$ -módulo trivial, luego

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Reemplazando en la sucesión exacta (4.13)

$$\longrightarrow C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \longrightarrow C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow$$

y teniendo en cuenta que los espacios extremos son nulos, se concluye:

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2},$$

por lo tanto,

$$\dim(H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)) = 2.$$

Sea $\{a_1, \dots, a_{2k}\}$ una base de \mathbb{C}^{2k} y $\{a\}$ una base de \mathbb{C} . Proponemos como base del espacio:

$$C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}), \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C})$$

a los cociclos $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, linealmente independientes, definidos por:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes a_i \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a.$$

Demostremos que σ_1 y σ_2 son invariantes unidimensionales bajo la acción de \mathfrak{sl}_2 , es decir, que son vectores de peso máximo de peso 0.

Teniendo en cuenta las fórmulas 3.1,

$$h \cdot (a) = 0, \quad h \cdot (a_i) = (2k+1-2i)a_i \quad \text{y} \quad h \cdot (a^i) = -(2k+1-2i)a^i \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, 2k,$$

$$x \cdot (a) = 0, \quad x \cdot (a_i) = (i-1)a_{i-1} \quad \text{y} \quad x \cdot (a^i) = (-i)a^{i+1} \quad \text{con} \quad i = 2, \dots, 2k-1,$$

$$x \cdot (a_1) = x \cdot (a^{2k}) = 0, \quad x \cdot (a_{2k}) = (2k-1)a_{2k-1} \quad \text{y} \quad x \cdot (a^1) = -a^2.$$

- Para $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes a_i$,

$$h \cdot (\sigma_1) = \sum_{i=1}^{2k} h \cdot (a^i) \wedge a^* \otimes a_i + \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge h \cdot (a^*) \otimes a_i + \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes h \cdot (a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2k} (-2k-1+2i)a^i \wedge a^* \otimes a_i + \sum_{i=1}^{2k} (2k+1-2i)a^i \wedge a^* \otimes a_i = 0.$$

$$x \cdot (\sigma_1) = \sum_{i=1}^{2k} x \cdot (a^i) \wedge a^* \otimes a_i + \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge x \cdot (a^*) \otimes a_i + \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes x \cdot (a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2k-1} (-i)a^{i+1} \wedge a^* \otimes a_i + \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge 0 \otimes a_i + \sum_{i=2}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes (i-1)a_{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{2k-1} (-i)a^{i+1} \wedge a^* \otimes a_i + \sum_{i=1}^{2k-1} i a^{i+1} \wedge a^* \otimes a_i = 0.$$

Luego σ_1 genera un espacio irreducible unidimensional de $C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)$.

$$\bullet \text{ Para } \sigma_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a,$$

$$\begin{aligned} h \cdot (\sigma_2) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i h \cdot (a^i) \wedge a^{2k+1-i} \otimes a + \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge h \cdot (a^{2k+1-i}) \otimes a \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i (-2k-1+2i) a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a + \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge (2k+1-2i) a^{2k+1-i} \otimes a = 0. \\ x \cdot (\sigma_2) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x \cdot (a^i) \wedge a^{2k+1-i} \otimes a + \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge x \cdot (a^{2k+1-i}) \otimes a \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (-i) a^{i+1} \wedge a^{2k+1-i} \otimes a + \sum_{i=2}^k \lambda_i a^i \wedge (-2k-1+i) a^{2k+2-i} \otimes a \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (-i) a^{i+1} \wedge a^{2k+1-i} \otimes a + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{i+1} a^{i+1} \wedge (-2k+i) a^{2k+1-i} \otimes a \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i (-i) + \lambda_{i+1} (-2k+i)) a^{i+1} \wedge a^{2k+1-i} \otimes a. \end{aligned}$$

Luego, σ_2 también genera un espacio irreducible unidimensional de $C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)$ si

$$i\lambda_i + (2k-i)\lambda_{i+1} = 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, k-1.$$

Este sistema de k incógnitas con $k-1$ ecuaciones tiene solución no nula, asignándole un valor distinto de cero a uno de los parámetros, por ejemplo $\lambda_1 = 1$. A partir de esta elección, y utilizando recurrencia, se obtienen los valores restantes. Luego,

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle.$$

□

Teorema 9.2. *Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}$. Entonces, existen dos deformaciones de \mathfrak{g}_a algebraicamente rígidas:*

$\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ es completa con nilradical abeliano.

$\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ no es completa y su nilradical es no abeliano.

Demostración.

Consideremos σ_1 , el 2-cociclo del álgebra de Lie \mathfrak{g}_a , del apartado anterior,

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes a_i.$$

Como σ_1 es un corchete de Lie soluble, por ser la identidad, entonces $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ es una deformación de \mathfrak{g}_a . Claramente

$$(\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C})(\sigma_1) \simeq (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{2k}$$

donde \mathbb{C}^{2k} es la representación irreducible de \mathfrak{sl}_2 de dimensión $2k$ y la acción de \mathbb{C} sobre \mathbb{C}^{2k} es la identidad. Luego $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ es del tipo de la familia de Carles, completa con nilradical abeliano, por lo tanto es rígida.

Sea σ_2 , el 2-cociclo del álgebra de Lie \mathfrak{g}_a , del apartado anterior,

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a, \quad \text{tal que} \quad i\lambda_i + (2k-i)\lambda_{i+1} = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Como σ_2 es un corchete de Lie (nilpotente), por ser Heisenberg de dimensión $2k+1$, entonces $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es una deformación de \mathfrak{g}_a .

Como $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}$ es un ideal no abeliano de $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$, por la ecuación (4.8)

$$H^1(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = H^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)} \quad \text{y}$$

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}.$$

Aplicando la técnica del apartado anterior podemos determinar la estructura de los espacios de cocadenas que intervienen:

- Para $C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$, utilizando el isomorfismo

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))$$

y la descomposición en espacios irreducibles de

$$\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C} = V(2k-1) \oplus V(0) \quad \text{y} \quad \mathfrak{g}_a(\sigma_2) = V(2) \oplus V(2k-1) \oplus V(0),$$

concluimos que la dimensión de $C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$ es 2.

Es fácil verificar que,

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \{u_1, u_2\} \rangle,$$

con

$$(9.1) \quad u_1 = \sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i \quad \text{y} \quad u_2 = a^* \otimes a.$$

- Para $C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$, como $C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} = C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2}$, por el lema anterior

$$C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle.$$

Sean $u, v \in \{a_1, \dots, a_{2k}, a\}$, ordenados de manera estrictamente creciente, según un orden total fijado sobre el conjunto generador. Consideramos la acción de los operadores exteriores:

$$\begin{aligned}
 * \quad d_1\left(\sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i\right)(u, v) &= \sum_{i=1}^{2k} d_1(a^i \otimes a_i)(u, v) = \sum_{i=1}^{2k} ([u, a^i \otimes a_i(v)] - [v, a^i \otimes a_i(u)]) \\
 &= \sum_{i=1}^k ([u, a^i \otimes a_i(v)] - [v, a^i \otimes a_i(u)]) + \sum_{i=k+1}^{2k} ([u, a^i \otimes a_i(v)] - [v, a^i \otimes a_i(u)])
 \end{aligned}$$

Se verifica que, $d_1\left(\sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i\right)(u, v) \neq 0 \iff (u, v) = (a_i, a_{2k+1-i})$, en cuyo caso $d_1\left(\sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i\right)(a_i, a_{2k+1-i}) = 2\lambda_i a$, luego

$$d_1\left(\sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i\right) = 2\sigma_2.$$

* $d_1(a^* \otimes a)(u, v) = [u, a^* \otimes a(v)] - [v, a^* \otimes a(u)] - a^* \otimes a([u, v]) = -a^* \otimes a([u, v])$. Luego $d_1(a^* \otimes a)(u, v) = 0$, excepto en el caso que $(u, v) = (a_i, a_{2k+1-i})$ con $i = 1, \dots, k$, donde $d_1(a^* \otimes a)(a_i, a_{2k+1-i}) = -\lambda_i a$, por lo tanto

$$d_1(a^* \otimes a) = -\sigma_2$$

Se concluye entonces que, σ_2 es un coborde, es decir que su clase de cohomología es trivial, y que la combinación lineal

$$u_1 + 2u_2 = \sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i + 2a^* \otimes a \in H^1(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)).$$

$$\begin{aligned}
 * \quad d_2(\sigma_1)(a_1, a_{2k}, a) &= [a_1, \sigma_1(a_{2k}, a)] - [a_{2k}, \sigma_1(a_1, a)] + [a, \sigma_1(a_1, a_{2k})] - \sigma_1([a_1, a_{2k}], a) \\
 &+ \sigma_1([a_1, a], a_{2k}) - \sigma_1([a_{2k}, a], a_1) = [a_1, a_{2k}] - [a_{2k}, a_1] + [a, 0] - \sigma_1(a, a) + \sigma_1(0, a_{2k}) - \sigma_1(0, a_1) \\
 d_2(\sigma_1)(a_1, a_{2k}, a) &= 2\lambda_1 a, \quad \lambda_1 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Luego $d_2(\sigma_1) \neq 0$, por lo tanto

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)} = \left\{ H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} \right\}^{\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}} = 0^{\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}} = 0.$$

Observar que como

$$H^0(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = \langle a \rangle \quad \text{y} \quad H^1(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) \neq 0,$$

$\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ no es completa y su nilradical, $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}$, no es abeliano. □

Observaciones 9.3. Notemos que en esta familia, $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida y cumple que:

1. Las descomposiciones en \mathfrak{sl}_2 -módulos de $\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}$, \mathfrak{sl}_2 y \mathbb{C}^{2k} no comparten componentes irreducibles.
2. $\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}$ contiene un espacio irreducible unidimensional.

Dimensión de V impar

Ejemplos 9.4. Analizaremos de forma independiente el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^5$ por separado, la cual pertenece a la familia $\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{4k+1}$, dado que su segundo grupo de cohomología difiere del resto de los elementos de dicha familia. A partir del estudio detallado de esta álgebra, se derivarán y describirán además otras cuatro álgebras de Lie relacionadas.

1. El álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^5$ no es algebraicamente rígida. Sabemos por el resultado citado en [R], que esta álgebra de Lie no es topológicamente rígida, y por lo tanto, no es algebraicamente rígida. No obstante, nos interesa determinar explícitamente $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Al igual que los casos anteriores, dado que \mathbb{C}^5 es un ideal abeliano de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^5$, se tiene

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^2(\mathbb{C}^5, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Considerando los pesos en la descomposición en irreducibles, de:

$$\Lambda^2 \mathbb{C}^5 = V(6) \oplus V(2), \quad \mathfrak{sl}_2 = V(2) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^5 = V(4),$$

se deduce que

$$C^2(\mathbb{C}^5, \mathbb{C}^5)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2 \mathbb{C}^5, \mathbb{C}^5) = 0 \quad \text{y}$$

$$\dim(C^2(\mathbb{C}^5, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2}) = \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2 \mathbb{C}^5, \mathfrak{sl}_2)) = 1.$$

Sea $\mathbb{C}^5 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$. Los pesos de los elementos de la base de $(\Lambda^2 \mathbb{C}^5)^* \otimes \mathfrak{sl}_2$ se muestran en la siguiente tabla

Vector		h	x	y
	Peso	0	2	-2
$a^1 \wedge a^2$	-6	-6	-4	-8
$a^1 \wedge a^3$	-4	-4	-2	-6
$a^1 \wedge a^4$	-2	-2	0	-4
$a^1 \wedge a^5$	0	0	2	-2
$a^2 \wedge a^3$	-2	-2	0	-4
$a^2 \wedge a^4$	0	0	2	-2
$a^2 \wedge a^5$	2	2	4	0
$a^3 \wedge a^4$	2	2	4	0
$a^3 \wedge a^5$	4	4	6	2
$a^4 \wedge a^5$	6	6	8	4

A partir de los pesos indicados en la tabla, proponemos a

$$\sigma_3 = \lambda_1 a^1 \wedge a^5 \otimes h + \lambda_2 a^2 \wedge a^4 \otimes h + \lambda_3 a^1 \wedge a^4 \otimes x + \lambda_4 a^2 \wedge a^3 \otimes x + \lambda_5 a^2 \wedge a^5 \otimes y + \lambda_6 a^3 \wedge a^4 \otimes y,$$

de peso 0, como posible generador del espacio $C^2(\mathbb{C}^5, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2}$. La condición faltante, que debe cumplir y que debemos imponer, para que sea \mathfrak{sl}_2 -invariante es que debe ser aniquilado por la acción de x :

Escalar	Vector	Acción de x		
λ_1	$a^1 \wedge a^5 \otimes h$	$-a^2 \wedge a^5 \otimes h$	0	$-2a^1 \wedge a^5 \otimes x$
λ_2	$a^2 \wedge a^4 \otimes h$	$-2a^3 \wedge a^4 \otimes h$	$-4a^2 \wedge a^5 \otimes h$	$-2a^2 \wedge a^4 \otimes x$
λ_3	$a^1 \wedge a^4 \otimes x$	$-a^2 \wedge a^4 \otimes x$	$-4a^1 \wedge a^5 \otimes x$	0
λ_4	$a^2 \wedge a^3 \otimes x$	0	$-3a^2 \wedge a^4 \otimes x$	0
λ_5	$a^2 \wedge a^5 \otimes y$	$-2a^3 \wedge a^5 \otimes y$	0	$a^2 \wedge a^5 \otimes h$
λ_6	$a^3 \wedge a^4 \otimes y$	0	$-4a^3 \wedge a^5 \otimes y$	$a^3 \wedge a^4 \otimes h$

$$x(\sigma_3) = 0 \iff \begin{cases} -\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_5 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_6 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ -2\lambda_5 - 4\lambda_6 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = -8\lambda_2 = -2\lambda_3 = 4\lambda_4 = 2\lambda_5 = -4\lambda_6.$$

Luego

$$\sigma_3 = 8a^1 \wedge a^5 \otimes h - a^2 \wedge a^4 \otimes h - 4a^1 \wedge a^4 \otimes x + 2a^2 \wedge a^3 \otimes x + 4a^2 \wedge a^5 \otimes y - 2a^3 \wedge a^4 \otimes y$$

Teniendo en cuenta la observación 4.15:

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = C^1(\mathbb{C}^5, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} = \langle u_1 \rangle \text{ con } u_1 = \sum_{i=1}^5 a^i \otimes a_i \text{ y que}$$

$$d_2(\sigma_3) = 8d_2(a^1 \wedge a^5 \otimes h) - d_2(a^2 \wedge a^4 \otimes h) - 2d_2(a^3 \wedge a^4 \otimes y) - 4d_2(a^1 \wedge a^4 \otimes x) +$$

$$2d_2(a^2 \wedge a^3 \otimes x) + 4d_2(a^2 \wedge a^5 \otimes y) = 8(2a^1 \wedge a^2 \wedge a^5 \otimes a_2 - 2a^1 \wedge a^4 \wedge a^5 \otimes a_4) -$$

$$(-4a^1 \wedge a^2 \wedge a^4 \otimes a_1 + 4a^2 \wedge a^4 \wedge a^5 \otimes a_5) - 2(-4a^1 \wedge a^3 \wedge a^4 \otimes a_2 - 3a^2 \wedge a^3 \wedge a^4 \otimes a_3) -$$

$$4(a^1 \wedge a^2 \wedge a^4 \otimes a_1 + 2a^1 \wedge a^3 \wedge a^4 \otimes a_2 - 4a^1 \wedge a^4 \wedge a^5 \otimes a_4) + 2(-3a^2 \wedge a^3 \wedge a^4 \otimes a_3 - 4a^2 \wedge a^3 \wedge a^5 \otimes a_4) + 4(-4a^1 \wedge a^2 \wedge a^5 \otimes a_2 + 2a^2 \wedge a^3 \wedge a^5 \otimes a_4 + a^2 \wedge a^4 \wedge a^5 \otimes a_5) = 0,$$

concluimos que $H^2(\mathbb{C}^5, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_3 \rangle$, entonces

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \langle \sigma_3 \rangle.$$

- Utilizando Maple, determinamos que la deformación $\mathfrak{g}(\sigma_3)$ es un álgebra de Lie rígida. Además, dado que \mathfrak{sl}_3 es la única álgebra de Lie rígida de rango 2 y dimensión 8, según se establece en [R], concluimos que:

$$\mathfrak{g}(\sigma_3) \simeq \mathfrak{sl}_3.$$

- Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}$.

Teniendo en cuenta las descomposiciones en irreducibles de los espacios:

$$\Lambda^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}) = \Lambda^2 \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}^5 \otimes \mathbb{C} = V(6) \oplus V(2) \oplus V(4)$$

$$\mathfrak{sl}_2 = V(2), \quad \mathbb{C}^5 = V(4) \quad \text{y} \quad \mathbb{C} = V(0),$$

y utilizando el Lema de Schur 3.1, se tiene

$$\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = 0 \quad \text{y}$$

$$\dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}), \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C})) = \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{sl}_2)) = 1.$$

Usando los isomorfismos clásicos de cohomología de Chevalley-Eilenberg:

$$C^0(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \mathfrak{sl}_2^{\mathfrak{sl}_2} = 0,$$

$$\dim(C^1(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2}) = \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C})) = 2,$$

$$C^1(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = 0 \quad \text{y}$$

$$\dim(C^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}) = \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{g}_a)) = 2.$$

Como $\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}$ es un ideal de \mathfrak{g}_a , por la Proposición 4.4.1, $H^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{g}_a}$ y $H^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{g}_a}$ son $\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}$ -módulos triviales, luego

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = H^1(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = H^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Reemplazando en la sucesión exacta (4.12)

$$\longrightarrow C^0(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow C^1(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \longrightarrow C^1(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow$$

y teniendo en cuenta que los espacios extremos son nulos, se concluye:

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Si $\mathbb{C}^5 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ y $\mathbb{C} = \langle a \rangle$, es fácil verificar que

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle u_1, u_2 \rangle,$$

donde $u_1 = \sum_{i=1}^5 a^i \otimes a_i$, $u_2 = a^* \otimes a$.

En cuanto al segundo grupo de cohomología, se tiene que el espacio de 2-cocadenas invariante bajo \mathfrak{sl}_2 es:

$$C^2(\mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle,$$

donde: $\sigma_1 = \sum_{i=1}^5 a^i \wedge a^* \otimes a_i$ y σ_3 es el cociclo ya definido anteriormente. Además, como $d_2(\sigma_1) = d_2(\sigma_3) = 0$, se concluye

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle.$$

4. Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ y $\mathfrak{g}_a(\sigma_3)$ son algebraicamente rígidas, una sola completa. En el caso $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$, de Carles, el álgebra de Lie es algebraicamente rígida y completa. La demostración de esta afirmación es análoga a la presentada en el Teorema 9.2. Para el caso $\mathfrak{g}_a(\sigma_3)$, se observa que $\mathfrak{g}_a(\sigma_3) \simeq \mathfrak{g}(\sigma_3) \oplus \mathbb{C}$, donde $\mathfrak{g}(\sigma_3) \simeq \mathfrak{sl}_3$, como se estableció anteriormente.

Aplicando la Fórmula de Kunneth para la cohomología de álgebras de Lie (véase fórmula 4.7), se tiene

$$\begin{aligned} H^2(\mathfrak{g}(\sigma_3) \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}(\sigma_3) \oplus \mathbb{C}) &\simeq H^0(\mathfrak{g}(\sigma_3), \mathfrak{g}(\sigma_3)) \otimes H^2(\mathbb{C}) \oplus H^1(\mathfrak{g}(\sigma_3), \mathfrak{g}(\sigma_3)) \otimes H^1(\mathbb{C}) \oplus \\ &H^2(\mathfrak{g}(\sigma_3), \mathfrak{g}(\sigma_3)) \otimes H^0(\mathbb{C}) \oplus H^0(\mathfrak{g}(\sigma_3)) \otimes H^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \oplus H^1(\mathfrak{g}(\sigma_3)) \otimes H^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \oplus \\ &H^2(\mathfrak{g}(\sigma_3)) \otimes H^0(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

No obstante, por el Teorema de Whitehead (4.3) y considerando que:

$$H^1(\mathfrak{g}(\sigma_3), \mathfrak{g}(\sigma_3)) = H^2(\mathfrak{g}(\sigma_3), \mathfrak{g}(\sigma_3)) = 0.$$

y dado que \mathbb{C} es un álgebra de Lie abeliana unidimensional, para la cual se cumple:

$$H^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = H^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0,$$

todas las componentes de la fórmula de Kunneth se anulan. Así se concluye que

$$H^2(\mathfrak{g}(\sigma_3) \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}(\sigma_3) \oplus \mathbb{C}) = 0.$$

Con Maple, $\mathfrak{g}_a(\sigma_3)$ es algebraicamente rígida y tiene centro no nulo, luego no es completa.

Observación: en este ejemplo, $\Lambda^2 \mathbb{C}^5$ contiene una componente irreducible en común con \mathfrak{sl}_2 y no contiene componentes unidimensionales.

La familia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{4k+1}$

Esta familia, a la cual pertenece el ejemplo anterior, fue considerada por Richardson, quien verificó que para $k \neq 1$, el segundo grupo de cohomología de estas álgebras de Lie es trivial. Sin embargo, determinaremos específicamente su estructura para establecer la diferencia con el ejemplo anterior.

