cet
44: (2023)
ISSN: 1668-9178

La sucesión espectral de Hochschild-Serre para álgebras de Lie. Cohomología

CORREA, Diego Alejandro[1], LOMAS, Isabel del Valle[1]

[1] Universidad Nacional de Tucumán. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Tucumán. Argentina.

Resumen

La sucesión espectral de Hochschild-Serre es una herramienta sofisticada para calcular en etapas la cohomología de un álgebra de Lie a partir de la elección de un ideal h de g .

En este trabajo se describe en detalle esta sucesión espectral para álgebras de Lie, en la que la segunda página está dada por $E_2^{p,q} = H^p (g/h,H^q (h,V))$. Los resultados se determinaron mediante algoritmos implementados en Maple, para calcular la segunda página de la sucesión espectral de Hochschild-Serre para un álgebra de Lie nilpotente a partir del ideal h y con estos resultados se determinó la cohomología del álgebra de Lie g. Si h es abeliano se tiene que con $H^q (h,V)=H^q (h)=\Lambda^q (h)^*$ con $V=K$.

Del comportamiento de la sucesión, determinado mediante experimentos realizados para álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes, se realizaron los procedimientos algorítmicos necesarios, que no están transcriptos en este artículo.

Con estos resultados se puede determinar la segunda página de la sucesión espectral, a partir de estos espacios, la cohomología del álgebra de Lie y lo que es más relevante aún, la dimensión del espacio de cohomología.

En este artículo se explica brevemente como aplicar la sucesión para el cálculo de cohomología y se exponen los resultados obtenidos utilizando este complejo procedimiento.

Palabras Claves: álgebras de Lie; homología; sucesión espectral.

Abstract

The Hochschild-Serre spectral sequence is a sophisticated tool to calculate in steps the cohomology of a Lie algebra g from the choice of an ideal h of g.

This work describes in detail this spectral sequence for Lie algebras, in which the second page is given by $E_2^{p,q} = H^p (g/h,H^q (h,V))$. The results were determined by algorithms implemented in Maple to calculate the second page of the Hochschild-Serre spectral sequence for a nilpotent Lie algebra from the ideal h and with these results the cohomology of the Lie algebra g was determined. If h is abelian we have that $H^q (h,V)=H^q (h)=\Lambda^q (h)^*$ with $V=K$.

From the behavior of the sequence, determined through experiments carried out for nilpotent 3-step Lie algebras, the necessary algorithmic procedures were carried out, which are not transcribed to this article.

With these results it is possible to determine the second page of the spectral sequence and, from these spaces, the cohomology of the Lie algebra and what is even more relevant, the dimension of the cohomology space.

This article briefly explains how to apply the sequence to calculate cohomology and presents the results obtained using this complex procedure.

Keywords: *Lie algebras; homology; spectal succession*

Introducción

La cohomología de álgebras de Lie es un tema de interés en la comunidad matemática y asociado a este tópico hay muchos problemas en estudio, como su estructura, dimensión y aplicaciones.

La aplicación de la sucesión espectral de Hochschild-Serre es un método innovador para calcular la cohomología que se aplica a ciertos tipos de álgebras de **Hochschild y Serre** (1953)."

Un problema concreto, conocido como "Conjetura del rango total", tiene que ver con el tamaño de la cohomología de un álgebra de Lie nilpotente, la conjetura afirma que la dimensión de la cohomología de un álgebra de Lie nilpotente es mayor que dos veces la dimensión del centro del álgebra.

Para un álgebra de Lie *g* y un ideal *h,* la segunda página de la sucesión espectral converge a la cohomología del álgebra de Lie y una sucesión espectral $\{(E_r^{*,*}, d_r),r \geq 1\}$ converge a un espacio vectorial graduado si este posee una filtración $\{F^p(H^*) \ , p \geq 0\}$ para la que $E_\infty^{p,q} \simeq F^p \ H^{p+q} / F^{p+1} \ H^{p+q}$.

Desarrollo

Un espacio vectorial -graduado, es un espacio vectorial con una descomposición en suma directa de la forma: $E=\bigoplus_{n\in Z} E^n$ donde cada es espacio vectorial.

Un ejemplo de espacio vectorial graduado es el espacio de los polinomios en una o varias variables.

Un espacio vectorial $E^{*,*}$ se dice bigraduado, si $E^{*,*}= \bigoplus_{p,q\in Z} E^{p,q}$ donde $E^{p,q}$ es una familia de espacios vectoriales.

Un espacio vectorial bigraduado diferencial es un par $(E^{*,*},d)$, donde $E^{*,*}$ es un espacio vectorial bigraduado y $d: E^{p,q} \longrightarrow E^{p+a,q+b}$ es una transformación lineal, llamada diferencial de bigrado o (a, b) , que cumple, $d \circ d=0$.

Todo espacio diferencial bigraduado se puede representar gráficamente en el plano cartesiano, donde cada punto de coordenadas representa el espacio $E^{p,q}$ de la familia.

Por ejemplo, el diagrama para el caso del diferencial de bigrado $(3,-2)$ se puede observar en la Figura 1.

