Programa

- ***Unidad 1: Números reales***
  Conjunto de Números Reales. La recta real.
  Operaciones con números reales: suma, resta, multiplicación y división.
  Valor absoluto.
  Potenciación y Radicación.
  Logaritmo.

- ***Unidad 2: Expresiones algebraicas***
  Expresiones algebraicas enteras y fraccionarias.
  Operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación y división
  Factoreo.
  Divisibilidad. Regla de Ruffini. Teorema del resto.
  Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación.

- ***Unidad 3: Funciones y ecuaciones***
  Plano cartesiano.
  Rectas: forma explícita, implícita, segmentaria. Gráfica.
  Parábolas. Gráfica. Determinación del vértice.
  Ecuaciones: lineales, cuadráticas, bicuadradas, racionales, irracionales, logarítmicas, exponenciales.
  Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
  Método de igualación, sustitución y reducción.
  Resolución de problemas.

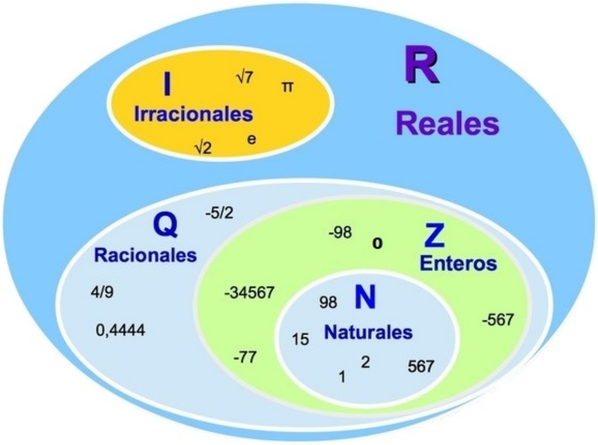
- ***Unidad 4: Geometría*** Conceptos elementales de Geometría: punto, recta y plano.
  Distancias: idea geométrica.
  Ángulos. Sistemas de medición de ángulos: sexagesimal y radial. Clasificación. Congruencia. Relaciones entre pares de ángulos. Bisectriz.
  Circunferencia. Relación con una recta. Ángulos dentro de una circunferencia.
  Triángulos. Elementos. Propiedades. Clasificación.
  Teorema de Pitágoras.
  Alturas, medianas, mediatrices y bisectrices de un triángulo.
  Circunferencia inscripta y circunscripta a un triángulo.
  Semejanza de triángulos.
  Cuadriláteros particulares.
  Polígonos regulares. Perímetros y Áreas.

- ***Unidad 5: Trigonometría***
  Funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.
  El círculo trigonométrico.
  Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
  Relaciones entre funciones trigonométricas de ángulos notables.
  Identidades trigonométricas.
  Ecuaciones trigonométricas.

Números Reales

Conjunto de números

Los números pueden clasificarse en distintos conjuntos de acuerdo a sus características. Cada una contiene a la anterior y es más compleja. En la siguiente imagen se observa como se relacionan los conjuntos de números.



Números Naturales

El conjunto de **números naturales** son aquellos que se utilizan para contar objetos, los que aprendemos cuando somos niños, 1,2,3.. etc. En matemáticas se los puede representar con la siguiente nomenclatura:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3...n, n+1, ...\}$$

Operaciones en $\mathbb{N}$

La suma y el producto de números naturales son siempre naturales. En cambio la resta no siempre es otro natural.

Ejemplos:

$$5 + 2 = 7 \in \mathbb{N} \qquad 4 \cdot 4 = 16 \in \mathbb{N} \qquad 2 - 8 = -6 \notin \mathbb{N}$$

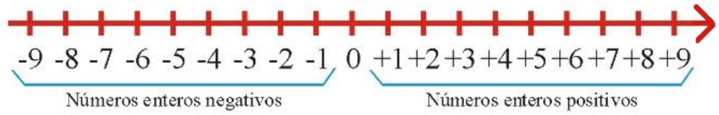
Números Enteros

Para solucionar el problema de la resta se definió otro conjunto de números, el conjunto de **números enteros** $\mathbb{Z}$, conformado por los naturales, el cero y los números negativos.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Es decir, este conjunto incluye al de los números naturales, o en símbolos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ Los números enteros permiten contar nuevos tipos de cantidades, abarcando cifras negativas que sirven para llevar registros de, por ejemplo, ausencias o pérdidas. También para ordenar números por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia, como sucede con las alturas sobre o bajo el nivel del mar o temperaturas superiores o menores a cero grado, etc.

Si se representan los números enteros en una recta graduada, donde se elige un punto que represente al cero u origen, un segmento unidad y un sentido positivo, por convención de que para la derecha estarán los números enteros positivos o naturales y para la izquierda los negativos, los opuestos a los naturales.



Operaciones en $\mathbb{Z}$

Como sucede con los números naturales, la suma y producto de dos enteros es siempre otro entero.

Ejemplos:

$$5+2=7\in\mathbb{Z} \qquad 2+(-8)=-6\in\mathbb{Z}$$
$$4\cdot 4=16\in\mathbb{Z} \qquad (-3)\cdot 7=-21\in\mathbb{Z}$$
$$-6+(-2)=-8\in\mathbb{Z} \qquad (-3)\cdot(-7)=21\in\mathbb{Z}$$

Antes de definir la resta de enteros, definiremos el **opuesto** de un número entero.

Opuesto de un número Para todo número a existe un $-a$ llamado **opuesto** de a tal que $a+(-a)=0$.
Dicho esto, la diferencia de $a-b$ es considerada como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo $a-b=a+(-b)$, donde a es el minuendo y b el sustraendo.

Ejemplos:

$$5-2=5+(-2)=3 \qquad -2-8=(-2)+(-8)=-10$$
$$5-(-2)=5+2=7 \qquad -2-(-8)=(-2)+8=6$$

Como fue para la resta, para comprender el cociente o división de enteros necesitamos entender el concepto de **recíproco de un número**

Recíproco de un número Todo número a, con $a\neq 0$ tiene un **recíproco o inverso** $\frac{1}{a}$ o a^{-1} tal que:

$$a\cdot a^{-1}=a\cdot\frac{1}{a}=1$$

Utilizando el concepto de inverso de un número, el cociente entre a y b, con $b\neq 0$ se expresa:

$$a:b=\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$$

Ejemplos:

$$\frac{10}{5}=2\in\mathbb{Z} \qquad \frac{9}{3}=3\in\mathbb{Z}$$
$$\frac{5}{2}=2,5\notin\mathbb{Z} \qquad \frac{11}{3}=3,6666...\notin\mathbb{Z}$$

Con estos ejemplos se observa un problema similar al anterior, cuando se dividen dos enteros el resultado no siempre es un entero. Dando como resultado un nuevo conjunto más grande, los racionales.

Números Racionales

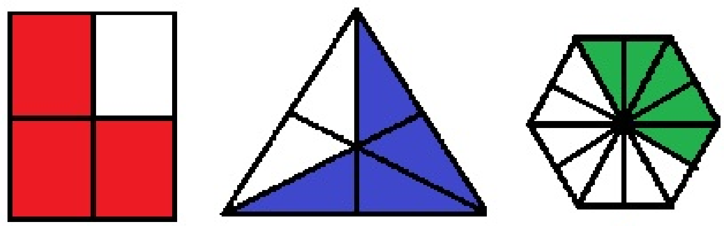
Los números racionales son los que se pueden escribir como el cociente de dos enteros, es decir los que se expresan como fracción:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{6} \qquad \frac{12}{9} \qquad \frac{1}{25} \qquad \frac{7}{2}$$

Una manera gráfica de entender estos números es con las siguientes imágenes, donde la parte sombreada de los objetos están representadas por números racionales.



$$\frac{3}{4} \qquad \frac{4}{6} \qquad \frac{5}{12}$$

Los racionales pueden escribirse en forma **decimal** o **fraccionaria**, conformado por una parte entera seguida de una coma y la parte decimal.

El número decimal puede ser periódico o exacto. Periódicos son aquellos que tienen una cifra decimal que se repite infinitamente, los exactos son los que tienen una cifra decimal exacta.

$$\frac{5}{3} = 1,66666... = 1,\widehat{6} \quad \text{Decimal periódico} \qquad \frac{5}{2} = 2,5 \quad \text{Decimal exacto}$$

Operaciones en $\mathbb{Q}$

Todas las operaciones están permitidas en el conjunto de los racionales, suma, resta, producto y cociente, dando como resultado un número racional.

Suma y resta Cuando se suman o se restan dos racionales el resultado es un racional. Sean a, b, c y d enteros con $b, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7} \qquad \frac{6}{5}-\frac{9}{5}=\frac{6-9}{5}=\frac{-3}{5}$$

$$\frac{1}{7}+\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 4+3\cdot 7}{7\cdot 4}=\frac{4+21}{28}=\frac{25}{28} \qquad \frac{6}{5}-\frac{9}{4}=\frac{6\cdot 4-9\cdot 5}{5\cdot 4}=\frac{24-45}{20}=\frac{-21}{20}$$

Producto y cociente El producto o cociente de dos racionales siempre es un racional. Sean a, b, c y d enteros.

El producto es:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{con} \quad b \quad \text{y} \quad d\neq 0$$

El cociente es:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{con} \quad b, \quad c \quad \text{y} \quad d\neq 0$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 3}{7\cdot 4}=\frac{3}{28} \qquad \frac{6}{5}\cdot\frac{-9}{2}=\frac{6\cdot(-9)}{5\cdot 2}=\frac{-54}{10}$$

$$\frac{1}{7}:\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 4}{7\cdot 3}=\frac{4}{21} \qquad \frac{-6}{5}:\frac{-9}{4}=\frac{(-6)\cdot 4}{(-9)\cdot 5}=\frac{-24}{-45}=\frac{24}{45}$$

Potenciación Ésta operación puede definirse como un producto particular. Supongamos que se multiplica el mismo número por sí mismo, por ejemplo el 3 se lo multiplica 4 veces:

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$$

Esto puede abreviarse escribiéndolo como potencia

$$3^4=81$$

Dicho esto, dado a y n un número entero, se define la operación potenciación como:

$$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots a \quad \text{se multiplica } a \text{ n veces por si misma}$$

donde a se llama **base** y n **exponente**. Además para todo $a\neq 0$ se define:

$$a^0=1 \qquad y \qquad a^{-n}=(a^{-1})^n=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$$2^2=2\cdot 2=4 \qquad 3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3\cdot 3\cdot 3}=\frac{1}{27}$$

$$5^0=1 \qquad 2^5=32$$

Aclaración 1 No está definido 0^0.

Aclaración 2 Usando el inverso, el cociente entre dos números puede escribirse como:

$$a:b=\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1} \quad \text{con } b\neq 0$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{6}=5\cdot 6^{-1} \qquad \frac{1}{2}=2^{-1}$$

Radicación Ésta operación es la inversa de la potenciación. Se define como: dados n un número natural y a y b se define como **raíz n-ésima** de a a:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Si n es par, a necesariamente es mayor o igual a cero. Si n es impar, a y b pueden ser cualquier número.

Ejemplos:

$$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2^2 = 4 \qquad \sqrt[3]{27} = 3 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 3^3 = 27$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \qquad \sqrt[4]{5} \notin \mathbb{Q}$$

En los últimos dos ejemplos, notar que no existe ningún número que elevado al cuadrado o a la cuarta den 3 o 5. Abriendo la posibilidad a un nuevo conjunto.

Números Irracionales

Existen números que no pueden escribirse como un cociente de $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$. Éstos se llaman números racionales $\mathbb{I}$.

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{5} \qquad \sqrt{3} \qquad \pi \qquad e$$

Convertidos a notación decimal, son números con infinitas cifras **no periódicas**. El ejemplo más famoso es el número pi (π), su valor es: $\pi \approx 3,14159...$

Operaciones en $\mathbb{I}$

Todas las operaciones antes mencionadas son válidas en los irracionales. Notar que las operaciones entre irracionales pueden arrojar valores racionales.

Ejemplos:

$\pi - \pi = 0 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \in \mathbb{I}$

$\sqrt[3]{5} + \sqrt{6} \in \mathbb{I}$

Números Reales

La unión de los conjuntos de números racionales e irracionales da como resultado el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Que está compuesto por todos los conjuntos de la primera imagen, y compone a todos los puntos de la recta real. Todas las operaciones antes mencionadas se pueden realizar sin problema dentro de este conjunto. Aunque si recuerdan, no se puede calcular la raíz par de un número negativo, dando paso a un nuevo conjunto llamado complejos $\mathbb{C}$. Tal vez lo hayas estudiado en el colegio, sin embargo, será estudiado una vez que ingreses a primer año.

Operaciones

En el conjunto de los reales se definen todas las operaciones antes nombradas: suma, resta, producto y cociente. A continuación te explicaremos algunas propiedades de éstas que te ayudaran a resolver problemas que te plantearemos.

Elementos neutros de la suma y el producto Los elementos 0 y 1 se dicen que son neutros en la suma y el producto respectivamente, ya que si son sumados o multiplicados por estos no afectan al número, es decir, dado a un número real:

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

Ejemplos:

$$6 + 0 = 6 \qquad 6 \cdot 1 = 6$$

Propiedad conmutativa La suma y el producto son operaciones **conmutativas**, es decir que para todos a y $b \in \mathbb{R}$, dos números cualesquiera pertenecientes a los reales, se verifica que:

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplos:

$$4 + 5 = 5 + 4 = 9 \qquad\qquad 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$$

Propiedad asociativa La suma y el producto son operaciones **asociativas**, es decir que para a, b y $c \in \mathbb{R}$, se verifica que:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplos:

$$2 + (4 + 5) = 2 + 9 = 11 \qquad (2 + 4) + 5 = 6 + 5 = 11$$
$$2 \cdot (3 \cdot 3) = 2 \cdot 9 = 18 \qquad (2 \cdot 3) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

Propiedad distributiva El producto es asociativo respecto a la suma, es decir que para a, b y $c \in \mathbb{R}$, se verifica que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ejemplos:

$$2 \cdot (4 + 5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 8 + 10 = 18$$
$$-4 \cdot (8 - 1) = -4 \cdot 8 + (-4) \cdot (-1) = -32 + 4 = -28$$

Observemos ésta expresión:

$$a^{-1} \cdot (b + c) = a^{-1} \cdot b + a^{-1} \cdot c$$

Por la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, ésto es lo mismo que

$$\frac{b + c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

Vale la propiedad distributiva del cociente respecto de la suma. Esto no quiere decir que puedas realizar esto:

$$\frac{a}{b + c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \qquad \text{¡¡¡INCORRECTO!!!}$$

Ejemplos:

$$\frac{-3+4}{21} = \frac{-3}{21} + \frac{4}{21} \quad \text{Correcto}$$
$$\frac{-3}{5+8} = \frac{-3}{5} + \frac{4}{8} \quad \text{INCORRECTO}$$

Presta atención donde utilizar esta propiedad:

$$2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \quad \text{Correcto}$$
$$2 \cdot (3 \cdot 4) \neq 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \quad \text{INCORRECTO}$$

Propiedad uniforme Establece que si uno aumenta o disminuye una misma cantidad en ambos miembros en una igualdad, ésta se conserva. Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$ si:

$$a = b \quad \text{entonces} \quad a + c = b + c$$
$$a = b \quad \text{entonces} \quad a \cdot c = b \cdot c$$
$$\text{si} \quad c \neq 0 \quad \text{y} \quad a = b \quad \text{entonces} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Propiedades de la potencia

Producto y cociente de potencia de igual base Sean a real, n y m números enteros, se cumple que

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$a^n : a^m = a^{n-m}, a \neq 0$$

Ejemplos:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32 \qquad \frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

Potencia de potencia Sean a real, n y m números enteros, se cumple que

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplos:

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64 \qquad (2^{-3})^4 = 2^{-3 \cdot 4} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$$

Propiedad distributiva Esta propiedad es solo respecto del producto y del cociente. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se cumple que

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 \qquad \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

Atención La potencia no es distributiva con la suma y la resta, es decir

$$\begin{aligned}(4+2)^2 &\neq 4^2+2^2\\ 6^2 &\neq 16+4\\ 36 &\neq 20\end{aligned}$$

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real x, denotado $|x|$ se define

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto siempre es un número no negativo.

Ejemplos:

$$|4| = 4 \qquad |7| = 7 \qquad |-5| = 5 \qquad |-12| = 12$$

Observa estos casos:

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |2| \qquad \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$$

Ya que si $x^2 = 4$ entonces $x = \pm 2$. Un número elevado a una potencia par siempre da un número positivo. De esto podemos concluir que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Potencias con exponentes racionales Hasta ahora vimos que el exponente en una potencia siempre debe ser un número entero. Pero esto no necesariamente debe ser así, por ello introduciremos el caso en que el exponente sea un número racional, es decir una fracción.

Dados a, p y $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, se define

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Ejemplos:

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \qquad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \qquad (-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-27)} = -3$$

No olvides que en este caso tendremos algunas restricciones para a ya que esto involucra una raíz. Las condiciones son:

- Si $\frac{p}{q}$ es un número negativo, a no debe ser cero. Les mostramos por qué

$$\begin{aligned} a^{\frac{-p}{q}} &= (a^{-1})^{\frac{p}{q}} \quad \text{por potencia de potencia} \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Por lo tanto si $a = 0$ queda un cociente con 0 en el denominador y eso no está definido.

- Si q es un número par y p y q son primos, es decir no tienen factores comunes, a debe ser no negativo ($a \geq 0$). Para explicar esto veamos los siguientes ejemplos:

  $$(-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-2)^3} \quad \text{3 y 2 son primos y forman una fracción irreducible.}$$

  $(-2)^3 = -8$ es un número negativo. No está definida la raíz de número negativos.

  Otro ejemplo es el siguiente caso:

  $$(-2)^{\frac{2}{4}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \quad \frac{2}{4} \quad \text{se reduce a} \quad \frac{1}{2}$$

  Obteniendo nuevamente raíz de un número negativo lo cual no existe en los reales.

- En el caso anterior, si $\frac{p}{q}$ es negativo, a necesariamente debe ser distinto de cero y un número positivo.

Todas las propiedades de potenciación son validas para exponentes racionales.

Propiedades de la radicación

Teniendo en cuenta la definición de potencia con exponente radical, todas las propiedades de la potenciación son validas para la radicación.

Ejemplos:

- Producto y cociente de igual radicando

  $$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$$

- Radicando de radicando, los índices se multiplican

  $$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3\cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$$

- Propiedad distributiva respecto del producto y cociente

  $$\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \qquad\qquad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

Simplificación de índice con exponente Supongamos que tienes ésta expresión:

$$\sqrt{2^2} = 2 \quad \text{puedes simplificar exponente con el índice ya que son iguales}$$

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Pero debes prestar atención, ya que cuando simplificas las operaciones deben estar definidas.

No puedes simplificar $\sqrt[4]{(-3)^4}$

ya que $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$

Logaritmo

Sean a y b números reales positivos y $a \neq 1$ el logaritmo en base a de b es el número x tal que $a^x = b$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8 \qquad \log_8 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces:

- $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
- $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$

Ejemplos:

$$\log_9 1 = 0 \Leftrightarrow 9^0 = 1 \qquad \log_2 2 = 1 \Leftrightarrow 2^1 = 2$$

Logaritmos decimales y neperianos Cuando la base del logaritmo es 10 se llama **logaritmo decimal** y se escribe:

$$\log a = b \Leftrightarrow 10^b = a$$

Otro logaritmo que utilizaras en Calculo se llama **logaritmo neperiano**, cuya base es el número e de Neper. Éste número e es un irracional y su valor aproximado es 2,71828..., y se escribe:

$$\ln a = b \Leftrightarrow e^b = a$$

Propiedades de logaritmo

El logaritmo del producto es la suma de los de los logaritmos de los factores

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Ejemplos:

$$\log (3 \cdot 4) = \log 3 + \log 4 \qquad \log_2 (8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5 \quad \text{ya que} \quad 2^3 = 8 \quad 2^2 = 4$$

El logaritmo del cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Ejemplos:

$$\log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 \qquad \log_2 \frac{16}{8} = \log_2 16 - \log_2 8 = 4 - 3 = 1$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

Ejemplos:

$$\log 3^4 = 4 \cdot \log 3 \qquad \log_2 8^2 = 2 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6$$

Cambio de base Esta propiedad nos permite cambiar la base del logaritmo por una conveniente, de tal forma que cuando resuelva me queden logaritmos conocidos. El cambio de base se realiza así:

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} \quad \text{donde } a\text{, } b \text{ y } c \text{ son positivos y } b, c \neq 1$$

Ejemplo: Sabiendo que $\log 9 \approx 0.96$

$$log_9 1000 = \frac{\log 1000}{\log 9} = \frac{\log 10^3}{\log 9} \approx \frac{3}{0.96} \approx 3,125$$

Resumen

En esta unidad aprendimos los conjuntos de números con los que trabajaremos durante el cursillo, las operaciones que realizaremos y sus propiedades. Las propiedades son muy importantes ya que con ellas podrás resolver los problemas planteados.

Expresiones algebraicas

¿Qué son las expresiones algebraicas?

El álgebra es una rama de la matemática pura que se ocupa de las reglas de las operaciones y de resolver ecuaciones.
Tiene operaciones básicas que son las que vimos en la unidad 1: suma, resta, multiplicación y división. Otro elemento que constituye al álgebra son las variables, son las incógnitas. Mediante operaciones deduciremos qué valores tienen.
Pensarás que no, pero el álgebra se encuentra en todos los aspectos de nuestra vida cotidiana, y sin ella no sería posible el mundo que hoy tenemos. Los antiguos egipcios, los griegos y los babilonios ya lo utilizaban para calcular estructuras. ¿Pensabas que las pirámides fueron construidas así nomás?

Polinomios

Son las expresiones algebraicas mas sencillas. Un polinomio de grado n es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n \quad \text{con} \quad a_n \neq 0$$

donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son los coeficientes. Se llama **coeficiente principal** a a_n y son números reales fijos. x es la **variable** y n el **grado del polinomio**, es un número entero no negativo. El grado de un polinomio se indica como

$$grP = n$$

Ejemplos:

$$P(x) = 8 \cdot x + \sqrt{2} \cdot x^3 - x^4 \quad \text{Poliniomio de grado 4}$$

$$grP = 4 \quad a_0, a_2 = 0, \quad a_1 = 8 \quad a_3 = \sqrt{2} \quad a_4 = -1$$

$$Q(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 6 \cdot x^3 \quad \text{Poliniomio de grado 3}$$

$$grQ = 3 \quad a_0 = 3 \quad a_1 = 8 \quad a_2 = -\frac{1}{2} \quad a_3 = 6$$

$$T(x) = \frac{3}{2 \cdot x - 1} \quad \text{No es un polinomio, x está en el denominador}$$

$$S(x) = 5 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{3} \quad \text{No es polinomio, la x tiene exponente } \frac{1}{2}$$

Según el número de términos que tenga el polinomio se llaman:

- Monomio: tiene un solo término
- Binomio: tiene dos términos
- Trinomio: tiene tres términos
- Cuatrinomio: tiene cuatro términos

Caso particular: Cuando todos los coeficientes son cero, es decir, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n = 0$ el polinomio es el **polinomio nulo** y se denota como Θ.

Ejercicio 1: ¿Podrías indicar en cada caso si se trata o no de un polinomio?

1. $P(x) = x^2 + 2 \cdot x^5 - \sqrt{5} \cdot x$
2. $Q(r) = 5 + 6 \cdot r^{\frac{1}{3}}$
3. $T(x) = 10$
4. $S(y) = 2 \cdot x^3 - 3$
5. $R(x) = \sqrt{3}x + 5$

Polinomio completo Un polinomio de grado n esta completo cuando figuran todos los términos de grado menor o igual que n.

Ejemplo:

$$P(x) = 1 + \sqrt{3} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^2 - 3 \cdot x^3$$

Polinomio ordenado

- Un polinomio está ordenado en forma **decreciente**, cuando los monomios o términos que lo componen están escritos de **mayor** a **menor** grado.

  Ejemplo:

  $$P(x) = \frac{1}{3}x^7 - 0.6x^4 - 8x^3 + x - 100 \quad \text{Polinomio ordenado en forma decreciente}$$

- Un polinomio está ordenado de forma **creciente**, cuando los monomios o términos que lo componen están escritos de **menor** a **mayor** grado.

  Ejemplo:

  $$Q(x) = x^2 + \sqrt{12}x^4 - 8x^8 \quad \text{Polinomio ordenado en forma creciente}$$

Igualdad de polinomios Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales.

Ejemplo:

$$P(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad Q(x) = 3 \cdot x^3 + 1 - \frac{1}{2} \cdot x$$

P y Q serán iguales si y solo si se cumple:

$$a = 3 \quad b = 0 \quad c = -\frac{1}{2} \quad d = 1$$

Valor numérico de un polinomio Un polinomio tiene coeficientes y variables. Cuando a la variable se le asigna un valor fijo, el polinomio adquiere un valor numérico. Veámoslo con un ejemplo:

Sea el polinomio $P(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$

- El valor numérico de $P(x)$ en $x = -1$

  $$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

- El valor numérico de $P(x)$ en $x = a$

  $$P(a) = a^3 - 3 \cdot a + 2$$

Ejercicio 2: Dado el polinomio $P(x) = 2 - 7 \cdot x^2 - 5 \cdot x^3 + 6 \cdot x^4 + 10 \cdot x^5$ ¿Cuál es el valor numérico de P para los siguientes casos?

1. $P(4)$
2. $P(1 + h)$
3. $P(-1)$
4. $P(\sqrt{2})$
5. $P(0)$

Caso particular: Ceros de un polinomio Cuando el valor numérico de un polinomio para un dado valor de x es cero, este x se llama cero del polinomio. Es decir, si para $x = a$, $P(a) = 0$, entonces a es un cero del polinomio.
Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Sea $P(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 3$

$$3 \quad \text{es cero de} \quad P(x) \quad \text{ya que} \quad P(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot 9 - 24 - 3 = 27 - 24 - 3 = 0$$

Recuerda:

$$a \quad \text{es cero de} \quad P(x) \quad \text{si y solo si} \quad P(a) = 0$$

Operaciones entre polinomios

Suma y resta de polinomios

La suma y resta entre polinomios es un polinomio, y se realiza sumando o restando términos semejantes.

Ejemplo:

$$P(x) = 2 - 7 \cdot x^2 - 5 \cdot x^3 + 6 \cdot x^4 + 10 \cdot x^5 \quad \text{y} \quad Q(x) = 4 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4$$

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= (2 - 7 \cdot x^2 - 5 \cdot x^3 + 6 \cdot x^4 + 10 \cdot x^5) + (4 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4) \\ &= 2 + (-7+4) \cdot x^2 + (-5+5) \cdot x^3 + (6-8) \cdot x^4 + 10 \cdot x^5 \\ &= 2 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^4 + 10 \cdot x^5\end{aligned}$$

Ejercicio 3:¿Te animas a realizar la resta $P(x) - Q(x)$? ¿Y $Q(x) - P(x)$, es lo mismo?