Si consideramos la descomposición en irreducibles de

$$\Lambda^2 \mathbb{C}^{4k+1} = \bigoplus_{i=1}^{2k} V(8k+2-4i) = V(8k-2) \oplus \cdots \oplus V(6) \oplus V(2),$$

luego

$$\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^{4k+1}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_3 \rangle, \quad \text{con } \sigma_3 \in (\Lambda^2 \mathbb{C}^{4k+1})^* \otimes \mathfrak{sl}_2.$$

Sea $\{a_1, \dots, a_{4k+1}\}$ es una base de \mathbb{C}^{4k+1} tal que

$$\begin{aligned} h \cdot (a^i) &= -(4k+2-2i)a^i \quad \text{con } i = 1, \dots, 4k+1 \\ x \cdot (a^{4k+1}) &= 0 \quad \text{y } x \cdot (a^i) = (-i)a^{i+1} \quad \text{con } i = 1, \dots, 4k \end{aligned}$$

- Determinemos los vectores de peso 0

$$\begin{array}{lll}
 h \cdot (a^i \wedge a^l \otimes h) = 0 & h \cdot (a^i \wedge a^l \otimes x) = 0 & h \cdot (a^i \wedge a^l \otimes y) = 0 \\
 (4k+2-2i) + (4k+2-2l) = 0 & (4k+2-2i) + (4k+2-2l) = 2 & (4k+2-2i) + (4k+2-2l) = -2 \\
 8k+4-2i-2l = 0 & 8k+4-2i-2l = 2 & 8k+4-2i-2l = -2 \\
 4k+2-i = l & 4k+1-i = l & 4k+3-i = l
 \end{array}$$

Proponemos

$$(9.2) \quad \sigma_3 = \sum_{i=1}^{2k} \lambda_i a^i \wedge a^{4k+2-i} \otimes h + \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i a^i \wedge a^{4k+1-i} \otimes x + \sum_{i=2}^{2k+1} \beta_i a^i \wedge a^{4k+3-i} \otimes y.$$

- Determinemos las condiciones de los escalares para que σ_3 sea vector de peso máximo.

$$\blacktriangleright x \cdot \left(\sum_{i=1}^{2k} \lambda_i a^i \wedge a^{4k+2-i} \otimes h \right) = \sum_{i=1}^{2k} (-i) \lambda_i a^{i+1} \wedge a^{4k+2-i} \otimes h + \sum_{i=2}^{2k} (-4k-2+i) \lambda_i a^i \wedge a^{4k+3-i} \otimes h +$$

$$\sum_{i=1}^{2k} (-2) \lambda_i a^i \wedge a^{4k+2-i} \otimes x = \sum_{i=1}^{2k-1} [(-i) \lambda_i + (-4k-1+i) \lambda_{i+1}] a^{i+1} \wedge a^{4k+2-i} \otimes h +$$

$$\lambda_{2k} (-2k) a^{2k+1} \wedge a^{2k+2} \otimes h + (-2) \lambda_1 a^1 \wedge a^{4k+1} \otimes x + \sum_{i=2}^{2k} (-2) \lambda_i a^i \wedge a^{4k+2-i} \otimes x,$$

$$\blacktriangleright x \cdot \left(\sum_{i=1}^{2k} \alpha_i a^i \wedge a^{4k+1-i} \otimes x \right) = \sum_{i=1}^{2k} (-i) \alpha_i a^{i+1} \wedge a^{4k+1-i} \otimes x + \sum_{i=1}^{2k} (-4k-1+i) \alpha_i a^i \wedge a^{4k+2-i} \otimes x =$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} [(-i) \alpha_i + (-4k+i) \alpha_{i+1}] a^{i+1} \wedge a^{4k+1-i} \otimes x + (-4k) \alpha_1 a^1 \wedge a^{4k+1} \otimes x,$$

$$\blacktriangleright x \cdot \left(\sum_{i=2}^{2k+1} \beta_i a^i \wedge a^{4k+3-i} \otimes y \right) = \sum_{i=2}^{2k+1} (-i) \beta_i a^{i+1} \wedge a^{4k+3-i} \otimes y + \sum_{i=2}^{2k} (-4k-3+i) \beta_i a^i \wedge a^{4k+4-i} \otimes y +$$

$$\sum_{i=2}^{2k+1} \beta_i a^i \wedge a^{4k+3-i} \otimes h = \sum_{i=1}^{2k-1} [(-i-1) \beta_{i+1} + (-4k-1+i) \beta_{i+2}] a^{i+2} \wedge a^{4k+2-i} \otimes y +$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \beta_{i+1} a^{i+1} \wedge a^{4k+2-i} \otimes h + \beta_{2k+1} a^{2k+1} \wedge a^{2k+2} \otimes h.$$

Por lo tanto

$$x \cdot (\sigma_3) = \sum_{i=1}^{2k-1} [(-i) \lambda_i + (-4k-1+i) \lambda_{i+1} + \beta_{i+1}] a^{i+1} \wedge a^{4k+2-i} \otimes h +$$

$$\left[\lambda_{2k} (-2k) + \beta_{2k+1} \right] a^{2k+1} \wedge a^{2k+2} \otimes h + \left[-2\lambda_1 + (-4k) \alpha_1 \right] a^1 \wedge a^{4k+1} \otimes x +$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \left[-2\lambda_{i+1} + (-i) \alpha_i + (-4k+i) \alpha_{i+1} \right] a^{i+1} \wedge a^{4k+1-i} \otimes x +$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} [(-i-1)\beta_{i+1} + (-4k-1+i)\beta_{i+2}] a^{i+2} \wedge a^{4k+2-i} \otimes y = 0$$

si

$$\begin{cases} \beta_{2k+1} = 2k\lambda_{2k} \\ (i+1)\beta_{i+1} + (4k+1-i)\beta_{i+2} = 0 \\ i\lambda_i + (4k+1-i)\lambda_{i+1} = \beta_{i+1} & \text{con } i = 1, \dots, 2k-1. \\ 2k\alpha_1 = -\lambda_1 \\ 2\lambda_{i+1} + (4k-i)\alpha_{i+1} + i\alpha_i = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución no trivial, asignándole un valor distinto de cero a una de las incógnitas, por ejemplo $\lambda_{2k} = 1$, obtenemos los restantes.

$$\begin{aligned} d_2(\sigma_3)(a_1, a_{2k}, a_{2k+2}) &= [a_1, \underbrace{\sigma_3(a_{2k}, a_{2k+2})}_{=\lambda_{2k}h}] - [a_{2k}, \underbrace{\sigma_3(a_1, a_{2k+2})}_{=0, k>1}] + [a_{2k+2}, \underbrace{\sigma_3(a_1, a_{2k})}_{=0}] - \\ &\sigma_3(\underbrace{[a_1, a_{2k}]_{=0}, a_{2k+2}) + \sigma_3(\underbrace{[a_1, a_{2k+2}]_{=0}, a_{2k}) - \sigma_3(\underbrace{[a_{2k}, a_{2k+2}]_{=0}, a_1) = -\lambda_{2k}h(a_1), \\ d_2(\sigma_3)(a_1, a_{2k}, a_{2k+2}) &= \lambda_{2k}(-4k+1)a_1 \neq 0 \quad \text{si } k > 1. \end{aligned}$$

Luego

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Lema 9.5. Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}$, tal que $k > 1$. Entonces $\dim(H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)) = 1$. Más aún, si $\mathbb{C} = \langle a \rangle$ y $\mathbb{C}^{4k+1} = \langle a_1, \dots, a_{4k+1} \rangle$ y $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{4k+1} a^i \wedge a^* \otimes a_i$, se verifica que

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_1 \rangle.$$

Demostración. Considerando la descomposición en irreducibles de los espacios:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}) &\simeq \Lambda^2(\mathbb{C}^{4k+1}) \oplus \mathbb{C}^{4k+1} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^{2k} V(8k+2-4i) \oplus V(4k) \\ &\simeq V(8k-2) \oplus \dots \oplus V(6) \oplus V(2) \oplus V(4k) \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_a = V(2) \oplus V(4k) \oplus V(0)$, entonces se tiene

$$\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = C^0(\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = 0$$

y

$$\dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C})) = \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{g}_a)) = 2.$$

Dado que $\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g}_a , se deduce que:

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1(\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle u_1, u_2 \rangle \quad \text{donde: } u_1 = \sum_{i=1}^{4k+1} a^i \otimes a_i \quad \text{y} \quad u_2 = a^* \otimes a.$$

Asimismo, se tiene:

$$C^2(\mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle \quad \text{con } \sigma_1 = \sum_{i=1}^{4k+1} a^i \wedge a^* \otimes a_i \quad \text{y} \quad \sigma_3 \text{ del apartado anterior.}$$

Análogamente al resultado obtenido para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^{4k+1}$ y al Lema 9.1, se verifica que:

$$d_2(\sigma_3) \neq 0 \quad \text{y} \quad d_2(\sigma_1) = 0.$$

Por lo tanto

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_1 \rangle.$$

□

Teorema 9.6. Para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$

Sea el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathbb{C}^{4k+1} \oplus \mathbb{C}$, y sea $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{4k+1} a^i \wedge a^* \otimes a_i$ un 2-cociclo no trivial. Entonces $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ es una deformación algebraicamente rígida y completa.

Demostración. Sea σ_1 el el 2-cociclo definido anteriormente. Tal como se hizo en el teorema 9.2, se construye el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a(\sigma_1) \simeq (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}) \ltimes_{\sigma_1} \mathbb{C}^{4k+1} = \mathfrak{g}_c$$

donde \mathfrak{g}_c es un álgebra de Lie del tipo Carles, luego $\mathfrak{g}_a(\sigma_1)$ es completa y por lo tanto algebraicamente rígida. □

Observaciones 9.7. Notemos que en esta familia:

1. La descomposición en \mathfrak{sl}_2 -módulos de $\Lambda^2 \mathbb{C}^{4k+1}$ y \mathfrak{sl}_2 comparten una componente irreducible. Para $k > 1$, $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$.
2. $\Lambda^2 \mathbb{C}^{4k+1}$ no contiene un espacio irreducible unidimensional.

9.2 Casos V reducible con dos módulos irreducibles

9.2.1 De dimensiones pares

Consideramos el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \ltimes (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}),$$

donde $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}$ es un módulo completamente reducible bajo la acción diagonal de \mathfrak{sl}_2 .

Ejemplos 9.8. Estudiaremos en detalle, como una instancia particular, el caso excepcional $k = j = 1$, en el sentido del resultado, y a partir de él derivaremos tres ejemplos adicionales mediante extensiones específicas, construcciones de cociclos. Esto ofrece diferentes vías para construir y clasificar nuevas álgebras de Lie, muchas de las cuales presentan rigidez algebraica.

1. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \ltimes (\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)$. Como $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g} , por las ecuaciones (4.9),

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y}$$

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Consideremos la descomposición en irreducibles de:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = V(0) \oplus V(0)(V(2) \oplus V(0)) = 3V(0) \oplus V(2), \\ \mathfrak{sl}_2 &= V(2), \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^2 = V(1). \end{aligned}$$

Para $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, como

$$\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{sl}_2) = 0, \quad \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)) = 4,$$

y teniendo en cuenta el isomorfismo:

$$C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2),$$

reemplazando en la sucesión 4.12

$$0 \longrightarrow C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} = 0 \longrightarrow \dots$$

obtenemos

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4} \rangle.$$

Sea $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 = \langle a_1, a_2 \rangle \oplus \langle b_1, b_2 \rangle$. Es fácil verificar que los cuatro vectores linealmente independientes que presentamos a continuación son vectores de peso máximo de peso cero:

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= a^1 \otimes a_1 + a^2 \otimes a_2, & u_{1,2} &= b^1 \otimes b_1 + b^2 \otimes b_2, \\ u_{1,3} &= a^1 \otimes b_1 + a^2 \otimes b_2, & u_{1,4} &= b^1 \otimes a_1 + b^2 \otimes a_2. \end{aligned}$$

Para $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, como

$$\dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2), \mathfrak{g})) = 1.$$

Luego

$$C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2), \mathfrak{g}) \simeq \langle \sigma_3 \rangle,$$

con $\sigma_3 \in (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)^* \otimes \mathfrak{sl}_2$.

Los pesos de los elementos de $(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)^* \otimes \mathfrak{sl}_2$ se muestran en la siguiente tabla

Vector		h	x	y
	Peso	0	2	-2
$a^1 \wedge b^1$	-2	-2	0	-4
$a^1 \wedge b^2$	0	0	2	-2
$a^2 \wedge b^1$	0	0	2	-2
$a^2 \wedge b^2$	2	2	4	0

De la tabla proponemos a

$$\sigma_3 = \lambda_1 a^1 \wedge b^2 \otimes h + \lambda_2 a^2 \wedge b^1 \otimes h + \lambda_3 a^1 \wedge b^1 \otimes x + \lambda_4 a^2 \wedge b^2 \otimes y,$$

como vector de peso 0. Establezcamos la condición que deben cumplir los escalares para que σ_3 sea vector de peso máximo.

Escalar	Vector	Acción de x		
λ_1	$a^1 \wedge b^2 \otimes h$	$-a^2 \wedge b^2 \otimes h$	0	$-2a^1 \wedge b^2 \otimes x$
λ_2	$a^2 \wedge b^1 \otimes h$	0	$-a^2 \wedge b^2 \otimes h$	$-2a^2 \wedge b^1 \otimes x$
λ_3	$a^1 \wedge b^1 \otimes x$	$-a^2 \wedge b^1 \otimes x$	$-a^1 \wedge b^2 \otimes x$	0
λ_4	$a^2 \wedge b^2 \otimes y$	0	0	$a^2 \wedge b^2 \otimes h$

$$x(\sigma_3) = 0 \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_4.$$

Luego

$$\sigma_3 = a^1 \wedge b^2 \otimes h + a^2 \wedge b^1 \otimes h - 2a^1 \wedge b^1 \otimes x + 2a^2 \wedge b^2 \otimes y$$

$$d_2(\sigma_3)(a_1, b_1, b_2) = [a_1, \sigma_3(b_1, b_2)] - [b_1, \sigma_3(a_1, b_2)] + [b_2, \sigma_3(a_1, b_1)] - \sigma_3([a_1, b_1], b_2) \\ + \sigma_3([a_1, b_2], b_1) - \sigma_3([b_1, b_2], a_1) = -[b_1, h] + [b_2, -2x] + 0 - 0 + 0 - 0 = b_1 + 2b_1 = 3b_1 \neq 0,$$

luego $\sigma_3 \notin H^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2}$, por lo tanto $H^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} = 0$. Así,

$$H^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Por lo tanto \mathfrak{g} es algebraicamente rígida, aunque no es completa.

2. Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})$.

Como $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g}_a , por la ecuación (4.9),

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = H^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Considerando la descomposición en irreducibles de

$$\begin{aligned} \Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}) &\simeq \Lambda^2 \mathbb{C}^2 \oplus \Lambda^2 \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C} \\ &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \\ &\simeq V(0) \oplus V(0) \oplus (V(2) \oplus V(0)) \oplus V(1) \oplus V(1) \\ &\simeq 3V(0) \oplus 2V(1) \oplus V(2), \\ \mathfrak{sl}_2 &= V(2), \quad \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 = 2V(1), \quad \mathbb{C} = V(0) \text{ y} \end{aligned}$$

utilizando los isomorfismos, se deduce que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = 0, \quad \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})) = 5 \quad \text{y}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{g}_a)) = 8.$$

$$C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) = 0,$$

$$\dim(C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2}) = 5$$

$$\dim(C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}) = 8.$$

Para $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$, por la observación 4.14,

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} = \langle u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_2 \rangle.$$

Si $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} = \langle a_1, a_2 \rangle \oplus \langle b_1, b_2 \rangle \oplus \langle a \rangle$. Es fácil verificar que los cinco vectores linealmente independientes que presentamos a continuación son vectores de peso máximo de peso cero de $\Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})^* \otimes (\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= a^1 \otimes a_1 + a^2 \otimes a_2, & u_{1,2} &= b^1 \otimes b_1 + b^2 \otimes b_2, \\ u_{1,3} &= a^1 \otimes b_1 + a^2 \otimes b_2, & u_{1,4} &= b^1 \otimes a_1 + b^2 \otimes a_2, \\ u_2 &= a^* \otimes a. \end{aligned}$$

Para $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$, se puede verificar que

$$C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} : 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3 \rangle \quad \text{y}$$

$$C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_3 \rangle$$

con

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1} &= a^1 \wedge a^* \otimes a_1 + a^2 \wedge a^* \otimes a_2, & \sigma_{2,1} &= a^1 \wedge a^2 \otimes a, \\ \sigma_{1,2} &= b^1 \wedge a^* \otimes b_1 + b^2 \wedge a^* \otimes b_2, & \sigma_{2,2} &= b^1 \wedge b^2 \otimes a, \\ \sigma_{1,3} &= a^1 \wedge a^* \otimes b_1 + a^2 \wedge a^* \otimes b_2, & \sigma_{2,3} &= a^1 \wedge b^2 \otimes a - a^2 \wedge b^1 \otimes a, \\ \sigma_{1,4} &= b^1 \wedge a^* \otimes a_1 + b^2 \wedge a^* \otimes a_2, \\ \sigma_3 &= 2a^1 \wedge b^1 \otimes x - a^1 \wedge b^2 \otimes h - a^2 \wedge b^1 \otimes h - 2a^2 \wedge b^2 \otimes y. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ es abeliano,

$$d_1(u_{1,1}) = d_1(u_{1,2}) = d_1(u_{1,3}) = d_1(u_{1,4}) = d_1(u_2) = 0,$$

$$d_2(\sigma_{1,j}) = d_2(\sigma_{2,j}) = 0 \quad \text{y por el ítem 1.} \quad d_2(\sigma_3) \neq 0,$$

entonces

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{1,4}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{2,3} \rangle.$$

3. Consideremos el 2-cociclo de \mathfrak{g}_a :

$$\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2} = a^1 \wedge a^2 \otimes a + b^1 \wedge b^2 \otimes a.$$

Este define una estructura de álgebra de Lie isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 5. Luego por el Lema 5.2, se concluye que $\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2})$ es álgebra de Lie.

Como $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2})$, entonces, por ecuación (4.8)

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2})) = H^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2})}.$$

Observemos que:

$$C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}))^{\mathfrak{sl}_2} = C^1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2},$$

$$C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}))^{\mathfrak{sl}_2} = C^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Y que los diferenciales de grado uno y dos actúan como sigue:

$$d_1(u_{1,1}) = 2\sigma_{2,1}, \quad d_1(u_{1,2}) = 2\sigma_{2,2},$$

$$d_1(u_{1,3}) = d_1(u_{1,4}) = \sigma_{2,3}, \quad d_1(u_2) = -(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}),$$

$$d_2(\sigma_{1,1}) = 2a^1 \wedge a^2 \wedge a^* \otimes a + a^1 \wedge b^1 \wedge b^2 \otimes a_1 + a^2 \wedge b^1 \wedge b^2 \otimes a_2,$$

$$d_2(\sigma_{1,2}) = 2b^1 \wedge b^2 \wedge a^* \otimes a + a^1 \wedge a^2 \wedge b^1 \otimes b_1 + a^1 \wedge a^2 \wedge b^2 \otimes b_2,$$

$$d_2(\sigma_{1,3}) = a^1 \wedge b^2 \wedge a^* \otimes a - a^2 \wedge b^1 \wedge a^* \otimes a + a^1 \wedge b^1 \wedge b^2 \otimes b_1 + a^2 \wedge b^1 \wedge b^2 \otimes b_2,$$

$$d_2(\sigma_{1,4}) = -a^2 \wedge b^1 \wedge a^* \otimes a + a^1 \wedge b^2 \wedge a^* \otimes a + a^1 \wedge a^2 \wedge b^1 \otimes a_1 + a^1 \wedge a^2 \wedge b^2 \otimes a_2,$$

$$d_2(\sigma_3) = 3a^1 \wedge a^2 \wedge b^1 \otimes a_1 - 3a^1 \wedge b^1 \wedge b^2 \otimes b_1 + 3a^1 \wedge a^2 \wedge b^2 \otimes a_2 - 3a^2 \wedge b^1 \wedge b^2 \otimes b_2.$$

De lo anterior se deduce que:

$$\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2} \text{ y } \sigma_{2,3} \in \text{Im}(d_1) \quad \text{y que}$$

$$\sigma_3 + \sigma_{1,3} - 3\sigma_{1,4} \in \text{ker}(d_2).$$

Por lo tanto, se concluye que

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2})) = \langle \sigma_3 + \sigma_{1,3} - 3\sigma_{1,4} \rangle.$$

4. Consideremos el 2cociclo de \mathfrak{g}_a

$$\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_3 + \sigma_{1,3} - 3\sigma_{1,4}.$$

Utilizando Maple, se verifica que la deformación correspondiente

$$\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_3 + \sigma_{1,3} - 3\sigma_{1,4}),$$

es un álgebra de Lie algebraicamente rígida, completa con nilradical nulo, en consecuencia no es de Carles.

Observación: en este ejemplo, $\Lambda^2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)$ contiene una componente irreducible en común con \mathfrak{sl}_2 y contiene tres componentes unidimensionales.

La familia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})$

Consideremos la familia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $k \leq j$.

La descomposición en \mathfrak{sl}_2 -módulos irreducibles de:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}) &= \Lambda^2 \mathbb{C}^{2k} \oplus \Lambda^2 \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}^{2k} \otimes \mathbb{C}^{2j} \\ &= \bigoplus_{i=1}^k V(4k-4i) \oplus \bigoplus_{i=1}^j V(4j-4i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{2k} V(2k+2j-2i), \text{ ver ecuación(3.5),} \\ \mathfrak{sl}_2 &= V(2), \quad \mathbb{C}^{2k} = V(2k-1) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^{2j} = V(2j-1). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathfrak{sl}_2) &= \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}), \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}) = 0 \\ \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})) &= \begin{cases} 4 & \text{si } j = k \\ 2 & \text{si no.} \end{cases} \quad \text{y} \\ \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}), \mathfrak{sl}_2)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } |j - k| < 2 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizando los isomorfismos

$$\begin{aligned} C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}), \\ C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathfrak{sl}_2), \\ C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}), \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}), \\ C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}), \mathfrak{sl}_2). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g} ,

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq H^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2}.$$

para $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, en 4.12,

$$0 \longrightarrow C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow 0,$$

con lo que $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})^{\mathfrak{sl}_2} \neq 0$, luego no es completa.

Para $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, en 4.13,

$$\dots \longrightarrow C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow \dots.$$

- Para $|j - k| > 1$ directamente

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$$

- Para $j = k$.

