Seminarios del Doctorado en Ciencias Exactas e Ingeniería 2022

Título de Tesis: El espacio de estructuras de álgebras de Lie

Tesista: Fernández Estela Fátima

Director: Tirao Paulo Andrés

Resumen

Los grupos de Lie y las álgebras de Lie son indispensables en grandes áreas tanto de matemática, en geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales, los grupos cuánticos y la teoría de códigos, como en física teórica, en teoría de campos, relatividad y teoría de campos conformes. También aparecen nuevas aplicaciones a la computación. Después de más de 100 años, su teoría es un ejemplo de claridad y profundidad, afirma Andrei Okinkov de la Universidad de Columbia, EE UU, ganador de la Medalla Fields en 2006. La teoría de Lie fue iniciada a finales de 1800 por Sophus Lie, Felix Klein, Friedrich Engel, Wilhelm Killing y ya en sus inicios contó el aporte de enormes matemáticos como Henri Poincaré, Hermann Weyl y Élie Cartan. Desde entonces su desarrollo fue sostenido y su importancia se incrementó hasta ocupar hoy un lugar central. Los investigadores en teoría de Lie continúan completando la teoría, resolviendo los problemas aún abiertos y trabajando en nuevas direcciones, generalizaciones y aplicaciones muy prometedoras para el futuro del área. Un problema muy relevante, difícil y poco probable de resolver próximamente es el de entender el espacio de todas las álgebras de Lie de una dimensión dada (la variedad algebraica de corchetes de Lie).

El objetivo concreto es contribuir por un lado a la construcción de deformaciones no triviales de algunas clases de álgebras de Lie y por otro construir o exhibir álgebras de Lie rígidas (sin deformaciones). Ya tenemos cierta experiencia con la construcción de deformaciones lineales y el alcance de éstas.

Un papel importante en este trabajo es la teoría de la representación, que no es otra cosa que el estudio de las formas en que un grupo dado puede actuar en espacios vectoriales.

La teoría de representaciones es un término que comprende algunos temas del álgebra y del análisis matemático cuya característica común es la descripción de simetría en espacios vectoriales. Un juego de matrices cuadradas n × n, por ejemplo, actúa directamente como transformaciones lineales sobre un espacio vectorial de dimensión n no necesita ser representada de otra forma y a través de vectores propios, si la matriz es diagonalizable, se puede reconstruir todo el espacio. Sin embargo, diversas otras estructuras algebraicas – en principio más abstractas – como grupos finitos o álgebras de Lie, por ejemplo, pueden actuar indirectamente sobre espacios vectoriales. En este segundo caso, se trata de asociar a cada elemento abstracto una matriz (o una aplicación lineal), conservando las leyes de suma o corchete (conmutador), sobre un espacio vectorial apropiado, esto es :
Para un álgebra de Lie g y un espacio vectorial una representación de g en V es un homomorfismo de g en □□(V).

La tarea de la teoría de representaciones es deducir propiedades esenciales de la estructura original a partir de las matrices que la representan o del espacio donde actúan. Por lo que podemos considerarla una generalización.

Una clase muy distinguida de álgebras de Lie son las semisimple para la cual su teorìa de estructura y representaciòn está totalmente desarrollada y es un hito del álgebra. Toda representación de una semisimple se descompone como suma directa de representaciones irreducibles(como la factorización en primos). Las representaciones irreducibles están parametrizadas por su peso máximo.

En nuestro trabajo estudiamos una generalización, de un ejemplo novedoso, de un álgebra de Lie g de dimensión n(n+1) junto con una posible deformación utilizando la representación de □□(n), que para n=2,3 ya lo probamos y es lo que presentaré.