Producto de polinomios

El producto de dos polinomios es otro polinomio, cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios dados. Para realizar la operación debes recordar la propiedad distributiva que explicamos en la unidad 1.

$$\text{Sea } P(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \quad \text{y} \quad Q(x) = d + e \cdot x$$

El producto $P(x) \cdot Q(x)$ se calcula:

$$(P \cdot Q)(x) = (a + b \cdot x + c \cdot x^2) \cdot (d + e \cdot x)$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$(P \cdot Q)(x) = a \cdot d + a \cdot e \cdot x + b \cdot x \cdot d + b \cdot x \cdot e \cdot x + c \cdot x^2 \cdot d + c \cdot x^2 \cdot e \cdot x$$

Reacomodando:

$$(P \cdot Q)(x) = a \cdot d + a \cdot e \cdot x + b \cdot d \cdot x + b \cdot e \cdot x^2 + c \cdot d \cdot x^2 + c \cdot e \cdot x^3$$
$$(P \cdot Q)(x) = a \cdot d + [(a \cdot e) + (b \cdot d)] \cdot x + [(b \cdot e) + (c \cdot d)] \cdot x^2 + c \cdot e \cdot x^3$$

Para poder entenderlo mejor mira este ejemplo numérico.

Ejemplo:

$$P(x) = \frac{1}{2} \qquad Q(x) = 3 \cdot x + 4$$

$$\begin{aligned}(P \cdot Q)(x) &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x + 4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \\ &= \frac{3}{2} \cdot x + 2\end{aligned}$$

Observa que el grado del polinomio resultante es 1, ya que el grado de P es 0 y el grado de Q es 1, entonces el grado del polinomio resultante es la suma de los grados $1 + 0 = 1$

$$S(x) = 2 \cdot x - 3 \qquad T(x) = 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9$$

$$\begin{aligned}(S \cdot T)(x) &= (2 \cdot x - 3) \cdot (4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9) \\ &= 2 \cdot x \cdot 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 \cdot x + 2 \cdot x \cdot 9 - 3 \cdot 4 \cdot x^2 - 3 \cdot 6 \cdot x - 3 \cdot 9 \\ &= 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 12 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 27 \\ &= 8 \cdot x^3 - 27\end{aligned}$$

En este caso el grado del polinomio resultante es 3, la suma de 1 y 2, grados de S y T respectivamente.

División de polinomios

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x) \neq \Theta$ y con el grado de $P(x)$ mayor o igual que el grado de $Q(x)$, siempre existe un par de polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que verifican las siguientes condiciones

1. $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$
2. $R(x) = \Theta$ ó $grR(x) < grQ(x)$

$P(x)$ se denomina **dividendo**, $Q(x)$ **divisor**, $C(x)$ **cociente** y $R(x)$ **resto** de la división. Para efectuar la división conviene que los polinomios dividendo y divisor estén ordenados en forma decreciente y que el dividendo este completo.

Ejemplos: El procedimiento para dividir polinomios es similar al que se utiliza en la división de números enteros de varias cifras.

Sean $\quad P(x) = x^4 + 3 \cdot x^3 + x + 1 \quad$ y $\quad Q(x) = x + 1$

El procedimiento para dividir P en Q es:

1. Se ordenan los polinomios dividendo y divisor.
2. Se completa el polinomio dividendo

$$x^4 \qquad + 3x^3 \qquad + 0x^2 \qquad + x \qquad + 1 \qquad |\underline{x + 1}$$

3. Se divide el primer término del dividendo en el primer término del divisor, obteniendo el primer término del cociente. x^4 dividido en x es x^3, es decir $\frac{x^4}{x} = x^3$

$$\begin{array}{llllll} + x^4 & + 3x^3 & + 0x^2 & + x & + 1 & |\underline{x + 1} \\ & & & & & x^3 \end{array}$$

4. Se multiplica éste por el divisor y se suma al dividendo el opuesto del resultado, es decir, se multiplica $x^3 \cdot (x+1)$ y se suma el opuesto del resultado.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \underline{x+1} \\
-x^4 & -x^3 & & & & x^3 \\
\hline
0 & +2x^3 & & & &
\end{array}$$

Reescribimos los terminos faltantes para dividir el nuevo polinomio

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \underline{x+1} \\
-x^4 & -x^3 & & & & x^3 \\
\hline
 & +2x^3 & +0x^2 & +x & +1 &
\end{array}$$

5. Con lo que se obtiene se repiten los pasos 3 y 4 hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \underline{x+1} \\
-x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2 \\
\hline
 & +2x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \\
 & -2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & & -2x^2 & +x & +1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \underline{x+1} \\
-x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2-2x \\
\hline
 & +2x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \\
 & -2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & & -2x^2 & +x & +1 & \\
 & & +2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & & +3x & +1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \underline{x+1} \\
-x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2-2x+3 \\
\hline
 & +2x^3 & +0x^2 & +x & +1 & \\
 & -2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & & -2x^2 & +x & +1 & \\
 & & +2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & & +3x & +1 & \\
 & & & -3x & -3 & \\
\hline
 & & & & -2 &
\end{array}$$

El cociente es $C(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$ y el resto $R(x) = -2$

Observa que:
En el producto, el grado del polinomio resultado es la suma de los grados de los poliniomios que multiplicas.
En la divisón, el grado del polinomio resultado es la diferencia del polinomio dividendo con el divisor.

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es una herramienta para el caso particular de la división de polinomios cuando el divisor tiene la forma $x - a$

Ejemplo:

Sean los polinomios $P(x) = 3 \cdot x^4 + x^2 + 5 \cdot x$ y $Q(x) = x + 1 = x - (-1)$

1. Se completa y se ordena en forma decreciente P(x) y se escriben sus coeficientes
2. Se escribe a a la izquierda de la línea vertical, en el caso del ejemplo $a = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

3. Se escribe el primer coeficiente de P(x) en la tercera línea

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

4. Se multiplica el primer coeficiente por a, escribiendo el producto en la segunda línea debajo del segundo coeficiente de P(x)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & & -3 & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

5. La suma de los números de esta columna se coloca en la tercera línea

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & -3 & & & \\ \hline & 3 & -3 & & & \end{array}$$

6. Se repiten los pasos anteriores hasta llegar al último coeficiente de P(x)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & -3 & 3 & & \\ \hline & 3 & -3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & -3 & 3 & & \\ \hline & 3 & -3 & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & -3 & 3 & -4 & \\ \hline & 3 & -3 & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & -3 & 3 & -4 & {\color{red}+} \\ \hline & 3 & -3 & 4 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & -3 & 3 & -4 & -1 \\ \hline & 3 & -3 & 4 & 1 & {\color{red}(-1)} \end{array}$$

7. La última suma es el valor del resto R(x).

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & & -3 & 3 & -4 & -1\,{\color{red}+} \\ \hline & 3 & -3 & 4 & 1 & {\color{blue}-1} \end{array}$$

Los números que preceden al resto $R(x)$ representan los coeficientes del polinomio cociente, $C(x)$ ordenado en forma decreciente y de un grado menor que el de $P(x)$.

Los polinomios $C(x)$ y $R(x)$ son:

$$C(x) = 3x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \quad R(x) = -1$$

Divisibilidad Se dice que un polinomio es **divisible** en otro cuando el resto de esa división da como resultado el polinomio nulo Θ

Ejemplos:

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \quad \text{es divisible en} \quad Q(x) = x^2 - 1$$

$$\begin{array}{rrrr|l} +x^3 & -x^2 & -x & +1 & \underline{x^2 + 0x - 1} \\ -x^3 & +0x^2 & +x & & x - 1 \\ \hline & -x^2 & +0x & +1 & \\ & +x^2 & +0x & -1 & \\ \cline{2-4} & & +0x & +0 & \end{array}$$

$$R(x) = 0 = \Theta \quad \text{y} \quad C(x) = x - 1$$

$$\text{Si} \quad P(x) = x^3 + 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 9 \quad \text{y} \quad Q(x) = x + 3 \quad \text{utilizando Ruffini}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 3 & -9 \\ -3 & & -3 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$R(x) = 0 = \Theta \quad \text{y} \quad C(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3$$

Teorema del Resto

Si a es un número real y $P(x)$ un polinomio, **el resto de dividir P(x) en** $x - a$ es el valor númerico de $P(x)$ en a. Es decir que el resto $R(x)$ es igual a $P(a)$. Para entender mejor de que se trata, veamos un ejemplo númerico.

Ejemplo:

$$\text{Sea el polinomio} \quad P(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x \quad \text{y} \quad Q(x) = x - 1$$

El resto $R(x)$ cuando se dividen P en Q es

$$\begin{array}{rrrrl}
+2x^3 & +3x^2 & +\frac{1}{4}x & +0 & \underline{|x-1} \\
-2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2+5x+\frac{21}{4} \\
\hline
 & +5x^2 & +\frac{1}{4}x & +0 & \\
 & -5x^2 & +5x & & \\
\cline{2-4}
 & & +\frac{21}{4}x & +0 & \\
 & & -\frac{21}{4}x & +\frac{21}{4} & \\
\cline{3-4}
 & & & +\frac{21}{4} &
\end{array}$$

$$R(x) = \frac{21}{4}$$

Si calculamos $P(1)$

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 2 + 3 + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{8 + 12 + 1}{4} = \frac{21}{4}$$

Entonces $P(1) = R(x) = \frac{21}{4}$

Ejercicio 4: ¿Te animas a calcular los valores del ejercicio 2. con este teorema? Puedes aplicar la división o Ruffini para determinar el resto.

Factoreo

Un polinomio puede expresarse en forma de producto de varios polinomios más sencillos. En esta sección te enseñaremos como transformar un polinomio a su forma factoreada y verás que en ocasiones es más sencillo extraer información de esta manera.

Sea $P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, la forma general de un polinomio factoreado es:

$$P(x) = a_n(x - c_n)...(x - c_2)(x - c_1)$$

Un ejemplo de un polinomio factoreado es:

$$P(x) = 3 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - \sqrt{3})$$

De este ejemplo podemos deducir cuales son los ceros del polinomio. Recordando lo dicho más atras, un cero de un polinomio es aquel número que devuelve el valor cero, es decir a es cero de $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Los ceros del polinomio $P(x)$ son $3, -2$ y $\sqrt{3}$. Cuando uno calcula $P(3), P(-2)$ o $P(\sqrt{3})$ uno de los factores se hace cero, y una expresión multiplicado por cero, es cero.

$$P(3) = 3 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - \sqrt{3}) = 3 \cdot (3 - 3) \cdot (3 + 2)^2 \cdot (3 - \sqrt{3}) = 0 \cdot 5^2 \cdot (3 - \sqrt{3}) = 0$$

Como ves, si el polinomio está factoreado, es posible encontrar de manera rápida los ceros del mismo.

Ejercicio 5: Calcula $P(-2)$ y $P(\sqrt{3})$

Casos de factoreo

1. Factor común Cuando se tiene un polinomio de la forma:

$$P(x) = k \cdot a_0 + k \cdot a_1 \cdot x + k \cdot a_2 \cdot x^2 + ... + k \cdot a_n \cdot x^n$$

Observa que k es un **factor común** ya que está presente en cada término de P. Podemos reescribir el polinomio de la siguiente manera:

$$P(x) = k \cdot (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n)$$

Ejemplo:

$$P(x) = 3 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 9 \cdot x$$

Los coeficientes son todos números múltiplos de 3:

$$3 = 3 \cdot 1 \quad -15 = 3 \cdot (-5) \quad 9 = 3 \cdot 3$$

Por lo tanto 3 es un **factor común** de $P(x)$. A su vez todos los términos contienen una x, que puede ser extraída también como factor común. El polinomio factoreado quedaría:

$$P(x) = 3 \cdot x \cdot (x^2 - 5 \cdot x + 3)$$

Ejercicio 6: ¿Cuál es el factor común en estos polinomios? Factorea los polinomios.

1. $P(t) = 12 \cdot t^4 + 2 \cdot t^3 + 6 \cdot t$
2. $P(x) = 10 \cdot x - 1000 \cdot x^2$
3. $P(s) = 5 \cdot s + 25 \cdot s^2 - 50 \cdot s^4 + 15$

2. Diferencia de cuadrados ¿Qué pasa si multiplicamos estos dos polinomios?

$P(x) = x + a$ y $Q(x) = x - a$ Realicemos el producto:

$$P(x) \cdot Q(x) = (x + a) \cdot (x - a) = x \cdot x + x \cdot (-a) + a \cdot x + a \cdot (-a)$$

Reacomodando:

$$= x^2 - a \cdot x + a \cdot x - a^2 = x^2 - a^2$$

Por lo tanto, el producto de la suma de dos términos por la diferencia de esos términos da como resultado la diferencia de los cuadrados de los términos, es decir:

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2$$

Ejemplos:

1. $P(x) = x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3) \cdot (x - 3)$
2. $Q(s) = x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$
3. $T(x) = x^4 - 25 = (x^2)^2 - 5^2 = (x^2 + 5) \cdot (x^2 - 5)$
4. $S(t) = 36 - x^2 = (6^2 - x^2) = (6 + x) \cdot (6 - x)$

3. Cuadrado de un binomio Veamos el caso cuando multiplicas un binomio por si mismo, es decir el cuadrado de un binomio:

$$(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x+a) = x\cdot x + x\cdot a + a\cdot x + a\cdot a = x^2 + x\cdot a + x\cdot a + a^2$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot a + a^2$$

Esta expresión también recibe el nombre de **trinomio cuadrado perfecto.** Veamos este ejemplo numérico:
Si se tiene el siguiente polinomio:

$$Q(x) = x^2 + 12\cdot x + 36 = x^2 + 2\cdot 6\cdot x + 6^2$$

tiene la forma de un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto su forma factoreada será un cuadrado de un binomio:

$$Q(x) = x^2 + 2\cdot 6\cdot x + 6^2 = (x+6)^2$$

Para darte cuenta si es un trinomio cuadrado perfecto te doy dos consejos:

1. Observa el coeficiente lineal y verifica que es múltiplo de 2.
2. Si es múltiplo, entonces observa el término independiente. ¿Su raíz cuadrada es igual al coeficiente lineal dividido en 2?

Si suceden estos dos puntos entonces tienen un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplos:

1. $x^2 + 16\cdot x + 64 = x^2 + 2\cdot 8\cdot x + 8^2 = (x+8)^2$
2. $x^2 - 18\cdot x + 81 = x^2 - 2\cdot 9\cdot x + 9^2 = (x-9)^2$
3. $x^4 + 6\cdot x + 9 = (x^2)^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 = (x^2+3)^2$

4. Cubo de un binomio Este caso es parecido al anterior, pero en vez de multiplicar 2 veces el mismo polinimio, la hacemos 3 veces, es decir:

$$P(x) = (x+a)\cdot(x+a)\cdot(x+a)$$

Desarrollando esto se obtiene

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= (x+a)\cdot(x+a)^2\\ &= (x+a)\cdot(x^2 + 2\cdot a\cdot x + a^2)\\ &= x\cdot x^2 + x\cdot 2\cdot a\cdot x + x\cdot a^2 + a\cdot x^2 + a\cdot 2\cdot a\cdot x + a\cdot a^2\end{aligned}$$

Re-acomodando los términos:

$$\begin{aligned}&= x^3 + {\color{red}2\cdot a\cdot x^2} + {\color{blue}a^2\cdot x} + {\color{red}a\cdot x^2} + {\color{blue}2\cdot a^2\cdot x} + a^3\\ &= x^3 + 3\cdot a\cdot x^2 + 3\cdot a^2\cdot x + a^3\end{aligned}$$

Esta expresión recibe el nombre de **cuatrinomio cubo perfecto**.

Ejemplos:

1. $x^3 + 9\cdot x^2 + 27\cdot x + 27 = x^3 + 3\cdot 3\cdot x^2 + 3\cdot 3^2\cdot x + 3^3 = (x+3)^3$
2. $x^3 + 15\cdot x^2 + 75\cdot x + 125 = x^3 + 3\cdot 5\cdot x^2 + 3\cdot 5^2\cdot x + 5^3 = (x+5)^2$

5. Suma y diferencia de cubos Como en el caso de la diferencia de cuadrados, vamos a comenzar con esta pregunta ¿qué pasa si multiplicamos estos dos polinomios?

$$P(x) = x - a \quad \text{y} \quad Q(x) = x^2 + a \cdot x + a^2$$

$$\text{o} \quad P(x) = x + a \quad \text{y} \quad Q(x) = x^2 - a \cdot x + a^2$$

Observa que los signos son distintos. Desarrollemos el primer caso:

$$(x-a) \cdot (x^2 + a \cdot x + a^2) = x \cdot x^2 + x \cdot a \cdot x + x \cdot a^2 - a \cdot x^2 - a \cdot a \cdot x - a \cdot a^2$$

Reacomodemos:

$$= x^3 + a \cdot x^2 + a^2 \cdot x - a \cdot x^2 - a^2 \cdot x - a^3$$
$$= x^3 - a^3 \quad \text{Obtenemos una diferencia de cubos.}$$

Ejercicio 7: ¿Puedes desarrollar el otro caso para llegar a la suma de cubos? Recuerda que la clave es usar bien la propiedad distributiva y no equivocarse con los signos.

Ejemplos:

1. $8 \cdot a^3 - 27 = (2 \cdot a)^3 - 3^3 = (2 \cdot a - 3) \cdot (4 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 9) = (2 \cdot a - 3) \cdot (4 \cdot a^2 + 6 \cdot a + 9)$
2. $a^3 + 27 = a^3 + 3^3 = (a+3) \cdot (a^2 - 3 \cdot a + 3^2) = (a+3) \cdot (a^2 - 3 \cdot a + 9)$

Expresiones algebraicas fraccionarias

Una expresión algebraica fraccionaria es aquella que puede expresarse como el cociente entre dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con $Q(x) \neq \Theta$ (polinomio nulo). Las operaciones que se pueden utilizar son las mismas que vimos en la Unidad 1 de Números Reales.

Ejemplos:

1. $\frac{15}{x-2}$ Observa que para que éste definida $x \neq 2$
2. $\frac{x^2+2 \cdot x+1}{(x-1) \cdot (x-6)}$ Vale para $x \neq 1$ y $x \neq 6$
3. $\frac{x+2}{x^2+1} - \frac{x^4-3 \cdot x^2+6}{x}$

Ejercicio 8: ¿Para que valores x no esta definido el ejemplo 3?

Operaciones entre expresiones algebraicas fraccionarias

Simplificación de factores: Cuando las expresiones algebraicas fraccionarias están en forma factoreada, puedes simplificar de manera más sencilla, como lo haces con los números reales.

Ejemplos:

$$\frac{(x+1) \cdot (x-3)}{x \cdot (x-3)^2} \quad \text{Tanto en el numerador como denominador tienes el factor} \quad (x-3)$$

$$\frac{(x+1)}{x \cdot (x-3)}$$

Es importante destacar que lo que se simplifica debe ser distinto de cero. En el caso del ejemplo $x - 3 \neq 0$, es decir, $x \neq 3$.

¡Atención!: simplificas **factores**, no sumandos.

$$\frac{x+1}{x \cdot (x-3)} \neq \frac{1}{x-3} \quad \text{¡INCORRECTO!}$$

Ejercicio 9: Simplifica las siguientes expresiones

1. $$\frac{(x+1) \cdot (x+2)^2}{(x+2) \cdot (x+\sqrt{2})}$$

2. $$\frac{x^2 \cdot (5-x) \cdot (x+6)}{x \cdot (x+6)^3 \cdot (x+4)}$$

Común denominador: Cuando tengas una expresión algrebraica fraccionarias es conveniente tener una única expresión. Para ello debes sacar común denominador y es importante que este sea el mínimo común denominador. Para ello la recomendación para trabajar correctamente es factorear todos lo denominadores. Veamos un ejemplo de como se lo haría:

$$\frac{2x-5}{2x^2-10x+12} - \frac{x-1}{4x^2-16x+16} - \frac{2}{4x-12}$$

Primero factoricemos cada denominador:

$$\begin{aligned}
& 2x^2-10x+12 = \\
\text{saco factor común 2} \quad & 2 \cdot (x^2-5x+6) = \\
\text{saco los ceros de la expresión} \quad & x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\
& x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\
& x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \\
& x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\
& x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
\text{Obtenemos:} \quad & 2 \cdot (x-3) \cdot (x-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4x^2-16x+16 = \\
\text{es un trinomio cuadrado perfecto} \quad & (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 4 + 4^2 = \\
\text{Obtenemos:} \quad & (2x-4)^2 \\
\text{podemos sacar factor común 2 también} \quad & (2 \cdot (x-2))^2 \\
\text{Obtenemos:} \quad & 4 \cdot (x-2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4x-12 \\
\text{Podemos sacar factor común 4} \quad & 4 \cdot (x-3) \\
\text{Obtenemos:} \quad & 4 \cdot (x-3)
\end{aligned}$$

Reescribamos la expresión con los denominadores factoreados:

$$\frac{2x-5}{2\cdot(x-3)\cdot(x-2)}-\frac{x-1}{4\cdot(x-2)^2}-\frac{2}{4\cdot(x-3)}$$

Esta expresión tendrá sentido **solamente si** $x\neq 2$ y $x\neq 3$ Ahora busquemos el **minimo común multiplo (m.c.m.)**, este se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes a todos los denominadores, elevados a la mayor potencia que aparece. Los factores comunes son: $(x-2)$, $(x-3)$ y 4. Como tienen que estar elevados a la mayor potencia $(x-2)^2$. El m.c.m. es:

$$\text{m.c.m.}=4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)$$

Ahora agrupemos todo en una sola fracción. Esto se realiza como si fueran números reales:

$$\frac{2x-5}{2\cdot(x-3)\cdot(x-2)}-\frac{x-1}{4\cdot(x-2)^2}-\frac{2}{4\cdot(x-3)}=$$

$$\frac{(2x-5)\cdot 2\cdot(x-2)-(x-1)\cdot(x-3)-2\cdot(x-2)^2}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

Observemos los sumandos en el numerador de esta gran fracción. Hay términos que podemos agrupar para simplificar, son los marcados en naranja, el factor común es $2\cdot(x-2)$.

$$\frac{(2x-5)\cdot 2\cdot(x-2)-(x-1)\cdot(x-3)-2\cdot(x-2)^2}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

$$\frac{2\cdot(x-2)\,[(2x-5)-(x-2)]-(x-1)\cdot(x-3)}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

Reacomodemos lo que quedó dentro de los corchetes:

$$\frac{2\cdot(x-2)[2x-x+2-5]-(x-1)\cdot(x-3)}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

$$\frac{2\cdot(x-2)[x-3]-(x-1)\cdot(x-3)}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

Podemos sacar factor común $x-3$:

$$\frac{(x-3)\cdot[2\cdot(x-2)-(x-1)]}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

Reacomodamos lo que esta dentro de los corchetes:

$$\frac{(x-3)\cdot[2x-4-x+1]}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

$$\frac{(x-3)\cdot[x-3]}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

Obteniendo:

$$\frac{(x-3)^2}{4\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)}=$$

Simplificamos el numerador con el denominador ya que esta el factor $(x-3)$ en ambos:

$$\frac{(x-3)}{4\cdot(x-2)^2}$$

Y así obtenemos la mínima expresión.

Otro camino que puedes tomar en vez de aplicar factor común es usando la propiedad distributiva. Para realizar esto debes ser muy ordenado. Para que no te confundas, cada sumando se trabajará con un color distinto:

$$\frac{(2x-5)\cdot 2\cdot (x-2)-(x-1)\cdot (x-3)-2\cdot (x-2)^2}{4\cdot (x-2)^2\cdot (x-3)}$$

$$\frac{2\cdot (2x^2-4x-5x+10)-(x^1-3x-x+3)-2\cdot (x^2-4x+4)}{4\cdot (x-2)^2\cdot (x-3)}$$

$$\frac{2\cdot (2x^2-9x+10)-(x^2-4x+3)-(2x^2-8x+8)}{4\cdot (x-2)^2\cdot (x-3)}$$

$$\frac{4x^2-18x+20-x^2+4x-3-2x^2+8x-8}{4\cdot (x-2)^2\cdot (x-3)}$$

Ahora agrupemos los términos semejantes entre ellos

$$\frac{4x^2-x^2-2x^2-18x+4x+8x+20-3-8}{4\cdot (x-2)^2\cdot (x-3)}$$

$$\frac{x^2-6x+9}{4\cdot (x-2)^2\cdot (x-3)}$$

Si observamos el numerador es un trinomio cuadrado perfecto

$$\frac{(x-3)^2}{4\cdot (x-2)^2\cdot (x-3)}$$

Simplificamos y así obtenemos la mínima expresión

$$\frac{(x-3)}{4\cdot (x-2)^2}$$

Observa que por un camino distinto obtenemos el mismo resultado.

Resumen

Para poder trabajar con una suma de expresiones algebraicas racionales (EAR) debes:

1. Factorear los denominadores
2. Determinar y aclarar para qué valores no está definida la EAR
3. Determinar el m.c.m. del denominador
4. Agrupar todo en una única fracción con el m.c.m. como denominador, y multiplicar a cada numerador por el factor correspondiente
5. Trabajar con el numerador. En esta etapa puedes proceder como más cómodo te sientas. Existen múltiples caminos para trabajar, solo debes seguir las reglas que te enseñamos. Puedes tanto aplicar la propiedad distributiva y agrupar términos semejantes, como sacar factor común si es posible.
6. Factorea el numerador para poder simplificar
7. Determina nuevamente que valores no son los que están definidos para la expresión.

Funciones

Las funciones relacionan dos variables y son útiles para representar situaciones de la vida real. Veamos algunos ejemplos:

En economía:

Un negocio vende 50 celulares a un precio de 350 dolares. Por cuestiones económicas el precio sube a 500 dolares, y ahora vende 25 celulares. Asumiendo que la demanda es lineal, ¿cuánto cayó la demanda con la suba del precio?

En física:

La velocidad de un objeto puede representarse con una función lineal, donde la pendiente es la velocidad del objeto.

En esta unidad se verán dos funciones básicas, la **función lineal** o **recta** y la **cuadrática** o **parábola**.

Antes de comenzar a estudiarlas repasaremos algunos conceptos importantes.

Par ordenado

Se llama **par ordenado** a dos elementos que tienen cierto orden. Si los dos elementos son x e y, entonces el par ordenado es (x, y). Se llama **primera componente** a x y **segunda componente** a y.

Ejemplos:

1. $(1, 2)$
2. (a, b)
3. $(2, 1)$
4. $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$
5. $(\pi, 5)$

Observa los ejemplos 1 y 3. Son pares ordenados distintos, aunque los componentes sean los mismos, ya que su **orden** es distinto.

Como vimos en la unidad de números reales, los números pueden representarse en una recta numérica. Ahora los pares ordenados también pueden representarse gráficamente pero en un **plano**.

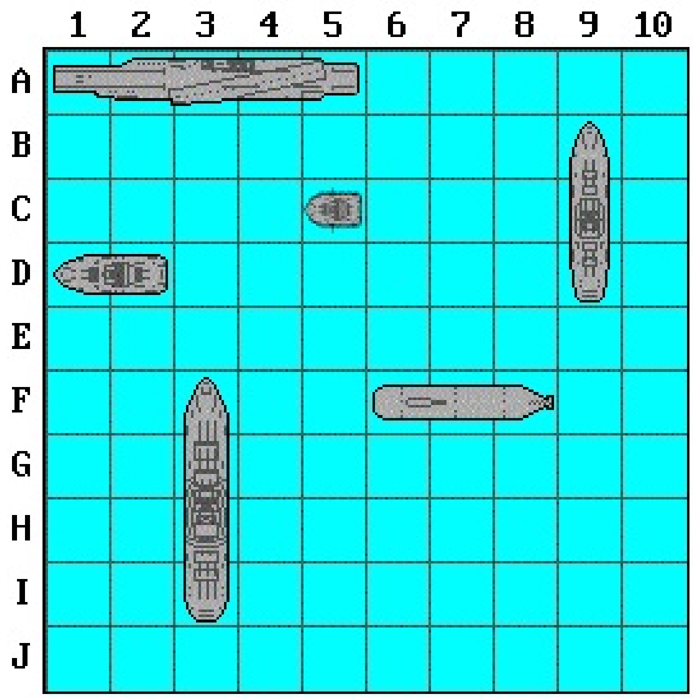
Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano

Está formado por un par de rectas numéricas perpendiculares llamadas **ejes cartesianos**. El eje horizontal se llama **eje de las abscisas** y el eje vertical **eje de las ordenadas.** El punto de intersección entre ambos se lla,a **origen de coordenadas**. El plano en el que se ha dibujado un sistema de coordenadas recibe el nombre de **plano cartesiano**.

