cet
43: (2022)
ISSN: 1668-9178

Deformaciones rígidas de álgebras de Lie perfectas más un factor abeliano

Estela F. FERNÁNDEZ[1] y Paulo A. TIRAO[2]

[1]Universidad Nacional de Tucumán.
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Tucumán. Argentina.
[2]Universidad Nacional de Córdoba.
Centro de Investigación y Estudios de Matemática- Facultad de Matemática Astronomía y Física, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - Guangdong Technion Israel Institute of Technology, Guangdong Province, China.

Resumen

Describimos brevemente la construcción de una familia de álgebras de Lie rígidas como deformaciones lineales del producto semidirecto de por su representación estándar más un factor abeliano de dimensión 1.

Rigid deformations of perfect Lies algebras plus an abelian factor

Abstract

We briefly describe the construction of a family of rigid Lie algebras as linear deformations of the semidirect product of and its standard representation plus a 1-dimensional abelian factor.

Los resultados originales que anunciamos en esta nota son parte del proyecto de tesis doctoral en curso de Estela Fernández como alumna del Doctorado en Ciencias Exactas e Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán, bajo la dirección de Paulo Tirao.

Introducción

Un ambiente natural para estudiar una clase de álgebras de dimensión finita dada, es la variedad algebraica de todos los productos que definen álgebras de ese tipo. Un álgebra sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n es un producto bilineal μ de $\mathbb{C}^n$ en que satisface ciertas propiedades según la clase de álgebras de que se trate: asociativas, conmutativas, de Lie, de Jordan, etc. La variedad afín de todos los productos bilineales $\mathbb{C}^n$ es[1] $V = \mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^n$ y la variedad algebraica de los productos o corchetes de Lie complejos de dimensión, es.

L={ μ ∈ V,antisimétrico y satisface Jacobi}

Un corchete de Lie está determinado por sus constantes de estructura, los coeficientes de μ en V respecto a una base, digamos la canónica, de $\mathbb{C}^n$.

El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{C})$ actúa de manera natural en L por cambio de base g .μ(x,y)=g (μ (g^(-1) x ,g^(-1) y)), para todo g ∈ GL_n (C). La clase de isomorfismo de μ es entonces su órbita, O_μ.

Un corchete de Lie se dice rígido si su órbita es abierta en con la topología Zariski. Ahora, una

1 $\mathbb{C}^{n*}$ es el espacio dual de $\mathbb{C}^n$.

cet
43: (2022)
ISSN: 1668-9178

órbita es abierta Zariski si y sólo si es abierta euclídea. Luego un corchete de Lie es rígido si pequeñas perturbaciones de sus constantes de estructura lo mantienen en la misma clase de isomorfismo.

La clausura de la órbita de un corchete rígido es una componente irreducible de la variedad y por lo tanto son finitos. Un problema de enorme relevancia, aunque fuera del alcance hoy en día, es el de entender y clasificar todos los corchetes de Lie rígidos de una dimensión dada.

Habiendo fijado el espacio vectorial subyacente $\mathbb{C}^n$, hemos considerado todos los posibles corchetes de Lie que hacen de $\mathbb{C}^n$ un álgebra de Lie. En general, un álgebra de Lie compleja de dimensión n es un espacio vectorial g de dimensión n con un corchete de Lie $[\,,\,] : g \otimes g \longrightarrow g$. Vía un isomorfismo dado de g en $\mathbb{C}^n$, identificamos al corchete de g $[\,,\,]$ con un correspondiente $\mu \in L$. Distintos isomorfismos de g en $\mathbb{C}^n$, harán corresponder a $[\,,\,]$ con distintos μ, pero isomorfos, es decir en una misma órbita. Así dada un álgebra de Lie g identificaremos a g con un μ en esa órbita. Nos referiremos a un $\mu \in L$ de manera indistinta como corchete o álgebra de Lie.