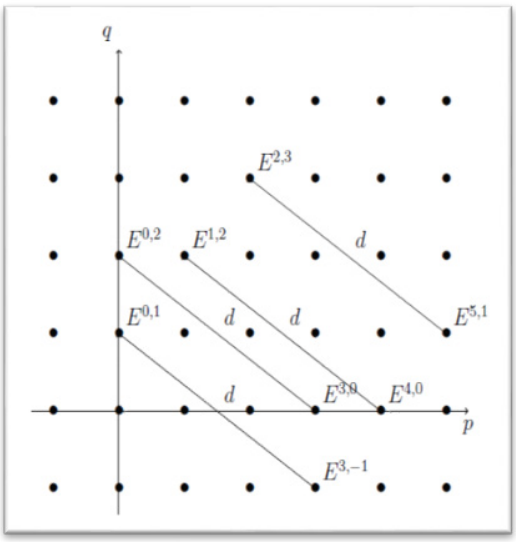

Figura 1. Diferencial de bigrado (3,-2).

Una sucesión espectral del tipo cohomológica, en el primer cuadrante es una sucesión de espacios vectoriales diferenciales bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r\geq 0}$, con $E_r^{*,*}$ es la r página de la sucesión espectral. Para cada r tenemos una familia de espacios vectoriales $E_r^{p,q}$ con $p, q \geq 0$ y cada espacio vectorial graduado $E_r^{*,*}$, tiene asociado un diferencial d_r de bigrado $(r, 1- r)$, que cumple que $d_r \circ d_r = 0$, tal que: $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$.

Para todo r, $E_{r+1}^{*,*} \simeq H(E_r^{*,*}, d_r)$ donde cada elemento de la página $(r+1)$ se obtiene como el espacio cociente entre el núcleo y la imagen de los diferenciales correspondientes a la página r. De

$$E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d_r^{p-r,q+r-1}} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r^{p,q}} E_r^{p+r,q-r+1}$$

obtenemos

$$E_{r+1}^{p,q} = ker(d_r^{p,q}) / im(d_r^{p-r,q+r-1}). \qquad (1)$$

- Si $r \geq 1$, las líneas de pendiente $\frac{r-1}{r}$ del espacio vectorial bigraduado $\{E_r^{p,q}\}_{p,q\geq 0}$ forman complejos de cocadenas.
- El grado total de $E_r^{p,q}$ es $(p+q)$. (2)
- Los elementos de una página, que tienen el mismo grado total, determinan una recta de pendiente (-1).

Para $r = 1$, tenemos la primera página de la sucesión espectral $E_1^{*,*} = \{ E_1^{p,q} \}_{(p,q\geq 0)}$ y el diferencial asociado de bigrado $(r,1-r)=(1,0)$ es $d_1 : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$. La representación gráfica de la primera página de la sucesión se puede observar en la Figura 2.

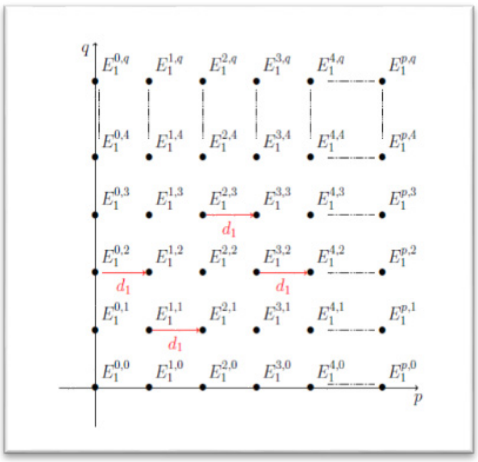

Figura 2. Página 1 de una sucesión espectral.

Para $r = 2$, la segunda página de la sucesión espectral es $E_2^{*,*} = \{E_2^{p,q}\}_{(p,q\geq 0)}$ y el diferencial asociado de bigrado $(r,1-r) = (2, -1)$ es $d_2: E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+2,q-1}$. (Figura 3)

En la Figura 4 se muestra la tercera página de la sucesión.