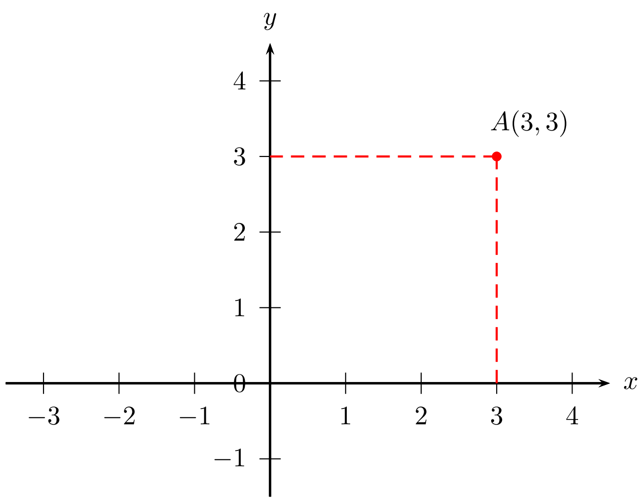
¡A jugar!: La batalla naval.

En este juego se tiene un plano que representa el mar y está dividido en sectores, cada sector se lo identifica con un par ordenado por ejemplo $(C, 5)$, que en el caso de la imagen esta ocupado por un mini barquito.

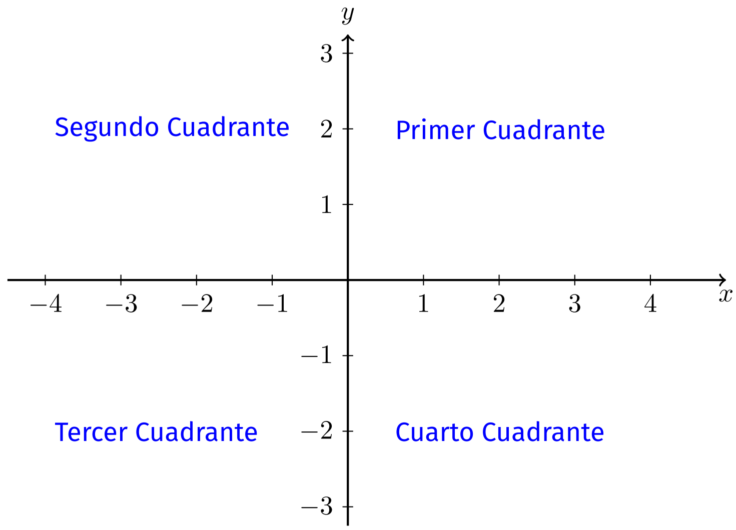
Para jugar debes decirle a tu contrincante pares ordenados tratando de averiguar donde están sus barcos para ”hundirlos”. Cuando nosotros queremos ubicar un par ordenado en el plano debemos realizar algo parecido.



A todo par ordenado (x, y) le corresponde un punto P en el plano cartesiano. Para ubicar entonces un par ordenado (x, y) primero se ubica a x en eje de las abscisas e y en el de las ordenadas, y luego se trazan rectas. Donde se intersectan es la ubicación del par. En la siguiente imagen se observa cómo se ubica el par $A(3, 3)$.



El sistema cartesiano determina en el plano cuatro ángulos rectos llamados cuadrantes: Primero, Segundo, Tercero y Cuarto.



Ejercicio 1: Puedes ubicar los siguientes pares ordenados en el plano:

1. $(3, 2)$
2. $(-1, 3)$
3. $(\frac{1}{2}, -2)$

Rectas: forma general

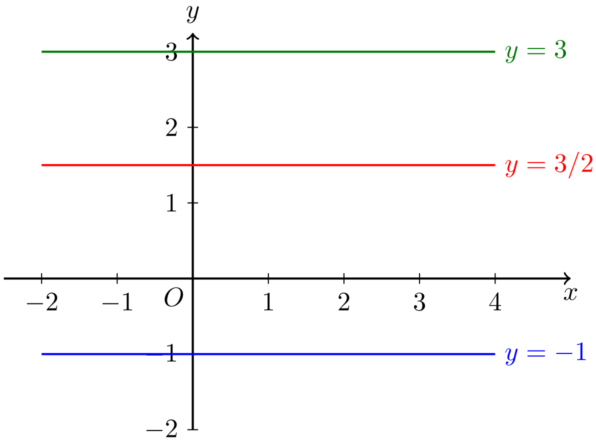
La forma general de una recta es $ax+by+c=0$, donde a, b y c son constantes, a y b no pueden ser nulas al mismo tiempo. Todos los puntos (x, y) del plano que verifican la ecuación $ax+by+c=0$ pertenecen a la recta.

Rectas paralelas al eje horizontal y vertical

Una recta paralela al eje x es de la forma $by+c=0$. Es decir, $a=0$ y $b \neq 0$. Puede escribirse también como $y=-\frac{c}{b}$, o lo que es lo mismo $y=d$, una misma constante para cualquier valor que tome x.

Ejemplos:

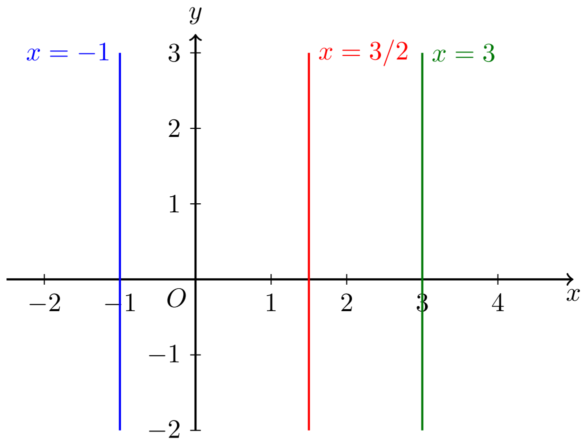
1. $y=3$
2. $y=3/2$
3. $y=-1$



Una recta paralela al eje y se define como $ax + c = 0$. Volviendo a la forma general, aquí $b = 0$ y $a \neq 0$, resultando $x = -\frac{c}{a}$ o lo que es lo mismo $x = d$. Es decir, x es una constante d cualquiera para todo y.

Ejemplos:

1. $x = -1$
2. $x = 3/2$
3. $x = 3$



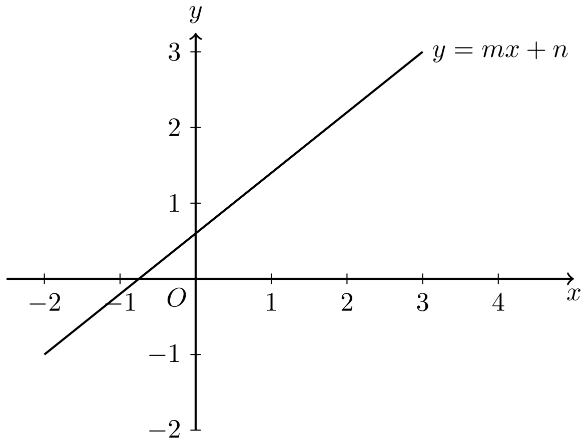
Rectas: forma explícita

Cuando $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la expresión $ax + by + c = 0$ puede trabajarse algebraicamente para llevarla a la expresión:

$$y = mx + n$$

donde m es la **pendiente** y n la **ordenada al origen**. Esta expresión se conoce como **ecuación explícita de la recta.**

- **Pendiente m:** Representa la inclinación de la recta respecto al eje x.
- **Ordenada al origen n:** Representa la intersección de la recta con el eje y.



Ejercicio: Realiza el trabajo algebraico necesario para pasar de la forma general $ax + by + c = 0$ a la forma explícita $y = mx + n$. ¿Cuál es la relación entre a, b y c con m y n?

Puntos sobre la recta en la forma explícita

Si $m = \frac{p}{q}, q \neq 0$, la recta $y = \frac{p}{q}x + n$ pasa por los puntos $R(0, n)$ y $Q(q, p+n)$, te demostramos porque:

- Si reemplazamos $x = 0$ en la ecuación estamos fijando un punto. Calculamos cuanto vale y para $x = 0$

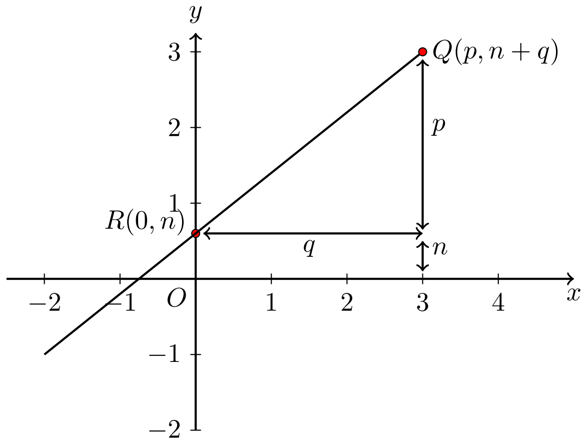
$$y = \frac{p}{q} \cdot 0 + n$$
$$y = n$$

  Obtenemos el punto $R(0, n)$

- Si ahora $x = q$, reemplazamos en la ecuación:

$$y = \frac{p}{q} \cdot q + n \quad \text{se simplifica } q$$
$$y = p + n$$

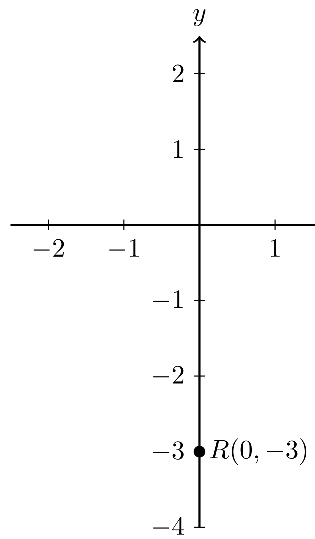
  Obtenemos el punto $Q(q, p + n)$



Y ahora pensarás ¿Cuál es la importancia de estos puntos? Éstos nos ayudarán a graficar la recta. Veamos un ejemplo númerico.

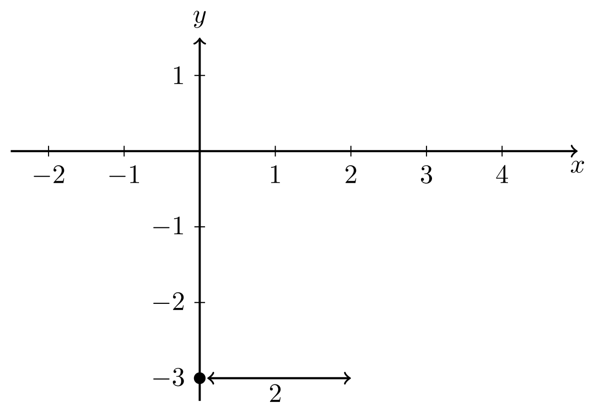
Grafiquemos la recta $y = \frac{3}{2}x - 3$.

1. La ordenada al origen era la constante, si miramos la ecuación es -3, entonces $n = -3$. Recordando lo explicado, era el punto donde corta al eje y. Grafiquemos este punto:

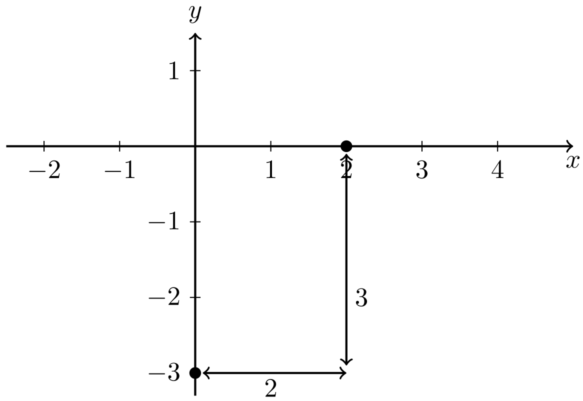


2. Ahora analicemos la pendiente es $m = \frac{3}{2}$, es decir que si comparamos con lo explicado $m = \frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, $p = 3$ y $q = 2$.

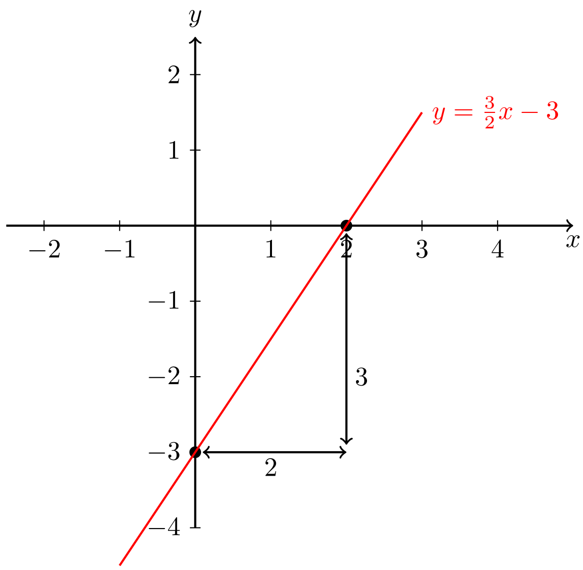
   Para poder marcar el otro punto por donde pasa la recta nos paramos en el punto $(0, -3)$ y nos movemos q unidades a la derecha, es decir 2 unidades.



   Y luego nos movemos p unidades hacia arriba, es decir 3 unidades, es decir que el punto será $Q(q = 2, p + n = 3 - 3 = 0)$ es decir $(2, 0)$.



Obteniendo los dos puntos necesarios para trazar la recta:



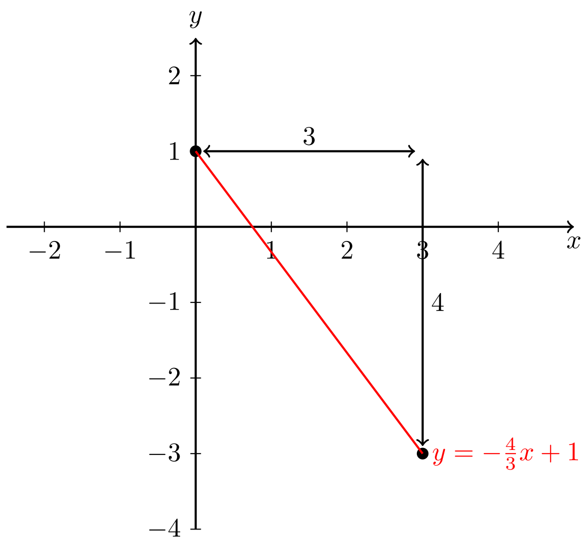
Otros ejemplos:

$$4x + 3y - 3 = 0$$

Despejando y:

$$y = -\frac{4}{3}x + 1, \quad \frac{p}{q} = -\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad n = 1$$

Observa que en este ejemplo $\frac{p}{q} = -\frac{4}{3}$, es decir que era un número negativo, por ello tomamos a $p = -4$ y $q = 3$, entonces en vez de movernos para arriba como en el ejemplo anterior, nos moveremos para abajo.



El signo de m nos indica si la recta tiene pendiente **ascendente**, es decir que los valores de y crecen a medida que aumenta x si m es **positiva**, o **descendente** si los valores decrecen a medida que aumenta x, m es **negativa**.

¿Te animas a escribir estas ecuaciones en la forma $y = \frac{p}{q}x + n$ y graficar la recta correspondiente?

1. $y - 3x + 8 = 0$
2. $y = 2x - 4$
3. $5y + 10x + 25 = 0$

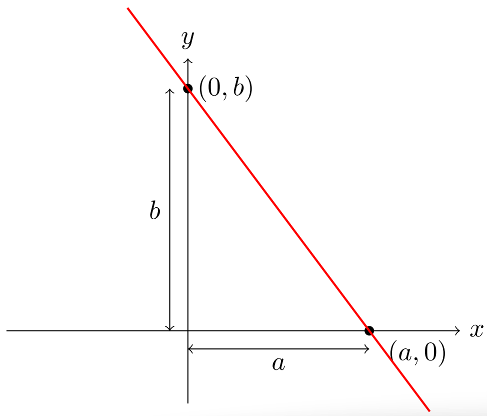
Recuerda que un número a puede ser escrito como $\frac{a}{1}$, es decir $4 = \frac{4}{1}$.

Rectas: forma segmentaria o canónica

La ecuación segmentaria o canónica de la recta es la expresión de la recta en función de los segmentos que ésta determina sobre los ejes de coordenadas. La ecuación de una recta segmentaria es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a se mide sobre el eje de las abscisas y b sobre el eje de las ordenadas. Gráficamente:



Importante: Una recta carece de forma segmentaria en los siguientes casos:

1. Si es una recta paralela al eje x, es decir $y = r$.
2. Si es una recta paralela al eje y, es decir $x = m$.
3. Si es una recta que pasa por el origen de coordenadas, es decir $y = mx$.

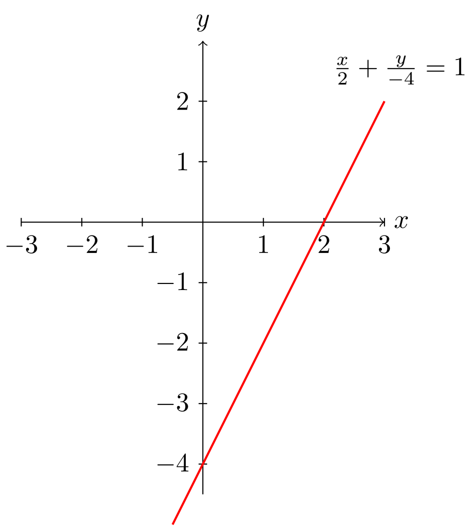
Ejemplo: Escribir la siguiente ecuación de la recta en forma segmentaria:

$$y = 2x - 4$$

La ecuación de la recta dada está escrita en forma explícita. Para llevarla a la forma segmentaria se deben realizar algunos pasos algebraicos:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 4 \\ 4 &= 2x - y \\ \text{Divido en 4 miembro a miembro:} \quad 1 &= \frac{2x - y}{4} \\ \text{Distribuyo:} \quad 1 &= \frac{2x}{4} - \frac{y}{4} \\ 1 &= \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} \end{aligned}$$

Obtengo así la forma segmentaria de la recta. Los puntos de intersección con los ejes x e y son: $(2, 0)$ y $(0, -4)$. Gráficamente:



Determinación de la recta a partir de dos puntos

Supongamos que tenemos dos puntos y queremos determinar la recta que pasa por éstos. Los puntos son (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Tomemos por ejemplo la ecuación en forma explícita de una recta: $y = mx + n$. Como estos puntos pertenecen a la recta entonces verifican la ecuación:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n & (1) \\ y_2 = mx_2 + n & (2) \end{cases}$$

Resultando en un sistema de ecuaciones con dos incógnitas como los que verás en la unidad de ecuaciones, donde las incógnitas son la pendiente m y la ordenada al origen n. Una forma de resolver un sistema es la siguiente:

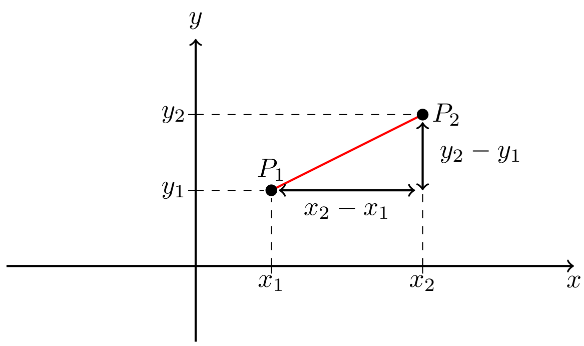
Restemos (1) y (2)

$$\begin{aligned} y_2 =& mx_2 + n \\ -(y_1 =& mx_1 + n) \\ \hline y_2 - y_1 =& mx_2 - mx_1 + n - n \end{aligned}$$

Reacomodando:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 =& m(x_2 - x_1) \\ m =& \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Gráficamente:



Teniendo la pendiente, la ecuación de la recta quedaría $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + n$, siendo la última incógnita n.

Para obtener su valor, reemplazamos en la ecuación de la recta con uno de los puntos y despejemos n:

$$y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1 + n$$

$$n = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1$$

Veamos un ejemplo numérico para comprender mejor, supongamos una recta que pase por los puntos $P_1(-2, 0)$ y $P_2(1, 2)$. Como ambos pertenecen a la recta deben verificar la ecuación de la recta $y = mx + n$:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-2) + n & \to 0 = -2m + n \\ 2 = m \cdot 1 + n & \to 2 = m + n \end{cases}$$

Comencemos por calcular m. De lo anterior planteado:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

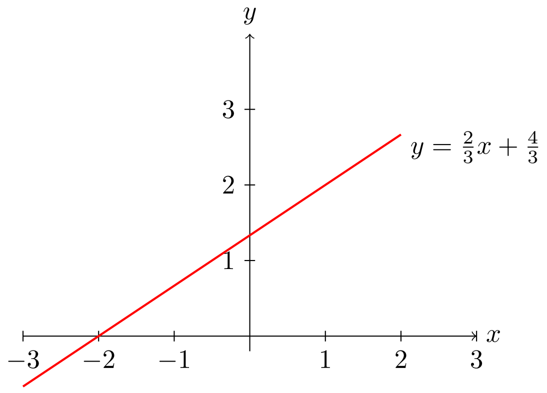
$$\text{Entonces:} \quad m = \frac{2 - 0}{1 - (-2)}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

Una vez calculada la pendiente resta reemplazar en una de las ecuaciones anteriores y despejar:

$$\begin{aligned} 0 &= -2m + n \\ n &= 2m \\ n &= 2 \cdot \frac{2}{3} \\ n &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

La ecuación de la recta es entonces $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
Graficamos como aprendimos anteriormente:



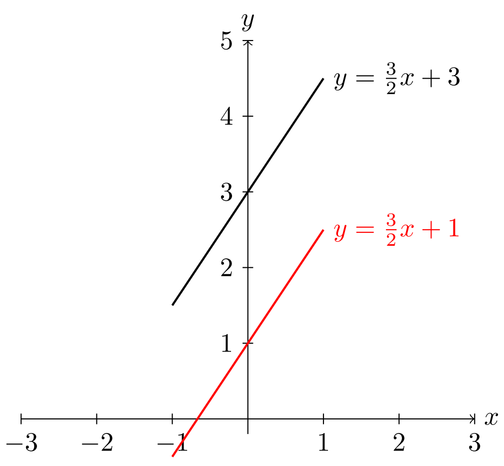
Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales. Son rectas que tienen la misma inclinación y no nunca se cortaran entre ellas. Otra posibilidad es que las rectas sean coincidentes, es decir, comparten todos los puntos.

Ejemplos:

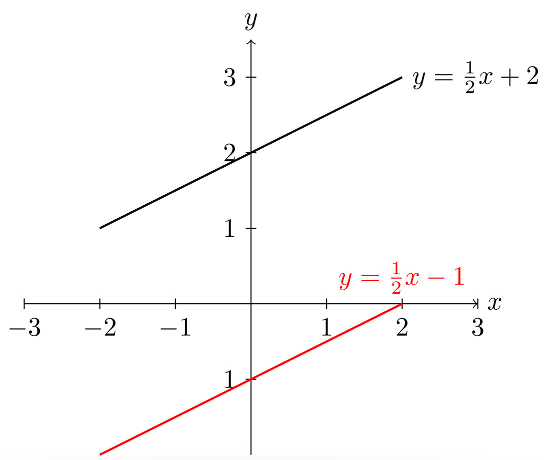
1.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$$



2.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

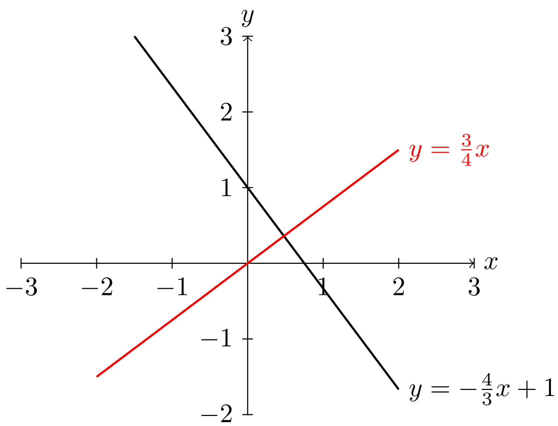


Rectas perpendiculares Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse entre sí forman ángulos iguales de $90°$. Una consecuencia de esto es que al multiplicar sus pendientes se obtiene -1.

Ejemplos:

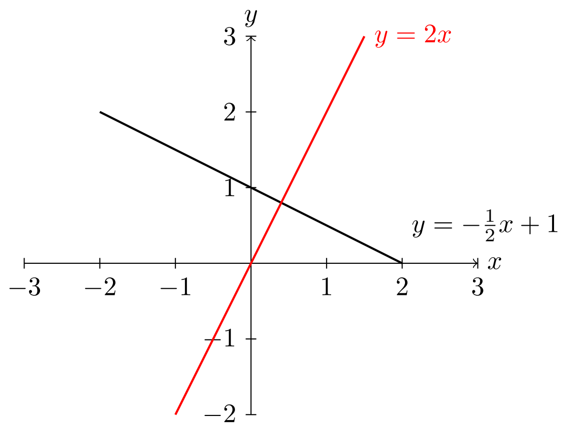
1.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x + 1 \\ y = \dfrac{3}{4}x \end{cases}$$



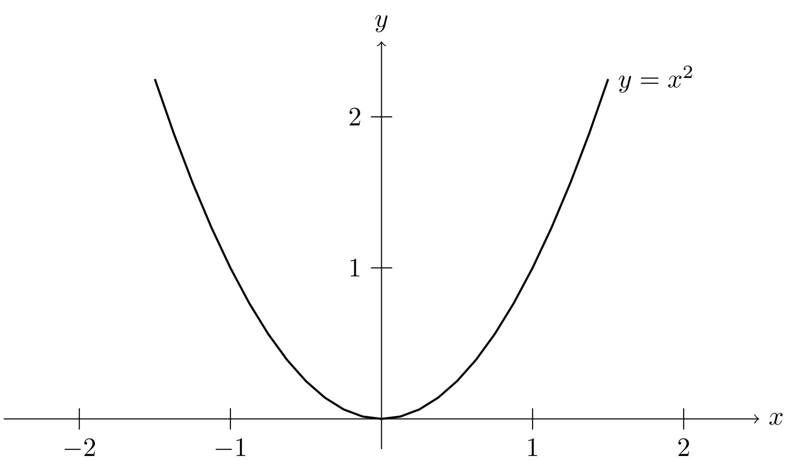
2.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y = 2x \end{cases}$$



Parábola

La parábola es una curva con la siguiente forma:



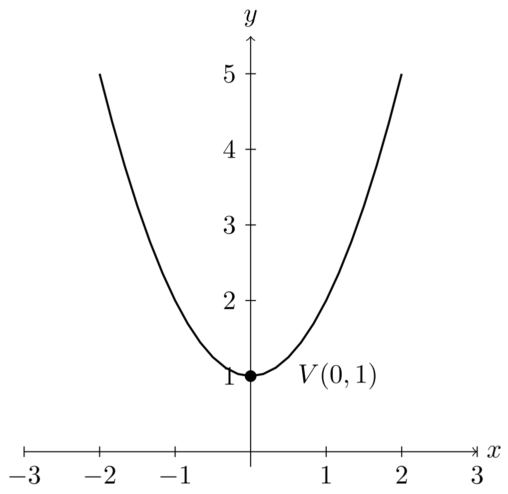
Esta gráfica esta dada por la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$. La gráfica que tenemos arriba representa una parabola de ecuación $y = x^2$, $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$.