Todas las álgebras de Lie consideradas en esta nota serán complejas y de dimensión finita.

Deformaciones lineales de álgebras de Lie

Dada un álgebra de Lie $\mu \in L$, una deformación lineal de es una familia de álgebras de Lie

$$\mu(t)= \mu+t\sigma, t \in \mathbb{C}, \sigma \in V \ . (1)$$

No es difícil ver que μ es un producto de Lie si y sólo si σ es un producto de Lie y es además un 2-cociclo de μ . La deformación es no trivial sí para t arbitrariamente pequeños, μ_t no es isomorfa a μ.

Si μ es rígida, toda deformación lineal es trivial.

Cociclos y cohomología

Dada un álgebra de Lie μ, σ es un 2-cociclo de μ si está en el núcleo de la transformación lineal

$$d^2 : \Lambda^2 \, \mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \Lambda^3 \, \mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^n$$

definida por

$$\begin{aligned} d^2(\sigma)(x,y,z) = {} & [x,\sigma(y,z)] - [y,\sigma(x,z)] + \\ & [z,\sigma(x,y)] - \sigma([x,y],z) + \\ & \sigma([x,z],y) - \sigma([y,z],x) \ . \end{aligned}$$

El segundo grupo de cohomología adjunta de μ es

$$H^2(\mu,\mu) = \operatorname{Ker} d^2 / \operatorname{Im} d^1,$$

donde

$$d^1 : \mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \Lambda^2 \, \mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^n$$

está definida por

$$d^1(\sigma)(x,y) = [x,\sigma(y)] - [y,\sigma(x)] - \sigma([x,y]).$$

Si la clase de cohomología de σ es nula, $[\sigma] = 0 \in H^2(\mu,\mu)$, la deformación lineal (1) es trivial. Luego para construir deformaciones lineales que puedan resultar no triviales nos restringiremos a 2-cociclos σ con $[\sigma] \neq 0 \in H^2(\mu,\mu)$.

Álgebras de Lie rígidas y no rígidas

No hay al día de hoy un método para construir álgebras de Lie rígidas, ni tampoco varias maneras de decidir si un álgebra de Lie dada es rígida o no. Por un lado tenemos un test cohomológico clásico que asegura rigidez:

$$H^2(\mu,\mu) = 0 \Longrightarrow \mu \text{ es rígida.}$$

Por otro lado, si podemos construir una deformación lineal no trivial de , entonces no es rígida.

Una clase de álgebras de Lie rígidas es la de las álgebras semisimples, pues si es semisimple, entonces $H^2(\mu,\mu) = 0$.

En un trabajo reciente [1] se probó que genéricamente un álgebra de Lie con un factor abeliano, no es rígida. Más aún en ese trabajo se muestra como construir de manera sistemática una deformación lineal no trivial para esa clase, con una sola excepción: un álgebra de Lie perfecta más un factor abeliano de dimensión 1. Recordamos que un álgebra de Lie es perfecta si su álgebra derivada o conmutador es igual a ella. Las semisimples son

cet
43: (2022)
ISSN: 1668-9178

ejemplos de álgebras de Lie perfectas. De ahora en más, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con corchete de Lie μ, identificaremos a $\mathfrak{g}$ con μ escribiendo indistintamente uno u otro.

Ejemplo. El álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ es rígida, pues $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$.

Ejemplo (Tomado de [1]). Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2$ el producto semidirecto de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ por su representación estándar. $\mathfrak{g}$ es perfecta y es rígida, pues $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$

Sea $\mathfrak{g}_a$ la suma directa de $\mathfrak{g}$ más un factor abeliano de dimensión 1, $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$. Esta, claramente, no es perfecta.

Si $\{e_1,e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$ y $\{a\}$ es base del factor abeliano $\mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}_a$, entonces σ dado por

$$\sigma = e_1^* \wedge e_2^* \otimes a,$$

donde $\{ e_1^*, e_2^* \}$ es la base dual de $\{ e_1, e_2 \}$ es un 2-cociclo de $\mathfrak{g}_a$.