Sean $\{a_1, \dots, a_{2k}\}$ y $\{b_1, \dots, b_{2k}\}$ bases de \mathbb{C}^{2k} y \mathbb{C}^{2j} . Usando la técnica de demostración para la existencia de σ_3 en la familia 9.1 y teniendo en cuenta que

$$h \cdot (a^i) = -(2k+1-2i)a^i \quad \text{y} \quad h \cdot (b^i) = -(2k+1-2i)b^i \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, 2k.$$

* Determinemos los vectores de peso 0

$$\begin{array}{lll} h \cdot (a^i \wedge b^l \otimes h) = 0 & h \cdot (a^i \wedge b^l \otimes x) = 0 & h \cdot (a^i \wedge b^l \otimes y) = 0 \\ (2k+1-2i) + (2k+1-2l) = 0 & (2k+1-2i) + (2k+1-2l) = 2 & (2k+1-2i) + (2k+1-2l) = -2 \\ 4k+2-2i-2l = 0 & 4k+2-2i-2l = 2 & 4k+2-2i-2l = -2 \\ 2k+1-i = l & 2k-i = l & 2k+2-i = l \end{array}$$

Proponemos

$$(9.3) \quad \sigma_3 = \sum_{i=1}^{2k} \lambda_i a^i \wedge b^{2k+1-i} \otimes h + \sum_{i=1}^{2k-1} \alpha_i a^i \wedge b^{2k-i} \otimes x + \sum_{i=2}^{2k} \beta_i a^i \wedge b^{2k+2-i} \otimes y.$$

* Determinemos las condiciones de los escalares para que σ_3 sea vector de peso máximo. Como

$$x \cdot (a^i) = (-i)a^{i+1}, \quad x \cdot (b^i) = (-i)b^{i+1} \quad i = 1, \dots, 2k-1 \quad \text{y} \quad x \cdot (a^{2k}) = x \cdot (b^{2k}) = 0.$$

$$\blacktriangleright x \cdot \left(\sum_{i=1}^{2k} \lambda_i a^i \wedge b^{2k+1-i} \otimes h \right) = \sum_{i=1}^{2k-1} (-i) \lambda_i a^{i+1} \wedge b^{2k+1-i} \otimes h +$$

$$\sum_{i=2}^{2k} (-2k-1+i) \lambda_i a^i \wedge b^{2k+2-i} \otimes h + \sum_{i=1}^{2k} (-2) \lambda_i a^i \wedge b^{2k+1-i} \otimes x,$$

$$\blacktriangleright x \cdot \left(\sum_{i=1}^{2k-1} \alpha_i a^i \wedge b^{2k-i} \otimes x \right) = \sum_{i=1}^{2k-1} (-i) \alpha_i a^{i+1} \wedge b^{2k-i} \otimes x + \sum_{i=1}^{2k-1} (-2k+i) \alpha_i a^i \wedge b^{2k+1-i} \otimes x,$$

$$\blacktriangleright x \cdot \left(\sum_{i=2}^{2k} \beta_i a^i \wedge b^{2k+2-i} \otimes y \right) = \sum_{i=2}^{2k-1} (-i) \beta_i a^{i+1} \wedge b^{2k+2-i} \otimes y +$$

$$\sum_{i=3}^{2k} (-2k-2+i) \beta_i a^i \wedge b^{2k+3-i} \otimes y + \sum_{i=2}^{2k} \beta_i a^i \wedge b^{2k+2-i} \otimes h.$$

Por lo tanto

$$x \cdot (\sigma_3) = \sum_{i=1}^{2k-1} [(-i)\lambda_i + (-2k+i)\lambda_{i+1} + \beta_{i+1}] a^{i+1} \wedge b^{2k+1-i} \otimes h +$$

$$\left[-2\lambda_1 - (2k-1)\alpha_1 \right] a^1 \wedge b^{2k} \otimes x + \sum_{i=2}^{2k-1} \left[-2\lambda_i + (-i+1)\alpha_{i-1} + (-2k+i)\alpha_i \right] a^i \wedge b^{2k+1-i} \otimes x +$$

$$\left[\lambda_{2k}(-2) + (-2k+1)\alpha_{2k-1} \right] a^{2k} \wedge b^1 \otimes x$$

$$+ \sum_{i=3}^{2k} [(-i+1)\beta_{i-1} + (-2k-2+i)\beta_i] a^i \wedge b^{2k+3-i} \otimes y.$$

Por lo tanto $x \cdot (\sigma_3) = 0$ si y solo si

$$\begin{cases} (-i)\lambda_i + (-2k+i)\lambda_{i+1} + \beta_{i+1} = 0 & \text{con } i = 1, \dots, 2k-1 \\ -2\lambda_1 - (2k-1)\alpha_1 = 0 \\ -2\lambda_i + (-i+1)\alpha_{i-1} + (-2k+i)\alpha_i = 0 & \text{con } i = 2, \dots, 2k-1 \\ \lambda_{2k}(-2) + (-2k+1)\alpha_{2k-1} = 0 \\ (-i+1)\beta_{i-1} + (-2k-2+i)\beta_i = 0 & \text{con } i = 3, \dots, 2k \end{cases}$$

Este sistema homogéneo, de $6k-3$ ecuaciones con $6k-2$ incógnitas, tiene soluciones no triviales. Si, para todo i , se tiene $\lambda_i = 0$ entonces la solución es trivial; luego, existe una solución con $\lambda_m \neq 0$ para algún $1 \leq m \leq 2k$.

$$\begin{aligned} d_2(\sigma_3)(a_m, b_m, b_{2k+1-m}) &= [a_m, \underbrace{\sigma_3(b_m, b_{2k+1-m})}_{=0}] - [b_m, \underbrace{\sigma_3(a_m, b_{2k+1-m})}_{\lambda_m h}] + \\ & [b_{2k+1-m}, \underbrace{\sigma_3(a_m, b_m)}_{=\delta_{m,2k}\lambda_1 h + \delta_{m,2k-1}\alpha_1 x}] - \sigma_3(\underbrace{[a_m, b_m]}_{=0}, b_{2k+1-m}) + \sigma_3(\underbrace{[a_m, b_{2k+1-m}]}_{=0}, b_m) - \\ & \sigma_3(\underbrace{[b_m, b_{2k+1-m}]}_{=0}, a_m) = \lambda_m [h, b_m] + [b_{2k+1-m}, \delta_{m,2k}\lambda_1 h + \delta_{m,2k-1}\alpha_1 x]. \end{aligned}$$

Luego

$$d_2(\sigma_3)(a_m, b_m, b_{2k+1-m}) = \lambda_m [h, b_m] + [b_{2k+1-m}, \delta_{m,2k}\lambda_1 h + \delta_{m,2k-1}\alpha_1 x].$$

Si $m \neq 2k-1$,

$$d_2(\sigma_3)(a_m, b_m, b_{2k+1-m}) = \lambda_m(2k+1-2m)b_m - \delta_{m,2k}\lambda_1(2m-2k-1)b_{2k+1-m} \neq 0.$$

Si $m = 2k-1$, (el caso $j = k = 1$ ya se analizó)

$$d_2(\sigma_3)(a_{2k-1}, b_2, b_4) = \lambda_m(2k-7)b_4 \neq 0.$$

Por lo tanto $H^2(g, g) = 0$ si $j = k$

• Para $j = k+1$, si $\{a_1, \dots, a_{2k}\}$ y $\{b_1, \dots, b_{2k+2}\}$ bases de \mathbb{C}^{2k} y \mathbb{C}^{2k+2} se realiza un análisis análogo al caso $k = j$.

*Determinamos los vectores de peso cero. Proponemos:

$$(9.4) \quad \sigma_3 = \sum_{i=1}^{2k} \lambda_i a^i \wedge b^{2k+2-i} \otimes h + \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i a^i \wedge b^{2k+1-i} \otimes x + \sum_{i=1}^{2k} \beta_i a^i \wedge b^{2k+3-i} \otimes y.$$

*Determinamos condiciones en los escalares para que σ_3 sea vector de peso máximo.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -k\alpha_1 \\ \beta_1 = (2k+1)\lambda_1 \\ i\beta_i + (2k+2-i)\beta_{i+1} = 0 & \text{con } i = 1, \dots, 2k-1 \\ i\lambda_i + (2k+1-i)\lambda_{i+1} - \beta_{i+1} = 0 \\ 2\lambda_{i+1} + (2k-i)\alpha_{i+1} + i\alpha_i = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución, asignándole un valor distinto de cero a una de ellas, por ejemplo a $\alpha_1 = 1$, ($\lambda_1 \neq 0$), obtenemos los restantes.

$$\begin{aligned} d_2(\sigma_3)(a_1, b_1, b_{2k+1}) &= [a_1, \underbrace{\sigma_3(b_1, b_{2k+1})}_{=0}] - [b_1, \underbrace{\sigma_3(a_1, b_{2k+1})}_{\lambda_1 h}] + [b_{2k+1}, \underbrace{\sigma_3(a_1, b_1)}_{=0}] - \\ &\sigma_3(\underbrace{[a_1, b_1]}_{=0}, b_{2k+1}) + \sigma_3(\underbrace{[a_1, b_{2k+1}]}_{=0}, b_1) - \sigma_3(\underbrace{[b_1, b_{2k+1}]}_{=0}, a_1) = \lambda_1 h(b_1) = \\ d_2(\sigma_3)(a_1, b_1, b_{2k+1}) &= \lambda_1(2k+1)b_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Luego $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$ si $j = k+1$,
Por lo tanto, $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})$ es algebraicamente rígida, no completa.

Lema 9.9. Si $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}$. Entonces $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0$. Más aún

$$\dim(H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)) = \begin{cases} 7 & \text{si } j = k \\ 4 & \text{si no} \end{cases}.$$

Demostración.

Consideremos $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $k \leq j$.

La descomposición en \mathfrak{sl}_2 -módulos irreducibles de:

$$\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}) = \Lambda^2\mathbb{C}^{2k} \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}^{2k} \otimes \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}^{2k} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{2j} \otimes \mathbb{C} \quad \text{ver ecuación(3.5),}$$

$$\begin{aligned} &= \bigoplus_{i=1}^k V(4k-4i) \oplus \bigoplus_{i=1}^j V(4j-4i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{2k} V(2k+2j-2i) \oplus V(2k-1) \oplus V(2j-1), \\ \mathfrak{sl}_2 &= V(2), \quad \mathbb{C}^{2k} = V(2k-1), \quad \mathbb{C}^{2j} = V(2j-1) \quad \text{y} \quad \mathbb{C} = V(0). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2) &= 0 \\ \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C})) &= \begin{cases} 5 & \text{si } j = k \\ 3 & \text{si no.} \end{cases}, \\ \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{g}_a)) &= \begin{cases} 8 & \text{si } j = k \\ 5 & \text{si } j = k+1 \\ 4 & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizando los isomorfismos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2), \\ \mathbb{C}^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}), \end{aligned}$$

$$\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{g}_a)$$

y teniendo en cuenta que, como $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g}_a ,

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq H^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Para $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$, particularizando estos resultados en la sucesión exacta descrita en 4.12:

$$0 \longrightarrow C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \longrightarrow 0,$$

concluimos que $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \neq 0$.

Para $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$

$$C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \begin{cases} \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j}, \sigma_3, \sigma_{1,3}, \sigma_{1,4}, \sigma_5 \rangle & \text{si } j = k \\ \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j}, \sigma_3 \rangle & \text{si } j = k + 1 \\ \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j} \rangle & \text{si no} \end{cases}$$

Sean $\langle a_1, \dots, a_{2k} \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_{2j} \rangle$ y $\langle a \rangle$ bases de \mathbb{C}^{2k} , \mathbb{C}^{2j} y \mathbb{C} respectivamente. Es fácil verificar que los siguientes vectores linealmente independientes son vectores de peso máximo de peso cero:

$$(9.5) \quad \sigma_{1,k} = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes a_i,$$

$$\sigma_{1,j} = \sum_{i=1}^{2j} b^i \wedge a^* \otimes b_i,$$

$$(9.6) \quad \sigma_{2,k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a, \quad \text{con } i\lambda_i + (2k-i)\lambda_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, k-1,$$

$$\sigma_{2,j} = \sum_{i=1}^j \alpha_i b^i \wedge b^{2j+1-i} \otimes a, \quad \text{con } i\alpha_i + (2j-i)\alpha_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, j-1,$$

σ_3 de la familia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}$

$$(9.7) \quad \sigma_{1,3} = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes b_i$$

,

$$\sigma_{1,4} = \sum_{i=1}^{2k} b^i \wedge a^* \otimes a_i \quad \text{y}$$

$$(9.8) \quad \sigma_5 = \sum_{i=1}^{2k} \beta_i a^i \wedge b^{2k+1-i} \otimes a, \quad \text{con } i\beta_i + (2k-i)\beta_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, 2k-1$$

Observaciones 9.10. 1. Para $1 \leq i \leq k$, la i -ésima y la $2k - i$ -ésima ecuación de los escalares de σ_5 son equivalentes, esto es

$$i\beta_i + (2k - i)\beta_{i+1} = 0, \quad (2k - i)\beta_{2k-i} + i\beta_{2k-i+1} = 0,$$

luego β_{2k-i+1} son múltiplos escalares de β_i para $1 \leq i \leq k$, en particular los podemos considerar opuestos.

2. Las ecuaciones que verifican los escalares de $\sigma_{2,k}$, (ídem $\sigma_{2,j}$) son las mismas para $1 \leq i \leq k - 1$ a los de σ_5 .

Utilizando que $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2}$ y que $d_2(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}$ excepto $d_2(\sigma_3) \neq 0$ (de la familia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \ltimes (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})$), concluimos

$$H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \begin{cases} \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j}, \sigma_{1,3}, \sigma_{1,4}, \sigma_5 \rangle & \text{si } j = k \\ \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j} \rangle & \text{si no} \end{cases}$$

□

Teorema 9.11. Sean $\sigma_{2,k}$ y $\sigma_{2,j}$ los 2-cociclos del álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \ltimes (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}).$$

Si $k \neq 1$ (ó $j \neq 1$), entonces $\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j})$ es una deformación de \mathfrak{g}_a , que es algebraicamente rígida y no completa.

Demostración.

Sean los 2-cocíclos del álgebra de Lie \mathfrak{g}_a , del Lema anterior,

$$\sigma_{2,k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a, \quad \text{con } i\lambda_i + (2k - i)\lambda_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, k - 1,$$

$$\sigma_{2,j} = \sum_{i=1}^j \alpha_i b^i \wedge b^{2j+1-i} \otimes a, \quad \text{con } i\alpha_i + (2j - i)\alpha_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, j - 1,$$

Como $\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j}$ es un corchete de Lie, por ser Heisemberg de dimensión $2k + 2j + 1$, entonces $\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j})$ es una deformación de \mathfrak{g}_a .

Los espacios

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j}))^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j}))^{\mathfrak{sl}_2}$$

coinciden con

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}$$

respectivamente. Del Lema anterior

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \begin{cases} \langle u_{1,k}, u_{1,j}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_2 \rangle & \text{si } j = k \\ \langle u_{1,k}, u_{1,j}, u_2 \rangle & \text{si no} \end{cases}$$

Si $\langle a_1, \dots, a_{2k} \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_{2j} \rangle$ y $\langle a \rangle$ bases de \mathbb{C}^{2k} , \mathbb{C}^{2j} y \mathbb{C} respectivamente. Es fácil verificar que los siguientes vectores linealmente independientes son vectores de peso máximo de peso cero:

$$(9.9) \quad u_{1,k} = \sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i, \quad u_{1,j} = \sum_{i=1}^{2j} b^i \otimes b_i,$$

$$(9.10) \quad u_{1,3} = \sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes b_i, \quad u_{1,4} = \sum_{i=1}^{2j} b^i \otimes a_i,$$

$$(9.11) \quad u_2 = a^* \otimes a.$$

Y

$$\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \begin{cases} \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j}, \sigma_3, \sigma_{1,3}, \sigma_{1,4}, \sigma_5 \rangle & \text{si } j = k \\ \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j}, \sigma_3 \rangle & \text{si } j = k + 1 \\ \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_{2,j} \rangle & \text{si no} \end{cases}$$

con:

$\sigma_{1,k}$ y $\sigma_{1,j}$, ver ecuación (9.5), $\sigma_{2,k}$ y $\sigma_{2,j}$, ver ecuación (9.6)

σ_3 de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}$, $k = j$ ver ecuación (9.3), $j = k + 1$ ver ecuación (9.4)

$\sigma_{1,3}$, y $\sigma_{1,4}$ ver ecuación (9.7) y

σ_5 ver ecuación (9.8).

Sean $u, v \in \{a_1, \dots, a_{2k}, b_1, \dots, b_{2j}, a\}$, ordenados en forma estrictamente creciente en el sentido de este conjunto ordenado.

- De igual manera que en el Teorema 9.2

$$d_1(u_{1,k}) = 2\sigma_{2,k} \quad \text{y} \quad d_1(u_{1,j}) = 2\sigma_{2,j}.$$

- Para el caso $j = k$

$$d_1(a^i \otimes b_i)(u, v) = \underbrace{[u, a^i \otimes b_i(v)]}_{=0} - [v, a^i \otimes b_i(u)] - \underbrace{a^i \otimes b_i([u, v])}_{=0}.$$

Si $1 \leq i \leq k$, cuando $u = a_i$ $v = b_{2k+1-i}$, $d_1(a^i \otimes a_i)(a_i, b_{2k+1-i}) = \alpha_i a$,

si $k+1 \leq i \leq 2k$, cuando $u = a_i$ y $v = b_{2k+1-i}$, $d_1(a^i \otimes a_i)(a_i, b_{2k+1-i}) = -\alpha_i a$

y por la observación 9.10

$$d_1(u_{1,3}) = \sigma_5.$$

Observación 9.12. Observemos que los cociclos $\sigma_{2,k}$, $\sigma_{2,j}$ y (en su caso) σ_5 pertenecen a la imagen del operador d_1 . Por lo tanto representan la clase nula en el grupo de cohomología $H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j}))$. Analicemos el comportamiento de los restantes .

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad d_2(\sigma_{1,k})(a_1, a_{2k}, a) &= [a_1, \sigma_{1,k}(a_{2k}, a)] - [a_{2k}, \sigma_{1,k}(a_1, a)] + [a, \sigma_{1,k}(a_1, a_{2k})] - \\
 &\quad \sigma_{1,k}([a_1, a_{2k}], a) + \sigma_{1,k}([a_1, a], a_{2k}) - \sigma_{1,k}([a_{2k}, a], a_1) = \\
 &\quad [a_1, a_{2k}] - [a_{2k}, a_1] + [a, 0] - \sigma_{1,k}(\lambda_1 a, a) + \sigma_{1,k}(0, a_{2k}) - \sigma_{1,k}(0, a_1) = 2a \neq 0
 \end{aligned}$$

Veamos que es linealmente independiente de los dos restantes,

$$d_2(\sigma_{1,j})(a_1, a_{2k}, a) = [a_1, 0] - [a_{2k}, 0] + [a, 0] - \sigma_{1,j}(\lambda_1 a, a) + \sigma_{1,j}(0, a_{2k}) - \sigma_{1,j}(0, a_1) = 0,$$

$$d_2(\sigma_3)(a_1, a_{2k}, a) = d_2(\sigma_{1,3})(a_1, a_{2k}, a) = d_2(\sigma_{1,4})(a_1, a_{2k}, a) = 0.$$

• De la misma manera (en los casos que existan)

$$d_2(\sigma_{1,j})(b_1, b_{2k}, a) = 2a,$$

$$d_2(\sigma_3)(b_1, b_{2k}, a) = d_2(\sigma_{1,3})(b_1, b_{2k}, a) = d_2(\sigma_{1,4})(b_1, b_{2k}, a) = 0.$$

$$\bullet \quad d_2(\sigma_3)(a_1, b_{2k-2}, b_{2k}) = \lambda_1(-2k+3)b_{2k-2}$$

$$d_2(\sigma_{1,3})(a_1, b_{2k-2}, b_{2k}) = d_2(\sigma_{1,4})(a_1, b_{2k-2}, b_{2k}) = 0$$

$$\bullet \quad d_2(\sigma_{1,3})(a_1, b_1, b_{2k}) = b_1$$

Luego

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j})) = 0.$$

Observar que: $H^0(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = \langle a \rangle.$

Además

$$d_1(u_2)(u, v) = d_1(a^* \otimes a)(u, v) = [u, a^* \otimes a(v)] - [v, a^* \otimes a(u)] - a^* \otimes a[u, v] = -a^* \otimes a[u, v]$$

$$= \begin{cases} -\lambda_i a & \text{si } u = a_i, \quad v = a_{2k+1-i} \quad i = 1, \dots, k \\ -\alpha_i a & \text{si } u = b_i, \quad v = b_{2k+1-i} \quad i = 1, \dots, j \end{cases}$$

Luego $d_1(u_2) = -\sigma_{2,k} - \sigma_{2,j}$. Por lo tanto

$$u_{1,k} + u_{1,j} + 2u_2 \in H^1(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k} + \sigma_{2,j})) \neq 0$$

□

Observaciones 9.13. Notemos que en esta familia, la deformación $\mathfrak{g}(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida, sin mucha complicación en la demostración, en el caso que:

1. Las descomposiciones en \mathfrak{sl}_2 -módulos de $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})$, \mathfrak{sl}_2 y $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}$ no comparten componentes irreducibles en común, $|j - k| > 1$.
2. $\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}$ contiene dos espacios irreducibles unidimensionales, uno de cada irreducible de la representación.

9.2.2 Dos irreducibles de dimensiones par e impar

La familia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1})$

Como $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g} , por las ecuaciones (4.9),

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Consideremos la descomposición en \mathfrak{sl}_2 -módulos irreducibles de

$$\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}) = \bigoplus_{m=1}^k V(4k-4m) \oplus \bigoplus_{m=1}^{2j} V(8j+2-4m) \oplus \bigoplus_{m=1}^l V(2k+4j+1-2m),$$

con $l = \min\{2k, 4j\}$,

$$\mathfrak{sl}_2 = V(2), \quad \mathbb{C}^{2k} = V(2k-1) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^{4j+1} = V(4j).$$

Observemos que:

$$8j+2-4m=2 \text{ si y solo si } m=2j,$$

$$2k+4j+1-2m=2k-1 \text{ si y solo si } m=2j+1, \text{ y esto sucede si } j < k,$$

$$4k-4m=4j \text{ si y solo si } m=j, \text{ y esto sucede si } j < k,$$

$$8j+2-4m=4j \text{ si y solo si } m=j+1/2, \text{ esto no sucede nunca.}$$

Luego teniendo en cuenta el isomorfismo

$$\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}), \mathfrak{g})$$

y el Lema de Schur 3.1,

$$\dim(\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{sl}_2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq j \\ 3 & \text{si no} \end{cases}.$$

Si consideramos $k \leq j$,

$$\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_3 \rangle, \quad \text{con } \sigma_3 \in \Lambda^2(\mathbb{C}^{4k+1})^* \otimes \mathfrak{sl}_2.$$

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado en la familia $\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{4k+1}$, si $\{b_1, \dots, b_{4j+1}\}$ es una base de \mathbb{C}^{4j+1} , por la ecuación (9.2)

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{2j} \lambda_i b^i \wedge b^{4j+2-i} \otimes h + \sum_{i=1}^{2j} \alpha_i b^i \wedge b^{4j+1-i} \otimes x + \sum_{i=2}^{2j+1} \beta_i b^i \wedge b^{4j+3-i} \otimes y,$$

con

$$\begin{cases} \beta_{2j+1} = 2j\lambda_{2j} \\ i\beta_i + (4j+2-i)\beta_{i+1} = 0 & \text{con } i = 2, \dots, 2j \\ i\lambda_i + (4j+1-i)\lambda_{i+1} - \beta_{i+1} = 0 & \text{con } i = 1, \dots, 2j-1 \\ \lambda_1 + 2j\alpha_1 = 0 \\ 2\lambda_{i+1} + i\alpha_i + (4j-i)\alpha_{i+1} = 0 & \text{con } i = 1, \dots, 2j-1 \end{cases}$$

Este sistema, ordenado convenientemente tiene solución. Asignado un valor a uno de ellos distinto de cero, por ejemplo a $\lambda_{2j} = 1$, determinamos los restantes.

Consideremos $\{a_1, \dots, a_{2k}\}$ base de \mathbb{C}^{2k} ,

$$d_2(\sigma_3)(a_1, b_1, b_{4j+1}) = [a_1, \underbrace{\sigma_3(b_1, b_{4j+1})}_{=\lambda_1 h}] - [b_1, \underbrace{\sigma_3(a_1, b_{4j+1})}_{=0}] + [b_{4j+1}, \underbrace{\sigma_3(a_1, b_1)}_{=0}] -$$

$$\begin{aligned} \sigma_3(\underbrace{[a_1, b_1]}_{=0}, b_{4j+1}) + \sigma_3(\underbrace{[a_1, b_{4j+1}]}_{=0}, b_1) - \sigma_3(\underbrace{[b_1, b_{4j+1}]}_{=0}, a_1) = \\ -\lambda_1 h(a_1) = -\lambda_1(2k-1)a_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Luego

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Lema 9.14. Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}$, entonces $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0$.

Más aún, si $k < j$, se tiene: $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k} \rangle$, donde

$$\sigma_{1,k} = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes a_i, \quad \sigma_{1,j} = \sum_{i=1}^{4j+1} b^i \wedge a^* \otimes b_i \quad y$$

$$\sigma_{2,k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a, \quad i\lambda_i + (2k-i)\lambda_{i+1} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1,$$

siendo $\mathbb{C}^{2k} = \langle a_1, \dots, a_{2k} \rangle$, $\mathbb{C}^{4j+1} = \langle b_1, \dots, b_{4j+1} \rangle$ y $\mathbb{C} = \langle a \rangle$.

Demostración.

Como $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}$ es un ideal abeliano de $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}$, por las ecuaciones (4.9),

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq H^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} \quad y \quad H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}.$$

La descomposición en suma de \mathfrak{sl}_2 representaciones irreducibles de:

- $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}) \simeq \Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}) \oplus \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}$

$$= \bigoplus_{m=1}^k V(4k-4m) \bigoplus_{m=1}^{2j} V(8j+2-4m) \bigoplus_{m=1}^l V(2k+4j+1-2m) \oplus V(2k-1) \oplus V(4j),$$

- $\mathfrak{sl}_2 = V(2)$, $\mathbb{C}^{2k} = V(2k-1)$ y $\mathbb{C}^{4j+1} = V(4j)$.