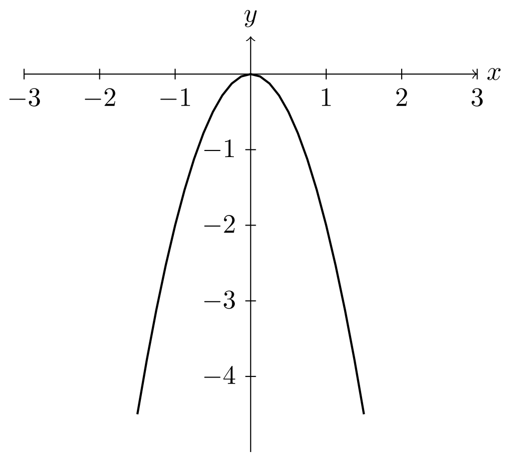
Veamos algunos ejemplos para analizar como cambian las gráficas a medida que variamos las constantes.

Si le agregamos la constante $c = 1$, entonces $y = x^2 + 1$



Observa que para $x = 0 \to y = 1$. Este punto $V(0, 1)$ se llama **vértice** de la parábola, a partir de este se abre para arriba. En el ejemplo anterior el vértice era el punto $(0, 0)$.

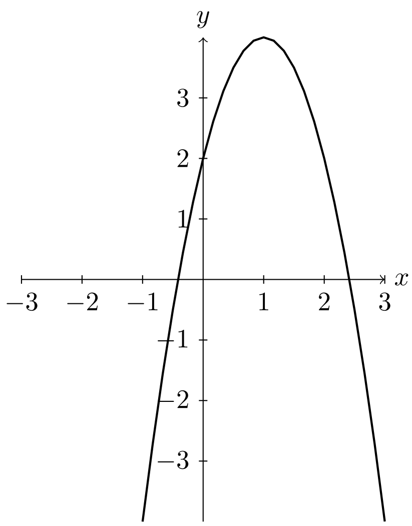
Y si $a \neq 1$, por ejemplo $a = -2$, la gráfica de $y = -2x^2$ será:



Determinación del vértice: Completar cuadrados

¿Qué sucede cuando la ecuación de la parábola tiene el término $b \neq 0$?
Veamos el siguiente ejemplo, cuya ecuación es

$$y = -2x^2 + 4x + 2$$



Algo para resaltar es que el vértice ya no se encuentra sobre el eje y. Para poder determinar dónde está el vértice se completa cuadrados. A continuación te mostramos cuál es el procedimiento con un ejemplo:

Sea

$$y = 4x^2 + 4x + 1$$

Primero observamos si el oeficiente a es que corresponde al término cuadrático es igual a 1. Si no, se saca factor común este coeficiente, el de x^2, en los términos lineal y cuadrático

$$y = 4(x^2 + x) - 1$$

Se suma y se resta dentro del paréntesis el número que se obtiene al dividir el coeficiente de x en 2 y el resultado elevado al cuadrado: $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, es decir:

$$y = 4\left[x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 1$$

Si observamos con atención, los tres primeros términos dentro de los corchetes son un *trinomio cuadrado perfecto*. Lo expresamos como el cuadrado de un binomio:

$$y = 4\left[x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 1$$

$$y = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 1$$

Para finalizar distribuimos el factor común y acomodamos:

$$y = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 1$$

$$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} - 1$$

$$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - 1$$

$$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$$

La ecuación queda con la forma

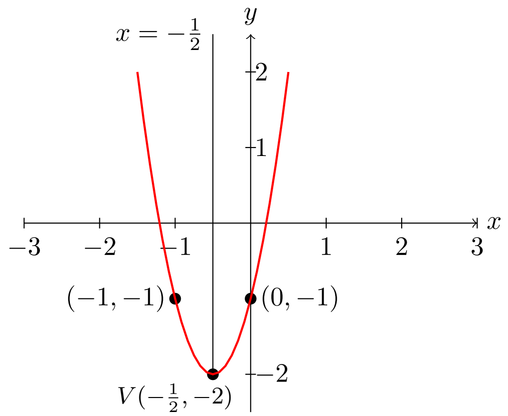
$$y = a(x-h)^2 + k$$

donde (h,k) es el **vértice de la parábola**.
Esta forma de escribir la parábola, donde podemos ver fácilmente el vértice de la misma, recibe el nombre de **forma canónica**.

También algo para notar en todas las parábolas que presentamos es que si trazamos mentalmente una recta vertical que pasa por el vértice, hay simetría. A esta recta vertical la llamamos **eje de simetría**. En el caso de los primeros ejemplos el eje de simetría era el eje y, para el ejemplo anterior el eje de simetría es la recta vertical $x = -\frac{1}{2}$ y el vértice es el punto $(-\frac{1}{2}, -2)$.

¿Qué quiere decir que son simétricas respecto a un eje? Quiere decir que a abscisas equidistantes del eje de simetría , les corresponde la misma ordenada.

Ejemplo: Para $x = 0$ y $x = -1$ el valor de la ordenada es -1, ambos abscisas se encuentran a $\frac{1}{2}$ de la recta de simetría.



Ejercicio: ¿Puedes completar cuadrado para encontrar la forma canónica de estas parábolas y graficarlas?

1. $y = 2x^2 + 3x + 1$
2. $y = -6x^2 + 3x + 2$

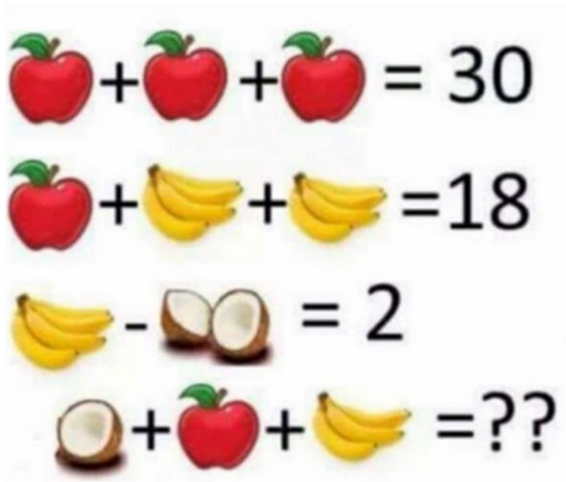
Resumen

Hagamos un resumen de las características más notables de este tipo de curvas:

- Su ecuación general es: $y = ax^2 + bx + c$
- Completando cuadrados se puede obtener en su forma **canónica**, la cual es: $y = a(x-h)^2 + k$
- El signo de a nos indica si se abre hacia el lado positivo o negativo del eje y.
- De la forma canónica podemos obtener el vértice a simple vista, siendo este $V(h,k)$.
- De la misma también podemos identificar la recta a la cual será simétrica, siendo $x = h$.

Ecuaciones

Esta unidad estudiaremos las ecuaciones, qué describen y cómo resolverlas. Ellas permiten describir situaciones problemáticas y, resolviéndolas llegamos al resultado. Seguro que en algún momento que estuviste navegando por Facebook encontraste una imagen como ésta:



Esta imagen demuestra un ejemplo de un sistema de ecuaciones. Una **ecuación** es una **igualdad** en la que intervienen **variables y constantes.**

Observa las primeras dos expresiones, las variables serían las manzanas y las bananas, las constantes serían los números 30 y 18.

Una ecuación está compuesta por **dos miembros** conectados por un signo igual. La idea en una ecuación es encontrar los valores que cumplen con esa igualdad. Esos valores se denominan **raíces de la ecuación** y constituyen el conjunto solución.

Veamos un ejemplo de como resolver una ecuación. Para ello reemplazaremos las manzanas por x. Resolvamos la primera ecuación:

$$x + x + x = 30 \rightarrow 3 \cdot x = 30$$

Si multiplico ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{3}$ la igualdad no se altera (uso la propiedad uniforme vista en la unidad 1 de Números Reales)

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x = 30 \cdot \frac{1}{3}$$
$$x = 10$$

La solución para esta ecuación es $x = 10$. Verificamos que es así reemplazando la x por 10 en la primera ecuación:

$$3 \cdot 10 = 30 \quad \text{se cumple la igualdad}$$

Entonces:
¿qué significa resolver una ecuación? Resolver una ecuación significa **encontrar el conjunto solución que verifique la igualdad.** Para ello debes efectuar operaciones a ambos miembros hasta llevar a la ecuación a su mínima expresión.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes en los siguientes casos:

- Si se suma en ambos miembros de una ecuación una expresión, se obtiene una ecuación equivalente.

  Ejemplo:

  $$x+3=15$$
  $$5+(x+3)=5+15$$
  $$x+8=20$$ es una ecuación equivalente a la primera

- Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un número distinto de cero se obtiene otra ecuación equivalente

  Ejemplo:

  $$x+3=15$$
  $$2\cdot(x+3)=2\cdot 15$$
  $$2\cdot x+6=30$$ es una ecuación equivalente a la primera

¡Cuidado! Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por una expresión que contiene variables, es posible no obtener ecuaciones equivalentes, ya que pueden introducirse raíces extrañas que verifiquen la nueva ecuación y no la de partida.

Ejemplo:

$3\cdot x=6$ es mi ecuación de partida cuya solución es: $x=2$

Si la multiplico por x se obtiene:

$$3\cdot x^2=6\cdot x$$
$$3\cdot x^3-6\cdot x=0$$
$3\cdot x\cdot(x-2)=0$ obtengo dos soluciones posibles: 2 y 0

Es decir, hemos introducido una nueva solución **que no verifica la ecuación de partida**.

Conjunto solución: contiene las soluciones de la ecuación. Se lo simbolizará como $S=\{a,b,...,n\}$, donde $a,b,...,n$ son las soluciones posibles de la ecuación.

Ecuación lineal o de primer grado con una incógnita

Una ecuación lineal o de primer grado tiene la siguiente forma:

$$a\cdot x+b=0$$

donde a y b son constantes y $a\neq 0$. La solución a esta es única y es $x=-\frac{b}{a}$. Es decir, el conjunto solución es $S=\{-\frac{b}{a}\}$.

Pero, ¿cómo llegamos a que esa es la solución? En el siguiente proceso te lo recordamos:

La ecuación de primer orden es:	$a\cdot x+b=0$
Sumo ambos miembros por el opuesto de b	$-b+a\cdot x+b=0-b$
pero $-b+b=0$ entonces:	$a\cdot x=-b$
Multiplico miembro a miembro por el recíproco de a	$\frac{1}{a}\cdot a\cdot x=-b\cdot\frac{1}{a}$
como $\frac{1}{a}\cdot a=1$ entonces:	$x=-\frac{b}{a}$

El conjunto solución es $S=\{-\frac{b}{a}\}$

Ejemplos:

1.

$$3 \cdot x + 5 = 0$$
$$3 \cdot x = -5$$
$$x = -\frac{5}{3}$$

Conjunto solución $S = \{-\frac{5}{3}\}$

2.

$$5 \cdot x = 15$$
$$x \cdot = \frac{15}{5}$$
$$x = 3$$

Conjunto solución $S = \{3\}$

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

1. $x + 2 = 5$
2. $3 \cdot x + 9 = 0$
3. $\sqrt{3} \cdot x + 6 = 8$
4. $\frac{9}{5} + 4 \cdot x = 0$

Ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado con una incógnita

Una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita tiene la siguiente forma:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$. a se llama término cuadrático, b término lineal y c término independiente.

Para determinar las raíces de esta ecuación usamos la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Otra forma de encontrar el conjunto solución es factoreando la expresión, ya que:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación. Siendo el conjunto solución: $S = \{x_1, x_2\}$

¡Cuidado! El conjunto S puede tener dos elementos (en cuyo caso $x_1 \neq x_2$), uno solo (en cuyo caso $x_1 = x_2$) o ninguno. Ya analizaremos cada una de estas posibilidades.

Ejemplo: Vamos a encontrar el conjunto solución de la siguiente ecuación utilizando la formula planteada.

$$3 \cdot x^2 + x - 14 = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son:

$$a = 3 \quad b = 1 \quad \text{y} \quad c = -14$$

entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14)}}{2 \cdot 3}$$

Haremos unos cálculos auxiliares. Dentro de la raíz la expresión es:

$$1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14) = 1 - 12 \cdot (-14) = 1 + 168 = 169$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 3}$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 13}{6}$$

Obtenemos dos raíces distintas x_1 y x_2:

$$x_1 = \frac{-1+13}{6} \qquad x_2 = \frac{-1-13}{6}$$

$$x_1 = \frac{12}{6} = 2 \qquad x_2 = \frac{-1-13}{6} = -\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Por lo tanto el conjunto solución es:

$$S = \left\{2; \frac{7}{3}\right\}$$

Entonces la forma factoreada de la ecuación anterior es:

$$3 \cdot x^2 + x - 14 = 3 \cdot (x-2) \cdot (x - \frac{7}{3}) = 0$$

Soluciones de la ecuación cuadrática: Cuando se tiene un término de grado 2, la ecuación puede tener a lo sumo dos soluciones reales. Si llamamos **discriminante**, y lo denotamos por Δ, a $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, tenemos tres casos:

1. Si $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

2. Si $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales iguales:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

3. Si $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales, ya que no esta definida la raíz cuadrada de números negativos en los reales.

Recuerda que cuando no sepas como factorear una expresión cuadrática esta manera de sacar los ceros puede ser útil.

Ejercicio 2: Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas y escríbelas en su forma factoreada. ¿Cuántas soluciones reales tienen? Escribe el conjunto solución.

1. $4x^2 + 5x - 6 = 0$
2. $4x^2 - 4x = -1$
3. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 17 = 0$
4. $-2x^2 - 4x + 3 = 0$

Ecuaciones reducibles a ecuaciones de primer y segundo grado

En esta sección estudiaremos las ecuaciones racionales, logarítmicas y exponenciales que puedan reducirse a una ecuación de primer y segundo grado.

Ecuaciones racionales

En las ecuaciones racionales la variable se encuentra en el denominador. Es importante que las soluciones de esta ecuación no anulen el denominador, es decir, que cuando reemplacemos el denominador se haga igual a cero, ya que la división por cero no existe.

Veamos con un ejemplo cómo se resuelven estas ecuaciones:

Sea la siguiente ecuación:

$$\frac{4x-3}{x-2} = \frac{2x-6}{x-3}$$

Observemos primero qué valores anulan al denominador. Las expresiones del denominador son $x-2$ y $x-3$, es decir que x no puede ser igual a 2 pues $2-2=0$, y tampoco igual a 3 pues $3-3=0$. Existen dos formas de resolver esta ecuación, veamos primero la más corta:

1. Observamos el segundo miembro, que $2x-6$ puede factorearse como $2\cdot(x-3)$ ya que 2 es factor común. La ecuación queda:

   $$\frac{4x-3}{x-2} = \frac{2(x-3)}{x-3}$$

   Por lo tanto tengo $x-3$ en el numerador y en el denominador, puedo simplificar:

   $$\frac{4x-3}{x-2} = 2\frac{(x-3)}{(x-3)}$$
   $$\frac{4x-3}{x-2} = 2$$

   Multiplico ambos miembros por $(x-2)$ obteniendo:

   $$4x-3 = 2\cdot(x-2)$$

   Reacomodando:

   $$\begin{aligned} 4x-3 &= 2x-4 \\ 4x-2x &= -4+3 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   El conjunto solucíń es $S=\{-\frac{1}{2}\}$

2. Otra opción es utilizar la regla de proporciones: el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Entonces quedaría expresado:

$$(4x-3)\cdot(x-3)=(2x-6)\cdot(x-2)$$

Aplicando la propiedad distributiva y reacomodando obtendremos una ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}4x\cdot x-12x-3x+9&=2x\cdot x-4x-6x+12\\4x^2-15x+9&=2x^2-10x+12\\4x^2-2x^2-12x+10x+9-12&=0\\2x^2-2x-3&=0\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática planteada obtenemos las siguientes soluciones:

$$x_1=-\frac{1}{2}\quad \text{y}\quad x_2=3$$

Pero 3 no puede ser una solución de la ecuación de partida ya que es un valor que anula el denominador. Por lo tanto, el conjunto solución es $S=\{-\frac{1}{2}\}$

Para finalizar verifica que la ecuación esté bien resuelta reemplazando en la **ecuación de partida** los valores del conjunto solución. Si se cumple la igualdad entonces el valor es correcto, de lo contrario, debes revisar lo realizado ya que cometiste un error de cálculo.

Ejercicio 3: Resuelve las siguientes ecuaciones

1. $(3x-1)=\dfrac{3x^2}{x+1}$
2. $\dfrac{x+4}{6x+24}=\dfrac{3x}{x+1}$

Ecuaciones irracionales

Son aquellas en las que las variables están dentro de una raíz.

Ejemplo:

$$x=1+\sqrt{7-x}$$

Este se resuelve de la siguiente manera:

Se deja en un miembro solo la raíz, es decir:

$$x-1=\sqrt{7-x}$$

y se eleva ambos miembros al cuadrado. Es posible que al realizar esto se introduzcan raíces que no son soluciones de la ecuación original. Realizando esto se obtiene:

$$(x-1)^2=7-x$$

Desarrollándola:

$$\begin{aligned}x^2-2x+1&=7-x\\x^2-2x+x+1-7&=0\\x^2-x-6&=0\end{aligned}$$

Resolviendo con la fórmula de las raíces de una ecuación cuadrática:

$$x_1=3\quad x_2=-2$$

Obtenemos dos resultados posibles, por ello es importante verificar en la ecuación de partida. Verifico primero con $x_1 = 3$:

$$¿x_1 - \sqrt{7 - x_1} = 1?$$

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{7-3} &= \\ 3 - \sqrt{4} &= \\ 3 - 2 &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_1 = 3$ es solución.
Si $x_2 = -2$, ¿qué pasa?

$$¿x_2 - \sqrt{7 - x_2} = 1?$$

$$\begin{aligned} -2 - \sqrt{7-(-2)} &= \\ -2 - \sqrt{7+2} &= \\ 2 - \sqrt{9} &= \\ 2 - 3 &= -1 \neq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_2 = -2$ no es una solución.

Ejercicio 4: ¿Puedes resolver las siguientes ecuaciones?

1. $\sqrt{x+5} + 7 = x$
2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x+4} + 1 = 0$

Ecuaciones logarítmicas

Son aquellas aquellas que la incógnita aparece en el argumento y/o en la base del logaritmo.
Ejemplo:

$$\log_{1-x}(1 - 3x - x^2) = 2$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$(1-x)^2 = 1 - 3x - x^2$$

Solo resta desarrollar el cuadrado del binomio y reacomodar:

$$\begin{aligned} 1 - 2x + x^2 &= 1 - 3x - x^2 \\ 1 - 1 - 2x + 3x + x^2 + x^2 &= 0 \\ x + 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

La expresión tiene como factor común x, entonces si factoreamos:

$$x \cdot (1 + 2x) = 0$$

Existen dos soluciones para que la expresión sea cero, $x = 0$ o $1 + 2x = 0$

$$\begin{aligned} 1 + 2x &= 0 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ahora verificamos si los valores encontrados verifican la ecuación:

Si $x = 0 \to \log_{1-0}\left(1 - 3 \cdot 0 - 0^2\right)$

$\log_1(1)$ pero la base no puede ser 1

Por lo tanto $x = 0$ no pertenece al conjunto solución.

Si $x = -\frac{1}{2} \to \log_{1-(-\frac{1}{2})}\left(1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$$\log_{(1+\frac{1}{2})}\left(1 + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$\log_{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = 2 \to \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{-\frac{1}{2}\}$

Ejercicio 5: Resolver los siguientes, recuerda utilizar propiedades de logaritmo.

1. $\log_2\left(x^2 - 3x + 2\right) - \log_2(x - 1) = 2$
2. $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$

Ecuaciones exponenciales

Son aquellas ecuaciones en las cuales las variables aparecen involucradas en los exponentes.

Ejemplo 1:

$$e^{-5x} \cdot e^{3x} = e^4$$

Si aplicamos la propiedad de potenciación: $e^{-5x+3x} = e^4$

$$e^{-2x} = e^4$$

El resultado se obtiene igualando los exponentes: $-2x = 4$

$$x = -\frac{4}{2} = -2$$

Verificamos:

$$e^{-5\cdot(-2)} \cdot e^{3\cdot(-2)} =$$

$$e^{10} \cdot e^{-6} =$$

$$e^{(10-6)} = e^4$$

Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{-2\}$

Ejemplo 2:

$$4^{-x} \cdot 4^{3x} = 5$$

En este caso volvemos a aplicar la misma propiedad: $4^{-x+3x} =$

$$4^{2x} = 5$$

Pero para resolver aplicamos logaritmo decimal en ambos miembros: $\log 4^{2x} = \log 5$

Aplicando la propiedad de logaritmo: $2x \cdot \log 4 = \log 5$

Trabajando un poco con la expresión: $2x = \dfrac{\log 5}{\log 4}$

Por la propiedad de cambio de base: $\dfrac{\log 5}{\log 4} = \log_4 5$

Entonces: $2x = \log_4 5$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \log_4 5$$

Ahora verificaremos para asegurarnos de que el resultado es correcto:

$$4^{-\frac{1}{2} \cdot \log_4 5} \cdot 4^{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_4 5}$$

Por propiedad de potencia puedo sumar los exponentes:

$$-\frac{1}{2} \cdot \log_4 5 + \frac{3}{2} \cdot \log_4 5 = \log_4 5$$

Obteniendo:

$$4^{\log_4 5} = 5$$

Por lo tanto se verifica la ecuación, el conjunto solución es $S = \{\frac{1}{2} \cdot \log_4 5\}$

Ejercicio 6: Resuelve las siguientes ecuaciones

1. $2^{(x^2-3x)} = 16$
2. $9^{(x-1)} - 3^x = \frac{2}{3}$

Sistema de dos ecuaciones lineales o de 1° grado en dos variables

Una ecuación lineal en dos variables es una expresión de la forma:

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se esxpresa como:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$$

¿A qué se parece esto? Es muy parecido a la imagen del principio del capítulo. Si observamos la imagen, la ecuación de las bananas y manzanas son un sistema de ecuaciones. Si cambiamos las manzanas por x y las bananas por y en las primeras dos ecuaciones el sistema queda:

$$\begin{cases} x + x + x = 30 \\ x + y + y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 30 \quad \Rightarrow x = 10 \\ x + 2y = 18 \end{cases}$$

Reemplazando en la segunda ecuación se obtiene cuanto vale y

$$\begin{aligned} 2y &= 18 - x \\ 2y &= 18 - 10 \\ 2y &= 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

El conjunto solución estará compuesto por los valores que verifican el sistema. Si el sistema no tiene solución se dice que es un sistema **incompatible** y si tiene solución es **compatible**.

Tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones

Existen tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones, por **sustitución, reducción** e **igualación**. A continuación te mostramos cómo resolver un sistema con éstos tres métodos con un ejemplo numérico:

- **Método de sustitución** Consiste en despejar una variable de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación, por ejemplo, sea el siguiente sistema

$$\begin{cases} 4 + x = 2y & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Despejamos la variable y en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} (1): \quad 2y &= 4 + x \\ y &= \frac{4+x}{2} \\ y &= \frac{4}{2} + \frac{1}{2}x \\ y &= 2 + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Una vez que tenemos despejada una variable, la reemplazamos en la otra ecuación, es decir en (2):

$$\begin{aligned} 2x - (2 + \frac{1}{2}x) &= 1 \\ 2x - 2 - \frac{1}{2}x &= 1 \\ (2 - \frac{1}{2})x - 2 &= 1 \\ \frac{4-1}{2}x &= 1 + 2 \\ \frac{3}{2}x &= 3 \\ x &= 3 \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Así obtenemos el valor de x, pero esto no termina aquí. Para terminar de resolver debemos reemplazar en la ecuación anterior a x para encontrar el valor de y:

$$\begin{aligned} y &= 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ y &= 2 + 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Para finalizar debes verificar que esto se cumpla en cada ecuación. Si lo hace, el conjunto solución es: $S = \{(2,3)\}$.

- **Método de reducción** Consiste en sumar o restar una ecuación con la otra, de manera que eliminemos una variable. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2y + x = 6 \quad (1) \\ 5y + x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Restemos a (1) la ecuación (2):

$$\begin{aligned} (2-5)y + (1-1)x &= 6 - 1 \\ -3y + 0x &= 5 \\ -3y &= 5 \\ y &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Y ahora reemplazamos en (1) p (2) para obtener x, por ejemplo en (1):

$$\begin{aligned} 2\left(-\frac{5}{3}\right) + x &= 6 \\ -\frac{10}{3} + x &= 6 \\ x &= 6 + \frac{10}{3} \\ x &= \frac{18+10}{3} \\ x &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Para finalizar debes verificar que esto se cumpla en cada ecuación. Como lo hace, el conjunto solución es: $S = \{(\frac{28}{3}, -\frac{5}{3})\}$.

- **Método de igualación** Éste consiste en despejar una variable en ambas ecuaciones y luego igualarlas. Por ejemplo despejemos x del sistema anterior:

$$\begin{aligned} (1) : 2y + x =& 6 \\ x =& 6 - 2y \\ (2) : 5y + x =& 1 \\ x =& 1 - 5y \end{aligned}$$

Una vez que tenemos despejada la variable, vamos a igualar ambas expresiones y buscar el valor de y:

$$\begin{aligned} 6 - 2y =& 1 - 5y \\ -2y + 5y =& 1 - 6 \\ 3y =& -5 \\ y =& -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Luego reemplazamos en una de las dos ecuaciones para obtener el valor de x, esto debe dar como resultado $x = \frac{28}{3}$. Observa que para un mismo sistema, utilizando dos métodos distintos, obtenemos el mismo resultado.

Ejercicio 7: Resuelve los siguientes sistemas con los distintos métodos vistos

1.
$$\begin{cases} x - y = 5 \quad (1) \\ x + 2y = -1 \quad (2) \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x - y = -2 \quad (1) \\ 3x - 5y = 4 \quad (2) \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \quad (1) \\ \frac{5}{2}x + 2y = 4 \quad (2) \end{cases}$$

Resolución de problemas usando sistemas de ecuaciones

Algunos problemas de la vida real pueden ser planteados mediante sistemas de ecuaciones y fácilmente resueltos. Te vamos a mostrar cómo con el siguiente problema resuelto:

En una juguetería venden bicicletas y triciclos. Juan y Javier observan las que están en el salón de ventas. En un momento Juan dice: " Hay 60 ruedas en total", a lo que Javier le contesta:"Si, es verdad. También hay más triciclos que bicicletas ya que la cantidad de triciclos es igual a la cantidad de bicicletas más 5". Respecto a lo que comentan estos chicos, ¿puedes deducir la cantidad de bicicletas y de triciclos que hay en el salón de la juguetería?

Para comenzar a plantear el sistema primero determinemos las variables, que son la **cantidad de bicicletas y triciclos**. La cantidad de bicicletas será representada por la letra B y la cantidad de triciclos por la letra T.

