Seminarios del Doctorado en Ciencias Exactas e Ingeniería 2022

Título de Tesis: Co-homología de álgebras de Lie.

Tesista: Mamaní, Pedro Ariel.

Director: Tirao, Paulo Andrés.

Resumen

Co-homología de álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes libre

En el artículo *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. of Math. 74 (1961), 329-387, Kostant calculó la cohomología de las álgebras de Lie que aparecen como radicales nilpotentes de subálgebras parabólicas en álgebras de Lie semisimples. Por lo tanto, es deseable obtener información de la (co)homología para el caso no Kostant.

El problema para el caso de álgebras de Lie 2 pasos nilpotentes libre fue resuelto por Sigg en el artículo *Laplacian and homology of free 2-step nilpotent Lie algebras,* J. of Algebras 185(1996),144-161, aunque la misma descripción puede deducirse del articulo ya mencionado de Kostant. Nuestro objetivo es aportar resultados para el caso de álgebras de Lie 3 pasos nilpotentes libres.

Un algebra de Lie compleja 3-pasos nilpotente libre de rango r es

$$g = V \oplus \Lambda^2 V \oplus W,$$

donde V es un $\mathbb{C}$ −espacio vectorial de dimensión r y W es la base de Hall a r generadores. El corchete de Lie está definido por: si a y b están en V, $[a, b]$ está en $\Lambda^2 V$, si a está en V y b está en $\Lambda^2 V$ entonces $[a, b]$ está en W y 0 en cualquier otro caso. Cada algebra de Lie tiene asociado un complejo de cadenas

$$\dots \Lambda^n g \xrightarrow{d_n} \Lambda^{n-1} g \xrightarrow{d_{n-1}} \dots . \xrightarrow{d_4} \Lambda^3 g \xrightarrow{d_3} \Lambda^2 g \xrightarrow{d_2} g \xrightarrow{d_1} \mathbb{C}$$

Donde

$$d_n(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_i} \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \wedge \dots \wedge x_n.$$

Definiendo $Z_n(g) = Ker\ d_n$, $B_{n-1}(g) = Im\ d_{n+1}$ y finalmente, definimos el n-ésimo espacio de homología de g como:

$$H_n(g) = \frac{Z_n(g)}{B_n(g)}$$

La cohomología es el caso dual de la homología.

En el libro *Free Lie algebras-Christophe Reutenauer, l*o primero que hicimos fue entender la estructura de álgebras de lie libres, después estudiamos el caso particular libres n- pasos nilpotentes.

Utilizando la definición de d_n antes descripta realizamos el cálculo a mano de los diferentes espacios de homología, cabe destacar que para el ejemplo particular donde la dimensión del espacio V es 3, el álgebra de Lie g tiene dimensión 14, así los respectivos espacios $\Lambda^n g$ tienen dimensiones muy grandes como 3432 para el caso $n = 7$ y 3002 para el caso $n = 6$ entre otros. Para poder simplificar los cálculos nuestro siguiente paso fue aprender la teoría de representaciones para álgebras de Lie semisimples basados en el libro *Representation Theory-Fulton Harris.* La principal herramienta que obtuvimos aquí fue la de espacios pesos, vectores pesos y diagramas de Young. Cada espacio irreducible esta generado por un vector peso máximo que a su vez tiene asociado un diagrama de Young, esto nos permite calcular los diferentes espacios $\Lambda^n g$ por medio de construcciones geométricas bastantes simples siguiendo la regla de *Littlewood- Richardson.* Además, por medio de estas herramientas el cálculo de las funciones d_n se simplifico de forma notable. Sin embargo, a pesar de simplificar nuestras cuentas el número de estas es todavía muy alto, aún para dimensiones bajas. Destacamos que los resultados obtenidos por ambos caminos fueron iguales.

Nuestro siguiente paso es aplicar la sucesión espectral de Hochshild-Serre. Para un álgebra de Lie g y un g-módulo V la sucesión espectral sirve para calcular la (co)homología de g con coeficientes en V y se construye a partir de un ideal h de g. Si $\dim g < \infty$, la sucesión espectral converge, esto es, calcula eventualmente $H_i(g, V)$ para todo i. El teorema de Hochshild-Serre establece que el segundo nivel de la sucesión espectral que construye es

$$E_{p,q}^2 = H_p(g/h, H_q(h, V))$$

Así, el cálculo de $H(g, V)$ se expresa en términos de las homologías del ideal h y del cociente g/h. En nuestro caso particular, en primera instancia tomamos $V = \mathbb{C}$, $g = V \oplus \Lambda^2 V \oplus W$ y el ideal $h = W$, por lo tanto, el cociente
$g/h \cong V \oplus \Lambda^2 V$ es el álgebra de Lie 2- pasos nilpotente libre. Nuestro siguiente paso es usar los artículos de Sigg y el artículo *The adjoint homology of a family 2-step nilradicals.* J of Algebra de Alejandra Alvarez y Paulo Tirao, para poder realizar cálculos a mano y en el programa Maple 18 y así poder generalizar resultados.

Tenemos indicios que nos hacen pensar que los resultados obtenidos son favorables, sin embargo, todavía nos falta encontrar algún resultado general.