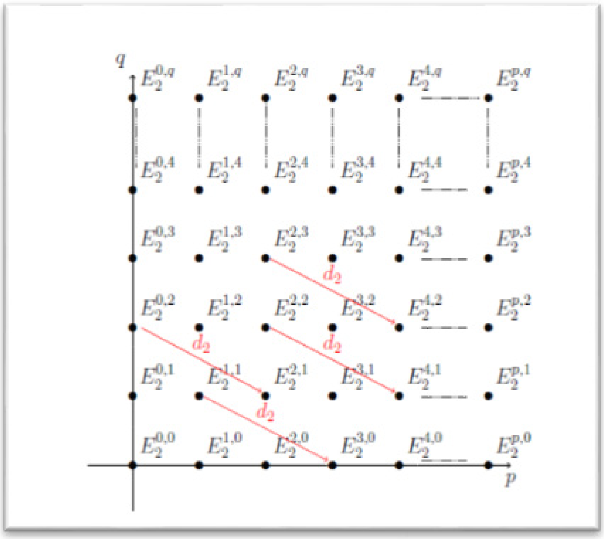

Figura 3. Página 2 de una sucesión espectral

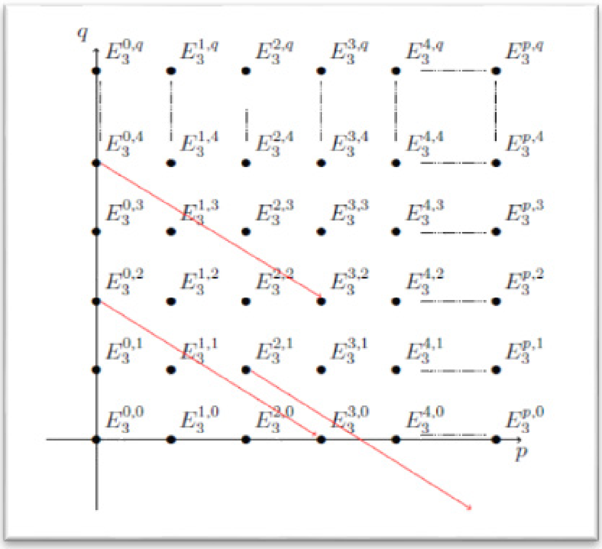

Figura 4. Página 3 de una sucesión espectral

cet
44: (2023)
ISSN: 1668-9178

Es importante observar que para

$r > max(p, q+1)$

- $q+1-r<0$, por lo tanto $E_r^{p+r,q-r+1} = \{0\}$, $ker\ d_r^{p,q} = E_r^{p,q}$ y $d_r^{p,q}$ es trivial.
- $p-r<0$, $E_r^{p-r,q+r-1} = \{0\}$, por lo tanto $im\ d_r^{p-r,q+r-1} = \{0\}$ y $d_r^{p-r,q+r-1}$ es trivial.

$$E_r^{p-r,q+r-1} = \{0\} \xrightarrow{d_r^{p-r,q+r-1}} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r^{p,q}=0} E_r^{p+r,q-r+1} = \{0\}$$

$$E_{r+1}^{p,q} = ker(d_r^{p,q}) / im(d_r^{p-r,q+r-1}) = E_r^{p,q}/\{0\} = E_r^{p,q}$$

Cuando esto sucede, decimos que la sucesión se estabiliza en la página r y denotamos $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$.

Se dice que una sucesión espectral

$$\{(E_r^{*,*}, d_r), r \geq 1\} \qquad (3)$$

converge a un espacio vectorial graduado H^* si este posee una filtración $\{F^p(H^*), p \geq 0\}$ que verifica que $E_\infty^{p,q} \simeq F_p\ H^{p+q}/F^{p+1}\ H^{p+q}$ (4)

Por lo general se desconoce H^* y se buscan métodos para su cálculo. Si se consigue encontrar una sucesión espectral que converge a H^*, podemos interpretar que tenemos elementos que nos están permitiendo calcularlo aproximadamente o por lo menos, deducir alguna información sobre él.

La sucesión espectral de Hochschild-Serre ofrece términos precisos para sus primeras páginas y en particular la segunda página responde al teorema que asegura que existe una sucesión espectral tal que $E_2^{*,*} \simeq$ *"algo calculable"* y converge a H^*, *"algo deseable".*

El teorema de la sucesión espectral de Hochschild-Serre asegura que para cada ideal h de un álgebra de Lie g existe una sucesión espectral en el primer cuadrante cuya segunda página $E_2^{p,q} = H^p(g/h, H^q(h,V))$, con V un g– módulo, converge a $H^{p+q}(g,V)$ que es la cohomología del álgebra de Lie g,

Además:

$$E_0^{p,q} = C^q(h, C^p(g^h, V))$$
$$E_1^{p,q} = H^q(h, C^p(g^h, V)) \qquad (5)$$

Trabajamos con él g–módulo trivial K y un ideal que genera una subálgebra abeliana; la cohomología para este ideal es

$$H^n(h, K) = H^n(h) = \wedge^n\ h^* \qquad (6)$$

Para mostrar como estudiamos las álgebras expuestas en este trabajo aplicaremos el método al álgebra de Lie de Heisenberg g de dimensión 3

Para esta álgebra y la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ el único corchete no nulo es $[e_1, e_2] = e_3$.

Utilizando el software Maple, utilizando las rutinas de la biblioteca, calculamos la cohomología de g en las bases

$\beta_{g^*} = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$,
$\beta_{(\wedge^2 g)^*} = \{(e_1 \wedge e_2)^*, (e_1 \wedge e_3)^*, (e_2 \wedge e_3)^*\}$ y
$\beta_{(\wedge^3 g)^*} = \{(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)^*\}$.

El resultado obtenido es

$H^0(g) = \mathbb{K}$, dimensión 1.
$H^1(g) = \langle e_1^*, e_2^* \rangle$, dimensión 2.
$H^2(g) = \langle (e_1 \wedge e_3)^*, (e_2 \wedge e_3)^* \rangle$, dimensión 2.
$H^3(g) = \langle (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)^* \rangle$, dimensión 1.

Realizando los cálculos para aplicar el método a implementar, sucesión espectral, y considerando el ideal abeliano de dimensión 2, $h = \langle e_1, e_3 \rangle$, el espacio cociente $g/h = \langle e_2 \rangle$ tiene dimensión 1 y los espacios no nulos de la segunda página, $E_2^{p,q} = H^p(g/h, H^p(h,K))$ de la sucesión espectral de Hochschild-Serre son los correspondientes a

$$0 \leq p \leq \dim g/h = 1$$
$$0 \leq q \leq \dim h = 2$$

Podemos ver su representación gráfica en la Figura 5.