Cantidad de bicicletas: B

Cantidad de triciclos: T

Ahora veamos la relación entre las variables. La primera afirmación que hace Juan es que **hay 60 ruedas en total**. Sabemos que las bicicletas tienen 2 ruedas, por lo que la cantidad de ruedas que aportan es $2 \cdot B$. Y los triciclos tienen 3 ruedas, por lo tanto la cantidad de ruedas que aportan los triciclos será $3 \cdot T$. La suma de estas cantidades será la cantidad de ruedas totales, y así obtenemos la primera ecuación del sistema:

$$2B + 3T = 60$$

Javier realiza una segunda afirmación importante, dice **hay 5 triciclos más que bicicletas**, es decir que la cantidad de triciclos tiene 5 unidades más. Obteniendo la segunda ecuación del sistema:

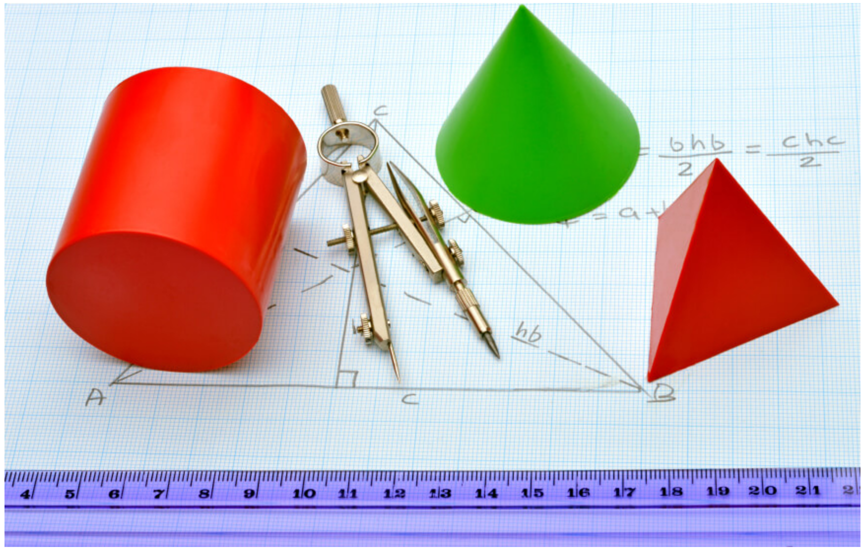
$$T = B + 5$$

Teniendo dos incógnitas y dos ecuaciones podemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2B + 3T = 60 \\ B + 5 = T \end{cases}$$

Queda como ejercicio para ustedes utilizar alguno de los métodos vistos anteriormente para obtener la cantidad de bicicletas y triciclos.

Geometría



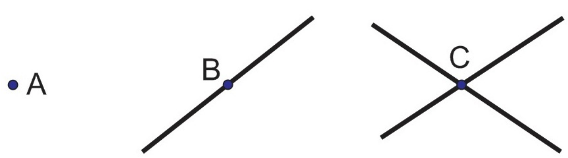
Nociones básicas

La Geometría es la rama de las matemáticas que estudia la extensión, la forma de medirla, las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos y figuras, y la manera cómo se miden.
En la práctica, la geometría sirve para solucionar problemas concretos en el mundo de lo visible. Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimaciones sobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio.

Elementos básicos

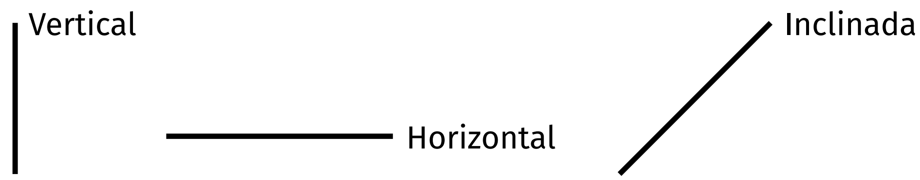
La Geometría tiene tres elementos básicos: el **punto**, la **recta** y el **plano.**

Punto:
Se representa gráficamente por un pequeño círculo y una letra mayúscula que lo identifica. La siguiente figura muestra tres puntos: A, B y C.



Recta:
Se entiende como un conjunto infinito de puntos que se extienden indefinidamente en sentidos opuestos. Una recta se puede identificar por una letra minúscula. La figura siguiente muestra la recta AB que pasa por los puntos A y B. La recta de la figura también está identificada como la recta r.

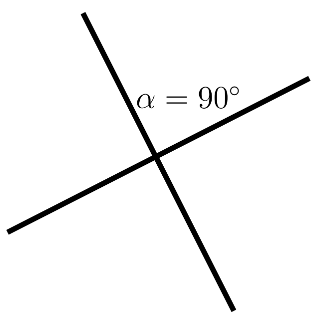
Según su dirección una recta puede ser **Horizontal**, **Vertical** o **Inclinada**.



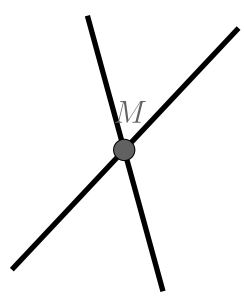
Según su posición relativa, dos rectas pueden ser **Secantes (Perpendiculares u Oblícuas)**, **Paralelas** o **Coincidentes**.

- Secantes: si y solo sí tienen un punto en común. También decimos “se intersectan” o “se cortan” en un punto.

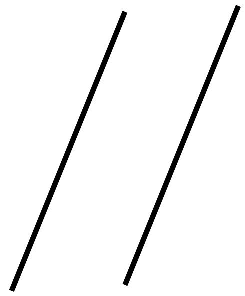
Dos rectas secantes son Perpendiculares, si y sólo si forman entre sí un ángulo recto.



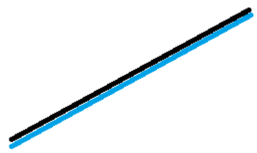
Dos rectas secantes son Oblícuas si no son perpendiculares.



- Paralelas: si no tienen ningún punto en común.



- Coincidentes: si tienen todos sus puntos en común.



Semirrecta: la definimos como la porción de una recta que tiene principio pero no tiene fin.

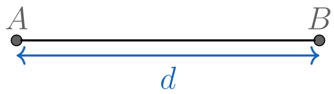
Segmento de recta: es una porción de la recta con principio y con fin, es decir sabemos dónde empieza y donde termina, podemos medirlo.

Plano:
Un plano es una superficie totalmente plana que se extiende indefinidamente. Una mesa de vidrio o la cubierta de un escritorio da la idea de un plano. Un plano se representa geométricamente por una figura de cuatro lados y una letra mayúscula. La siguiente figura representa al plano P.

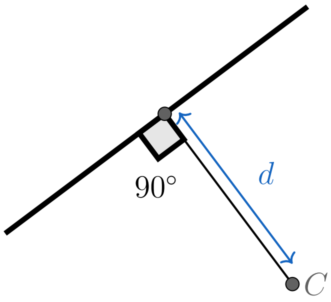
Distancia

Un concepto importante es el de distancia entre dos objetos.

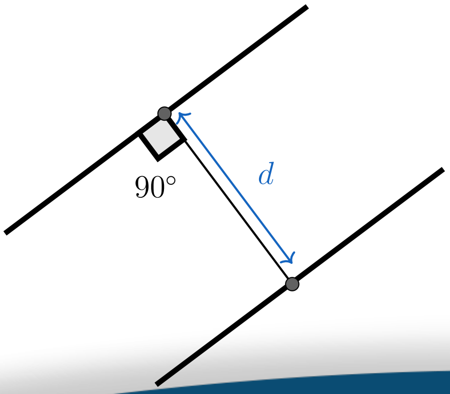
Distancia entre dos puntos: es la longitud del segmento de recta entre dos puntos.



Entre un punto y una recta: es la longitud del segmento de recta perpendicular trazado desde el punto a la recta.

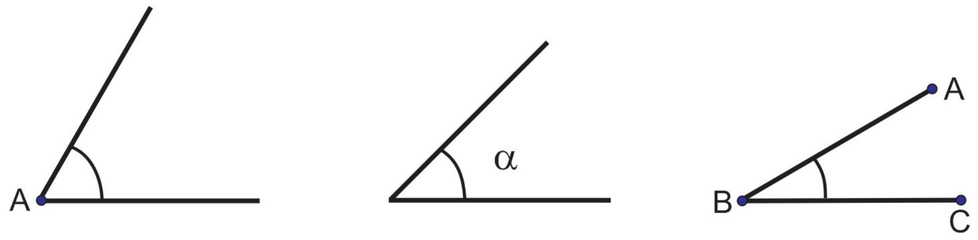


Entre dos rectas paralelas: es la longitud del segmento perpendicular a ellas que las une.



Ángulos

Ángulo se define como la parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice del ángulo. La **notación** de un ángulo se designa una letra mayúscula situada en el vértice: $\hat{A}$, una letra griega: $\hat{\alpha}$, o con tres letras mayúsculas (la letra que corresponde al vértice se coloca entre las otras dos): $A\hat{B}C$.



Sistemas de medición de ángulos

Para poder cuantificar cuanto mide de amplitud de un ángulo se utiliza un sistema de medición. Los más utilizados son el **Sistema Sexagesimal** y el **Sistema Radial**.

Sistema sexagesimal

La unidad de medida de ángulos del sistema sexagesimal es el **grado** ($^\circ$), que representa la subdivisión en 90 partes iguales de un ángulo recto.
Sus subunidades son el **minuto** (′) y **segundo** (″). Cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto se divide en 60 segundos.

En la siguiente tabla se observa las equivalencias:

Grado sexagesimal	$1^\circ = \frac{ang.Recto}{90}$
Minuto sexagesimal	$1' = \frac{1^\circ}{60}$
Segundo sexagesimal	$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$

Operaciones con ángulos en el sistema sexagesimal

Suma de ángulos
- Se colocan en columnas los grados, los minutos y los segundos.
- Se suman las columnas por separado.

- Luego se realizan las transformaciones correspondientes (recordar que tanto en los minutos como segundos puedo tener un máximo de 59, si hay 60 o más hay que transformar; cada sesenta corresponde 1 del orden inmediato superior.

Resta de ángulos

- Se colocan en columnas los grados, los minutos y los segundos.
- Se restan los segundos. Caso de que no sea posible, se transforma un minuto del minuendo en 60 segundos y se lo sumamos a los segundos del minuendo. A continuación restamos los segundos.
- Se hace lo mismo con los minutos.

Producto por un número natural

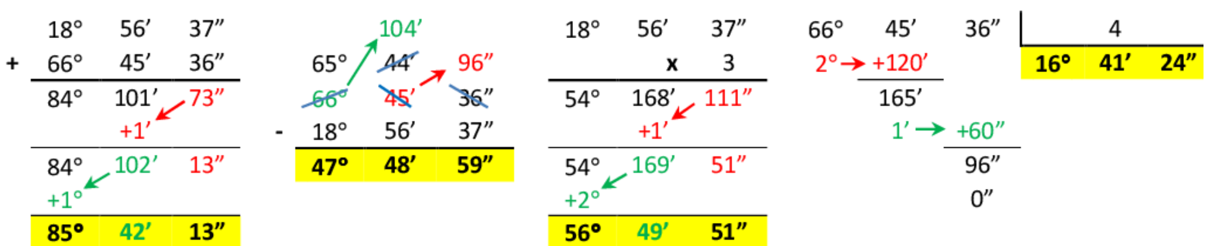
- Se colocan en columnas los grados, los minutos y los segundos.
- Se multiplica cada columna por el número natural.
- Luego se realizan las transformaciones correspondientes, como en la suma (recordar que tanto en los minutos como segundos puedo tener un máximo de 59, si hay 60 o más hay que transformar; cada sesenta corresponde 1 del orden inmediato superior).

Cociente por un número natural

- Se colocan en columnas los grados, los minutos y los segundos.
- Se dividen los grados entre el numero natural. En caso que quede resto, se lo transforma en minutos y se suman a los minutos existentes
- Se hace lo mismo con los minutos.

Ejemplo: Sean los ángulos $\alpha = 18°56'37''$ y $\beta = 66°45'36''$. Calcular:

a) $\alpha + \beta$ b) $\beta - \alpha$ c) 3α d) $\beta/4$

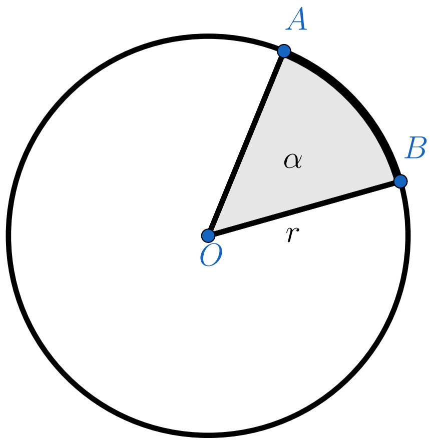


Ejercicio: Sean los ángulos $\alpha = 25°31'57''$ y $\beta = 13°38'3''$. Te animas a calcular:

a) $\alpha + \beta$ b) $\alpha - \beta$ c) 2α d) $\beta/3$

Sistema radial

La unidad de este sistema es el **radián**, y se define de la siguiente manera: Dada una circunferencia de radio r, se define **un radián** como la amplitud del ángulo subtendido por un arco igual al radio de la circunferencia. Es decir, que la longitud del arco es igual al radio de la circunferencia.



Longitud del arco AB=r
$\hat{\alpha} = 1$

Longitud de arco: Si para un ángulo de 1 radián la longitud del arco es igual al radio, entonces para un ángulo central ϕ la longitud del arco será: $s = r \cdot \phi$. Esto nos da la pauta que el radián es un número real.

Ejemplo: Determina la longitud del arco de una circunferencia de radio de 4 cm, sabiendo que está subtendido por un ángulo de $\phi = \pi/6$

$$s = r \cdot \phi = 4cm \cdot \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\pi}{6} cm = \frac{2\pi}{3} cm$$

Ejercicio: Determina el ángulo que subtiende un arco de una circunferencia de $3\pi cm$ de longitud y de radio de 6 cm.

Operaciones con ángulos en el sistema radial

Como ya vimos, los radianes son números reales, por lo que consecuentemente: la **Suma**, la **Resta**, el **Producto por un número natural** y el **Cociente por un número natural** de ellos se deben realizar como tales.

Ejemplo: Sean los ángulos $\alpha = 3\pi/4$ y $\beta = 5\pi/3$. Calcular:

a) $\alpha + \beta$ b) $\beta - \alpha$ c) 2α d) $\beta/3$

$$
\begin{aligned}
\alpha+\beta &= \frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{3}=\frac{9\pi+20\pi}{12}=\frac{29\pi}{12}\\
\beta-\alpha &= \frac{5\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}=\frac{20\pi-9\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}\\
2\alpha &= 2\cdot\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\\
\frac{\beta}{3} &= \frac{\frac{5\pi}{3}}{3}=\frac{5\pi}{9}
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Sean los ángulos $\alpha = 5\pi/6$ y $\beta = 2\pi/3$. Te animas a calcular:

a) $\alpha+\beta$ b) $\alpha-\beta$ c) 3α d) $\beta/2$

Equivalencia entre el sistema radial y el sexagesimal

Para pasar de radianes a grados sexagesimales, o viceversa, hay que recordar la relación para un ángulo que describe una circunferencia completa expresado en grados y radianes, como:

$$360^\circ \longrightarrow 2\pi$$

O la relación para un ángulo que describe una semicircunsferencia expresado en grados y radianes, como:

$$180^\circ \longrightarrow \pi$$

Por lo tanto, con una simple regla de tres simple”podemos transformar grados en radianes y viceversa.

$$
\begin{aligned}
180^\circ &\longrightarrow \pi\\
90^\circ &\longrightarrow \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: ¿Cuántos radianes equivalen 60°?

$$
\begin{aligned}
180^\circ &\longrightarrow \pi\\
60^\circ &\longrightarrow x\\
x = \frac{60^\circ\cdot\pi}{180^\circ} &= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

También podemos determinar en sentido inverso, ¿cuántos grados equivalen $\frac{\pi}{4}$ radianes?

$$\pi \longrightarrow 180^\circ$$
$$\frac{\pi}{4} \longrightarrow x$$
$$x = \frac{\frac{\pi}{4}\cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

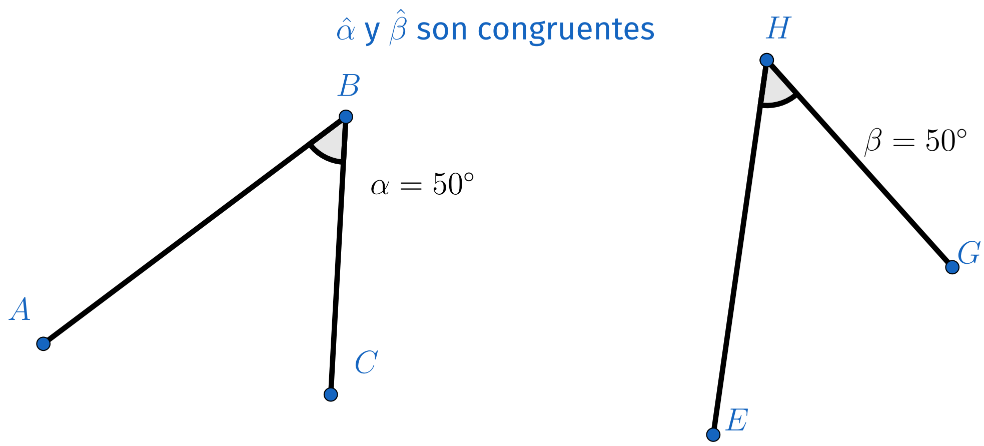
Ejercicio: Convierte los siguientes números al sistema sexagesimal o radial según corresponda

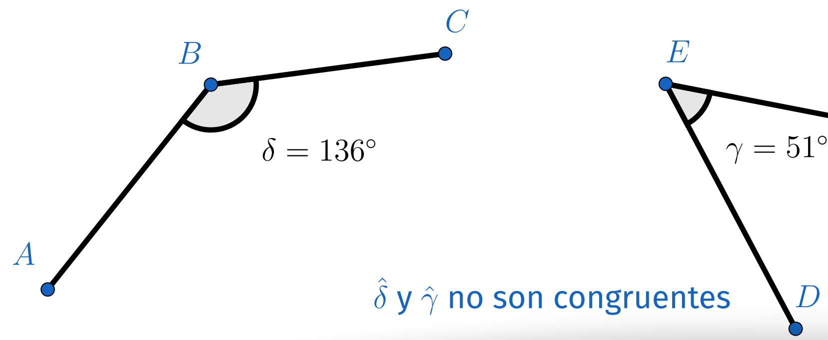
a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) 150° d) 35°

Congruencia:

Si dos ángulos se pueden superponer se dice que son congruentes, es decir, que tienen la misma amplitud, la misma medida, sin importar su posición u orientación.

Ejemplos:

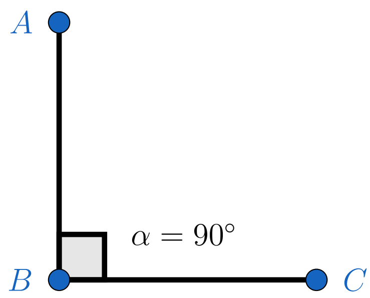




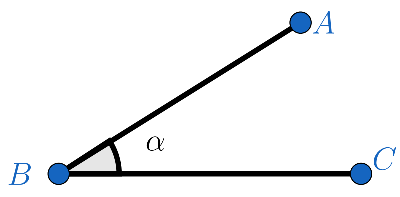
Clasificación de ángulos

Los ángulos se clasifican de la siguiente manera:

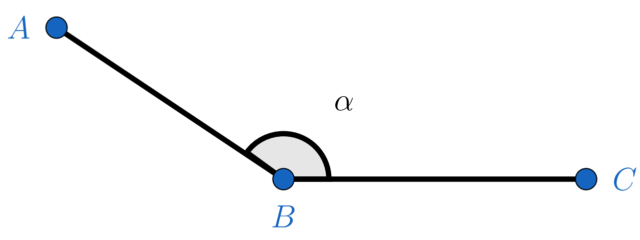
Ángulo recto: Cuando dos rectas se cortan y dividen el plano en cuatro zonas iguales, cuyos ángulos son congruentes. Cada uno de ellos es un ángulo recto. En el sistema sexagesimal mide $90°$ y en el sistema radial mide $\pi/2$.



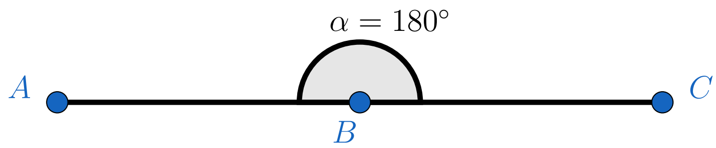
Ángulo agudo: Un ángulo es agudo si su amplitud es menor que la de un ángulo recto.
En el sistema sexagesimal miden entre $0°$ y $90°$ y en el sistema radial miden entre 0 y $\pi/2$.



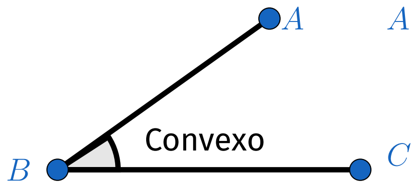
Ángulo obtuso: Un ángulo es obtuso si su amplitud es mayor que la de un ángulo recto.
En el sistema sexagesimal miden entre $90°$ y $180°$ y en el sistema radial miden entre $\pi/2$ y π.

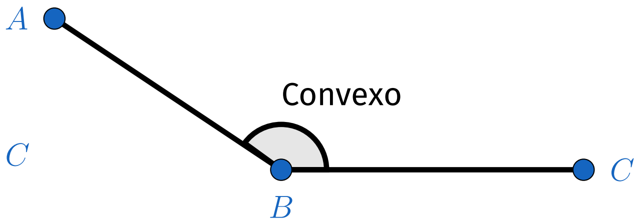


Ángulo llano: Un ángulo es llano cuando los lados del mismo son colineales, es decir que tienen la misma dirección.
En el sistema sexagesimal mide $180°$ y en el sistema radial mide π.

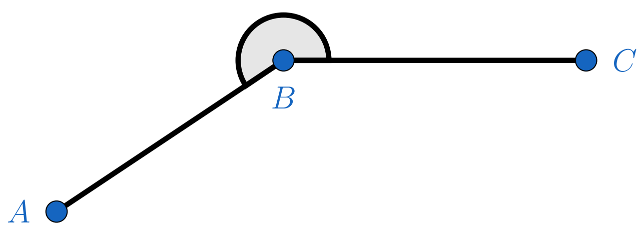


Ángulo convexo: Un ángulo es convexo si su amplitud es mayor a la de un ángulo nulo y menor que la de un ángulo llano.
Observación: los ángulos agudos y obtusos son ángulos convexos.
Ejemplos:





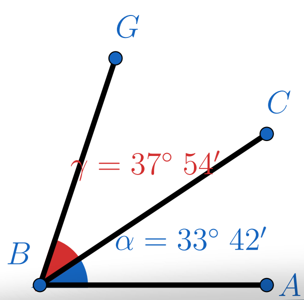
Ángulo cóncavo: Un ángulo es cóncavo si su amplitud es mayor que la de un ángulo llano.
Ejemplo:



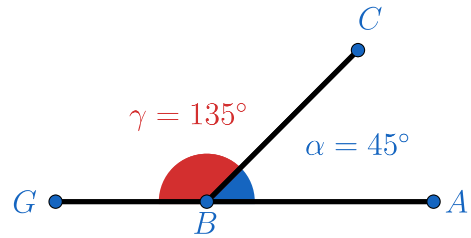
Relaciones entre pares de ángulos

Sean α y β dos ángulos.

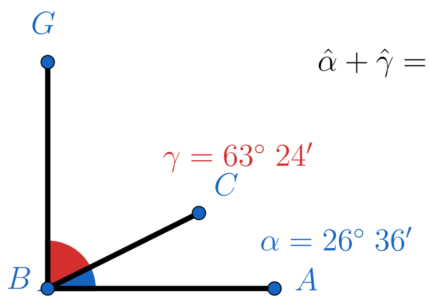
Ángulos consecutivos: Son los ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común.



Ángulos adyacentes: Son ángulos consecutivos con sus lados no comunes sobre una misma recta.

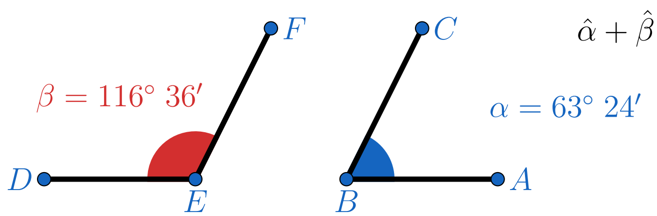


Ángulos complementarios: Dos ángulos son complementarios si la suma de sus amplitudes es igual a un ángulo recto.



$$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 26°\ 36' + 63°\ 24' = 90°$$

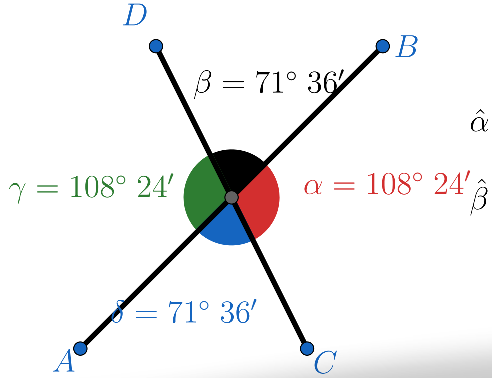
Ángulos suplementarios: Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus amplitudes es igual a un áangulo llano.



$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 63°\ 24' + 116°\ 36' = 180°$$

.

Ángulos opuestos por el vértice: Dadas dos rectas que se intersectan en un punto O, quedan determinados cuatro ángulos α, β, γ y δ convexos. Se puede probar que α y γ son congruentes y β y δ también. Estos pares se dicen que son **opuestos por el vértice.**

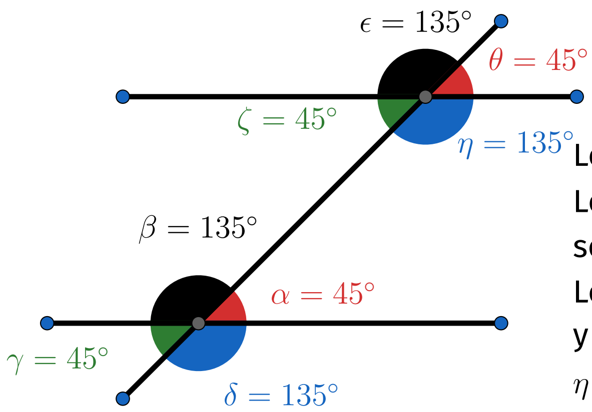


$\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ son opuestos por el vértice

$\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$ son opuestos por el vértice

Otra característica a notar es que α y δ son ángulos adyacentes y suplementarios, ya que $\hat{\alpha} + \hat{\delta} = 180°$. Lo mismo ocurre con β y γ, son suplementarios y adyacentes.

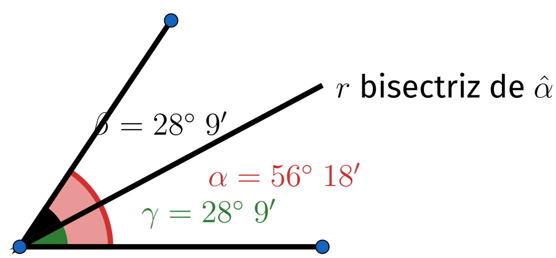
Ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal no perpendicular: Cuando ocurre este caso ocho ángulos son determinados, cuatro agudos y cuatro obtusos, como se observa en la imagen.



Los pares ϵ, δ y θ, γ son **alternos externos**
Los pares α, ζ y β, η son **alternos internos** son también congruentes.
Los pares α y θ son **correspondientes** y congruentes.
η y α son **conjugados** y suplementarios

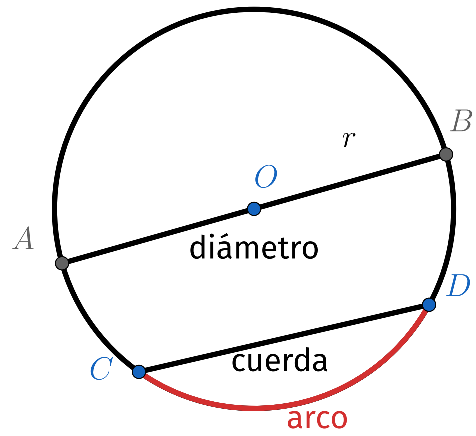
Tomando como ejemplo el par α y θ que son correspondientes y el par α y η que son conjugados, ¿puedes indicar que otros pares son correspondiente y cuales son conjugados?