Teniendo en cuenta los isomorfismos

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C})$$

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)$$

$$C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{g}_a)$$

y el Lema de Schur 3.1,

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2)^{\mathfrak{sl}_2} = 0,$$

$$\dim(C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2}) = 3,$$

$$\dim(C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}) = 4 \quad \text{si } k < j.$$

Si consideramos $\{a_1, \dots, a_{2k}\}$, $\{b_1, \dots, b_{4j+1}\}$ y $\{a\}$ bases de \mathbb{C}^{2k} , \mathbb{C}^{4j+1} y \mathbb{C} respectivamente, para $k < j$:

$$C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_3 \rangle,$$

con

$$\sigma_{1,k} = \sum_{i=1}^{2k} a^i \wedge a^* \otimes a_i, \quad \sigma_{1,j} = \sum_{i=1}^{4j+1} b^i \wedge a^* \otimes b_i,$$

$$\sigma_{2,k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a \quad \text{y} \quad \sigma_3 \quad \text{ídem ecuación (9.2).}$$

En forma análoga

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} = \langle u_{1,k}, u_{1,j}, u_2 \rangle,$$

con $u_{1,k} = \sum_{i=1}^{2k} a^i \otimes a_i$, $u_{1,j} = \sum_{i=1}^{4j+1} b^i \otimes b_i$ y $u_2 = a^* \otimes a$.

Para $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$, particularizando estos resultados en la sucesión exacta descrita en 4.12,

$$0 \longrightarrow C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \longrightarrow 0,$$

concluimos

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{sl}_2} = \langle u_{1,k}, u_{1,j}, u_2 \rangle.$$

Para $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$, como $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}$ es abeliano

$$d_2(\sigma_{1,k}) = d_2(\sigma_{1,j}) = d_2(\sigma_{2,k}) = 0 \quad \text{y} \quad d_2(\sigma_3) \neq 0 \quad \text{ver familia } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1}.$$

Luego

$$H^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k} \rangle.$$

Por lo tanto

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k} \rangle$$

□

Teorema 9.15. *Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}$. Si $k < j$, entonces $\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k})$, con $\sigma_{2,k}$ del lema anterior, es algebraicamente rígida y no completa.*

Demostración. Consideremos el 2-cociclo del álgebra de Lie \mathfrak{g}_a , del Lema anterior,

$$\sigma_{2,k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \wedge a^{2k+1-i} \otimes a.$$

Como σ_2 es un corchete de Lie, por ser Heisenberg de dimensión $2k+1$, $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es una deformación de \mathfrak{g}_a .

$$C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}))^{\mathfrak{sl}_2} = C^1(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle u_{1,k}, u_{1,j}, u_2 \rangle$$

y

$$C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}))^{\mathfrak{sl}_2} = C^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{4j+1} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \sigma_{1,k}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,k}, \sigma_3 \rangle.$$

Sean $u, v \in \{a_1, \dots, a_{2k}, b_1, \dots, b_{4j+1}, a\}$, ordenados en forma estrictamente creciente en el sentido de este conjunto ordenado,

$$\bullet \quad d_1(a^* \otimes a)(u, v) = \underbrace{[u, a^* \otimes a(v)]}_{=0} - \underbrace{[v, a^* \otimes a(u)]}_{=0} - a^* \otimes a([u, v]) = -a^* \otimes a([u, v])$$

Si $u = a_i$ y $v = a_{2k+1-i}$ con $i = 1, \dots, k$, $d_1(a^* \otimes a)(a_i, a_{2k+1-i}) = -\lambda_i a$, por lo tanto $d_1(a^* \otimes a) = -\sigma_{2,k}$. Luego

$$\sigma_{2,k} \notin \ker(d_2)$$

$$\bullet \quad d_2(\sigma_3)(a_1, b_1, b_{4j+1}) = -\lambda_1(2k-1)a_1 \neq 0$$

$$d_2(\sigma_{1,k})(a_1, b_1, b_{4j+1}) = [a_1, \sigma_{1,k}(b_1, b_{4j+1})] - [b_1, \sigma_{1,k}(a_1, b_{4j+1})] + [b_{4j+1}, \sigma_{1,k}(a_1, b_1)] - \sigma_{1,k}([a_1, b_1], b_{4j+1}) + \sigma_{1,k}([a_1, b_{4j+1}], b_1) - \sigma_{1,k}([b_1, b_{4j+1}], a_1) = 0$$

$$d_2(\sigma_{1,j})(a_1, b_1, b_{4j+1}) = [a_1, \sigma_{1,j}(b_1, b_{4j+1})] - [b_1, \sigma_{1,j}(a_1, b_{4j+1})] + [b_{4j+1}, \sigma_{1,j}(a_1, b_1)] - \sigma_{1,j}([a_1, b_1], b_{4j+1}) + \sigma_{1,j}([a_1, b_{4j+1}], b_1) - \sigma_{1,j}([b_1, b_{4j+1}], a_1) = 0$$

Luego $d_2(\sigma_3) \neq 0$, y es linealmente independiente de $d_2(\sigma_{1,k})$ y $d_2(\sigma_{1,j})$ por lo tanto

$$\sigma_3 \notin H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}))$$

$\bullet \quad d_2(\sigma_{1,k})(a_1, a_{2k}, a) = [a_1, \sigma_{1,k}(a_{2k}, a)] - [a_{2k}, \sigma_{1,k}(a_1, a)] + [a, \sigma_{1,k}(a_1, a_{2k})] - \sigma_{1,k}([a_1, a_{2k}], a) + \sigma_{1,k}([a_1, a], a_{2k}) - \sigma_{1,k}([a_{2k}, a], a_1) = [a_1, a_{2k}] - [a_{2k}, a_1] = 2\lambda_1 a \neq 0$ y $d_2(\sigma_{1,j})(a_1, a_{2k}, a) = 0$. Luego $d_2(\sigma_{1,k}) \neq 0$, y es linealmente independiente con $d_2(\sigma_{1,j})$ por lo tanto

$$\sigma_{1,k} \notin H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}))$$

$\bullet \quad d_2(\sigma_{1,j})(a_1, a_{2k}, b_1) = [a_1, \sigma_{1,j}(a_{2k}, b_1)] - [a_{2k}, \sigma_{1,j}(a_1, b_1)] + [b_1, \sigma_{1,j}(a_1, a_{2k})] - \sigma_{1,j}([a_1, a_{2k}], b_1) + \sigma_{1,j}([a_1, b_1], a_{2k}) - \sigma_{1,j}([a_{2k}, b_1], a_1) = -\lambda_1 \sigma_{1,j}(a, b_1) = \lambda_1 b_1 \neq 0$, luego

$$\sigma_{1,j} \notin H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k})).$$

Por lo tanto

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k})) = 0.$$

Como

$$H^0(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k}), \mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k})) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_a(\sigma_{2,k})) = \langle a \rangle, \text{ por lo que no es completa. } \quad \square$$

Observaciones 9.16. Notemos que en esta familia, la deformación $\mathfrak{g}(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida, sin embargo la demostración es más sencilla en el caso que:

1. Las descomposiciones en \mathfrak{sl}_2 -módulos de $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j})$, \mathfrak{sl}_2 y $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}$ no comparten componentes irreducibles, $|j - k| > 1$.
2. $\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}$ contiene dos espacios irreducibles unidimensionales, uno de cada irreducible de la representación.

9.3 Caso reducible con múltiples módulos irreducibles

A la luz de los resultados positivos obtenidos en relación con las deformaciones de la familia

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \ltimes (\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}),$$

surge de manera natural la pregunta de si estos comportamientos pueden extenderse a estructuras más generales. En particular, nos interesa saber si se puede aumentar el número de sumandos en la parte nilpotente sin perder la propiedad de rigidez algebraica. Concretamente, nos planteamos si la familia

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} \right)$$

es algebraicamente rígida para ciertos valores de m y de los enteros $k_i \geq 1$.

Para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} \right)$, si consideramos los isomorfismos

$$\begin{aligned} C^2 \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}, \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} \right)^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2} \left(\Lambda^2 \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}, \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} \right) \quad \text{y} \\ C^2 \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}, \mathfrak{sl}_2 \right)^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2} \left(\Lambda^2 \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}, \mathfrak{sl}_2 \right) \end{aligned}$$

y los \mathfrak{sl}_2 -módulos irreducibles, sin pérdida de generalidad podemos suponer $k_i \leq k_{i+1}$,

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} &= \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{r=1}^{k_i} V(4k_i - 4r) \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} \bigoplus_{r=1}^{2k_i} V(2k_i + 2k_j - 2r), \\ \mathfrak{sl}_2 = V(2) \quad \text{y} \quad \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} &= \bigoplus_{i=1}^m V(2k_i - 1). \end{aligned}$$

Como no existen aplicaciones lineales compatibles con la acción de \mathfrak{sl}_2 entre $\Lambda^2 \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}$ y $\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}$, entonces

$$C^2 \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}, \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} \right)^{\mathfrak{sl}_2} = 0,$$

y solo habrá aplicaciones lineales compatibles con la acción de \mathfrak{sl}_2 entre $\Lambda^2 \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}$ y \mathfrak{sl}_2 en el caso $2k_i + 2k_j - 2r = 2$ con $1 \leq r \leq 2k_i$, $1 \leq i < j \leq n$, ($k_i \leq k_j$) y esto sucede si existen k_i y k_j : $0 \leq |k_i - k_j| \leq 1$ con $i \neq j$. Luego

$$C^2 \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i}, \mathfrak{sl}_2 \right)^{\mathfrak{sl}_2} = \langle \{ \sigma_{3,i,j} / k_j = k_i \text{ ó } k_j = k_i + 1 \text{ con } i \neq j \} \rangle,$$

con $\sigma_{3,i,j} = \sigma_3$, ecuación (9.3) si $k_i = k_j$ o ecuación (9.4) si $k_j = k_i + 1$, luego

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Además como

$$\begin{aligned} C^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \right)^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2} \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \right) \neq 0 \\ &\text{y} \\ C^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i}, \mathfrak{sl}_2 \right)^{\mathfrak{sl}_2} &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2} \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i}, \mathfrak{sl}_2 \right) = 0 \\ H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) &= H^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i}, \mathfrak{g} \right)^{\mathfrak{sl}_2} \neq 0. \end{aligned}$$

Lema 9.17. Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \right) \oplus \mathbb{C}$, entonces el segundo grupo de cohomología de \mathfrak{g}_a con coeficientes en sí misma no es trivial, es decir

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0.$$

Más aún

$$\dim(H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)) \geq 2n.$$

Demostración. Sea el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $k_i \leq k_{i+1}$. Consideremos

$$\Lambda^2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C} \right) \simeq \Lambda^2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \right) \oplus \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{C}^{2k_i} \otimes \mathbb{C}) \simeq \Lambda^2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \right) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i}.$$

La descomposición en \mathfrak{sl}_2 -módulos irreducibles de:

$$\Lambda^2 \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{r=1}^{k_i} V(4k_i - 4r) \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} \bigoplus_{r=1}^{2k_i} V(2k_i + 2k_j - 2r),$$

$$\mathfrak{sl}_2 = V(2), \quad \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}^{2k_i} = \bigoplus_{i=1}^m V(2k_i - 1) \quad \text{y} \quad \mathbb{C} = V(0).$$

Teniendo en cuenta los isomorfismos

$$C^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C} \right)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2} \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C} \right)$$

$$C^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2 \right)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2} \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2 \right)$$

$$C^2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a \right)^{\mathfrak{sl}_2} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2} \left(\Lambda^2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C} \right), \mathfrak{g}_a \right)$$

y el Lema de Schur 3.1,

$$C^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{sl}_2 \right)^{\mathfrak{sl}_2} = 0,$$

$$\dim \left(C^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C} \right)^{\mathfrak{sl}_2} \right) \geq n + 1,$$

$$\dim \left(C^2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a \right)^{\mathfrak{sl}_2} \right) \geq 2n \quad \text{si} \quad k < j.$$

Además como $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g}_a , por las ecuaciones (4.9),

$$H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq H^1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a \right)^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \simeq H^2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a \right)^{\mathfrak{sl}_2}.$$

Para $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$, particularizando estos resultados en la sucesión exacta descrita en 4.12:

$$0 \longrightarrow C^1\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}\right)^{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \longrightarrow 0,$$

concluimos que $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}\right)^{\mathfrak{sl}_2} \neq 0$.

Para $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$, consideremos $C^2\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a\right)^{\mathfrak{sl}_2}$ generado por

$$\begin{aligned} & \{\sigma_{\{1,k_i\}}, \sigma_{\{2,k_i\}} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\sigma_{\{1,i,j\}}, \sigma_{\{3,i,j\}}, \sigma_{\{5,i,j\}} \mid k_i = k_j : 1 \leq i < j \leq n\} \\ & \cup \{\sigma_{\{3,i,j\}} \mid k_j = k_i + 1 : 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} & \sigma_{\{1,k_i\}} \text{ ecuación(9.5), } \sigma_{\{2,k_i\}} \text{ ecuación(9.6), } \sigma_{\{1,i,j\}} \text{ ecuación(9.7),} \\ & \sigma_{\{3,i,j\}} \text{ ecuación(9.3) o (9.4) si } k_i = k_j \text{ o } k_j = k_i + 1 \text{ respectivamente y} \\ & \sigma_{\{5,i,j\}} \text{ ecuación(9.8).} \end{aligned}$$

Utilizando que $H^1(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^1\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}\right)^{\mathfrak{sl}_2}$ y que $d_2(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in C^2\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a\right)^{\mathfrak{sl}_2}$ excepto $d_2(\sigma_{3,i,j}) \neq 0$ (ver familia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2j}$), concluimos que $H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}$ está generado por

$$\{\sigma_{\{1,k_i\}}, \sigma_{\{2,k_i\}} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\sigma_{\{1,i,j\}}, \sigma_{\{5,i,j\}} \mid k_i = k_j : 1 \leq i < j \leq n\},$$

luego

$$\dim(H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)) \geq 2n.$$

□

Teorema 9.18. Sean $\sigma_{2,i}$ los 2-cociclos del álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_2 \times \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}.$$

Si $k_i = 1$ a lo sumo para un solo índice i , entonces $\mathfrak{g}_a(\sum_{i=1}^n \sigma_{2,i})$ es una deformación de \mathfrak{g}_a , que es algebraicamente rígida y no completa, $\sigma_{2,i}$ es el 2-cociclos del Teorema 9.2 asociado a k_i .

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $k_i \leq k_{i+1}$.

Consideremos el 2-cociclo $\sigma_2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{2,i}$, por ser isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2(\sum_{i=1}^n k_i) + 1$, σ_2 es un corchete de Lie, por lo tanto por el Lema 5.2, $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es un álgebra de Lie.

Como $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i} \oplus \mathbb{C}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$, por la ecuación (4.8)

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) \simeq H^2(V, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}.$$

Como los espacios

$$C^1(V, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad C^2(V, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$$

coinciden con

$$C^1(V, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2} \quad \text{y} \quad C^2(V, \mathfrak{g}_a)^{\mathfrak{sl}_2}$$

respectivamente, por el lema anterior:

- $C^2(V, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2}$ está generado por

$$\begin{aligned} & \{ \sigma_{\{1,i\}}, \sigma_{\{2,i\}} \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \sigma_{\{1,i,j\}}, \sigma_{\{3,i,j\}}, \sigma_{\{5,i,j\}} \mid k_i = k_j : 1 \leq i < j \leq n \} \\ & \cup \{ \sigma_{\{3,i,j\}} \mid k_j = k_i + 1 : 1 \leq i < j \leq n \} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} & \sigma_{\{1,i\}} \text{ ecuación(9.5), } \sigma_{\{2,i\}} \text{ ecuación(9.6), } \sigma_{\{1,i,j\}} \text{ ecuación(9.7),} \\ & \sigma_{\{3,i,j\}} \text{ ecuación(9.3) o (9.4) si } k_i = k_j \text{ o } k_j = k_i + 1 \text{ respectivamente y} \\ & \sigma_{\{5,i,j\}} \text{ ecuación(9.8).} \end{aligned}$$

- $C^1(V, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{sl}_2} = C^1(V, V)^{\mathfrak{sl}_2} \geq n + 1$.

$C^1(V, V)^{\mathfrak{sl}_2}$ está generado por

$$\{ u_{\{1,i\}} \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ u_2 \} \cup \{ u_{\{1,i,j\}}, u_{\{1,j,i\}} \mid k_i = k_j : 1 \leq i < j \leq n \}$$

con

$$u_{1,i} \text{ ecuación(9.9), } u_2 \text{ ecuación(9.11), } u_{1,i,j} \text{ ecuación(9.10),}$$

Por la demostración Teorema 9.11

$$d_1(u_{1,i}) = 2\sigma_{2,i}, \quad \text{y} \quad d_1(u_{1,i,j}) = \sigma_{5,i,j} \quad \text{si} \quad k_i = k_j.$$

Observación 9.19. Observemos que los cociclos $\sigma_{2,i}$ y (en el caso $k_i = k_j$) $\sigma_{5,i,j}$ pertenecen a la imagen del operador d_1 , por lo tanto representan la clase nula en el grupo de cohomología $H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2))$. Analicemos el comportamiento de los restantes .

Además, si $\mathbb{C}^{2k_i} = \langle a_1, \dots, a_{2k_i} \rangle$, $\mathbb{C}^{2k_j} = \langle b_1, \dots, b_{2k_j} \rangle$ y $\mathbb{C} = \langle a \rangle$.

- $d_2(\sigma_{1,i})(a_1, a_{2k_i}, a) = 2a \neq 0$

Veamos que es linealmente independiente de los restantes. Análogamente

$$d_2(\sigma_{1,j})(a_1, a_{2k_i}, a) = 0, \text{ para } j \neq i$$

$$d_2(\sigma_{3,i,j})(a_1, a_{2k_i}, a) = 0, \text{ para } k_j = k_i \neq 1 \text{ (por hipótesis) o } k_j = k_i + 1.$$

$$d_2(\sigma_{1,i,j})(a_1, a_{2k_i}, a) = 0, \text{ para } j \neq i \text{ y } k_i = k_j,$$

Hasta ahora $d_2(\sigma_{1,i,j})$ y $d_2(\sigma_{3,i,j})$ son linealmente independientes. Nos faltaría probar solo para el caso $k_i = k_j$ que $d_2(\sigma_{3,i,j}) \neq 0$, $d_2(\sigma_{1,i}) \neq 0$ y que son linealmente independientes.

- $d_2(\sigma_{3,i,j})(a_1, b_{2k_j-2}, b_{2k_j}) = \lambda_1(-2k+3)b_{2k_j-2},$
 $d_2(\sigma_{1,i,j})(a_1, b_{2k_j-2}, b_{2k_j}) = 0.$
- $d_2(\sigma_{1,i,j})(a_1, b_1, b_{2k_j}) = b_1.$

Luego

$$H^2\left(\mathfrak{g}_a\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{2,i}\right), \mathfrak{g}_a\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{2,i}\right)\right) = 0.$$

Claramente $a \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_a(\sum_{i=1}^n \sigma_{2,i}))$, luego $H^0\left(\mathfrak{g}_a(\sum_{i=1}^n \sigma_{2,i}), \mathfrak{g}_a(\sum_{i=1}^n \sigma_{2,i})\right) \neq 0$ por lo tanto no es completa. \square

Observaciones 9.20. En esta familia, la deformación $\mathfrak{g}(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida, sin embargo la demostración es más sencilla en el caso que:

1. Las descomposiciones en \mathfrak{sl}_2 -módulos de $\Lambda^2(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i})$, \mathfrak{sl}_2 y $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i}$ no comparten componentes irreducibles, $|k_j - k_i| > 1$.
2. $\Lambda^2(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{2k_i})$ contiene n espacios irreducibles unidimensionales, uno de cada irreducible de la representación.

10.1 El caso $\mathfrak{sl}_3 \times V \oplus \mathbb{C}$

Como se mencionó en la sección 3.3.1, para todo par de números naturales a, b existe una única representación irreducible de dimensión finita $V(a, b)$ de \mathfrak{sl}_3 , con peso dominante máximo (a, b) la cual aparece como sumando en la descomposición en irreducibles de $\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b \Lambda^2 V$, donde $V = \mathbb{C}^3$.

Siguiendo la misma estrategia utilizada para calcular la cohomología de segundo orden en las familias de álgebras de Lie previamente analizadas, y considerando submódulos irreducibles, analizamos los siguientes ejemplos:

Ejemplos 10.1.

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}_3 \times V(1, 0)$
 $\mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{C}^3 \simeq V(1, 1) \oplus V(1, 0)$ y
 $\Lambda^2 \mathbb{C}^3 \simeq \text{Sym}^0 V \otimes \text{Sym}^1 \Lambda^2 \mathbb{C}^3 \simeq V(0, 1)$ luego

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

- $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}$
 $\mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C} \simeq V(1, 1) \oplus V(1, 0) \oplus V(0, 0)$ y
 $\Lambda^2(\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}) \simeq \Lambda^2 \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C} \simeq V(0, 1) \oplus V(1, 0)$ luego

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \nu_a \rangle,$$

con ν_a de tipo Cartan.

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3 \times V(3, 0)$
 $\mathfrak{sl}_3 \times V(3, 0) \simeq V(1, 1) \oplus V(3, 0)$ y
 $\Lambda^2(V(3, 0)) \simeq V(4, 1) \oplus V(0, 3)$, luego

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_a &= \mathfrak{sl}_3 \times V(3,0) \oplus \mathbb{C} \\ \mathfrak{sl}_3 \times V(3,0) \oplus \mathbb{C} &\simeq V(1,1) \oplus V(3,0) \oplus V(0,0) \quad \text{y} \\ \Lambda^2(V(3,0) \oplus \mathbb{C}) &\simeq \Lambda^2(V(3,0)) \oplus V(3,0) \simeq V(4,1) \oplus V(0,3) \oplus V(3,0) \text{ luego} \end{aligned}$$

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle v_a \rangle,$$

con v_a de tipo Carles

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3 \times V(1,1) \simeq \mathfrak{sl}_3 \times \mathfrak{sl}_3$
 $\mathfrak{sl}_3 \times V(1,1) \simeq V(1,1) \oplus V(1,1) \quad \text{y}$
 $\Lambda^2(V(1,1)) \simeq V(0,3) \oplus V(3,0) \oplus V(1,1)$ luego

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \langle v, v' \rangle,$$

v, v' vectores de peso máximo de peso $(0,0)$ de $W^* \otimes \mathfrak{sl}_3$ y $W^* \otimes V(1,1)$ respectivamente, siendo W la componente irreducible de $\Lambda^2(V(1,1))$ de peso $(1,1)$.

$$\begin{aligned} v &= (e^{1,2} \wedge e^{2,1} + e^{1,3} \wedge e^{3,1}) \otimes h_1 + (e^{1,3} \wedge e^{3,1} + e^{2,3} \wedge e^{3,2}) \otimes h_2 + \\ &(2h^1 \wedge e^{1,2} - h^2 \wedge e^{1,2} + e^{1,3} \wedge e^{3,2}) \otimes e^{1,2} + (h^1 \wedge e^{1,3} + h^2 \wedge e^{1,3} + e^{1,2} \wedge e^{2,3}) \otimes e^{1,3} - \\ &(h^1 \wedge e^{2,3} - 2h^2 \wedge e^{2,3} + e^{1,3} \wedge e^{2,1}) \otimes e^{2,3} - (2h^1 \wedge e^{2,1} - h^2 \wedge e^{2,1} - e^{2,3} \wedge e^{3,1}) \otimes e^{2,1} - \\ &(h^1 \wedge e^{3,1} + h^2 \wedge e^{3,1} + e^{2,1} \wedge e^{3,2}) \otimes e^{3,1} + (h^1 \wedge e^{3,2} - 2h^2 \wedge e^{3,2} - e^{1,2} \wedge e^{3,1}) \otimes e^{3,2} \end{aligned}$$

Esta es la tabla de multiplicar de \mathfrak{sl}_3 .