La correspondiente deformación lineal $\mathfrak{g}_a(t)$ está dada por:

$$[H,E]_t = 2E, \quad [H,F]_t = -2F,$$
$$[E,F]_t = H,$$
$$[H, e_1]_t = e_1]\!]^{\wedge}, \quad [H, e_2]_t = -e_2,$$
$$[E, e_2]_t = e_1,$$
$$[F, e_1]_t = e_2, \quad [e_1, e_2]_t = ta.$$

El álgebra de Lie g_a (t) es perfecta para todo $t \neq 0$, luego la deformación lineal es no trivial.

Construcción de un álgebra rígida como deformación de otra

Una observación que cabe destacar es que el álgebra del ejemplo anterior, $\mathfrak{g}_a(t)$, es rígida. Luego, una pregunta natural es si es posible generalizar este ejemplo, poniendo $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ en lugar de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, para construir una nueva familia de álgebras de Lie rígidas no conocidas hasta ahora. Es decir, comenzar con el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}_n \oplus \mathbb{C},$$

y luego deformarla para obtener una rígida. Una primera respuesta es no, pues el 2-cociclo σ de $\mathfrak{g}_a$ en el ejemplo, no tiene análogo para este caso más general. Sin embargo, la respuesta es sí, cambiando el 2-cociclo σ.

En esta sección describimos en detalle la primera instancia de esta nueva construcción, el caso $n = 2$ correspondiente a comenzar con el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$.

Sea $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2$ donde la acción de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}^2$ es la evaluación, es decir $\mathbb{C}^2$ es la representación estándar de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y es el producto semidirecto de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ por $\mathbb{C}^2$ con esta representación.

Podemos ver a $\mathfrak{g}_0$ como el álgebra de Lie de matrices 3×3 en bloque de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) & \mathbb{C}^2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Recordamos que el corchete de Lie de matrices, es el conmutador: $[A,B] = A \cdot B - B \cdot A$.

Proposición El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2$ con la representación estándar, es rígida. Más aún $H_2(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0) = 0$.

Dado que $\dim \mathfrak{g}_0 = 5$, su segundo grupo de cohomología adjunta se puede calcular a mano.

Consideramos ahora el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}$$

y calculamos su segundo grupo de cohomología adjunta, algo que también es posible hacer a mano a pesar de que el tamaño de las cuentas involucradas crece.

Proposición

$H2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0$, más aún $\dim H^2(\mathfrak{g}_a,\mathfrak{g}_a) = 2$.

Un 2-cociclo de distinguido para nuestra construcción, con clase de cohomología no nula, $[\sigma] \neq 0$, es:

$$\sigma = e_1^* \wedge a^* \otimes e_1 + e_2^* \wedge a^* \otimes e_2,$$

donde $\{e_1,e_2\}$ es la base $\mathbb{C}^2$ canónica de $\{e_1^*,e_2^*\}$, su base dual, $\{a\}$ es base del factor abeliano y $\{a^*\}$ su base dual.

Proposición $\mathfrak{g}_a(t) = \mathfrak{g}_a + t\,\sigma$ es una deformación lineal de $\mathfrak{g}_a$. Más aún, $\mathfrak{g}_a(t_1)$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_a(t_2)$ si $t_1, t_2 \neq 0$. Esta deformación resulta muy especial.

Teorema. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_a(1) = \mathfrak{g}_a + \sigma$, es rígida.

La razón de la rigidez de esta álgebra se sigue de tener segundo grupo de cohomología igual a 0 y una vez más dado que la dimensión es aún baja, $\dim \mathfrak{g}_a(1) = 6$, el cálculo se puede hacer a mano.