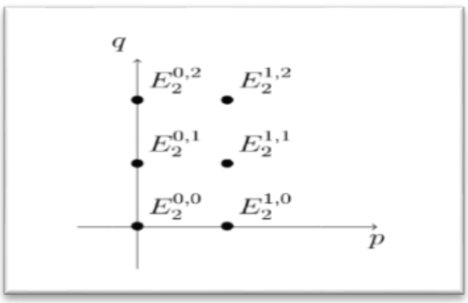

Figura 5. Álgebra de Lie de Heisenberg g de dimensión 3

cet
44: (2023)
ISSN: 1668-9178

Calculamos entonces:

$$H^q(h,\mathbb{K}) = H^q(h) = \begin{cases}(\Lambda^q\, h)^*, & 0 \le q \le 2\\ 0 \quad , & q \ge 3\end{cases}$$

Para $p = 0$

$$H^0(\langle e_2\rangle, (\Lambda^q\, h)^*) = \begin{cases}H^0(\langle e_2\rangle, (\Lambda^q\, h)^*), 0 \le q \le 2\\ \quad 0 \quad , \qquad q \ge 3\end{cases}$$

Para $p = 1$

$$H^1(\langle e_2\rangle, (\Lambda^q\, h)^*) = \begin{cases}H^1(\langle e_2\rangle, (\Lambda^q\, h)^*), 0 \le q \le 2\\ \quad 0 \quad , \qquad q \ge 3\end{cases}$$

Si $q = 0$, $H^0(h,\mathbb{K}) = \mathbb{K}$, la cadena es

$$0 \longrightarrow C^0(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\mathbb{K}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\mathbb{K}) \xrightarrow{d_1} 0,$$

de donde se obtiene:

$$E_2^{0,0} = H^0\big(g/h, H^0(h,\mathbb{K})\big) = \ ker\ d_0$$
$$E_2^{1,0} = H^1\big(g/h, H^0(h,\mathbb{K})\big) = \ ker\ d_1\ /im\ d_0$$

La cadena es equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{d_0} e_2^* \xrightarrow{d_1} 0$$

Así:

$ker\ d_0 = \ \mathbb{K} \qquad ker\ d_1 = e_2{}^*$
$im\ d_0 = \{0\} \qquad im\ d_1 = \{0\}$

Luego

$$E_2^{0,0} = \ H^0\big(g\ /h\ , H^0(h)\big) = H^0(< e_2 >, \mathbb{K})$$
$$= \ker d_0 = \mathbb{K}$$

$$E_2^{1,0} = \ H^1\big(g/h\ , H^0(h)\big) = H^1(< e_2 >, \mathbb{K})$$
$$= ker\ d_1/\ im\ d_0 = e_2{}^*$$

Si $q = 1$,
$H^q(h,K) = H^1(h) = (\wedge^1\, h)^* = h^* =< e_1{}^*, e_3{}^* >$
y tenemos la siguiente cadena

$$0 \longrightarrow C^0(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\mathfrak{h}^*) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\mathfrak{h}^*) \xrightarrow{d_1} 0$$

de donde se obtiene:

$$E_2^{0,1} = \ H^0\big(g/h\ , H^1(h,\mathbb{K})\big) = ker\ d_0 = \mathbb{K}$$
$$E_2^{1,1} = \ H^1\big(g/h\ , H^1(h,\mathbb{K})\big) = H^1(< e_2 >, h^*\ )$$
$$= \ ker\ d_1\ /im\ d_0$$

La cadena es equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h}^* \xrightarrow{d_0} e_2^* \otimes \mathfrak{h}^* \xrightarrow{d_1} 0$$

$h^* =< e_1{}^*, e_3{}^* >$
$e_2{}^* \otimes h^* =< e_2{}^* \otimes e_1{}^*, e_2{}^* \otimes\ e_3{}^* >$

$d_0 : h^* \to\ e_2{}^* \otimes\ h^*$

$$d_0\, e_1{}^*(e_2) = \quad e_2. e_1{}^*$$
$$e_2. e_1{}^*(e_1) = \ - e_1{}^* \circ ad_{e_2}(e_1)$$
$$= \ - e_1{}^*([e_2, e_1])$$
$$= \ -e_1{}^*(-e_3)$$
$$= 0$$

$$d_0\, e_1{}^* = 0$$
$$d_0\, e_3{}^*(e_2) \ = \ e_2. e_3{}^*$$
$$e_2. e_3{}^*(e_1) \ = \ \ - e_3{}^* \circ ad_{e_2}(e_1)$$
$$= \ - e_3^*([e_2, e_1])$$
$$= \ -e_3{}^*(-e_3)$$
$$= 1$$

$$e_2. e_3{}^*(e_3) \ = \ - e_3{}^* \circ ad_{e_2}$$
$$= \ - e_3^*([e_2, e_3])$$
$$= \ -e_3{}^*(0)$$
$$= 0$$

$$d_0\, z^* = 1\, e_2{}^* \otimes e_1{}^*$$

La matriz asociada a d_0 es $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Luego $kerd_0 = e_1{}^* \qquad im\ d_0 = \ e_2{}^* \otimes e_1{}^*$