Bisectriz de un ángulo: Es la semirecta que tiene origen en el vértice del ángulo y lo divide al mismo en dos ángulos congruentes.



Circunferencia

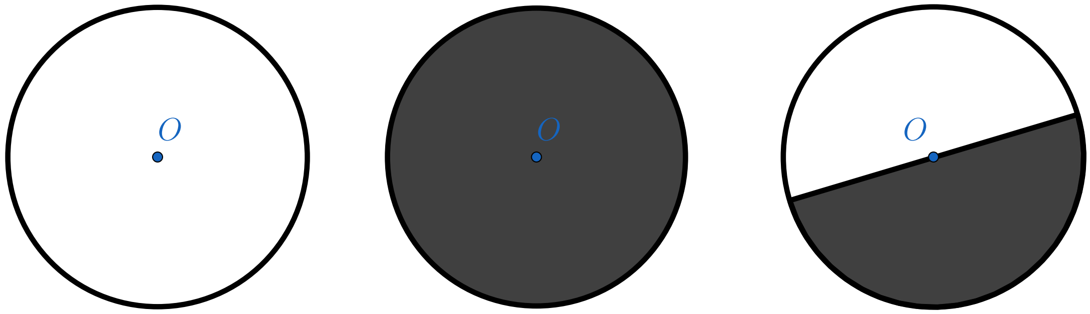
La circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo O, llamado **centro de la circunferencia**. Su gráfica corresponde a la siguiente figura:



- r es el **radio**, la distancia desde el centro a cualquier punto de la circunferencia
- $D = 2r$ es el **diámetro**, es la longitud del segmento que une dos puntos A, B y pasa por el centro O
- La **cuerda** es un segmento que une a dos puntos C y D de la circunferencia.
- El **arco** es una porción de la circunferencia entre dos puntos de la misma.

Diferencias entre circunferencia, círculo y semicírculo

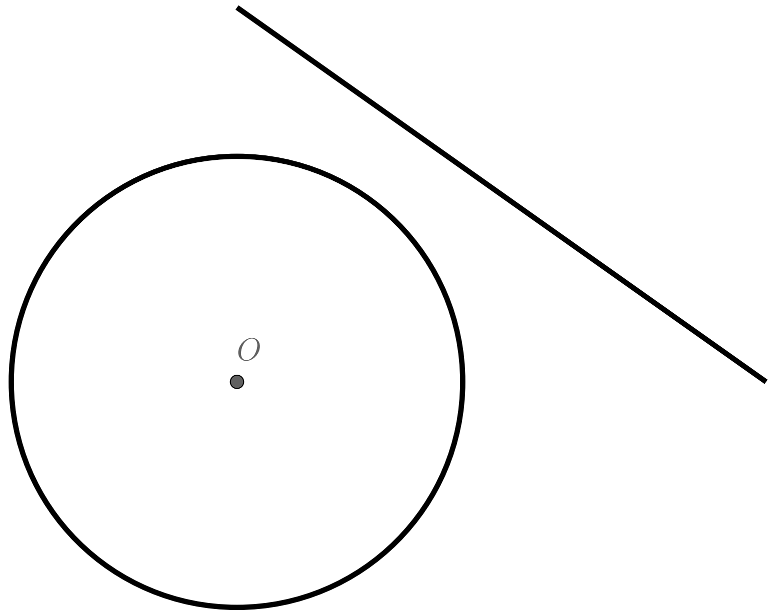
En la vida diaria muchos usan el término círculo o circunferencia indistintamente. Aquí vamos a explicar en que se diferencian.
Circunferencia como dijimos son los puntos que equidistan a un centro, es decir es la **línea llena**, los puntos del interior no pertenecen a la circunferencia.
En cambio, un **círculo** es el conjunto de puntos de la circunferencia y el área que encierra.
Semicírculo es la mitad del círculo.
Para entender mejor mira imagen:



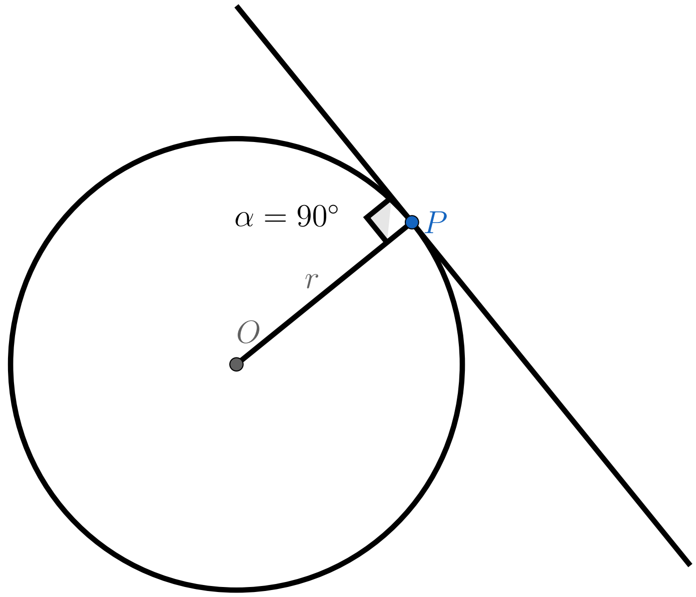
Circunferencia Círculo Semicírculo

Relación entre una recta y la circunferencia

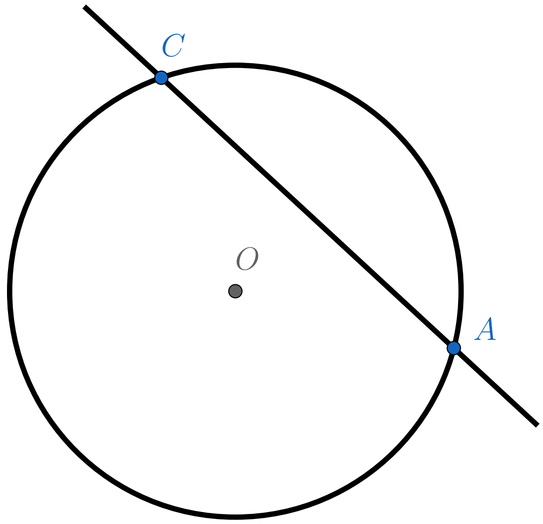
Existen tres casos. Veamos cada uno de ellos.
La recta puede ser **exterior** a la circunferencia, es decir, no se intersectan, no tienen ningún punto en común, gráficamente:



Puede ser **tangente** a la circunferencia cuando tienen únicamente un punto P(x,y) en común. También esta recta es perpendicular al radio:



Por último, la recta puede cortar a la circunferencia en dos puntos, se llama recta **secante**:

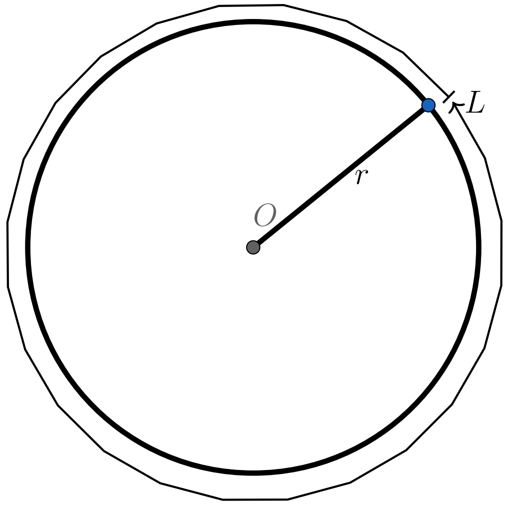


Longitud de la circunferencia

También llamado **perímetro**, es lo que mide la circunferencia. Es decir, si nos paramos en un punto de ella y la medimos hasta llegar al mismo punto.
Se calcula como:

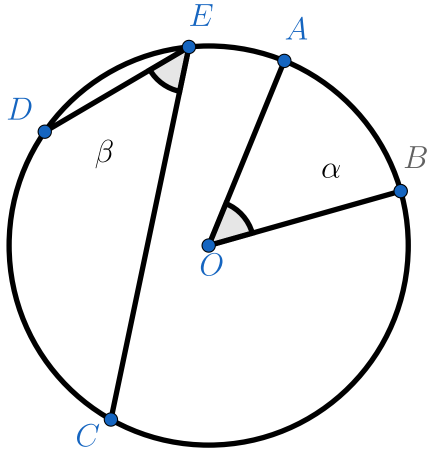
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

siendo r el radio.
O, lo que es lo mismo: $L = \pi \cdot D$, donde D es el diámetro.
Gráficamente:



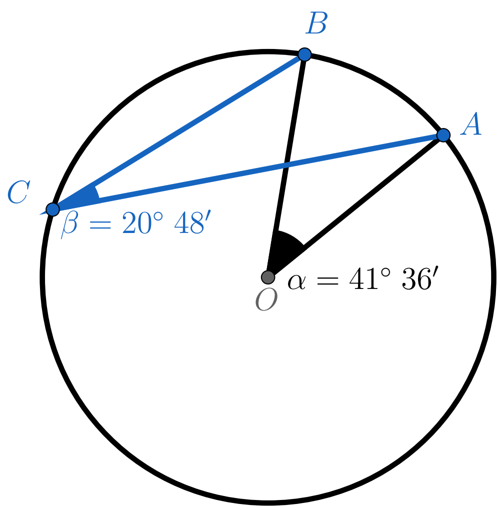
Ángulos dentro de una circunferencia

Podemos definir los siguientes ángulos:



α se llama **ángulo central**, tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son secantes a ella.
β se llama **ángulo inscripto** y su vértice se ubica en un punto de la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

Propiedad:
Existe una relación entre el ángulo central y el inscripto: si β es un **ángulo inscripto** en una circunferencia, y α es el **ángulo central**, que subtienden el mismo arco, es decir que **sus lados cortan a los mismos puntos de la circunferencia**, entonces $\beta = \frac{\alpha}{2}$.
Gráficamente:



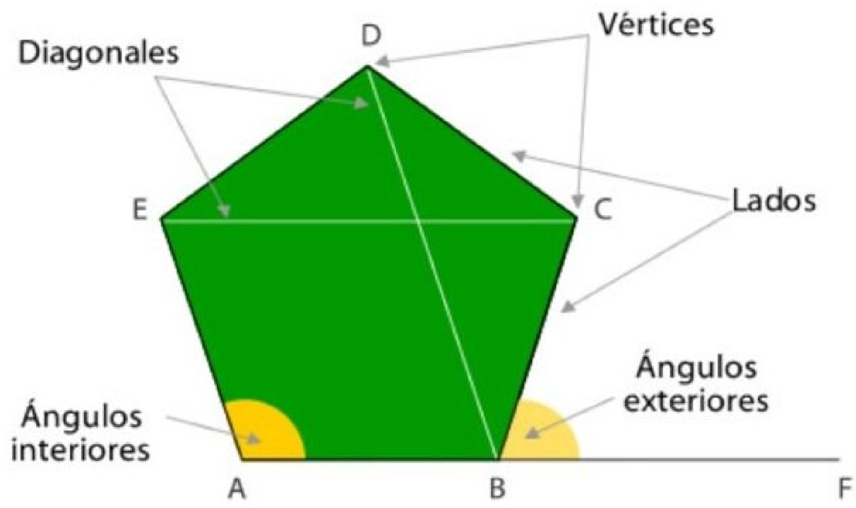
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

Observa que en el caso del ejemplo se cumple que $\beta = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{41°\ 36'}{2} = 20°\ 48'$

Observación:
Ahora que sabemos un poco más de propiedades de ángulos y circunferencia podemos comprender mejor la definición de radián.

Polígonos

Un polígono es una figura geométrica plana compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que encierran una región en el plano.



Elementos de un Polígono

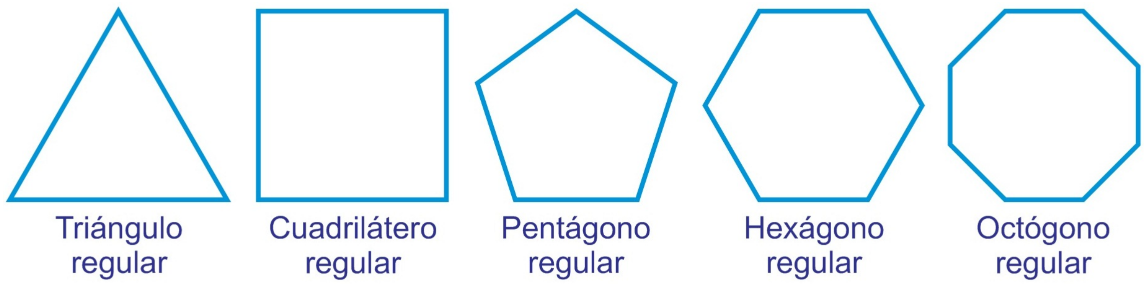
En un polígono se distinguen los siguientes elementos geométricos:
Lados del polígono: son cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
Vértices de un polígono: son los puntos de intersección o puntos de unión entre lados consecutivos.
Diagonales del polígono: son segmentos que une dos vértices, no consecutivos, del polígono.
Ángulo interior del polígono: es el ángulo formado, internamente al polígono, por dos lados consecutivos.
Ángulo exterior del polígono: es el ángulo formado, externamente al polígono, por uno de sus lados y la prolongación del lado consecutivo.

Clasificación de los Polígonos

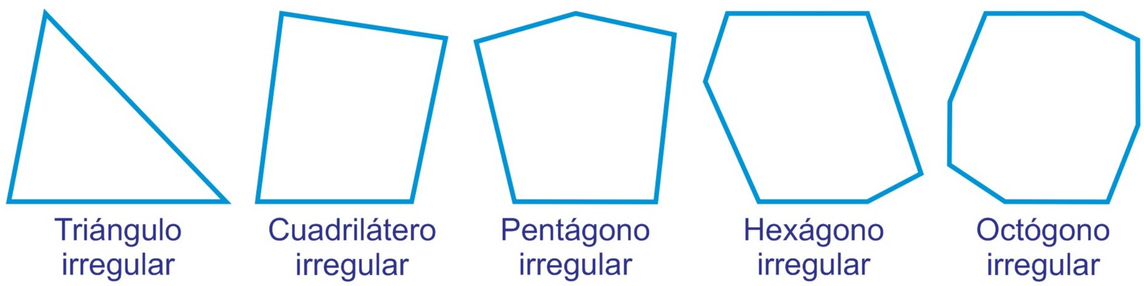
Los polígonos se pueden clasificar:

Según el número de lados o ángulos: Triángulo (3), Cuadrilátero (4), Pentágono (5), Hexágono (6), Heptágono (7). Octógono (8), Nonágono (9), Decágono (10), etc.

Según la igualdad de sus lados y ángulos:
- Polígono Regular: es un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí.



- Polígono Irregular: es un polígono con al menos un lado o un ángulo interior distinto a los otros.



Perímetro y Área de un Polígono

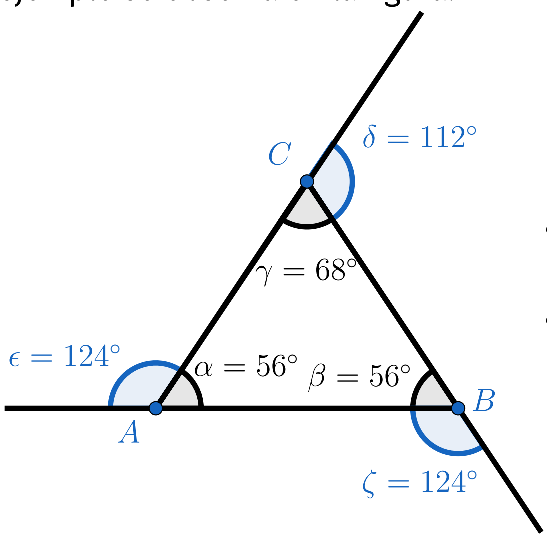
El **Perímetro** de una figura es la línea o conjunto de líneas que forman el contorno de una figura. Si queremos saber cuanto mide el perímetro, debemos sumar las longitudes de estas líneas.

La superficie de una figura es el conjunto de puntos que encierra su contorno. El **Área** de la figura es la cantidad de superficie que encierra sus límites. Es decir, el área es el valor numérico que mide cuánta superficie.

Estos términos son muy utilizados en la vida cotidiana. Por ejemplo cuando se quiere comprar un terreno para construir una casa o sembrar. El área sería la medida de todo el terreno, mientras que el perímetro la longitud del borde del terreno.

Triángulos

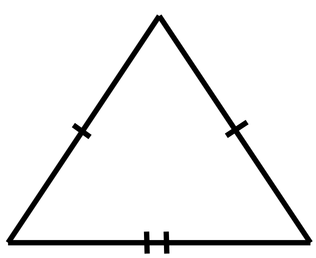
Un triángulo es un polígono que tiene tres lados. Los puntos en común a dos lados se denominan **vértices**.
Tiene tres **ángulos interiores** cuya suma es $180°$.
Tiene tres **ángulos exteriores** cuya suma es $360°$.
Un ejemplo se observa en la figura:



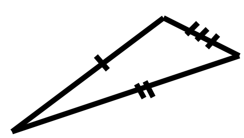
Los ángulos interiores son: α, β y γ
$\alpha + \beta + \gamma = 56° + 56° + 68° = 180°$
Los ángulos exteriores son: δ, ϵ y ζ
$\delta + \epsilon + \zeta = 112° + 124° + 124° = 360°$

Clasificación de triángulos

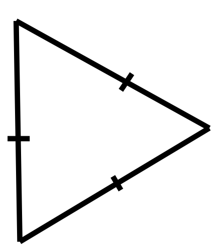
Según la **longitud de sus lados** hay tres tipos de triángulos:



Isósceles: tiene dos lados iguales.

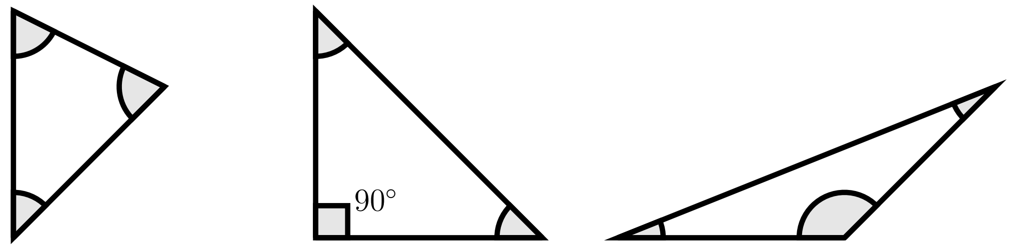


Escaleno: tiene todos sus lados diferentes.



Equilátero: tiene todos sus lados iguales.

Según los **ángulos** pueden ser:



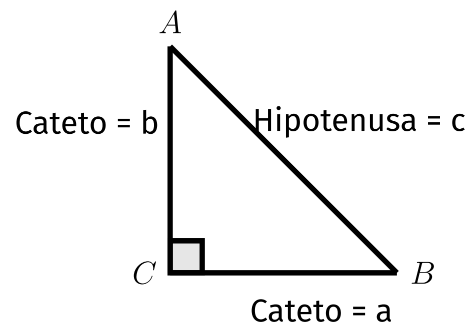
Acutángulo:
Tres ángulos agudos

Rectángulo:
Un ángulo recto

Obtusángulo:
Un ángulo obtuso

Teorema de Pitágoras

En los triángulos rectángulos a los lados se los llama de una manera especial.



Y se relacionan mediante el Teorema de Pitágoras, que dice lo siguiente:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

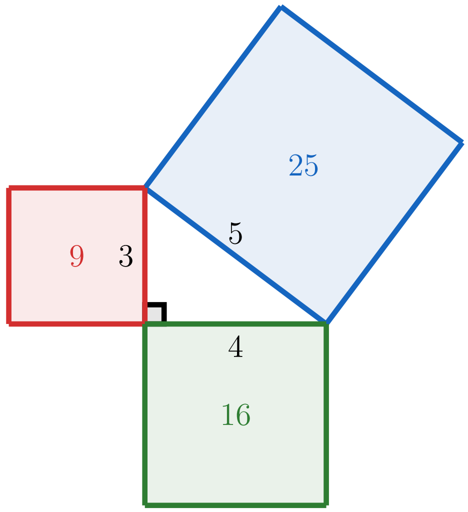
Es decir:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si lo expresamos con los lados del triángulo:

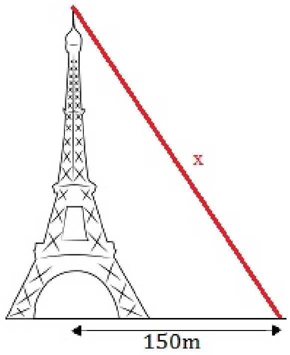
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

Ejemplo gráfico:



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$

Ejemplo:



Mariana está en París visitando la torre Eiffel, observando la cima de la torre a 150m de distancia. Si la torre mide $300m$ de altura, ¿qué distancia hay desde donde está parada Mariana hasta la cima de la torre?

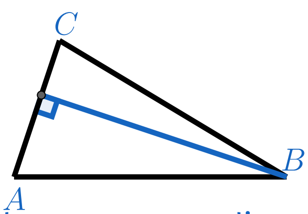
Por Pitágoras:
$$\begin{aligned} x^2 &= 150^2 + 300^2 \\ x^2 &= 22500 + 90000 \\ x &= \sqrt{112500} \\ x &\approx 335,4 \end{aligned}$$

Hay aproximadamente $335,4$ metros desde donde está parada Mariana hasta la cima de la Torre Eiffel.

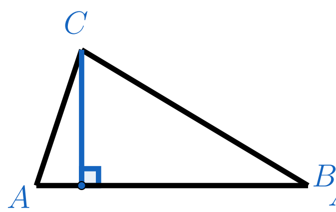
Alturas, Medianas, Mediatrices y Bisectrices de un Triángulo

Altura: La altura correspondiente a un lado, es el segmento perpendicular trazado desde el vértice opuesto a la recta que contiene dicho lado. Como el triángulo tiene 3 lados, consecuentemente tendrá 3 alturas, cada una correspondiente a cada lado.

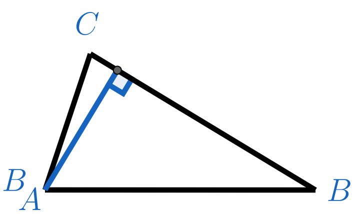
Gráficamente:



Altura correspondiente al lado $\overline{AC}$



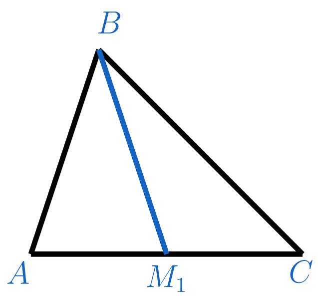
Altura correspondiente al lado $\overline{AB}$



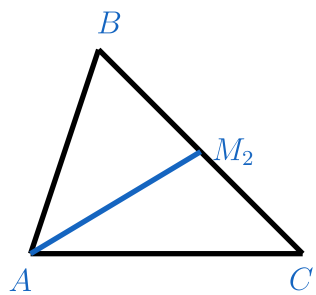
Altura correspondiente al lado $\overline{BC}$

Propiedad: Las rectas que contienen a las alturas de un triángulo se intersectan en un punto, llamado "ortocentro".

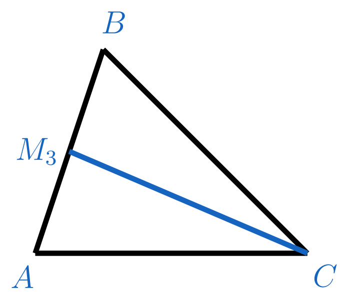
Mediana: La mediana correspondiente a un lado, es el segmento determinado por el vértice opuesto y el punto medio de dicho lado. Como el triángulo tiene 3 lados, consecuentemente tendrá 3 medianas, cada una correspondiente a cada lado.
Gráficamente:



$\overline{AM_1} = \overline{M_1C}$
$\overline{BM_1}$ Mediana correspondiente al lado $\overline{AC}$



$\overline{BM_2} = \overline{M_2C}$
$\overline{AM_2}$ Mediana correspondiente al lado $\overline{BC}$

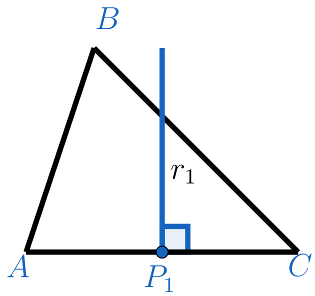


$\overline{AM_3} = \overline{M_3B}$
$\overline{CM_3}$ Mediana correspondiente al lado $\overline{AB}$

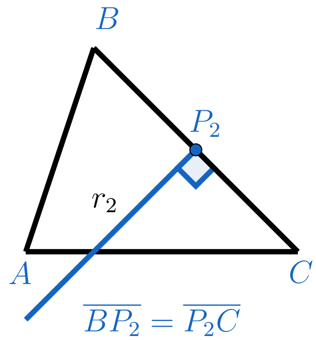
Propiedad: Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto, llamado "baricentro" o "centroide", cuya distancia a cada vértice es igual a $\frac{2}{3}$ de la longitud de cada mediana correspondiente.

Mediatriz: La mediatriz correspondiente a un lado de un triangulo es la recta perpendicular a un lado y que pasa por su punto medio. Como el triángulo tiene 3 lados, consecuentemente tendrá 3 mediatrices, cada una correspondiente a cada lado.

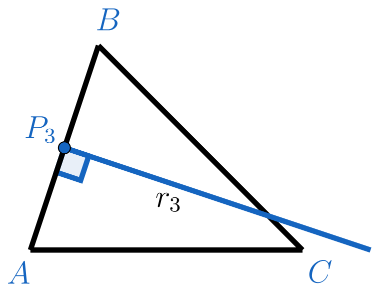
Gráficamente:



$\overline{AP_1} = \overline{P_1C}$
$r_1 \perp \overline{AC}$
r_1 Mediatriz correspondiente al lado $\overline{AC}$



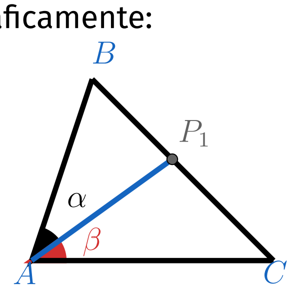
$\overline{BP_2} = \overline{P_2C}$
$r_2 \perp \overline{BC}$
r_2 Mediatriz correspondiente al lado $\overline{BC}$



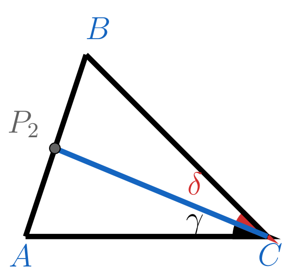
$\overline{AP_3} = \overline{P_3B}$
$r_3 \perp \overline{AB}$
r_3 Mediatriz correspondiente al lado $\overline{AB}$

Propiedad: Las mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto, llamado ”circuncentro”, que equidista de sus vértices.