Para poder extender esta construcción y construir una familia de nuevas álgebras de Lie rígidas como deformaciones de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}$, el primer paso es entender de manera sistemática los grupos de cohomología que aparecieron:

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) \neq 0 \text{ y } H^2(\mathfrak{g}_a(1), \mathfrak{g}_a(1)) = 0.$$

La teoría de representaciones y cohomología

La teoría de representaciones de álgebras de Lie semisimples es una herramienta muy potente y bien entendida.

Las representaciones o módulos irreducibles de dimensión finita están caracterizados por sus pesos máximos y toda representación o módulo de dimensión finita es completamente reducible y su descomposición como suma de submódulos irreducibles está determinada por sus vectores de peso máximo.

Un morfismo de módulos sobre un álgebra semisimple preserva las componentes isotípicas, es decir lleva un submódulo de un peso dado a la componente isotípica de ese peso, esto es la suma directa de todos los submódulos irreducibles de ese mismo peso. Más aún, un vector de peso máximo es llevado a otro vector de peso máximo del mismo peso o a 0.

Las álgebras $\mathfrak{g}_a$ y $\mathfrak{g}_a(1)$ y son $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de manera natural y luego también los son los grupos de cohomología $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$ y $H^2(\mathfrak{g}_a(1), \mathfrak{g}_a(1))$. Recordemos que todo $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo es suma directa de submódulos irreducibles V_λ y que estos están determinados por su peso máximo λ, un entero no negativo. La dimensión de V_λ es $\dim V_\lambda = \lambda + 1$.

Para calcular los grupos de cohomología $H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a)$ y $H^2(\mathfrak{g}_a(1), \mathfrak{g}_a(1))$ que queremos usamos la teoría de representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ como herramienta fundamental.

Paso 1. Descomponer los espacios involucrados como suma de irreducibles.

Espacio	dim	# irreducibles	Pesos máximos (mult)
$\mathfrak{g}_a$	6	3	2(1); 1(1); 0(1)
$\mathfrak{g}_a^* \otimes \mathfrak{g}_a$	36	14	4(1);3(2);2(4); 1(4); 0(3)
$\Lambda^2 \mathfrak{g}_a^* \otimes \mathfrak{g}_a$	90	31	5(1);4(3);3(6); 2(8); 1(8); 0(5)

Notar que las estructuras de -módulo de y de la deformación son las mismas, luego la descomposición de arriba es la misma para ambas.

Paso 2. Evaluar las diferenciales en cada componente isotípica, restringidas al subespacio de vectores de peso máximo del correspondiente peso. Notar que estos espacios son de dimensión mucho más pequeña que el espacio total y aún que la dimensión de toda la componente isotípica.

Las diferenciales correspondientes a y a son distintas, pues los corchetes son distintos. En cada caso tenemos que:

Álgebra	Espacio	Pesos máximos (mult)
$\mathfrak{g}_a$	$\operatorname{im} d^1$	2(1); 1(1); 0(1)
$\mathfrak{g}_a$	$\ker d^2$	4(1); 3(2); 2(4); 1(4); 0(3)
$\mathfrak{g}_a(1)$	$\operatorname{im} d^1$	2(1); 1(1); 0(1)
$\mathfrak{g}_a(1)$	$\ker d^2$	4(1); 3(2); 2(4); 1(4); 0(3)

Paso 3. Deducir la estructura de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo del segundo grupo de cohomología buscado. Del paso anterior se sigue que

$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$,

donde $\sigma_1 = e_1^* \wedge a^* \otimes e_1 + e_2^* \wedge a^* \otimes e_2$

y $\sigma_2 = e_1^* \wedge e_2^* \otimes a$,

y que $H^2(\mathfrak{g}_a(1), \mathfrak{g}_a(1)) = 0$.

Nota. El segundo 2-cociclo, σ_2, es el usado en el ejemplo de la Sección 3.

Generalización de la construcción anterior

La construcción anterior, los métodos y los resultados se generalizan tomando $\mathrm{sl}_n(\mathbb{C})$ en vez de $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, para cualquier n. El siguiente caso corresponde a $\mathrm{sl}_3(\mathbb{C})$.