$d_1 : e_2{}^* \otimes h^* \to 0$ luego $d_1(e_2{}^* \otimes h^*) = 0$
entonces $ker\ \ d_1 = \ e_2{}^* \otimes h^* \ \ im\ d_1 = \{0\}$
y por lo tanto

$$E_2^{0,1} = \ H^0(g/h\ , H^1(h)) = H^0(< e_2 >, h^*)$$
$$= ker\ d_0 =< e_1{}^* >$$
$$E_2^{1,1} = \ H^1\big(g/h\ , H^1(h,\mathbb{K})\big) = H^1(< e_2 >, h^*) \ =$$
$$ker\ d_1\ /im\ d_0 =< e_2{}^* \otimes e_3{}^* >.$$

Si $q = 2$,
$H^q(h,\mathbb{K}) = H^2(h) = (\wedge^2\ \ h)^* = \ (h\ \wedge\ h)^*$,
cadena que obtenemos es

$$0 \longrightarrow C^0(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},(\textstyle\bigwedge^2\mathfrak{h})^*) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},(\textstyle\bigwedge^2\mathfrak{h})^*) \xrightarrow{d_1} 0$$

y los espacios son

$$E_2^{0,2} = \ H^0\big(g/h\ , H^2(h\ , K)\big) = ker\ d_0$$
$$E_2^{1,2} = \ H^1\big(g/h\ , H^2(h,K)\big) = \ ker\ d_1\ /imd_0$$

La cadena es equivalente a

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{h}\wedge\mathfrak{h})^* \xrightarrow{d_0} \langle e_2^*\rangle \otimes (\mathfrak{h}\wedge\mathfrak{h})^* \xrightarrow{d_1} 0$$

con $(\ h\ \wedge\ h)^* =< (\ e_1\ \wedge e_3)^* >$.
$d_0 : (\ e_1\ \wedge e_3)^* \longrightarrow\ e_2{}^* \otimes (\ e_1\ \wedge e_3)^*$

$$d_0(\ e_1\ \wedge e_3)^*(e_2) = e_2.(\ e_1\ \wedge e_3)^*$$
$$= e_2.(e_1{}^* \wedge\ e_3{}^*)$$

Haciendo los cálculos
$ker\ d_0 = (e_1 \wedge e_3)^*$ y $im\ d_0 = \{0\}$
El operador $d_1 : < e_2{}^* > \otimes\ (h \wedge h)^* \longrightarrow\ 0$.
$ker\ d_1 = e_2{}^* \otimes (e_1 \wedge e_3)^*$, $im\ d_1 = 0$
Luego

$$E_2^{0,2} = \ H^0\big(g/h\ , H^2(h)\big) = H^0(< e_2 >, (\wedge^2\ \ h)^*)$$
$$= ker\ d_0 = (e_1 \wedge e_3)^*$$

$$E_2^{1,2} = \ H^1\big(g/h\ , H^2(h)\big) = H^1(< e_2 >, (\wedge^2\ \ h)^*)$$
$$= \ ker\ d_1\ /im\ d_0$$
$$=< e_2{}^* \otimes (e_1 \wedge e_3)^* >.$$

cet
44: (2023)
ISSN: 1668-9178

Los espacios vectoriales de la segunda página de la sucesión espectral para el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3 son

$$
\begin{aligned}
&E_2^{0,0} = \mathbb{K}\\
&E_2^{1,0} =< {e_2}^* >\\
&E_2^{0,1} =< {e_1}^* >\\
&E_2^{1,1} =< {e_2}^* \otimes e_3^* >\\
&E_2^{0,2} =< (e_1 \otimes e_3)^* >\\
&E_2^{1,2} =< {e_2}^* \otimes (e_1 \wedge e_3)^* >
\end{aligned}
$$

Los espacios de cohomología son

$$
\begin{aligned}
&(g) = \mathbb{K}\\
&(g) = \langle {e_1}^*, {e_2}^* \rangle\\
&(g) = \langle (e_1 \wedge e_3)^*, (e_2 \wedge e_3)^* \rangle\\
&(g) = \langle (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)^* \rangle
\end{aligned}
$$

Calculando la segunda página la sucesión espectral de Hochschild-Serre, con el ideal abeliano h = $<e_1, e_3>$ verificamos que efectivamente obtenemos la cohomología del álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3, como podemos observar en la Tabla 1.

Tabla 1. Álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3

Corchete	$[e_1, e_2] = e_3$
Centro	$\{e_3\}$
Nilpotencia	1 pasos
Ideal h	$h =< e_1, e_3 >$
g/h	$\{e_2\}$
Álgebra cociente g/h	$[,] = 0$ abeliana
Dimensiones de $E_2^{p,q}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
De esto obtenemos la dimensión de los espacios de cohomología	
$\dim H^0 = 1, \quad \dim H^1 = 2,$ $\dim H^2 = 2, \quad \dim H^3 = 1$	

Evidentemente la tarea para obtener los resultados no es sencilla, por esto elaboramos los algoritmos en el software antes mencionado, que permiten hacer los cálculos. En estos algoritmos lo que obtenemos es la dimensión de los espacios de la segunda página de la sucesión espectral de Hochschild-Serre, dispuestos en una matriz, y con estos determinamos la dimensión de los espacios de cohomología.