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_a &= \mathfrak{sl}_3 \times V(1,1) \oplus \mathbb{C} \\ \mathfrak{sl}_3 \times V(1,1) \oplus \mathbb{C} &\simeq V(1,1) \oplus V(1,1) \oplus V(0,0) \quad \text{y} \\ \Lambda^2(V(1,1) \oplus \mathbb{C}) &\simeq \Lambda^2 V(1,1) \oplus V(1,1) \otimes \mathbb{C} \simeq V(0,3) \oplus V(3,0) \oplus V(1,1) \oplus V(1,1), \text{ luego} \end{aligned}$$

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle v, v', v_a, v'_a \rangle,$$

con v, v' del ítem anterior y v_a, v'_a del tipo Carles.

10.2 El caso $\mathfrak{sl}_4 \times V \oplus \mathbb{C}$

De la sección 3.3.1, para cualquier terna de números naturales a, b, c existe una única representación irreducible de dimensión finita $V(a, b, c)$ de \mathfrak{sl}_4 con el mayor peso (a, b, c) isomorfa a un sumando en la descomposición en irreducibles de

$$\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b(\Lambda^2 V) \otimes \text{Sym}^c(\Lambda^3 V).$$

Calculemos la cohomología de orden dos en los siguientes ejemplos

Ejemplos 10.2.

1. $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_4 \times V(a, 0, 0)$

$$\mathfrak{sl}_4 \times V(a, 0, 0) \simeq V(1, 0, 1) \oplus V(a, 0, 0) \quad \text{y}$$

La representación irreducible $\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^0(\Lambda^2 V) \otimes \text{Sym}^0(\Lambda^3 V) \simeq \text{Sym}^a V$ contiene a la representación irreducible $V(a, 0, 0)$, luego $V(a, 0, 0) \simeq \text{Sym}^a V$ por lo tanto $\Lambda^2 V(a, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^a V$

- $\Lambda^2 V(1, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^1 V \simeq \Lambda^2 V \simeq V(0, 1, 0)$, luego $H^2(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1) = 0$.
- $\Lambda^2 V(2, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^2 V$ tiene dimensión 45
Un vector de peso máximo de $\Lambda^2 \text{Sym}^2 V$ es $e_1 e_1 \wedge e_1 e_2$ de peso $(2, 1, 0)$ y dimensión 45, por lo tanto $\Lambda^2 V(2, 0, 0) \simeq V(2, 1, 0)$, luego $H^2(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2) = 0$.
- $\Lambda^2 V(3, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^3 V$ tiene dimensión 190.
Dos vectores de peso máximo linealmente independientes de $\Lambda^2 \text{Sym}^3 V$ son $e_1 e_1 e_1 \wedge e_1 e_1 e_2$ y $e_1 e_1 e_1 \wedge e_2 e_2 e_2 - 3e_1 e_1 e_2 \wedge e_1 e_2 e_2$ de pesos $(4, 1, 0)$, $(0, 3, 0)$ y dimensiones 140 y 50 respectivamente, por lo tanto

$$\Lambda^2 V(3, 0, 0) \simeq V(4, 1, 0) \oplus V(0, 3, 0), \quad \text{luego} \quad H^2(\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_3) = 0.$$

- $\Lambda^2 V(4, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^4 V$ tiene dimensión 595.
Dos vectores de peso máximo linealmente independientes de $\Lambda^2 \text{Sym}^4 V$ son $e_1 e_1 e_1 e_1 \wedge e_1 e_1 e_1 e_2$ y $e_1 e_1 e_1 e_1 \wedge e_1 e_2 e_2 e_2 - 3e_1 e_1 e_1 e_2 \wedge e_1 e_1 e_2 e_2$ de pesos $(6, 1, 0)$, $(2, 3, 0)$ y dimensiones 315 y 280 respectivamente, por lo tanto

$$\Lambda^2 V(4, 0, 0) \simeq V(6, 1, 0) \oplus V(2, 3, 0), \quad \text{luego} \quad H^2(\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_4) = 0.$$

- $\Lambda^2 V(5, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^5 V$ tiene dimensión 1540.
Tres vectores de peso máximo linealmente independientes de $\Lambda^2 \text{Sym}^5 V$ son $e_1 e_1 e_1 e_1 e_1 \wedge e_1 e_1 e_1 e_1 e_2$ de peso $(8, 1, 0)$ y los otros dos de pesos $(4, 3, 0)$, y $(0, 5, 0)$ de dimensiones 594, 750 y 196 respectivamente, por lo tanto

$$\Lambda^2 V(5, 0, 0) \simeq V(8, 1, 0) \oplus V(4, 3, 0) \oplus V(0, 5, 0), \quad \text{luego} \quad H^2(\mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_5) = 0.$$

- $\Lambda^2 V(6, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^6 V$ tiene dimensión 3486.
Tres vectores de peso máximo linealmente independientes de $\Lambda^2 \text{Sym}^6 V$ uno de ellos es $e_1 e_1 e_1 e_1 e_1 e_1 \wedge e_1 e_1 e_1 e_1 e_2$, de pesos $(10, 1, 0)$, $(6, 3, 0)$ y $(2, 5, 0)$ de dimensiones 1001, 1540 y 945 respectivamente, por lo tanto

$$\Lambda^2 V(6, 0, 0) \simeq V(10, 1, 0) \oplus V(6, 3, 0) \oplus V(2, 5, 0), \quad \text{luego} \quad H^2(\mathfrak{g}_6, \mathfrak{g}_6) = 0.$$

- $\Lambda^2 V(7, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^7 V$ tiene dimensión 7140.
Cuatro vectores de peso máximo linealmente independientes de $\Lambda^2 \text{Sym}^7 V$, uno es $(e_1)^7 \wedge (e_1)^6 e_2$ de peso $(12, 1, 0)$ y otros tres de pesos $(8, 3, 0)$, $(4, 5, 0)$ y $(0, 7, 0)$ y de dimensiones 1560, 2730, 2140 y 540 respectivamente, por lo tanto

$$\Lambda^2 V(7, 0, 0) \simeq V(12, 1, 0) \oplus V(8, 3, 0) \oplus V(4, 5, 0) \oplus V(0, 7, 0), \quad \text{luego} \quad H^2(\mathfrak{g}_7, \mathfrak{g}_7) = 0.$$

$\Lambda^2 V(a, 0, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^a V$ tiene dimensión $\frac{(a+3)!}{12a!} \left(\frac{(a+3)!}{6a!} - 1 \right)$. Suponemos

$$\Lambda^2 \text{Sym}^a V = \bigoplus_{i=1}^k V(2a+2-4i, 2i-1, 0), \quad \text{con } k = [(a+1)/2] \quad \text{luego } H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = 0.$$

2. $\mathfrak{g}_b = \mathfrak{sl}_4 \ltimes V(0, b, 0)$

$$\mathfrak{sl}_4 \ltimes V(0, b, 0) \simeq V(1, 0, 1) \oplus V(0, b, 0) \quad \text{y}$$

- $\Lambda^2 V(0, 1, 0) \simeq \Lambda^2 \text{Sym}^1(\Lambda^2 V) \simeq \Lambda^2(\Lambda^2 V)$ tiene dimensión 15.

Un vector de peso máximo de $\Lambda^2(\Lambda^2 V)$ es $e_1 e_2 \wedge e_1 e_3$ de peso $(1, 0, 1)$ y tiene dimensión 15, luego

$$\Lambda^2 V(0, 1, 0) \simeq V(1, 0, 1), \quad \text{por lo tanto } H^2(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1) \neq 0.$$

- $V(0, 2, 0) \subset \text{Sym}^2(\Lambda^2 V)$, como sus dimensiones son 20 y 21, luego

$$\text{Sym}^2(\Lambda^2 V) \simeq V(0, 2, 0) \oplus \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \Lambda^2(\text{Sym}^2(\Lambda^2 V)) \simeq \Lambda^2 V(0, 2, 0) \oplus V(0, 2, 0)$$

Tres vector de peso máximo de $\Lambda^2(\text{Sym}^2(\Lambda^2 V))$ son:

$$e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge e_1 e_2 e_1 e_3,$$

$$e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge e_1 e_2 e_3 e_4 - e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge e_1 e_3 e_2 e_4 + e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge e_1 e_4 e_2 e_3 \quad \text{y}$$

$$e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge e_1 e_3 e_3 e_4 - e_1 e_2 e_1 e_3 \wedge e_1 e_2 e_3 e_4 - e_1 e_2 e_1 e_3 \wedge e_1 e_3 e_2 e_4 + e_1 e_2 e_1 e_4 \wedge e_1 e_3 e_2 e_3 +$$

$$e_1 e_2 e_2 e_3 \wedge e_1 e_3 e_1 e_4 - e_1 e_2 e_2 e_4 \wedge e_1 e_3 e_1 e_3$$

de pesos $(1, 2, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 2, 0)$, luego

$$\Lambda^2 V(0, 2, 0) \simeq V(1, 2, 1) \oplus V(1, 0, 1), \quad \text{por lo tanto } H^2(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2) \neq 0.$$

- $V(0, 3, 0) \subset \text{Sym}^3(\Lambda^2 V)$, sus dimensiones son 1225 y 1540 respectivamente.

Cinco vectores de peso máximo linealmente independientes de $\Lambda^2 \text{Sym}^3(\Lambda^2 V)$ son:

$$* e_1 e_2 e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge e_1 e_2 e_1 e_2 e_1 e_3,$$

$$* e_1 e_2 e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge (e_1 e_2 e_1 e_3 e_3 e_4 - e_1 e_3 e_1 e_3 e_2 e_4 + e_1 e_3 e_1 e_4 e_2 e_3) - e_1 e_2 e_1 e_2 e_1 e_3 \wedge (e_1 e_2 e_1 e_2 e_3 e_4 -$$

$$e_1 e_2 e_1 e_3 e_2 e_4 + e_1 e_2 e_1 e_4 e_2 e_3),$$

$$* e_1 e_2 e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge (e_1 e_2 e_1 e_2 e_3 e_4 - e_1 e_2 e_1 e_3 e_2 e_4 + e_1 e_2 e_1 e_4 e_2 e_3),$$

$$* e_1 e_2 e_1 e_2 e_1 e_2 \wedge e_1 e_3 e_1 e_3 e_1 e_3 - 3e_1 e_2 e_1 e_2 e_1 e_3 \wedge e_1 e_2 e_1 e_3 e_1 e_3 \quad \text{y}$$

* determinar este vector es analíticamente complicado.

$$\Lambda^2 \text{Sym}^3(\Lambda^2 V) \simeq V(1, 4, 1) \oplus V(1, 2, 1) \oplus V(0, 4, 0) \oplus V(3, 0, 3) \oplus V(1, 0, 1)$$

$$\text{por lo tanto } H^2(\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_3) \neq 0.$$

EJEMPLOS CON MAPLE

La experimentación descrita en esta sección resultó fundamental para analizar propiedades y comportamientos de ciertos grupos de álgebras de Lie. Durante este proceso, se manipularon algunas variables con el objetivo de recopilar los datos necesarios para la formulación de los teoremas correspondientes.

El primer ejemplo considerado es un álgebra de Lie de dimensión 10, cuya cohomología de segundo orden presenta dimensión 1. La estructura de multiplicación se detalla en la tabla resaltada en color negro. A partir de esta, se realizó una deformación mediante un 2-cociclo, indicado en rojo, cuidando que la nueva estructura siga satisfaciendo las condiciones para ser un álgebra de Lie. Además, se verificó que la deformación obtenida corresponde a un álgebra algebraicamente rígida, no isomorfa a una de tipo Cartan. Estas propiedades fueron comprobadas utilizando el software Maple.

g										
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	0	0	e_7	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	0	0	0	e_7	e_8
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	0	0	e_9	e_{10}	0	0
e_4	0	0	0	0	$2e_5$	$-2e_6$	e_7	$-e_8$	e_9	$-e_{10}$
e_5	0	0	0	$-2e_5$	0	e_4	0	e_7	0	e_9
e_6	0	0	0	$2e_6$	$-e_4$	0	e_8	0	e_{10}	0
e_7	$-e_7$	0	$-e_9$	$-e_7$	0	$-e_8$	0	$0-2e_2$	$0-2e_5$	$0+e_4+e_1$
e_8	$-e_8$	0	$-e_{10}$	e_8	$-e_7$	0	$0+2e_2$	0	$0+e_4-e_1$	$0+2e_6$
e_9	e_9	$-e_7$	0	$-e_9$	0	$-e_{10}$	$0+2e_5$	$0-e_4+e_1$	0	$0+2e_3$
e_{10}	e_{10}	$-e_8$	0	e_{10}	$-e_9$	0	$0-e_4-e_1$	$0-2e_6$	$0-2e_3$	0

```
[> with(DifferentialGeometry) : with(LieAlgebras) :
[>
```

(sl2+sl2) α (C2+C2)

```
> L0 := _DG([[ "LieAlgebra", Alg0, [10]], [[ [1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[1, 7, 7], 1], [[1,
8, 8], 1], [[1, 9, 9], -1], [[1, 10, 10], -1], [[2, 3, 1], 1], [[2, 9, 7], 1], [[2, 10, 8], 1],
[[3, 7, 9], 1], [[3, 8, 10], 1], [[4, 5, 5], 2], [[4, 6, 6], -2], [[4, 7, 7], 1], [[4, 8, 8],
-1], [[4, 9, 9], 1], [[4, 10, 10], -1], [[5, 6, 4], 1], [[5, 8, 7], 1], [[5, 10, 9], 1], [[6, 7,
8], 1], [[6, 9, 10], 1]])]
```

```
L0 := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e7] = e7, [e1, e8] = e8, [e1, e9] = -e9, [e1,
e10] = -e10, [e2, e3] = e1, [e2, e9] = e7, [e2, e10] = e8, [e3, e7] = e9, [e3, e8] = e10,
[e4, e5] = 2 e5, [e4, e6] = -2 e6, [e4, e7] = e7, [e4, e8] = -e8, [e4, e9] = e9, [e4, e10]
= -e10, [e5, e6] = e4, [e5, e8] = e7, [e5, e10] = e9, [e6, e7] = e8, [e6, e9] = e10] (1.1)
```

```
> DGsetup(L0);
Lie algebra: Alg0 (1.2)
```

```
> MultiplicationTable("LieTable");
12 x 12 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order (1.3)
```

```
> Query(Alg0, "Jacobi"); Center(Alg0); Radical(Alg0); N := Nilradical(Alg0);
DS := Series(N, "Derived"); map(nops, DS)
true
[ ]
[e10, e9, e8, e7]
N := [e7, e8, e9, e10]
DS := [[e7, e8, e9, e10], [ ]
[4, 0] (1.4)
```

```
> R0 := Representation(Alg0, V, Adjoint(Alg0)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10], V) :
> DGsetup(Alg0, R0, Rep0);
Lie algebra with coefficients: Rep0 (1.5)
```

```
> C := RelativeChains([ ]):
> H10 := Cohomology(C1..3);
H10 := [[x7  $\theta$ 7 + x8  $\theta$ 8 + x9  $\theta$ 9 + x10  $\theta$ 10]] (1.6)
```

```
> H20 := Cohomology(C2..4);
H20 := [[ [ -(x2  $\theta$ 7)  $\wedge$   $\theta$ 8) - ((x5  $\theta$ 7)  $\wedge$   $\theta$ 9) + (( $\frac{x4}{2} + \frac{x1}{2}$ )  $\theta$ 7)  $\wedge$   $\theta$ 10 - (((
- $\frac{x4}{2} + \frac{x1}{2}$ )  $\theta$ 8)  $\wedge$   $\theta$ 9) + (x6  $\theta$ 8)  $\wedge$   $\theta$ 10 + (x3  $\theta$ 9)  $\wedge$   $\theta$ 10]]] (1.7)
```

```
>
```

Deformación lineal

```
> L1 := _DG(["LieAlgebra", Alg1, [10]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[1, 7, 7], 1], [[1,
8, 8], 1], [[1, 9, 9], -1], [[1, 10, 10], -1], [[2, 3, 1], 1], [[2, 9, 7], 1], [[2, 10, 8], 1],
[[3, 7, 9], 1], [[3, 8, 10], 1], [[4, 5, 5], 2], [[4, 6, 6], -2], [[4, 7, 7], 1], [[4, 8, 8],
-1], [[4, 9, 9], 1], [[4, 10, 10], -1], [[5, 6, 4], 1], [[5, 8, 7], 1], [[5, 10, 9], 1], [[6, 7,
8], 1], [[6, 9, 10], 1], [[7, 10, 4], 1], [[7, 10, 1], 1], [[7, 9, 5], -2], [[7, 8, 2], -2],
[[8, 9, 1], -1], [[8, 9, 4], 1], [[8, 10, 6], 2], [[9, 10, 3], 2]])
L1 := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e7]=e7, [e1, e8]=e8, [e1, e9]=-e9, [e1,
e10]=-e10, [e2, e3]=e1, [e2, e9]=e7, [e2, e10]=e8, [e3, e7]=e9, [e3, e8]=e10,
[e4, e5]=2 e5, [e4, e6]=-2 e6, [e4, e7]=e7, [e4, e8]=-e8, [e4, e9]=e9, [e4, e10]
=-e10, [e5, e6]=e4, [e5, e8]=e7, [e5, e10]=e9, [e6, e7]=e8, [e6, e9]=e10, [e7,
e8]=-2 e2, [e7, e9]=-2 e5, [e7, e10]=e1 + e4, [e8, e9]=e4 - e1, [e8, e10]=2 e6,
[e9, e10]=2 e3] (1.8)
```

```
> DGsetup(L1);
Lie algebra: Alg1 (1.9)
```

```
> MultiplicationTable("LieTable");
12 x 12 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order (1.10)
```

```
> Query(Alg1, "Jacobi"); Center(Alg1); Radical(Alg1); N := Nilradical(Alg1);
map(nops, DS)
true
[ ]
[ ]
N := [ ]
[4, 0] (1.11)
```

```
> R1 := Representation(Alg1, V, Adjoint(Alg1)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10], V) :
> DGsetup(Alg1, R1, Rep1);
Lie algebra with coefficients: Rep1 (1.12)
```

```
> C := RelativeChains([ ]) :
> H10 := Cohomology(C_{1..3});
H10 := [[ ]] (1.13)
```

```
> H20 := Cohomology(C_{2..4});
H20 := [[ ]] (1.14)
```

```
Rep0 >
```

El segundo ejemplo es un álgebra de Lie de dimensión 11, cohomología de orden dos de dimensión 2, su tabla de multiplicar se muestra en la tabla con negro. Deformamos con los dos 2-cociclos, agregado en la tabla con rojo, para el cual se obtiene un álgebra de Lie algebraicamente rígida.

	\mathfrak{sl}_2			\mathfrak{sl}_2			\mathbb{C}^2		\mathbb{C}^2		\mathbb{C}
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	0	0	e_7	$-e_8$	0	0	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	0	0	e_7	0	0	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	0	0	e_8	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	$2e_5$	$-2e_6$	0	0	e_9	$-e_{10}$	0
e_5	0	0	0	$-2e_5$	0	e_4	0	0	0	e_9	0
e_6	0	0	0	$2e_6$	$-e_4$	0	0	0	e_{10}	0	0
e_7	$-e_7$	0	$-e_8$	0	0	0	0	$0+e_{11}$	0	0	0
e_8	e_8	$-e_7$	0	0	0	0	$0-e_{11}$	0	0	0	0
e_9	0	0	0	$-e_9$	0	$-e_{10}$	0	0	0	$0+e_{11}$	0
e_{10}	0	0	0	e_{10}	$-e_9$	0	0	0	$0-e_{11}$	0	0
e_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(s12+s12)+.(C2+C2)+a

```
> La := _DG([[ "LieAlgebra", Alga, [11]], [[ [1, 2, 2], 2], [ [1, 3, 3], -2], [ [1, 7, 7], 1], [ [1, 8, 8], 1], [ [1, 9, 9], -1], [ [1, 10, 10], -1], [ [2, 3, 1], 1], [ [2, 9, 7], 1], [ [2, 10, 8], 1], [ [3, 7, 9], 1], [ [3, 8, 10], 1], [ [4, 5, 5], 2], [ [4, 6, 6], -2], [ [4, 7, 7], 1], [ [4, 8, 8], -1], [ [4, 9, 9], 1], [ [4, 10, 10], -1], [ [5, 6, 4], 1], [ [5, 8, 7], 1], [ [5, 10, 9], 1], [ [6, 7, 8], 1], [ [6, 9, 10], 1]]])
La := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e7] = e7, [e1, e8] = e8, [e1, e9] = -e9, [e1, e10] = -e10, [e2, e3] = e1, [e2, e9] = e7, [e2, e10] = e8, [e3, e7] = e9, [e3, e8] = e10, [e4, e5] = 2 e5, [e4, e6] = -2 e6, [e4, e7] = e7, [e4, e8] = -e8, [e4, e9] = e9, [e4, e10] = -e10, [e5, e6] = e4, [e5, e8] = e7, [e5, e10] = e9, [e6, e7] = e8, [e6, e9] = e10]      (2.1)
```

```
> DGsetup(La);
Lie algebra: Alga      (2.2)
```

```
> MultiplicationTable("LieTable");
13 x 13 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order      (2.3)
```

```
> Query(Alga, "Jacobi"); Center(Alga); Radical(Alga); N := Nilradical(Alga);
DS := Series(N, "Derived"); map(nops, DS)
true
[e11]
[e11, e10, e9, e8, e7]
N := [e7, e8, e9, e10, e11]
DS := [[e7, e8, e9, e10, e11], [ ]]
[5, 0]      (2.4)
```

```
> Ra := Representation(Alga, V, Adjoint(Alga)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11], V) :
> DGsetup(Alga, Ra, Repa);
Lie algebra with coefficients: Repa      (2.5)
```

```
> C := RelativeChains([ ]):
> H1a := Cohomology(C1..3);
H1a := [[x7 θ7 + x8 θ8 + x9 θ9 + x10 θ10, x11 θ11]]      (2.6)
```

```
> H2a := Cohomology(C2..4);
H2a := [[ (x7 θ7) ∧ θ11 + (x8 θ8) ∧ θ11 + (x9 θ9) ∧ θ11 + (x10 θ10) ∧ θ11,
- ((x2 θ7) ∧ θ8) - ((x5 θ7) ∧ θ9) + ( (x4/2 + x1/2) θ7 ) ∧ θ10 - ( ( (-x4/2 + x1/2) θ8 ) ∧ θ9 ) + (x6 θ8) ∧ θ10 + (x3 θ9) ∧ θ10 ]]]      (2.7)
```

Deformación lineal de g_a

((sl2+sl2)+(C2+C2)+a)(sigma)

```
> Lad := _DG(["LieAlgebra", Algad, [11]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[1, 7, 7], 1],
  [[1, 8, 8], -1], [[2, 3, 1], 1], [[2, 8, 7], 1], [[3, 7, 8], 1], [[4, 5, 5], 2], [[4, 6, 6], -2],
  [[4, 9, 9], 1], [[4, 10, 10], -1], [[5, 6, 4], 1], [[5, 10, 9], 1], [[6, 9, 10], 1], [[7, 8,
  11], 1], [[9, 10, 11], 2]])
Lad := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e7] = e7, [e1, e8] = -e8, [e2, e3] = e1, [e2,
  e8] = e7, [e3, e7] = e8, [e4, e5] = 2 e5, [e4, e6] = -2 e6, [e4, e9] = e9, [e4, e10] =
  -e10, [e5, e6] = e4, [e5, e10] = e9, [e6, e9] = e10, [e7, e8] = e11, [e9, e10] = 2 e11]      (3.1)
```

```
> DGsetup(Lad);
Lie algebra: Algad      (3.2)
```

```
> MultiplicationTable("LieTable");
13 x 13 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order      (3.3)
```

```
> Query(Algad, "Jacobi"); Center(Algad); Radical(Algad);
true
[e11]
[e11, e10, e9, e8, e7]      (3.4)
```

```
> Rad := Representation(Algad, V, Adjoint(Algad)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11], V) :
> DGsetup(Algad, Rad, Repad);
Lie algebra with coefficients: Repad      (3.5)
```

```
> C := RelativeChains([ ]):
> H1ad := Cohomology(C1..3);
H1ad := [[x7 θ7 + x8 θ8 + x9 θ9 + x10 θ10 + 2 x11 θ11]]      (3.6)
```

```
> H2ad := Cohomology(C2..4);
H2ad := [[ ]]      (3.7)
```

Rep0 >

Otra familia observada es de la forma $\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^2 \oplus_{i=1}^{2k} \mathbb{C}$ con $k = 1, 2, 3$

Tomando como base de \mathfrak{sl}_2 a $\{e_1, e_2, e_3\}$, de \mathbb{C}^2 a $\{e_4, e_5\}$ y de $\oplus_{i=1}^k \mathbb{C}$ a $\{e_i/i = 6, \dots, 5+2k\}$.

k	\mathfrak{g}	Nilradical	$H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$	$\dim H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$	$\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$
1	$\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^2 \oplus_{i=1}^2 \mathbb{C}$	$\langle \{e_i/i = 4, \dots, 7\} \rangle$	$\langle e_6, e_7 \rangle$	5	6
	$\mathfrak{g}(\sigma_1)$	$\langle \{e_4, e_5, e_6\} \rangle$	0	0	0
2	$\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^2 \oplus_{i=1}^4 \mathbb{C}$	$\langle \{e_i/i = 4, \dots, 9\} \rangle$	$\langle \{e_i/i = 6, \dots, 9\} \rangle$	17	32
	$\mathfrak{g}(\sigma_2)$	$\langle \{e_4, e_5, e_6, e_8\} \rangle$	0	0	0
3	$\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}^2 \oplus_{i=1}^6 \mathbb{C}$	$\langle \{e_4, e_5, e_6, e_8\} \rangle$	$\langle \{e_i/i = 6, \dots, 11\} \rangle$	37	102
	$\mathfrak{g}(\sigma_3)$	$\langle \{e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}\} \rangle$	0	0	0

Las deformaciones de estas álgebras de Lie tienen nilradical no abeliano, luego no cumplen las condiciones de Carles. Los 2-cocíclos de las deformaciones son:

$$\sigma_1 = e^4 \wedge e^5 \otimes e_6 + e^4 \wedge e^7 \otimes e_4 + e^5 \wedge e^7 \otimes e_5 + 2e^6 \wedge e^7 \otimes e_6.$$

$$\sigma_2 = e^4 \wedge e^5 \otimes e_8 + e^6 \wedge e^7 \otimes e_6 + e^4 \wedge e^9 \otimes e_4 + e^5 \wedge e^9 \otimes e_5 + 2e^8 \wedge e^9 \otimes e_8.$$

$$\sigma_3 = e^4 \wedge e^5 \otimes e_{10} + e^4 \wedge e^{11} \otimes e_4 + e^5 \wedge e^{11} \otimes e_5 + e^6 \wedge e^7 \otimes e_6 + e^8 \wedge e^9 \otimes e_8 + 2e^{10} \wedge e^{11} \otimes e_{10}.$$

Sus tablas de multiplicar se muestran en la tabla con negro, los dos cociclos de las deformaciones se agregan en rojo.