Comenzamos con

$$\mathfrak{g}_a = \mathrm{sl}_3(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}_3 \oplus \mathbb{C},$$

y consideramos una deformación lineal que resulta rígida.

El álgebra ga tiene dimensión 12, por lo cual los espacios involucrados para calcular su cohomología de grado 2 y luego la de la deformada, $\mathfrak{g}_a{}^* \otimes \mathfrak{g}_a$ y $\Lambda^2 \mathfrak{g}_a{}^* \otimes \mathfrak{g}_a$, tienen dimensiones 144 y 792 respectivamente. La estructura de ga es bien conocida; se tiene que

Espacio	dim	# irreducibles	Pesos máximos (mult)
$\mathfrak{g}_a$	12	3	(1,1)(1); (1,0)(1); (0,0)(1)

Para el resto, aunque aún es posible hacer los cálculos a mano, el auxilio de la computadora resulta efectivo [2]. Luego se muestra que

$$H^2(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_a) = \langle \sigma_1 \rangle$$

donde

$$\sigma_1 = e_1{}^* \wedge a^* \otimes e_1 + e_2{}^* \wedge a^* \otimes e_2 + e_3{}^* \wedge a^* \otimes e_3.$$

Cabe decir que para nuestro objetivo es suficiente saber que σ_1 es un 2-cociclo. Hemos probado el siguiente resultado general.

Proposición. Para todo $n \in \mathbb{N}, \sigma = \sum n_{i=1}\, e_i{}^* \wedge a^* \otimes e_i$ es un 2-cociclo de $\mathfrak{g}_a$.

Finalmente probamos, para el caso $n = 3$ que

$$H^2(\mathfrak{g}_a(1), \mathfrak{g}_a(1)) = 0.$$

y así la deformación $\mathfrak{g}_a(1)$ de $\mathfrak{g}_a$ es rígida. Para extender este último resultado al caso general, es necesario sistematizar los cálculos y probar algunos resultados intermedios. Estamos trabajando en esta última etapa del proyecto.

2 Diversos cálculos se hicieron en Maple.

Referencias

[1] **Josefina Barrionuevo, Diego Sulca and Paulo Tirao,** *Deformations and rigidity in varieties of Lie algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra 227 (2023) 107217. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2022.107217.

Paulo Andrés TIRAO

Doctor en Matemática por la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Actualmente, se desempeña como profesor titular en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) y como investigador independiente en el Centro de Investigación y Estudios de Matemática (CIEM) del CONICET. Profesor en Guangdong Technion Israel Institute of Technology, Guangdong Province, China. Es experto en: Álgebra, Álgebra homológica, Teoría de Representación, Geometría, con una gran trayectoria en esta línea: más de 20 publicaciones, tesistas de grado y posgrado y participación en proyectos de CyT.

Email: *paulo.tirao@gmail.com* / Código ORCID 0000-0001-6692-9830

43: (2022)
ISSN: 1668-9178

Estela Fátima FERNÁNDEZ

Magíster en Matemática por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Actualmente, se desempeña como profesor titular en la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (FACET). Actualmente es alumna de la carrera de posgrado Doctorado en Ciencias Exactas y Tecnología-UNT, con conocimiento en: Álgebra, Teoría de Representación, Geometría, con más de 20 años en proyectos en esta línea, directora de proyecto durante desde 2019, actualmente directora de proyecto PIUNT 2023.

Email: *efernandez@herrera.unt.edu.ar* / Código ORCID 0000-0003-2895-7261

Este trabajo de investigación se realizó en el periodo 2021-2022, en la Facultad de Ciencias Exactas de Tucumán-Universidad Nacional de Tucumán, en el marco del trabajo de tesis de Fernandez con dirección del Dr. Tirao es Director, actualmente se encuentra en proceso de generalización.