En este ejemplo, la matriz de las dimensiones de la segunda página de la sucesión es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\dim H^r = \sum_{p+q=r} \dim E_2^{p,q}$

$$
\begin{aligned}
&\dim H^0 = \langle A \rangle_{31} = 1,\\
&\dim H^1 = \langle A \rangle_{21} + \langle A \rangle_{32} = 1 + 1 = 2\\
&\dim H^2 = \langle A \rangle_{11} + \langle A \rangle_{22} = 1 + 1 = 2,\\
&\dim H^3 = \langle A \rangle_{12} = 1
\end{aligned}
$$

Para el álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores de orden 2, donde para la base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

los corchetes no nulos son

$$[e_1, e_2] = [e_2, e_3] = e_2.$$

Si consideremos el ideal h = $\langle\{e_2\}\rangle$, $g\,/\,h$ tiene dimensión 2 y en la segunda página de la sucesión espectral, los términos $E_2^{p,q}$ para $p \geq 3$ y $q \geq 2$ son $\{0\}$. Los espacios no nulos del primer cuadrante están representados en la Figura 6.

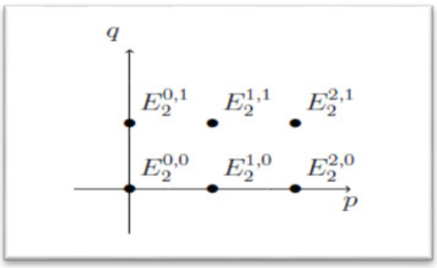

Figura 6. Segunda página de la sucesión. Dimensión del álgebra de Lie es 3 y la del ideal es 1.

La matriz que la representa es

$$\begin{pmatrix} \dim E_2^{0,1} & \dim E_2^{1,1} & \dim E_2^{2,1} \\ \dim E_2^{0,0} & \dim E_2^{1,0} & \dim E_2^{2,0} \end{pmatrix}$$

Utilizando los procedimientos implementados en el software Maple, calculamos la segunda página de la sucesión espectral

$$E_2^{0,0} = \mathbb{K}, \quad E_2^{1,0} = \langle e_1^*, e_3^* \rangle, \quad E_2^{2,0} = \langle e_1^* \wedge e_3^* \rangle,$$
$$E_2^{0,1} = 0, \quad E_2^{1,1} = 0 \quad y \quad E_2^{2,1} = 0,$$

cet
44: (2023)
ISSN: 1668-9178

la matriz que representa las dimensiones de estos espacios es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
La cohomología para esta álgebra de Lie es

$H(g,\ \mathbb{K}) = [\mathbb{K}, [e_1^*, e_3^*], [e_1^* \wedge e_3^*], [\,]]$
Donde
$H^0(g, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$, dimensión 1.
$H^1(g, \mathbb{K}) = \langle e_1^*, e_3^* \rangle$, dimensión 2.
$H^2(g, \mathbb{K}) = \langle e_1^* \wedge e_3^* \rangle$, dimensión 1.

Podemos ver los resultados correspondientes a esta álgebra en la Tabla 2.

Tabla 2. Álgebra de Lie g de dimensión 3.

Corchete	$[e_1, e_2] = [e_2, e_3] = e_2$
Centro	$\{0\}$
Nilpotencia	1 pasos
Ideal h	$\{e_2\}$
g/h	$\{e_1,\ e_3\}$
Álgebra cociente g/h	$[,] = 0$ abeliana
Dimensiones de $E_2^{p,q}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
De esto obtenemos la dimensión de los espacios de cohomología	
$\dim H^0 = 1$ $\dim H^1 = 0 + 2 = 2$ $\dim H^2 = 0 + 1 = 1$	

Para el caso de las matrices triangulares superiores de orden 3 y la base canónica

Los corchetes no nulos para esta álgebra son

$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_2, e_4] = e_2$,
$[e_2, e_5] = e_3$, $[e_3, e_6] = e_3$, $[e_4, e_5] = e_5$,
$[e_5, e_6] = e_5$.

Si consideremos el ideal abeliano

$h = \langle\{e_3, e_5\}\rangle,\ \ g/h = \langle\{e_1, e_2, e_4, e_6\}\rangle$

en la segunda página de la sucesión espectral, los términos $E_2^{p,q}$ para $p \geq 5$ y $q \geq 3$ son $\{0\}$, los espacios no nulos del primer cuadrante son

$E_2^{0,0} = \mathbb{K}, E_2^{1,0} = \langle e_1^*, e_4^*, e_6^* \rangle$,
$E_2^{2,0} = \langle e_1^* \wedge e_6^*, e_4^* \wedge e_6^*, e_1^* \wedge e_4^* \rangle$,
$E_2^{4,1} = 0,\ \ E_2^{p,1} = E_2^{p,2} = 0$

con $0 \leq p \leq 4$, la matriz que representa las dimensiones es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para todo p y q el diferencial $d_3^{p,q} = 0$ y por lo tanto $E_3^{p,q} = E_2^{p,q}$ (los diferenciales entran o parten de un espacio nulo). La sucesión espectral se estabiliza en la segunda página.