$k = 1$	\mathfrak{sl}_2			\mathbb{C}^2		\mathbb{C}	\mathbb{C}
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	0	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	$0 + e_6$	0	$0 + e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	$0 - e_6$	0	0	$0 + e_5$
e_6	0	0	0	0	0	0	$0 + 2e_6$
e_7	0	0	0	$0 - e_4$	$0 - e_5$	$0 - 2e_6$	0

$k = 2$	\mathfrak{sl}_2			\mathbb{C}^2		\mathbb{C}	\mathbb{C}	\mathbb{C}	\mathbb{C}
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	0	0	0	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	0	0	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	0	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	$0 + e_8$	0	0	0	$0 + e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	$0 - e_8$	0	0	0	0	$0 + e_5$
e_6	0	0	0	0	0	0	$0 + e_6$	0	0
e_7	0	0	0	0	0	$0 - e_6$	0	0	0
e_8	0	0	0	0	0	0	0	0	$0 + 2e_8$
e_9	0	0	0	$0 - e_4$	$0 - e_5$	0	0	$0 - 2e_8$	0

$k = 3$	\mathfrak{sl}_2			\mathbb{C}^2		\mathbb{C}	\mathbb{C}	\mathbb{C}	\mathbb{C}	\mathbb{C}	\mathbb{C}
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	0	0	0	0	0	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	0	0	0	0	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	0	0	0	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	$0+e_{10}$	0	0	0	0	0	$0+e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	$0-e_{10}$	0	0	0	0	0	0	$0+e_5$
e_6	0	0	0	0	0	0	$0+e_6$	0	0	0	0
e_7	0	0	0	0	0	$0-e_6$	0	0	0	0	0
e_8	0	0	0	0	0	0	0	0	$0+e_8$	0	0
e_9	0	0	0	0	0	0	0	$0-e_8$	0	0	0
e_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0+2e_{10}$
e_{11}	0	0	0	$0-e_4$	$0-e_5$	0	0	0	0	$0-2e_{10}$	0

SI2+C^2 +{a,b}

SI(2,C)+C^2 +{a,b}: #H1=5, #H2=6

```
Repabd > Lab := _DG(["LieAlgebra", Algab, [7]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3],
-2], [[2, 3, 1], 1], [[1, 4, 4], 1], [[1, 5, 5], -1], [[2, 5, 4], 1],
[[3, 4, 5], 1]])
Lab := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e4]=e4, [e1, e5]=-e5, [e2, e3]=e1,
[e2, e5]=e4, [e3, e4]=e5] (1.1.1)
```

```
> DGsetup(Lab); MultiplicationTable("LieTable");
```

Lie algebra: Algab

	<i>e1</i>	<i>e2</i>	<i>e3</i>	<i>e4</i>	<i>e5</i>	<i>e6</i>	<i>e7</i>
<i>e1</i>	0	2 <i>e2</i>	-(2 <i>e3</i>)	<i>e4</i>	- <i>e5</i>	0	0
<i>e2</i>	-(2 <i>e2</i>)	0	<i>e1</i>	0	<i>e4</i>	0	0
<i>e3</i>	2 <i>e3</i>	- <i>e1</i>	0	<i>e5</i>	0	0	0
<i>e4</i>	- <i>e4</i>	0	- <i>e5</i>	0	0	0	0
<i>e5</i>	<i>e5</i>	- <i>e4</i>	0	0	0	0	0
<i>e6</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>e7</i>	0	0	0	0	0	0	0

(1.1.2)

```
Alg3 > Query(Algab, "Jacobi"); Center(Algab); Radical(Algab); N
:= Nilradical(Algab);
DS := Series(N, "Lower"); map(nops, DS)
true
[e7, e6]
[e7, e6, e5, e4]
N := [e4, e5, e6, e7]
DS := [[e4, e5, e6, e7], [ ]]
[4, 0] (1.1.3)
```

```
v > Rab := Representation(Algab, V, Adjoint(Algab)) :
```

```
Alg1 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7], V) :
```

```
v > DGsetup(Algab, Rab, Repab);
```

Lie algebra with coefficients: Repab

(1.1.4)

```
Rep1 > C := RelativeChains([ ]) :
```

```
Rep1 >
```

```
Rep1 > H1ab := Cohomology(C1..3);
```

$H1ab := [[x4 \theta_4 + x5 \theta_5, x6 \theta_6, x6 \theta_7, x7 \theta_6, x7 \theta_7]]$

(1.1.5)

```
Rep1 > H2ab := Cohomology(C2..4);
```

(1.1.6)

$$H2ab := [[(x6 \theta4) \wedge \theta5, (x6 \theta6) \wedge \theta7, (x7 \theta4) \wedge \theta5, (x7 \theta6) \wedge \theta7, (x4 \theta4) \wedge \theta6 \quad (1.1.6) \\ + (x5 \theta5) \wedge \theta6, (x4 \theta4) \wedge \theta7 + (x5 \theta5) \wedge \theta7]]$$

>
Alg >

Combinación de tres 2-cociclos :# H0=#H1=#H2=0 pero nilradical no abeliano

Repabd > Lab := _DG(["LieAlgebra", Algab, [7]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[2, 3, 1], 1], [[1, 4, 4], 1], [[1, 5, 5], -1], [[2, 5, 4], 1], [[3, 4, 5], 1], [[4, 5, 6], 1], [[4, 7, 4], 1], [[5, 7, 5], 1], [[6, 7, 6], 2]])
Lab := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e4]=e4, [e1, e5]=-e5, [e2, e3]=e1, (1.2.1) \\ [e2, e5]=e4, [e3, e4]=e5, [e4, e5]=e6, [e4, e7]=e4, [e5, e7]=e5, [e6, e7] \\ =2 e6]

> DGsetup(Lab); MultiplicationTable("LieTable");
Lie algebra: Algab

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
e1	0	2 e2	-(2 e3)	e4	-e5	0	0
e2	-(2 e2)	0	e1	0	e4	0	0
e3	2 e3	-e1	0	e5	0	0	0
e4	-e4	0	-e5	0	e6	0	e4
e5	e5	-e4	0	-e6	0	0	e5
e6	0	0	0	0	0	0	2 e6
e7	0	0	0	-e4	-e5	-(2 e6)	0

(1.2.2)

Alg3 > Query(Algab, "Jacobi"); Center(Algab); Radical(Algab); N := Nilradical(Algab);
DS := Series(N, "Lower"); map(nops, DS)
true
[]
[e6, e5, e4, e7]
N := [e4, e5, e6]
DS := [[e4, e5, e6], [e6], []]
[3, 1, 0] (1.2.3)

v > Rab := Representation(Algab, V, Adjoint(Algab)) :

Alg1 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7], V) :

v > DGsetup(Algab, Rab, Repab);

Lie algebra with coefficients: Repab

(1.2.4)

Rep1 > C := RelativeChains([]) :

```

Rep1 >
Rep1 > H1ab := Cohomology(C1..3);
                                     H1ab := [[ ]]

```

(1.2.5)

```

Rep1 > H2ab := Cohomology(C2..4);
                                     H2ab := [[ ]]

```

(1.2.6)

```

>
Alg >

```

SI2+C^2 +{a,b,c,d}

SI2+C^2 +{a,b,c,d} #H1=17, #H2=32

```

Repabc > Labc := _DG(["LieAlgebra", Algabc, [9]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3,
3], -2], [[2, 3, 1], 1], [[1, 4, 4], 1], [[1, 5, 5], -1], [[2, 5, 4],
1], [[3, 4, 5], 1]])
Labc := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = e4, [e1, e5] = -e5, [e2, e3] = e1,
[e2, e5] = e4, [e3, e4] = e5]

```

(2.1.1)

```

> DGsetup(Labc) :

```

```

Alg3 > Query(Algabc, "Jacobi"); Center(Algabc); Radical(Algabc); N
      := Nilradical(Algabc); Series(Nilradical(Algabc), "Lower");
                                     true
                                     [e9, e8, e7, e6]
                                     [e9, e8, e7, e6, e5, e4]
                                     N := [e4, e5, e6, e7, e8, e9]
                                     [[e4, e5, e6, e7, e8, e9], [ ]]

```

(2.1.2)

```

v > Rabc := Representation(Algabc, V, Adjoint(Algabc)) :

```

```

Alg1 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9], V) :

```

```

v > DGsetup(Algabc, Rabc, Repabc);
      Lie algebra with coefficients: Repabc

```

(2.1.3)

```

Rep1 > C := RelativeChains([ ]) :

```

```

Rep1 >

```

```

Rep1 > H1abc := Cohomology(C1..3);
H1abc := [[x4 θ4 + x5 θ5, x6 θ6, x6 θ7, x6 θ8, x6 θ9, x7 θ6, x7 θ7, x7 θ8, x7 θ9, x8 θ6,
x8 θ7, x8 θ8, x8 θ9, x9 θ6, x9 θ7, x9 θ8, x9 θ9]]

```

(2.1.4)

```

Rep1 > H2abc := Cohomology(C2..4);
H2abc := [[(x8 θ8) ∧ θ9, (x9 θ4) ∧ θ5, (x4 θ4) ∧ θ9 + (x5 θ5) ∧ θ9,
(x6 θ4) ∧ θ5, (x6 θ6) ∧ θ7, (x6 θ6) ∧ θ8, (x6 θ6) ∧ θ9, (x9 θ6) ∧ θ7,
(x9 θ6) ∧ θ8, (x9 θ6) ∧ θ9, (x9 θ7) ∧ θ8, (x9 θ7) ∧ θ9, (x9 θ8) ∧ θ9,
(x6 θ7) ∧ θ8, (x4 θ4) ∧ θ6 + (x5 θ5) ∧ θ6, (x4 θ4) ∧ θ7 + (x5 θ5) ∧ θ7,
(x6 θ7) ∧ θ9, (x6 θ8) ∧ θ9, (x7 θ4) ∧ θ5, (x7 θ6) ∧ θ7, (x7 θ6) ∧ θ8,
(x7 θ6) ∧ θ9, (x7 θ7) ∧ θ8, (x7 θ7) ∧ θ9, (x7 θ8) ∧ θ9, (x4 θ4) ∧ θ8]

```

(2.1.5)

$$+ (x_5 \theta_5) \wedge \theta_8, (x_8 \theta_4) \wedge \theta_5, (x_8 \theta_6) \wedge \theta_7, (x_8 \theta_6) \wedge \theta_8, (x_8 \theta_6) \wedge \theta_9, \\ (x_8 \theta_7) \wedge \theta_8, (x_8 \theta_7) \wedge \theta_9]]$$

Con 2-cociclo: # H0=#H1=#H2=0 pero nilradical no abeliano

```
Repabc > Labc := _DG(["LieAlgebra", Algabc, [9]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[2, 3, 1], 1], [[1, 4, 4], 1], [[1, 5, 5], -1], [[2, 5, 4], 1], [[3, 4, 5], 1], [[4, 5, 6], 0], [[4, 5, 8], 1], [[4, 7, 4], 0], [[5, 7, 5], 0], [[6, 7, 6], 1], [[4, 9, 4], 1], [[5, 9, 5], 1], [[8, 9, 8], 2]])
Labc := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e4]=e4, [e1, e5]=-e5, [e2, e3]=e1, (2.2.1)
[e2, e5]=e4, [e3, e4]=e5, [e4, e5]=e8, [e4, e9]=e4, [e5, e9]=e5, [e6, e7]=e6,
[e8, e9]=2 e8]
```

```
> DGsetup(Labc)
Lie algebra: Algabc (2.2.2)
```

```
Alg3 > Query(Algabc, "Jacobi"); Center(Algabc); Radical(Algabc); N
:= Nilradical(Algabc); Series(Nilradical(Algabc), "Lower");
true
[e9, e8, e7, e6, e5, e4]
N := [e4, e5, e6, e8]
[[e4, e5, e6, e8], [e8], []] (2.2.3)
```

```
V > Rabc := Representation(Algabc, V, Adjoint(Algabc)) :
Alg1 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9], V) :
V > DGsetup(Algabc, Rabc, Repabc);
Lie algebra with coefficients: Repabc (2.2.4)
```

```
Rep1 > C := RelativeChains([ ]) :
Rep1 >
Rep1 > H1abc := Cohomology(C_{1..3});
H1abc := [[ ]] (2.2.5)
```

```
Rep1 > H2abc := Cohomology(C_{2..4});
H2abc := [[ ]] (2.2.6)
```

Para generalizar (organice la base): # H0=#H1=#H2=0 pero nilradical no abeliano

```
Repabc > Labc := _DG(["LieAlgebra", Algabc, [9]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[2, 3, 1], 1], [[1, 4, 4], 1], [[1, 5, 5], -1], [[2, 5, 4], 1], [[3, 4, 5], 1], [[4, 5, 8], 1], [[6, 7, 6], 1], [[4, 9, 4], 1], [[5, 9, 5], 1], [[8, 9, 8], 2]])
Labc := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e4]=e4, [e1, e5]=-e5, [e2, e3]=e1, (2.3.1)
[e2, e5]=e4, [e3, e4]=e5, [e4, e5]=e8, [e4, e9]=e4, [e5, e9]=e5, [e6, e7]=e6,
[e8, e9]=2 e8]
```

```
> DGsetup(Labc) :
```

```

Alg3 > Query(Algabc, "Jacobi"); Center(Algabc); Radical(Algabc); N
          := Nilradical(Algabc); Series(Nilradical(Algabc), "Lower");
          true
          [ ]
          [e9, e8, e7, e6, e5, e4]
          N := [e4, e5, e6, e8]
          [[e4, e5, e6, e8], [e8], [ ]]
(2.3.2)
v > Rabc := Representation(Algabc, V, Adjoint(Algabc)) :
Alg1 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9], V) :
v > DGsetup(Algabc, Rabc, Repabc);
          Lie algebra with coefficients: Repabc
(2.3.3)
Rep1 > C := RelativeChains([ ]) :
Rep1 >
Rep1 > H1abc := Cohomology(C1..3);
          H1abc := [[ ]]
(2.3.4)
Rep1 > H2abc := Cohomology(C2..4);
          H2abc := [[ ]]
(2.3.5)
Alg >

```

SI(2,C)+C^2 +{a,b,c,d,e,f}

SI(2,C)+C^2 +{a,b,c,d,e,f}

```

Repabc > L := _DG(["LieAlgebra", Alg, [11]], [[ [1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3],
          -2], [[2, 3, 1], 1], [[1, 4, 4], 1], [[1, 5, 5], -1], [[2, 5, 4], 1],
          [[3, 4, 5], 1]])]
L := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = e4, [e1, e5] = -e5, [e2, e3] = e1, [e2,
e5] = e4, [e3, e4] = e5]
(3.1.1)
> DGsetup(L) :

```

```

Alg3 > Query(Alg, "Jacobi"); Center(Alg); Radical(Algabc); N
          := Nilradical(Algabc); Series(Nilradical(Alg), "Lower");
          true
          [e10, e9, e8, e7, e6, e11]
          [e9, e8, e7, e6, e5, e4]
          N := [e4, e5, e6, e8]
          [[e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11], [ ]]
(3.1.2)

```

```

v > R := Representation(Alg, V, Adjoint(Alg)) :
Alg1 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11], V) :
v > DGsetup(Alg, R, Rep);
          Lie algebra with coefficients: Rep
(3.1.3)

```

```

Rep1 > C := RelativeChains([ ]) :
Rep1 >
Rep1 > H1abc := Cohomology(C1..3);
(3.1.4)

```

$$H1abc := [[x8 \theta 11, x9 \theta 6, x9 \theta 7, x9 \theta 8, x9 \theta 9, x9 \theta 10, x9 \theta 11, x6 \theta 11, x7 \theta 6, x7 \theta 7, \quad (3.1.4)$$

$$x7 \theta 8, x7 \theta 9, x7 \theta 10, x7 \theta 11, x8 \theta 6, x8 \theta 7, x8 \theta 8, x8 \theta 9, x8 \theta 10, x4 \theta 4 + x5 \theta 5,$$

$$x10 \theta 6, x10 \theta 7, x10 \theta 8, x10 \theta 9, x10 \theta 10, x10 \theta 11, x11 \theta 6, x11 \theta 7, x11 \theta 8, x11 \theta 9,$$

$$x11 \theta 10, x11 \theta 11, x6 \theta 6, x6 \theta 7, x6 \theta 8, x6 \theta 9, x6 \theta 10]]$$

$$\text{Rep} > \text{nops}(H1abc[1]); \quad 37 \quad (3.1.5)$$

$$\text{Rep1} > H2 := \text{Cohomology}(C_{2..4});$$

$$H2 := [[(x11 \theta 6) \wedge \theta 7, (x10 \theta 6) \wedge \theta 10, (x10 \theta 6) \wedge \theta 11, (x6 \theta 7) \wedge \theta 9, \quad (3.1.6)$$

$$(x6 \theta 7) \wedge \theta 10, (x6 \theta 7) \wedge \theta 11, (x6 \theta 8) \wedge \theta 9, (x6 \theta 8) \wedge \theta 10, (x6 \theta 8) \wedge \theta 11,$$

$$(x6 \theta 9) \wedge \theta 10, (x6 \theta 9) \wedge \theta 11, (x8 \theta 6) \wedge \theta 11, (x4 \theta 4) \wedge \theta 8 + (x5 \theta 5) \wedge \theta 8,$$

$$(x4 \theta 4) \wedge \theta 9 + (x5 \theta 5) \wedge \theta 9, (x4 \theta 4) \wedge \theta 10 + (x5 \theta 5) \wedge \theta 10, (x4 \theta 4) \wedge \theta 11$$

$$+ (x5 \theta 5) \wedge \theta 11, (x9 \theta 8) \wedge \theta 10, (x9 \theta 8) \wedge \theta 11, (x9 \theta 9) \wedge \theta 10,$$

$$(x9 \theta 9) \wedge \theta 11, (x9 \theta 10) \wedge \theta 11, (x10 \theta 4) \wedge \theta 5, (x10 \theta 6) \wedge \theta 7, (x10 \theta 6) \wedge \theta 8,$$

$$(x10 \theta 6) \wedge \theta 9, (x9 \theta 6) \wedge \theta 7, (x10 \theta 7) \wedge \theta 8, (x10 \theta 7) \wedge \theta 9, (x10 \theta 7) \wedge \theta 10,$$

$$(x10 \theta 7) \wedge \theta 11, (x10 \theta 8) \wedge \theta 9, (x10 \theta 8) \wedge \theta 10, (x10 \theta 8) \wedge \theta 11,$$

$$(x10 \theta 9) \wedge \theta 10, (x10 \theta 9) \wedge \theta 11, (x10 \theta 10) \wedge \theta 11, (x11 \theta 4) \wedge \theta 5,$$

$$(x11 \theta 9) \wedge \theta 11, (x11 \theta 10) \wedge \theta 11, (x8 \theta 7) \wedge \theta 11, (x8 \theta 8) \wedge \theta 9,$$

$$(x8 \theta 8) \wedge \theta 10, (x8 \theta 8) \wedge \theta 11, (x8 \theta 9) \wedge \theta 10, (x8 \theta 9) \wedge \theta 11, (x8 \theta 10) \wedge \theta 11,$$

$$(x9 \theta 4) \wedge \theta 5, (x7 \theta 8) \wedge \theta 9, (x7 \theta 8) \wedge \theta 10, (x6 \theta 4) \wedge \theta 5, (x6 \theta 6) \wedge \theta 7,$$

$$(x6 \theta 6) \wedge \theta 8, (x6 \theta 6) \wedge \theta 9, (x6 \theta 6) \wedge \theta 10, (x6 \theta 6) \wedge \theta 11, (x6 \theta 7) \wedge \theta 8,$$

$$(x8 \theta 7) \wedge \theta 8, (x8 \theta 7) \wedge \theta 9, (x8 \theta 7) \wedge \theta 10, (x4 \theta 4) \wedge \theta 6 + (x5 \theta 5) \wedge \theta 6,$$

$$(x4 \theta 4) \wedge \theta 7 + (x5 \theta 5) \wedge \theta 7, (x9 \theta 6) \wedge \theta 8, (x9 \theta 6) \wedge \theta 9, (x7 \theta 4) \wedge \theta 5,$$

$$(x7 \theta 6) \wedge \theta 7, (x7 \theta 6) \wedge \theta 8, (x7 \theta 6) \wedge \theta 9, (x7 \theta 6) \wedge \theta 10, (x7 \theta 6) \wedge \theta 11,$$

$$(x7 \theta 7) \wedge \theta 8, (x7 \theta 7) \wedge \theta 9, (x7 \theta 7) \wedge \theta 10, (x7 \theta 7) \wedge \theta 11, (x9 \theta 6) \wedge \theta 10,$$

$$(x9 \theta 6) \wedge \theta 11, (x9 \theta 7) \wedge \theta 8, (x9 \theta 7) \wedge \theta 9, (x9 \theta 7) \wedge \theta 10, (x9 \theta 7) \wedge \theta 11,$$

$$(x9 \theta 8) \wedge \theta 9, (x7 \theta 8) \wedge \theta 11, (x7 \theta 9) \wedge \theta 10, (x7 \theta 9) \wedge \theta 11, (x7 \theta 10) \wedge \theta 11,$$

$$(x8 \theta 4) \wedge \theta 5, (x8 \theta 6) \wedge \theta 7, (x8 \theta 6) \wedge \theta 8, (x8 \theta 6) \wedge \theta 9, (x8 \theta 6) \wedge \theta 10,$$

$$(x6 \theta 10) \wedge \theta 11, (x11 \theta 6) \wedge \theta 8, (x11 \theta 6) \wedge \theta 9, (x11 \theta 6) \wedge \theta 10,$$

$$(x11 \theta 6) \wedge \theta 11, (x11 \theta 7) \wedge \theta 8, (x11 \theta 7) \wedge \theta 9, (x11 \theta 7) \wedge \theta 10,$$

$$(x11 \theta 7) \wedge \theta 11, (x11 \theta 8) \wedge \theta 9, (x11 \theta 8) \wedge \theta 10, (x11 \theta 8) \wedge \theta 11,$$

$$(x11 \theta 9) \wedge \theta 10]]$$

$$> \text{nops}(H2[1]); \quad 102 \quad (3.1.7)$$

Con el 2 cociclo generalizado

$$\text{Repabc} > L := \text{DG}([["LieAlgebra", Alg, [11]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3],$$

$$-2], [[2, 3, 1], 1], [[1, 4, 4], 1], [[1, 5, 5], -1], [[2, 5, 4], 1],$$

$$[[3, 4, 5], 1], [[4, 5, 10], 1], [[4, 11, 4], 1], [[5, 11, 5], 1],$$

```

[[[6, 7, 6], 1], [[8, 9, 8], 1], [[10, 11, 10], 2]])
L := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e4]=e4, [e1, e5]=-e5, [e2, e3]=e1, [e2,
e5]=e4, [e3, e4]=e5, [e4, e5]=e10, [e4, e11]=e4, [e5, e11]=e5, [e6, e7]=e6,
[e8, e9]=e8, [e10, e11]=2 e10]