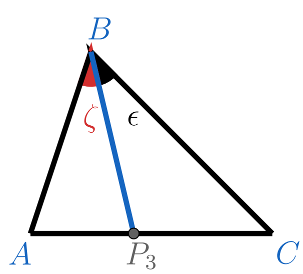
Bisectriz: La bisectriz correspondiente a un ángulo de un triángulo es el segmento que divide al ángulo en dos ángulos congruentes y sus extremos son el vértice de dicho ángulo y el punto de intersección con el lado opuesto. Como el triángulo tiene 3 ángulos, consecuentemente tendrá 3 bisectrices, cada una correspondiente a cada ángulo.
Gráficamente:



$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$
$\overline{AP_1}$ Bisectriz correspondiente al ángulo $\hat{A}$



$\hat{\gamma} = \hat{\delta}$
$\overline{CP_2}$ Bisectriz correspondiente al ángulo $\hat{C}$



$\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$
$\overline{BP_3}$ Bisectriz correspondiente al ángulo $\hat{B}$

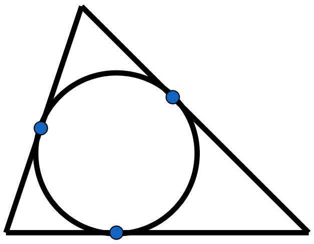
Propiedad: Las bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto, llamado ”incentro”, que equidista de sus lados.

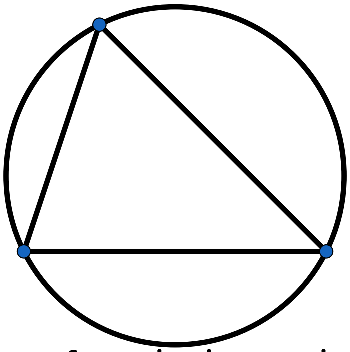
Sabías que hay una recta que contiene al ortocentro, al circuncentro y al baricentro de un triángulo?
Se denomina "Recta de Euler" en honor al matemático suizo, Leonhard Euler, quien demostró la colinealidad de los mencionados puntos notables de un triángulo, en 1765.

Ejercicio: Dibuja un triángulo equilátero y traza las alturas, las medianas, las mediatrices y las bisectrices. ¿Qué puedes concluir?

Triángulo inscripto y circunscripto

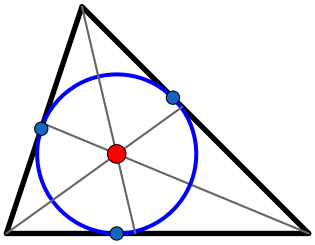
Una circunferencia externa que toca a un triángulo en sus 3 vértices se llama **circunferencia circunscripta al triángulo**.
Una circunferencia interna que toca a un triángulo en sus 3 lados es una **circunferencia inscripta en el triángulo.**


Circunferencia inscripta

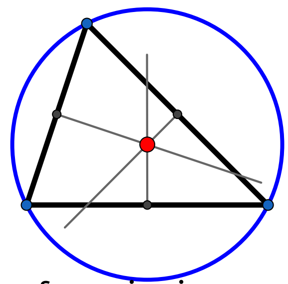

Circunferencia circunscripta

De las propiedades de las bisectrices y mediatrices se puede deducir:

1. Es posible trazar una circunferencia inscripta con centro en **la intersección de las bisectrices** y radio la distancia de ese punto a cada lado. Esta circunferencia es tangente a los lados del triángulo.


Circunferencia inscripta

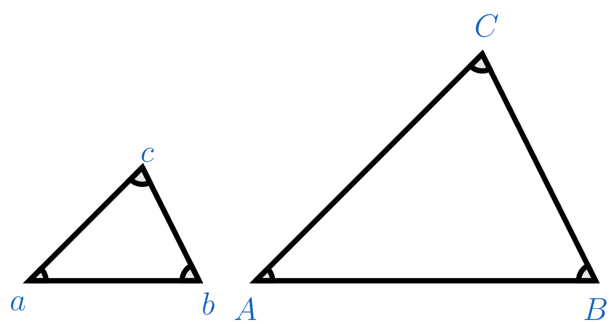
2. Es posible trazar una circunferencia circunscripta al triángulo con centro en **la intersección de las mediatrices** y por radio la distancia desde este punto a cada vértice.



Circunferencia circunscripta

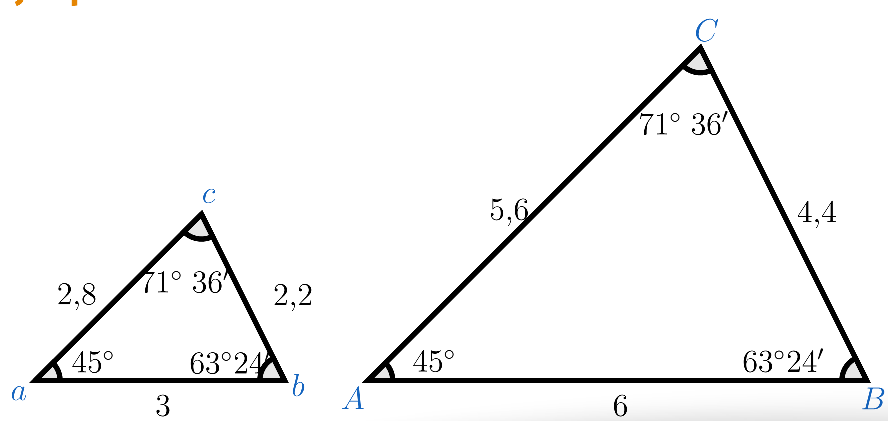
Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si y sólo si los **lados** de uno son **proporcionales** a los lados del otro, y los **ángulos** son **congruentes**.
Se llaman **homólogos** a los lados opuestos a los ángulos congruentes.



$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{CA}} \qquad \textbf{y} \qquad \hat{a} \equiv \hat{A} \quad \hat{b} \equiv \hat{B} \quad \hat{c} \equiv \hat{C}$$

Ejemplo:



Comprobamos que son triángulos semejantes ya que los lados verifican:

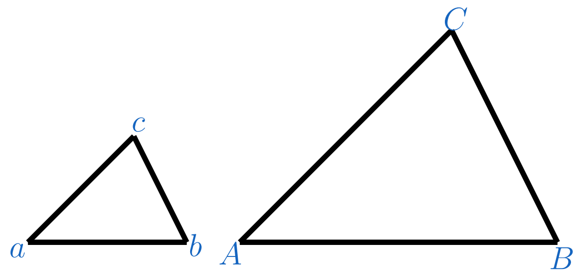
$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\overline{bc}}{\overline{BC}} = \frac{2{,}2}{4{,}4} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\overline{ca}}{\overline{CA}} = \frac{2{,}8}{5{,}6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Y los ángulos son congruentes:

$$\hat{a} \equiv \hat{A} = 45^\circ \quad \hat{b} \equiv \hat{B} = 63^\circ\ 24' \quad \hat{c} \equiv \hat{C} = 71^\circ\ 36'$$

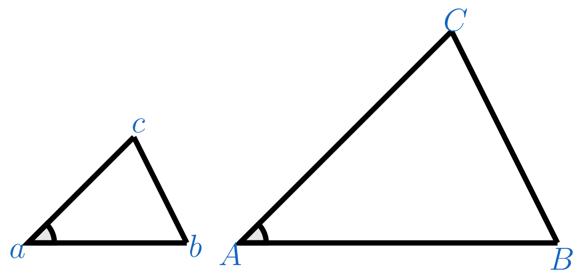
Criterios de semejanza:

1. Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, son semejantes.



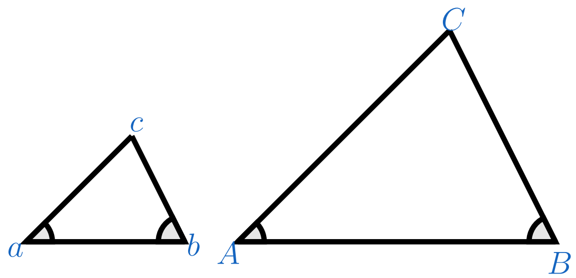
$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{CA}}$$

2. Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido congruente, entonces son semejantes.



$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{AC}} \quad , \quad \hat{a} \equiv \hat{A}$$

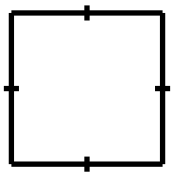
3. Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes, entonces son semejantes



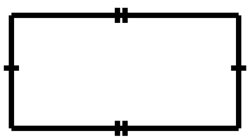
$$\hat{a} \equiv \hat{A} \quad , \quad \hat{b} \equiv \hat{B}$$

Cuadriláteros particulares

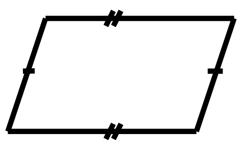
Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. En esta sección te mostramos todas las variantes que puedes encontrar en este curso:



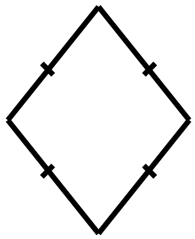
Cuadrado:
Figura con dos pares de lados paralelos.
Cuatro lados congruentes.
Cuatro ángulos congruentes.



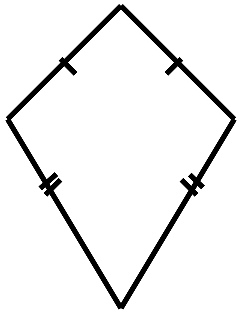
Rectángulo:
Figura con dos pares de lados paralelos.
Dos pares de lados opuestos congruentes.
Cuatro ángulos congruentes.



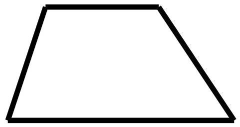
Paralelogramo:
Figura con dos pares de lados paralelos.
Dos pares de lados opuestos congruentes.
Dos pares de ángulos opuestos congruentes.



Rombo:
Figura con dos pares de lados paralelos.
Cuatro lados congruentes.
Dos pares de ángulos opuestos congruentes.

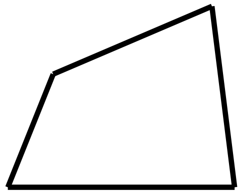


Romboide:
Es una figura con dos pares de lados congruentes.
Un par de ángulos opuestos congruentes.



Trapecio:
Figura con dos lados paralelos.

Trapecio isósceles:
Figura con un par de lados paralelos.
Un par de lados opuestos congruentes.
Dos pares de ángulos adyacentes a las bases congruentes.



Trapezoide:
Figura de cuatro lados donde ninguno es paralelo o congruente.

Ejercicios:

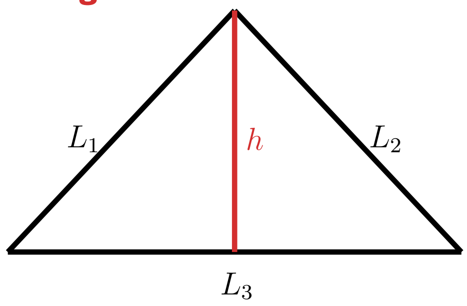
1) ¿Te animas a indicar cual o cuales de los anteriores cuadriláteros son regulares?

2) ¿Puedes indicar en los cuadriláteros particulares, cuales son los ángulos congruentes en cada uno de ellos?

Perímetros y áreas de polígonos particulares

Veamos como calcular los perímetros y áreas de algunas figuras conocidas:

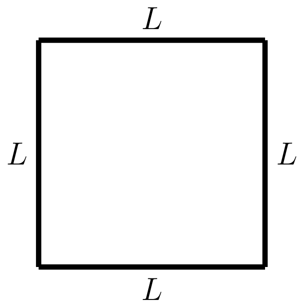
Triángulo



Perímetro: $p = L_1 + L_2 + L_3$

Área: $A = \dfrac{L_3 \cdot h}{2}$

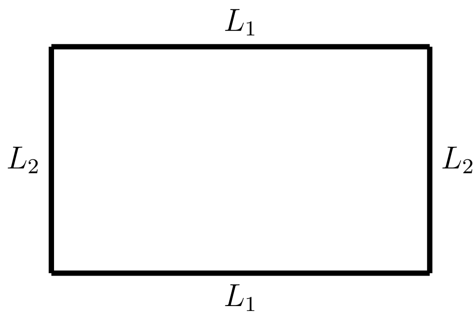
Cuadrado



Perímetro: $p = L + L + L + L = 4 \cdot L$

Área: $A = L \cdot L = L^2$

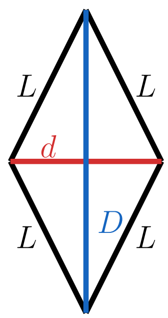
Rectángulo



Perímetro: $p = L_1 + L_1 + L_2 + L_2 = 2 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2$

Área: $A = L_1 \cdot L_2$

Rombo de lado L y diagonales D y d



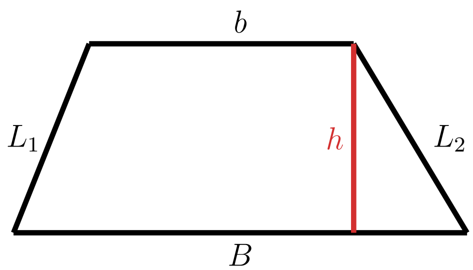
Perímetro: $p = L + L + L + L = 4 \cdot L$

Área: $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

D es la diagonal mayor (mayor longitud)

d es la diagonal menor (menor longitud)

Trapecio



Perímetro: $p = B + b + L_1 + L_2$

Área: $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

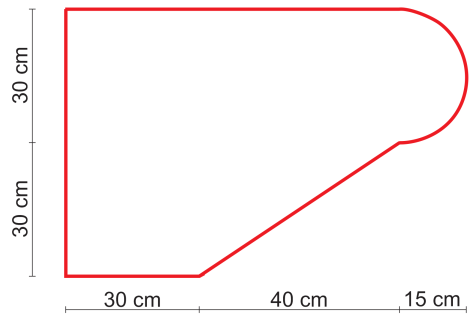
B es la base mayor (mayor longitud)

b es la base menor (menor longitud)

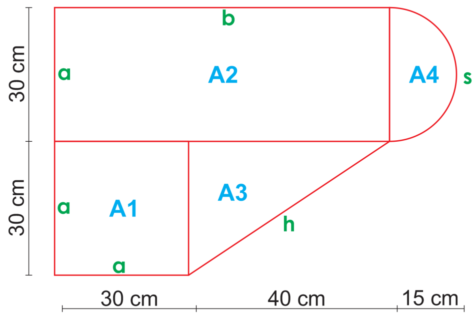
h es la altura de la figura

Importante: Observa que las áreas pueden ser obtenidas si descompones las figuras en triángulos y rectángulos y sumas sus áreas.

Ejemplo: Calcular el área y el perímetro de la siguiente figura:



Como se trata de una figura compuesta, debemos descomponerlo en figuras conocidas para poder determinar el área total:



El área total será: $A = A1 + A2 + A3 + A4$, donde:

$$A1 = 30cm \cdot 30cm = 900cm^2 \qquad A2 = 30cm \cdot 70cm = 2100cm^2$$

$$A3 = \frac{30cm \cdot 40cm}{2} = 600cm^2 \qquad A4 = \frac{\pi \cdot (15cm)^2}{2} = \frac{225}{2}\pi cm^2$$

El área total será:

$$A = 900cm^2 + 2100cm^2 + 600cm^2 + \frac{225}{2}\pi cm^2$$
$$A = 3600cm^2 + \frac{225}{2}\pi cm^2$$

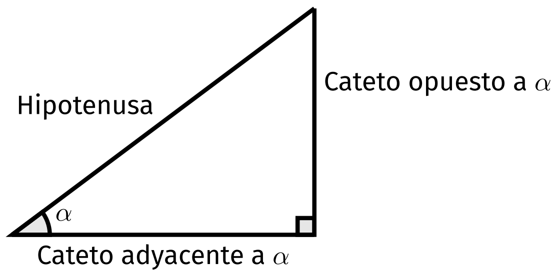
Para determinar el perímetro tenemos que sumar las longitudes de las líneas del contorno de la figura. En este caso queda de la siguiente manera:

$$P = a + a + b + s + h + a$$
$$P = a + a + b + \pi \cdot \frac{a}{2} + \sqrt{(b-a)^2 + a^2} + a$$
$$P = 30cm + 30cm + 70cm + \pi \cdot \frac{30cm}{2} + \sqrt{(70cm - 30cm)^2 + (30cm)^2} + 30cm$$
$$P = 160cm + 15\pi cm + \sqrt{2500cm^2}$$
$$P = 160cm + 15\pi cm + 50cm$$
$$P = 210cm + 15\pi cm$$

Trigonometría

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Como vimos en Geometría, un triángulo rectángulo es aquel que tiene 1 ángulo interior recto y los otros 2 son ángulos agudos. Al lado más largo del triángulo se le llama **hipotenusa** y a los otros dos lados se los llama **catetos** y son los que conforman el ángulo recto.
Observa el siguiente gráfico:



Si consideramos uno de los ángulos agudos, el **cateto adyacente** es aquel que forma parte del ángulo al cual se hace referencia y el **cateto opuesto** es el lado que no forma parte del ángulo que se toma como referencia y se encuentra enfrente de este.

Actividad 1:

1. Toma una hoja de papel y dibuja tres triángulos rectángulos cuyos catetos midan:
   Triángulo 1: 3 y 4 cm.
   Triángulo 2: 6 y 8 cm.
   Triángulo 3: 9 y 12 cm.
2. Marca en cada uno el ángulo agudo que se forma entre el cateto de menor longitud y la hipotenusa.
3. Superpone los tres triángulos haciendo coincidir los ángulos que acabas de marcar. ¿Qué observas?

Para los tres triángulos construídos las longitudes de sus los lados son diferentes, pero...¡los tres ángulos interiores coinciden! A los triángulos que tienen estas características se los llama **triángulos semejantes**.

De esto se dieron cuenta hace muchísimo tiempo los antiguos griegos y encontraron que al dividir la longitud del cateto opuesto a α y la hipotenusa en estos triángulos obtenían el mismo valor.

Actividad 2:

1. Calcula el valor de las respectivas hipotenusas de los tres triángulos que construiste, aplicando el Teorema de Pitágoras.
2. Para cada triángulo, divide la longitud del cateto opuesto en la longitud de la hipotenusa.
3. Verifica que siempre obtienes el número $\frac{4}{5}$.

Conclusión: Si el ángulo es el mismo, el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa es el mismo. A este cociente se lo llama sen α. Es decir:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Ya sabes cómo calcular el valor del **seno de un ángulo agudo** de un triángulo rectángulo.

Actividad 3:

1. Construye triángulos rectángulos de otras medidas.
2. Elige uno de sus ángulos agudos e identifica el cateto opuesto y la hipotenusa.
3. Calcula el valor del seno del ángulo elegido.

¿Y si ahora consideramos el cociente entre **cateto adyacente** y la **hipotenusa**? ¿Qué crees que pasará?

Actividad 4:

1. Para cada triángulo propuesto en la Actividad 1, divide la longitud del cateto adyacente en la longitud de la hipotenusa.
2. Verifica que siempre obtienes el número $\frac{3}{5}$.

Conclusión: Si el ángulo es el mismo, el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa es el mismo. A este cociente se lo llama cos α. Es decir:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Ya sabes cómo calcular el valor del **coseno de un ángulo agudo** de un triángulo rectángulo.

¿Y si ahora consideramos el cociente entre **cateto opuesto** y el **cateto adyacente**? ¿Qué crees que pasará?

Actividad 5:

1. Para cada triángulo propuesto en la Actividad 1, divide la longitud del cateto opuesto en la longitud del cateto adyacente.
2. Verifica que siempre obtienes el número $\frac{4}{3}$.

Conclusión: Si el ángulo es el mismo, el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente es el mismo. A este cociente se lo llama tan α. Es decir:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Ya sabes cómo calcular el valor de la **tangente de un ángulo agudo** de un triángulo rectángulo.

Ejercicio: Prueba que

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

De esta manera, si ya conoces los valores del sen α y del cos α puedes obtener fácilmente su tangente.

Razones trigonométricas recíprocas

En base a las funciones trigonométricas antes definidas, se pueden calcular sus recíprocas de la siguiente forma:

- La **cosecante** del ángulo es el cociente entre la hipotenusa y el cateto opuesto:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

- La **secante** del ángulo es el cociente entre la hipotenusa y el cateto adyacente:

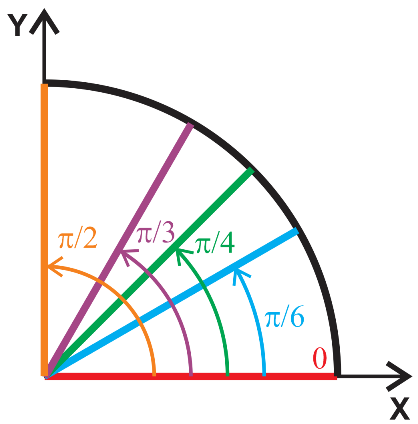
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

- La **cotangente** del ángulo es el cociente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Valores de las funciones trigonométricas en ángulos notables.

También se pueden determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos notables, los que se muestran a continuación:



$\theta(^\circ)$	0°	30°	45°	60°	90°
$\theta(rad)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No Existe
$\operatorname{cotg}\theta$	No Existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No Existe
$\operatorname{cosec}\theta$	No existe	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

Regla nemotécnica:

En principio podríamos aprender de memoria estos valores, pero probablemente con el tiempo los olvidemos. Por lo cual se puede utilizar una *regla práctica* para calcular los valores de las funciones seno y coseno de los ángulos notables del 1° cuadrante, y a partir de esos valores, calcular los valores de las restantes funciones trigonométricas.
¿En qué consiste ésta regla?
Numeramos los ángulos notables 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$, en ese orden, del 0 a 4. Luego aplicamos raíz a cada número, es decir: $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$, luego dividimos a cada uno en dos. Obtenemos así la fila de los senos.
Para obtener la fila de los cosenos no hace falta realizar ningún cálculo, simplemente colocamos la fila obtenida anteriormente pero en orden inverso.
Para un mejor entendimiento, se muestra la siguiente tabla:

θ (°)	0°	30°	45°	60°	90°
θ (radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Para calcular las demás funciones trigonométricas, se utilizan las relaciones entre las funciones de un mismo ángulo.

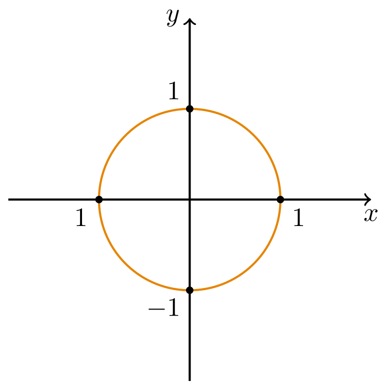
Ejemplo: Calcular las demás funciones trigonométricas para ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
\text{tg}\,\frac{\pi}{6} &= \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\text{cotg}\,\frac{\pi}{6} &= \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\
\sec\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\
\text{cosec}\,\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

Ejercicio: ¿Te animas a calcular las demás funciones trigonométricas para los ángulos $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$?

El círculo trigonométrico

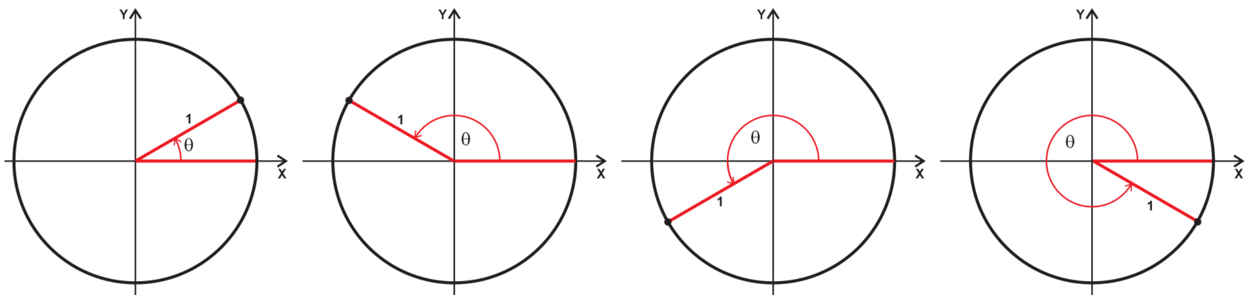
El **círculo trigonométrico**, también conocido como goniométrico, es aquel círculo cuyo centro coincide con el origen de coordenadas del plano cartesiano y cuyo radio mide la unidad. Dicho círculo se utiliza con el fin de poder estudiar fácilmente tanto los valores como el signo de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, mediante la representación de triángulos rectángulos auxiliares.



En este círculo trabajaremos con **ángulos dirigidos**, los cuales tienen las siguientes características:

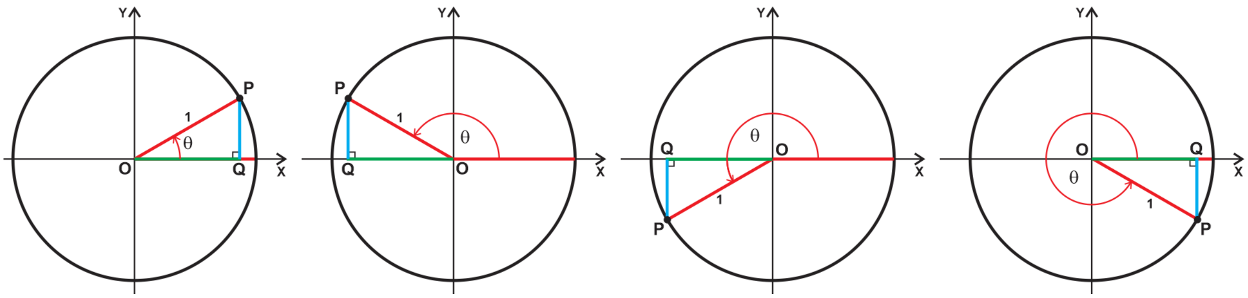
- Un lado inicial, semirrecta con el origen en el origen de coordenadas (0,0) y coincidente con el semieje positivo en x.
- Un lado terminal, semirrecta con origen en el origen de coordenadas y una inclinación dada.
- Una determinada amplitud.
- Un sentido: positivo si partimos del lado inicial y giramos en sentido antihorario hasta llegar al lado final y negativo si partimos del lado inicial y giramos en sentido horario hasta llegar al lado final.

Aquí vemos ejemplos de ángulos dirigidos en los 4 cuadrantes:



El lado terminal de un ángulo θ, intersecta en un punto P a la circunferencia del círculo trigonométrico y la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto P intersecta a dicho eje en el punto Q.

Las gráficas para ángulos θ en los 4 cuadrantes serán:



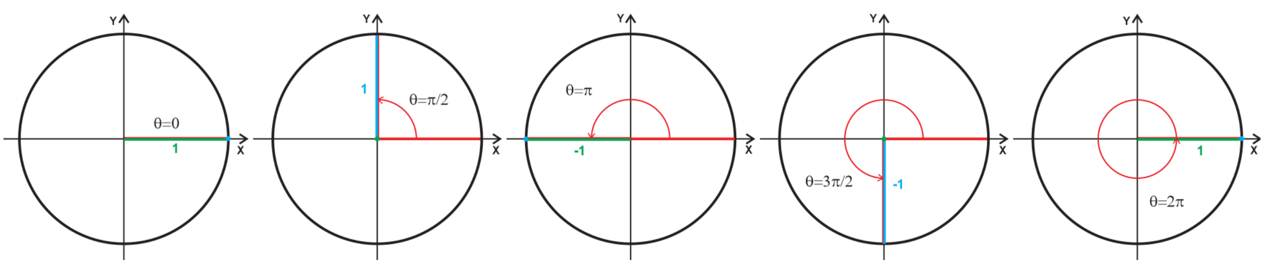
Calculando las funciones seno y coseno del ángulo θ y sabiendo que el segmento $OP = 1$:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ} \qquad\qquad \cos\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

De lo que se deduce que:

- El segmento PQ representa a la función seno del ángulo θ sin su signo. El signo queda determinado por la posición del segmento: positivo si está ubicado arriba del eje X y negativo se está ubicado abajo del eje X.
- El segmento OQ respresenta a la función coseno del ángulo θ sin su signo. El signo queda determinado por la posición del segmento: positivo si está ubicado a la derecha del eje Y y negativo se está ubicado a la izquierda del eje Y.