La cohomología para esta álgebra de Lie es

$H(g,\ \mathbb{K}) = \{\mathbb{K}, < e_1^*, e_4^*, e_6^* >, < e_1^* \wedge e_6^*, e_4^* \wedge e_6^*, e_1^* \wedge e_4^* >, < (e_1^* \wedge e_4^*) \wedge e_6^* >, 0,0,0\}$

$$H^0\ (g, \mathbb{K}) = E_2^{(0,0)}$$
$$H^1\ (g, \mathbb{K}) = E_2^{(1,0)}$$
$$H^2\ (g, \mathbb{K}) = E_2^{(2,0)}$$
$$H^3\ (g, \mathbb{K}) = E_2^{(2,1)}$$

Los resultados correspondientes se pueden ver en la Tabla 3.

Tabla 3. Álgebra de Lie las matrices triangulares superiores de orden 3.

Corchete	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_2, e_4] = e_2$ $[e_2, e_5] = e_3$ $[e_3, e_6] = e_3$ $[e_4, e_5] = e_5$ $[e_5, e_6] = e_5$
Centro	$\{0\}$
Nilpotencia	2 pasos
Ideal h	$\{e_3, e_5\}$
g/h	$\{e_1, e_2, e_4, e_6\}$
Álgebra cociente g/h	$[e_1, e_2] = [e_2, e_4] = e_2$
Dimensiones de $E_2^{p,q}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
De esto obtenemos la dimensión de los espacios de cohomología	
$\dim H^0 = 1,\ \ \dim H^1 = 3,$ $\dim H^2 = 3,\ \ \dim H^3 = 1$	

Otros casos trabajados se detallan en las tablas de la 4 a la 7.

Tabla 4. Álgebra de Lie g de dimensión 7

Corchete	$[e_1, e_2] = e_3$ $[e_1, e_3] = e_4$ $[e_1, e_4] = e_6$ $[e_2, e_3] = e_5$ $[e_2, e_5] = e_7$
Centro	$\{e_6,\ e_7\}$
Nilpotencia	3 pasos
Ideal h	$\{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$
g/h	$\{e_1, e_2\}$
Álgebra cociente g/h	$[,] = 0$ abeliana
Dimensiones de $E_2^{p,q}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
De esto obtenemos la dimensión de los espacios de cohomología	
$\dim H^0 = 1,$ $\dim H^1 = 3,$ $\dim H^2 = 6,$ $\dim H^3 = 10,$ $\dim H^4 = 10,$ $\dim H^5 = 6,$ $\dim H^6 = 3,$ $\dim H^7 = 1$	

Tabla 5. Álgebra de Lie g de dimensión 7

Corchete	$[e_1, e_2] = e_3$ $[e_1, e_3] = e_4$ $[e_1, e_4] = e_5$ $[e_2, e_3] = e_6$
Centro	$\{e_5, e_6,\ e_7\}$
Nilpotencia	3 pasos
Ideal h	$\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$
g/h	$\{e_1,\ e_2\}$
Álgebra cociente g/h	$[,] = 0$ abeliana
Dimensiones de $E_2^{p,q}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
De esto obtenemos la dimensión de los espacios de cohomología	
$\dim H^0 = 1,$ $\dim H^1 = 4$ $\dim H^2 = 9,$ $\dim H^3 = 14$ $\dim H^4 = 14,$ $\dim H^5 = 9$ $\dim H^6 = 4,$ $\dim H^7 = 1$	

Tabla 6. Álgebra de Lie g de dimensión

Corchete	$[e_1, e_5] = e_2$ $[e_1, e_6] = e_3$ $[e_1, e_7] = e_4$ $[e_2, e_3] = e_3$ $[e_2, e_9] = e_4$ $[e_5, e_8] = e_6$ $[e_5, e_9] = e_7$
Centro	$\{e_3, e_4\}$
Nilpotencia	4 pasos
Ideal h	$\{e_2, e_3, e_4, e_6, e_7\}$
g/h	$\{e_1,\ e_5, e_8, e_9\}$
Álgebra cociente g/h	$[,] = 0$ abeliana
Dimensiones de $E_2^{p,q}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 13 & 10 & 3 \\ 4 & 17 & 25 & 15 & 3 \\ 3 & 15 & 25 & 17 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
De esto obtenemos la dimensión de los espacios de cohomología	
$\dim H^0 = 1,$ $\dim H^1 = 7,$ $\dim H^2 = 19,$ $\dim H^3 = 36,$ $\dim H^4 = 53,$ $\dim H^5 = 53,$ $\dim H^6 = 36,$ $\dim H^7 = 19,$ $\dim H^8 = 7,$ $\dim H^9 = 1$	