```

(3.1.8)

```

> DGsetup(L) :

```

```

Alg3 > Query(Alg, "Jacobi"); Center(Alg); Radical(Alg); N := Nilradical(Alg);
Series(Nilradical(Alg), "Lower");

```

```

true

```

```

[ ]

```

```

[e11, e10, e9, e8, e7, e6, e5, e4]

```

```

N := [e4, e5, e6, e8, e10]

```

```

[[e4, e5, e6, e8, e10], [e10], [ ]]

```

(3.1.9)

```

v > R := Representation(Alg, V, Adjoint(Alg)) :

```

```

Alg1 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11], V) :

```

```

v > DGsetup(Alg, R, Rep);

```

```

Lie algebra with coefficients: Rep

```

(3.1.10)

```

Rep1 > C := RelativeChains([ ]) :

```

```

Rep1 >

```

```

Rep1 > H1abc := Cohomology(C1..3);

```

```

H1abc := [[ ]]

```

(3.1.11)

```

Rep1 > H2abc := Cohomology(C2..4);

```

```

H2abc := [[ ]]

```

(3.1.12)

```

>

```

```

Repa >

```

Los ejemplos que siguen permitieron escribir el Teorema 9.2

[> with(DifferentialGeometry) : with(LieAlgebras) :

PRIMERA FAMILIA

▼ **SI2+.C2k, k=1,2,3,4 : H0=0, N=R=C2k, #H1=1, H2=0**

▼ **SI2+.C2: H0=0, N=R=C2, #H1=1, H2=0**

> L0 := DG(["LieAlgebra", Alg0, [5]], [[[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[1, 4, 4], 1],
 [[1, 5, 5], -1], [[2, 3, 1], 1], [[2, 5, 4], 1], [[3, 4, 5], 1]])
 L0 := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e4]=e4, [e1, e5]=-e5, [e2, e3]=e1, [e2, e5]=e4, [e3, e4]=e5] (1.1.1)

> DGsetup(L0);
 Lie algebra: Alg0 (1.1.2)

> MultiplicationTable("LieTable");

		<i>e1</i>	<i>e2</i>	<i>e3</i>	<i>e4</i>	<i>e5</i>
	----	----	----	----	----	----
<i>e1</i>		0	2 <i>e2</i>	-(2 <i>e3</i>)	<i>e4</i>	- <i>e5</i>
<i>e2</i>		-(2 <i>e2</i>)	0	<i>e1</i>	0	<i>e4</i>
<i>e3</i>		2 <i>e3</i>	- <i>e1</i>	0	<i>e5</i>	0
<i>e4</i>		- <i>e4</i>	0	- <i>e5</i>	0	0
<i>e5</i>		<i>e5</i>	- <i>e4</i>	0	0	0

(1.1.3)

> Query(Alg0, "Jacobi"); Center(Alg0); Radical(Alg0); N := Nilradical(Alg0);
 DS := Series(N, "Derived"); map(nops, DS)
 true
 []
 [e5, e4]
 N := [e4, e5]
 DS := [[e4, e5], []]
 [2, 0] (1.1.4)

> R0 := Representation(Alg0, V, Adjoint(Alg0)) :
 > DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5], V) :
 > DGsetup(Alg0, R0, Rep0);
 Lie algebra with coefficients: Rep0 (1.1.5)

> C := RelativeChains([]):
 > H10 := Cohomology(C_{1..3});
 H10 := [[]] (1.1.6)

> H20 := Cohomology(C_{2..4});
 H20 := [[]] (1.1.7)

>

SI2+.C4: H0=0, N=R=C4, #H1=1, H2=0

```
> L := _DG(["LieAlgebra", Alg, [7]], [[ [1, 2, 2], 2], [ [1, 3, 3], -2], [ [2, 3, 1], 1], [ [1, 4, 4], 3], [ [1, 5, 5], 1], [ [1, 6, 6], -1], [ [1, 7, 7], -3], [ [2, 5, 4], 1], [ [2, 6, 5], 2], [ [2, 7, 6], 3], [ [3, 4, 5], 3], [ [3, 5, 6], 2], [ [3, 6, 7], 1]])
L := [[e1, e2]=2 e2, [e1, e3]=-2 e3, [e1, e4]=3 e4, [e1, e5]=e5, [e1, e6]=-e6, (1.2.1)
[e1, e7]=-3 e7, [e2, e3]=e1, [e2, e5]=e4, [e2, e6]=2 e5, [e2, e7]=3 e6, [e3, e4]
=3 e5, [e3, e5]=2 e6, [e3, e6]=e7]
```

```
> DGsetup(L); MultiplicationTable("LieTable");
Lie algebra: Alg
```

	<i>e1</i>	<i>e2</i>	<i>e3</i>	<i>e4</i>	<i>e5</i>	<i>e6</i>	<i>e7</i>
<i>e1</i>	0	2 <i>e2</i>	-(2 <i>e3</i>)	3 <i>e4</i>	<i>e5</i>	- <i>e6</i>	-(3 <i>e7</i>)
<i>e2</i>	-(2 <i>e2</i>)	0	<i>e1</i>	0	<i>e4</i>	2 <i>e5</i>	3 <i>e6</i>
<i>e3</i>	2 <i>e3</i>	- <i>e1</i>	0	3 <i>e5</i>	2 <i>e6</i>	<i>e7</i>	0
<i>e4</i>	-(3 <i>e4</i>)	0	-(3 <i>e5</i>)	0	0	0	0
<i>e5</i>	- <i>e5</i>	- <i>e4</i>	-(2 <i>e6</i>)	0	0	0	0
<i>e6</i>	<i>e6</i>	-(2 <i>e5</i>)	- <i>e7</i>	0	0	0	0
<i>e7</i>	3 <i>e7</i>	-(3 <i>e6</i>)	0	0	0	0	0

(1.2.2)

```
> Query(Alg, "Jacobi"); Center(Alg); Radical(Alg); N := Nilradical(Alg);
DS := Series(N, "Lower"); map(nops, DS);
true
[ ]
[e7, e6, e5, e4]
N := [e4, e5, e6, e7]
DS := [[e4, e5, e6, e7], [ ]]
[4, 0] (1.2.3)
```

```
> R := Representation(Alg, V, Adjoint(Alg)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7], V) :
> DGsetup(Alg, R, Rep);
Lie algebra with coefficients: Rep (1.2.4)
```

```
> C := RelativeChains([ ]) :
> H1 := Cohomology(C1..3);
H1 := [[x4 θ4 + x5 θ5 + x6 θ6 + x7 θ7]] (1.2.5)
```

```
> H2ab := Cohomology(C2..4);
H2ab := [[ ]] (1.2.6)
```

SI2+.C6: H0=0, N=R=C6, #H1=1, H2=0

```
> L0 := _DG(["LieAlgebra", Alg0, [9]], [[ [1, 2, 2], 2], [ [1, 3, 3], -2], [ [2, 3, 1], 1],
```

```

[[1, 4, 4], 5], [[1, 5, 5], 3], [[1, 6, 6], 1], [[1, 7, 7], -1], [[1, 8, 8], -3], [[1, 9, 9],
-5], [[2, 5, 4], 1], [[2, 6, 5], 2], [[2, 7, 6], 3], [[2, 8, 7], 4], [[2, 9, 8], 5], [[3, 4,
5], 5], [[3, 5, 6], 4], [[3, 6, 7], 3], [[3, 7, 8], 2], [[3, 8, 9], 1]]])
L0 := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = 5 e4, [e1, e5] = 3 e5, [e1, e6] = e6, (1.3.1)
[e1, e7] = -e7, [e1, e8] = -3 e8, [e1, e9] = -5 e9, [e2, e3] = e1, [e2, e5] = e4, [e2,
e6] = 2 e5, [e2, e7] = 3 e6, [e2, e8] = 4 e7, [e2, e9] = 5 e8, [e3, e4] = 5 e5, [e3, e5]
= 4 e6, [e3, e6] = 3 e7, [e3, e7] = 2 e8, [e3, e8] = e9]

```

```

> DGsetup(L0);
Lie algebra: Alg0 (1.3.2)

```

```

> MultiplicationTable("LieTable");
11 x 11 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order (1.3.3)

```

```

> Query(Alg0, "Jacobi"); Center(Alg0); Radical(Alg0); N := Nilradical(Alg0);
DS := Series(N, "Derived"); map(nops, DS)
true
[]
[e9, e8, e7, e6, e5, e4]
N := [e4, e5, e6, e7, e8, e9]
DS := [[e4, e5, e6, e7, e8, e9], [ ]]
[6, 0] (1.3.4)

```

```

> R0 := Representation(Alg0, V, Adjoint(Alg0)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9], V) :
> DGsetup(Alg0, R0, Rep0);
Lie algebra with coefficients: Rep0 (1.3.5)

```

```

> C := RelativeChains([ ]) :
> H10 := Cohomology(C1..3);
H10 := [[x4 04 + x5 05 + x6 06 + x7 07 + x8 08 + x9 09]] (1.3.6)

```

```

> H2 := Cohomology(C2..4);
H2 := [[ ]] (1.3.7)

```

▼ SI2+.C8: H0=0, N=R=C8, #H1=1, H2=0

```

> L0 := _DG(["LieAlgebra", Alg0, [11]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[2, 3, 1], 1],
[[1, 4, 4], 7], [[1, 5, 5], 5], [[1, 6, 6], 3], [[1, 7, 7], 1], [[1, 8, 8], -1], [[1, 9, 9],
-3], [[1, 10, 10], -5], [[1, 11, 11], -7], [[2, 5, 4], 7], [[2, 6, 5], 6], [[2, 7, 6], 5],
[[2, 8, 7], 4], [[2, 9, 8], 3], [[2, 10, 9], 2], [[2, 11, 10], 1], [[3, 4, 5], 1], [[3, 5,
6], 2], [[3, 6, 7], 3], [[3, 7, 8], 4], [[3, 8, 9], 5], [[3, 9, 10], 6], [[3, 10, 11], 7]])
L0 := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = 7 e4, [e1, e5] = 5 e5, [e1, e6] = 3 e6, (1.4.1)
[e1, e7] = e7, [e1, e8] = -e8, [e1, e9] = -3 e9, [e1, e10] = -5 e10, [e1, e11] =
-7 e11, [e2, e3] = e1, [e2, e5] = 7 e4, [e2, e6] = 6 e5, [e2, e7] = 5 e6, [e2, e8]
= 4 e7, [e2, e9] = 3 e8, [e2, e10] = 2 e9, [e2, e11] = e10, [e3, e4] = e5, [e3, e5]

```

$= 2 e_6, [e_3, e_6] = 3 e_7, [e_3, e_7] = 4 e_8, [e_3, e_8] = 5 e_9, [e_3, e_9] = 6 e_{10}, [e_3, e_{10}] = 7 e_{11}$

> DGsetup(L0);
Lie algebra: Alg0 (1.4.2)

> MultiplicationTable("LieTable");
13 x 13 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order (1.4.3)

> Query(Alg0, "Jacobi"); Center(Alg0); Radical(Alg0); N := Nilradical(Alg0);
DS := Series(N, "Derived"); map(nops, DS)
true
[]
[e11, e10, e9, e8, e7, e6, e5, e4]
N := [e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11]
DS := [[e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11], []]
[8, 0] (1.4.4)

> R0 := Representation(Alg0, V, Adjoint(Alg0)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11], V) :
> DGsetup(Alg0, R0, Rep0);
Lie algebra with coefficients: Rep0 (1.4.5)

> C := RelativeChains([]):
> H10 := Cohomology(C1..3);
H10 := [[x4 θ4 + x5 θ5 + x6 θ6 + x7 θ7 + x8 θ8 + x9 θ9 + x10 θ10 + x11 θ11]] (1.4.6)

> H2 := Cohomology(C2..4);
H2 := [[]] (1.4.7)

SEGUNDA FAMILIA

▼ S12+.C2k + C y sus deformaciones

▼ S12+.C2+{a}, #H2=2

> La := _DG(["LieAlgebra", Alga, [6]], [[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[1, 4, 4], 1],
[[1, 5, 5], -1], [[2, 3, 1], 1], [[2, 5, 4], 1], [[3, 4, 5], 1]])
La := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = e4, [e1, e5] = -e5, [e2, e3] = e1, [e2, e5] = e4, [e3, e4] = e5] (2.1.1)

> DGsetup(La);
Lie algebra: Alga (2.1.2)

> MultiplicationTable("LieTable");

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \\
 \hline
 e1 & 0 & 2 e2 & -(2 e3) & e4 & -e5 & 0 \\
 e2 & -(2 e2) & 0 & e1 & 0 & e4 & 0 \\
 e3 & 2 e3 & -e1 & 0 & e5 & 0 & 0 \\
 e4 & -e4 & 0 & -e5 & 0 & 0 & 0 \\
 e5 & e5 & -e4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 e6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

(2.1.3)

> Query(Alga, "Jacobi"); Center(Alga); Radical(Alga); N := Nilradical(Alga);
 DS := Series(N, "Derived"); map(nops, DS)

true

[e6]

[e6, e5, e4]

N := [e4, e5, e6]

DS := [[e4, e5, e6], []]

[3, 0]

(2.1.4)

> Ra := Representation(Alga, V, Adjoint(Alga)) :

> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6], V) :

> DGsetup(Alga, Ra, Repa);

Lie algebra with coefficients: Repa

(2.1.5)

> C := RelativeChains([]):

> H1a := Cohomology(C_{1..3});

H1a := [[x4 θ4 + x5 θ5, x6 θ6]]

(2.1.6)

> H2a := Cohomology(C_{2..4});

H2a := [[(x4 θ4) ∧ θ6 + (x5 θ5) ∧ θ6, (x6 θ4) ∧ θ5]]

(2.1.7)

LE AGREGO EL SEGUNDO COCICLO

> La := _DG(["LieAlgebra", Alga, [6]], [[[[1, 2, 2], 2], [[1, 3, 3], -2], [[1, 4, 4], 1],
 [[1, 5, 5], -1], [[2, 3, 1], 1], [[2, 5, 4], 1], [[3, 4, 5], 1], [[4, 5, 6], 1]]])

La := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = e4, [e1, e5] = -e5, [e2, e3] = e1, [e2,
 e5] = e4, [e3, e4] = e5, [e4, e5] = e6] (2.1.8)

> DGsetup(La);

Lie algebra: Alga

(2.1.9)

> MultiplicationTable("LieTable");

(2.1.10)

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
\hline
e_1 & 0 & 2e_2 & -(2e_3) & e_4 & -e_5 & 0 \\
e_2 & -(2e_2) & 0 & e_1 & 0 & e_4 & 0 \\
e_3 & 2e_3 & -e_1 & 0 & e_5 & 0 & 0 \\
e_4 & -e_4 & 0 & -e_5 & 0 & e_6 & 0 \\
e_5 & e_5 & -e_4 & 0 & -e_6 & 0 & 0 \\
e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

(2.1.10)

```

> Query(Alga, "Jacobi"); Center(Alga); Radical(Alga);
      true
      [e6]
      [e6, e5, e4]

```

(2.1.11)

```

> Ra := Representation(Alga, V, Adjoint(Alga)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6], V) :
> DGsetup(Alga, Ra, Repa);
      Lie algebra with coefficients: Repa

```

(2.1.12)

```

> C := RelativeChains([ ]):
> H1a := Cohomology(C_{1..3});
      H1a := [[x4 θ4 + x5 θ5 + 2 x6 θ6]]

```

(2.1.13)

```

> H2a := Cohomology(C_{2..4});
      H2a := [[ ]]

```

(2.1.14)

Rep >

SI2+.C4+C

```

> L := _DG(["LieAlgebra", Alg, [8]], [[ [1, 2, 2], 2], [ [1, 3, 3], -2], [ [2, 3, 1], 1], [ [1, 4, 4], 3], [ [1, 5, 5], 1], [ [1, 6, 6], -1], [ [1, 7, 7], -3], [ [2, 5, 4], 1], [ [2, 6, 5], 2], [ [2, 7, 6], 3], [ [3, 4, 5], 3], [ [3, 5, 6], 2], [ [3, 6, 7], 1] ]])
L := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = 3 e4, [e1, e5] = e5, [e1, e6] = -e6,
      [e1, e7] = -3 e7, [e2, e3] = e1, [e2, e5] = e4, [e2, e6] = 2 e5, [e2, e7] = 3 e6, [e3, e4]
      = 3 e5, [e3, e5] = 2 e6, [e3, e6] = e7]

```

(2.2.1)

```

> DGsetup(L); MultiplicationTable("LieTable");
      Lie algebra: Alg

```

(2.2.2)

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 & e8 \\
\hline
e1 & 0 & 2 e2 & -(2 e3) & 3 e4 & e5 & -e6 & -(3 e7) & 0 \\
e2 & -(2 e2) & 0 & e1 & 0 & e4 & 2 e5 & 3 e6 & 0 \\
e3 & 2 e3 & -e1 & 0 & 3 e5 & 2 e6 & e7 & 0 & 0 \\
e4 & -(3 e4) & 0 & -(3 e5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e5 & -e5 & -e4 & -(2 e6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e6 & e6 & -(2 e5) & -e7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e7 & 3 e7 & -(3 e6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \tag{2.2.2}$$

```

> Query(Alg, "Jacobi"); Center(Alg); Radical(Alg); N := Nilradical(Alg);
DS := Series(N, "Lower"); map(nops, DS);
true
[e8]
[e8, e7, e6, e5, e4]
N := [e4, e5, e6, e7, e8]
DS := [[e4, e5, e6, e7, e8], [ ]
[5, 0]

```

(2.2.3)

```

> R := Representation(Alg, V, Adjoint(Alg)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8], V) :
> DGsetup(Alg, R, Rep);
Lie algebra with coefficients: Rep

```

(2.2.4)

```

> C := RelativeChains([ ]):
> H1 := Cohomology(C1..3);
H1 := [[x4 θ4 + x5 θ5 + x6 θ6 + x7 θ7, x8 θ8]]

```

(2.2.5)

```

> H2ab := Cohomology(C2..4);
H2ab := [[(x4 θ4) ∧ θ8 + (x5 θ5) ∧ θ8 + (x6 θ6) ∧ θ8 + (x7 θ7) ∧ θ8,
-(3 x8 θ4) ∧ θ7 + (x8 θ5) ∧ θ6]]

```

(2.2.6)

LE AGREGO EL PRIMER COCICLO

```

> L := _DG(["LieAlgebra", Alg, [8]], [[ [1, 2, 2], 2], [ [1, 3, 3], -2], [ [2, 3, 1], 1], [ [1,
4, 4], 3], [ [1, 5, 5], 1], [ [1, 6, 6], -1], [ [1, 7, 7], -3], [ [2, 5, 4], 1], [ [2, 6, 5], 2],
[ [2, 7, 6], 3], [ [3, 4, 5], 3], [ [3, 5, 6], 2], [ [3, 6, 7], 1]])
L := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = 3 e4, [e1, e5] = e5, [e1, e6] = -e6,
[e1, e7] = -3 e7, [e2, e3] = e1, [e2, e5] = e4, [e2, e6] = 2 e5, [e2, e7] = 3 e6, [e3, e4]
= 3 e5, [e3, e5] = 2 e6, [e3, e6] = e7]

```

(2.2.7)

```

>
> DGsetup(L); MultiplicationTable("LieTable");
Lie algebra: Alg

```

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 & e8 \\
\hline
e1 & 0 & 2 e2 & -(2 e3) & 3 e4 & e5 & -e6 & -(3 e7) & 0 \\
e2 & -(2 e2) & 0 & e1 & 0 & e4 & 2 e5 & 3 e6 & 0 \\
e3 & 2 e3 & -e1 & 0 & 3 e5 & 2 e6 & e7 & 0 & 0 \\
e4 & -(3 e4) & 0 & -(3 e5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e5 & -e5 & -e4 & -(2 e6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e6 & e6 & -(2 e5) & -e7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e7 & 3 e7 & -(3 e6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \tag{2.2.8}$$

```

> Query(Alg, "Jacobi"); Center(Alg); Radical(Alg); N := Nilradical(Alg);
DS := Series(N, "Lower"); map(nops, DS);
true
[e8]
[e8, e7, e6, e5, e4]
N := [e4, e5, e6, e7, e8]
DS := [[e4, e5, e6, e7, e8], [ ]
[5, 0]

```

(2.2.9)

```

> R := Representation(Alg, V, Adjoint(Alg)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8], V) :
> DGsetup(Alg, R, Rep);
Lie algebra with coefficients: Rep

```

(2.2.10)

```

> C := RelativeChains([ ]):
> H1 := Cohomology(C1..3);
H1 := [[x4 θ4 + x5 θ5 + x6 θ6 + x7 θ7, x8 θ8]]