Sabiendo que el círculo trigonométrico tiene radio = 1, podemos determinar las funciones seno y coseno de los ángulos cuyos lados terminales coinciden con los semiejes de X y de Y:



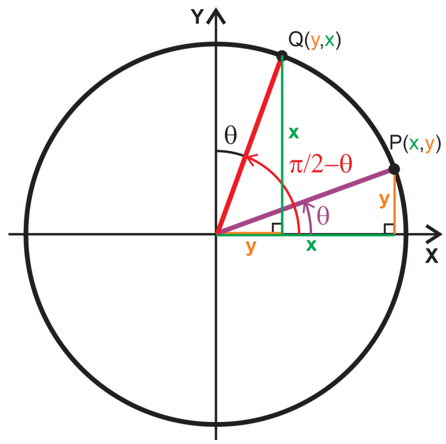
θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sen θ	0	1	0	-1	0
cos θ	1	0	-1	0	1
tg θ	0	No Existe	0	No Existe	0
cotg θ	No Existe	0	No Existe	0	No Existe
sec θ	1	No Existe	-1	No Existe	1
cosec θ	No Existe	1	No Existe	-1	No Existe

Relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas

El círculo trigonométrico es una herramienta de gran utilidad que puede ser empleado tanto para determinar el signo de las funciones trigonométricas de distintos ángulos, como ya se mostró previamente, como para encontrar fácilmente y rápidamente las relaciones entre las funciones de distintos ángulos.
A continuación se presentan ejemplos concretos en los que se utiliza el círculo trigonométrico para relacionar las funciones trigonométricas de ángulos agudos (del 1º cuadrante) con ángulos de otros cuadrantes.

Ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$

- Si sobre el círculo trigonométrico marcamos los ángulos θ y $\pi/2-\theta$:



Se puede observar que:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}\qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{x}{r}\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{y}{r}$$

Por lo que se deduce que:

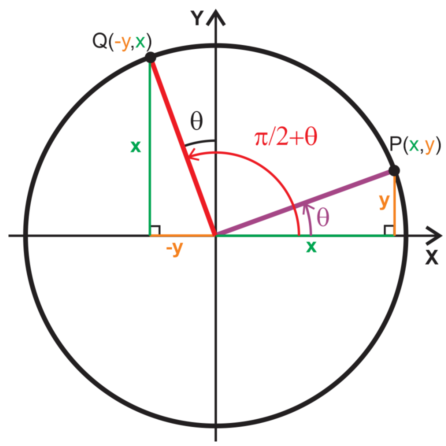
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta$$

- Si sobre el círculo trigonométrico marcamos los ángulos θ y $\pi/2+\theta$:
  Se puede observar que:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}\qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{x}{r}\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}$$

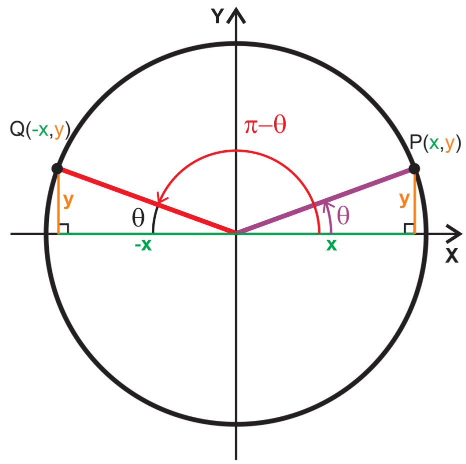
Por lo que se deduce que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{sen}\theta$$



Ángulos que difieren en π

- Si sobre el círculo trigonométrico marcamos los ángulos θ y $\pi-\theta$:



Se puede observar que:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}(\pi-\theta)=\frac{y}{r} \qquad \cos(\pi-\theta)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r}$$

Por lo que se deduce que:

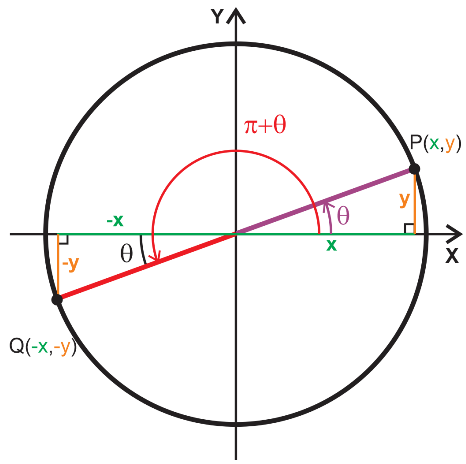
$$\operatorname{sen}(\pi-\theta)=\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

- Si sobre el círculo trigonométrico marcamos los ángulos θ y $\pi+\theta$:
Se puede observar que:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}(\pi+\theta)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r} \qquad \cos(\pi+\theta)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r}$$

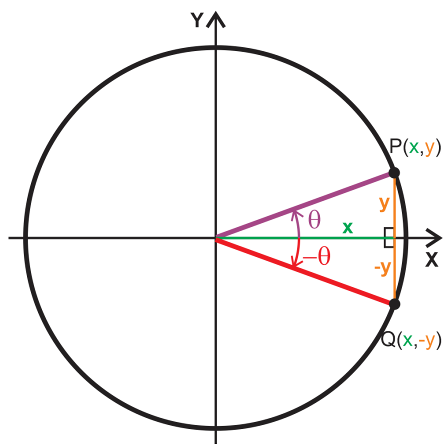
Por lo que se deduce que:

$$\operatorname{sen}(\pi+\theta)=-\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$



Ángulos opuestos

- Si sobre el círculo trigonométrico marcamos los ángulos θ y $-\theta$:



Se puede observar que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} \qquad \cos(-\theta) = \frac{x}{r}$$

Por lo que se deduce que:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

En conclusión:

- Las funciones trigonométricas de $k\pi - \theta$, $k\pi + \theta$ y $-\theta$ (k, número natural) coinciden con las de θ en valor absoluto, el signo lo determinamos con el círculo trigonométrico.
- Las funciones trigonométricas de $n\pi/2 - \theta$ y $n\pi/2 + \theta$ (n, número impar) coinciden con las cofunciones de θ en valor absoluto, el signo lo determinamos con el círculo trigonométrico.

Reducción de ángulos al primer cuadrante

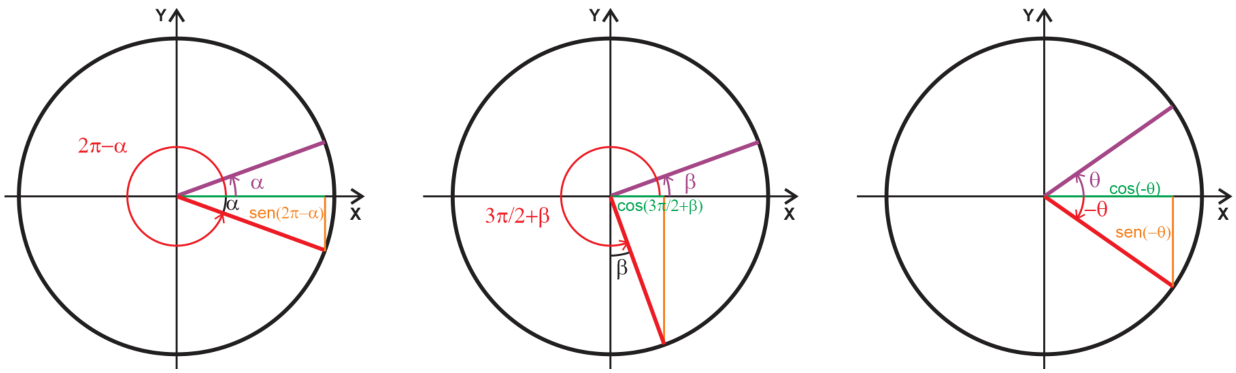
Podemos concluir que, para conocer las funciones trigonométricas de ángulos en todos los cuadrantes, basta con conocer los valores de las mismas en ángulos del Primer Cuadrante. Es decir, utilizando las relaciones antes vistas podemos conocer los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo. Este procedimiento se conoce como **reducción al primer cuadrante**.

Ejemplo: Reducir al primer cuadrante las siguientes funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) \qquad \operatorname{tg}(-\theta)$$

Como primera medida, ubicamos los ángulos en el círculo trigonométrico y observamos el signo que tiene la o las funciones trigonométricas que nos servirán para reducir las solicitadas. Recordemos que:

a) el segmento vertical representa a la función seno del ángulo sin su signo, el signo queda determinado por la posición del segmento: positivo si está ubicado arriba del eje X y negativo se está ubicado abajo del eje X.
b) el segmento horizontal representa a la función coseno del ángulo sin su signo, el signo queda determinado por la posición del segmento: positivo si está ubicado a la derecha del eje Y y negativo se está ubicado a la izquierda del eje Y.



Conocido el signo de la función y recordando que las funciones trigonométricas que difieren en un múltiplo de π ($k\pi$) coinciden con la misma función del ángulo y que las funciones trigonométricas que difieren en un múltiplo impar de $\pi/2$ ($n\pi/2$) es la cofunción del ángulo, nos queda de la siguiente manera:

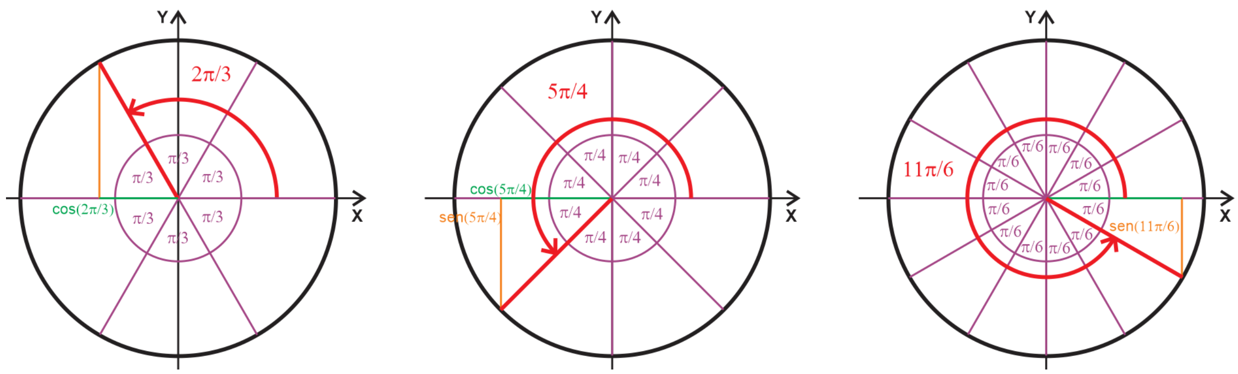
$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = +\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}(\theta)}{+\cos(\theta)} = -\operatorname{tg}\theta$$

Ejercicio: Te animas a reducir las siguientes funciones trigonométricas?

$$\operatorname{sen}(3\pi - \alpha) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \qquad \sec(-\alpha)$$

Ejemplo: Calcular las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos notables:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$



Como primera medida, dividimos a los ángulos llanos del círculo trigonométrico en 3, 4 y 6 partes respectivamente y luego ubicamos los ángulos, observando el signo que tiene la o las funciones trigonométricas que nos servirán para reducir las solicitadas:

Observamos que a los ángulos los podemos expresar de la siguiente manera:

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} \qquad \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \qquad \frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y conociendo el signo de la función, podemos calcular lo solicitado:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}(\pi + \frac{\pi}{4})$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi + \frac{\pi}{4})}{\cos(\pi + \frac{\pi}{4})}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{cosec}(2\pi - \frac{\pi}{6})$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\pi - \frac{\pi}{6})}$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}}$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -2$$

Ejercicio: Te animas a calcular las siguientes funciones trigonométricas?

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \qquad \sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones que involucran funciones trigonométricas y que es verdadera para todos los valores del ángulo en los que están definidas.

Identidad trigonométrica fundamental

A partir del Teorema de Pitágoras podemos derivar la identidad fundamental que relaciona seno y coseno de un mismo ángulo.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

donde $\operatorname{sen}^2\alpha$ indica el cuadrado de $\operatorname{sen}\alpha$, es decir $\operatorname{sen}^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)^2$.
De la misma forma, $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$.

Esta igualdad se llama **Identidad trigonométrica fundamental** porque de ella se deducen muchas otras identidades.
Para demostrar la identidad trigonométrica fundamental basta con aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &= \left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)^2 + \left(\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}\right)^2 \\ &= \frac{(\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2}{\text{hipotenusa}^2} \\ &= \frac{\text{hipotenusa}^2}{\text{hipotenusa}^2} = 1\end{aligned}$$

Esta identidad es válida para todo ángulo. Por ejemplo, es válida para $\alpha = \pi$:

$$\operatorname{sen}^2\pi + \cos^2\pi = 0^2 + 1^2 = 1$$

Ejemplos de identidades trigonométricas

Veamos algunos ejemplos:

1. $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$
2. $\tan\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sec\alpha$
3. $\tan\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$

Se pueden utilizar diferentes estrategias para demostrar que una expresión es una identidad, como por ejemplo:

- Una forma es trabajar con un miembro de la igualdad (generalmente el que es más complicado) y llegar a la expresión del otro miembro.
- Otra forma es trabajar separadamente cada miembro hasta llegar con cada uno a la misma expresión.

Veamos la demostración de la identidad del primer ejemplo. Las otras quedan propuestas como ejercicios.

Demostración:

Vamos a probar que $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ para cualquier ángulo α.
Trabajamos el primer miembro:

$$\sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

El segundo miembro resulta:

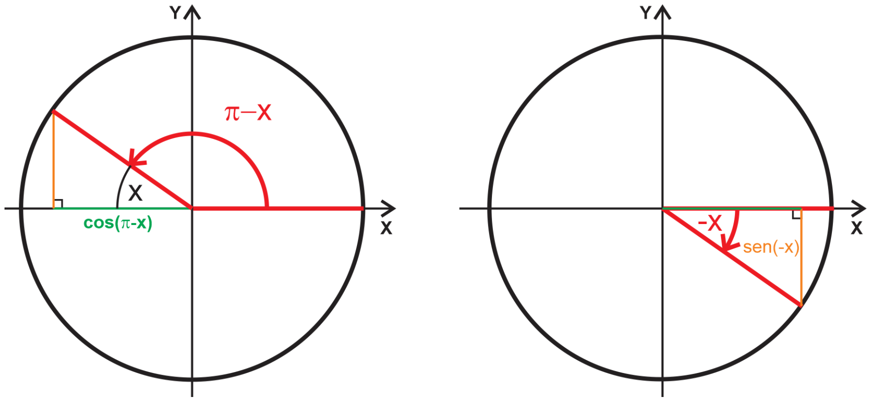
$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Hemos probado entonces la igualdad, ya que hemos arribado al mismo resultado al trabajar el primero y el segundo miembro.

Ejemplo: Verifica la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}-\frac{\cos(\pi-x)}{1+\operatorname{sen}(-x)}=2\sec x$$

Trabajamos con el primer miembro reduciendo a ángulos del primer cuadrante y llegaremos a la expresión del segundo miembro:



$$\begin{aligned}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}-\frac{\cos(\pi-x)}{1+\operatorname{sen}(-x)}&=\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}-\frac{-\cos x}{1+(-\operatorname{sen} x)}=\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\\&=\frac{(1-\operatorname{sen} x)^2+\cos^2 x}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x)}=\frac{(1-2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x)+\cos^2 x}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x)}\\&=\frac{1-2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x)}=\frac{1-2\operatorname{sen} x+1}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x)}=\frac{2-2\operatorname{sen} x}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x)}\\&=\frac{2(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}\\&=2\sec x\end{aligned}$$

Hemos verificado la identidad.
Ejercicio: ¿Te animas a verificar la siguiente identidad trigonométrica?

$$\frac{1-2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x$$

Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas son aquellas ecuaciones cuyas incógnitas son ángulos que forman parte del argumento de una o varias funciones trigonométricas.
Para resolver una ecuación trigonométrica es conveniente expresar todos los términos de la ecuación con el mismo ángulo y después reducirlo a una función trigonométrica, o bien, factorizar la ecuación si es posible.
Suele usarse para la incógnita la letra x pero, al tratarse de un ángulo, también pueden usarse letras griegas.
Vamos a mostrar ejemplos.

Ejemplo 1:

$$\text{sen}\, x = 0$$

Sabemos que para el ángulo igual a 0, el seno resulta igual a 0. Por lo tanto este es un valor para el cual la igualdad anterior se verifica.
También sabemos que para el ángulo igual a π, el seno también resulta igual a 0. Por lo tanto este es otro valor para el cual la igualdad anterior se verifica.
Pero no son los únicos. Por ejemplo, sen 2π también es igual a cero 0. Y con 3π ocurre lo mismo.
La solución a esta sencilla ecuación trigonométrica no es única. Todos los ángulos de la forma $k\pi$, con k un número entero, es una solución de la ecuación planteada.
Si ahora pensamos que sólo nos interesa encontrar solución a la ecuación planteada para ángulos de menos de un giro, es decir, para $0 \leq x < 2\pi$, entonces la ecuación tiene sólo 2 soluciones y son $x = 0$ y $x = \pi$.

Así, el conjunto solución de esta ecuación trigonométrica es:

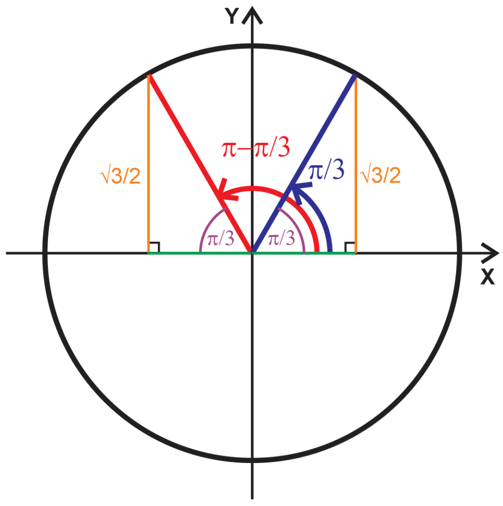
$$CS = \{0, \pi\}$$

Importante: Debes resolver la ecuación trigonométrica y tomar las soluciones según la condición establecida para el ángulo.

Ejemplo 2:

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{sabiendo que} \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Para resolver tenemos que encontrar los ángulos entre 0 y 2π cuyo seno es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Para ello usamos el círculo trigonométrico:



Los ángulos son 2:

$$\frac{\pi}{3} \qquad y \qquad \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Entonces planteamos que:

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi-3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi-3\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$$

Así, el conjunto solución de esta ecuación trigonométrica es:

$$CS=\left\{\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right\}$$

Ejemplo 3:

$$\cos^2 x-3\operatorname{sen}^2 x=0 \quad \text{sabiendo que} \quad 0\leq x<2\pi$$

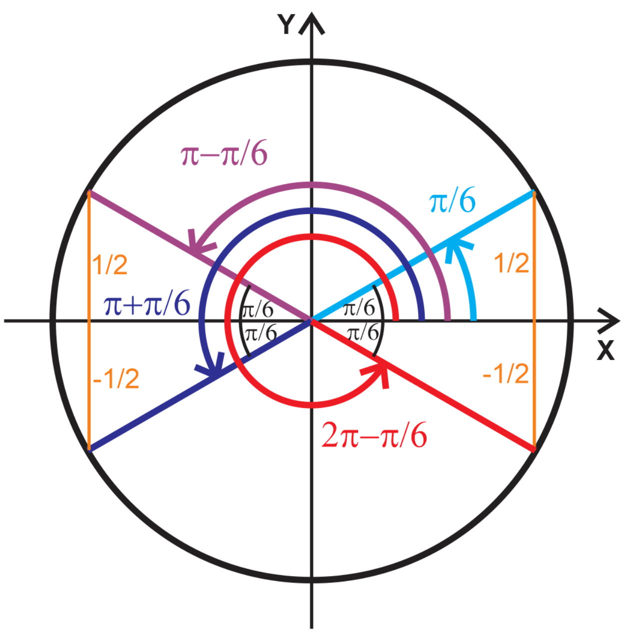
Observa que en esta ecuación la incógnita está en dos funciones trigonométricas. Una estrategia que debes aplicar en casos como éstos es expresar la ecuación en términos de una sola función trigonométrica. En este ejemplo usaremos la identidad trigonométrica fundamental y escribiremos:

$$\cos^2 x-3\operatorname{sen}^2 x=0\Rightarrow(1-\operatorname{sen}^2 x)-3\operatorname{sen}^2 x=0$$

$$1-4\operatorname{sen}^2 x=0\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen} x=\pm\frac{1}{2}$$

Ahora tenemos que encontrar los ángulos entre 0 y 2π cuyo seno es igual a $+\frac{1}{2}$ o a $-\frac{1}{2}$. Para ello usamos el círculo trigonométrico:



En este caso los ángulos son 4:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\pi}{6} \\
x_2 &= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \\
x_3 &= \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \\
x_4 &= 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}
\end{aligned}
$$

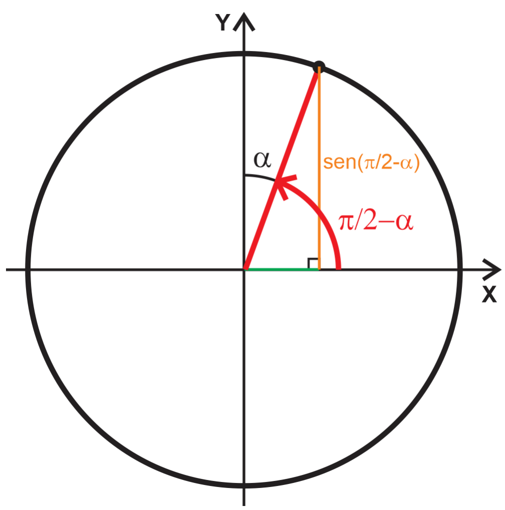
Así, el conjunto solución de esta ecuación trigonométrica es:

$$CS = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

Ejemplo 4:

$$1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\operatorname{sen}^2\alpha \quad \text{sabiendo que} \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

En este caso donde los ángulos son distintos, debemos reducir las funciones al primer cuadrante usando el círculo trigonométrico:



por lo que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cos\alpha$$

la ecuación queda:

$$1 + \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

En esta ecuación la incógnita está en dos funciones trigonométricas. Debemos expresar la ecuación en términos de una sola función trigonométrica, por lo que usaremos la identidad trigonométrica fundamental y escribiremos:

$$1 + \cos\alpha = 2(1 - \cos^2\alpha) \Rightarrow 1 + \cos\alpha = 2 - 2\cos^2\alpha$$

$$1 + \cos\alpha - 2 + 2\cos^2\alpha = 0 \Rightarrow 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$$

Realizando un cambio de variable:

$$u = \cos\alpha$$

Nos queda una ecuación cuadrática de variable u:

$$2u^2 + u - 1 = 0$$

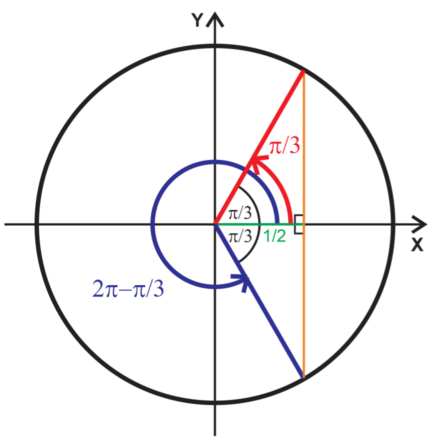
La resolvemos utilizando la fórmula de Bhaskara:

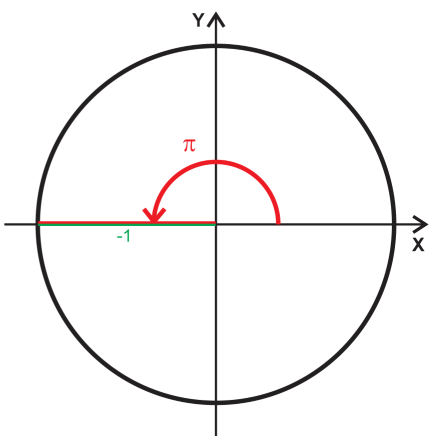
$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$u_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad y \qquad u_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Cómo $u = \cos\alpha$, obtenemos que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $\cos\alpha = -1$ verifican la ecuación.

Ahora tenemos que encontrar los ángulos entre 0 y 2π cuyo coseno es igual a $+\frac{1}{2}$ o a -1. Para ello usamos nuevamente el círculo trigonométrico:





En este caso los ángulos son 3:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$$
$$\alpha_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$
$$\alpha_3 = \pi$$

Así, el conjunto solución de esta ecuación trigonométrica es:

$$CS = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi\right\}$$

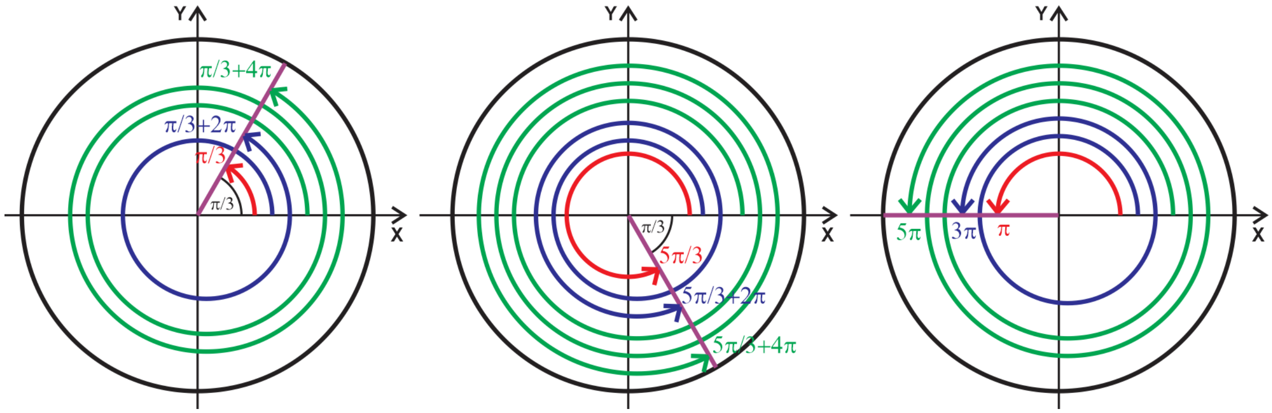
Ejemplo 5:

$$1 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\,\text{sen}^2\,\alpha \quad \text{sabiendo que} \quad \alpha \in R$$

En el ejemplo anterior se obtuvo el conjunto solución de ángulos de la primera vuelta ($0 \leq \alpha < 2\pi$) que verifican la ecuación.
En este ejemplo los ángulos ($\alpha \in R$) que cumplen la ecuación son los que se obtienen al sumar las vueltas completas (2π) consecutivas a las tres soluciones halladas, es decir:

$$CS = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right\} \quad \text{, con} \quad k \in Z$$

Veamos gráficamente algunas de las soluciones: para $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$



En conclusión:
Para resolver una ecuación trigonométrica puedes proceder de la siguiente manera:

1. Reducir las funciones al 1° cuadrante.
2. Expresar la ecuación en términos de una única función trigonométrica.
3. Hallar los valores de la función trigonométrica que verifican la ecuación obtenida.
4. Tener en cuenta sólo las soluciones que pertenezcan al rango indicado en el enunciado.