Tabla 7. Álgebra de Lie g de dimensión 10

Corchete	$[e_1, e_5] = e_2$ $[e_1, e_6] = e_3$ $[e_1, e_7] = e_4$ $[e_2, e_8] = e_3$ $[e_2, e_9] = e_4$ $[e_3, e_{10}] = e_4$ $[e_5, e_8] = e_6$ $[e_5, e_9] = e_7$ $[e_6, e_{10}] = e_7$ $[e_8, e_{10}] = e_9$
Centro	$\{e_4\}$
Nilpotencia	5 pasos
Ideal h	$\{e_3, e_4, e_7\}$
g/h	$\{e_1,\ e_2, e_5,\ e_6, e_8,\ e_9, e_{10}\}$
Álgebra cociente g/h	$[e_1, e_5] = e_2$ $[e_5, e_8] = e_6$ $[e_8, e_{10}] = e_9$
Dimensiones de $E_2^{p,q}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 16 & 16 & 11 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 29 & 34 & 21 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 21 & 34 & 29 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 16 & 16 & 11 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
De esto obtenemos la dimensión de los espacios de cohomología	
$\dim H^0 = 1,$ $\dim H^1 = 6,$ $\dim H^2 = 19,$ $\dim H^3 = 45,$ $\dim H^4 = 71,$ $\dim H^5 = 80,$ $\dim H^6 = 71,$ $\dim H^7 = 45,$ $\dim H^8 = 19,$ $\dim H^9 = 6,$ $\dim H^{10} = 1$	

Resultados

Destacaremos entre los resultados obtenidos, la importancia de calcular cohomología de álgebras de Lie de dimensión considerable como podemos observar en las tablas 6 y 7, y que, aunque en el trabajo no hemos transcripto los procedimientos informáticos utilizados, están a disposición en caso de que sean requeridos para aplicar en otras álgebras de Lie, pues es un tema de mucho interés determinar las dimensiones de los espacios de cohomología.

Discusión

Fue de fundamental importancia estudiar la sucesión espectral de Hochschild-Serre, e investigar como obtenemos la cohomología a partir de la segunda página de la sucesión para poder elaborar los procedimientos que implementamos en la computadora para realizar los cálculos, que sin el recurso informático no habría sido posible obtener.

Calcular la cohomología de un álgebra de Lie *g* aplicando los resultados encontrados y demostrados por Hochschild-Serre para construir una sucesión espectral a partir del álgebra *g* y un ideal *h*, es un método innovador,

el poder implementar los procedimientos para calcular la segunda página de la sucesión y haber comprobado que este método optimiza la obtención de los resultados, si el ideal que consideramos es el adecuado, permitió desarrollar una variedad de ejemplos que son de gran utilidad y se pueden aplicar a otros trabajos.

Conclusión

Este método innovador es una forma alternativa y práctica para calcular la cohomología de un álgebra de Lie.

Es importante destacar que los resultados no dependen del ideal que consideremos, y de la experimentación comprobamos que cuando la dimensión del ideal no trivial es máxima, el tiempo invertido en la ejecución de los procedimientos realizados en Maple es menor.

Bibliografía

Hochschild, G., JP. Serre (1953) "Cohomology of Lie Algebras". Annals of Mathematics, Vol. 57 N°3, pp 591-603

Humphreys James E. (1972) Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer, United States of America.

Knapp, Anthony W. (2002) Lie groups beyond an introduction. Birkhäuser, Boston, Massachusetts.

Weibel, Charles A. (1994) An Introduction to Homological Algebra. Board, University Cambridge, New York, USA.

Información biográfica

Este trabajo de investigación se realizó en el periodo 2021-2022, en la Facultad de Ciencias Exactas de Tucumán-Universidad Nacional de Tucumán, en el marco del trabajo de Beca CIN convocatoria 2020 de Correa, bajo la dirección de la Mg. Lomas, además fue parte del trabajo de tesina para obtener el grado de Licenciado en Matemática de Correa, cuya dirección estaba a cargo del Dr. Tirao y la codirección de Lomas.

Autores

Diego Alejandro Correa

Licenciado en Matemática, título otorgado por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Actualmente, se desempeña como: Auxiliar Docente Graduado en la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (FACET - UNT); Jefe de Trabajos Prácticos en la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia (FBQyF - UNT); Jefe de Trabajos Prácticos en la Universidad del Norte Santo Tomás de Aquino. Realizó cursos optativos en la Carrera y cursos de posgrado referidos al Álgebra Lineal y el uso de software. Fue miembro colaborador del proyecto “Deformaciones de Álgebras de Lie-2”.

dacorrea@herrera.unt.edu.ar

Isabel del Valle Lomas, ORCID: 0000-0002-5313-0496

Magíster en Matemática, título otorgado por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Actualmente, se desempeña como profesor Asociado en la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (FACET-UNT). Codirectora del proyecto **Deformaciones de Álgebras de Lie 3**, PIUNT 2023. En el año 2001 comenzó a trabajar con el Dr. Tirao estudiando las Álgebras de Lie, realizó cursos de formación personal y colaboró con el dictado de cursos de posgrado a cargo del desarrollo de la parte práctica, en la FACET y en la Universidad Nacional de Salta. Obtuvo el título de Mg. en Matemática en el año 2015 investigando los espacios de cohomología de álgebras de Lie Nilpotentes. Forma parte del cuerpo docente de la Maestría en Matemática de la FACET y actualmente está dirigiendo, entre otras actividades dentro del proyecto PIUNT que co dirige, a un estudiante en la Beca CIN convocatoria 2022 siempre en la línea de las Álgebras de Lie, en este caso orientada a la teoría de representaciones. Se desempeñó en dos períodos consecutivos como directora de la carrera Licenciatura en Matemática, presentó un proyecto completo y acabado, elaborado con los integrantes de la Comisión Académica de la carrera, para actualizar el plan de estudios.

ilomas@herrera.unt.edu.ar