```

(2.2.11)

```

> H2ab := Cohomology(C2..4);
H2ab := [[-(3 x8 θ4) ∧ θ7 + (x8 θ5) ∧ θ6, (x4 θ4) ∧ θ8 + (x5 θ5) ∧ θ8
+ (x6 θ6) ∧ θ8 + (x7 θ7) ∧ θ8]]

```

(2.2.12)

```

Rep >
LE AGREGO EL PRIMER 2-COCICLO
> L := _DG(["LieAlgebra", Alg, [8]], [[ [1, 2, 2], 2], [ [1, 3, 3], -2], [ [2, 3, 1], 1], [ [1,
4, 4], 3], [ [1, 5, 5], 1], [ [1, 6, 6], -1], [ [1, 7, 7], -3], [ [2, 5, 4], 1], [ [2, 6, 5], 2],
[ [2, 7, 6], 3], [ [3, 4, 5], 3], [ [3, 5, 6], 2], [ [3, 6, 7], 1], [ [4, 7, 8], -3], [ [5, 6, 8],
1]]])
L := [[e1, e2] = 2 e2, [e1, e3] = -2 e3, [e1, e4] = 3 e4, [e1, e5] = e5, [e1, e6] = -e6,
[e1, e7] = -3 e7, [e2, e3] = e1, [e2, e5] = e4, [e2, e6] = 2 e5, [e2, e7] = 3 e6, [e3,
e4] = 3 e5, [e3, e5] = 2 e6, [e3, e6] = e7, [e4, e7] = -3 e8, [e5, e6] = e8]

```

(2.2.13)

```

>
> DGsetup(L); MultiplicationTable("LieTable");
Lie algebra: Alg

```

	<i>e1</i>	<i>e2</i>	<i>e3</i>	<i>e4</i>	<i>e5</i>	<i>e6</i>	<i>e7</i>	<i>e8</i>
<i>e1</i>	0	$2 e2$	$-(2 e3)$	$3 e4$	<i>e5</i>	$-e6$	$-(3 e7)$	0
<i>e2</i>	$-(2 e2)$	0	<i>e1</i>	0	<i>e4</i>	$2 e5$	$3 e6$	0
<i>e3</i>	$2 e3$	$-e1$	0	$3 e5$	$2 e6$	<i>e7</i>	0	0
<i>e4</i>	$-(3 e4)$	0	$-(3 e5)$	0	0	0	$-(3 e8)$	0
<i>e5</i>	$-e5$	$-e4$	$-(2 e6)$	0	0	<i>e8</i>	0	0
<i>e6</i>	<i>e6</i>	$-(2 e5)$	$-e7$	0	$-e8$	0	0	0
<i>e7</i>	$3 e7$	$-(3 e6)$	0	$3 e8$	0	0	0	0
<i>e8</i>	0	0	0	0	0	0	0	0

(2.2.14)

```
> Query(Alg, "Jacobi"); Center(Alg); Radical(Alg);
      true
      [e8]
      [e7, e6, e5, e4, e8]
```

(2.2.15)

```
> R := Representation(Alg, V, Adjoint(Alg)) :
> DGsetup([x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8], V) :
> DGsetup(Alg, R, Rep);
```

Lie algebra with coefficients: Rep

(2.2.16)

```
> C := RelativeChains([ ]):
> H1 := Cohomology(C1..3);
```

$H1 := [[x4 \theta4 + x5 \theta5 + x6 \theta6 + x7 \theta7 + 2 x8 \theta8]]$

(2.2.17)

```
> H2ab := Cohomology(C2..4);
```

$H2ab := [[]]$

(2.2.18)

Rep >

UN TEOREMA GENERAL

Un ejemplo clásico de producto semidirecto rígido es $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \ltimes V(n)$, siempre que $n \neq 3, 5, 7, 11$. La familia estudiada por Richardson (ver sección 7.1), proporciona una guía detallada para el cálculo de $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, recogida en sección 4.2. En dicha sección se pone de manifiesto que, para ciertos valores de n , el grupo de cohomología $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ no es trivial.

En este capítulo consideraremos álgebras de Lie de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes V$, con \mathfrak{s} semisimple y V una representación de \mathfrak{s} . En este contexto, según la sucesión larga asociada (ecuación 4.13) se tiene

$$\cdots \longrightarrow C^2(V, V)^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^2(V, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \cdots$$

En particular, si $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \ltimes V$ no comparten componentes irreducibles. Aplicando los isomorfismos del Complejo de Chevalley–Eilenberg y el Lema de Schur (3.1), se tiene

$$C^2(V, V)^{\mathfrak{s}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^2 V, V) = 0 \quad \text{y} \quad C^2(V, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^2 V, \mathfrak{s}) = 0.$$

De este modo, ambos espacios en la sucesión son nulos, lo que implica que:

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0.$$

12.1 Caso V irreducible

Lema 12.1. Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie semisimple y V una representación irreducible de \mathfrak{s} de $\dim(V) > 1$. Si $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \ltimes V$ no comparten componentes irreducibles, entonces el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{s} \ltimes V \oplus \mathbb{C},$$

con \mathbb{C} factor abeliano, tiene $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0$. Más aún, $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$ a lo sumo es de dimensión 2 y estará generado por uno o dos cociclos específicos :

- Un primer 2-cociclos σ_1 que representa una clase en $(V^* \otimes \mathbb{C}^*) \otimes V$.

- Un segundo 2-cociclos σ_2 que representa una clase en $\Lambda^2 V^* \otimes \mathbb{C}$, el cual aparece si y solo si $\Lambda^2 V$ tiene una componente irreducible de dimensión 1.

Demostración. Sea $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{s} \ltimes V \oplus \mathbb{C}$, con $\mathbb{C} = \langle a \rangle$, como $V \oplus \mathbb{C}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g}_a , según la sucesión larga asociada (4.13) se tiene :

$$\cdots \longrightarrow C^1(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \longrightarrow C^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \cdots$$

Teniendo en cuenta los isomorfismos

$$C^1(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{s}}(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s}) \quad \text{y} \quad C^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^2(V \oplus \mathbb{C}), \mathfrak{s}).$$

y que V y \mathfrak{s} no tienen componentes en común (pues si las tuvieran, por el Teorema (3.14), $\Lambda^2 V$ y \mathfrak{s} tendrían componentes en común lo que contradice la hipótesis) y teniendo en cuenta la fórmula de potencia exterior, $\Lambda^2(V \oplus \mathbb{C}) = \Lambda^2 V \oplus V$, entonces:

$$C^1(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} = 0 \quad \text{y} \quad C^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} = 0,$$

por lo tanto ambos espacios en la sucesión son nulos, lo que nos lleva a :

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}}.$$

Como $C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^2 V \oplus V, V \oplus \mathbb{C})$, $\Lambda^2 V$ no comparte componentes irreducibles con V y $\dim V > 1$ entonces la dimensión de $\text{Hom}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^2 V \oplus V, V \oplus \mathbb{C})$ es al menos uno y está determinada por el número de componentes irreducibles de dimensión uno que aparecen en la descomposición de $\Lambda^2 V$, luego

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \begin{cases} \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle & \text{si existe } V(0) \subset \Lambda^2 V \\ \langle \sigma_1 \rangle & \text{si no} \end{cases}$$

con $\sigma_1 \in (V^* \otimes \mathbb{C}^*) \otimes V$ y $\sigma_2 \in \Lambda^2 V^* \otimes \mathbb{C}$. □

Teorema 12.2. *Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie semisimple y V una representación irreducible de \mathfrak{s} , $\dim(V) > 1$. Si $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \ltimes V$ no comparten componentes irreducibles y $\Lambda^2 V$ tiene una componente irreducible unidimensional, entonces existe un 2-cociclo, σ de $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{s} \ltimes V \oplus \mathbb{C}$, tal que la deformación lineal $\mathfrak{g}_a(\sigma) = \mathfrak{s} \ltimes V \oplus_{\sigma} \mathbb{C}$ es algebraicamente rígida, no completa.*

Demostración.

Dado que $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \ltimes V$ no comparten componentes irreducibles, por el Lema 12.4 para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{s} \ltimes V \oplus \mathbb{C}$,

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad \text{con } \sigma_1 \in (V^* \otimes \mathbb{C}^*) \otimes V \quad \text{y} \quad \sigma_2 \in \Lambda^2 V^* \otimes \mathbb{C}.$$

Si consideramos la descomposición en espacios pesos de $V = \bigoplus V_{\alpha}$ y que el peso de los productos tensorial y exterior es la suma de los pesos originales , entonces por la observación (3.3.3), el 2-cociclo σ_2 debe ser combinación lineal de elementos de la forma $v^* \wedge w^* \otimes a$ con $v \in V_{\alpha}$ y $w \in V_{-\alpha}$.

Dado que σ_2 define una estructura de álgebra de Lie de tipo Heisenberg, por Lema 5.2,

$$\mathfrak{g}_a(\sigma_2) = \mathfrak{s} \ltimes_{\sigma_2} V \oplus \mathbb{C}$$

es álgebra de Lie. Además como $a \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_a(\sigma_2))$, se sigue que $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ no es completa. Probaremos que $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida.

En esta situación, $V \oplus \mathbb{C}$ es un ideal no abeliano de $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$. Por la ecuación 4.8 se tiene:

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}.$$

Además, por la sucesión larga asociada 4.10,

$$\dots \longrightarrow H^1(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \dots$$

y dado que $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \ltimes V$ no tienen componentes irreducibles en común, se deduce por el Teorema 3.14 que, tanto $V \oplus \mathbb{C}$ como $\Lambda^2(V \oplus \mathbb{C})$ no tienen componentes en común con \mathfrak{s} , luego

$$H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{s}} = H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}},$$

entonces

$$H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)} = H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}.$$

Como $C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ y \mathbb{C} es abeliano, entonces

$$C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle^{V \oplus \mathbb{C}} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle^V.$$

Claramente σ_2 es invariante por V pues, para todo $x \in V$:

$$x \cdot (v^* \wedge w^* \otimes a) = \underbrace{x \cdot (v^*)}_{=0} \wedge w^* \otimes a + v^* \wedge \underbrace{x \cdot (w^*)}_{=0} \otimes a + v^* \wedge a^* \otimes \underbrace{x \cdot (a)}_{=0} = 0.$$

La acción de un elemento $x \in V$ en un término de σ_1 , $v^* \wedge a^* \otimes u$, es:

$$\begin{aligned} x \cdot (v^* \wedge a^* \otimes u) &= x \cdot (v^*) \wedge a^* \otimes u + v^* \wedge x \cdot (a^*) \otimes u + v^* \wedge a^* \otimes x \cdot (u) \\ &= v^* \wedge x \cdot (a^*) \otimes u + v^* \wedge a^* \otimes x \cdot (u). \end{aligned}$$

En particular, para $x = v$

$$v \cdot (v^* \wedge a^* \otimes u) = v^* \wedge v \cdot (a^*) \otimes u + v^* \wedge a^* \otimes v \cdot (u) = v^* \wedge v \cdot (a^*) \otimes u + \lambda v^* \wedge a^* \otimes a.$$

De este modo, en una combinación lineal de σ_1 y σ_2 , el término $v^* \wedge v \cdot (a^*) \otimes u$ indica que $v \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = v \cdot (\sigma_1) \neq 0$, por lo que σ_1 no es un invariante bajo la acción de $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$. En consecuencia, σ_1 no pertenece a $H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}$.

Por otro lado, $a^* \otimes a \in C^1(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}}$ y su diferencial

$$d_1(a^* \otimes a) \in C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$$

está dada por:

$$d_1(a^* \otimes a)(x, y) = \underbrace{[x, a^* \otimes a(y)]}_{=0} - \underbrace{[y, a^* \otimes a(x)]}_{=0} - a^* \otimes a([x, y]) = -a^* \otimes a([x, y])$$

por lo tanto

$$d_1(a^* \otimes a)(x, y) \neq 0, \text{ si y solo si } [x, y] = \lambda a.$$

Dado que los únicos corchetes no nulos de elementos de $V \oplus \mathbb{C}$ que resultan en $\langle a \rangle$ son precisamente los definidos por el cociclo σ_2 y teniendo en cuenta que $d_1(a^* \otimes a) \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$

$$d_1(a^* \otimes a) \in \langle \sigma_2 \rangle \quad \text{con} \quad d_1(a^* \otimes a) \neq 0,$$

es decir, σ_2 es un coborde, por lo tanto, representa la clase del cero en la cohomología de segundo orden. En consecuencia

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = 0.$$

□

Ejemplo 12.3. Sea el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_6 \times V(0, 0, 1)$, de dimensión 35. La descomposición en irreducibles de los espacios:

- $\Lambda^2 V(0, 0, 1) = V(1, 0, 1) \oplus V(0, 1, 0) \oplus V(0)$, ver ejemplo 3.15,
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_6 \oplus V(0, 0, 1) = V(2, 0, 0) \oplus V(0, 0, 1)$

cumplen las condiciones del teorema, luego existe σ_2 tal que $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida, no completa.

12.2 Caso $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, con V_i irreducible

Lema 12.4. Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie semisimple y sea $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ una representación de \mathfrak{s} , donde cada V_i es una representación irreducible no trivial ($\dim V_i > 1$). Si $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \times V$ no comparten componentes irreducibles, entonces el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{s} \times V \oplus \mathbb{C},$$

donde \mathbb{C} denota un factor abeliano, cumple que

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0.$$

Más aún, la dimensión de $n \leq H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \leq n + m + s$, donde

m : es la cantidad de espacios invariantes unidimensionales que aparecen en $\Lambda^2 V$, y

s : número de combinaciones de a dos entre componentes irreducibles en común en V .

Además dos tipos de 2-cociclos no triviales en $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$ son

- Un primer tipo de 2-cociclos σ_1 , que representan clases en los espacios $(V_i^* \otimes \mathbb{C}^*) \otimes V_i$, para $i = 1 \cdots n$.

- Un segundo tipo de 2-cociclos σ_2 , que representan clases en $\Lambda^2 V_i^* \otimes \mathbb{C}$, siempre que $\Lambda^2 V_i$ contenga una componente irreducible unidimensional.

Demostración. De manera análoga a la demostración del Lema 12.1, se tiene que

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}}.$$

Como $C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^2 V \oplus V, V \oplus \mathbb{C})$,
y dado que $\Lambda^2 V$ no comparte componentes irreducibles con V , y $\dim V_i > 1$ entonces

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^2 V \oplus V, V \oplus \mathbb{C}) = n + m_1 + m_2 + s$$

con

- n : número de componentes irreducibles de la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$,
- m_1 : número de componentes irreducibles unidimensionales de $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda^2 V_i$,
- m_2 : número de componentes irreducibles unidimensionales de $V_i \otimes V_j$ ($i \neq j$) y
- s : número de combinaciones de a dos entre componentes irreducibles en común en V .

En consecuencia

$$\langle \{\sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m_1\} \rangle \subset H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$$

donde:

$$\sigma_{1,i} \in (V_i^* \otimes \mathbb{C}^*) \otimes V_i \quad \text{y} \quad \sigma_{2,j} \in \Lambda^2 V_{2,j}^* \otimes \mathbb{C} \quad (\text{si } m_1 \neq 0). \quad \square$$

Teorema 12.5. *Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie semisimple y sea $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ una representación de \mathfrak{s} , donde cada V_i es irreducible de dimensión estrictamente mayor que uno, y no isomorfo entre sí.*

Si $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \times V$ no comparten componentes irreducibles y $\Lambda^2 V$ contiene una componente irreducible unidimensional provenientes solo de $\Lambda^2 V_i$.

Entonces existe un 2-cociclo, σ de $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{s} \times V \oplus \mathbb{C}$, tal que la deformación lineal $\mathfrak{g}_a(\sigma) = \mathfrak{s} \times V \oplus_{\sigma} \mathbb{C}$ es algebraicamente rígida, no completa.

Demostración.

Dado que $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \times V$ no comparten componentes irreducibles, por el Lema 12.4 para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{s} \times V \oplus \mathbb{C}$, se tiene que

$$\langle \{\sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m_1\} \rangle \subset H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$$

donde $\sigma_{1,i} \in (V_i^* \otimes \mathbb{C}^*) \otimes V_i$ y $\sigma_{2,j} \in \Lambda^2 V_{2,j}^* \otimes \mathbb{C}$.

Por hipótesis, dado que los únicos vectores de peso cero están en $\Lambda^2 V_i$, le corresponde a $s = m_2 = 0$. Entonces

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \{\sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m_1\} \rangle$$

Si consideramos la descomposición en espacios pesos de V_i , solo en los espacios irreducibles en los cuales en $\Lambda^2 V_i$ contiene el irreducible unidimensional, $V_i = \bigoplus V_{i,\alpha}$, por

el Teorema 12.2, el 2-cociclo $\sigma_2 = \sum \sigma_{2,i}$ debe ser combinación lineal de elementos de la forma $v^* \wedge w^* \otimes a$ con $v \in V_{i,\alpha}$ y $w \in V_{i,-\alpha}$.

Dado que σ_2 define una estructura de álgebra de Lie de tipo Heisenberg, por el Lema 5.2,

$$\mathfrak{g}_a(\sigma_2) = \mathfrak{s} \ltimes_{\sigma_2} V \oplus \mathbb{C}$$

es álgebra de Lie. Además como $a \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_a(\sigma_2))$, se sigue que $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ no es completa. Probaremos que $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$ es algebraicamente rígida.

En esta situación, $V \oplus \mathbb{C}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$. Por la ecuación 4.8 se tiene:

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}.$$

Además, por la sucesión larga asociada 4.10,

$$\dots \longrightarrow H^1(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{s}} \longrightarrow H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{s})^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \dots$$

y dado que $\Lambda^2 V$ y $\mathfrak{s} \ltimes V$ no tienen componentes irreducibles en común, se deduce por el Teorema 3.14 que, tanto $V \oplus \mathbb{C}$ como $\Lambda^2(V \oplus \mathbb{C})$ no tienen componentes en común con \mathfrak{s} , luego

$$H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{s}} = H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}},$$

entonces

$$H^2(V \oplus \mathbb{C}, \mathfrak{g}_a(\sigma_2))^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)} = H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}.$$

Como $C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{s}} = \langle \{\sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m\} \rangle$ y \mathbb{C} es abeliano, entonces

$$\begin{aligned} C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)} &= \langle \{\sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m\} \rangle^{V \oplus \mathbb{C}} \\ &= \langle \{\sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m\} \rangle^V. \end{aligned}$$

Claramente $\sigma_{2,j}$ es invariante por V pues, para todo $x \in V$:

$$x \cdot (v^* \wedge w^* \otimes a) = \underbrace{x \cdot (v^*)}_{=0} \wedge w^* \otimes a + v^* \wedge \underbrace{x \cdot (w^*)}_{=0} \otimes a + v^* \wedge a^* \otimes \underbrace{x \cdot (a)}_{=0} = 0.$$

La acción de un elemento $x \in V$ en un término de $\sigma_{1,i}$, $v^* \wedge a^* \otimes u$, es:

$$\begin{aligned} x \cdot (v^* \wedge a^* \otimes u) &= x \cdot (v^*) \wedge a^* \otimes u + v^* \wedge x \cdot (a^*) \otimes u + v^* \wedge a^* \otimes x \cdot (u) \\ &= v^* \wedge x \cdot (a^*) \otimes u + v^* \wedge a^* \otimes x \cdot (u). \end{aligned}$$

En particular, para $x = v \in V_i$

$$v \cdot (v^* \wedge a^* \otimes u) = v^* \wedge v \cdot (a^*) \otimes u + v^* \wedge a^* \otimes v \cdot (u) = v^* \wedge v \cdot (a^*) \otimes u + \lambda v^* \wedge a^* \otimes a.$$

De este modo, en una combinación lineal de $\sigma_{1,i}$ y $\sigma_{2,j}$, el término $v^* \wedge v \cdot (a^*) \otimes u$ indica que $v \cdot (\sigma_{1,i} + \sigma_{2,j}) = v \cdot (\sigma_{1,i}) \neq 0$, por lo que $\sigma_{1,i}$ no es un invariante bajo la acción de $\mathfrak{g}_a(\sigma_2)$. En consecuencia, $\sigma_{1,i}$ no pertenece a $H^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^{\mathfrak{g}_a(\sigma_2)}$.

Por otro lado, $a^* \otimes a \in C^1(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^5$ y su diferencial

$$d_1(a^* \otimes a) \in C^2(V \oplus \mathbb{C}, V \oplus \mathbb{C})^5 = \langle \{\sigma_{1,i}, \sigma_{2,j} \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m\} \rangle$$

está dada por:

$$d_1(a^* \otimes a)(x, y) = \underbrace{[x, a^* \otimes a(y)]}_{=0} - \underbrace{[y, a^* \otimes a(x)]}_{=0} - a^* \otimes a([x, y]) = -a^* \otimes a([x, y])$$

por lo tanto

$$d_1(a^* \otimes a)(x, y) \neq 0, \text{ si y solo si } [x, y] = \lambda a.$$

Dado que los únicos corchetes no nulos de elementos de $V \oplus \mathbb{C}$ que resultan en $\langle a \rangle$ son precisamente los definidos por el cociclo σ_2 y teniendo en cuenta que $d_1(a^* \otimes a) \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$

$$d_1(a^* \otimes a) \in \langle \sigma_2 \rangle \quad \text{con} \quad d_1(a^* \otimes a) \neq 0,$$

es decir, σ_2 es un coborde, por lo tanto, representa la clase del cero en la cohomología de segundo orden. En consecuencia

$$H^2(\mathfrak{g}_a(\sigma_2), \mathfrak{g}_a(\sigma_2)) = 0.$$

□

Parte IV

Bibliografía y referencias

Bibliografía y referencia

- [BW1] Burde D. and Wagemann F., *Sympathetic Lie algebras and adjoint cohomology for Lie algebras*, J. Algebra 629, 381-398 (2023).
- [BW2] Burde D. and Wagemann F., *Cohomology of perfect Lie algebras*, 2024.
- [B] Bourbaki N., *Lie Groups and Lie Algebras*, Chapter 7-9. Saltador.(2004).
- [C] Carles R., *Sur certaines classes d'algèbres de Lie rigides*, Math. Ann. 272, 477–488 (1985).
- [CE] Chevalley C. and Eilenberg S., *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 , 85-124, 1948.
- [F] Folly Y.-Aziamagnon, *Sur la rigidité des représentations de $sl(2)$* , Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari, vol. 67 (1997).
- [FH] Fulton W. and Harris J., *Representation Theory, A First Course*. Graduate Texts in Mathematics 129.
- [GS] Gelfand I. M. and Sapiro Z. Y., *Representations of the group of rotations in three-dimensional space and their applications*, Uspehi Mat. Nauk. N. S., 47, 7, 3-117, 1952. (Russian). Amer. Math. Soc. Translations (2) 2, 207-316, 1956.
- [Ha] Hall Brian, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Graduate Texts in Mathematics, 222 .
- [HS] Hochschild G. and Serre J. P. , *Cohomology of Lie algebras*, Ann. of Math. 57, 591-603,1953.
- [Hu] Humphreys James E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics 9.
- [Kn] Knapp Anthony W., *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics, 140 .
- [K] Kostant B., *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math. 81, 973-1032, 1959.
- [Re] Reeder M., *Exterior Powers of the Adjoint Representation*, Canadian Journal of Mathematics, 49(1), 133-159, 1997. doi:10.4153/CJM-1997-007-1.
- [R] Richardson R.W., *On the rigidity of semi-direct products of Lie algebras*, Pac. J. Math. 22, 339-344 (1967).
- [SM] San Martín Luiz A. B. , *Álgebras de Lie*, 2009.

[W] Weibel C., *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics, 38, 1994, digital 2003.